

$$\Delta_k^0 = \begin{vmatrix} A_{11} + k + \gamma & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} + k + \gamma & \cdots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} + k + \gamma \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8}$$

Далее вычислим Δ_k^j ($1 \leq j \leq n$)

$$\begin{aligned} \Delta_k^1 &= \begin{vmatrix} f_{k1} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ f_{k1} & A_{22} + k + \gamma & \cdots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{kn} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} + k + \gamma \end{vmatrix} = f_{k1}A_{11} + f_{k2}A_{21} + f_{k3}A_{31} + \cdots + f_{kn}A_{n1} = \\ &= f_{k1}(-1)^{1+1}M_{11} + f_{k2}(-1)^{2+1}M_{21} + \cdots + f_{kn}(-1)^{n+1}M_{n1} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} f_{kj}M_{j1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_k^2 &= \begin{vmatrix} A_{11} + k + \gamma & f_{k1} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & f_{k2} & \cdots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & f_{kn} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = f_{k1}A_{12} + f_{k2}A_{22} + \cdots + f_{kn}A_{n2} = \\ &= f_{k1}(-1)^{1+2}M_{11} + f_{k2}(-1)^{2+2}M_{21} + \cdots + f_{kn}(-1)^{n+2}M_{n2} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+2} f_{kj}M_{j2}, \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \Delta_k^n &= \begin{vmatrix} A_{11} + k + \gamma & A_{12} & \cdots & f_{k1} \\ A_{21} & A_{22} + k + \gamma & \cdots & f_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & f_{kn} \end{vmatrix} = f_{k1}A_{1n} + f_{k2}A_{2n} + \cdots + f_{kn}A_{nn} = \\ &= f_{k1}(-1)^{1+n}M_{1n} + f_{k2}(-1)^{2+n}M_{2n} + \cdots + f_{kn}(-1)^{n+n}M_{nn} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+n} f_{kj}M_{jn}, \end{aligned}$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} A_{11} + k + \gamma & A_{12} & \cdots & A_{1,i-1}A_{1,i+1} & \cdots & A_{1,i-1}A_{1,i+1} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} + k + \gamma & \cdots & A_{2,i-1}A_{2,i+1} & \cdots & A_{2,j-1}A_{2,j+1} & \cdots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i-1,1} & A_{i-1,2} & \cdots & A_{i-1,i-1} + k + \gamma & A_{i-1,i+1} & \cdots & A_{i-1,j-1}A_{i-1,j+1} & \cdots & A_{i-1,n} \\ A_{i+1,1} & A_{i+1,2} & \cdots & A_{i+1,i-1} & A_{i+1,i+1} + k + \gamma & \cdots & A_{i+1,j-1}A_{i+1,j+1} & \cdots & A_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \cdots & A_{n2} + k + \gamma & \cdots & A_{n,i-1}A_{n,i+1} & \cdots & A_{n,j-1}A_{n,j+1} & \cdots & A_{nn} + k + \gamma \end{vmatrix}.$$

Тогда неизвестные функции находятся из следующих равенств:

$$\left\{ \begin{aligned} y_{k1} &= \frac{\Delta_k^1}{\Delta_k^0} = \frac{\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} M_{j1} f_{k1}}{\Delta_k^0} = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+1} M_{j1} f_{k1}}{\Delta_k^0} \\ y_{k2} &= \frac{\Delta_k^2}{\Delta_k^0} = \frac{\sum_{j=1}^n (-1)^{j+2} M_{j2} f_{k2}}{\Delta_k^0} = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+2} M_{j2} f_{k2}}{\Delta_k^0}, \\ &\dots \\ y_{kn} &= \frac{\Delta_k^n}{\Delta_k^0} = \frac{\sum_{j=1}^n (-1)^{j+n} M_{jn} f_{kn}}{\Delta_k^0} = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+n} M_{jn} f_{kn}}{\Delta_k^0} \end{aligned} \right. \quad (9)$$

где $k = 1, 2, \dots$

Подставляя найденные значения y_{kj} при $j = 1, 2, \dots, n$, в (5), находим решение системы (1), представимое в виде обобщённых степенных рядов (5), и они находятся из равенства (9).

Теперь докажем, что если ряды вида (2) сходятся абсолютно равномерно и соответствующие коэффициенты удовлетворяют условиям (3), тогда коэффициенты рядов (5) также удовлетворяют этим же условиям, то есть радиусы сходимости рядов (5) совпадают с радиусом сходимости рядов (2).

Действительно, в (5) вместо y_{kj} , подставляя их значения из равенств (9), имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (x-a)^{k+\gamma} \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+1} M_{j1} f_{k1}}{\Delta_k^0} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+1} M_{j1}}{\Delta_k^0} \sum_{k=0}^{\infty} f_{k1} (x-a)^{k+\gamma} \\ y_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (x-a)^{k+\gamma} \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+2} M_{j2} f_{k2}}{\Delta_k^0} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+2} M_{j2}}{\Delta_k^0} \sum_{k=0}^{\infty} f_{k2} (x-a)^{k+\gamma} \\ &\dots \\ y_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (x-a)^{k+\gamma} \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+n} M_{jn} f_{kn}}{\Delta_k^0} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+n} M_{jn}}{\Delta_k^0} \sum_{k=0}^{\infty} f_{kn} (x-a)^{k+\gamma} \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Это утверждение проверим для $y_1(x)$:

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k1} (x-a)^{k+\gamma},$$

где $y_{k1} = \frac{\Delta_k^1}{\Delta_k^0}$

$$\frac{+(-1)^n f_{k+1,n} \begin{vmatrix} A_{22} + k + \gamma & A_{23} \cdots A_{2,n-1} & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33} + k + \gamma + 1 \cdots A_{3,n-1} & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1,2} & A_{n-1,3} \cdots A_{n-1,n-1} + k + \gamma + 1 \cdots A_{n-1,n} \end{vmatrix}}{+(-1)^n f_{kn} \begin{vmatrix} A_{22} + k + \gamma & A_{23} \cdots A_{2,n-1} & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33} + k + \gamma + 1 \cdots A_{3,n-1} & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1,2} & A_{n-1,3} \cdots A_{n-1,n-1} + k + \gamma \cdots A_{n-1,n} \end{vmatrix}} (x - a).$$

Числитель и знаменатель соответствующих определителей делим на k и переходим к пределу при $k \rightarrow \infty$. Тогда в числителе определители при $f_{k+1,2}, f_{k+1,3}, \dots, f_{k+1,n}$ при $k \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Точно таким же образом определители при константах $f_{k2}, f_{k3}, \dots, f_{kn}$ при $k \rightarrow \infty$ также стремятся к нулю. Определитель при $f_{k+1,1}$ в числителе и определитель при $f_{k,1}$ при $k \rightarrow \infty$ стремятся к единице. Таким образом, имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{y_{k+1,1}}{y_{k1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta_{k+1}^0}{\Delta_k^0} \right| \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{k+1,1}}{f_{k1}} \right| (x - a).$$

Следовательно, радиус сходимости разложения для неизвестной функции $y_1(x)$ совпадает с радиусом сходимости известной функции $f_1(x)$.

Аналогичным образом доказывается, что радиусы сходимости неизвестных функций $y_j(x)$ ($j = 2, 3, \dots, n$) совпадают с радиусами сходимости рядов (8). Тогда решения системы (1) функций $y_j(x)$ ($j = 1, \dots, n$), которые даются при помощи формулы (8), также сходятся абсолютно равномерно.

Таким образом, доказана:

Теорема. Пусть в системе (1) правые части функций $f_j(x)$ ($1 \leq j \leq n$) разлагаются в равномерно сходящиеся обобщённые степенные ряды (2) с радиусами сходимости $R_j = \frac{1}{L_j}$ ($1 \leq j \leq n$).

Пусть $\Delta_k^0 \neq 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Тогда частные решения неоднородной системы (1) в классе функций $y_j(x)$, представимых в виде (5), существуют и даются при помощи формулы (10).

Поступило 11.02.2015 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rajabov N. Introduction to ordinary differential equation with super-singular coefficients. - Dushanbe, 1998, 100 p.

2. Раджабов Н. Обобщенные задачи типа линейного сопряжения для общей линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной сингулярной и сверх- сингулярной точкой. - Труды 9-го Международного симпозиума МДОЗФ-2000. - Орёл, 2000, 29 мая, 2- июня, с.367-369.
3. Раджабов Н. Задачи типа линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одной сингулярной и сверх- сингулярной точкой. – ДАН РТ, 1999, т.ХI, №4, с.31-34.
4. Раджабов Н., Меликов О. Система трёх модельных дифференциальных уравнений первого порядка с одной левой сингулярной точкой. – Мат-лы межд. научной конф., посв. 20-летию Конституции РТ и 60-летию ученых математиков А.Мухсинова, А.Б.Назимова, С.Байзаева, Д.Осимовой, К.Тухлиева, №2 (29), ч.1. - Худжанд, 2014.

Н.Раджабов, О.И.Меликов

СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ОДДИИ ХАТТИИ МОДЕЛИИ ТАРТИБИ ЯКУМ БО НУҚТАИ ЧАПИ МАХСУС

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола системаи n муодилаи дифференсиалии хаттии оддии тартиби як бо коэффициентҳои махсуси сарҳадии чап омӯхта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: системаи муодилаҳои хаттӣ – нуқтаи сингулярӣ – ҳал ба намуди қатор – наздиқшаванда.

N.Rajabov, O.I.Melikov

FIRST ORDER LINEAR MODEL ORDINARY SYSTEM DIFFERENTIAL EQUATION WITH ONE LEFT BOUNDARY SINGULAR POINT

Tajik National University

In this work first order linear system ordinary differential equation with left singular point is investigated. In this case, when right parts system represented in generalized power series, solution system found in generalized power series.

Key word: first order system – singular coefficients – solution in the series form – convergent.