ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
2015, том 58, №6

МАТЕМАТИКА

УДК 517:948.9:669.548.55

Член-корреспондент АН Республики Таджикистан И.Курбонов

НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ПАМЯТЬЮ

Российско-Таджикский (Славянский) университет

В работе рассматривается распространение электромагнитных волн в полупространстве $y > 0$, затухающих по координате y, периодических по времени t и по одной пространственной координате x, заданной на поверхности магнитного поля $H_x(x,0,t)$.

Ключевые слова: *однородные и неоднородные среды – ферромагнитные среды – линеаризация.*

Пусть на поверхности полупространства известна линейно-поляризованная касательная, составляющая напряжённость магнитного поля $H_x(x, 0, t)$. Тогда определение электромагнитного поля $H_x,\ H_y,\ E$ в полупространстве сводится к отысканию периодических по t их решений нелинейной задачи [1]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\frac{\partial D(E)}{\partial t}+J(E),\quad \frac{\partial E}{\partial y}+\frac{\partial B_x}{\partial t}=0,\\ &\frac{\partial E}{\partial x}-\frac{\partial B_y}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}=0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\lim_{y\to\infty}\left\{H_x(x, y, t),\ H_y(x, y, t),\ E(x, y, t)\right\}=0,$$

$$H_x\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}, y, t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=H_x(x, y, t), \tag{2}$$

$$H_y\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}, y, t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=H_y(x, y, t),$$

$$E\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}, y, t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=E(x, y, t),$$

с общими материальными уравнениями

$$\begin{aligned} &D(E)=D\big(E(\tau), \tau\le t\big),\ J(E)=J\big(E(\tau),\ \tau\le t\big),\\ &\vec{B}(H)=\vec{B}\big(\vec{H}(\tau), \tau\le t\big),\ \ H=\left(H_x, H_y, 0\right), \end{aligned} \tag{3}$$

Адрес для корреспонденции: *Курбонов Икром. 734031, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М.Турсунзода, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: hudson90@mail.ru*

где $H=\left(H_x,\,H_y,\,0\right)$, λ, ω – заданное постоянное подмагничивание, пространственная частота, а также временная частота.

Условие $\operatorname{div}\vec{B}=0$ является следствием второго и третьего уравнения (1) и гипотезы Герца об отсутствии магнитных зарядов. Условие $\operatorname{div}\vec{B}=0$ используется при сведении уравнений первого порядка относительно H_x, H_y и E к трем уравнениям второго порядка относительно H_x, H_y и E.

В простейшем случае, когда среда изотропная и обладает свойствами памяти (наследственности) в отношении тока проводимости $J\left(E\right)$ и индукции электрического поля E, приводит к необходимости рассмотрения вольтеровских интегральных материальных уравнений вида [2]:

$$
\begin{aligned}
&J\left(E\right)=\sigma E+\int_{-\infty}^{t}\chi\left(t-\tau\right)E\left(\tau\right)d\tau,\quad B_x\left(H\right)=\mu H_x,\\
&D\left(E\right)=\varepsilon E+\int_{-\infty}^{t}\varphi\left(t-\tau\right)E\left(\tau\right)d\tau,\quad B_y\left(H\right)=\mu H_y,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где σ – электрическая проводимость, ε – диэлектрическая проницаемость, μ – магнитная проницаемость, $\chi\left(t-\tau\right)$, $\varphi\left(t-\tau\right)$ – ядро последствия.

В случае материальных уравнений (4), уравнения Максвелла (1) расщепляются на три интегро-дифференциальных уравнения второго порядка с частными производными относительно H_x, H_y и E:

$$
\begin{aligned}
&\Delta\vec{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}-\sigma\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi*\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)+\mu\left(\chi*\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right),\\
&\Delta E-\varepsilon\mu\frac{\partial^2E}{\partial t^2}-\sigma\mu\frac{\partial E}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varphi*E\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\chi*E\right),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $\varphi*\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$, $\chi*\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$, $\varphi*E$, $\chi*E$ – интегральные операторы.

$$
a*b=\int_{-\infty}^{t}a\left(t-\tau\right)b\left(\tau\right)d\tau,
$$

$$
a*\frac{\partial b}{\partial t}=\int_{-\infty}^{t}a\left(t-\tau\right)\frac{\partial b}{\partial\tau}d\tau,
$$

$$
\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}
$$
– оператор Лапласа.

Периодическое по пространственной координате *x* и времени *t* решение краевой задачи (1)-(5) в этом случае записывается в виде:

$$H_x(x,\ y,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}H_0^n\exp[-k_{1n}y]\cos\left(\lambda_n x-k_{2n}y-n\,\omega t+\bar{\varphi}_n\right),$$
$$H_y(x,\ y,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}H_n\exp[-k_{1n}y]\cos\left(\lambda_n x+k_{2n}y-n\,\omega t+\varphi_n\right),\ (6)$$
$$E(x,\ y,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\exp[-k_{1n}y]\cos\left(\lambda_n x+k_{2n}y-n\,\omega t+\psi_n\right),$$

где $E_n=\dfrac{n\,\omega\,\mu\,H_0^n}{\sqrt{k_{1n}^2+k_{2n}^2}}$, $\psi_n=\bar{\varphi}_n-\operatorname{arctg}\dfrac{k_{1n}}{k_{2n}}$, $H_n=\dfrac{\lambda_n\,H_0^n}{\sqrt{k_{1n}^2+k_{2n}^2}}$, $\psi_n=\varphi_n-\bar{\varphi}_n-\operatorname{arctg}\dfrac{k_{1n}}{k_{2n}}$.

Здесь $\omega=2\pi/T$ – минимальная частота, λ_n – пространственная частота, H_0^n и $\bar{\varphi}_n$ – амплитуда и фаза *n*-й гармоники напряженности

$$H_x(x,\ 0,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}H_0^n\cos\left(\lambda_n x-n\,\omega+\bar{\varphi}_n\right). \tag{7}$$

Постоянные k_{1n} и k_{2n}, характеризирующие соответственно затухание и фазовую скорость распространения волны (6), определяются из уравнений

$$k_{1n}^2-k_{2n}^2+b_n=0,\quad 2k_{1n}\,k_{2n}-a_n=0, \tag{8`}$$

где

$$a_n=n\,\omega\sigma\,\mu+n^2\,\omega^2\,\mu\varphi_s+n\,\omega\,\mu\ \chi_c,$$
$$b_n=-\lambda_n^2+n^2\,\omega^2\,\mu\left(\varepsilon+\varphi_s\right)-n\,\omega\,\mu\ \chi_s,$$
$$a_s=\int_0^{\infty}a(s)\sin n\,\omega s\,d\,s,\quad a_c=\int_0^{\infty}a(s)\cos n\,\omega s\,d\,s.$$

В случае $\varphi(t-\tau)=\chi(t-\tau)=0$, получим решения краевых задач (1)-(4) с материальными уравнениями

$$D(E)=\varepsilon E,\ J(E)=\sigma E,\ B_x(H)=\mu H_x,\ B_y(H)=\mu H_y.$$

Перейдем теперь к рассмотрению существенно нелинейных материальных уравнений. Если проводящее полупространство является ферромагнитным, то материальные уравнения поля надлежит принять в виде [3]:

$$\begin{aligned}&D(E)=\varepsilon E+\int_{-\infty}^{t}\varphi(t-\tau)E(\tau)d\tau,\quad J(E)=\sigma E+\int_{-\infty}^{t}\chi(t-\tau)E(\tau)d\tau,\\ &\vec{B}=\mu\left(\left|\vec{H}\right|\right)\vec{H},\end{aligned} \tag{9}$$

где $\mu\left(\left|\vec{H}\right|\right)$ – магнитная проницаемость, $\vec{H}=\left\{H_x,\ H_y,\ 0\right\}$, $\left|\vec{H}\right|^2=H_x^2+H_y^2$.

Подставляя (9) в уравнения Максвелла (1), приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}+\sigma E+\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{t}\varphi(t-\tau)E(\tau)d\tau\right)+\int_{-\infty}^{t}\chi(t-\tau)E(\tau)d\tau,\\&\frac{\partial E}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu\left(\left|\vec{H}\right|\right)H_x\right]=0,\quad \frac{\partial E}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu\left(\left|\vec{H}\right|\right)H_y\right]=0.\end{aligned}\tag{10}$$

Ее решение должно удовлетворять краевому условию (7) при $n = 1$, правую часть которого мы будем рассматривать (для упрощения) как периодическую функцию, изменяющуюся по гармоническому закону

$$H_x(x,\,0,\,t)=H_0\cos\left(\lambda x-\omega t+\bar{\varphi}_1\right),\tag{11}$$

В отличие от линейных постановок, краевая задача (10)-(11) не допускает точного решения. Приближенное решение системы (10) будем искать в таком же виде, как и в линейном случае

$$\begin{aligned}&H_x(x,\,y,\,t)=H_0\exp\left[-k_1\,y\right]\cos\left(\lambda x+k_2y-\omega t+\bar{\varphi}_1\right),\\&H_y(x,\,y,\,t)=H_1\exp\left[-k_1\,y\right]\cos\left(\lambda x+k_2y-\omega t+\varphi_1\right),\\&E(x,\,y,\,t)=E_1\exp\left[-k_1\,y\right]\cos\left(\lambda x+k_2y-\omega t+\psi\right),\end{aligned}\tag{10`}$$

с подлежащими определению постоянными $k_1, k_2, H_1, E_1, \varphi_1$ и ψ. Тогда краевое условие (11) и условие регулярности на бесконечности будет выполняться при любых значениях этих параметров, если, конечно $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$.

Определим постоянные $k_1, k_2, H_1, E_1, \varphi_1$ и ψ по методу эквиваленто-линеаризации [3]. Для этого умножим первое уравнение (10) один раз на $\exp\left[-k_1 y\right]\sin\left(\lambda x+k_2y-\omega t+\bar{\varphi}_1\right)$, второй раз на $\exp\left[-k_1 y\right]\sin\left(\lambda x+k_2y-\omega t+\bar{\varphi}_1\right)$ и проинтегрируем по y от 0 до ∞, по t от 0 до $2\pi/\lambda$ и по x от 0 до $2\pi/\omega$. Аналогично поступим со вторым и третьим уравнениями, умножая соответственно на

$$\exp\left[-k_1\,y\right]\begin{cases}\cos\left(\lambda x+k_2y-\omega t+\varphi_1\right),\\ \sin\left(\lambda x+k_2y-\omega t+\varphi_1\right),\end{cases}$$

и

$$\exp\left[-k_1\,y\right]\begin{cases}\cos\left(\lambda x+k_2y-\omega t+\psi\right),\\ \sin\left(\lambda x+k_2y-\omega t+\psi\right).\end{cases}$$

В результате приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$
\begin{aligned}
&H_0\left[k_1\cos(\psi-\bar{\varphi}_1)-k_2\sin(\psi-\bar{\varphi}_1)\right]-\lambda H_1\sin(\varphi_1-\psi)=(\sigma+\omega\varphi_s+\chi_c)E_1,\\
&H_0\left[k_1\sin(\psi-\bar{\varphi}_1)-k_2\cos(\psi-\bar{\varphi}_1)\right]-\lambda H_1\cos(\varphi_1-\psi)=(\omega\varphi+\omega\varepsilon+\chi_c)E_1,\\
&k_1\cos(\psi-\bar{\varphi}_1)+k_2\sin(\psi-\bar{\varphi}_1)=0,\\
&-k_1\sin(\psi-\bar{\varphi}_1)+k_2\cos(\psi-\bar{\varphi}_1)=\bar{\mu}_1(H_1,\varphi_1)\frac{\omega H_0}{E_1}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sin(\varphi_1-\psi)=0,\\
&\lambda E_1\cos(\varphi_1-\psi)=-\omega H_0\,\bar{\mu}_2(H_1,\varphi_1),
\end{aligned}
$$

где

$$
\bar{\mu}_1(H_1,\varphi_1)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\mu\left\{\sqrt{e^{-2y}\left(H_0^2\cos^2\tau+H_1^2\cos^2(\varphi_1-\bar{\varphi}_1+\tau)\right)}\right\}e^{-2y}\cos^2\tau\,d\tau\,dy,
$$

$$
\bar{\mu}_2(H_1,\varphi_1)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\mu\left\{\sqrt{e^{-2y}\left(H_0^2\cos^2(\bar{\varphi}_1-\varphi_1+\tau)+H_1^2\cos^2\tau\right)}\right\}e^{-2y}\cos^2\tau\,d\tau\,dy.
$$

Из третьего и пятого уравнений полученной системы (12) сразу находим

$$
\psi=\bar{\varphi}_1-\mathrm{arctg}\frac{k_1}{k_2},\quad \varphi_1=\psi. \tag{13}
$$

Первое и второе уравнения системы (12), разрешённые относительно H_1 и H_0 с помощью (13), переписываются в виде

$$
H_1=\frac{H_0\left[(\sigma+\omega\varphi_s+\chi_c)(k_1^2-k_2^2)-2(\omega\psi_c+\omega\varepsilon-\chi_s)k_1k_2\right]}{\lambda(\sigma+\omega\varphi_s+\chi_c)\sqrt{k_1^2+k_2^2}}, \tag{14}
$$

$$
E_1=\frac{2H_0k_1k_2}{(\sigma+\omega\varphi_s+\chi_c)\sqrt{k_1^2+k_2^2}}. \tag{15}
$$

Дальнейшее исключение E_1, H_1, ψ и φ_1 из первых четырёх уравнений системы (12) с помощью (13) даёт систему двух уравнений для определения постоянных k_1 и k_2:

$$
k_1^2-k_2^2-F_1(k_1,k_2)=0,\quad 2k_1k_2-F_2(k_1,k_2)=0, \tag{16}
$$

где

$$
F_1(k_1,k_2)=\frac{\left[\omega(\omega\varphi_c+\omega\varepsilon-\chi_c)\bar{\mu}_2(H_1,\varphi_1)-\lambda^2\right]F_2(k_1,k_2)}{\omega(\sigma+\omega\varphi_s+\chi_c)(H_1,\varphi_1)},
$$

$$
F_2(k_1,k_2)=\sqrt{\omega\mu_1(H_1,\varphi_1)(\sigma+\omega\varphi_s+\chi_c)(k_1^2+k_2^2)}.
$$

Итак, определение постоянных в приближенном решении (10`) сводится к отысканию положительных корней k_1 и k_2 системы (14). По ним определяются постоянные φ_1, E_1 и H_1 согласно (13), (14) и (15). К определению, в общем случае для системы (16) нельзя получить точное решение. Приближенное решение этой системы можно получить с помощью компьютерной технологии.

Для получения приближенных аналитических решений удобно переписать систему (16) в виде:

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{F_1^2(k_1, k_2) + F_2^2(k_1, k_2)} \pm F_1(k_1, k_2)\right)},$$

позволяющем воспользоваться методом последовательных приближений. При этом в качестве нулевых значений для k_1 и k_2 можно принять выражения (8`) линейной задачи с $\mu = \mu(H_0)$.

Легко можно проверить, что полученные выше приближенные аналитические выражения для $H_x(x, y, t), H_y(x, y, t), E(x, y, t)$ трансформируют точные решения соответствующей линейной задачи, если n = 1, $H_0^1 = H_0$, $\mu\left(\left|\vec{H}\right|\right) = \mu = \text{const}$. Для средних поверхностных потерь получаем формулу

$$\overline{p} = \frac{H_0^2 k_1 k_2^2}{(\sigma + \omega\,\varphi_s + \chi_c)(k_1^2 + k_2^2)}.$$

Поступило 06.05.2015 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Курбанов И. Качестыенные и аналитические методы исследования краевых задач электромагнитоупругости с памятью.- Киев, 1991, 321 с.
2. Митропольский Ю.А., Курбанов И. О разрешимости краевых задач электромагнитоупругости с памятью. – ДАН СССР, 1991, №1, 317, с. 35-39
3. Березовский А.А., Курбанов И. Периодические во времени плоские электромагнитные поля в полупространстве с общими материальными уравнениями. – Краевые задачи электродинамики проводящих сред, - Киев, 1976, с. 37-57.

И.Қурбонов

МАСЪАЛАҲОИ КАНОРИИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ БАРОИ МУҲИТҲОИ ЯКҶИНСАИ ДОРОИ ХОТИРА

Донишгоҳи (Славянии) Россияю Тоҷикистон

Дар мақола масъалаҳои канории ғайрихатии электромагнетӣ барои муҳити якҷинсаи хотирадор дида шудааст. Ҳалли тақрибии даврии бо вақт ва координатаи *x* дар бораи нимфазои *y* > 0 бо методи хаттикунонии эквивалентӣ сохта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *муҳитҳои якҷинса ва ғайриякҷинса – муҳитҳои ферромагнетӣ – хаттикунонӣ.*

I.Kurbonov

NONLINEAR REGIONAL PROBLEMS OF ELECTRODYNAMICS IN HOMOGENEOUS ENVIRONMENTS WITH MEMORY

Russian-Tajik (Slavonic) University

The article deals with consideration of distribution of electromagnetic waves in a half-space $y > 0$, fading on coordinaty, periodic on time t and on one spatial coordinate x set on a surface of a magnetic field $H_x(x,0,t)$.

Key words: *homogeneous and inhomogeneous medium – ferromagnetic environments – linearization.*