ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
2018, том 61, №2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Академик АН Республики Таджикистан М.Илолов, Х.С.Кучакшоев, Д.Н.Гулджонов[*]

О ДРОБНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВОЛЬТЕРРА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Центр инновационного развития науки и новых технологий АН Республики Таджикистан,
[*]Институт математики им А.Джураева АН Республики Таджикистан

В работе изложены основы теории одного класса дробных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра в банаховом пространстве. Установлены условия существования α*-резольвентных операторов, эквивалентные условиям корректности соответствующих начальных абстрактных задач.*

Ключевые слова: *производная Капуто, резольвентный оператор, задача Коши, скалярное ядро.*

Пусть $X-$ банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Пусть $\alpha>0$ и m – ближайшее целое число, большее, чем α. Рассмотрим задачу Коши для линейных интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка α в банаховом пространстве X вида

$$ {}^cD_t^\alpha u(t)=Au(t)+\int_0^t B(t-s)u(s)ds+f(t),\ u(0)=u_0,\ u^{(k)}(0)=0,\ k=1,...,m-1, \qquad (1)$$

где ${}^cD_t^\alpha-$ дробная производная Капуто порядка α от X-значной функции $u(t)$ [1], то есть

$$ {}^cD_t^\alpha u(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-1-\alpha}u^{(m)}(\tau)d\tau, \qquad (2)$$

A – замкнутый линейный плотно определенный оператор в X, $\{B(t)\}_{t\ge 0}$ – семейство замкнутых линейных операторов в X с областями определения $D(B(t))\supset D(A), f:R_+\to X-$ непрерывная функция и начальное значение $u_0\in X$.

Функция $u:[0,a]=J\to X$ называется решением задачи Коши (1), если u имеет непрерывную дробную производную Капуто (2) на $J, u(t)\in D(A),\ Au(t)-$ непрерывная функция и u удовлетворяет (1).

Задача Коши для дробных дифференциальных уравнений

$$ {}^cD_t^\alpha u(t)=Au(t),\ t>0,\ u(0)=u_0 \qquad (3)$$

рассматривалась в работах [2,3]. В [3] даны условия для оператора A, необходимые и достаточные для разрешимости задачи (3). В частности, доказано, что (3) имеет голоморфное решение в случае,

Адрес для корреспонденции: *Илолов Мамадшо. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр. Рудаки, 33, Центр инновационного развития науки и новых технологий АН РТ. E-mail: ilolov.mamadsho@gmail.com*

когда оператор генерирует аналитическую C_0-полугруппу. Интегро-дифференциальные уравнения первого порядка были предметом анализа многочисленных публикаций [4-9]. В указанных работах при различных условиях на A и $B(t)$ доказаны теоремы существования решений и корректности задачи (1). Некоторые работы посвящены исследованию обратной задачи, то есть вопросу о том, для каких классов операторов A и B из корректности задачи (1) следует существование резольвентных операторов. В случае, когда A является генератором аналитической C_0-полугруппы, $B(t)x$ принадлежит классу C^1 для всех $x \in D(A)$ и $B(t)D(A^2) \subset D(A)$, ответ на вышеуказаный вопрос утвердительный. В работе [9] считается выполненным следующее условие (H_0):

$D(B(t)) \supset D(A)$ для всех $t \geq 0$, функции $B(t)x$ сильно измеримые для $x \in D(A)$ и имеется скалярная $b \in L^1_{Loc}(R_+)$ такая, что $\| B(t)x \| \leq b(t)(\| x \| + \| Ax \|)$ для всех $x \in D(A)$ и для почти всех $t \geq 0$.

В [9] доказано, что условие (H_0) обеспечивает эквивалентность между корректностью задачи (1) и существованием резольвентного оператора для (1).

Результаты работы [9] являются обобщением классических теорем С.Г.Крейна [10] для дифференциальных уравнений

$$z' = Az$$

с неограниченными операторами A на случай интегро-дифференциальных уравнений первого порядка.

Настоящая работа посвящена изучению α-резольвентных операторов задачи (1). Вводится семейство сильно непрерывных и ограниченных линейных операторов $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ в X, удовлетворяющих условию $S_\alpha(0) = I$, и резольвентных уравнений вида

$$D_t^\alpha S_\alpha(t) = AS_\alpha(t) + \int_0^t B(t-s)S_\alpha(s)ds, \tag{4}$$

и

$$D_t^\alpha S_\alpha(t) = S_\alpha(t)A + \int_0^t S_\alpha(t-s)B(s)ds. \tag{5}$$

Доказано, что при достаточно общих предположениях относительно $B(t)$ найдется не более одного α-резольвентного оператора. Любое решение задачи (1) представимо через формулу вариации параметров вида

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds, \tag{6}$$

из которой следует корректность постановки задачи (1). И, обратно, из корректности задачи (1) следует существование α-резольвентных операторов.

Рассмотрим определение α-резольвентных операторов, основные свойства и условия корректности задачи (1).

Пусть A – замкнутый линейный, плотно определенный оператор в X. Пусть семейство замкнутых операторов $\{B(t)\}_{t\ge 0}$ удовлетворяет условию (H_0).

Определение 1. Семейство ограниченных операторов $\{S_\alpha(t)\}_{t\ge 0}$ называется α-резольвентным семейством операторов для задачи (1), если выполняются следующие условия:

$(S_\alpha 1)$ для всех $x \in X$, $S_\alpha(t)x$ непрерывна на R_+, и $S_\alpha(0) = I$ ($I-$ тождественный оператор);

$(S_\alpha 2)$ $S_\alpha(t)D(A) \subset D(A)$ для всех $t \ge 0$ и $x \in D(A)$, функция $AS_\alpha(t)x$ непрерывная и $S_\alpha(t)x$ имеет непрерывную дробную производную порядка α по t на R_+;

$(S_\alpha 3)$ для всех $x \in D(A)$ и $t \ge 0$ имеют место α-резольвентные уравнения

$$D_t^\alpha S_\alpha(t)x = AS_\alpha(t)x + \int_0^t B(t-s)S_\alpha(s)xds, \tag{7}$$

$$D_t^\alpha S_\alpha(t)x = S_\alpha(t)Ax + \int_0^t S_\alpha(t-s)B(s)xds. \tag{8}$$

Сначала покажем, что существует не более одного α-резольвентного оператора.

Теорема 1. *Существует не более одного α-резольвентного оператора $S_\alpha(t)$ для задачи* (1).

Доказательство. Пусть $S_\alpha^1(t)$ и $S_\alpha^2(t)$ – α-резольвентные операторы для задачи (1) и пусть $x \in D(A)$. Тогда из (4) и (5) следует

$$S_\alpha^2(t) - S_\alpha^1(t) = \int_0^t \frac{d}{ds}[S_\alpha^2(t-s)S_\alpha^1(s)]ds =$$

$$= \int_0^t \{S_\alpha^2(t-s)S_\alpha^{1'}(s)x - S_\alpha^{2'}(t-s)S_\alpha^1(s)x\}ds =$$

$$= \int_0^t S_\alpha^2(t-s)\int_0^s B(s-r)S_\alpha^1(r)xdrds -$$

$$-\int_0^t\int_0^{t-s} S_\alpha^2(t-s-r)B(r)S_\alpha^1(r)xdrds =$$

$$= \int_0^t\int_r^t S_\alpha^2(t-s)B(s-r)S_\alpha^1(s)xdsdr -$$

$$-\int_0^t\int_s^r S_\alpha^2(t-r)B(r-s)S_\alpha^1(s)xdrds = 0,$$

поскольку $S_\alpha^2(t-s)B(s-r)S_\alpha^1(r)x$ – измеримая и суммируемая функция в силу предположения (H_0) и в силу теоремы Фубини. Следовательно,

$$S_\alpha^1(t)x = S_\alpha^2(t)x$$

для всех $t \ge 0$ и $x \in D(A)$, и поскольку $D(A)$ плотна в X и $S_\alpha^1(t), S_\alpha^2(t)$ ограниченные, то получим

$$S_\alpha^1(t) = S_\alpha^2(t).$$

Другим непосредственным заключением из существования α-резольвентного оператора является формула вариации постоянных.

Теорема 2. *Предположим, что задача* (1) *допускает* α*-резольвентный оператор* $S_\alpha(t)$. *Пусть* $u_0 \in X$ *и* $f \in C(J, X)$, *где* $J = [0, a]$. *Тогда, если* $u(t)$ *решение* (1) *на* J, *то*

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds \text{ для всех } t \in J. \tag{9}$$

Доказательство. Так как $u(t)$ решение (1), то из (6-8) и из теоремы Фубини о замене порядка интегрирования получим

$$u(t) - S_\alpha(t)u_0 - \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds =$$

$$= \int_0^t [\frac{d}{ds}(S_\alpha(t-s)u(s) - S_\alpha(t-s)f(s))]ds =$$

$$= \int_0^t S_\alpha(t-s)\int_0^s B(s-r)u(r)drds - \int_0^t\int_0^{t-s} S_\alpha(t-s-r)B(r)u(s)drds =$$

$$= \int_0^t\int_r^t S_\alpha(t-s)B(s-r)u(r)dsdr - \int_0^t\int_s^t S_\alpha(t-r)B(r-s)u(s)drds = 0.$$

Из теоремы 2 следует, что решение неоднородного уравнения единственное. Более того, если $u_{0n} \to u_0$ и $f_n \to f$ в $L^1(J, X)$, то решение (1), полученное заменой u_0 и f на u_{0n} и f_n, сходится к u равномерно на J.

Однако функция $u(t)$, определенная с помощью (9), вообще говоря, не будет решением (1).

Мы назовем такое решение слабым решением (1).

Имеет место

Следствие 1. Пусть уравнение (1) допускает α-резольвентный оператор. Тогда задача (1) корректна в слабом смысле.

Далее обсудим вопрос о том, когда и для каких u_0 и f слабое решение становится решением задачи (1). По аналогии с полугруппами (*случай* $B(t)=0$) при $u_0 \in D(A)$ имеются два класса неоднородностей f, для которых ответ утвердительный, а именно $f \in C(J,X)$ и $f \in W^{1,1}(J,X)$. Через $W^{1,1}(J,X)$ обозначено пространство абсолютно непрерывных на J функций таких, что $f' \in L^1(J,X)$ и $f(t)=f(0)+\int_0^t f'(s)ds.$

Рассмотрим частный случай уравнения (1), а именно

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds + f(t),\ t>0, \tag{10}$$

где $a \in L^1(R_+)-$ скалярнозначное ядро. Пусть $f(t) \in BC(R_+,X)$ – пространство ограниченных непрерывных функций и пусть $\varphi(t)$ – функция, заданная формулой

$$\varphi(t) := \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds,\ t>0. \tag{11}$$

Тогда $\|\varphi\|_{BC} \le \|S_\alpha\| \|f\|_{BC}$. Если $f(t) \in D(A)$ для всех $t>0$, то $\varphi(t) \in D(A)$ для всех $t>0$. Поскольку $\{S_\alpha(t)\}_{t>0}$ интегрируемая, $\varphi \in BC$. Предположим, что $D^\alpha \varphi$ существует, и пусть $b(t)=g_\alpha(t)+(g_\alpha * a)(t),\ t\ge 0,$ где $g_\alpha(t)=\dfrac{t^{k-1}}{\Gamma(\alpha)}$ и $(g_\alpha * a)(t)=\int_0^t g_\alpha(t-s)a(s)ds,\ n=[\alpha]+1.$ Из теоремы Фубини получим

$$D^\alpha \varphi(t) = \frac{d^n}{dt^n}\int_0^t g_{n-\alpha}(t-s)\varphi(s)ds =$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}\int_0^t g_{n-\alpha}(t-s)\int_0^s S_\alpha(s-r)f(r)drds =$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}\int_0^t g_{n-\alpha}(t-s)\int_0^s [g_\alpha(s-r)f(r)+(b*AS_\alpha)(s-r)f(r)]drds =$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}\int_0^t g_{n-\alpha}(t-s)D^{-\alpha}f(s)ds +$$

$$+\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t g_{n-\alpha}(t-s)\int_0^s\int_0^{s-r} b(s-r-v)AS_\alpha(v)f(r)dvdrds =$$

$$= f(t) + \frac{d^n}{dt^n}\int_0^t g_{n-\alpha}(t-s)\int_0^t [g_\alpha(s-\omega) + (g_\alpha * a)(s-\omega)]\int_0^\omega AS_\alpha(\omega - r) f(r)\,dr\,d\omega\,ds =$$

$$= f(t) + A\varphi(t) + \frac{d^n}{dt^n}\int_0^t g_{n-\alpha}(t-s)\int_0^t\int_0^v g_\alpha(s-v)a(v-\omega)A\varphi(\omega)\,d\omega\,dv\,ds =$$

$$f(t) + A\varphi(t) + \frac{d^n}{dt^n}\int_0^t g_{n-\alpha}(t-s)\int_0^s g_\alpha(s-v)(a * A\varphi)(v)\,dv\,ds =$$

$$f(t) + A\varphi(t) + (a + A\varphi)(t).$$

Итак, φ есть решение уравнения (10). Так как в общем случае $D^\alpha\varphi$ может не существовать, то будем говорит что $\varphi(t)$, определенная через (11), является слабым решением (1).

Теорема 3. *Предположим, что A генерирует α-резольвентное семейство $\{S_\alpha(t)\}_{t\ge 0}$ такое, что $\| S_\alpha(t) \| \le \varphi_\alpha(t)$ для всех $t \ge 0$ с $\varphi_\alpha \in L^1(R_+)$. Если $f \in BC(X)$, то уравнение* (1) *имеет единственное слабое решение.*

Доказательство. Если $f \in BC(X)$, то $u(t)$ корректно определена посредством равенства

$$u(t) = \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s)\,ds$$

и по теореме 1 $u \in BC(X)$. Далее, u является единственным решением (10).

Введем для дальнейшего следующее обозначение

$$e_{\alpha,\beta}(t) = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\rho t^\alpha),\ \rho \in \mathbb{R},$$

где $E_{\alpha,\beta}(t) -$ функция Миттаг-Леффлера.

Хорошо известно [11,12], что для $0 < \alpha \le \beta < 1$,

$$e_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-rt} k_{\alpha,\beta}(r)\,dr,\ t \ge 0, \tag{12}$$

где

$$k_{\alpha,\beta}(r) = \frac{[r^\alpha \sin\beta\pi + \rho\sin(\beta-\alpha)\pi]}{r^{2\pi} + 2\rho r^\alpha\cos(\alpha\pi) + \rho^2}. \tag{13}$$

Следующий результат показывает, что представление, подобное (12), справедливо и для случая $1 < \beta \le \alpha < 2$.

Теорема 4. *Пусть* $1 < \beta \le \alpha < 2$, *и* $\rho \in \mathbb{R}$. *Для всех* $t \ge 0$ *имеем*

$$e_{\alpha,\beta}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-rt}k_{\alpha,\beta}(r)dr+\frac{2}{\alpha}\rho^{(1-\beta)/\alpha}e^{\rho^{1/\alpha}}t\cos(\pi/a)+\frac{(1-\beta/\pi)}{\alpha},$$

где $k_{\alpha,\beta}$ определена равенством (13).

Поступило 01.12.2017 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск: Наука и техника, 1987, 702 с.
2. Кочубей А.Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка. - Дифференциальные уравнения, 1989, т.25, 8, с.1359-1368.
3. Илолов М. Дробные эволюционные уравнения и динамическая память. - ДАН РТ, 2013, т.56, 8, с.591-597.
4. Kostin V.A. The Cauchy problem for an abstract differential equation with fractional derivatives. - Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1992, v.326, 4, pp.597-600.
5. Friedman A., Shinbrot M., Voltera integral equation in Banach space. - Trans. Amer. Math. Soc., 1967, v.126, pp.131-179.
6. Grimmer R.C. and Miller R.K. Existence Uniqueness and continuity for integral equations in a Banach Space. - J. Math. Anal. Appl., 1977, v.57, pp.429-447.
7. Grimmer R.C. and Pruss J. On Linear Voltera equations in Banach spaces. - Comp. and Maths. with Appl. 1985, v.11, Nov. 1-3, pp.189-205.
8. Pruss J. Evolutionary Integral Equations and Applications.- Basel: Birkhauser Verlag, 1993, 366 p.
9. Dhanapalan V., Thamilselvan M. and Chandrasekaran M. Existence and uniqueness of mild solutions for fractional integrodifferential equations. - Appl. Comput. Math-Bak, 2014, v.3, 1, pp.32-37.
10. Крейн С.Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1967, 401 с.
11. Ponce R. Bounded mild solutions to fractional integrodifferential equations in Banach spaces. - Semigroup Forum, 2013, v.87, pp.377-392.
12. Gorenflo R., Mainardi F., Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order, in: A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Fractals and fractional Calculus in Continuum Mechanics, Wien, New York: Springer Verlag, 1997, pp.223-276.

М.Илолов, Х.С.Кучакшоев, Д.Н.Гулҷонов*

ДАР БОРАИ МУОДИЛАҲОИ ХАТИИ КАСРИИ ВОЛТЕРРА ДАР ФАЗОҲОИ БАНАХ

Маркази рушди инноватсионии илм ва технологияҳои наві
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,
****Институти математикаи ба номи А.Ҷураеви Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон***

Дар мақола асосҳои назарияи як синфи муодилаҳои касрии интегродифференсиалии Волтерра дар фазоҳои Банах оварда шудаанд. Шартҳои мавҷудияти операторҳои α-резолвентӣ дарёфт гардидаанд, ки бо саҳеҳнокии масъалаҳои абстрактии мувофиқ баробарқувва мебошанд.

Калимаҳои калидӣ: *ҳосилаи Капуто, оператори резолвентӣ, масъалаи Коши, ядрои сколярӣ.*

M.Ilolov, Kh.S.Kuchakshoev, D.N.Guljonov*

ON FRACTIONAL LINEAR VOLTERRA EQUATIONS IN BANACH SPACES

Center for Innovative Development of Science and new technology,
Academy of Science of the Republic of Tajikistan,
****A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Science of the Republic of Tajikistan***

In this paper, the foundations of the theory of a class of fractional integrodifferential equations of Volterra type in Banach spaces is present. Conditions for the existence of α-resolvent operators that are equivalent to the correctness of the corresponding initial abstract problems are established.

Key words: *Caputo derivative, resolvent operators, Cauchy problem, scalar kernel.*