ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
2016, том 59, №9-10

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

О.К.Фарайдунов

О ПОГРЕШНОСТИ НАИЛУЧШИХ ВЕСОВЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком АН Республики Таджикистан М.Ш.Шабозовым 22.04.2016 г.)

В работе найдены точные оценки погрешности некоторых весовых квадратурных формул на заданных классах функций малой гладкости.

Ключевые слова: *квадратурная формула, модуль непрерывности, погрешность, вектор узлов, вектор коэффициентов.*

1. Напомним общую постановку экстремальной задачи отыскания наилучших квадратурных формул. Рассматривается квадратурная формула [1]

$$\int_a^b q(x)f(x)dx=\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)+R_n(q;f), \tag{1}$$

задаваемая векторами узлов $X=\{x_k : a\le x_1<x_2<\ldots<x_n\le b\}$ и коэффициентов $P=\{p_k\}$, $R_n(q;f):=R_n(q;f;X,P)$ – погрешность квадратурной формулы на функции f, весовая функция q предполагается неотрицательной и суммируемой на отрезке $[a,b]$.

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс заданных на $[a,b]$ функций f, то положим

$$R_n(q;\mathfrak{M}):=R_n(q;\mathfrak{M};X,P)=\sup_{f\in\mathfrak{M}}|R_n(q;f;X,P)|. \tag{2}$$

Требуется найти величину (см., напр., [1], с. 128):

$$E_n(q;\mathfrak{M}):=\inf_{(X,Y)}R_n(q;\mathfrak{M};X,P) \tag{3}$$

и указать вектор узлов $X^*=\{x_k^*\}$ и коэффициентов $P^*=\{p_k^*\}$, на котором достигается нижняя грань в правой части равенства (3), то есть выполняется равенство

$$\mathcal{E}_n(q;\mathfrak{M}):=R_n(q;\mathfrak{M};X^*,P^*).$$

Далее в качестве $\mathfrak{M}$ рассмотрим следующие классы функций:

$H^\omega[a,b]$ – класс функций f, определённых на отрезке $[a,b]$, для любых двух точек x', $x''\in[a,b]$ удовлетворяющих условию

Адрес для корреспонденции: *Фарайдунов Осим Косумшоевич. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: osim.tj@mail.ru.*

$$|f(x')-f(x'')|\le \omega(|x'-x''|),$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная и неубывающая на $[0,b-a]$ функция такая, что $\omega(0)=0$. В частности, при $\omega(x)=x^{\alpha}$, $0<\alpha\le 1$, получаем класс Гельдера $H^{\alpha}[a,b]$, состоящий из функций f, удовлетворяющих условию

$$|f(x')-f(x'')|\le |x'-x''|^{\alpha}, \quad x',x''\in[a,b].$$

$W^{(1)}L[a,b]$ – класс функций f, абсолютно непрерывных на $[a,b]$ и таких, для которых

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx\le 1.$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1. *Среди всех квадратурных формул вида*

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{k=1}^{n}p_k f(x_k)+R_n\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1},f\right) \tag{4}$$

наилучшей на классе $H^{\omega}[-1,1]$ *является квадратурная формула Эрмита - Чебышева*

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)+R_n\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1},f\right). \tag{5}$$

При этом для оценки погрешности формулы (5) на всём классе $H^{\omega}[-1,1]$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_n\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1};H^{\omega}[-1,1]\right)=2n\int_0^{\pi/(2n)}\omega(t)dt. \tag{6}$$

В частности,

$$\mathcal{E}_n\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1};H^{\alpha}[-1,1]\right)=\frac{\pi^{\alpha+1}}{2^{\alpha}(\alpha+1)}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}},\ \ (0<\alpha\le 1). \tag{7}$$

Доказательство. Полагая

$$x=\cos t,\ \ -1\le x\le 1,\ \ 0\le t\le\pi,\ \ \varphi(t)=f(\cos t), \tag{8}$$

имеем

$$x_k=\cos t_k\ (k=\overline{0,n}),\ n\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

Из равенств (4), (8) и (9) находим формулу

$$\int_0^{\pi}\varphi(t)dt=\sum_{k=1}^{n}p_k\varphi(t_k)+R_n(\varphi). \tag{10}$$

В силу (4), (8)-(10) получаем

$$R_n\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}, f\right) = \int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} - \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) =$$

$$= \int_0^{\pi}\varphi(t)dt - \sum_{k=1}^{n} p_k\varphi(t_k) = R_n(\varphi). \tag{11}$$

Из равенства (3) в силу (11) сразу следует, что

$$\mathcal{E}_n\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}, H^{\omega}[-1,1]\right) = \mathcal{E}_n\left(H^{\omega}[0,\pi]\right), \tag{12}$$

а потому достаточно вычислить точное значение величины, стоящей в правой части равенства (12). Для этого будем следовать схеме рассуждений Н.П.Корнейчука [2], а именно сопоставим вектору узлов $T = \{t_k\}$ квадратурной формулы (10) подмножество функций

$$H_0^{\omega}[0,\pi] := \left\{\varphi : \varphi \in H^{\omega}[0,\pi], \varphi(t_k) = 0, k = \overline{1,n}\right\}.$$

Согласно результатам работы [2], при произвольном векторе коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^{n}$ для этого подмножества функций имеем:

$$\mathcal{E}_n\left(H^{\omega}[0,\pi]\right) = \inf_{(T,P)}\sup_{f\in H_0^{\omega}}\left|R_n\left(\varphi; T, P\right)\right| = \int_0^{\pi}\varphi_0(t)dt, \tag{13}$$

где

$$\varphi_0(t) := \left\{\omega\left(\left|t - \frac{2k-1}{2n}\pi\right|\right), \frac{k-1}{n}\pi \le t \le \frac{k}{n}\pi;\quad k = \overline{1,n}\right\}, \tag{14}$$

причём непосредственное вычисление интеграла в (13) с учётом вида функции (14) приводит к равенству

$$\mathcal{E}_n\left(H^{\omega}[0,\pi]\right) = 2n\int_0^{\pi/(2n)}\omega(t)dt, \tag{15}$$

и так как $H_0^{\omega}[0,\pi] \subset H^{\omega}[0,\pi]$, то из (15) вытекает, что

$$\mathcal{E}_n\left(H^{\omega}[0,\pi]\right) \ge \mathcal{E}_n\left(H_0^{\omega}[0,\pi]\right) = 2n\int_0^{\pi/(2n)}\omega(t)dt. \tag{16}$$

Теперь оценим сверху величину погрешности формулы прямоугольников, у которой вектор узлов и коэффициентов имеет вид

$$T^0 = \left\{ t_k^0 : t_k^0 = \frac{2k-1}{2n}\pi \right\}_{k=1}^{n}, \quad P^0 := \left\{ p_k^0 : p_k = \frac{\pi}{n} \right\}_{k=1}^{n}. \tag{17}$$

Очевидно, что для произвольной функции $\varphi \in H^{\omega}[0,\pi]$ погрешность квадратурной формулы прямоугольника, задаваемой векторами узлов и коэффициентов (17), допускает следующую оценку сверху

$$R_n\left(\varphi; T^0, P^0\right) = \left| \int_0^{\pi} \varphi(t)dt - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left[\varphi(t) - \varphi\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \right] dt \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \omega\left(\left| t - \frac{2k-1}{2n}\pi \right| \right) dt = 2n \int_0^{\pi/(2n)} \omega(t)dt. \tag{18}$$

Из сопоставления оценки снизу (16) и оценки сверху (18) на всём классе $H^{\omega}[0,\pi]$ получаем погрешность наилучшей квадратурной формулы

$$\int_0^{\pi} \varphi(t)dt = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k \varphi\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + R_n(\varphi), \tag{19}$$

равную

$$\mathcal{E}_n\left(H^{\omega}[0,\pi]\right) = 2n \int_0^{\pi/(2n)} \omega(t)dt. \tag{20}$$

Очевидно, что наилучшей квадратурной формуле в силу (8) соответствует квадратурная формула Эрмита-Чебышева (5), погрешность которой согласно (12) равна (20), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Среди всех квадратурных формул вида (4) наилучшей на классе* $W^{(1)}L[-1,1]$ *квадратурной формулой является формула Эрмита-Чебышева (5). При этом погрешность формулы (5) на всём классе* $W^{(1)}L[-1,1]$ *равна*

$$\mathcal{E}_n\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}; W^{(1)}L[-1,1] \right) = \frac{\pi}{2n}. \tag{21}$$

Доказательство. В самом деле, согласно результатам работ [3,4], векторы узлов и коэффициентов, наилучшие для класса $W^{(1)}L[-1,1]$, определяются как решение следующей системы уравнений

$$\int_{x_k}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2n-2k+1}{2n}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ (k=1,2,...,n) \tag{22}$$

$$p_k=\frac{1}{n}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ (k=1,2,...,n), \tag{23}$$

а наилучшая погрешность наилучшей на $W^{(1)}L[-1,1]$ формулы равна

$$\mathcal{E}_n\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1};W^{(1)}L[-1,1]\right)=\frac{1}{2n}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{24}$$

Из (22) и (23) определим вектор узлов и коэффициентов искомой наилучшей формулы:

$$X^*:=\left\{x_k^*:x_k^*=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\ k=\overline{1,n}\right\},\quad P^*:=\left\{p_k^*:p_k^*=\frac{\pi}{n}\right\},$$

а из (24) следует равенство (21). Теорема 2 доказана.

2. В этом пункте рассмотрим задачу отыскания наилучшей для класса $H^{\omega}[-1,1]$ квадратурной формулы типа Маркова [см., напр., [5], с.156] следующего вида

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=p_0f(-1)+\sum_{k=1}^{n-1}p_kf(x_k)+p_nf(1)+R_n^0\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1};f\right), \tag{25}$$

задаваемой векторами (X,P) узлов $X=\{x_k:-1=x_0<x_1<...<x_n=1\}$ и коэффициентов $P=\{p_k\}_{k=0}^{n}$. Таким образом изучаем задачу отыскания наилучшей квадратурной формулы вида (25), когда заранее зафиксированы в качестве узлов концы промежутка интегрирования: $x_0=-1,\ x_n=1$, а узлы $x_1,x_2,...,x_{n-1}$ и коэффициенты $p_0,p_1,...,p_n$ следует выбрать оптимальным образом. Как и в предыдущем пункте, с помощью замены (8) формулу (25) приводим к виду

$$\int_{0}^{\pi}\varphi(t)dt=p_0\varphi(0)+\sum_{k=1}^{n-1}p_k\varphi(t_k)+p_n\varphi(\pi)+R_n(\varphi). \tag{26}$$

Пользуясь схемой рассуждений работы [5] для квадратурной формулы Маркова, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Среди всех квадратурных формул вида (25) наилучшей на классе* $H^{\omega}[-1,1]$ *является квадратурная формула*

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{n}\left\{\frac{f(-1)+f(1)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right\}+R_n^*\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1};f\right). \tag{27}$$

Для оценки погрешности формулы (23) на всём классе функций $H^{\omega}[-1,1]$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_n^*\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1};H^{\omega}[-1;1]\right)=2n\int_0^{\pi/(2n)}\omega(t)dt. \qquad (28)$$

Поступило 22.04.2016 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988, 279 с.
2. Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных. – Мат. заметки, 1968, т.3, №5, с. 555-576.
3. Гиршович Ю. О некоторых наилучших квадратурных формулах на бесконечном интервале. – Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ-мат. наук., 1975, №24/1, с.121-123.
4. Шабозов М.Ш., Каландаршоев С. Точные оценки погрешности квадратурных формул на классах функций малой гладкости – ДАН РТ, 1998, т.41, №10, с.69-75.
5. Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Наилучшая квадратурная формула типа Маркова для класса функций, задаваемых модулями непрерывности. – Вестник Санкт-Петербургского университета, сер. 1, 2014, вып.1, с. 79-86.

О.Қ.Фарайдунов

ОИДИ САҲВИ ФОРМУЛАҲОИ КВАДРАТУРИИ ВАЗНДОРИ БЕҲТАРИН БАРОИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ ФУНКСИЯҲО

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола баҳои аниқи саҳви формулаҳои квадратурии вазндор барои баъзе синфи функсияҳои дорои суфтагии кам ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *формулаи квадратурӣ, модули бефосилагӣ, хатогӣ, вектори гиреҳҳо, вектори коэффисиентҳо.*

O.Q.Faraydunov

ABOUT THE ERROR OF THE BEST GRAVIMETRIC QUADRATURE FORMULAS FOR SOME CLASSES OF FUNCTIONS

Tajik National University

The exact error estimates of weight quadrature formula in some classes functions of lower smoothness were found in this work.

Key words: *quadrature formula, module continuity, error, vector nodes, the vector of coefficients.*