ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
2015, том 58, №12

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Н.Ф.Олифтаев

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В L_2

Таджикский государственный университет коммерции

(Представлено академиком АН Республики Таджикистан М.Ш.Шабозовым 22.03.2015 г.)

В работе рассматривается экстремальная задача вычисления точных значений n-поперечников различных классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых τ-модулями гладкости m-го порядка r-ой производной $f^{(r)}(t)$.

Ключевые слова: *наилучшее приближение, модуль непрерывности, ряд Фурье, n-поперечник, τ-модуль непрерывности.*

1. Пусть $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ - множество положительных чисел вещественной оси; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ - пространство 2π-периодических измеримых функций, квадрат которых суммируем на $[0, 2\pi]$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть

$$\mathfrak{I}_{2n-1} = \left\{ T_{n-1}(x) : T_{n-1} = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right\}$$

– подпространство всевозможных полиномов порядка $\le n-1$.

Общеизвестно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

величина ее наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathfrak{I}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) \overset{def}{=} \inf \left\{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathfrak{I}_{2n-1} \right\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \qquad (1)$$

Адрес для корреспонденции: *Олифтаев Нодир Фезилобекович. 734055, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул.Дехоти, 1/2, Таджикский государственный университет коммерции. E-mail: nodir.oliftaev@inbox.ru*

где

$$S_{n-1}(f;x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)$$

$-$ частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$,

$$\rho_k^2(f)\overset{def}{=}a_k^2(f)+b_k^2(f).$$

Через $L_2^{(r)},\ r\in\mathbb{N}$ обозначим множество функций $f\in L_2,$ у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}\in L_2$. Символом $\left\|\Delta_h^m(f)\right\|$ - обозначим норму конечной разности m-го порядка функции $f\in L_2$ с шагом h:

$$\left\|\Delta_h^m(f)\right\|=\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f(x+kh)\right|^2dx\right\}^{1/2}$$

и равенством

$$\omega_m(f;t)\overset{def}{=}\sup\left\{\left\|\Delta_h^m(f)\right\|:\quad |h|\le t\right\} \tag{2}$$

определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f\in L_2$.

Для исследования структурных и конструктивных свойств величины наилучшего приближения функций алгебраическими полиномами в пространствах $L_p[a,b](1\le p<\infty)$ и $C[a,b]$ Камен Г. Иванов [1,2] ввёл в рассмотрение новые модификации модулей непрерывности, так называемые τ-модули гладкости, и изучил их свойства и связи с известными дифференциально-разностными характеристиками. Мы воспользуемся указанными величинами для решения ряда экстремальных задач теории полиномиальной аппроксимации в L_2, предварительно развивая и обобщая в $L_q\,(q\ge1)$ $-$ норме ранее известные результаты С.Б.Вакарчука [3] для τ-модулей гладкости.

Пусть $\lambda(x)$ — произвольная положительная 2π-периодическая функция, а $w(x)$ — непрерывная неотрицательная функция периода 2π. τ-модулем гладкости m-го порядка функции $f\in L_{\max(p,p')}[0,2\pi]$ $(p,p'\ge1)$ называют величину

$$\tau_m(f,w;\lambda)_{p,p'}=\left\|w(\cdot)\omega_m(f,\cdot;\lambda(\cdot))_{p'}\right\|_p, \tag{3}$$

где

$$\omega_m(f,x;\lambda(x))_{p'}=\left\{\frac{1}{2\lambda(x)}\int_{-\lambda(x)}^{\lambda(x)}\left|\Delta_h^m f(x)\right|^{p'}dh\right\}^{1/p'}.$$

Условимся, что если $w(x)\equiv 1,$ то вместо $\tau_m(f,1;\lambda)_{p,p'}$ будем писать просто $\tau_m(f;\lambda)_{p,p'}$. В [1] доказано, что если, например, $\lambda(x)\equiv u=const>0,$ $f\in L_p[0,2\pi],$ $w(x)\equiv 1$ и $p'\in[0,p],1<p<\infty,$ то

$$\tau_m(f;u)_{p,p'}\asymp\omega_m(f,u)_p, \tag{4}$$

где символ $''\asymp''$ означает соотношение слабой эквивалентности.

Для выяснении структурных и конструктивных свойств функции $f\in L_2^{(r)}$ посредством τ - модулей гладкости m-го порядка, с нашей точки зрения, определенный интерес представляет отыскание точного значения следующей экстремальной величины

$$\chi_{m,n,r,q}(\tau_m,\varphi;h)_{p'}=\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{2^{m/2}E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\tau_m^q(f^{(r)},1;t)_{p',2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}}, \tag{5}$$

где $1\le p'\le 2,$ $0<q\le 2,$ $h\in\mathbb{R}_+$ и $\varphi(t)$ − неотрицательная суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке $[0,h]$ функция.

Следуя работе [3], введём обозначение

$$\mathcal{J}_m(\upsilon)=\int\limits_0^\upsilon(1-\cos\tau)^m d\tau. \tag{6}$$

В работе [4] нами установлена следующая общая

Теорема. *Пусть* $r,m\in\mathbb{N},$ $h\in\mathbb{R}_+$ *и* $1/r<q\le 2.$ *Тогда при любых* $n\in\mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,r,q}(\tau_m,\varphi;h)_{p'}=\left(\int\limits_0^{nh}(t^{-1}\mathcal{J}_m(t))^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \tag{7}$$

2. Используя результат (7), продолжим исследование в этом направлении. Прежде чем сформулировать нужные нам результаты, напомним необходимые определения и обозначения, которыми воспользуемся при вычислении различных n-поперечников заданных классов функций.

Пусть $\mathfrak{M}\subset L_2$ – некоторый класс функций и пусть $L_n\subset L_2$ – некоторое подпространство заданной размерности $n.$ Величину

$$E_n(\mathfrak{M})_{L_2}:=E(\mathfrak{M},L_n)_{L_2}=\sup\{E(f;L_n)_{L_2}:f\in\mathfrak{M}\}=$$

$$=\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|_2:g\in L_n\right\}:f\in\mathfrak{M}\right\} \tag{8}$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{M}$ подпространством L_n размерности n. Величина (8) характеризует отклонение класса $\mathfrak{M}$ от подпространства L_n в метрике пространства L_2. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\| : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}f\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\left\|f - \mathcal{L}^{\perp} f\right\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathcal{L}^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками. Поскольку L_2 – гильбертово пространство, то между перечисленными n-поперечниками выполняются соотношения:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \le d^n(\mathfrak{M}, L_2) \le d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \tag{9}$$

Исходя из полученных результатов, связанных с характеристикой гладкости $\tau_m(f;u)_{p,p'}$, определим следующие классы функций. Через $W_q^{(r)}(\tau_1;h)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любых $r \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ и $1/r < q \le 2$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{h}\int_0^h \tau_1^q(f^{(r)};t)_{2,2}\, dt \le 1.$$

Через $W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любых $r \in \mathbb{N}$, $1/r < q \le 2$, $h \in \mathbb{R}_+$ выполняется условие

$$\frac{1}{h}\int_0^h \tau_1^q(f^{(r)};u)_{2,2}\, du \le \Phi(h),$$

где $\Phi(h)$ – неотрицательная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ *и* $1/r < q \le 2$. *Тогда при любых* $n \in \mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_1;h); L_2) = \lambda_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_1;h); L_2) =$$

$$= E_{n-1}(W_q^{(r)}(\tau_1;h))_2 = 2^{-1/2} n^{-r+1/q} \left(\frac{1}{h}\int_0^{nh}\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt\right)^{-1/q}. \tag{10}$$

В частности, при $q=2$ имеем

$$\lambda_{2n}(W_2^{(r)}(\tau_1;h);L_2)=\lambda_{2n-1}(W_2^{(r)}(\tau_1;h);L_2)=$$

$$=E_{n-1}(W_2^{(r)}(\tau_1;h))_2=n^{-r}\left(\frac{nh}{2(nh-Si(nh))}\right)^{1/2},\quad 0<nh\le\pi. \tag{11}$$

Отметим, что равенства (11) в определенном смысле являются обобщением одного результата Л.В.Тайкова [5] о наилучшем полиномиальном приближении периодических функций, принадлежащих пространству $L_2[0,2\pi]$, структурные свойства которых характеризуются усредненными значениями модулей непрерывности первого порядка производной $f^{(r)}\in L_2$ на случай, когда указанные свойства характеризуются τ-модулем первого порядка производной $f^{(r)}\in L_2$. В качестве следствия из теоремы 1 рассмотрим следующую задачу. Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций, принадлежащий пространству L_2, то требуется найти величину

$$\mathscr{L}_n(\mathfrak{M})=\sup\{|a_n(f)|,|b_n(f)|:\ f\in\mathfrak{M}\},$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Теорема 2. *Если $r\in\mathbb{N},\ 1/r<q\le 2,\ 0<h\le 3\pi/(4n)$, то справедливы равенства*

$$\sup\{|a_n(f)|,|b_n(f)|:\ f\in W_q^{(r)}(\tau_1;1,h)\}=$$

$$=2^{-1/2}\,n^{-r+1/q}\left\{\frac{1}{h}\int_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right\}^{-1/q}. \tag{12}$$

В частности, при $q=2$ имеем

$$\sup\{|a_n(f)|,|b_n(f)|:\ f\in W_2^{(r)}(\tau_1;1,\pi/n)\}=n^{-r}\left\{\frac{nh}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{1/2}.$$

Вычислим теперь точные значения n-поперечников класса $W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi)$. Следуя работе [6], полагая при $t=0$ значение функции $\dfrac{\sin t}{t}$ равным 1, через t_* обозначим значение ее аргумента, при котором эта функция достигает на полусегменте $[0,\infty)$ своего наименьшего значения. При этом $t_*(4,49<t_*<4,51)$ есть минимальный положительный корень уравнения $\mathrm{tg}x=x$. Положим

$$\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*=\begin{cases}1-\dfrac{\sin t}{t}, & \text{если } 0\le t\le t_*,\\[2mm] 1-\dfrac{\sin t_*}{t_*}, & \text{если } t_*\le t<\infty.\end{cases}$$

В этих обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если мажоранта* Φ *при любых* $h\in\mathbb{R}_+,\ 0<q\le 2,\ m,n\in\mathbb{N}$ *удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi^q(h)}{\Phi^q(\pi/n)}\ge\frac{\pi}{nh}\int_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{q/2}dt\cdot\left(\int_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right)^{-1}, \tag{13}$$

то при любых $r\in\mathbb{Z}_+$ *имеют место равенства*

$$\lambda_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)=\lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)=$$

$$=E_{n-1}(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)=\frac{\pi^{1/q}}{\sqrt{2}n^r}\left\{\int_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right\}^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{14}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ − *любой из перечисленных выше* n*-поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (13), не пусто.*

Из теоремы 3 вытекает следующее

Следствие. *При выполнении условий теоремы 3 имеют место равенства*

$$\lambda_{2n-1}(W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)=\lambda_{2n}(W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)=$$

$$=E_{n-1}(W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(\pi-Si(\pi))}}\cdot\frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{15}$$

Хорошо известно, что, если $f\in L_2^{(r)}$, то и все производные $f^{(r-s)}$ также принадлежат L_2, а потому определенный интерес представляет изучение поведения величины $E_{n-1}(f^{(r-s)})_{L_2}, s=0,1,\ldots,r$ на классах функций $W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi)$.

Теорема 4. *Пусть* $q=2,\ r\in\mathbb{Z}_+$. *Если функция* Φ *при любом* $h\in\mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)}\right)^2\ge\frac{\int_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*dt}{nh\left(1-\frac{Si(\pi)}{\pi}\right)}, \tag{16}$$

то для $s=0,1,\ldots,r$ *справедливо равенство*

$$\sup\{E_{n-1}(f^{(r-s)})_2:f\in W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi)\}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(\pi-Si(\pi))}}\cdot\frac{1}{n^s}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{17}$$

Поступило 22.03.2015 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ivanov Kamen G. On a new characteristic of functions. I − Сердика Бълг. Мат. Списание, 1982, т.8, №3, с.262-279.
2. Ivanov Kamen G. On a new characteristic of functions. II − Direct and converse theorems for the best algebraic approximation in C[-1;1] and L_p[-1;1] Сердика Бълг. Мат. Студ., 1983, т.5, с.151-163.
3. Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников. − Матем. заметки, 2001, т.70, №3, с.334-345.
4. Шабозов М.Ш., Олифтаев Н.Ф. Наилучшие приближения и точные значения поперечников некоторых классов периодических функций в L_2. − Известия АН Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2013, №4(153), с.23-32.
5. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2. − Матем. заметки, 1976, т.20, №3, с.433-438.
6. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников. − Матем. заметки, 2011, т.90, №5, с.764-775.

Н.Ф.Олифтаев

НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИН ВА ҚИМАТҲОИ АНИҚИ ҚУТРҲОИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ ФУНКСИЯҲОИ ДАВРӢ ДАР ФАЗОИ L_2

Донишгоҳи давлатии тиҷорати Тоҷикистон

Дар мақола масъалаи экстремалии ҳисобкунии қиматҳои аниқи n-қутрҳои синфҳои функсияҳои гуногун аз фазои $L_2^{(r)}$, ки бо τ-модулҳои бефосилагии тартиби m-уми ҳосилаи тартиби r-ум муайян шудаанд, ҳал шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *наздиккунии беҳтарин, модули бефосилагӣ, қатори Фуре, n-қутр, τ-модули бефосилагӣ.*

N.F.Oliftaev

THE BEST APPROXIMATION AND AN EXACT VALUES OF WIDTHS FOR SOME CLASSES PERIODIC FUNCTIONS IN L_2 SPACE

Tajik State University of Commerce

In this paper an extremal problem of calculation the values of n-widths for different classes functions from $L_2^{(r)}$ defined by modulus smoothness of m-th order and r-th derivative is considered.

Key words: *the best approximation, modulus of continuity, Fourier series, n-widths, τ-modulus of continuity.*