ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
2015, том 58, №6

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

Ф.М.Шамсудинов

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Курган-Тюбинский государственный университет им.Н.Хусрава

(Представлено академиком АН Республики Таджикистан Н.Раджабовым 11.03.2015 г.)

Для одной переопределённой системы уравнений второго порядка со сверхсингулярными коэффициентами найдены представления многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной, изучены свойства полученных решений, а также рассмотрены задачи B_1, B_2 и B_3.

Ключевые слова: *многообразия решений – переопределённая система – прямоугольник – свойства решений.*

Пусть D - прямоугольник

$$D=\{(x,y):\ 0<x<\delta_1\ 0<y<\delta_2\}.$$

Далее обозначим

$$\Gamma_1=\{y=0\ ,0<x<\delta_1\},\Gamma_2=\{x=0,0<y<\delta_2\}.$$

В области D рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{b_1(x,y)}{r^\beta}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{c_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}u=\dfrac{f_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{a_2(x,y)}{r^\gamma}u=\dfrac{f_2(x,y)}{r^\gamma}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{b_2(x,y)}{r^\delta}u=\dfrac{f_3(x,y)}{r^\delta}, \end{cases} \tag{1}$$

где $r^2=x^2+y^2$, $a_j(x,y), b_j(x,y), c_1(x,y),\ f_k(x,y),\ j=\overline{1.2}, k=\overline{1.3}$ - заданные функции в области $D, \alpha<1, \beta<1, \gamma>2, \delta>2.$

Проблеме исследования уравнений и переопределённых систем с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы [1-10].

Система уравнений (1) с двумя линиями вырождения была изучена в [5].

В настоящей работе на основе способа, разработанного в [4] и [5]. получены представления многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной.

***Адрес для корреспонденции**: Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич. 735140, Республика Таджикистан, Курган-Тюбе, ул. Айни, 67, Курган-Тюбинский государственный университет. E-mail: faizullo100@yahoo.com*

Обозначим в дальнейшем через $C_2(D)$ класс функций, которые имеют непрерывные производные первого порядка в D и такие, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in C(D).$$

Случай 1. Пусть первое уравнение системы (1) является главным. В этом случае получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений (1)* $\alpha < 1,\ \beta < 1,\ \gamma > 2,\ \delta > 2$ *коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям*

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(\bar{D}),\ a_2(x,y),\ f_2(x,y) \in C_y^1(\bar{D}),\quad c_1(x,y), b_2(x,y),\ f_1(x,y) \in C(\bar{D})$;

2) $c_2(x,y) = -c_1(x,y) + r^{\alpha+\beta}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_1(x,\ y)}{r^\alpha}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y)$;

3) $|a_2(x,0) - a_2(0,0)| \le H_1 x^{\gamma_1},\ H_1 = const,\ \ \gamma_1 > \gamma - 1$;

4) $a_2(0,0) > 0$;

5) a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_1(x,y)}{r^\propto}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{a_2(x,y)}{r^\gamma}\right)$ в D,

b) $$r^{\alpha+\beta}\left(r^{-\gamma}a_2(x,y) - r^{-\beta}b_1(x,y)\right)exp\left[-W_{b_1}^\beta(x,y)\right]$$

$$\left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t,y) + c_2(t,y)u(t,y)}{\left(t^2+y^2\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} exp\left[W_{b_1}^\beta(t,y)\right]dt\right) + f_1(x,y) +$$

$$+c_2(x,y)u(x,y) = r^{\alpha+\beta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{r^\alpha}\right) + r^{\beta-\gamma}a_1(x,y)\, f_2(x,y) \text{ в D},$$

c) $$r^\delta\left(r^{-\delta}b_2(x,y) - r^{-\alpha}a_1(x,y)\right)exp\left[-W_{a_1}^\alpha(x,y)\right]$$

$$\left(\phi_1(x) + \int_0^y exp\left[W_{a_1}^\alpha(x,s) - W_{b_1}^\beta(x,s)\right]\right.$$

$$\left.\left(\psi_1(s) + \int_0^x \frac{f_1(t,s) + c_2(t,s)u(t,s)}{\left(t^2+s^2\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} exp\left[W_{b_1}^\beta(t,s)\right]dt\right)ds\right) +$$

$$+r^\delta exp\left[-W_{b_1}^\beta(x,y)\right]\left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t,y) + c_2(t,y)u(t,y)}{\left(t^2+y^2\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} exp\left[W_{b_1}^\beta(t,y)\right]dt\right) = f_3(x,y)\ в\ D,$$

6) $f_1(x,y)=o\left(r^{\mu_1}\right),\ c_2(x,y)=o\left(r^{\mu_2}\right),\ \mu_1,\ \mu_2>\alpha+\beta-1,\quad f_2(x,0)=o\left(x^{\gamma_2}\right),\quad \gamma_2>\gamma-1.$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ *представимо в виде*

$$u(x,y)=exp\left[-W_{a_1}^{\alpha}(x,y)\right]\left\{\Omega\left(\phi_1(x),\psi_1(y),f_1(x,y)\right)+\right.$$

$$\left.+\int_0^y ds\int_0^x \Omega\left(\phi_1(t),_1(s),f_1(t,s)\right)\Gamma_1(x,y;t,s)\,dt\right\}\equiv$$

$$\equiv\chi_1\left(\phi_1(x),\psi_1(y),f_1(x,y)\right),. \tag{2}$$

где

$$\phi_1(x)=exp\left[-W_{a_2}^{\gamma}(x,0)+a_2(0,0)W_{\gamma-1}(x)\right]$$

$$\left(c_1+\int_0^x\frac{f_2(t,0)}{t^{\gamma}}exp\left[W_{a_2}^{\gamma}(t,0)-a_2(0,0)W_{\gamma-1}(t)\right]dt\right)\equiv$$

$$\equiv N_1\left(c_1,f_2(x,0)\right), \tag{3}$$

$$\psi_1(y)=\frac{f_3(0,y)}{y^{\delta}},\ \text{при } \mathrm{y}^{\alpha}b_2(0,y)=\mathrm{y}^{\delta}a_1(0,y), \tag{4}$$

$$\Omega\left(\phi_1(x),\psi_1(y),\ \ f_1(x,y)\right)=\phi_1(x)+\int_0^y exp\left[W_{a_1}^{\alpha}(x,s)-W_{b_1}^{\beta}(x,s)\right]$$

$$\left(\psi_1(s)+\int_0^x\frac{f_1(t,s)}{(t^2+s^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}exp\left[W_{b_1}^{\beta}(t,s)\right]dtds\right),$$

$$W_{a_1}^{\alpha}(xy)=\int_0^y\frac{a_1(x,s)ds}{(x^2+s^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\ ,\ W_{b_1}^{\beta}(x,y)=\int_0^x\frac{b_1(t,y)dt}{(t^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}\quad ,$$

$$W_{a_2}^{\gamma}(x,0)=\int_0^x\frac{a_2(t,y)-a_2(0,0)}{t^{\gamma}}dt,\ \ W_{\gamma-1}(x)=\left[(\gamma-1)x^{\gamma-1}\right]^{-1},$$

c_1- *произвольная постоянная.*

Замечание 1. *При выполнении условий*

$$c_1(x,y)=r^{\alpha+\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{r^2}\right)+a_1(x,y)b_1(x,y)$$

решение системы уравнений (1) даётся в явном виде.

Замечание 2. *Если* $y^{\alpha}b_2(0,y)\neq y^{\delta}a_1(0,y)$, *тогда общее решение системы уравнений (1) выражается при помощи двух произвольных постоянных.*

Полученное решение обладает свойствами:

1^0 - если $y\to 0$, то

$$\lim_{y\to 0}u(x,y)=\phi_1(x);$$

2^0 - если $y\to 0$ и $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}u\left(x,y\right)\right\}=O\left(exp\left[a_2(0,0)W_{\gamma-1}(x)\right]\right);$$

3^0 - $\lim\limits_{x\to 0}\left\{exp\left[-a_2(0,0)W_{\beta-1}(x)\right]\lim\limits_{y\to 0}u(x,y)\right\}=c_1;$

4^0 - если $x\to 0$, то

$$u(x,\mathrm{y})=\mathrm{O}\left(exp\left[a_2(0,0)W_{\gamma-1}(x)\right]\right).$$

Замечание 3. *Утверждение теоремы 1 остаётся в силе при выполнении условий*:

1) $a_2(0,0)<0;$ 2) $f_2(x,0)=o\left(exp\left[a_2(0,0)W_{\gamma-1}(x)\right]x^{\gamma_3}\right)$, $\gamma_3>\gamma-1.$

Замечание 4. *При выполнении условий замечания 3 полученное решение имеет поведение*

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}u(x,y)\right\}=0 \quad \textit{и} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\neq 0}}u(x,y)=0.$$

Случай 2. Пусть второе уравнение системы (1) является главным, тогда имеет место следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть в системе уравнений (1)* $\alpha<1,\ \beta<1,\ \gamma>2,\ \delta>2$ *коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям*

1) $a_1(x,y),\quad b_2(x,y),\quad f_3(x,y)\in C_x^1(\vec{D})$, $\quad a_2(x,y),\quad f_2(x,y)\in C_y^1(\vec{D})$

$b_1(x,y),\quad c_1(x,y),\quad f_1(x,y)\in C(\vec{D});$

2) $c_2(x,y)=-c_1(x,y)+r^{\alpha+\beta}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_1(x,y)}{r^{\alpha}}\right)+\ a_1(x,y)b_2(x,y);$

3) $\left|a_2(x,y)-a_2(0,0)\right|\leq H_2r^{\gamma_4},\qquad H_2=const,\ \gamma_4>\gamma-1,$

$\left|b_2(0,y)-b_2(0,0)\right|\leq H_4y^{\delta_1},\quad H_3=const,\ \delta_3>\delta-1;$

4) $a_2(0,0)<0,\ b_2(0,0)>0;$

5) $a)\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{r^{\gamma}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_2(x,y)}{r^{\delta}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{r^{\alpha}}\right)$ в D,

$$b) r^{\alpha+\beta}\left(r^{-\gamma}a_2(x,y)-r^{-\beta}b_1(x,y)\right)exp\left[-W_{b_1}^{\beta}(x,y)\right]$$

$$\left(\psi_1(y)+\int_0^x\frac{f_1(t,y)+c_2(t,y)u(t,y)}{(t^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}exp\left[W_{b_1}^{\beta}(t,y)\right]dt\right)+f_1(x,y)+$$

$$+c_2(x,y)u(x,y)=r^{\alpha+\beta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{r^{\gamma}}\right)+r^{\beta-\gamma}a_1(x,y)f_2(x,y)\quad в\, D,$$

$$c)\ r^{\gamma+\delta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_3(x,y)}{r^{\delta}}\right)+a_2(x,y)f_3(x,y)=$$

$$=r^{\gamma+\delta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{r^{\delta}}\right)+b_2(x,y)f_2(x,y)\ в\, D;$$

6) $f_2(x,y)=o\left(r^{\gamma_5}\right),\quad \gamma_5>\gamma-1, f_3(0,y)=o\left(x^{\delta_2}\right),\ \delta_2>\delta-1.$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ *представимо в виде*

$$u(x,y)=exp\left[-W_{a_2}^{\gamma}(x,y)-a_2(0,0)W_{\frac{\gamma}{2}-1}^{(1)}(x,y)\right]$$

$$\left(\psi_2(y)+\int_0^x\frac{f_2(t,y)}{(t^2+y^2)^{\frac{\gamma}{2}}}exp\left[W_{a_2}^{\gamma}(t,y)+a_2(0,0)W_{\frac{\gamma}{2}-1}^{(1)}(t,y)\right]dt\right)\equiv$$

$$\equiv\chi_2\left(\psi_2(y),f_2(x,y)\right), \tag{5}$$

где

$$\psi_2(y)=exp\left[-W_{b_2}^{\delta}(0,y)+b_2(0,0)W_{\delta-1}(y)\right]$$

$$\left(c_2+\int_0^y\frac{f_3(0,s)}{s^{\delta}}exp\left[W_{b_2}^{\delta}(0,s)-b_2(0,0)W_{\delta-1}(s)\right]ds\right)\equiv$$

$$\equiv N_2\left(c_2,f_3(0,y)\right), \tag{6}$$

$$W_{a_2}^{\gamma}(x,y)=\int_0^x\frac{a_2(t,y)-a_2(0,0)}{(t^2+y^2)^{\frac{\gamma}{2}}}dt,\ W_{b_2}^{\delta}(0,y)=\int_0^y\frac{b_2(0,s)-b_2(0,0)}{s^{\delta}}ds,$$

$$W^{(1)}_{\frac{\gamma}{2}-1}(x,y)=\frac{x}{y^2(\gamma-2)r^{\gamma-2}}+\frac{1}{y^2}\frac{\gamma-3}{\gamma-2}I^{(1)}_{\frac{\gamma}{2}-1}(x,y),$$

$$I^{(1)}_{\frac{\gamma}{2}-1}(x,y)=\int_0^x(t^2+y^2)^{1-\frac{\gamma}{2}}dt,\ W_{\delta-1}(y)=\left[(\delta-1)y^{\delta-1}\right]^{-1},$$

c_2 – *произвольная постоянная.*

Полученное решение обладает свойствами:

1^0 - если $x\to 0$, *то*

$$\lim_{x\to 0}u(x,y)=\psi_2(y);$$

2^0 - если $x\to 0$ и $y\to 0$, *то*

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\}=O\left(exp\left[b_2(0,0)W_{\delta-1}(y)\right]\right);$$

2^0 - $\lim\limits_{y\to 0}\left\{exp\left[-b_2(0,0)W_{\delta-1}(y)\right]\lim\limits_{x\to 0}u(x,y)\right\}=c_2;$

4^0 - *Если* $y\to 0$ *и* $x\neq 0$, то

$$u(x,y)=O\left(exp\left[-a_2(0,0)W^{(1)}_{\frac{\gamma}{2}-1}(x,y)\right]\right).$$

Замечание 5. *Утверждение теоремы 2 остаётся в силе при выполнении условий:*

1) $a_2(0,0)>0,\ b_2(0,0)<0;$

2) $f_2(x,y)=0\left(exp\left[a_2(0,0)W_{\frac{\gamma}{2}-1}(x,y)\right]r^{\lambda_\bullet}\right),\ \lambda_1>\gamma-1;$

3) $f_3(0,y)=0\left(exp\left[b_2(0,0)W_{\delta-1}(y)\right]y^{\delta_3}\right),\delta_3>\delta-1$.

Замечание 6. *При выполнении условий замечания 5 полученное решение имеет поведение*

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}u(x,y)\right\}=0\ \text{и}\ \ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\neq 0}}u(x,y)=0.$$

Случай 3. Пусть третье уравнение системы (1) является главным, тогда получим следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть в системе уравнений (1)* $\alpha<1,\ \beta<1,\ \gamma>2,\ \delta>2$ *коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям*

1) $a_1(x,y),\ \ b_2(x,y),\ \ f_3(x,y)\in C^1_x(\bar{D}),\ a_2(x,y),$

$$f_1(x,y),\ f_2(x,y)\in C_y^1(\bar{D}),\ \ b_1(x,y), c_1(x,y)\in C(\bar{D});$$

2) $$c_2(x,y)=-c_1(x,y)+r^{\alpha+\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{r^{\alpha}}\right)+a_1(x,y)b_1(x,y);$$

3) $$\left|b_2(x,y)-b_2(0,0)\right|\le H_4 r^{\gamma_6},\qquad H_4=const,\ \gamma_6>\delta-1,$$

$$\left|a_2(x,0)-a_2(0,0)\right|\le H_5 x^{\gamma_7},\qquad H_5=const,\ \gamma_7>\gamma-1;$$

4) $b_2(0,0)<0,\ a_2(0,0)>0;$

5) $a)$ $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_2(x,y)}{r^{\delta}}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{r^{\gamma}}\right)\ \text{в}\ D,$$

$b)$ $$r^{\delta}(r^{-\alpha}a_1(x,y)-r^{-\delta}b_2(x,y)(exp\left[-W_{b_2}^{\delta}(x,y)-b_2(0,0)W_{\frac{\delta}{2}-1}^{(2)}(x,y)\right]$$

$$\left(\phi_2(x)+\int_0^y\frac{f_3(x,s)}{(x^2+s^2)^{\frac{\delta}{2}}}exp\left[W_{b_2}^{\delta}(x,s)+b_2(0,0)W_{\frac{\delta}{2}-1}^{(2)}(x,s)\right]ds\right)+$$

$$+f_3(x,y)=r^{\delta}exp\left[-W_{b_1}^{\beta}(x,y)\right]$$

$$\left(\psi_1(y)+\int_0^x\frac{f_1(t,y)+c_2(t,y)u(t,y)}{(t^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}exp\left[W_{b_1}^{\beta}(t,y)\right]dt\right)\ \text{в}\ \ D,$$

$c)$ $$r^{\gamma+\delta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{r^{\gamma}}\right)+b_2(x,y)\,f_2(x,y)=$$

$$=r^{\gamma+\delta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_3(x,y)}{r^{\delta}}\right)+a_2(x,y)\,f_3(x,y)\ \ \text{в}\ D;$$

6) $$f_3(x,y)=o\left(r^{\delta_4}\right),\ \ \delta_4>\delta-1,\quad f_2(x,0)=o\left(x^{\lambda_2}\right),\ \lambda_2>\gamma-1.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ *представимо в виде*

$$u(x,y)=exp\left[-W_{b_2}^{\delta}(x,y)-b_2(0,0)W_{\frac{\delta}{2}-1}^{(2)}(x,y)\right](\phi_2(x)+$$

$$+\int_0^y\frac{f_3(x,s)}{(x^2+s^2)^{\frac{\delta}{2}}}exp\left[W_{b_2}^{\delta}(x,s)+b_2(0,0)W_{\frac{\delta}{2}-1}^{(2)}(x,s)\right]ds\equiv$$

$$\equiv\chi_3\left(\phi_2(x),\quad f_3(x,y)\right),\tag{7}$$

где

$$\phi_2(x) = exp\left[-W_{a_2}^{\gamma}(x,0) + a_2(0,0)W_{\gamma-1}(x)\right]$$

$$\left(c_3 + \int_0^x \frac{f_2(t,0)}{t^{\gamma}} exp\left[W_{a_2}^{\gamma}(t,0) - a_2(0,0)W_{\gamma-1}(t)\right]dt\right) \equiv$$

$$\equiv N_3\left(c_3, f_2(x,0)\right), \tag{8}$$

$$W_{b_2}^{\delta}(x,y) = \int_0^y \frac{b_2(x,s) - b_2(0,0)}{(x^2+s^2)^{\frac{\delta}{2}}} ds, \; W_{a_2}^{\gamma}(x,y) = \int_0^x \frac{a_2(t,0) - a_2(0,0)}{t^{\gamma}} dt,$$

$$W_{\frac{\delta}{2}-1}^{(2)}(x,y) = \frac{y}{x^2(\delta-2)r^{\delta-2}} + \frac{1}{x^2}\frac{\delta-3}{\delta-2} I_{\frac{\delta}{2}-1}^{(2)}(x,y),$$

$$I_{\frac{\delta}{2}-1}^{(2)}(x,y) = \int_0^y (x^2+s^2)^{1-\frac{\delta}{2}} ds, \quad W_{\gamma-1}(x) = \left[(\gamma-1)x^{\gamma-1}\right]^{-1},$$

c_3 *– произвольная постоянная.*

Полученное решение обладает свойствами:

1^0 - если $y \to 0$, то

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = \phi_2(x);$$

2^0 - если $y \to 0$ и $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = O\left(exp\left[a_2(0,0)W_{\gamma-1}(x)\right]\right);$$

3^0 - $\lim_{x\to 0}\left\{exp\left[-a_2(0,0)W_{\gamma-1}(x)\right]\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = c_3;$

4^0 - если $x \to 0$ *и* $y \neq 0$, *то*

$$u(x,y) = O\left(exp\left[-b_2(0,0)W_{\frac{\delta}{2}-1}^{(2)}(x,y)\right]\right).$$

Замечание 7. *Утверждение теоремы 3 остаётся в силе при выполнении условий:*

1) 1) $b_2(0,0) > 0$, $a_2(0,0) < 0$;

2) $f_3(x,y) = o\left(exp\left[-b_2(0,0)W_{\frac{\delta}{2}-1}^{(2)}(x,y)\right]r^{\nu_1}\right), \; \nu_1 > \delta - 1;$

3) $f_2(x,y) = o\left(exp\left[a_2(0,0)W_{\gamma-1}(x)\right]x^{\nu_2}\right), \; \nu_2 > \gamma - 1.$

Замечание 8. *При выполнении условий замечания 7 полученное решение имеет поведение*

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}u\left(x,y\right)\right\}=0 \quad и \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\neq 0}}u\left(x,y\right)=0.$$

Для полученных интегральных представлений ставятся и решаются следующие задачи с начальными данными.

Задача $\boldsymbol{B}_1$. *Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса* $C_2\left(D\right)$ *по начальному условию*

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp\left[-a_2\left(0,0\right)W_{\gamma-1}\left(x\right)\right]\lim_{y\to 0}u\left(x,y\right)\right\}=p_1,$$

где p_1 *– заданное постоянное число.*

Задача $\boldsymbol{B}_2$. *Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса* $C_2\left(D\right)$ *по начальному условию*

$$\lim_{y\to 0}\left\{exp\left[-b_2\left(0,0\right)W_{\delta-1}\left(y\right)\right]\lim_{x\to 0}u\left(x,y\right)\right\}=p_2,$$

где p_2 *– заданная известная постоянная.*

Задача $\boldsymbol{B}_3$. *Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса* $C_2\left(D\right)$ *по начальному условию*

$$\lim_{x\to 0}\left\{exp\left[-a_2\left(0,0\right)W_{\gamma-1}\left(x\right)\right]\lim_{y\to 0}u\left(x,y\right)\right\}=p_3,$$

где p_3 *– заданное известное постоянное .*

О разрешимости задач B_1, B_2 *и* B_3 получены следующие утверждения.

Теорема 4. *Если коэффициенты и правые части системы уравнений (1) удовлетворяют всем условиям теоремы 1, то единственное решение задачи* B_1 *даётся формулами (2), (3), (4) при* $c_1=p_1$.

Теорема 5. *Если в системе уравнений (1) коэффициенты и правые части удовлетворяют всем условиям теоремы 2, то единственное решение задачи* B_2 *даётся формулами (5),(6) при* $c_2=p_2$.

Теорема 6. *Пусть в системе уравнений (1) коэффициенты и правые части удовлетворяют всем условиям теоремы 3. Тогда единственное решение задачи* B_3 *выражается формулами (7), (8) при* $c_3=p_3$.

Замечание 9. *Для системы уравнений (1) подобные утверждения получены, когда коэффициенты первого уравнения удовлетворяют условию*

$$c_2(x,y) = -c_1(x,y) + r^{\alpha+\beta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1(x,y)}{r^{\beta}}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y).$$

Поступило 13.03.2915 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Wilczynski E.J. Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces. - Zeip. Zig; Leubner, 1906, 120 p.
2. Appel P. And Kampe de Fariet M.J. Functions hypergeometriges of hyperspheriges Polynomesd Hermite. - Paris, Gauthir – Villars, 1926, 434 s.
3. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. – Душанбе: Дониш,1986, 115 с.
4. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. – Душанбе: Изд. ТГУ, 1992, 236 с.
5. Раджабов Н., Мохаммед Эльсаед Абдел Аал. Переопределенная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями. – Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2011, 234 с.
6. Усманов З.Д. Обобщённые системы Коши-Римана с сингулярной точкой. – Душанбе: ТГУ, 1993, 234 с
7. Шамсудинов Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка со сверхсингулярной точкой. – Труды междунар. научной конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы», г. Стерлитамак 26-30 июня 2013. с. 300-304.
8. Шамсудинов Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами. – Мат-лы междунар. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик : КБНЦ РАН, 2013, с. 282-286.
9. Тасмамбетов Ж.Н. О развитии исследований специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. – Мат-лы междунар. научно-практ. конф. "Информационные технологии: инновации в науке и образовании"; г. Актобе 20-21 февраля 2015г,с. 6-17.
10. Шамсуддинов Ф.М. Об исследовании одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой. – Там же, - с. 247-250.

Ф.М.Шамсудинов

ОИД БА ТАДҚИҚИ ЯК СИСТЕМАИ БАРЗИЁДМУАЙЯНШУДАИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ТАРТИБИ ДУЮМ БО КОЭФФИСИЕНТҲОИ СУПЕРСИНГУЛЯРӢ

Донишгоҳи давлатии Қургонтеппа ба номи Н.Хусрав

Дар кори мазкур барои як системаи барзиёдмуайяншудаи тартиби дуюм бо коэффисиентҳои суперсингулярӣ тасвирҳои интегралии ҳал ба воситаи як доимии ихтиёрӣ ёфташуда, барои онҳо масъалаҳои B_1, B_2 *ва* B_3 ҳал карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: *бисёршаклии ҳал – системаи барзиёдмуайяншуда – росткунҷа – хосиятҳои ҳал.*

F.M.Shamsudinov

REGARDING THE INVESTIGATION FOR ONE OVER DETERMINED SYSTEM OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATOINS WITH SUPERSINGUL COEFFICIENTS

N.Khusrav Qurgantyube State University

In this paper, for an over determined system of second order equations with a super singularity point, found representation of the variety solution and study the properties of the solutions, as well as consider the problem of B_1, B_2 and B_3.

Key words: *manifold solution – over determined system – rectangle – properties solution.*