ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН

2014, том 57, №6

МАТЕМАТИКА

УДК 517.965.2

Д.С.Сафаров, А.Т.Гаюров

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО РОДА НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА

Курган-Тюбинский государственный университет им. Носира Хусрава

(Представлено академиком АН Республики Таджикистан З.Д.Усмановым 30.05.2014 г.)

В работе получены квазипериодические решения второго рода для неоднородного уравнения Коши-Римана с помощью аппарата теории эллиптических функций.

Ключевые слова: *уравнение – решение – эллиптическая функция – период – задача.*

Определение 1. *Однозначная функция комплексного переменного* $\omega(z)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\omega(z+h_1)=a\omega(z)+c_1,\ \omega(z+h_2)=b\omega(z)+c_2, \tag{1}$$

где a,b,c_1,c_2,h_1,h_2 *– постоянные, причём* $Jm(h_2/h_1)\neq 0$, *называется квазипериодической функцией второго рода, с основными периодами* h_1,h_2.

Когда $a=b=1$, функции, удовлетворяющие условию (1), называются квазипериодическими, а при $a\neq 1, b\neq 1, c_1=c_2=0$ двоякопериодическими функциями второго рода $[1]$.

Лемма. *Для того, чтобы система функциональных уравнений (1) имела однозначное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$c_1(1-b)=c_2(1-a). \tag{2}$$

При этом любое решение (1) представляется в виде

$$\omega(z)=\varphi(z)+\frac{c_1}{1-a}\ , \tag{3}$$

где $\varphi(z)$ *– произвольная однозначная двоякопериодическая функция второго рода, удовлетворяющая условиям*

$$\varphi(z+h_1)=a\varphi(z),\ \varphi(z+h_2)=b\varphi(z). \tag{4}$$

Действительно, необходимость условия (2) следует из условия однозначности решения $\omega(z)$, то есть $\omega(z+h_1+h_2)=\omega(z_1+h_2+h_1)$. Проверим, что функция (3) удовлетворяет системе (1):

Адрес для корреспонденции: *Сафаров Джумабой Сафарович. 735140, Республика Таджикистан, г. Курган-Тюбе, ул. Айни, 67, Курган-Тюбинский государственный университет. E-mail: Safarov-5252@mail.ru*

$$\omega(z+h_1)=\varphi(z+h_1)+\frac{c_1}{1-a}=a\varphi(z)+\frac{c_1}{1-a}=a\left[\omega(z)-\frac{c_1}{1-a}\right]+\frac{c_1}{1-a}=$$

$$=a\omega(z)-\frac{c_1a}{1-a}+\frac{c_1}{1-a}=a\omega(z)+c_1.$$

Аналогично проверяется второе уравнение системы (1). С другой стороны, если выполнено условие (2), то функция $\omega_1=\dfrac{c_1}{1-a}-$ частное решение системы. Если $\omega(z)-$любое решение системы (1), то разность $\omega(z)-\omega_1(z)-$двоякопериодическая функция второго рода, удовлетворяющая условию (4). Обозначим эту разность через $\varphi(z)$ и получим формулу (3).

Будем исследовать задачи нахождения решения функциональных уравнений (1), удовлетворяющие в любом параллелограмме $\Omega-$решетки $\Gamma=\{m_1h_1+m_2h_2, m_1,m_2-\textit{целые}\}$ неоднородному уравнению Коши – Римана

$$w_{\bar z}=f(z), \tag{5}$$

где $f(z)-$заданная двоякопериодическая функция второго рода с периодами h_1,h_2, удовлетворяющая условию (4).

Определение 2. *Однозначные решения (5), определенные на плоскости $\mathbb{C}$ и удовлетворяющие условиям (1), будем называть квазипериодическими решениями второго рода.*

Квазипериодическое решение второго рода уравнения (1) понимается в обобщенном смысле И.Н.Векуа $[2]$. Это означает, что задача (1), (5) могут допускать в любом параллелограмме $\Omega-$решетки $\Gamma=\{m_1h_1+m_2h_2, m_1,m_2-\textit{целые}\}$ особые точки типа полюса и уравнение (4) удовлетворяется почти всюду в Ω.

Будем предполагать, что $f(z)\in L_p(\bar\Omega),\ p>2$, и обобщенное решение задачи (1) будем искать в классе $W_p^1(\Omega\setminus\Omega_0),\ p>2,\ \Omega_0-$подмножество области Ω, не содержащее полюсов решения. Когда $\Omega_0=\varnothing$, решения задач (1), (5) из класса $W_p^1(\Omega),\ p>2$ называются регулярными. Можно считать, что $\Omega-$основной параллелограмм с вершинами $0,h_1,h_1+h_2,h_2$.

Задачи (1), (5) в общей постановке были изучены В.И.Показеевым $[4]$. Функции, удовлетворяющие условиям (4), когда вместо постоянных присутствуют аналитические функции, названы им обобщенными функциями Аппеля.

Здесь методом теории эллиптических функций мы дадим полное решение задач (1), (5), опираясь на интегральные представления двоякопериодических функций посредством функций Вейерштрасса $\varsigma(z)$ и $\sigma(z)$.

Будем искать обобщенное квазипериодическое решение второго рода уравнения (1), допускающее внутри Ω полюсы $b_1, b_2, ..., b_r$ соответственно с кратностями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ и главными частями

$$\frac{A_k}{z-b_k} + \sum_{j=2}^{\lambda_k} (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!\, A_k^{j-1}}{(z-b_k)^j}, \quad k = 1, 2, ..., r, \tag{6}$$

где A_k, A_k^{j-1} – константы.

Если обозначить через Δ число

$$\Delta = \frac{1}{2\pi i}\left[h_2 \ln a - h_1 \ln b\right],$$

то возможны два случая: $\Delta \in \Gamma$ или $\Delta \,\overline{\in}\, \Gamma$.

1. Пусть сначала $\Delta \,\overline{\in}\, \Gamma$. Если выполнено условие леммы, то решение задач (1), (5) можно представить в виде

$$w = \varphi(z) + \frac{c_1}{1-a}, \; a \neq 1, \tag{7}$$

где $\varphi(z)$ – двоякопериодическая функция второго рода с заданными главными частями (6) и удовлетворяющая условию (4) и уравнению (5). Решение такой задачи изучено в $[5]$.

Как и в [5], составим функцию

$$\chi(z) = -\frac{1}{\pi} e^{dz} \iint_{\Omega} e^{-dt} f(t) \frac{\sigma(t-z-\Delta_0)}{\sigma(-\Delta_0)\sigma(t-z)} d_t\Omega = e^{dz} T_\sigma\left(e^{-dz} f\right), \tag{8}$$

где $\Delta_0 \,\overline{\in}\, \Gamma$, $\sigma(z)$ – сигма-функция Вейерштрасса, постоянная d – пока не известна.

При $f(z) \in L_p(\overline{\Omega}),\; p > 2$, функция $\chi(z)$ – непрерывная на $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет условиям

$$\chi(z + h_j) = e^{dh_j + \eta_j \Delta_0} \chi(z), \; j = 1, 2,$$

где η_1, η_2 – циклические постоянные, которые совместно с h_1, h_2 удовлетворяют соотношению Лежандра [1]: $h_1\eta_2 - h_2\eta_1 = 2\pi i$. Используя это соотношение, можно решить систему

$$e^{dh_1 - \Delta_0 \eta_1} = a, \quad e^{dh_2 - \Delta_0 \eta_2} = b$$

относительно Δ_0 и d.

Отсюда находим: $\Delta_0 \equiv \Delta(\mathrm{mod}\,\Gamma)$; $d = -\frac{1}{2\pi i}\left[\eta_2 \ln a - \eta_1 \ln b\right](\mathrm{mod}\,\Gamma)$.

Таким образом, функция $\chi(z)$ удовлетворяет условию (4) и в силу свойства интегрального оператора $T_\sigma\rho$ $[5]$ является решением уравнения (5). Тогда разность: $\varphi(z)-\chi(z)=\psi(z)$ является эллиптической функцией второго рода с главными частями (5).

Если z_0, z_1 такие точки, что $z_1-z_0=\Delta,\ z_0-b_k \overline{\in} \Gamma,\ z_1-b_k \overline{\in} \Gamma$, $k=1,2,...,r$, то функция $\psi(z)$ имеет вид [5].

$$\psi(z)=e^{dz}\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z-z_0)}\left[c+d_1\varsigma(z-z_0)+\sum_{k=1}^{r}B_k\varsigma(z-b_k)+\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\lambda_k}B_k^j\wp^{(j-1)}(z-b_k)\right], \tag{9}$$

где $\varsigma(z),\wp(z)-$ эллиптические функции Вейерштрасса, постоянные c,d_1,B_k,B_k^j связаны условиями

$$d_1+\sum_{k=1}^{r}B_k=0,\ B_k^j=A_k^je^{-b_k}\frac{\sigma(b_k-z_1)}{\sigma(b_k-z_0)},\ A_k^0=A_k,\ k=1,2,...,r,$$

$$c+d_1\varsigma(z_1-z_0)+\sum_{k=1}^{r}B_k\varsigma(z_1-b_k)+\sum_{k,j\geq 1}B_k^j\wp^{(j-1)}(z_1-b_k)=0.$$

Поэтому справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнено условие леммы,* $\Delta\overline{\in}\Gamma$, $f(z)-$ *удовлетворяет условию (4) и* $f(z)\in L_p(\overline{\Omega}),\ p>2$. *Тогда задачи (1), (5) всегда имеют решение с заданными главными частями (6) при любой* $\lambda>0$, $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_r$ *и оно представимо в виде*

$$w(z)=\psi(z)+\chi(z)+\frac{c_1}{1-a},$$

где $\chi(z),\psi(z)-$ *определены соответственно формулами (7) и (9).*

Следовательно, при $\Delta\overline{\in}\Gamma$ задачи (1), (5) разрешимы при любой $\lambda>0$ и правой части f и постоянные a,b,c_1,c_2 связаны условиями леммы. Причём однородная задача всегда имеет нетривиальное решение вида (9).

Теперь при $\lambda=0$ покажем, что задачи (1), (5) имеют, притом естественное решение. В этом случае от правой части $f(z)$, кроме условия (4), потребуем существование такой эллиптической функции второго рода, удовлетворяющей условиям (4) с заданными нулями и полюсами $\mu(z)$, что

$$\frac{1}{\mu(z)}f(z)\in L_p^*,\ p>2.$$

L_p^* − класс двоякопериодических функций с основными периодами h_1, h_2, принадлежащих в $L_p\left(\bar{\Omega}\right),\ p > 2$. Функции, удовлетворяющие этому условию, называются квазисуммируемыми над полем эллиптических функций с периодами h_1, h_2 со степенью $p > 2$.

Функцию $\varphi(z)$ представим в виде

$$\varphi(z) = e^{dz} \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z - z_1)} \chi(z),$$

где $z_1 - z_0 = \Delta \bar{\in} \Gamma$, а постоянная d удовлетворяет уравнениям

$$\exp(dh_1 + \eta_1 \Delta) = a,\ \exp(dh_2 + \eta_2 \Delta) = b.$$

Тогда функция $\chi(z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\chi_{\bar{z}} = e^{-dz} \frac{\sigma(z - z_1)}{\sigma(z - z_0)} f(z) = f_1(z).$$

Если $f(z)$ − квазисуммируема в L_p^* со степенью $p > 2$, то $f_1(z) \in L_p^*,\ p > 2$. Искомая функция имеет один простой полюс в точке $z = z_0$ и простой нуль в точке $z = z_1$. Такая функция имеет вид [5]

$$\chi(z) = c + d_1 \varsigma(z - z_0) + \mathrm{T}_{\varsigma}(f_1),$$

где $\mathrm{T}_{\varsigma}\rho$ − интегральный оператор с ядром $\varsigma(z)$ − функция Вейерштрасса [5], постоянные c, d удовлетворяют соотношениям

$$d_1 + \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} e^{-dz} \frac{\sigma(t - z_1)}{\sigma(t - z_0)} f(t) d_t \Omega = 0, \tag{10}$$

$$c + d\varsigma(z_1 - z_0) + \mathrm{T}_{\varsigma}(f_1)(z_1) = 0.$$

Следовательно, задачи (1), (5), при $\Delta \bar{\in} \Gamma$ имеют одно единственное регулярное решение вида

$$w(z) = e^{dz} \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z - z_1)} \left[c + d_1 \varsigma(z - z_0) + \mathrm{T}_{\varsigma} f_1\right] + \frac{c_1}{1 - a},$$

причём постоянные c и d удовлетворяют условиям (10).

2. Пусть теперь $\Delta = -\frac{1}{2\pi i}\left[h_2 \ln a - h_1 \ln b\right] \in \Gamma$. Это означает, что

$$h_2 \ln a - h_1 \ln b = 2\pi i \left[n h_1 + m h_2\right],$$

где n, m − некоторые целые числа.

В таком случае система уравнений $\exp(dh_1)=a,\ \exp(dh_2)=b$ имеет решение d. В частности, при $h_2\ln a-h_1\ln b=0$, $Jm(\ln b/\ln a)\neq 0$, так как $Jm(h_2/h_1)\neq 0$. В таком случае, представляя функцию $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z)=e^{dz}\mu(z),$$

легко заметим, что функция $\mu(z)$ должна быть двоякопериодической с периодами h_1,h_2 и удовлетворять уравнению

$$\mu_{\bar z}=e^{-dz}f(z)=f_1(z), \tag{11}$$

$f_1(z)\in L_p^*,\ p>2$ и $\mu(z)$ имеет главные части (5).

Как в [5], из (11) получим

$$\mu(z)=\varphi_1(z)+\mathrm{T}_\varsigma f_1,$$

где $\varphi_1(z)-$квазипериодическая функция с главными частями (6), удовлетворяющая условию

$$\varphi_1(z+h_j)=\varphi_1(z)-\frac{\eta_j}{\pi}\iint_\Omega e^{-dt}f(t)d_t\Omega,\ j=1,2.$$

Для существования таких функций $\varphi_1(z)$, [5] необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{r}\operatorname*{Res}_{z=b_k}\varphi_1(z)+\frac{1}{\pi}\iint_\Omega e^{-dt}f(t)d_t\Omega=0.$$

При этом

$$\varphi_1(z)=c+\sum_{k=1}^{r}\Big[B_k\varsigma(z-b_k)+\sum_{j\geq 2}^{\lambda_k}B_k^j\varsigma^{(j-1)}(z-b_k)\Big], \tag{12}$$

где $c-$произвольная постоянная и постоянные B_k связаны условием

$$\sum_{k=1}^{r}B_k+\frac{1}{\pi}\iint_\Omega e^{-dt}f(t)d_t\Omega=0, \tag{13}$$

$$B_k^j=A_k^je^{-db_k},\ A_k^0=A_k,\ k=1,2,...,r.$$

Тем самым доказана

Теорема 2. *Пусть выполнено условие леммы,* $\Delta\in\Gamma$ *и число* d *– решение системы* $e^{dh_1}=a,\ e^{dh_2}=b$. *Тогда для существования решения задач (1), (5) с главными частями (6) необходи-*

мо и достаточно, чтобы выполнялось условие (13). При этом все решения задач (1), (5) представимы формулой

$$w(z) = e^{dz}\varphi_1(z) + e^{dz}\mathrm{T}_\varsigma\left(e^{-dz} f(t)\right) + \frac{c_1}{1-a},$$

где $\varphi_1(z)$ *имеет вид (12), при этом решение задачи (1), (5) зависит от одного произвольного периода.*

В случае $\lambda = 0$ получим формулу представления регулярных решений задачи в виде

$$w(z) = e^{dz}\left[c + \mathrm{T}_\varsigma\left(e^{-dz} f\right)\right] + \frac{c_1}{1-a},$$

а условие разрешимости задачи имеет вид

$$\iint_\Omega e^{-bt} f(t)\, d_t\Omega = 0,$$

$c-$произвольная постоянная.

Введём теперь обозначение

$$A = \frac{c_1}{1-a} = \frac{c_2}{1-b}$$

и условимся называть $A-$точками решения задач (1), (5) те точки, в которых решение задачи $w(z)$ при $f(z) \equiv 0$ принимает значение A, то есть $w(z) = A$.

Так как $A-$точки решения задачи согласно формулы (2) по условию совпадают с числом нулей эллиптической функции второго рода, то из свойства эллиптических функций [5] следует

Теорема 3. *Число $A-$точки и число полюсов решения задач (1), (5) равны с учётом их кратности.*

Теорема 4. *Пусть $a_1, a_2, ..., a_r -$лежащие внутри параллелограмма Ω $A-$точки а $b_1, b_2, ..., b_r -$ полюсы решения задач (1), (5), также лежащие внутри Ω. Тогда для существования решений задач (1), (5) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{r} a_k - \sum_{k=1}^{r} b_k \equiv \frac{1}{2\pi i}\left[h_2 \ln a - h_1 \ln b\right](\mathrm{mod}\,\Gamma). \tag{14}$$

Покажем, что при выполнении условия (14) можно выписывать все решения задачи (1), (5). Но прежде надо учесть, что при $\Delta \in \Gamma,\ r \geq 2$, а при $\Delta \overline{\in} \Gamma,\ r \geq 1$.

Действительно, пусть $\chi(z)-$эллиптическая функция второго рода, удовлетворяющая условию (3) с заданными нулями $a_1, a_2, ..., a_r$ и полюсами $b_1, b_2, ..., b_r$ и справедлива формула (14), и пусть

$$\frac{1}{\chi(z)} f(z) \in L_p^*,\ p > 2.$$

Тогда при выполнении условия

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\chi(z)} f(t) d_t\Omega = 0$$

решение задач (1), (4), имеющее $A-$точки, представимо в виде [5]

$$w(z) = \chi(z)\left[c + \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\chi(t)} f(t) \varsigma(t-z) d_t\Omega \right] + A,$$

где $c-$произвольная постоянная.

Поступило 30.05.2014 г..

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1972, 304 с.
2. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. – М., 1959, 629 с.
3. Показеев В.И. Аналитические функции Аппеля в случае двоякопериодической группы. //Деп. в ВИНИ ТИ 18.07.1983, № 4025 – 83.
4. Показеев В.И., Сафаров Д.С. Простые обобщённые аналитические функции, автоморфные относительно элементарных групп. 1. Двоякопериодические решения. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат. и хим. н., 1992, № 4(4), с. 15-21.
5. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщённые аналитические функции и их приложения. – Душанбе: Дониш, 2012, 190 с.

Ҷ.С.Сафаров, А.Т.Ғаюров

ҲАЛҲОИ КВАЗИДАВРИИ ҶИНСИ ДУЮМИ МУОДИЛАИ ҒАЙРИЯКҶИНСАИ КОШИ – РИМАН

Донишгоҳи давлатии Қӯрғонтеппа ба номи Носири Хусрав

Дар мақола масъалаи ёфтани ҳалҳои квазидаврии ҷинси дуюм бо коэффитсиентҳои доимӣ барои муодилаи ғайриякҷинсаи Коши – Риман бо ёрии функсияҳои эллиптикӣ нишон дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *ҳал – муодила – функсияи эллиптикӣ – даврӣ – масъала.*

D.S.Safarov, A.T.Gaurov

QUASI-PERIODIC SOLUTIONS OF THE SECOND KIND OF CAUCHY-RIEMANN IN HOMOGENEOUS SYSTEM

N.Khusrav Qurgantyube State University

In the paper a method of finding the quasi-periodic solutions with constants coefficients of the in homogeneous Cauchy-Riemann equations is proposed, with help a elliptic functions.

Key words: *solution – equation – elliptic function – period – problem.*