МАТЕМАТИКА

УДК 517.946.2

Д.С.Сафаров

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Курган-Тюбинский государственный университет им. Н.Хусрава

(Представлено академиком АН Республики Таджикистан З.Д.Усмановым 25.12.2015 г.)

В работе методами теории эллиптических функций Вейерштрасса и теории обобщённых аналитических функций Векуа исследован один класс эллиптических систем второго порядка с отклоняющимся аргументом.

Ключевые слова: *двоякопериодические решения, эллиптические функции, периодическая функция, мероморфная функция.*

На комплексной плоскости ℂ рассмотрим эллиптическую систему в комплексной форме

(1)

где $z = x + iy, w = u + iv, 2w_{\bar{z}} = w_x + iw_y$ −дифференциальный оператор Коши-Римана, и дифференциальный оператор Бицадзе [1], постоянные комплексные числа, $f(z)$ − заданная функция. Уравнение (1) в случае $h = 0$ изучено в [2] в связи с разрешимостью задачи Дирихле для эллиптических систем высокого порядка. Задачи существования и нахождения двоякопериодических решений с заданными периодами и с полюсами исследованы в [3, 4].

В работе будем искать решения уравнения (1), допускающие полюсы как у однозначных аналитических функций (или мероморфных) в любой ограниченной области ℂ, содержащей точки и принадлежащей классу $C^2(\Omega_0)$, где символом которая не содержит полюсов решения. Класс таких решений (1) обозначим через и будем понимать их как класс обобщённых решений в смысле [2]. В случае, когда будем говорить о регулярных решениях уравнения (1), то есть класса C^2.

Наряду с уравнением (1), рассмотрим соответствующее ему однородное уравнение

(2)

и частное решение этого уравнения будем искать в виде

(3)

где λ − комплексный параметр, пока неизвестный. Подставляя (3) в (2), находим, что λ должна удовлетворять так называемое характеристическое уравнение

Адрес для корреспонденции: *Сафаров Джумабой Сафарович. 735140, Республика Таджикистан, г. Курган-Тюбе, ул. Айни, 67, Курган-Тюбинский государственный университет. E-mail: Safarov-5252@mail.ru*

$$\lambda^2 + (a\lambda + b)e^{\lambda\bar{h}} = 0\,. \tag{4}$$

Функция $F(\lambda) = \lambda^2 + (a\lambda + b)e^{\lambda\bar{h}} -$ целая аналитическая функция на плоскости $\mathbb{C}_\lambda$. Поэтому уравнение (4) имеет бесконечное множество корней и в любой ограниченной части плоскости $\mathbb{C}_\lambda$ имеет не более чем конечное число корней.

Если $\lambda -$ корень уравнения (4), то функция вида (3) является решением уравнения (2) и удовлетворяет условию

$$v(z+h) = e^{\lambda\bar{h}}v(z)\,. \tag{5}$$

Тогда легко можно увидеть, что всякая другая функция $\chi(z)$, удовлетворяющая условию (5), представима в виде

$$\chi(z) = e^{\lambda\bar{z}}\varphi(z), \tag{6}$$

где $\varphi(z) -$ периодическая функция с периодом h.

Теперь отыскиваем решение уравнения (2) в виде (6), в котором $\lambda -$ корень уравнения (4) и $\varphi(z) -$ искомая периодическая функция с периодом h. Тогда для $\varphi(z)$ получим уравнение вида

$$\varphi_{\bar{z}\bar{z}} + A(\lambda)\varphi_{\bar{z}} = 0\,, A(\lambda) = 2\lambda + ae^{\lambda\bar{h}}. \tag{7}$$

В этом уравнении коэффициент $A(\lambda)$ функция λ, $\lambda -$ простой корень уравнения (4). Решение уравнения надо найти в классе периодических функций с периодом h и допускающих в любой конечной части плоскости $\mathbb{C}$ особые точки типа полюса, как у однозначных аналитических функций.

Все периодические решения уравнения (7) в классе $\tilde{C}^2$ представимы в виде

$$\varphi(z) = \Phi_1(z)e^{-A(\lambda)\bar{z}} + \Phi_2(z)\,, \tag{8}$$

где $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z) -$ мероморфные функции, причем $\Phi_2(z) -$ периодическая функция с периодом h, а $\Phi_1(z)$ удовлетворяет условию

$$\Phi_1(z+h) = \Phi_1(z)e^{A(\lambda)\bar{h}}\,. \tag{9}$$

Представление (8) единственно, то есть если $\varphi(z) \equiv 0$, то $\Phi_1(z) \equiv 0$, $\Phi_2(z) \equiv 0$.

Так как общее решение уравнения выражается через периодическую функцию с периодом h, то постоянное отклонение h в уравнении (1) должно являться периодом некоторой мероморфной функции. Согласно теореме, доказанной Якоби и Абелем [5,6], любой период Т мероморфной функции $\Phi(z)$ имеет вид

$$\mathrm{T} = nh_1 + mh_2\,, \tag{10}$$

где n и $m -$ целые числа, а числа h_1, h_2 называются основными периодами функции $\Phi(z)$.

Отсюда следует, что все мероморфные периодические функции делятся на два класса:

1 - однопериодические функции, то есть один из основных периодов, например $h_2 = 0$, а $h_1 \neq 0$;

2 - двоякопериодические функции, то есть оба основных периода $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$ и $Im(h_2/h_1) \neq 0$.

Заметим, что в случае, когда h_2/h_1 − рационально, имеются случаи однопериодических функций. А когда h_2/h_1 −иррационально, то, как доказал Якоби, не существуют отличные от постоянной мероморфные функции [6].

Теперь при условии, что постоянная h в уравнении (1) представима в виде (10), в котором $Im(h_2/h_1) > 0$, будем искать обобщенные решения (1) в классе $\tilde{C}^2$. В этом случае в представлении (8) функцию $\Phi_2(z)$ можно считать мероморфной двоякопериодической с основными периодами h_1, h_2, то есть эллиптической, а функцию $\Phi_1(z)$ эллиптической функцией второго рода [3], полюсы которых суть полюсы решения (1).

Для двоякопериодической функции с основными периодами h_1, h_2 , $Im(h_2/h_1) > 0$, вся плоскость разобьется на параллелограммы периодов

$$\Omega_{m_1 m_2} = \{z_0 + m_1 h_1 + m_2 h_2\},\ m_1 = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots, m_2 = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots,$$

z_0 − произвольная точка плоскости $\mathbb{C}$.

Пусть Г − решетка периодов $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2\ ;\ m_1, m_2 - \text{целые числа}\}$ и

$$\Omega = \{z_0 + t_1 h_1 + t_2 h_2\ , 0 \le t_1 < 1, 0 \le t_2 < 1\ \}$$

- основной параллелограмм решетки Г, здесь, не ограничивая общности, можно считать $z_0 = 0$. Будем искать обобщенные решения уравнения (1) в виде (6), в котором $\varphi(z)$ двоякопериодическая функция с основными периодами h_1, h_2 . Тогда, в представлении общего решения однородного уравнения (2), функция $\Phi_2(z)$ является двоякопериодической мероморфной функцией с основными периодами h_1, h_2, то есть эллиптической функцией, а $\Phi_1(z)$ − эллиптическая функция, удовлетворяющая условию

$$\Phi_1(z + h_j) = e^{A(\lambda)\bar{h}_j}\Phi_1(z),\ j = 1,2. \qquad (11)$$

Пусть известны полюсы решения уравнения (1) $a_1, a_2, \cdots, a_n$, лежащие в основном параллелограмме Ω . Пусть главная часть, соответствующая полюсу a_k , имеет вид

$$e^{\lambda\bar{z}}\sum_{j=1}^{\nu_k} C_{kj}(-1)^j(j-1)!\,(z - a_k)^{-j},\ k = 1, 2, \cdots, n, \qquad (12)$$

где λ − простой корень уравнения (4), ν_k − кратность a_k .

Решение уравнения (1) с заданными главными частями вида (12) представим в виде

$$w(z) = e^{\lambda\bar{z}}\left[\psi(z) + e^{-A(\lambda)\bar{z}}\chi(z)\right], \qquad (13)$$

где $\psi(z), \chi(z)$ − искомые функции, причем $\psi(z)$ − двоякопериодическая функция с периодами h_1, h_2, а $\chi(z)$ − двоякопериодическая функция второго рода, удовлетворяющая условию (11) с периодами h_1, h_2. Подставляя (13) в (1), в случае $A(\lambda) \neq 0$ относительно неизвестных $\psi(z)$ и $\chi(z)$ получим неоднородные уравнения Коши-Римана

$$\psi_{\bar{z}} = \frac{1}{A(\lambda)}e^{-\lambda\bar{z}}f(z)\,, \qquad (14)$$

$$\chi_{\bar{z}} = -\frac{1}{A(\lambda)}e^{A(\lambda)\bar{z}-\lambda z}f(z)\,. \qquad (15)$$

Для получения решения (1) с заданными главными частями вида (12) достаточно считать, что в представлении (13) $\psi(z)$ − имеет полюсы в точках $a_1, a_2, \cdots, a_n$ с главными частями

$$\sum_{j=1}^{\nu_j} C_{kj}(-1)^j (j-1)!\,(z-a_k)^{-j} \,. \tag{16}$$

А функция $\chi(z)$ не имеет полюсов. Тогда $\psi(z)$ − обобщенное решение (14), а $\chi(z)$ − регулярное решение (15).

Такие задачи для неоднородного уравнения Коши-Римана изучены в [3].

Для разрешимости уравнений (14) и (15) необходимо, чтобы правая часть уравнения (1) удовлетворяла условию

$$f(z+h_j) = e^{\lambda \bar{h}_j} f(z)\,,\ j = 1, 2. \tag{17}$$

Предположим, что $f(z)$ удовлетворяет условию (17) и является непрерывной в основном параллелограмме Ω по Гёльдеру, с показателем $0 < \alpha \le 1$. Тогда функция $g(z) = f(z)\exp(-\lambda\bar{z})$ является двоякопериодической с периодами h_1, h_2 и непрерывной по Гёльдеру в Ω

При этих предположениях функция

$$g_1(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega g(t)\zeta(t-z)d\Omega = \mathrm{T}_\zeta\left(e^{-\lambda\bar{z}} f(z)\right),$$

где $\zeta(z)$ − дзета-функция Вейерштрасса, построенная на периодах h_1, h_2 , обладает свойствами [3]:

1) $\frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}} = e^{-\lambda\bar{z}} f(z)$;

2) $g_1(z+h_j) = g_1(z) + \eta_j f_0\,, j = 1, 2,$

где $\eta_1\,, \eta_2$ − циклические постоянные $\eta_j = 2\zeta(h_j/2)$ и вместе с периодами h_1, h_2 связаны соотношением Лежандра [5]

$$\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i\,, \tag{18}$$

$$f_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega e^{-\lambda\bar{z}} f(z)d\Omega\,.$$

Тогда из (14) находим

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \frac{1}{A(\lambda)} g_1(z)\,,$$

где $\psi_1(z)$ − квазиэллиптическая функция, удовлетворяющая условию

$$\psi_1(z+h_j) = \psi_1(z) - \eta_j f_0\,, j = 1, 2,$$

и имеет главные части вида (16).

Как показано в [3], для существования таких функций необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} C_{kj} = -f_0\,. \tag{19}$$

При этом уравнение (14) имеет решение вида

$$\psi(z) = c_1 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\nu_k} C_{kj}\zeta^{(j-1)}(z-a_k) + \frac{1}{A(\lambda)}\mathrm{T}_\zeta\left(e^{-\lambda\bar{z}} f(z)\right)\,,$$

где c_1 − произвольная постоянная.

Характер разрешимости уравнения (15), как показано в [3], зависит от свойства $A(\lambda)$:

1) $\mathrm{A}(\lambda) \in \Gamma_1$; 2) $\mathrm{A}(\lambda) \overline{\in} \Gamma_1$, где Γ_1 − решетка вида

$$\Gamma_1 = \frac{\pi}{|\Omega|}\Gamma\,, |\Omega| = mes\Omega = |h_1|^2 Im(h_2/h_1).$$

Согласно результатам работы [3], имеем:

1) при $\mathrm{A}(\lambda) \in \Gamma_1$ для разрешимости уравнения (14) в классе функций, удовлетворяющих условию (9) и регулярных в Ω, то есть из класса $C^1(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_\Omega f(z)\exp\,(\alpha z + A(\lambda)\bar{z} - \lambda\bar{z})d\Omega = 0\,, \tag{20}$$

где постоянное α удовлетворяет уравнению

$$\exp\big(\alpha h_1 + A(\lambda)\bar{h}_1\big) = \exp\big(\alpha h_2 + A(\lambda)\bar{h}_2\big) = 1\,. \tag{21}$$

При этом все решения (14) представляются в виде

$$\chi(z) = e^{-\alpha z - A(\lambda)\bar{z}}\left[c_2 + \tfrac{1}{A(\lambda)}\mathrm{T}_\zeta\big(f(z)e^{\alpha z + A(\lambda)\bar{z} - \lambda\bar{z}}\big)\right],$$

c_2 − произвольная постоянная.

2) При $\mathrm{A}(\lambda) \overline{\in} \Gamma_1$ уравнение (15), при любой правой части $f(z)$ удовлетворяющее условию (17), имеет одно единственное решение вида [3]

$$\chi(z) = e^{-\alpha_1 z}\,\tfrac{1}{A(\lambda)}\mathrm{T}_\sigma\big(f(z)e^{\alpha_1 z + A(\lambda)\bar{z} - \lambda\bar{z}}\big)\,,$$

причем однородное уравнение имеет только нулевое решение, где $\mathrm{T}_\sigma\rho$ − интегральный оператор с ядром $\sigma(z)$ − функция Вейерштрасса [3],

$$\mathrm{T}_\sigma\rho = -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \rho(t)\frac{\tau(t - z - \Delta)}{\tau(-\Delta)\tau(t - z)}d_t\Omega\,, \Delta \overline{\in} \Gamma\,,$$

постоянные α_1 и Δ − суть решение системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 h_1 + \eta_1\Delta = A(\lambda)\bar{h}_1\\ \alpha_2 h_2 + \eta_2\Delta = A(\lambda)\bar{h}_2\end{aligned}\right\}. \tag{22}$$

Эта система благодаря соотношению Лежандра (18) имеет единственное решение $(\alpha_1;\ \Delta)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1)* $h = nh_1 + mh_2\,, n, m -$ *некоторые целые числа,* $Im(h_2/h_1) > 0$, $\lambda -$ *простой корень характеристического уравнения (4),* $\Gamma -$ *решетка* $\Gamma = \{m_1h_1 + m_2h_2\,;\ m_1\,, m_2 - \text{целые числа}\}$, $\Omega = \mathbb{C}/\Gamma -$ *основной параллелограмм периодов* Γ *с вершинами* $0, h_1 + h_2\,, h_2$.

Пусть решение (1) допускает полюсы в точках $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n \in \Omega$ *с главными частями вида (12),* $f(z) -$ *удовлетворяет условию (17) и непрерывна по Гельдеру в* Ω. *Тогда при выполнении условий (19),* $A(\lambda) \in \Gamma_1$ *и (20) уравнение (1) имеет решение вида*

$$w(z) = e^{\lambda\bar{z}}\left[c_1 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\nu_k} C_{kj}\zeta^{(j-1)}(z-a_k) + \frac{1}{A(\lambda)}T_\zeta\left(e^{-\lambda\bar{z}}f(z)\right) + c_2 e^{-\alpha z - A(\lambda)\bar{z}} + ,\right.$$

$$\left. + e^{-\alpha_1 z - A(\lambda)\bar{z}}\frac{1}{A(\lambda)}T_\zeta\left(e^{\alpha_1 z + A(\lambda)\bar{z} - \lambda\bar{z}}f(z)\right)\right]$$

где c_1, c_2 − произвольные постоянные, постоянная α удовлетворяет уравнению (21).

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда при выполнении условия*

$$\sum_{j=1}^{n} C_{j1} = \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega} e^{-\lambda\bar{z}}f(z)d\Omega$$

и $A(\lambda) \in \Gamma_1$ уравнение (1) имеет решение вида

$$w(z) = e^{\lambda\bar{z}}\left[c_1 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\lambda_k} C_{kj}\zeta^{(j-1)}(z-a_k) + \frac{1}{A(\lambda)}T_\zeta\left(e^{-\lambda\bar{z}}f(z)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{A(\lambda)}e^{-\alpha_1 z - A(\lambda)\bar{z}}T_\sigma\left(e^{\alpha_1 z + A(\lambda)\bar{z} - \lambda\bar{z}}f(z)\right)\right],$$

где c_1 − произвольная постоянная, постоянные α_1, Δ − решение системы (22).

Поступило 25.12.2015 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981, 448с.
2. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. – М., 1959, 629с.
3. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщённые аналитические функции и их приложение. – Душанбе :Дониш, 2012, 190 с.
4. Сафаров Д.С., Саидназаров Р.С. Обобщённые двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка. – ДАН РТ, 2013, т. 56, №10, с. 779-786.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987, 688 с.
6. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. ч. 2.– М.: Физматгиз 1963.

Ҷ.С.Сафаров

ДАР БОРАИ ОМӮЗИШИ ЯКЕ АЗ СИСТЕМАҲОИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ДУЮМ БО КОЭФФИСЕНТИ ДОИМӢ ВА АРГУМЕНТИ ФАРҚКУНАНДА

Донишгоҳи давлатии Қӯргонтеппа ба номи Носири Хусрав

Дар мақола бо усули назарияи функсияҳои эллиптикии Вейерштрасс ва назарияи функсияҳои таҳлилии умумии Векуа як синфи системаи эллиптикии тартиби дуюм бо аргументи фарққунанда омӯхта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *ҳалли дудаврдошта, функсияҳои эллиптикӣ, функсияи даврӣ, функсияи мероморфӣ.*

D.S.Safarov

ON THE INVESTIGATION OF A SECOND ORDER ELLIPTIC SUSTEM WITH CONSTANT COEFFICIENTS AND DEVIATION OF THE ARGUMENT

N.Khusrav Qurgantyube State University

A class of second order elliptic systems with the deviation of argument is investigated in the paper by the method of the theory of the Weierstrass elliptic functions and by the theory of the Vekua generalized analytic functions.

Key words: *doubly periodic solution, elliptic functions, periodic function –meromorphic function.*