ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
2014, том 57, №11-12

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

С.З.Курбаншоев, М.А.Нусайриев[*]

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Российско-Таджикский (Славянский) университет,
[*]Таджикский технический университет им.академика М.Осими

(Представлено академиком АН Республики Таджикистан Н.Раджабовым 24.02.2014 г.)

Построены интегральные многообразия решений системы нелинейных дифференциальных уравнений с аналитической правой частью, примыкающих к нулевому решению при $t\to\pm\infty$. Указаны области сходимости степенных рядов, определяющие полученные интегральные многообразия и найден радиус их сходимости.

Ключевые слова: *интегральные многообразия – оптимальные интегральные многообразия.*

Рассматривается система дифференциальных уравнений (СДУ)

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + \mu\Phi(t,X,Y),\ \frac{dY}{dt} = B(t)Y + \mu\Psi(t,X,Y), \tag{1}$$

где $A(t),\ B(t)$ – суммируемые линейные операторы в нормированных пространствах $\mathbb{B}_1,\ \mathbb{B}_2;\ \mu$ – вещественный параметр. Через $\|X\|,\ \|Y\|$ обозначены нормы элементов X,Y в пространствах B_1,B_2 соответственно. Предположим, что вектор-функции $\Phi(t,X,Y),\Psi(t,X,Y)$ определены в области D

$$\|X\| \equiv \max_{1\le k\le p}|x_k| \le \rho, \|Y\| \equiv \max_{1\le s\le q}|y_s| \le \rho,\quad -\infty < t < \infty,$$

$$|\mu| < \mu^*\ (\mu^* > 0), (\rho > 0), \tag{2}$$

непрерывны по t и голоморфны в области D относительно проекций векторов X,Y и параметра $\mu.$ При этом их разложение в ряды по степеням $\mu; x_1,...,x_p;\ y_1,...,y_q, (p+q=m)$ начинается с членов не ниже второго порядка.

Полагаем, что вектор-функции $\Phi(t,X,Y),\Psi(t,X,Y)$ удовлетворяют условиям

$$\Phi(t,0,0) \equiv 0, \Psi(t,0,0) \equiv 0,$$

$$\|\Phi(t,X_1,Y_1) - \Phi(t,X_2,Y_2)\| \le L(\|X_1 - X_2\| + \|Y_1 - Y_2\|),$$

$$\|\psi(t,X_1,Y_1) - \psi(t,X_2,Y_2)\| \le L(\|X_1 - X_2\| + \|Y_1 - Y_2\|). \tag{3}$$

Адрес для корреспонденции: *Курбаншоев Сафарали Завкибекович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Мирзо Турсунзаде,30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: ksz_48@hotmail.com*

При $\mu = 0$ СДУ (1) распадается на две независимых линейных СДУ в пространствах $B_1 B_2$, то есть

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \quad \frac{dY}{dt} = B(t)Y, \quad X \in B_1, \ \ Y \in B_2. \tag{4}$$

Полагаем,что разрешающий оператор $M(t,\tau)$ первого уравнения (4) удовлетворяет условию

$$\| M(t,\tau) \| \le ce^{\lambda(t-\tau)}, \quad c \ge 1, \lambda > 0, \quad -\infty < t \le \tau < \infty, \tag{5}$$

а разрешающий оператор $N(t,\tau)$ второго уравнения (4) удовлетворяет условию

$$\| N(t,\tau) \| \le ce^{-\lambda(t-\tau)}, \ -\infty < \tau \le t < +\infty. \tag{6}$$

При $\mu = 0$ СДУ (1) имеет интегральное многообразие (ИМ) G_1^0 решений, определяемых уравнением $X = 0.$ На ИМ G_1^0 все решения СДУ (1) примыкают к нулевому решению при $t \to +\infty.$

Аналогично, при $\mu = 0$ СДУ (1) имеет ИМ G_2^0 решений, определяемых уравнением $Y = 0.$

Пусть $\mu \ne 0.$ Покажем, что при достаточно малых значениях $|\mu| < \mu^*$ у СДУ (1) существует голоморфное ИМ G_1 решений, равномерно экспоненциально стремящихся к нулевому решению при $t \to +\infty,$ и голоморфное ИМ G_2 решений, которое равномерно экспоненциально стремится к нулевому решению при $t \to -\infty.$

Укажем способ построения ИМ $[2]$ $G_1, G_2,$ которые будем называть оптимальными. В связи с тем, что интегральные многообразия $G_1, G_2,$ играют роль в теории оптимального управления [1], будем их называть оптимальными интегральными многообразиями. Для отыскания ИМ G_1, G_2 используем нелинейный оператор Грина $[1],$ который определяется как ограниченное на всей оси t решение СДУ

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + \mu\Phi(t,X,Y) + X_0 \cdot \delta(t-\tau), \tag{7}$$

$$\frac{dY}{dt} = B(t)Y + \mu\psi(t,X,Y) + Y_0 \cdot \delta(t-\tau),$$

где $\delta(t)$ – дельта-функции Дирака. Для построения ограниченного на всей оси t решения СДУ (7) используем матрицу Грина $[3]$.

Введём обозначения

$$\Gamma_1(t,\tau) = -M(t,\tau) \ \ (t > \tau); \ \ \Gamma_1(t,\tau) = 0 \ \ (t < \tau),$$

$$\Gamma_2(t,\tau) = 0 \ \ (t > \tau); \ \ \Gamma_2(t,\tau) = N(t,\tau) \ \ (t < \tau).$$

Обозначая ограниченное на всей оси t решение СДУ (1) через

$$X = H_1(t,\tau,X_0,Y_0,\mu),\quad Y = H_2(t,\tau,X_0,Y_0,\mu),$$

приходим к системе интегральных уравнений для H_1, H_2

$$H_1(t,\tau,X_0,Y_0,\mu) = \Gamma_1(t,\tau)X_0 - \mu\int_t^{\infty} M(t,s)\Phi(s,H(s,\tau,X_0,Y_0,\mu),$$

$$H_2(s,\tau,X_0,Y_0,\mu))ds,$$

$$H_2(t,\tau,X_0,Y_0,\mu) = \Gamma_2(t,\tau)Y_0 + \int_{-\infty}^{t} N(t,s)\psi(s,H_1(s,\tau,X_0,Y_0,\mu),$$

$$H_2(s,\tau,X_0,Y_0,\mu))ds. \tag{8}$$

Для решения системы нелинейных интегральных уравнений (8) применим метод последовательных приближений в нормированном пространстве $\mathbb{B}^0$ $(\mathbb{B}^0 = \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2)$ с нормой

$$\| H(t,\tau,X,Y,\mu)\| = \sup_{t,\tau} \| H(t,\tau,X,Y,\mu)\|,$$

где введены обозначения

$$H(t,\tau,X_0,Y_0,\mu) = \begin{pmatrix} H_1(t,\tau,X_0,Y_0,\mu) \\ H_2(t,\tau,X_0,Y_0,\mu) \end{pmatrix},$$

$$\| H(t,\tau,X_0,Y_0,\mu)\| = \max\{\| H_1(t,\tau,X_0,Y_0,\mu)\|, \| H_2(t,\tau,X_0,Y_0,\mu)\|\}.$$

Получена следующая

Теорема 1. *Пусть для СДУ* (1) *выполнены условия* (3), (5), (6). *Тогда при* $|\mu| < \mu_0$, *где*

$$\mu_0 = \min\left\{\frac{\lambda}{CL}, \mu^*\right\},$$

существует нелинейный оператор Грина $H(t,\tau,X,Y,\mu)$, *определяемый ограниченным на всей оси* t *решением системы нелинейных интегральных уравнений* (8).

Нелинейный оператор Грина $H(t,\tau,X,Y,\mu)$ *является разрывным при* $t=\tau$ *и ограниченным при всех* t,τ *решением СДУ*

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = A(t)H_1 + \mu\Phi(t,H_1,H_2,\mu) + X_0\delta(t-\tau),$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} = B(t)H_2 + \mu\psi(t,H_1,H_2,\mu) + Y_0\delta(t-\tau),$$

удовлетворяющих системе интегральных уравнений (8).

Теорема 2. *Пусть для СДУ* (1) *выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда при* $|\mu| < \mu_\varepsilon$, *где*

$$\mu_\varepsilon = \min\left\{\frac{\lambda - \varepsilon}{CL}, \mu^*\right\},$$

в области D_1

$$\| X \| < \rho(1+c)^{-1}, \ \| Y \| < \rho(1+c)^{-1}, \ -\infty < t < \infty$$

существует нелинейный оператор Грина $H(t,\tau, X, Y, \mu)$, *удовлетворяющий при* $0 \le \varepsilon \le 1$ *условию*

$$\| H(t,\tau, X, Y\mu) \| \le \frac{c(\lambda - \varepsilon)}{\lambda - \varepsilon - |\mu| cL} e^{-\varepsilon|t-\tau|} \max\{\| X \|, \| Y \|\}$$

и являющийся голоморфным от μ *и проекций векторов* X, Y *в этой области.*

При доказательстве теоремы 2 было введено нормированное пространство $\mathbb{B}^0$ с нормой, определённой по формуле

$$\| H(t,\tau, X_0, Y_0, \mu) \|_\varepsilon = \sup_{t,\tau} \| H(t,\tau, X_0, Y_0, \mu) e^{\varepsilon|t-\tau|} \|.$$

Поскольку при $t \ne \tau$ решения системы уравнений (7) совпадают с решением СДУ (1), то из теоремы 2 следует, что ИМ G_1 определяется уравнениями

$$X = H_1(t,\tau, X_0, Y_0, \mu), \ Y = H_2(t,\tau, X_0, Y_0, \mu), \quad (t > \tau). \tag{9}$$

ИМ G_2 определяется уравнениями

$$X = H_1(t,\tau, X_0, Y_0, \mu), \ Y = H_2(t,\tau, X_0, Y_0, \mu), \quad (t < \tau). \tag{10}$$

В формулах (9), (10) векторы X_0, Y_0 - произвольные, изменяя X_0, Y_0 будем получать различные интегральные кривые, принадлежащие ИМ G_1, G_2 соответственно.

Предельный переход при $\tau \to t \pm 0$ приводит к системе $m-g$ уравнений $Y = H_2(t, t-0, X, Y, \mu)$, определяющей ИМ G_1 и к системе g уравнений $X = H_1(t, t+0, -X, -Y, \mu)$, определяющей ИМ G_2.

Замечание. Для автономной СДУ

$$\frac{dX}{dt} = AX + \mu\Phi(X, Y, \mu), \quad \frac{dY}{dt} = BY + \mu\Psi(X, Y, \mu),$$

где спектр матрицы A лежит в правой полуплоскости $Rez > 0$, а спектр матрицы B лежит в левой полуплоскости $Rez < 0$, теорема 2 даёт достаточные условия многообразия интегральных кривых, входящих в начало координат $X = 0, Y = 0$.

Теорема 3. *Пусть правые части СДУ (1) голоморфны по проекциям векторов* X, Y *в области* D_2 *и удовлетворяют в этой области при комплексных значениях* X, Y *условиям ограниченности*

$$\|\Phi(t, X, Y,)\| \le K,\ \|\Psi(t, X, Y,)\| \le K,\ (K > 0).$$

При этом уравнения оптимальных ИМ G_1, G_2 *можно представить в виде*

$$Y = \mu h(t, X, \mu),\ X = \mu g(t, Y, \mu),$$

где вектор-функции $h(t, X, \mu)$, $g(t, Y, \mu)$ *будут голоморфны по* X, Y *в некоторой области* D_2

$$\| X \| < \rho_1,\ \| Y \| < \rho_1,\ -\infty < t < \infty\ (0 < \rho_1 < \rho)$$

и ограничены в этой области. Поэтому уравнения ИМ находятся в виде степенных рядов по степеням параметра μ

$$Y = \mu h_1(t, X) + \mu^2 h_2(t, X) + \ldots + \mu^n h_n(t, X) + \ldots,$$

$$X = \mu g_1(t, Y) + \mu^2 g_2(t, Y) + \ldots + \mu^n g_n(t, Y) + \ldots.$$

Поступило 25.02.2014 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Валеев К.Г., Финин Г.С. Построение функций Ляпунова. – Киев: Наукова думка, 1981, 412 с.
2. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973, 512 с.
3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970, 534 с.

С.З.Қурбоншоев, М.А.Нусайриев*

СОХТАНИ ИНТЕГРАЛҲОИ ОПТИМАЛИИ БИСЁРТАСВИРҲО БАРОИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ҒАЙРИХАТТӢ

Донишгоҳи (Славянии) Руссияю Тоҷикистон,
****Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.Осимӣ***

Дар мақола сохтани бисёртасвирҳои интегралии системаи муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ, ки тарафи росташон таҳлилӣ мебошанд, дар ҳолати $t \to \pm\infty$, ба ҳалли нулӣ наздикшаванда, оварда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: *бисёртасвирҳои интегралӣ – бисёртасвирҳои интегралии оптималӣ.*

S.Z.Kurbanshoev, M.A.Nusayriev*

THE CONSTRUCTION OF OPTIMAL INTEGRAL MANIFOLD FOR THE NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Russian-Tajik (Slavonic) University,
****M.Osimi Tajik Technical University***

In work integral manifold of decisions of system of the nonlinear differential equations with an analytical right part of the adjoining to the zero decision at $t \to \pm\infty$ are constructed.

Key words: *the integral manifold – optimal integral manifold.*