МАТЕМАТИКА

УДК 519.65

И.А.Шакиров, Ю.Х.Хасанов*

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ НОРМЫ КЛАССИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ФУРЬЕ

Набережночелнинский государственный педагогический университет,
****Российско-Таджикский (Славянский) университет***

(Представлено академиком АН Республики Таджикистан З.Х.Рахмоновым 16.11.2017 г.)

В работе получено новое и более простое интегральное представление для константы Лебега, выраженное через интегралы Римана от тригонометрических функций со сдвигами аргумента, и на этой основе определены более точные нижняя и верхняя границы для остаточного члена константы, соответствующего фиксированному значению параметра.

Ключевые слова: *ряд Фурье, норма оператора Фурье, константа Лебега, нижняя и верхняя границы, оценка константы Лебега, точные значения константы.*

Если ряд Фурье непрерывной, 2π-периодической функции $x = x(t)$ является её равномерно сходящимся разложением, то частные суммы этого ряда

$$S_n(t;x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(s)D_n(t-s)ds \quad \left(D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}\right) \tag{1}$$

служат приближённым выражением для исходной функции [1, с.191], [2, с.85]. Соответствующий полиному (1) оператор Фурье

$$S_n : B \to H_n^T \subset B, \quad B = C[0,2\pi] \vee L_1[0,2\pi]\ , \tag{2}$$

действующий в B, имеет минимальную норму среди всевозможных линейных проекторов $P_n : B \to H_n^T \subset B$ ([3, с.482], [4, с.191]). Другими словами, при любых натуральных значениях параметра n справедливо неравенство $\|P_n\|_B \geq \|S_n\|_B \equiv \mathcal{L}_n = \mathcal{L}(n)$, согласно которому среди упомянутых проекторов наибольшего внимания заслуживает норма оператора (2). Она является основной характеристикой процесса приближения исходной функции полиномами (1), участвует при оценке погрешности приближения в неравенстве Лебега (фундаментальном неравенстве) $\|x - S_n x\|_B \leq (1+\mathcal{L}_n)E_n^T(x) \quad (x \in B,\ n \in \mathrm{N})$, где $E_n^T(x)$ – наилучшее приближение функции $x(t)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n $(n \in \mathrm{N})$; $n = 0$ соответствует тривиальному случаю.

Используя интегральное представление

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt \qquad (n \in \mathrm{N})\ , \tag{3}$$

Адрес для корреспонденции: *Хасанов Юсуфали. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М.Турсунзаде, 30, РТСУ. E-mail: yukhas60@mail.ru*

в начале прошлого века Л.Фейером [5] для константы Лебега (3) было получено асимптотическое равенство

$$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}(n) = (4/\pi^2)\ln n + O(1), \quad n \to \infty \quad (n \in \mathrm{N} \Rightarrow \mathcal{L}_n = (4/\pi^2)\ln n + O_n).$$

Затем им же в работе [6] и Г.Сёге [7] найдены формулы для вычисления точного значения константы (3) вида $(n \in \mathrm{N},\ \mathcal{L}_0 = 1)$

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}tg\frac{\pi k}{2n+1}, \qquad \mathcal{L}_n = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{4k^2-1}\sum_{m=1}^{k(2n+1)}\frac{1}{2m-1}\Big),$$

где $O(1)$, O_n – неопределённые числа из некоторого ограниченного интервала,

$$O_n = O(n) \equiv \mathcal{L}_n - (4/\pi^2)\ln n \quad (n \in \mathrm{N})$$

– классический вариант остаточного члена константы (3), соответствующий фиксированному значению параметра $n \in \mathrm{N}$.

Для константы Лебега в работе [8] Г.Харди получил интегральные формулы

$$\mathcal{L}_n = 4\int_0^{\infty}\frac{\tanh((2n+1)t)}{\tanh t}\cdot\frac{dt}{\pi^2+4t^2}, \quad \mathcal{L}_n = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\sinh((2n+1)t)}{\sinh t}\cdot\ln[ctgh((n+0.5)t)]\,dt, \qquad (4)$$

не содержащие модуля в подынтегральном выражении. Они сложны для теоретических исследований и приближенных расчетов, так как представлены через несобственные интегралы от сложнейших рационально-гиперболических и гиперболическо-логарифмических функций. Следовательно, к числу нерешённых проблем можно отнести установление более простых, чем формулы (4), интегральных представлений для константы (3).

В данной работе решены следующие задачи:

1) используя специфические узлы, получено новое и более простое интегральное представление для $\mathcal{L}_n$ (см. (5)), выраженное через интегралы Римана от тригонометрических функций со сдвигами аргумента по сужающейся при увеличении параметра n области (см. (5));

2) приведены другие равносильные интегральные представления для (3), составляющие которых строго оценены снизу и сверху;

3) на этой основе будут определены более точные нижняя и верхняя оценки для константы Лебега $\mathcal{L}_n$ и решена одна экстремальная задача.

Теорема 1. *Для константы (3) справедлива формула*

$$\mathcal{L}_n = I_0(n) + I(n) \qquad (\mathcal{L}_n = \mathcal{L}(n),\ n \in \mathrm{N}), \qquad (5)$$

где

$$I_0(n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{T}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt \qquad \Big(T = t_1 = \frac{\pi}{2(2n+1)}, \quad n \in \mathrm{N}\Big); \qquad (6)$$

$$I(n)=\frac{2}{\pi}\sum\nolimits_{k=1}^{n}\int_0^T\left[\frac{\cos(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k-1})}+\frac{\sin(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k})}\right]dt\quad(n\in\mathrm{N});\tag{7}$$

$$t_{2k-1}=\frac{\pi}{4n+2}(2k-1)\quad(k=\overline{1,\,n}),\ t_{2k}=\frac{\pi}{4n+2}2k\quad(k=\overline{1,\,n}).\tag{8}$$

Доказательство. На отрезке $[0,\,\pi/2]$ рассмотрим систему узлов $t_j=\dfrac{\pi}{2(2n+1)}j\quad(j=\overline{0,\,2n+1})$, образованную из нулей и экстремумов функции $y=|\sin(2n+1)t|\quad(t\in[0,\,\pi/2])$, которая разбивает рассматриваемый отрезок на N $(N=2n+1)$ одинаковых частей. Пропуская крайние узлы, оставшуюся часть разобьём на два подкласса вида (8).

Далее константу Лебега (3) представим в виде суммы N интегралов и применим к каждому из них (кроме первого) формулу замены переменной. Соответствующим образом введённые и использованные в расчётах новые переменные $u=t-t_{2k-1}$, $v=t-t_{2k}$ $(u,v\in[0,T],\ k=\overline{1,n})$ позволяют избавиться от модуля в формуле (3) и получить представление (5):

$$\tilde{\chi}_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt=\frac{2}{\pi}\sum\nolimits_{k=0}^{2n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{t_0}^{t_1}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt+\frac{2}{\pi}\sum\nolimits_{k=1}^{n}\left[\int_{t_{2k-1}}^{t_{2k}}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt+\int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^T\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt+\frac{2}{\pi}\sum\nolimits_{k=1}^{n}\left[\int_0^T\frac{|\cos(2n+1)u)|}{\sin(u+t_{2k-1})}du+\int_0^T\frac{|\sin(2n+1)v)|}{\sin(v+t_{2k})}dv\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^T\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt+\frac{2}{\pi}\sum\nolimits_{k=1}^{n}\int_0^T\left[\frac{\cos(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k-1})}+\frac{\sin(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k})}\right]dt\ =I_0(n)+I(n)\ (n\in\mathrm{N}).$$

Теорема 2. *Для первой составляющей (6) константы Лебега (5) справедлива двусторонняя оценка*

$$\theta<I_0(n)<\varphi_1(n)\quad\forall n\in\mathrm{N}\qquad(\varphi_1(n)\equiv(\pi/2)\,\theta\alpha_n),\tag{9}$$

где функция α_n определена в [9] (см. [9], лемма 1),

$$\theta=\frac{2}{\pi}Si(\pi/2)=\sum\nolimits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}=0.872654299\cdots\ \left(Si\,x=\int_0^x\sin x\frac{dx}{x}\right).\tag{10}$$

Доказательство. В области $(0,\,T]=(0,\,\pi/(4n+2)]$ рассмотрим следующие эквивалентные между собой двусторонние неравенства:

$$\frac{\sin(\pi/(4n+2))}{\pi/(4n+2)}t\le\sin t<t\Leftrightarrow\ \frac{\sin(2n+1)t}{t}<\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\le\frac{\pi/(4n+2)}{\sin(\pi/(4n+2))}\cdot\frac{\sin(2n+1)t}{t}.\tag{11}$$

В точке $t=0$ функции $y=\dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$, $y=\dfrac{\sin(2n+1)t}{t}$ доопределим через их правосторонние пределы, то есть имеем $y(0)=y(0+)=2n+1$. Теперь неравенство (11) интегрируем по области $[0,\,T]$, предварительно умножив его на константу $2/\pi$, в итоге получим:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt < I_0(n) < (\pi/2)\ \alpha_n \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt\ .$$

Интеграл, участвующий в двойном неравенстве, вычисляется точно:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^T \Big[(2n+1)-\frac{1}{3!}(2n+1)^3t^2+\frac{1}{5!}(2n+1)^5t^4-\frac{1}{7!}(2n+1)^7t^6+\cdots\Big]dt =$$

$$=1-\frac{1}{3\cdot 3!}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2+\frac{1}{5\cdot 5!}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^4-\frac{1}{7\cdot 7!}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^6+\cdots=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2k}.$$

Получили быстро сходящийся знакопеременный ряд, сумма которого совпадает со значением $(2/\pi)\,Si(\pi/2)$ (см. (10)). С учётом сказанного из последнего двустороннего неравенства для $I_0(n)$ легко следует справедливость (9). Теорема 2 доказана.

Введём обозначения, позволяющие в следующих пунктах компактно записать формулы, получаемые с использованием основной теоремы 1:

$$y_{2k-1}=y(t_{2k-1})=\frac{1}{\sin t_{2k-1}},\quad y_{2k}=y(t_{2k})=\frac{1}{\sin t_{2k}}\quad (k=\overline{1,\,n})\ ; \tag{12}$$

$$S(n)=\frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{k=1}^{n} y_{2k} = \frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin t_{2k}}\ ; \tag{13}$$

$$I_1(n)=\frac{2}{\pi(2n+1)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^T \Big[\frac{\sin(2n+1)t\ \cos(t+t_{2k-1})}{\sin^2(t+t_{2k-1})}-\frac{\cos(2n+1)t\cos(t+t_{2k})}{\sin^2(t+t_{2k})}\Big]dt\ ; \tag{14}$$

$$I_2(n)=\frac{2}{\pi(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^T \Big[\frac{\cos(2n+1)t\ (1+\cos^2(t+t_{2k-1}))}{\sin^3(t+t_{2k-1})}+\frac{\sin(2n+1)t\ (1+\cos^2(t+t_{2k}))}{\sin^3(t+t_{2k})}\Big]dt\ , \tag{15}$$

где $n\in\mathrm{N}$, узлы t_j определены в (8).

Теорема 3. *Для второй составляющей (7) константы Лебега (5) верны следующие представления:*

$$I(n)=S(n)+I_1(n)\qquad (n\in\mathrm{N}), \tag{16}$$

$$I(n)=S(n)+\varphi_3(n)-I_2(n)\qquad (n\in\mathrm{N}), \tag{17}$$

где функции, входящие в их правые части, определены соответственно в (13), (14) *и* (15), *а функция*

$$\varphi_3(n)=\frac{2}{\pi}\alpha_n^{\ 2}\cos\frac{\pi}{4n+2}$$

выведена и исследована в [9] *(см.* [9], *лемма 3).*

Доказательство. Преобразуем интегралы, входящие в (7), используя при этом формулу интегрирования по частям:

$$I(n)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}[\int_0^T \frac{\cos(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k-1})}dt+\int_0^T\frac{\sin(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k})}dt)]=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\{(\frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}\cdot\frac{1}{\sin(t+t_{2k-1})})\Big|_0^T+$$

$$+\int_0^T\frac{\sin(2n+1)t\,\cos(t+t_{2k-1})}{(2n+1)\sin^2(t+t_{2k-1})}dt+(-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\cdot\frac{1}{\sin(t+t_{2k})})\Big|_0^T-\int_0^T\frac{\cos(2n+1)t\,\cos(t+t_{2k})}{(2n+1)\sin^2(t+t_{2k})}dt\}=$$

$$=\frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{k=1}^{n}y_{2k}+\frac{2}{\pi(2n+1)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^T[\frac{\sin(2n+1)t\,\cos(t+t_{2k-1})}{\sin^2(t+t_{2k-1})}-\frac{\cos(2n+1)t\cos(t+t_{2k})}{\sin^2(t+t_{2k})}]dt,$$

где значения функций y_j определены в (12). Использование обозначений (13) и (14) в полученном равенстве позволяет завершить доказательство первой части теоремы.

Далее используем формулу интегрирования по частям в правой части (14):

$$I_1(n)=\frac{2}{\pi(2n+1)}\sum_{k=1}^{n}\{[-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\cdot\frac{\cos(t+t_{2k-1})}{\sin^2(t+t_{2k-1})}]\Big|_0^T-$$

$$-\int_0^T\frac{\cos(2n+1)t\,[1+\cos^2(t+t_{2k-1})]}{(2n+1)\sin^3(t+t_{2k-1})}dt-$$

$$-[\frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}\cdot\frac{\cos(t+t_{2k})}{\sin^2(t+t_{2k})}]\Big|_0^T-\int_0^T\frac{\sin(2n+1)t\,[1+\cos^2(t+t_{2k})]}{(2n+1)\sin^3(t+t_{2k})}dt\}=$$

$$=\frac{2}{\pi(2n+1)^2}(\frac{\cos t_1}{\sin^2 t_1}-\frac{\cos t_{2n+1}}{\sin^2 t_{2n+1}})-I_2(n)=\frac{2\cos t_1}{\pi[(2n+1)\sin t_1]^2}-I_2(n)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\alpha_n{}^2\cos\frac{\pi}{4n+2}-I_2(n)$$

Полученное равенство перепишем в виде

$$I_1(n)=\varphi_3(n)-I_2(n)\quad(n\in\mathrm{N}),$$

который и позволяет из формулы (16) получить равносильную ей формулу (17).

Замечание. Для константы Лебега верны представления

$$\lambda_n^0=I_0(n)+S(n)+I_1(n)\qquad(n\in\mathrm{N}),$$

$$\lambda_n^0=I_0(n)+S(n)+\varphi_3(n)-I_2(n)\quad(n\in\mathrm{N}),$$

которые являются следствиями теорем 1 и 3 (см. формулы (5), (16), (17)).

Поступило 22.11.2017 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949, 688 с.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, Т.1. – М.: Мир, 1965, 616 с.

3. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960, 624 с.
4. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1976, 325 с.
5. Fejer L. Lebesguesche konstanten und divergente Fourierreihen. – J. reine und angew. Math., 1910, v.138, pp. 22-53.
6. Fejer L. Sur les singularites de la serie de Fourier des fonctions continues. – A.E.N.S., 1911, v.28, pp. 63-103.
7. Szego G. Uber die Lebesgueschen konstanten bei den Fourierchen reihen. – Math. Z. 1921, v.9, p.163-166.
8. Hardi G.H. Note on Lebesgues constants in the theory of Fourier series. – J. London Math. Soc., 1942, v.17, pp. 4-13.
9. Шакиров И.А., Хасанов Ю.Х. Об утверждениях, используемых при оценке константы Лебега классического оператора Фурье. – ДАН РТ, 2017, т.60, № 5-6, с. 218-223.

И.А.Шакиров, Ю.Ҳ.Ҳасанов*

ОИД БА БАЪЗЕ БАҲОҲОИ НОРМАИ ОПЕРАТОРИ КЛАССИКИИ ФУРЙЕ

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Набережние Челни,
****Донишгоҳи (Славянии) Россия ва Тоҷикистон***

Дар мақола барои доимии Лебег, ки бо интеграли Риман аз функсияҳои тригонометрӣ бо лағжиши аргумент ифода карда шудааст, тасвири интегралии нав ва нисбатан содда ба даст оварда шудааст ва тавассути ин натиҷаҳо сарҳадҳои аниқи поёнӣ ва болоии аъзои бақиявии доимии мазкур муайян карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: *қатори Фурйе, нормаи оператора Фурйе, доимии Лебег, сарҳадҳои поёнӣ ва болоӣ, баҳои доимии Лебег, қиматҳои аниқи доимӣ.*

I.A.Shakirov, Yu.Kh.Khasanov*

ABOUT SOME ESTIMATES OF THE NORMS OF CLASSICAL FOURIERS OPERATOR

Naberezhnochelnins State Pedagogical University,
****Russian-Tajik (Slavonic) University***

In this paper a new and more simple integral representation for the Lebesgues constants, expressed through the integrals of Riemann from trigonometric functions with shifted argument has presented, and on this basis a more accurate lower and upper bounds for the remainder term constants corresponding to the fixed value of the parameter were determined.

Key words: *Fourier series, norm of Fourier operator, Lebesgues constant, lower and upper bounds, estimation of Lebesgues constant, exact values of the constants.*