ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
2014, том 57, №11-12

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

УДК 624.04

Член-корреспондент АН Республики Таджикистан Д.Н.Низомов,
О.А.Ходжибоев, А.А.Ходжибоев

ГРАНИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии АН Республики Таджикистан

На основе численного преобразования получены граничные интегральные уравнения, которые применяются для решения различных краевых задач теории упругости. Численная реализация этих уравнений позволяет исследовать динамическое поведение систем, как для внешней задачи, так и для внутренней.

Ключевые слова: *уравнение движения – граничное уравнение – преобразование Лапласа – численное преобразование – фундаментальное решение – бесконечная область.*

Рассматривается тело, занимающее область $V+\Omega$, где $\Omega-$ поверхность, $V-$внутренняя область, и находящееся в состоянии равновесия при действии некоторых заданных нагрузок и перемещениях. Компонент перемещения точки $x\in V+\Omega$ с координатами x_i обозначим $w_i(x,t)$. Пусть на тело с плотностью ρ действуют массовые силы f_i, а на поверхности Ω, состоящей из Ω_w и Ω_p, заданы соответственно перемещения $\overline{w}_i$ и нагрузка $\overline{p}_i$.

Уравнение движения в перемещениях упругого тела при указанных предположениях представляется в виде [1,2]

$$\mu w_{i,kk}+(\lambda+\mu)w_{k,ki}+f_i=\rho\ddot{w}_i(x,t), \tag{1}$$

где запятые обозначают производные по пространственным координатам (после запятой производится дифференцирование и суммирование по повторяющемуся индексу k), а точки – производные по времени; $\lambda,\ \mu-$постоянные Ламе:

$$\lambda=vE/[(1+v)(1-2v)],\ \mu=G=E/[2(1+v)],$$

$E-$модуль упругости, $G-$ модуль сдвига, $v-$ коэффициент Пуассона.

Граничные и начальные условия, которые должны удовлетворяться при решении динамических задач теории упругости, записываются в виде:

$$w_i(x,t)=\overline{w}_i(x,t),\ \ x\in\Omega_w,\ \ p_i(x,t)=\sigma_{ji}(x,t)n_j(x)=\overline{p}_i(x,t),\ x\in\Omega_P, \tag{2}$$

Адрес для корреспонденции: *Низомов Джахонгир Низомович.74029, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии АН РТ. E-mail: tiees@mail.ru, nizomov-jn@mail.ru*

$$t = 0,\ w_i(x,0) = w_{i,0}(x),\ \dot{w}_i(x,0) = \dot{w}_{i,0}(x),\ x \in V, \tag{3}$$

где $w_{i,0}(x), \dot{w}_{i,0}(x)$ – заданные функции начальных перемещений и скоростей.

Разделив обе части (1) на ρ, уравнение движения в перемещениях можно записать в виде [2,3]

$$(c_1^2 - c_2^2) w_{k,ki} + c_2^2 w_{i,kk} + f_i / \rho = \ddot{w}_i(x,t), \tag{4}$$

$$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho},\ c_2 = \sqrt{\mu/\rho},$$

где c_1, c_2 – скорости распространения продольных и поперечных волн.

С использованием преобразования Лапласа [4]

$$L\left[w_{k,ki}(x,t)\right] = W_{k,ki}(x,s) = \int_0^\infty w_{k,ki}(x,t) e^{-\lambda t} dt$$

$$L\left[\ddot{w}_i(x,t)\right] = s^2 W_i(x,\lambda) - s w_i(x,0) - \dot{w}_i(x,0),$$

$$L\left[f_i(x,t)\right] = F_i(x,s),$$

уравнение (4) можно представить в виде

$$(c_1^2 - c_2^2) W_{k,ki}(x,s) + c_2^2 W_{i,kk}(x,s) - s^2 W_i(x,s) = -Q_i, \tag{5}$$

$$Q_i = F_i / \rho + s w_i(x,0) + \dot{w}_i(x,0).$$

Уравнение (5) решается с учётом начальных и граничных условий (2), (3), представленных также в преобразованной форме:

$$W_i(x,s) = \overline{W}_i(x,s), \quad x \in \Omega_w;\ P_i(x,s) = \overline{P}_i(x,s), \quad x \in \Omega_p.$$

Фундаментальное решение (5) согласно [5, 6] представляется в виде

$$w_{ij}^*(\xi, x, s) = \frac{1}{\alpha \pi \rho c_2^2} \left(\psi \delta_{ij} - \gamma \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}\right), \tag{6}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Для трехмерных задач $\alpha = 4$, функции ψ и γ равны

$$\psi = \frac{e^{-sr/c_2}}{r} + \left(\frac{c_2^2}{s^2 r^2} + \frac{c_2}{sr}\right) \frac{e^{-sr/c_2}}{r} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(\frac{c_1^2}{s^2 r^2} + \frac{c_1}{sr}\right) \frac{e^{-sr/c_1}}{r},$$

$$\gamma = \left(\frac{3c_2^2}{s^2 r^2} + \frac{3c_2}{sr} + 1\right) \frac{e^{-sr/c_2}}{r} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(\frac{3c_1^2}{s^2 r^2} + \frac{3c_1}{sr} + 1\right) \frac{e^{-sr/c_1}}{r}.$$

Для двумерных задач $\alpha = 2$

$$\psi = K_0 \frac{sr}{c_2} + \frac{c_2}{sr}\left[K_1 \frac{sr}{c_2} - \frac{c_2}{c_1} K_1 \frac{sr}{c_1}\right],$$

$$\gamma = K_2 \frac{sr}{c_2} - \frac{c_2^2}{c_1^2} K_2 \frac{sr}{c_1},$$

где $K_i -$ модифицированные функции Бесселя второго рода и порядка i [7].

Далее рассмотрим численное преобразование уравнения (4), где функция $\ddot{w}(x,t)$ с использованием метода последовательной аппроксимации [8] представляется в виде

$$\ddot{w}_i(x,t) = \alpha_1\left[w_i(x,t) - w_i(x,t-\tau)\right]/\tau^2 - \alpha_2\dot{w}_i(x,t-\tau)/\tau - \alpha_3\ddot{w}_i(x,t-\tau)\,, \tag{7}$$

здесь: $\tau -$ шаг сетки вдоль оси t; $\alpha_i -$ коэффициенты аппроксимации. Внося (7) в (4), получаем

$$(c_1^2 - c_2^2) w_{k,ki}(x,t) + c_2^2 w_{i,kk}(x,t) - s^2 w_i(x,t) = -Q_i\,,\ s^2 = \alpha_1/\tau^2\,, \tag{8}$$

где $Q_i = s^2 w_i(x,t-\tau) + (\alpha_2/\tau)\dot{w}_i(x,t-\tau) + \alpha_3\ddot{w}_i(x,t-\tau) + f_i(x,t)/\rho$.

Из сопоставления следует, что уравнение (8), полученное в результате численного преобразования, по форме совпадает с уравнением (5), полученном путём преобразования Лапласа. Следовательно, фундаментальное решение (6) может быть использовано при реализации уравнения (8) для решения динамических задач теории упругости.

Интегральное уравнение динамической задачи относительно внутренних перемещений, полученное на основе теоремы взаимности работ, записывается в виде

$$w_i(\xi,t) + \int_\Omega p_{ij}^*(\xi,x) w_j(x,t) d\Omega(x) - \int_\Omega w_{ij}^*(\xi,x) p_j(x,t) d\Omega(x) = \rho\int_V Q_j w_{ij}^*(\xi,x) dV(x)\,. \tag{9}$$

При стремлении точки ξ к границе Ω области V, из (9) можно получить граничное интегральное уравнение [8]

$$c_{ij} w_j(\xi,t) + \int_\Omega p_{ij}^*(\xi,x) w_j(x,t) d\Omega(x) - \int_\Omega w_{ij}^*(\xi,x) p_j(x,t) d\Omega(x) =$$

$$= \rho\int_V w_{ij}^*(\xi,x) Q_j(x,t) dV(x)\,, \tag{10}$$

где $c_{ij} = \delta_{ij}/2$ для гладкой границы.

Уравнение (10) является сингулярным граничным интегральным уравнением с неизвестными перемещениями и напряжениями на поверхности тела. Если предположить, что на одну часть поверхности тела Ω_w заданы перемещения, а на другую её часть $\Omega_p -$ напряжения, то уравнение (10) представляется в виде

$$c_{ij} w_j(\xi,t) + \int\limits_{\Omega_p} p_{ij}^*(\xi,x) w_j(x,t) d\Omega(x) - \int\limits_{\Omega_W} w_{ij}^*(\xi,x) p_j(x,t) d\Omega(x) =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_w} p_{ij}^*(\xi,x) \overline{w}_j(x,t) d\Omega(x) + \int\limits_{\Omega_p} w_{ij}^*(\xi,x) \overline{p}_j(x,t) d\Omega(x) +$$

$$+\rho \int\limits_V w_{ij}^*(\xi,x) Q_j(x,t-\Delta t) dV(x), \tag{11}$$

где $\overline{w}_j$, $\overline{p}_j$ – заданные перемещения и напряжения, $\Omega = \Omega_w + \Omega_p$. При решении первой краевой задачи, когда на контуре тела заданы напряжения, уравнение (10) представляется в виде

$$c_{ij} w_j(\xi,t) + \int\limits_{\Omega} p_{ij}^*(\xi,x) w_j(x,t) d\Omega(x) = \int\limits_{\Omega} w_{ij}^*(\xi,x) p_j(x,t) d\Omega(x) +$$

$$+\int\limits_V w_{ij}^*(\xi,x) \overline{Q}_j(x,t) dV(x), \tag{12}$$

где неизвестными являются компоненты перемещения $w_j(x,t)$ на контуре тела. Граничное уравнение (12) решается шаговым методом, где при известных значениях перемещений, скорости и ускорения на предыдущем шаге $t-\tau$, определяются их значения в момент времени t, а затем вычисляются деформации и напряжения. Уравнение (12) справедливо как для трёхмерных, так и для двумерных динамических задач и представляет собой соотношение, которое должно выполняться между перемещениями и напряжениями на поверхности, а также обобщёнными объёмными силами

$$\overline{Q}_i(x,t) = \rho Q_i(x,t) = f_i(x,t) +$$

$$+\rho\left[s^2 w_i(x,t-\Delta t) + \alpha_2 \dot{w}_i(x,t-\Delta t)/\Delta t + \alpha_3 \ddot{w}_i(x,t-\Delta t)\right]. \tag{13}$$

Поскольку обобщённые объёмные силы (13) считаются известными, то при заданных граничных условиях уравнение (12) представляет собой граничное интегральное уравнение относительно значений функций на границе. Всё сказанное относится и к внутренней задаче, когда рассматривается конечное тело V с поверхностью Ω. При этом тело может быть также многосвязным, то есть иметь внутри себя полости.

Если рассматривается бесконечная область, где V является объёмом полости с поверхностью Ω, то в уравненииеи(12) объёмный интеграл обратится в нуль. Тогда граничное интегральное уравнение для решения внешней динамической задачи представляется в виде

$$c_{ij} w_j(\xi,t) + \int\limits_{\Omega} p_{ij}^*(\xi,x) w_j(x,t) d\Omega(x) = \int\limits_{\Omega} w_{ij}^*(\xi,x) p_j(x,t) d\Omega(x), \tag{14}$$

$$\xi, x \in \Omega,\ t > 0,$$

если выполняется условие регулярности на бесконечности [9]

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Omega_\infty}\left[p_{ij}^{*}(\xi,x)w_j(x,t)-w_{ij}^{*}(\xi,x)p_j(x,t)\right]d\Omega(x)=0\,, \tag{15}$$

$$x\in\Omega_\infty\,,\ \xi\in\Omega\,,$$

где $\Omega_\infty -$ поверхность сферической области радиуса R с полостью. Для трёхмерной задачи элемент сферической поверхности $d\Omega(x)=R^2\sin\theta d\theta d\varphi$, а фундаментальные решения $w_{ij}^{*}(\xi,x)$ и $p_{ij}^{*}(\xi,x)$ в соответствии с (10) имеют асимметрические выражения $O(R^{-1})$ и $O(R^{-2})$. Следовательно, условие (15) выполняется в том случае, если функции $w_j(x,t)$ и $p_j(x,t)$ будут вести себя, как $(1/R)$ и $(1/R^2)$ соответственно, и это гарантирует, что каждое слагаемое в (15) стремится к нулю независимо друг от друга.

В случае двумерной задачи элемент круга $d\Omega=Rd\alpha$, а фундаментальные решения в соответствии с (6) имеют особенности модифицированной функции Бесселя $O(e^{-R})$. Асимптотические ряды для больших значений безразмерного радиуса $R=sR/c$ имеют вид [10]

$$K_n(\bar{R})\approx(\pi/2R)^{1/2}e^{-\bar{R}}\approx -K_n'(\bar{R}),\ n=0,1,2\,. \tag{16}$$

Следовательно, если предположить, что функции $w_j(x,t)$ и $p_j(x,t)$ ведут себя так же, как фундаментальные решения, то условие (15) с учётом (16) выполняется тождественно.

В случае полупространства с полостью Ω и когда на поверхности Ω_0 действует внешняя нагрузка, то интегральное уравнение (14) представляется в виде

$$c_{ij}w_j(\xi,t)+\int_{\Omega}p_{ij}^{*}(\xi,x)w_j(x,t)d\Omega(x)=\int_{\Omega}w_{ij}^{*}(\xi,x)p_j(x,t)d\Omega(x)+$$

$$+\int_{\Omega}w_{ij}^{*}(\xi,y)q_j(y,t)d\Omega_0(y)\,, \tag{17}$$

где $\xi,x\in\Omega$, $y\in\Omega_0$, $t>0$, $w_{ij}^{*}(\xi,x)-$ перемещение в точке x в $j-$м направлении от действия сосредоточенной силы, действующей в точке ξ в $i-$м направлении.

Таким образом, получены граничные интегральные уравнения, позволяющие исследовать динамическое поведение внешних и внутренних задач теории упругости. Они являются универсальными и могут быть использованы как для решения динамических, так и статических задач. Эти уравнения, применяемые, как для двумерных задач, так и для трёхмерных, решаются численным интегрированием путём сплайн аппроксимации граничных параметров.

Поступило 20.10.2014 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 2. – М.: Наука, 1970, 568 с.

2. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975, 872 с.
3. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Метод граничных элементов. – М.: Мир, 1987, 524 с.
4. Мартыненко В.С. Операционное исчисление. – Киев: Вища школа, 1973, 268 с.
5. DoyleJ.M. Integration of the Laplase transformed equations of classic elastokinetics, J. Math. Anal. Appl. 13 (1966).
6. Cruse T.A., Rizzo F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem - I, J. Mart. Analysis and Appl., v.22, 1968, p.341-355.
7. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. – М.: ИЛ, 1949, т. 1., 798 с., т.2, 220 с.
8. Низомов Д.Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. – М.: Изд-во АСВ, 2000, 282 с.
9. Кошляков Н.С., Глиндер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных в математической физики. – М.: Высшая школа, 1970, 708 с.
10. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1983, 172 с.

Ҷ.Н.Низомов, О.А.Ҳоҷибоев, А.А.Ҳоҷибоев

МУОДИЛАҲОИ КАНОРИИ МАСЪАЛАҲОИ ДИНАМИКИИ НАЗАРИЯИ ЧАНДИРӢ

Институти геология, сохтмони ба заминҷунбӣ тобовар ва сейсмологияи
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақола бо истифода аз дигаргунсозии ададӣ муодилаҳои интегралии канорӣ пайдо карда шудаанд, ки дар ҳалли масъалаҳои канорӣ назарияи чандирӣ истифода карда мешаванд. Ҳалли ададии чунин муодилаҳо имконият медиҳанд, ки тадқиқоти ҳолати динамикии система масъалаҳои дохилӣ ва берунӣ гузаронида шаванд.

Калимаҳои калидӣ: *муодилаи ҳаракат – мудилаи канорӣ – дигаргунсозии Лаплас – дигаргунсозии ададӣ – ҳалли фундаменталӣ – фазои беохир.*

J.N.Nizomov, O.A.Hojiboev, A.A.Hojiboev

BOUNDARY EQUATIONS DYNAMIC ELASTICITY PROBLEMS

Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology,
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

On the basis of the numerical conversion obtained boundary integral equations, which are used for a variety of boundary value problems of elasticity theory. Numerical implementation of these equations allows us to investigate the dynamic behavior of systems, both for the exterior problem, and internal.

Key words: *equation of motion – boundary equation – Laplace transform – numerical transformation – a fundamental solution – infinite region.*