МАТЕМАТИКА

УДК 511.325

Д.Дж.Хокиев

ОЦЕНКА КОРОТКОЙ СУММЫ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРА ДИРИХЛЕ ПО СОСТАВНОМУ МОДУЛЮ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СДВИНУТЫХ ЧИСЕЛ

Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан

(Представлено членом-корреспондентом АН Республики Таджикистан З.Х.Рахмоновым 06.02.2016 г.)

При $y \geq D^{\frac{1}{3}+\frac{8\varepsilon}{5}}$ *и* $(l,D)=1$ *получена нетривиальная оценка сумм значений неглавного характера* χ *по модулю* D*, порождённого примитивным характером* χ_q*, в последовательности* $n-l$*,* $x-y<n\leq x$*,* $(n,q)=1$.

Ключевые слова: *нетривиальная оценка, характер Дирихле, сдвинутые числа, короткая сумма характеров.*

Для неглавного характера $\chi(n)$ по модулю D Д.Берджесс [1, 2] получил оценку

$$\sum_{x-y<n\leq x}\chi(n) \ll y^{\frac{2}{3}}D^{\frac{1}{9}+\varepsilon},$$

которая является нетривиальной при $y \gg D^{\frac{1}{3}+4\varepsilon}$.

Всюду ниже будем считать, что D – достаточно большое натуральное число, χ – неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, порождённый характером χ; ε – положительное сколь угодно малое постоянное число. При изучении закона распределения значений χ на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,D)=1$ возникает задача получения нетривиальной оценки сумм вида

$$T(\chi)=\sum_{\substack{x-y<n\leq x\\ (n,q)=1,}}\chi(n-l).$$

Ранее сумма $T(\chi)$ в случае простого D рассматривалась в работах [3, 4], а в случае составного D – в работах [5-9].

Теорема 1. *Пусть* D *– достаточно большое натуральное число,* χ *– неглавный характер по модулю* D*,* χ_q *– примитивный характер, порождённый характером* χ*,* $(l,D)=1$*,* $y<x$ *и* $y \geq D^{\frac{1}{3}+\frac{8}{5}\varepsilon}$*; тогда*

Адрес для корреспонденции: *Хокиев Дониёр Джалилович. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики АН РТ. E-mail: khdj.91@mail.ru*

$$|T(\chi)| \ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^{\sigma}D\right). \tag{1}$$

Следующее утверждение следует из доказанной теоремы при $\sigma = 0.6$.

Следствие 1.1. Пусть $(l,D)=1$, $y<x$ и $y \geq D^{\frac{1}{3}+\frac{8}{5}\varepsilon}$, тогда

$$|T(\chi)| \ll y\exp\left(-1,5\sqrt{\ln D}\right).$$

Доказательство теоремы. Пусть q_1 – произведение простых чисел, делящих D, но не делящих числа q. Воспользовавшись определением числа q_1 и свойством функции Мёбиуса в сумме $T(\chi)$ от неглавного характера χ, переходим к примитивному характеру χ_q. Имеем

$$T(\chi) = \sum_{\substack{x-y<n\leq x \\ (n,q)=1,(n-l,q_1)=1}} \chi_q(n-l) = \sum_{\delta\backslash q_1}\mu(\delta)T(\chi_q,\delta),$$

$$T(\chi_q,\delta) = \sum_{\substack{x-y<n\leq x \\ (n,q)=1,\, n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,\delta)}} \chi_q(n-l).$$

Разбивая сумму по δ на две части, имеем

$$T(\chi) = T_1(\chi)+T_2(\chi), \quad T_1(\chi) = \sum_{\substack{\delta\backslash q_1 \\ \delta\leq\exp(\ln D^2)^{\sigma}}} \mu(\delta)T(\chi_q,\delta), \quad T_2(\chi) = \sum_{\substack{\delta\backslash q_1 \\ \exp(\ln D^2)^{\sigma}<\delta}} \mu(\delta)T(\chi_q,\delta).$$

Для оценки суммы $T_2(\chi)$ воспользуемся тривиальной оценкой суммы $T(\chi_q,\delta)$ и следующей леммой:

Лемма 1. [10] *Пусть* σ *– фиксированное число,* $0.1 \leq \sigma < 0.9$*, тогда*

$$S = \sum_{\substack{d\backslash D \\ d>\exp(\ln D^2)^{\sigma}}} \frac{\mu^2(d)}{d} \ll \exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^{\sigma}D\right).$$

Имеем

$$|T_2(\chi)| \leq \sum_{\substack{\delta\backslash q_1 \\ \exp(\ln D^2)^{\sigma}<\delta}} \mu^2(\delta)\left|T(\chi_q,\delta)\right| \leq \sum_{\substack{\delta\backslash q_1 \\ \exp(\ln D^2)^{\sigma}<\delta}} \mu^2(\delta)\left(\frac{y}{\delta}+1\right) \ll$$

$$\ll y\sum_{\substack{\delta\backslash q_1 \\ \exp(\ln D^2)^{\sigma}<\delta}} \frac{\mu^2(\delta)}{\delta} + \tau(q_1) \ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^{\sigma}D\right) + D^{\varepsilon} \ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^{\sigma}D\right).$$

Оценим теперь $T_1(\chi)$. Имеем равенство:

$$T_1(\chi) = \sum_{\substack{\delta\backslash q_1 \\ \delta\le\exp(\ln D^2)^\sigma}} \mu(\delta)\sum_{d\backslash q}\mu(d) \sum_{\substack{x-y<nd\le x \\ nd\equiv l \pmod{\delta}}} \chi_q(nd-l).$$

Определяя число d_δ^{-1} из сравнения $dd_\delta^{-1}\equiv 1(mod\,\delta)$, напишем сравнение $nd\equiv l(\mathrm{mod}\,\delta)$ в виде $n\equiv ld_\delta^{-1}(mod\,\delta)$. Отсюда, представляя переменное суммирование n в виде $n=ld_\delta^{-1}+m\delta$, имеем

$$T_1(\chi) = \sum_{\substack{\delta\backslash q_1 \\ \delta\le\exp(\ln D^2)^\sigma}} \mu(\delta)\sum_{d\backslash q}\mu(d) \sum_{x-y<(ld_\delta^{-1}+m\delta)d\le x} \chi_q((ld_\delta^{-1}+m\delta)d-l) =$$

$$=\sum_{d\backslash q}\mu(d) \sum_{\substack{\delta\backslash q_1 \\ \delta\le\exp(\ln D^2)^\sigma}} \mu(\delta) \sum_{\frac{x-y-ldd_\delta^{-1}}{d\delta}<m\le\frac{x-ldd_\delta^{-1}}{d\delta}} \chi_q(m\delta d+l(dd_\delta^{-1}-1)).$$

Представляя сравнение $dd_\delta^{-1}\equiv 1(mod\,\delta)$ в виде $dd_\delta^{-1}-1=\delta k$, где $k=k(d,\delta)$ однозначно находится для каждой пары d и δ, получим

$$T_1(\chi)= \sum_{d\backslash q}\mu(d)\chi_q(\delta) \sum_{\substack{\delta\backslash q_1 \\ \delta\le\exp(\ln D^2)^\sigma}} \mu(\delta)T(\chi_q,\delta,d),$$

$$T(\chi_q,\delta,d)= \sum_{x_1-y_1<m\le x_1}\chi_q(md+lk),\quad x_1=\frac{x-l}{d\delta}-\frac{lk}{d},\quad y_1=\frac{y}{d\delta}.$$

Разбивая сумму $T_1(\chi)$ на две части, имеем

$$T_1(\chi)=T_{11}(\chi)+T_{12}(\chi),$$
$$T_{11}(\chi)= \sum_{\substack{d\backslash q \\ d\le\exp(\ln D^2)^\sigma}} \mu(d)\chi(\delta) \sum_{\substack{\delta\backslash q_1 \\ \delta\le\exp(\ln D^2)^\sigma}} \mu(\delta)T(\chi_q,\delta,d),$$
$$T_{12}(\chi)= \sum_{\substack{d\backslash q \\ \exp(\ln D^2)^\sigma<d}} \mu(d)\chi(\delta) \sum_{\substack{\delta\backslash q_1 \\ \delta\le\exp(\ln D^2)^\sigma}} \mu(\delta)T(\chi_q,\delta,d).$$

Для оценки суммы $T_{12}(\chi)$ воспользуемся тривиальной оценкой суммы $T_{11}(\chi,\delta,d)$ и леммой 1. Имеем

$$|T_{12}(\chi)| \le \sum_{\substack{d\backslash q \\ \exp(\ln D^2)^\sigma<d}} \mu^2(d) \sum_{\substack{\delta\backslash q_1 \\ \delta\le\exp(\ln D^2)^\sigma}} \mu^2(\delta)\left(\frac{y}{\delta d}+1\right)\le$$

$$\le y \sum_{\substack{d\backslash q \\ \exp(\ln D^2)^\sigma<d}} \frac{\mu^2(d)}{d} \sum_{\substack{\delta\backslash q_1 \\ \delta\le\exp(\ln D^2)^\sigma}} \frac{\mu^2(\delta)}{\delta}+\tau(q)\tau(q_1)\ll$$

$$\ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^{\sigma}D\right)\sum_{\substack{\delta\backslash q_1\\ \delta\le\exp(\ln D^2)^{\sigma}}}\frac{\mu^2(\delta)}{\delta}+\tau(D)\ll$$

$$\ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^{\sigma}D\right)\ln D+D^{\varepsilon}\ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^{\sigma}D\right)\ln D.$$

Оценим теперь $T_{11}(\chi)$. Рассмотрим два случая: $D^{\frac{7}{12}}<y\le 0,5D$ и $D^{\frac{1}{3}+\frac{8}{5}\varepsilon}\le y\le D^{\frac{7}{12}}$.

Случай $D^{\frac{7}{12}}<y\le 0,5D$**.** Применяя к $T(\chi_q,\delta,d)$ формулу, которая устанавливает связь между значениями примитивных характеров и значениями сумм Гаусса:

Лемма 2. [11] *Пусть* χ_q *– примитивный характер по модулю* q. *Тогда*

$$\tau(\overline{\chi}_q)\chi_q(n)=\sum_{m=1}^{q}\overline{\chi}_q(m)e\left(\frac{mn}{q}\right),$$

где

$$\tau(\chi_q)=\sum_{m=1}^{q}\chi_q(m)e\left(\frac{m}{q}\right),\qquad |\tau(\chi_q)|=\sqrt{q}.$$

Имеем

$$T(\chi_q,\delta,d)=\sum_{a=1}^{q}\sum_{\substack{x_1-y_1<m\le x_1,\\ a\equiv md+lk\,(\mathrm{mod}\,q)}}\chi_q(md+lk)=\sum_{a=1}^{q}\chi_q(a)\sum_{\substack{x_1-y_1<m\le x_1,\\ a\equiv md+lk\,(\mathrm{mod}\,q)}}1=$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{t=0}^{q-1}e\left(\frac{-lkt}{q}\right)\sum_{x_1-y_1<m\le x_1}e\left(\frac{-mdt}{q}\right)\sum_{a=1}^{q}\chi_q(a)e\left(\frac{at}{q}\right)=$$

$$=\frac{\tau(\chi_q)}{q}\sum_{t=0}^{q-1}\overline{\chi}_q(t)e\left(\frac{-lkt}{q}\right)\sum_{x_1-y_1<m\le x_1}e\left(\frac{-mdt}{q}\right).$$

Из условий $\delta\le\exp(\ln D^2)^{\sigma}$, $d\le\exp(\ln D^2)^{\sigma}$ и $y\ge q^{\frac{1}{3}+\frac{8}{5}\varepsilon}$; $0.1\le\sigma<0.9$ следует, что последняя сумма по m непустая. Воспользовавшись для целых m_1 и m_2 равенством

$$\sum_{m_1\le m\le m_2}e\left(-\frac{mdt}{q}\right)=\frac{\sin\frac{\pi td(m_2-m_1+1)}{q}}{\sin\frac{\pi td}{q}}e\left(-\frac{td(m_1+m_2)}{2q}\right)$$

и переходя к оценкам и имея в виду, что $|\tau(\chi)|=\sqrt{q}$, найдём

$$|T(\chi_q,\delta,d)|\le\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\substack{t=0\\(t,q)=1}}^{q-1}\left|\sin\frac{\pi t}{q/d}\right|^{-1}=\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{t_1=0}^{d-1}\sum_{\substack{t_2=0\\(q/dt_1+t_2,q)=1}}^{q/d-1}\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi t_2}{q/d}\right|}\le\frac{d}{\sqrt{q}}\sum_{t=1}^{q/d-1}\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi t}{q/d}\right|}.$$

Если q/d – нечётное число, то

$$|T(\chi_q,\delta,d)| \le \frac{2d}{\sqrt{q}}\sum_{t=1}^{\frac{q/d-1}{2}}\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi t}{q/d}\right|} \le \frac{2d}{\sqrt{q}}\sum_{t=1}^{\frac{q/d-1}{2}}\frac{q/d}{2t} = \sqrt{q}\sum_{t=1}^{\frac{q/d-1}{2}}\frac{1}{t},$$

так как $\sin\pi\alpha \ge 2\alpha$ при $0\le\alpha\le 1/2$. Далее, воспользовавшись неравенством $\frac{1}{t}\le\ln\frac{2t+1}{2t-1}$, найдём

$$|T(\chi_q,\delta,d)| \le \sqrt{q}\sum_{t=1}^{\frac{q/d-1}{2}}\left(\ln(2t+1)-\ln(2t-1)\right) = \sqrt{q}\ln q/d \le \sqrt{D}\ln D.$$

Если q/d – чётное число, то

$$|T(\chi_q,\delta,d)| \le \frac{2d}{\sqrt{q}}\sum_{t=1}^{\frac{q/d}{2}-1}\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi t}{q/d}\right|} + \frac{d}{\sqrt{q}} \le \frac{2d}{\sqrt{q}}\sum_{t=1}^{\frac{q/d}{2}-1}\frac{q/d}{2t} + \frac{d}{\sqrt{q}} \le \sqrt{D}\ln D.$$

Следовательно,

$$|T_{11}\quad(\chi)| \le \sum_{\substack{\delta\backslash q_1\\ \delta\le\exp(\ln D^2)^\sigma}}\ \sum_{\substack{d\backslash q\\ d\le\exp(\ln D^2)^\sigma}} |T_{11}(\chi,\delta,d)| \le \sqrt{D}\ln D\left(\exp(\ln D^2)^\sigma\right)^2 =$$

$$= y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^\sigma D\right)\cdot\frac{D^{\frac{1}{2}+\frac{\ln\ln D}{\ln D}+2^\sigma\left(2+0,5\sigma\right)(\ln D)^{\sigma-1}}}{y} \ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^\sigma D\right).$$

Случай $D^{\frac{1}{3}+\frac{8}{5}\varepsilon}\le y\le D^{\frac{7}{12}}$**.** Воспользуемся следующей леммой, которая доказывается аналогично лемме 3 работы [12], где соответствующая оценка получена при более сильном условии $(\eta,q)=1$.

Лемма 3. [12] *Пусть* σ *– вещественное число,* M, N, d *и* η *– целые числа, удовлетворяющие условиям* $d\backslash q$, $(\eta,d)=1$, $d\le\exp(\ln q^2)^\sigma$, $0.1\le\sigma<0.9$. *Тогда при* $N<q^{\frac{7}{12}}d^{-\frac{1}{2}}$ *справедлива оценка*

$$\left|\sum_{M-N<n\le M}\chi_q(nd-\eta)\right| \le N^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{9}+\frac{\varepsilon}{2}}d^{\frac{2}{3}}. \qquad (2)$$

Имеем

$$T_{11}(\chi)=\sum_{\substack{d\backslash q\\ d\le\exp(\ln D^2)^{\sigma}}}\mu(d)\chi(\delta)\sum_{\substack{\delta\backslash q_1\\ \delta\le\exp(\ln D^2)^{\sigma}}}\mu(\delta)T(\chi_q,\delta,d),$$

$$T(\chi_q,\delta,d)=\sum_{x_1-y_1<m\le x_1}\chi_q(md+lk),\quad x_1=\frac{x-l}{d\delta}-\frac{lk}{d},\quad y_1=\frac{y}{d\delta},$$

В случае $(d,k)>1$ из соотношения

$$(md+lk,q)=\left((d,k)\left(\frac{md}{(d,k)}+\frac{lk}{(d,k)}\right),q\right)\ge(d,k)>1$$

следует, что $\chi_q(md+lk)=0$.

Для $(d,k)=1$, воспользовавшись леммой 3 при

$$M=[x_1],N=[x_1]-[x_1-y_1]-1,$$

и имея в виду,что

$$N=y_1-\{x_1\}+\{x_1-y_1\}-1\le y_1=\frac{y}{d\delta},$$

получим

$$T(\chi_q,\delta,d)\ll\left(\frac{y}{d\delta}\right)^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{9}+\frac{\varepsilon}{2}}d^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{9}+\frac{\varepsilon}{2}}\le y^{\frac{2}{3}}D^{\frac{1}{9}+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Следовательно,

$$|T_{11}(\chi)|\le\sum_{\substack{\delta\backslash q_1\\ \delta\le\exp(\ln D^2)^{\sigma}}}\sum_{\substack{d\backslash q\\ d\le\exp(\ln D^2)^{\sigma}}}|T(\chi_q,\delta,d)|\le y^{\frac{2}{3}}D^{\frac{1}{9}+\frac{\varepsilon}{2}}\left(\exp(\ln D^2)^{\sigma}\right)^2=$$

$$=y\exp(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^{\sigma}D)\cdot\left(\frac{D^{\frac{1}{3}+\frac{3\varepsilon}{2}}\cdot(\exp((2^{1+\sigma}+2^{\sigma-1}\sigma)\ln^{\sigma}D))^3}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\le$$

$$\le y\exp(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^{\sigma}D)\cdot\left(\frac{D^{\frac{1}{3}+\frac{8\varepsilon}{5}}}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\ll y\exp(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^{\sigma}D).$$

Теорема доказана.

Поступило 06.10.2016 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Burgess D. A. On character sums and *L*-series-Proc. London Math. Soc, 1962, v. 12, №3, pp. 193-206.
2. Burgess D. A. On character sums and *L*-series II.-Proc. London Math. Soc, 1963, v. 13, №3, pp. 524-536.
3. Виноградов И.М. Избранные труды. – М.:Изд-во АН СССР, 1952.

4. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами. – Известия АН СССР, сер. матем, 1970, т. 34, с. 299-321.
5. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле. – УМН, 1986, т. 41, №1, с. 201-202.
6. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами. – Доклады Академии наук Таджикской ССР, 1986, т. 29, №1, с. 16-20.
7. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения. – Труды Математического института РАН, 1994, т. 207, с. 286-296.
8. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последова- тельности сдвинутых простых чисел. – ДАН РТ, 2013, т. 56, №1, с. 5-9.
9. Фридландера Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И,Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах. – Матем. заметки, 2010, т. 88, в. 4, с. 605-619.
10. Рахмонов З.Х. Суммы характеров с простыми числами. – Чебышевский сборник, 2014, т. 15, в. 2(50), с. 73-100.
11. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. 2-ое изд. – М.: Наука, 1983.
12. Рахмонов З.Х. Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел. – Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2013, т. 13, в. 4(2), с. 113-117.

Д.Ҷ.Хокиев

БАҲОИ СУММАИ КӮТОҲИ ҚИМАТИ ХАРАКТЕРИ ДИРИХЛЕ АЗ РӮИ МОДУЛИ АДАДИ ТАРКИБӢ ДАР ПАЙДАРПАИИ ЛАҒҶОНИДАШУДА

Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Ҳангоми $y \ge D^{\frac{1}{3}+\frac{8\varepsilon}{5}}$ ва $(l,D)=1$ баҳои ғайритривиалии суммаи қиматҳои аз характери ғайриасосӣ χ аз руи модули D, тавлидшудаи характери примитивӣ χ_q, дар пайдарпайии $n-l$, $x-y<n\le x$, $(n,q)=1$ гирифта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *баҳои ғайритривиалӣ, характери Дирихле, ададҳои лағҷонидашуда, суммаи кӯтоҳи характерҳо.*

D.J.Khokiev

ESTIMATION OF THE SUM OF DIRICHLET CHARACTER VALUES ON COMPOSITE MODULE IN THE SEQUENCE OF SHIFTED NUMBERS

A.Dzhuraev Institute of Mathematics Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

Nontrivial estimate was obtained for sums of values of non-principal character χ modulo D, generated by the primitive character of χ_q, in the sequence of $n-l$, $x-y<n\le x$, $(n,q)=1$ for $y \ge D^{\frac{1}{3}+\frac{8\varepsilon}{5}}$ and $(l,D)=1$.

Key words: *Nontrivial estimation, Dirichlet character, shifted number, short characters sum.*