ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
2016, том 59, №9-10

ФИЗИКА

УДК 51-72:530.145+537.621+537.9

Член-корреспондент АН Республики Таджикистан Х.Х.Муминов,

Д.А.Саттаров, Ю.Юсефи

ОБОБЩЁННАЯ ФАЗА БЕРРИ СПИНОВОЙ СИСТЕМЫ СО СПИНОМ S=1

Физико-технический институт им. С.У.Умарова АН Республики Таджикистан

В работе проведено последовательное обобщение фазы Берри для спиновой системы спином S=1 с использованием дифференциальной 2-формы в когерентных состояниях группы SU(3). Показано, что обобщённая фаза Берри появляется при наличии одноионной анизотропии.

Ключевые слова: *фаза Берри, геометрическая фаза, SU(3)-спиновые когерентные состояния, дифференциальная форма, внешнее умножение, внешняя производная.*

С того времени, как была опубликована знаменитая статья Берри (M.V.Berry) «Квантовые фазовые множители, сопровождающие адиабатические изменения» [1], понятие геометрической фазы (ГФ), или фазы Берри (ФБ), распространилось в самые различные области физики. С ГФ связывают эффекты Яна – Теллера, Ааронова – Бома, квантовый эффект Холла. Берри обратил внимание на то, что при медленной (адиабатической) циклической эволюции волновая функция системы приобретает фазовый множитель, содержащий, кроме тривиальной динамической фазы, дополнительную топологическую фазу. В [2] было показано, что ФБ есть голономия, поворот на некоторый угол касательного вектора при его параллельном переносе вдоль замкнутой кривой на изогнутой поверхности в пространстве параметров системы, например на сфере, для трехмерного случая [3].

Рассмотрим систему, которая описывается гамильтонианом $\hat{H}$, изменяющимся варьированием параметров). Тогда циклическая эволюция системы во времени от t=0 до t=T будет описываться как перемещение вдоль замкнутого контура в параметрическом пространстве с гамильтонианом и $\vec{\mathbf{R}}(T)=\vec{\mathbf{R}}(0)$. Этот замкнутый контур обозначим через *C*. Для адиабатического приближения время *T* должно быть большим. Состояние системы эволюционирует согласно уравнению Шрёдингера

$$\rangle.$$

В любой момент времени естественный базис составлен из собственных состояний оператора), которые удовлетворяют уравнению на собственные значения $E_n(\vec{\mathbf{R}})$. Система, находящаяся в одном из таких состояний $\rangle$, при адиабатическом процессе эволюционирует вместе с и в момент времени t окажется в состоянии $\left|n\left(\vec{\mathbf{R}}(t)\right)\right\rangle$. Тогда изменение геометрической фазы вдоль всего контура *C* имеет вид [1]

Адрес для корреспонденции: *Саттаров Джамолиддин Абдужабборович. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр. Айни, 299/1, Физико-технический институт АН РТ. E-mail: iristropos@yandex.ru*

$$\Phi_n(C) = i \oint_{\partial D} \langle n(\vec{\mathbf{R}}) \,|\nabla_{\vec{\mathbf{R}}} n(\vec{\mathbf{R}})\rangle \mathrm{d}\vec{\mathbf{R}} \ , \tag{1}$$

где $\partial D = C$ – контур, вырезающий на поверхности возможных состояний область D.

Применяя теорему Стокса к (1), ФБ можно выразить через интеграл по поверхности [1]

$$\Phi_n(C) = -\mathrm{Im} \iint_D \mathrm{d}\,\mathbf{S} \cdot \nabla \times \langle n|\nabla n\rangle = -\mathrm{Im} \iint_D \mathrm{d}\,\mathbf{S} \cdot \langle \nabla n| \times |\nabla n\rangle. \tag{2}$$

Фаза Берри в виде (2) применима к системам со спином $S = \frac{1}{2}$, однако в случае систем с более высоким спином, при наличии дополнительных степеней свободы спиновой динамики выражение (2), вообще говоря, не даёт полного описания системы.

Получим фазу Берри, возникающую при эволюции спиновой системы со спином S=1 при наличии одноионной анизотропии, которая приводит к возбуждению квадрупольных степеней свободы спиновой динамики. Адекватное описание таких систем на полуклассическом уровне, как было показано в работах [4,5], обеспечивается применением обобщённых когерентных состояний (КС), построенных на группе *SU(3)*. Спиновая динамика в этом случае описывается четырьмя действительными переменными [4]. Поэтому теорему Стокса в том виде, в котором она использована выше (трёхмерный случай), применять нельзя, её следует обобщить. Такое обобщение проведено в рамках теории дифференциальных форм и дифференциальной геометрии [6,7]. Производная по направлению ∇ переходит во внешнюю производную d, а векторное произведение $\times$ — во внешнее произведение $\wedge$ дифференциальных форм. Выражение (1) преобразуется в интеграл от 2-формы по поверхности, ограниченной контуром *C* в некотором многообразии. Как известно из теории дифференциальных форм, если α и β есть *p*- и *q*-формы соответственно, то их внешнее произведение есть (p+q)-форма, причём $\alpha \wedge \beta = (-1)^{p\,q} \beta \wedge \alpha$, а также $\alpha \wedge \alpha = 0$. Внешняя производная нильпотентна, то есть $dd = 0$. Такая производная действует на внешнее произведение по модифицированному правилу Лейбница $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$.

Обобщённая теорема Стокса — центральная теорема интегрального исчисления дифференциальных форм на *n*-мерном многообразии. Для любой *n*-мерной области *D* на ориентированном *n*-мерном многообразии *M* и для любой (*n*-1)-формы:

$$\int_D d\,\alpha = \int_{\partial D} \alpha \ , \tag{3}$$

где ∂D есть (*n*-1)-мерный многогранник — внешняя граница области D и ориентированный в направлении внешней нормали [6,7]. В рассматриваемом случае многообразие *M* представляет собой четырёхмерное пространство параметров χ_i (i=1,2,3,4) КС группы *SU(3)*.

Замечая, что в выражении (1) присутствует 1-форма и, заменив состояния $|n\rangle$ на *SU(3)*-КС $|CS\rangle$, перепишем его в следующем виде

$$\Phi_{CS}(C) = i \oint_{\partial D} \langle CS|d|CS\rangle \ . \tag{4}$$

Применяя формулу Стокса (3) к (4), получим

$$i\oint_{\partial D}\langle CS|d|CS\rangle = i\int_{D} d\left(\langle CS|d|CS\rangle\right). \tag{5}$$

Воспользуемся фактом нильпотентности производной и её действия на внешнее произведение и преобразуем (5) к следующему виду

$$\Phi_{CS}(C) = i\int_{D}\langle dCS(\chi(t))| \wedge \left|dCS(\chi(t))\right\rangle. \tag{6}$$

Таким образом, в выражениях (4) и (6) имеем 1-форму (связность $\mathcal{A}$) и 2-форму (кривизну $\mathcal{F}$) соответственно:

$$\mathcal{A}(\chi) = i\langle CS(\chi)|d|CS(\chi)\rangle = i\langle CS(\chi)|\,\partial_i|CS(\chi)\rangle d\chi^i\ , \tag{7}$$

$$\mathcal{F}(\chi) = i\langle dCS(\chi(t))| \wedge |dCS(\chi(t))\rangle = i\langle \partial_i CS(\chi(t))| \wedge |\,\partial_j CS(\chi(t))\rangle d\chi^i \wedge d\chi^j, \tag{8}$$

где для индексов используется правило суммирования Эйнштейна.

В итоге, формула (1) для ФБ принимает следующий вид

$$\Phi_{CS}(C) = \int_{\partial D}\mathcal{A}(\chi) = \int_{D}\mathcal{F}(\chi). \tag{9}$$

Используя КС, введённые в работе [4]:

$$|CS\rangle = \begin{pmatrix} \left(\cos g\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{2i\gamma}\sin g\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)e^{-i(\gamma+\varphi)} \\ \dfrac{e^{-i\gamma}\left(\cos g - e^{2i\gamma}\sin g\right)\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ e^{i(-\gamma+\varphi)}\left(e^{2i\gamma}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin g + \cos g\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \end{pmatrix},$$

где эйлеровы углы θ, φ являются параметрами спиновой динамики, а g и γ – квадрупольной.

Соответственно имеем:

$$\mathcal{A} = \cos 2g(\cos\theta\, d\varphi + d\gamma),$$

$$\mathcal{F} = 2\cos(\theta)\sin(2g)d\phi \wedge dg + \cos(2g)\sin(\theta)d\phi \wedge d\theta - 2\sin(2g)dg \wedge d\gamma\ ,$$

$$\Phi_{cs} = \iint 2\cos\theta\sin 2g\, d\phi \wedge dg + \iint \cos 2g\sin\theta\, d\phi \wedge d\theta - \iint 2\sin 2g\, dg \wedge d\gamma. \tag{10}$$

Проведём преобразования в выражении (10):

$$\iint 2\cos(\theta)\sin(2g)d\phi \wedge dg = -\int 2\cos(\theta)\left(\int \sin(2g)dg\right) \wedge d\phi =$$
$$= \int \cos(\theta)\left(\cos(2g)\Big|_0^g\right)d\phi = \int \cos(\theta)\left(\cos(2g) - 1\right)d\phi =$$
$$= \int \left(\cos(\theta)\cos(2g) - \cos(\theta)\right)d\phi$$

$$\iint \cos(2g)\sin(\theta)d\phi d\theta = -\int 2\cos(2g)\left(\int \sin(\theta)d\theta\right)d\phi =$$
$$= \int \cos(2g)\left(\cos(\theta)\Big|_0^\theta\right)d\phi = \int \cos(2g)\left(\cos(\theta) - 1\right)d\phi =$$
$$= \int \left(\cos(\theta)\cos(2g) - \cos(2g)\right)d\phi$$

$$\iint 2\sin(2g)\ dg d\gamma = -\int \cos\left(2g \Big|_0^g\right)\ d\gamma = -\int (\cos(2g) - 1)\ d\gamma =$$
$$= \int \left(1 - \cos(2g)\right)\ d\gamma$$

Окончательно, обобщённая фаза Берри запишется в виде

$$\Phi = \int (\cos\theta\ (\cos 2g - 1)\ - \cos 2g)\ d\phi - \int (1 - \cos 2g)\ d\gamma\ . \qquad (11)$$

Очевидно, выражение (11) в отсутствие квадрупольного момента (g=0) сведётся к выражению для ФБ для КС группы *SU(2)*:

$$\Phi_{SU(2)} = \int (\cos\theta - 1)\ d\phi = -\int (1 - \cos\theta)\ d\phi\ .$$

Полученное выражение (11) для геометрической фазы Берри позволяет последовательно учесть возбуждение мультипольной динамики в спиновых системах со спином $S > \frac{1}{2}$ при наличии одноионной анизотропии.

Поступило 29.07.2016 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Berry M.V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. – Proc. R. Soc. Lond., 1984, A392, pp.45-57.
2. Barry Simon. Holonomy, the quantum adiabatictheorem, and Berry's phase. – Phys. Rev. Lett., 1983, v.51, №24, pp.2167-2170.
3. Клышко Д.Н. Геометрическая фаза Берри в колебательных процессах. – УФН, 1993, т.163, №11, с.1-18.
4. Ostrovskii V.S. – Sov. Phys. JETP, 1986, v.64(5), pp.999-1005.
5. Абдуллоев Х.О., Муминов Х.Х. – ФТТ, 1994, т.36, №1, с. 170-178.
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М. Наука, 1974, 472 с.
7. Marian Fecko. Differential geometry and lie groups for physicists. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006, 697 p.

Ҳ.Ҳ.Муминов, Ҷ.А.Саттаров, Ю.Юсефӣ

ФАЗАИ УМУМИКАРДАШУДАИ БЕРРИ БАРОИ СИСТЕМАҲОИ СПИНИИ БО СПИНИ *S*=1

Институти физикаю техникаи ба номи С.У. Умарови
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақолаи мазкур мафҳуми фазаи Берри барои системаҳои спинии бо спини S=1 бо истифода аз 2-шакли дифференциалӣ дар холатҳои коҳерентии гурӯҳи SU(3) пайдарпай умумӣ гардонида шудааст. Нишон дода шудааст, ки фазаи умумикардашудаи Берри дар мавҷудияти ғайриҳамсонгардии як-ионӣ пайдо мешавад.

Калимаҳои калидӣ: *фазаи Берри, фазаи геометрӣ, холатҳои коҳерентии спинии SU(3), формаи дифференсиалӣ, зарби беруна, ҳосилаи беруна.*

Kh.Kh.Muminov, D.A.Sattarov, Yu.Ysefi

GENERALIZED BERRY'S PHASE FOR *S*=1 SPIN SYSTEM

S.U.Umarov Physical-Technical Institute, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

In this paper consecutive generalization of Berry's phase for S=1 spin system in SU(3) coherent states using differential forms have been done. It is shown that generalized Berry's phase appears in the presence of single-ion anisotropy.

Key words: *Berry's phase, geometrical phase, SU(3) spin coherent states, differential forms, wedge product, exterior derivative.*