ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
2015, том 58, №11

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

М.Азизов, В.Ф.Файзуллобекова

О ПРИМЕНЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОГО МЕТОДА К ПРИБЛИЖЁННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ

Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни

(Представлено академиком АН Республики Таджикистан М.Ш.Шабозовым 14.09.2015 г.)

В статье решается вопрос о возможности редукции некоторой задачи Коши для линейных дифференциальных функций с произвольными гладкими коэффициентами к соответствующей задаче для линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами.

Ключевые слова: *аппроксимационный метод, многочлены Эрмита, задача Коши, интегральное уравнение.*

Обозначим через $C^{r,s}(Q)$ – множество функций двух переменных, у которых частные производные $\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x,y)\,(i=\overline{0,r},\ j=\overline{0,s})$ непрерывны в области Q. На прямоугольнике $[0,H]\times[0,\Sigma]\subset Q$, где $H,\Sigma<q<1$ рассматривается задача Коши для уравнения

$$a_0(x,y)z''_{xy}+a_1(x,y)z'_x+a_2(x,y)z'_y+a_3(x,y)z=a_4(x,y) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$z(x,y)\,|_{y=\xi(x)}=z'_x(x,y)\,|_{y=\xi(x)}=z'_y(x,y)\,|_{y=\xi(x)}=0, \tag{2}$$

где $\xi(x)$ непрерывная монотонно возрастающая на $[0,H]$ функция такая, что $\xi(0)=0,\xi(H)=\Sigma$. Как и в [2], будем считать, что $\xi(x)$ – многочлен.

Предположим $a_j(x,y)\in C^{r,s}(Q)(j=\overline{0,4})$, кроме того, $a_0(x,y)$ удовлетворяет условию $a_0(x,y)\ge c=const>0$. Согласно [2], для построения решения задачи (1) - (2) достаточно построить решение задачи

$$b_0(x,u)\overset{\circ}{z}''_{xu}+b_1(x,u)\overset{\circ}{z}'_x+b_2(x,u)\overset{\circ}{z}''_u+b_3(x,u)\overset{\circ}{z}=b_4(x,u) \tag{3}$$

с начальными условиями

$$\overset{\circ}{z}(x,y)\,|_{u=x}=\overset{\circ}{z}'_x(x,y)\,|_{u=x}=\overset{\circ}{z}'_u(x,y)\,|_{u=x}=0, \tag{4}$$

в которой

Адрес для корреспонденции: *Азизов Музафар. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр. Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет. E-mail: azizov.muz@gmail.com*

$$b_0(x,u) = a_0(x,\xi(u)), b_1(x,u) = a_1(x,\xi(u))\xi'(u),$$

$$b_2(x,u) = a_2(x,\xi(u)), b_3(x,u) = a_3(x,\xi(u))\xi'(u),$$

$$b_4(x,u) = a_4(x,\xi(u))\xi'(u).$$

Заменим в уравнении (3) каждый коэффициент $b_i(x,u)(i=\overline{1,4})$ многочленом b_{i,m_i,n_i} степени m_i по x и степени n_i по u. Для простоты изложения будем считать, что

$$b_0(x,u) \equiv 1.$$

Будем искать приближенное решение задачи (3) и (4) в виде решения задачи Коши

$$\tilde{\mathring{z}}''_{xu} + b_{1,m_1,n_1}(x,u)\tilde{\mathring{z}}'_x + b_{2,m_2,n_2}(x,u)\tilde{\mathring{z}}'_u + b_{3,m_3,n_3}(x,u)\tilde{\mathring{z}}' = b_{4,m_4,n_4}(x,u), \tag{5}$$

$$\tilde{\mathring{z}}'(x,y)|_{u=x} = \tilde{\mathring{z}}'_x(x,y)|_{u=x} = \tilde{\mathring{z}}'_u(x,y)|_{u=x}\ 0. \tag{6}$$

Пусть $\varepsilon_{m,n}$ – погрешность решения задачи (5) - (6) а-методом, описанным в [2]. Имеет место

Теорема 1. *Пусть в прямоугольнике* $[0,H]\times[0,\Sigma]\subset Q$ $(H,\Sigma<q<1)$ *рассматривается задача Коши (3)-(4). Если искать приближенное решение этой задачи в виде приближенного решения задачи (5)-(6) а-методом, то будет иметь место следующая оценка погрешности*

$$\left|z(x,u) - \tilde{\mathring{z}}_{m,n}(x,u)\right| \leq$$

$$\leq \left\|\varepsilon(x,u)\right\| \cdot exp\left[\int_u^x\int_s^u |R(t,s)|\,dtds + 2\int_u^x |b_1(t,u)|\,dt + 2\int_u^x |b_2(t,u)|\,ds\right] + \varepsilon_{m,n}, \tag{7}$$

где $\tilde{\mathring{z}}_{m,n}(x,y)$ *– приближённое решение задачи (5)-(6) а-методом,* $\varepsilon_{m,n}$ *– погрешность, с которой задача (5)-(6) решается методом*

$$\varepsilon(x,u) := \int_u^x\int_s^u \varepsilon_4(s,t)dsdt - \int_u^x \varepsilon_2(t,u)\tilde{\mathring{z}}'(t,u)dt - \int_u^x \varepsilon_1(x,s)\tilde{\mathring{z}}'(x,s)ds +$$

$$+\int_u^x\int_s^u \left([\varepsilon_1(t,s)]'_t + [\varepsilon_2(t,s)]'_s - \varepsilon_3(t,s)\right)\tilde{\mathring{z}}'(t,s)dsdt$$

и

$$\varepsilon_i(x,u) := b_i(x,u) - b_{i,m_i,n_i}(i=\overline{1,4}),$$

$$R(t,s) = [b_1(t,s)]'_t + [b_2(t,s)]'_s - b_3(t,s).$$

Доказательство. Действительно,

$$\left|z(x,u)-\tilde{\mathring{z}}_{m,n}(x,u)\right| \le \left|z(x,u)-\tilde{\mathring{z}}'(x,u)\right| + \left|\tilde{\mathring{z}}'(x,u)-\tilde{\mathring{z}}_{m,n}(x,u)\right|,$$

где $\tilde{\mathring{z}}(x,u)$ – точное решение задачи (5)-(6). Согласно [2], задачи (3)-(4), (5)-(6) эквивалентны интегральным уравнениям

$$z(x,u) = -\int_u^x b_2(t,u)z(t,u)dt - \int_u^x b_2(x,s)z(x,s)ds +$$

$$+\int_u^x\int_s^u R(t,z)z(t,s)dsdt + \int_u^t\int_t^u b_4(s,t)dsdt \tag{8}$$

и

$$\tilde{\mathring{z}}'(x,u) = -\int_u^x b_{2,m_2,n_2}(t,u)\,\tilde{\mathring{z}}'(t,u)dt - \int_u^x b_{1,m_1,n_1}(x,s)\,\tilde{\mathring{z}}'(x,s)ds +$$

$$+\int_u^x\int_s^u R_{m'}(t,s)\,\tilde{\mathring{z}}'(t,s)dsdt + \int_u^x\int_t^u b_{4,m_4,n_4}(s,t)dsdt, \tag{9}$$

где соответственно

$$R_{m'}(t,s) = [b_{1,m_1,n_1}(t,s)]_t' + [b_{2,m_2,n_2}(t,s)]_s' - b_{3,m_3,n_3}(t,s),\ m' = (m_1,n_1,m_2,n_2,m_3,n_3).$$

Пусть

$$\varepsilon_i(x,u) = b_i(x,u) - b_{i,m_i,n_i}(x,u),\ \Delta(x,u) = z(x,u) - \tilde{\mathring{z}}(x,u).$$

Тогда из (8), (9)

$$\Delta = -\int_u^x b_2(t,u)\Delta(t,u)dt - \int_u^x b_1(x,s)\Delta(x,s)ds +$$

$$+\int_u^x\int_s^u R(t,s)\Delta(t,s)dsdt + \int_u^x\int_t^u \varepsilon_4(s,t)dsdt -$$

$$-\int_u^x \varepsilon_2(t,u)\,\tilde{\mathring{z}}(t,u)dt - \int_u^x \varepsilon_1(x,s)\,\tilde{\mathring{z}}(x,s)ds +$$

$$+\int_u^x\int_s^u \left([\varepsilon_1(t,s)]_t' + [\varepsilon_2(t,s)]_t' - \varepsilon_3(t,s)\right)\tilde{\mathring{z}}'(t,s)dsdt.$$

Обозначим

$$\varepsilon(x,u)=\int_u^x\int_s^u \varepsilon_4(s,t)dsdt-\int_u^x \varepsilon_2(t,u)\,\tilde{\mathring{z}}(t,u)dt-\int_x^u \varepsilon_1(x,s)\,\tilde{\mathring{z}}(x,s)ds+$$

$$+\int_u^x\int_s^u \left([\varepsilon_1(t,s)]_t'+[\varepsilon_2(t,s)]_s'-\varepsilon_3(t,s)\right)\tilde{\mathring{z}}'(t,s)dsdt.$$

Тогда, применяя неравенства Гронуолла-Буллмана (см., например, [3]), имеем

$$|\Delta(x,u)|\le\left\|\varepsilon(x,u)\right\|exp\left[\int_u^x\int_s^u |R(t,s)|\,dtds+2\int_u^x |b_1(t,u)|\,dt+2\int_u^x |b_2(t,u)|\,ds\right].$$

Вторая часть оценки, то есть величина $\tilde{\mathring{z}}(x,u)-\tilde{\mathring{z}}_{m,n}(x,u)$, это погрешность решения задачи (5)-(6) а-методом, не превосходящая $\varepsilon_{m,n}$. Тогда

$$\left|\tilde{\mathring{z}}(x,u)-\tilde{\mathring{z}}_{m,n}(x,u)\right|\le|\Delta(x,u)|+\varepsilon_{m,n}.$$

Теорема доказана.

Если в качестве многочленов b_{i,m_i,n_i} выбрать интерполяционные многочлены Эрмита и предложить, что

$$b_{i,m_i,n_i}^{(p,k)}(0,0)=b_i^{(p,k)}(0,0),$$

$$b_{i,m_i,n_i}^{(p,k)}(0,\Sigma)=b_i^{(p,k)}(0,\Sigma),$$

$$b_{i,m_i,n_i}^{(p,k)}(H,0)=b_i^{(p,k)}(H,0),$$

$$b_{i,m_i,n_i}^{(p,k)}(H,\Sigma)=b_i^{(p,k)}(H,\Sigma),$$

то, согласно результатам из [4], имеем:

$$\left\|\varepsilon_i(x,u)\right\|=k\left(\left\|b_i^{(r,0)}\right\|H^r+\left\|b_i^{(0,s)}\right\|\Sigma^s+\left\|b_i^{(r,s)}\right\|H^r\Sigma^s\right),$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_i(x,u)\right\|=k_1\left(\left\|b_i^{(r,0)}\right\|H^{r-1}+\left\|b_i^{(0,s)}\right\|\Sigma^s+\left\|b_i^{(r,s)}\right\|H^{r-1}\Sigma^s\right),$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_i(x,u)\right\|=k_2\left(\left\|b_i^{(r,0)}\right\|H^r+\left\|b_i^{(0,s)}\right\|\Sigma^{s-1}+\left\|b_i^{(r,s)}\right\|H^r\Sigma^{s-1}\right).$$

Тогда

$$\left\|\varepsilon_i(x,u)\right\|=(k\left\|b_4^{(r,0)}\right\|H\Sigma+k\left\|b_2^{(r,0)}\right\|H+k\left\|b_1^{(r,0)}\right\|\Sigma^s+k_2\left\|b_1^{(r,0)}\right\|\Sigma+k_2\left\|b_2^{(r,0)}\right\|H\Sigma+$$

$$+k\left\|b_3^{(r,0)}\right\|H\Sigma)H^r\left\|\mathring{\tilde{z}}(x,u)\right\|+(k\left\|b_4^{(0,s)}\right\|H\Sigma+k\left\|b_2^{(0,s)}\right\|H+\left\|b_1^{(0,s)}\right\|\Sigma+\left\|b_1^{(0,s)}\right\|H\Sigma+$$

$$+\left\|b_1^{(0,s)}\right\|H+\left\|b_3^{(0,s)}\right\|H\Sigma)\Sigma^s\left\|\mathring{\tilde{z}}(x,u)\right\|+(k\left\|b_4^{(r,s)}\right\|H\Sigma+\left\|b_2^{(r,s)}\right\|H+k\left\|b_1^{(r,s)}\right\|\Sigma+$$

$$+\left\|b^{(r,s)}\right\|\Sigma+k_1\left\|b_1^{(r,s)}\right\|H+k\left\|b_3^{(r,s)}\right\|H\Sigma)H^r\Sigma^s\left\|\mathring{\tilde{z}}(x,u)\right\|. \qquad (10)$$

Таким образом, из теоремы 1 следует, что если в качестве коэффициентов b_{i,m_i,n_i} приближенного уравнения (5) взять интерполяционные многочлены Эрмита, построенные для соответствующих коэффициентов уравнения (3), то уклонение решения уравнения (5) от решения уравнения (3) можно оценить следующим образом:

$$\left\|\Delta(x,u)\right\|\le c_1H^r+c_2H^r\Sigma^s+c_3\Sigma^s,$$

где $c_i\,(i=\overline{1,3})$ – некоторые постоянные, которые зависят лишь от коэффициентов уравнения (3) и нормы в $C_{[0,H]\times[0,\Sigma]}$ приближенного решения $\mathring{\tilde{z}}(x,u)$. Характер зависимости отражается соотношением (10).

Замечание. *Для построения приближенного решения задачи (1)-(2) на большом промежутке* $[0,H]\times[0,\Sigma], h,\Sigma>1$ *достаточно воспользоваться построениями работы [2] и повторить проведенные выше рассуждения.*

Поступило 14.09.2015 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзядык В.К. Аппроксимационный метод приближения многочленами решений линейных дифференциальных уравнений. – Изв.АН СССР, сер.-мат., 1974, 38, №4, с.937-967.
2. Островецкий Л.А. Применения аппроксимационного метода к приближению решения задачи Коши для линейных уравнений гиперболического типа с многочленами коэффициентами. Препринт 81.36. – Киев: Институт математики, 1981, 32 с.
3. Бурланенко В.П., Романенко Ю.И. О приближение по методу В.К.Дзядыка решения задачи Гурса с многочленными коэффициентами. В кн.: Теория функций и ее приложения. – Киев: Наукова думка, 1979, с.50-60.
4. Binkoff G, Shultz M.N., Varga R.S. Piecwize Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations. – Numer. math, 1968-II, №1, pp.232-256.

М.Азизов, В.Ф.Файзуллобекова

ОИДИ ТАДБИҚИ УСУЛИ АППРОКСИМАТСИОНӢ БАРОИ СОХТАНИ ҲАЛЛИ ТАҚРИБИИ МАСЪАЛАИ КОШӢ

Донишгоҳи давлатии омузгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Дар мақола масъалаи имконияти редуксияи як масъалаи Кошӣ барои муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ бо коэффитсентҳои суфта ба масъалаи мувофиқ барои муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ бо коэффитсентҳои бисёраъзогӣ, омӯхта мешавад.

Калимаҳои калидӣ: *методи аппроксиматсионӣ, бисёраъзогиҳои Эрмит, масъалаи Кошӣ, муодилаи интегралӣ.*

M.Azizov, V.F.Fayzullobeckova

APPLICATION OF APPROXIMATIVE METHOD FOR APPROXIMATE SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM

Tajik Pedagogical State University, S.Ayni

In this paper a question about possibility of reduction the Cauchy problem for linear differential equations with smooth coefficients is considered for the correspond problem to the linear differential equations with polynomials coefficients.

Key words: *approximate method, Hermite polynomials, Cauchy problem, integral equation.*