ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
2015, том 58, №12

МАТЕМАТИКА

УДК 511.325

Д.Дж.Хокиев

ОЦЕНКА КОРОТКИХ СУММ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРОВ ОТ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан

(Представлено членом-корреспондентом АН Республики Таджикистан З.Х.Рахмоновым 05.06.2015 г.)

В статье получена оценка вида

$$\sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1,\,n\equiv\lambda(\mathrm{mod}\,d)}}\chi_q(n-\eta)\le 2^{\omega(q)}\sqrt{q}\ln q,$$

где χ_q *— примитивный характер, порожденный характером* χ *по модулю* D, q_1 *— произведение простых чисел, делящих* D, *но не делящих числа* q, $d\setminus q_1$, $(\eta,q)=(\lambda,d)=(d,q)=1$, $y<x$, $x<q$. *Полученная оценка является обобщением известной оценки Виноградова – Поя для последовательности сдвинутых чисел* $n-\eta$ *с указанными свойствами.*

Ключевые слова: *характеры Дирихле, квадратичные вычеты, двойные суммы.*

И.М.Виноградов [1, 2] своим методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами, изучая закон распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел, доказал: *если* q *— простое нечётное,* $(l,q)=1$, $\chi(a)$ *– неглавный характер по модулю* q, *тогда*

$$T(\chi)=\sum_{p\le x}\chi(p-l)\ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right). \quad (1)$$

При $x\gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\mathrm{mod}\,q$ *вида* $p-l$, $p\le x$. Затем И.М.Виноградов [3–5] получил нетривиальную оценку $T(\chi)$ при $x\ge q^{0,75+\varepsilon}$, q — простое. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T(\chi)$ можно записать в виде суммы, по нулям соответствующей L — функции Дирихле; тогда в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T(\chi)$ получится нетривиальная оценка, но только при $x\ge q^{1+\varepsilon}$. В 1970 г. А.А.Карацуба [6, 7] получил новую оценку $T(\chi)$, нетривиальную уже при $x\ge q^{0,5+\varepsilon}$.

Адрес для корреспонденции: *Хокиев Дониёр Джалилович. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики АН РТ E-mail: khdj.91@mail.ru*

В 1986 г. З.Х.Рахмонов [8–10] обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал: *пусть* D *– достаточно большое натуральное число,* χ *— неглавный характер по модулю* D, χ_q *– примитивный характер, порожденный характером* χ, *тогда*

$$T(\chi) \le x \ln^5 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}\tau^2(q_1)} + x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1) \right), \qquad q_1 = \prod_{\substack{p \backslash D \\ p \nmid q}} p. \tag{2}$$

Если характер χ совпадает со своим порождающим примитивным характером χ_q, то оценка (2) нетривиальна при $x > q(\ln q)^{13}$. Дж.Б.Фридландер, К.Гонг, И.Е.Шпарлинский [11] для составного q получили нетривиальную оценку $T(\chi_q)$ при $x \ge q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$. В [12 – 14] для составного q доказана нетривиальная оценка $T(\chi_q)$ при $x \ge q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$.

Отметим, что вопрос о нетривиальных оценках сумм $T(\chi)$, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, порожденный характером χ, $q < D$, при $x < D$ до сих пор остаётся открытым. Основным моментом получения таких оценок является оценка двойных сумм вида

$$T(\chi_q, M, N, d) = \sum_{M < m \le 2M} a(m) \sum_{\substack{N < n \le \min(xm^{-1}, 2N) \\ (mn,q)=1,\, mn \equiv l (mod\, d)}} b(n)\chi_q(mn - l), \quad d \,/\, q_1, \tag{3}$$

которые в свою очередь делятся на двойные суммы, где имеется длинная сплошная сумма или суммы, составляющие двойную сумму, близкие по порядку.

Основным результатом этой работы является теорема о нетривиальной оценке коротких сумм значений примитивного характера Дирихле χ_q от последовательности сдвинутых чисел $n - \eta$, при условии, что $x - y < n \le x$, $(n,q) = 1$, $n \equiv \lambda \left(\operatorname{mod} d \right)$, в частности из которого следует нетривиальная оценка двойных сумм, имеющих длинную сплошную сумму.

Теорема. *Пусть* D *— достаточно большое натуральное число,* χ *— неглавный характер по модулю* D, χ_q *– примитивный характер, порожденный характером* χ, q_1 *— произведение простых чисел, делящих* D, *но не делящих числа* q, $d \backslash q_1$, $(\eta, q) = (\lambda, d) = (d, q) = 1$, $y < x$, $x < q$, *тогда*

$$S = \sum_{\substack{x - y < n \le x \\ (n,q)=1,\, n \equiv \lambda (\operatorname{mod} d)}} \chi_q(n - \eta) \le 2^{\omega(q)} \sqrt{q} \ln q. \tag{4}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $y / d > 2^{\omega(q)} \sqrt{q} \ln q$, в противном случае оценка (4) тривиальная. Далее имеем равенство:

$$S=\sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1,\,n\equiv\lambda(\operatorname{mod}d)}}\chi_q(n-\eta)\sum_{\substack{a=1\\a\equiv n-\eta(\operatorname{mod}q)}}^{q}1=\sum_{a=1}^{q}\chi_q(a)\sum_{\substack{x-y<n\le x,\,n-\eta\equiv a(\operatorname{mod}q)\\(n,q)=1,\,n\equiv\lambda(\operatorname{mod}d)}}1=$$

$$=\sum_{a=1}^{q}\chi_q(a)\sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1,\,n\equiv\lambda(\operatorname{mod}d)}}\frac{1}{q}\sum_{t=1}^{q}e\left(\frac{(a-n+\eta)t}{q}\right)=$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{t=1}^{q}e\left(\frac{\eta t}{q}\right)\sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1,\,n\equiv\lambda(\operatorname{mod}d)}}e\left(-\frac{tn}{q}\right)\sum_{a=1}^{q}\chi_q(a)e\left(\frac{at}{q}\right).$$

Пользуясь формулой, которая устанавливает связь между значениями примитивных характеров и значениями сумм Гаусса, имеем

$$S=\frac{\tau(\chi_q)}{q}\sum_{t=1}^{q}\overline{\chi}_q(t)e\left(\frac{\eta t}{q}\right)\sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1,\,n\equiv\lambda(\operatorname{mod}d)}}e\left(-\frac{tn}{q}\right)=$$

$$=\frac{\tau(\chi_q)}{q}\sum_{t=1}^{q}\overline{\chi}_q(t)e\left(\frac{\eta t}{q}\right)\sum_{\delta\backslash q}\mu(\delta)\sum_{\substack{x-y<n\delta\le x\\n\delta\equiv\lambda(\operatorname{mod}d)}}e\left(-\frac{tn\delta}{q}\right).$$

Сравнение $n\delta\equiv\lambda(\operatorname{mod}d)$ равносильно сравнению $n\equiv\lambda\delta_d(\operatorname{mod}d)$, где δ_d определяется из сравнения $\delta\cdot\delta_d\equiv 1(\operatorname{mod}d)$. Поэтому, представляя n в виде $n=n_1d+\lambda\delta_d$, получим

$$S=\frac{\tau(\chi_q)}{q}\sum_{t=1}^{q}\overline{\chi}_q(t)e\left(\frac{\eta t}{q}\right)\sum_{\delta\backslash q}\mu(\delta)\sum_{x_1<n\le x_2}e\left(-\frac{t\delta(nd+\lambda\delta_d)}{q}\right)=$$

$$=\frac{\tau(\chi_q)}{q}\sum_{t=1}^{q}\overline{\chi}_q(t)e\left(\frac{\eta t}{q}\right)\sum_{\delta\backslash q}\mu(\delta)e\left(-\frac{t\lambda\delta\delta_d}{q}\right)\sum_{x_1<n\le x_2}e\left(-\frac{td\delta n}{q}\right),$$

$$x_1=\frac{x-y}{\delta d}-\frac{\lambda\delta_d}{d},\qquad x_2=\frac{x}{\delta d}-\frac{\lambda\delta_d}{d}.$$

Последняя сумма по n при $\delta>y/d$ и $[x_2]=[x_1]$ пустая, а при $\delta>y/d$ и $[x_2]=[x_1]+1$ состоит из одного слагаемого при $n=[x_2]$. Поэтому при $\delta\le y/d$, воспользовавшись для целых n_1 и n_2 равенством

$$\sum_{n_1\le n\le n_2}e\left(-\frac{tdn\delta}{q}\right)=\frac{\sin\frac{\pi td\delta(n_2-n_1+1)}{q}}{\sin\frac{\pi td\delta}{q}}e\left(-\frac{td\delta(n_1+n_2)}{2q}\right),$$

и, переходя к оценкам и имея виду, что $|\tau(\chi)|=\sqrt{q}$, найдём

$$|S|\le\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\substack{t=1\\(t,q)=1}}^{q}\left(\sum_{\substack{\delta\backslash q\\ d\delta\le y}}\mu^2(\delta)\left|\sin\frac{\pi td}{q/\delta}\right|^{-1}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\substack{\delta\backslash q\\ d\delta\le y}}\mu^2(\delta)\sum_{\substack{t=1\\(t,q)=1}}^{q}\left|\sin\frac{\pi t}{q/\delta}\right|^{-1}+\frac{\varphi(q)}{\sqrt{q}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\substack{\delta\backslash q\\ d\delta\le y}}\mu^2(\delta)\sum_{t_1=0}^{\delta-1}\sum_{\substack{t_2=1\\(t_1q/\delta+t_2,q)=1}}^{q/\delta}\left|\sin\frac{\pi(t_1q/\delta+t_2)}{q/\delta}\right|^{-1}+\frac{\varphi(q)}{\sqrt{q}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\substack{\delta\backslash q\\ d\delta\le y}}\mu^2(\delta)\sum_{t_1=0}^{\delta-1}\sum_{\substack{t_2=1\\(t_1q/\delta+t_2,q)=1}}^{q/\delta}\left|\sin\frac{\pi t_2}{q/\delta}\right|^{-1}+\frac{\varphi(q)}{\sqrt{q}}\le\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\substack{\delta\backslash q\\ d\delta\le y}}\delta\mu^2(\delta)S(\delta)+\frac{\varphi(q)}{\sqrt{q}},$$

где

$$S(\delta)=\sum_{t=1}^{q/\delta-1}\left|\sin\frac{\pi t}{q/\delta}\right|^{-1}.$$

Если q/δ — нечётное число, то

$$S(\delta)=2\sum_{t=1}^{\frac{q/\delta-1}{2}}\left|\sin\frac{\pi t}{q/\delta}\right|^{-1}\le 2\sum_{t=1}^{\frac{q/\delta-1}{2}}\left(\frac{2t}{q/\delta}\right)^{-1}=\frac{q}{\delta}\sum_{t=1}^{\frac{q/\delta-1}{2}}\frac{1}{t},$$

так как $\sin\pi\alpha\ge 2\alpha$ при $0\le\alpha\le 1/2$. Далее, воспользовавшись неравенством

$$\frac{1}{t}\le\ln\frac{2t+1}{2t-1},$$

найдём

$$S(\delta)\le\frac{q}{\delta}\sum_{t=1}^{\frac{q/\delta-1}{2}}\frac{1}{t}\le\frac{q}{\delta}\sum_{t=1}^{\frac{q/\delta-1}{2}}\left(\ln(2t+1)-\ln(2t-1)\right)=\frac{q}{\delta}\ln q/\delta.$$

Если q/δ — чётное число, то

$$S(\delta)=2\sum_{t=1}^{\frac{q/\delta}{2}-1}\left|\sin\frac{\pi t}{q/\delta}\right|^{-1}+1\le 2\sum_{t=1}^{\frac{q/\delta}{2}-1}\left(\frac{2t}{q/\delta}\right)^{-1}+1=\frac{q}{\delta}\sum_{t=1}^{\frac{q/\delta}{2}-1}\frac{1}{t}+1\le$$

$$\le\frac{q}{\delta}\sum_{t=1}^{\frac{q/\delta}{2}-1}\left(\ln(2t+1)-\ln(2t-1)\right)+1=\frac{q}{\delta}\ln(q/\delta-1)+1\le\frac{q}{\delta}\ln q/\delta.$$

Следовательно,

$$|S|\le\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\substack{\delta\backslash q\\ d\delta\le y}}\delta\mu^2(\delta)S(\delta)+\frac{\varphi(q)}{\sqrt{q}}\le\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\substack{\delta\backslash q\\ d\delta\le y}}\delta\mu^2(\delta)\frac{q}{\delta}\ln q/\delta+\frac{\varphi(q)}{\sqrt{q}}\ll$$

$$\ll\sqrt{q}\ln q\sum_{\delta\backslash q}\mu^2(\delta)=2^{\omega(q)}\sqrt{q}\ln q.$$

Теорема доказана.

Поступило 05.06.2015 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Виноградов И.М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ по простому модулю. – Математический сб., 1938, т. 3, №45, с. 311–320.
2. Виноградов И.М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами. – Известия АН СССР, сер. матем. 1943, т. 7, с. 17–34.
3. Виноградов И.М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$. – Известия АН СССР, сер. матем., 1952, т. 16, с. 197–210.
4. Виноградов И.М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$. – Известия АН СССР, сер. матем., 1953, т. 17, с. 285–290.
5. Виноградов И.М. Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии. – Известия АН СССР, сер. матем., 1966, т. 30, с. 481–496.
6. Карацуба А.А. О суммах характеров с простыми числами. – ДАН СССР, 1970, т. 190, №3, с. 517–518.
7. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами. – Известия АН СССР, сер. матем., 1970, т. 34, с. 299–321.
8. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле. – УМН, 1986, т. 41, №1, с. 201–202.
9. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами. – ДАН Тадж ССР, 1986, т. 29, №1, с. 16–20.
10. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения. – Труды Математического института РАН, 1994, т. 207, с. 286–296.
11. Фридландер Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах. – Матем. заметки, 2010, т. 88, в. 4, с. 605–619.
12. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел. – ДАН РТ, 2013, т. 56, №1, с. 5–9.
13. Рахмонов З.Х. Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел. – Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2013, т. 13, в. 4(2), с. 113–-117.
14. Рахмонов З.Х. Суммы характеров с простыми числами. – Чебышевский сборник, 2014, т. 15, в. 2(50), с. 73–100.

Д.Ҷ.Хокиев

БАҲОИ СУММАҲОИ КӮТОҲИ ҚИМАТҲОИ ХАРАКТЕРҲО АЗ ПАЙДАРПАИҲОИ МАХСУСИ АДАДҲОИ НАТУРАЛӢ

Институти математикаи ба номи А.Ҷураеви Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақола баҳои намуди зерин ёфта шудааст

$$\sum_{\substack{x-y<n\le x\\ (n,q)=1,\, n\equiv\lambda(\mathrm{mod}\, d)}} \chi_q(n-\eta) \le 2^{\omega(q)}\sqrt{q}\ln q,$$

ки дар инҷо χ_q – характери примитивии аз χ тавлидшуда, q_1 – ҳосили зарби ададҳои соддаи ба D тақсимшаванда ва ба q тақсимнашавада, $d\setminus q_1$, $(\eta,q)=(\lambda,d)=(d,q)=1$, $y<x$, $x<q$. Баҳои гирифташуда баҳои маълуми Виноградов – Пояро барои пайдарпаиҳои лағжонидашудаи $n-\eta$ бо хосиятҳои нишондодашуда умумӣ мегардонад.

Калимаҳои калидӣ: *характерҳои Дирихле – тафриқҳои квадратӣ – суммаҳои дукарата.*

D.J.Khokiev

ESTIMATION OF SHORT CHARACTER SUMS OF SPECIAL SEQUENCE OF NATURAL NUMBERS

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

The estimation of the form

$$\sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1,\, n\equiv\lambda(\mathrm{mod}\, d)}} \chi_q(n-\eta)\le 2^{\omega(q)}\sqrt{q}\ln q,$$

was obtained in the paper, where χ_q - primitive character generated by character χ modulo D , q_1 – is the product of primes dividing D, but not dividing q, $d\setminus q_1$, $(\eta,q)=(\lambda,d)=(d,q)=1$, $y<x$, $x<q$. Obtained estimation is the generalization of the well-known estimation of Vinogradov-Poya for of shifted numbers $n-\eta$ with above properties.

Key words: *Dirichlet characters – quadratic residues – double the amount.*