

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

- Р.Л.Хотамова, М.С.Шарифзода.** Короткие квадратичные тригонометрические суммы с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг .....5
- М.Ш.Шабозов, Алаа Сайфулрахмон Курайши.** Некоторые неравенства типа Джексона-Стечкина, связанные с неклассическим модулем непрерывности высшего порядка в  $L_2$  .....11
- Г.А.Юсупов, М.М.Миркалонова.** Неравенства для наилучших приближений аналитических функций в банаховом пространстве Харди  $H_q, 1 \leq q \leq \infty$  .....20
- Н.М.Мамадаёзов, Ш.Саади.** Наилучшее полиномиальное приближение и поперечники множеств в пространстве  $L_2$  .....26
- Д.С.Сафаров, Х.В.Одинабеков.** О решении одного класса псевдопараболических систем уравнений на плоскости с заданными главными частями.....35
- Е.М.Мухсинов.** О задаче преследования в нелинейных дифференциальных играх с запаздывающим аргументом .....42

## ИНФОРМАТИКА

- М.М.Каюмов.** О распознавании автора текста на основе частотности  $n$ -значных  $\alpha\beta$ -кодов словоформ .....47

## АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Кохирова, П.Б.Бабаджанов, У.Х.Хамроев, А.И.Джонмухаммади, И.В.Кулаев.** Астероидно-метеороидный комплекс виргинид. Астероиды, связанные с метеороидным роём Мю-Виргиниды.....57

## АСТРОФИЗИКА

- А.А.Ибрагимов.** Об ориентации плазменных хвостов комет .....64

## ФИЗИКА

- М.С.Курбониён, З.Умар, Томоюки Ямамото, Ф.Рахими.** Первопринципные расчеты электронной структуры  $AMO_3$  ( $A=Ca, Sr; M=Sn, Zr, Ti, Hf$ ), легированного ионами  $Mn^{4+}$  .....71
- Ш.Туйчиев, Дж.Рашидов, С.Х.Табаров, Л.Туйчиев, Ш.И.Акназарова, Ф.Х.Содилов.** Фотостарение аморфных полимерных нанокомпозитов .....78
- С.Дж.Гафуров, Т.Б.Бобоев.** Влияние фуллерена  $C_{60}$  на фотодеструкции полиметилметакрилата.....83

**НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ**

- М.Т.Тагоев, Е.Ю.Малышева, Ш.Д.Отаев, Ш.О.Аъзамов, У.М.Мирсаидов.** Получение глинозёма и оксида железа из алюмосиликатных руд Таджикистана спеканием с NaOH.....88
- М.Д.Бобоёров, Б.Б.Баротов, И.Мирсаидзода (И.У.Мирсаидов), К.О.Бобоев, У.М.Мирсаидов.** Физико-химические основы сернокислотного разложения урансодержащих руд Таджикистана.....92

**ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ**

- Ш.Р.Самихов, Дж.Б.Асриев.** Кинетика тиосульфатного выщелачивания золота и серебра из концентрата месторождения Дуба .....97
- Г.Аминджони, Н.А.Наимов, К.Дж.Суяров, Дж.Р.Рузиев, Х.Сафиев.** Термодинамика процесса переработки флотационного мусковитового концентрата методом сульфатизации .....102

**АЛЬГОЛОГИЯ**

- Х.Х.Хисориев, Ш.М.Мирсабуров.** О зелёных водорослях – Chlorophyta бассейна р. Исфары.....108

**ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ**

- Б.А.Солиева, Н.Х.Ойзода, Б.Н.Сатторов, А.Э.Эргашев, Р.Ш.Хакимова, Н.А.Маниязова, Х.А.Абдуллаев.** Вододерживающая способность хлопчатника в зависимости от формы и окраски листа .....113

## CONTENTS

## MATHEMATICS

- R.L.Hotamova, M.S.Sharifzoda.** Behavior of short cubic exponential sums with primes in a small neighborhood of the center of major arcs.....5
- M.Sh.Shabozov, Alaa Saifulrahmon Quraishi.** Some inequalities of Jackson-Stechkin type related to nonclassical module of continuity of higher order in  $L_2$  .....11
- G.A.Yusupov, M.M.Mirkalonova.** Inequalities for best approximations of analytical functions in Hardy's banach space  $H_q, 1 \leq q \leq \infty$  .....20
- N.M.Mamadayozov, Sh.Saadi.** The best polynomial approximation and widths of set in  $L_2$  space .....26
- D.S.Safarov, Kh.V.Odinabekov.** Solution of one class of pseudoparabolic equation systems on plane with given chain parts .....35
- E.M.Mukhsinov.** On the pursuit problem in nonlinear differential games with retarded argument .....42

## INFORMATICS

- M.M.Kayumov.** About recognition of the author of the text based on the frequency of multi-signed  $\alpha\beta$ -codes of word forms .....47

## ASTRONOMY

- G.I.Kokhirova, P.B.Babadzhanov, U.H.Khamroev, A.I.Zhonmuhammadi, I.V.Kulaev.** Virginid asteroid-meteoroid complex. Near-Earth asteroids associated with the Mu-Virginid meteoroid stream .....57

## ASTROPHYSICS

- A.A.Ibragimov.** About of comets tail orientation.....64

## PHYSICS

- M.S.Qurbonien, Z.Umar, Tomoyuki Yamamoto, F.Rahimi.** The first-principles calculations of the electronic structure of  $Mn^{4+}$  doped  $AMO_3$  ( $A=Ca, Sr, M=Sn, Zr, Ti, Hf$ ).....71
- Sh.Tuichiev, D.Rashidov, S.Kh.Tabarov, L.Tuichiev, Sh.I.Aknazarova, F.Kh.Sodikov.** The photoaging of amorphous polymeric nanocomposites .....78
- S.J.Gafurov, T.B.Boboev.** Effect of fullerene  $C_{60}$  on photodestruction of polymethylmetakrilat.....83

## INORGANIC CHEMISTRY

- M.T.Tagoev, E.Yu.Malysheva, Sh.D.Otaev, Sh.O.Azamov, U.M.Mirsaidov.** Aluminum and iron oxides obtaining from Tajikistan aluminosilicate ores by sintering with NaOH.....88
- M.D.Boboyorov, B.B.Barotov, I.Mirsaidzoda (I.U.Mirsaidov), K.O.Boboev, U. M.Mirsaidov.** Physico-chemical basis of sulfuric acid decomposition of uranizing ores of Tajikistan .....92

**PHYSICAL CHEMISTRY**

- Sh.R.Samikhov, J.B.Asriev.** Thiosulphate leaching of gold and silver from concentrates of Duoba deposit.....**97**
- G.Aminjoni, N.A.Naimov, Q.J.Suyarov, J.R.Ruziev, H.Safiev.** Thermodynamics of processing of flotation muscovite concentrate by the method of sulphatization .....**102**

**ALGOLOGY**

- H.H.Hisoriev, Sh.M.Mirsaburov.** Green algae – Chloropyta of the Isfara river basin .....**108**

**PLANT PHYSIOLOGY**

- B.A.Solieva, N.Kh.Oyzoda, B.N.Sattorov, A.E.Ergashev, R.Sh.Khakimova, N.A.Maniyazova, Kh.A.Abdullaev.** Water keeping ability of cotton leaves with different shapes and colors .....**113**

УДК 511.325

Р.Л.Хотамова, М.С.Шарифзода

## КОРОТКИЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ В МАЛОЙ ОКРЕСТНОСТИ ЦЕНТРА БОЛЬШИХ ДУГ

*Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана*

*(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 22.11.2020 г.)*

*Поведение коротких квадратичных тригонометрических сумм Г.Вейля с простыми числами*

*при  $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25c+18}$ ,  $\mathcal{L} = \ln xq$  изучено в малой окрестности  $|\alpha - aq^{-1}| \leq (8\pi y^2)^{-1}$ ,  $q \leq \mathcal{L}^c$  центра больших дуг.*

**Ключевые слова:** короткая квадратичная тригонометрическая сумма с простыми числами, большие дуги, плотностная теорема,  $L$ -функция Дирихле.

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое  $\alpha$  из промежутка  $[-\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ,  $\varepsilon \tau = 1$  представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Через  $\mathfrak{M}(P)$  обозначим те числа  $\alpha$ , для которых  $q \leq P$ , через  $\mathfrak{m}(P)$  обозначим оставшиеся  $\alpha$ .  $\mathfrak{M}(P)$  и  $\mathfrak{m}(P)$  соответственно называются большими и малыми дугами.

Короткие тригонометрические суммы с простыми числами первым начал изучать И.М.Виноградов [1]. Используя свой метод оценок сумм с простыми числами в малых дугах  $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln \ln x)^2))$ ,  $\tau = x^{\frac{1}{3}}$  при  $k=1$  и  $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$ , он доказал нетривиальную оценку сумму вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^k).$$

Затем поведение суммы  $S_1(\alpha; x, y)$  как в больших, так и в малых дугах было изучено работах [2–5] и приложено к выводу асимптотической формулы в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми.

В [6] при помощи второго момента  $L$ -функций Дирихле в критической прямой [7] при  $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25b+18}$  исследовано поведение суммы  $S_3(\alpha; x, y)$  в малой окрестности  $|\alpha - aq^{-1}| \leq (18\pi xy^2)^{-1}$  центра больших дуг  $\mathfrak{M}(\mathcal{L}^b)$ .

**Адрес для корреспонденции:** Хотамова Рахбарой Латифовна, Шарифзода Маишаби Сулаймон. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАН Таджикистана. E-mail: hotamovarabbaroi@mail.ru, mashrab.sharifzoda.92@mail.ru

В этой работе, воспользовавшись методом, изложенным в работе [6], получена асимптотическая формула для суммы  $S_2(\alpha; x, y)$  в малой окрестности центра больших дуг.

**Теорема.** Пусть  $x \geq x_0$ ,  $A, c_1, b$  — произвольные фиксированные положительные числа,

$1 \leq q \leq \mathcal{L}^c$ ,  $\tau = y^3 x^{-1} \mathcal{L}^{-c_1}$ . Тогда при  $\lambda \leq (8\pi y^2)^{-1}$  и  $y \geq x^8 \mathcal{L}^{1.5A+0.25c+18}$  имеет место оценка:

$$S_2(\alpha; x, y) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1 \\ (a,q)=1}}^q e\left(\frac{an^2}{q}\right) \int_{x-y}^x e(\lambda u^2) du \ll y \mathcal{L}^{-A}.$$

**Доказательство теоремы.** Поступая точно так же, как в работе [6], и имея в виду, что  $\lambda \geq 0$

и  $T_0 = (xy^{-1} + |\lambda|x^2) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3}$ , находим

$$S_2(\alpha; x, y) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1 \\ (a,q)=1}}^q e\left(\frac{an^2}{q}\right) \int_{x-y}^x e(\lambda u^k) du \ll |W(\alpha; x, y)| + y \mathcal{L}^{-A}, \tag{1}$$

$$|W(\alpha; x, y)| \leq \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{q}} \sum_{\chi \pmod{q}} W(\lambda, \chi), \quad W(\lambda, \chi) = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\rho, \lambda)|, \tag{2}$$

$$|I(\rho, \lambda)| \ll x^\beta \min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min|\gamma + 4\pi\lambda u^2|}\right). \tag{3}$$

Будем считать, что для параметра  $y$  выполняется условие

$$x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25c+18} \leq y \leq x \mathcal{L}^{-A-0.5c+3}. \tag{4}$$

Все нули  $\rho = \beta + i\gamma$  функции  $L(s, \chi)$  с условием  $|\gamma| \leq T_0$  разобьем на множества  $D_1, D_2$  и  $D_3$  следующим образом:

$$D_1 = \left\{ \rho : -T_0 + 4\pi\lambda u^2 \leq \gamma + 4\pi\lambda u^2 < -4\pi\lambda x^2 + 4\pi\lambda u^2 - \frac{x}{y} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ \rho : -4\pi\lambda x^2 - \frac{x}{y} \leq \gamma \leq -4\pi\lambda(x-y)^2 + \frac{x}{y} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ \rho : 4\pi\lambda u^2 - 4\pi\lambda(x-y)^2 + \frac{x}{y} < \gamma + 4\pi\lambda u^2 \leq T_0 + 4\pi\lambda u^2 \right\}.$$

Обозначая через  $\mathcal{W}_j(\lambda, \chi)$ ,  $j=1,2,3$  сумму модулей интеграла  $I(\rho, \lambda)$  по нулям  $\rho$ , принадлежащим множеству  $D_j$ , представим  $W(\lambda, \chi)$  в (2) в виде:

$$\mathcal{W}(\lambda, \chi) = \mathcal{W}_1(\lambda, \chi) + \mathcal{W}_2(\lambda, \chi) + \mathcal{W}_3(\chi, \lambda). \quad (5)$$

**Оценка  $\mathcal{W}_1(\lambda, \chi)$ .** В отрезке  $x - y \leq u \leq x$  функция  $4\pi\lambda u^2$  монотонно возрастает, поэтому для правой границы множества  $D_1$  имеем  $-4\pi\lambda x^2 + 4\pi\lambda u^2 - \frac{x}{y} \leq -\frac{x}{y}$ . Следовательно, если  $\rho$  принадлежит множеству  $D_1$ , то выполняется неравенство  $\gamma + 4\pi\lambda u^2 < -\frac{x}{y}$ , поэтому для монотонной возрастающей функции  $\gamma + 4\pi\lambda u^2$  в отрезке  $x - y \leq u \leq x$  справедливо соотношение

$$\min |\gamma + 4\pi\lambda u^2| = -\max(\gamma + 4\pi\lambda u^2) = -\gamma - 4\pi\lambda x^2 \geq \frac{x}{y}, \quad \text{если } \rho \in D_1.$$

Отсюда, с учетом второй оценки (3), находим

$$\mathcal{W}_1(\lambda, \chi) \ll \sum_{\rho \in D_1} \frac{x^\beta}{-\gamma - 4\pi\lambda x^2}.$$

Все нули в множестве  $D_1 = \left\{ \rho : \frac{x}{y} \leq -\gamma - 4\pi\lambda x^2 < T_0 - 4\pi\lambda x^2 \right\}$  разобьем на классы  $D_{11}, \dots, D_{1r}$ ,

$r \ll T_0 x^{-1} y$  следующим образом: в класс  $D_{1n}$  отнесем те нули  $\rho$ , для которых выполняются условия:

$$\frac{nx}{y} < -\gamma - 4\pi\lambda x^2 \leq \frac{(n+1)x}{y}.$$

Поэтому

$$\mathcal{W}_1(\lambda, \chi) \ll \frac{y}{x} \sum_{n=1}^r \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{n} \leq \frac{y \mathcal{L}}{x} \max_{1 \leq n \leq r} \sum_{\rho \in D_{1n}} x^\beta \leq \frac{y \mathcal{L}}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} < \gamma \leq T} x^\beta.$$

**Оценка  $\mathcal{W}_3(\chi, \lambda)$ .** В отрезке  $x - y \leq u \leq x$  функция  $4\pi\lambda u^2$  монотонно возрастает, поэтому для левой границы множества  $D_3$  имеем  $4\pi\lambda u^2 - 4\pi\lambda(x - y)^2 + \frac{x}{y} \geq \frac{x}{y}$ . Следовательно, если  $\rho$  принадлежит множеству  $D_3$ , то выполняется неравенство  $\gamma + 4\pi\lambda u^2 > \frac{x}{y}$ , поэтому для монотонной возрастающей функции  $\gamma + 4\pi\lambda u^2$  в отрезке  $x - y \leq u \leq x$  справедливо соотношение

$$\min |\gamma + 4\pi\lambda u^2| = \min(\gamma + 4\pi\lambda u^2) = \gamma + 4\pi\lambda(x - y)^2 \geq \frac{x}{y}, \quad \text{если } \rho \in D_3.$$

Отсюда с учетом второй оценки (3), а затем, поступая аналогично, как в случае оценки  $\mathcal{W}_1(\chi, \lambda)$ , найдем

$$W_3(\chi, \lambda) \ll \sum_{\rho \in D_3} \frac{x^\beta}{\gamma + 4\pi\lambda(x-y)^2} \ll \frac{y\mathcal{L}}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} < \gamma \leq T} x^\beta.$$

**Оценка  $W_2(\lambda, \chi)$ .** Из соотношения  $\lambda \leq (8\pi y^2)^{-1}$  следует, что для длины множества  $D_2$  выполняется неравенство

$$4\pi\lambda(x^2 - (x-y)^2) + \frac{2x}{y} \leq 8\pi\lambda xy + \frac{2x}{y} \leq \frac{3x}{y},$$

и, воспользовавшись первой оценкой (3), то есть тривиальной оценкой интеграла  $I(\rho, \lambda)$ , имеем

$$W_2(\lambda, \chi) \ll \frac{y}{x} \sum_{\rho \in D_2} x^\beta \ll \frac{y}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} < \gamma \leq T} x^\beta.$$

Подставляя оценки для  $W_1(\lambda, \chi)$ ,  $W_2(\lambda, \chi)$  и  $W_3(\lambda, \chi)$  в (5), а затем в (2), найдем:

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \frac{y\mathcal{L}^2}{\sqrt{q}x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{\chi \pmod{q}} \sum_{T - \frac{x}{y} < \gamma \leq T} x^\beta.$$

Воспользуемся плотностной теоремой в узких прямоугольниках критической полосы для нулей  $L$ -рядов Дирихле и теоремой о границе этих нулей. Имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \frac{y\mathcal{L}^3}{\sqrt{q}x} \max_{|T| \leq T_0} \max_{0.5 \leq u \leq 1 - \delta} x^u \sum_{\chi \pmod{q}} \left( N(u, T, \chi) - N\left(u, T - \frac{x}{y}, \chi \right) \right),$$

$$\delta = \delta(q, T_0) = \frac{c_1}{\max \left( \ln q, (\ln(T_0 + 3) \ln \ln(T_0 + 3))^{\frac{3}{4}} \right)}.$$

Из определения  $T_0$ , условия  $\lambda \leq (8\pi y^2)^{-1}$  и (4) имеем

$$\frac{T}{(xy^{-1})^3} \leq \frac{T_0}{(xy^{-1})^3} = \left( \frac{y^2}{x^2} + \frac{\lambda y^3}{x} \right) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3} \leq \left( \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{8\pi x} \right) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3} \leq 1.$$

Следовательно, в последней сумме по  $\chi \pmod{q}$  выполняется условие  $xy^{-1} \geq T^{\frac{1}{3}}$ , то есть к этой сумме можно применить плотностную теорему Ж.Тао [18, стр. 206]. Полагая в этой теореме  $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$ , имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2. \tag{6}$$



$$\mathcal{A}_1 = \frac{y\mathcal{L}^{12}}{\sqrt{qx}} \max_{0.5 \leq u \leq 0.75} x^u \left( \frac{qx}{y} \right)^{\frac{4-4u}{3-2u}},$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{y\mathcal{L}^3}{\sqrt{qx}} \max_{0.75 \leq u \leq 1-\delta} x^u \left( \frac{qx}{y} \right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}.$$

Суммы  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  ранее были рассмотрены в работе [8] и при  $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25b+18}$  были получены оценки

$$\mathcal{A}_1 \ll y\mathcal{L}^{-A}, \quad \mathcal{A}_2 \ll y\mathcal{L}^{-A}.$$

Подставляя эти оценки в (6), получим

$$|W(\alpha; x, y)| \ll y\mathcal{L}^{-A}.$$

Отсюда и из (1) получим утверждение теоремы.

*Поступило 21.09.2020 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Виноградов И.М. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1952.
2. Haselgrove C.B. Some theorems in the analytic theory of number. – J. London Math. Soc, 1951, v. 26, pp. 273-277.
3. Статулявичус В. О представлении нечетных чисел суммой трех почти равных простых чисел. – Вильнюс, Ученые труды университета, сер. мат., физ. и хим. н., 1955, № 2, с. 5-23.
4. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III). – Chinese Ann. of Math., 1990, v. 2, pp. 138-147.
5. Zhan Tao. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes. – Acta Math Sinica, new ser., 1991, v. 7, № 3, pp. 135-170.
6. Рахмонов З.Х., Собиров А.Ф., Фозилова П.М. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг. – ДАН РТ, 2020, т. 63, № 5-6, с. 279-288.
7. Zhan Tao. On the Mean Square of Dirichlet  $L$ -Functions. – Acta Mathematica Sinica. New Series, 1992, v. 8, № 2, pp. 204-224.

Р.Л.Ҳотамова, М.С.Шарифзода

## СУММАҲОИ ТРИГОНОМЕТРИИ КЎТОҶИ КВАДРАТӢ БО АДАДҲОИ СОДДА ДАР АТРОФИ ХУРДИ МАРКАЗИ КАМОНҶОИ КАЛОН

*Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Рафтори суммаҳои тригонометрии кӯтоҳи квадратӣ бо ададҳои содда ҳангоми  $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25c+18}$ ,  $\mathcal{L} = \ln xq$  будан дар атрофи хурди  $|\alpha - aq^{-1}| \leq (8\pi y^2)^{-1}$ ,  $q \leq \mathcal{L}^c$  камонҳои калон омӯхта шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** *суммаи тригонометрии квадратии кӯтоҳ бо ададҳои содда, камонҳои калон, теорема зичӣ, L-функсияи Дирихле.*

R.L.Hotamova, M.S.Sharifzoda

## BEHAVIOR OF SHORT CUBIC EXPONENTIAL SUMS WITH PRIMES IN A SMALL NEIGHBORHOOD OF THE CENTER OF MAJOR ARCS

*A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan*

Behavior of Weyl's short quadratic exponential sums with prime numbers for  $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25c+18}$ ,  $\mathcal{L} = \ln xq$  is studied in a small neighborhood  $|\alpha - aq^{-1}| \leq (8\pi y^2)^{-1}$ ,  $q \leq \mathcal{L}^c$  of the center of major arcs.

**Key words:** *Short quadratic exponential sum with primes, major arcs, density theorem, Waring-Goldbach problem.*

УДК 517.5

Академик НАН Таджикистана М.Ш.Шабозов, Алаа Сайфулрахмон Курайши

## НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА-СТЕЧКИНА, СВЯЗАННЫЕ С НЕКЛАССИЧЕСКИМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА В $L_2$

*Таджикский национальный университет*

В работе получена оценка величины наилучшего приближения  $E_{n-1}(f)$  произвольной комплекснозначной  $2\pi$ -периодической функции  $f \in L_2^{(r)}$  подпространством тригонометрических полиномов порядка не выше  $n-1$  и усредненным значением неклассического модуля непрерывности. Найдена точная константа в неравенстве Джексона-Стечкина между наилучшим приближением и неклассическим модулем непрерывности в точке  $\pi/2$ .

**Ключевые слова:** наилучшие приближения, неклассический модуль непрерывности, неравенства типа Джексона-Стечкина, оператор сдвига, весовая функция.

При решении экстремальных задач теории аппроксимации функций часто применяют различные модификации модулей непрерывности, позволяющих получить новые содержательные результаты. Вместо обычного оператора сдвига  $T_h(f, x) := f(x+h)$  рассматривались различные способы осреднения конечных разностей и способы их модификации, основанные на применении сглаживающих операторов, такие как, например, оператор Стеклова [1-3]. Здесь мы продолжим исследование в этом направлении и найдём некоторые точные неравенства типа Джексона-Стечкина, связывающие величины наилучшего приближения и неклассического модуля непрерывности в метрике  $L_2$ . Отметим, что некоторые вопросы приближения функций посредством неклассического модуля непрерывности изучались в [4-6].

Пусть  $L_2 := L_2[0, 2\pi]$  – пространство  $2\pi$ -периодических комплекснозначных измеримых функций  $f$ , квадрат модуля которых суммируем на периоде с нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2} = \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Через  $L_2^{(r)}$  ( $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $L_2^{(0)} \equiv L_2$ ) обозначим множество функций  $f$ , у которых производные  $f^{(r-1)}$  порядка  $r-1$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) абсолютно – непрерывны, а производная  $r$ -го порядка  $f^{(r)} \in L_2$ . Пусть

$$\mathcal{T}_{2n-1} := \left\{ T_{n-1} : T_{n-1}(x) = \sum_{|k| \leq n-1} a_k e^{ikx}, a_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Адрес для корреспонденции:** Шабозов Мирганд Шабозович.734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: shabozov@mail.ru

Равенством

$$E_{n-1}(f)_2 := E_{n-1}(f, \mathcal{T}_{2n-1})_2 = \inf \{ \|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1} \} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left( \sum_{|k| \geq n} |c_k(f)|^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right)^{1/2}$$

определим наилучшее приближение  $f \in L_2$  элементами  $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ , где положено  $\rho_k^2(f) := |c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2$ ,  $k \geq n$ ,  $k, n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{|k| \leq n-1} c_k(f) e^{ikx}$$

– частичная сумма  $n-1$  – порядка ряда Фурье функции  $f \in L_2$ :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Зафиксируем число  $m \in \mathbb{N}$  и, следуя [4], введём разностный оператор

$$\tilde{\Delta}_h^{2m-1} f(x) = \sum_{\nu=0}^{2m-1} (-1)^{\nu+1} f(x + \nu t),$$

действующий из  $L_2$  в  $L_2$ . Определим соответствующий модуль непрерывности функции в  $L_2$  равенством [5]

$$\tilde{\omega}_{2m-1}(f, t)_2 := \sup \{ \| \tilde{\Delta}_h^{2m-1}(f) \|_2 : |h| \leq t \}. \tag{1}$$

Условимся в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям  $f \in L_2^{(r)}$  считать, что  $f \neq const$ .

В [8] доказано, что для любых  $m, n, r \in \mathbb{N}$ ,  $0 < p \leq 2$ ,  $h \in (0, 2\pi/n]$ ,  $q$  – весовая на  $[0, h]$  функция справедливо двойное неравенство

$$\{ J_{n,m,r,p}(q, h) \}^{-1} \leq \mathcal{M}_{n,m,r,p}(\tilde{\omega}_{2m-1}; q, h) \leq \{ \inf_{k \geq n} J_{k,m,r,p}(q, h) \}^{-1}, \tag{2}$$

где

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\tilde{\omega}_{2m-1}; q, h) = \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left( \int_0^h \tilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)}, t) q(t) dt \right)^{1/p}},$$

$$J_{k,m,r,p}(q, h) = \left( k^{rp} \int_0^h \mathcal{P}_m^{p/2}(kt) q(t) dt \right)^{1/p}, \tag{3}$$

$$\mathcal{P}_m(kt) := 2m - 2 \sum_{l=1}^{2m-1} (-1)^{l+1} \cos(2m-l)kt. \quad (4)$$

Из (2) очевидно, что в случае, когда

$$\inf_{n \leq k < \infty} J_{k,m,r,p}(q,h) = J_{n,m,r,p}(q,h), \quad (5)$$

то двустороннее неравенство (2) обращается в равенство. В [8], в частности, доказано, что если  $q(t) \equiv 1$ , то для любых  $m, n, r \in \mathbb{N}$ ,  $1/p \leq p \leq 2$ ,  $h \in (0, 2\pi/n]$  – произвольное число имеет место равенство

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\tilde{\omega}_{2m-1}; 1, h) = \left\{ J_{n,m,r,p}(1, h) \right\}^{-1},$$

и отсюда, в частности, при  $h = \pi/n$  и  $p = 2$  получаем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left( n / \pi \int_0^{\pi/n} \tilde{\omega}_{2m-1}^2(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2m}}. \quad (6)$$

Далее исследуется связь равенства (6) с задачей отыскания точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина в  $L_2^{(r)}$  ( $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $L_2^{(0)} = L_2$ ):

$$E_{n-1}(f) \leq \mathcal{K}_{n,r} \cdot n^{-r} \tilde{\omega}_{2m-1}(f^{(r)}, t/n), \quad t > 0.$$

Положим

$$\mathcal{K}_{n,r}(\tilde{\omega}_{2m-1}, t) = \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\tilde{\omega}_{2m-1}(f^{(r)}, t/n)}, \quad (7)$$

где  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $t > 0$ . При  $r = 0$  полагаем

$$\mathcal{K}_n(\tilde{\omega}_{2m-1}, t) = \mathcal{K}_{n,0}(\tilde{\omega}_{2m-1}, t).$$

Отметим, что при  $r = 0$  экстремальная характеристика (7) ранее изучалась в работах А.Г.Бабенко [4], Н.А.Барабоскина [5], М.Ш.Шабозова и А.Д.Фарозовой [6]. В [5] доказана оценка сверху вида

$$\mathcal{K}_n\left(\tilde{\omega}_{2m-1}, \frac{2\pi}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2m}}, \quad m \geq 2, \quad n \in \mathbb{N},$$

а из результата [4, теорема 1], следует, что

$$\mathcal{K}_n\left(\tilde{\omega}_{2m-1}, \frac{t}{n}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2m}}, \quad 0 < t \leq 2\pi, \quad n \geq 2m. \quad (8)$$

Имеет место следующее утверждение

**Теорема 1.** При любых  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$  справедливо равенство

$$\mathcal{K}_n\left(\tilde{\omega}_{2m-1}, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2m}}. \tag{9}$$

**Доказательство.** Действительно, с одной стороны, из равенства (6) для произвольной функции  $f \in L_2^{(r)}$ , учитывая, что модуль непрерывности  $\tilde{\omega}_{2m-1}(f^{(r)}, t)$  является неубывающим по  $t$ , будем иметь

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &\leq \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{n^r} \left( \frac{\pi}{n} \int_0^{\pi/n} \tilde{\omega}_{2m-1}^2(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{n^r} \tilde{\omega}_{2m-1}\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

откуда при всех  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$  получаем оценку сверху

$$\mathcal{K}_{n,r}\left(\tilde{\omega}_{2m-1}, \frac{\pi}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2m}},$$

и, в частности, при  $r = 0$  имеем:

$$\mathcal{K}_n\left(\tilde{\omega}_{2m-1}, \frac{\pi}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2m}}. \tag{11}$$

С другой стороны, из (8), в частности, при  $t = \pi$  следует, что

$$\mathcal{K}_n\left(\tilde{\omega}_{2m-1}, \frac{\pi}{n}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2m}}. \tag{12}$$

Сопоставляя неравенства (11) и (12), получаем требуемое равенство (9). Теорема 1 доказана. Далее приводим некоторые следствия из двустороннего неравенства (2).

Положим  $h = h_* := a/n$ , где  $a \in (0, 2\pi]$  – произвольное число,  $q(t) = q_*(t) := \mu(nt)$ . Тогда для произвольной  $k \geq n$  запишем

$$\begin{aligned} J_{k,m,r,p}(q_*, h_*) &= \left( k^{rp} \int_0^{h_*} \mathcal{P}_m^{p/2}(kt) \mu(nt) dt \right)^{1/p} = \\ &= \left( k^{rp} \int_0^{a/n} \mathcal{P}_m^{p/2}(kt) \mu(nt) dt \right)^{1/p} = n^{r-1/p} \left\{ \left( \frac{k}{n} \right)^{rp} \int_0^a \mathcal{P}_m^{p/2}\left(\frac{kt}{n}\right) \mu(t) dt \right\}^{1/p}. \end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда получаем

$$\inf_{n \leq k < \infty} J_{k,m,r,p}\left(q_*, \frac{a}{n}\right) \geq n^{r-1/p} \inf_{x \geq 1} \left\{ x^{rp} \int_0^a \mathcal{P}_m^{p/2}(xt) \mu(t) dt \right\}^{1/p}. \tag{14}$$

Учитывая соотношения (13) и (14) и двустороннее неравенство (2), приходим к следующему утверждению

**Теорема 2.** Пусть  $n, m, r \in \mathbb{N}, m \geq 2, 0 < p \leq 2, a \in (0, 2\pi]$  – произвольное число,  $q$  – весовая на отрезке  $[0, h]$  функция. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{M}_{m,r,p}(a, \mu; 1)\}^{-1/p} \leq \\ & \leq \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left( \int_0^a \tilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)}, t/n) \mu(t) dt \right)^{1/p}} \leq \{\inf_{x \geq 1} \mathcal{M}_{m,r,p}(a, \mu; x)\}^{-1/p}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\mathcal{M}_{m,r,p}(a, \mu; x) = x^{rp} \int_0^a \mathcal{P}_m^{p/2}(xt) \mu(t) dt. \quad (16)$$

Если функция  $\mathcal{M}_{m,r,p}(a, \mu; x)$  удовлетворяет условию

$$\inf_{x \geq 1} \mathcal{M}_{m,r,p}(a, \mu; x) = \mathcal{M}_{m,r,p}(a, \mu; 1), \quad (17)$$

то справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left( \int_0^a \tilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)}, t/n) \mu(t) dt \right)^{1/p}} = \frac{1}{\{\mathcal{M}_{m,r,p}(a, \mu; 1)\}^{1/p}}. \quad (18)$$

**Следствие 1.** Пусть  $m, n, r \in \mathbb{N}, 0 < p \leq 2, a \in (0, 2\pi]$ ,  $\mu(t) = t^{p-1} \mu_1(t)$ , где  $\mu_1$  – невозрастающая весовая на отрезке  $[0, a]$  функция. Тогда для функции  $\mathcal{M}_{m,r,p}(a, \mu; x)$  имеет место равенство (17) и, следовательно, выполняется равенство (18).

**Доказательство.** Следуя ходу рассуждений [7, следствие 1], введём вспомогательную функцию

$$\mu_2(t) := \{\mu_1(t), \text{ если } 0 \leq t \leq a; \mu_1(a), \text{ если } a \leq t < \infty\}.$$

При любых значениях  $x \in [1, \infty)$ , учитывая (16), запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{m,r,p}(a, t^{p-1} \mu_1; x) &= x^{rp} \int_0^a \mathcal{P}_m^{p/2}(xt) t^{p-1} \mu_1(t) dt = \\ &= \int_0^{ax} \mathcal{P}_m^{p/2}(t) t^{p-1} \mu_2(t/x) dt \geq \int_0^{ax} \mathcal{P}_m^{p/2}(t) t^{p-1} \mu_2(t) dt \geq \end{aligned}$$

$$\geq \int_0^a \mathcal{P}_m^{p/2}(t) \mu_1(t) dt = \mathcal{M}_{m,r,p}(a, t^{rp-1} \mu_1; 1).$$

Таким образом, условие (17) имеет место, а потому

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left( \int_0^a \tilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)}, t/n) t^{rp-1} \mu_1(t) dt \right)^{1/p}} = \frac{1}{\left\{ \mathcal{M}_{m,r,p}(a, t^{rp-1} \mu(t); 1) \right\}^{1/p}},$$

чем и завершаем доказательство следствия 1.

**Следствие 2.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}, a \in (0, 2\pi]$ , где  $\mu$  – дифференцируемая в каждой точке интервала  $(0, a]$  весовая функция, удовлетворяющая при некоторых  $r \in \mathbb{N}$  и  $0 < p \leq 2$  условию

$$(rp - 1)\mu(t) - t\mu'(t) \geq 0 \tag{19}$$

для любого  $t \in (0, a]$  и такая, что  $\lim_{t \rightarrow 0+0} \mu(t)t = 0$ . Тогда для этих значений  $r, p$  и функции  $\mu(t)$  имеет место равенство (17) и, следовательно, выполняется равенство (18).

**Доказательство.** Положим  $\mathcal{F}(x) := \mathcal{M}_{m,r,p}(a, \mu; x)$  и, учитывая соотношение (16), вычислим её производную

$$\frac{d\mathcal{F}(x)}{dx} = x^{rp-1} \left\{ rp \int_0^a \mathcal{P}_m^{p/2}(xt) \mu(t) dt + \int_0^a \mu(t) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_m^{p/2}(xt) dt \right\}. \tag{20}$$

Так как согласно формулировке следствия 2  $\lim_{t \rightarrow 0+0} \mu(t)t = 0$ , то очевидно, что  $\lim_{t \rightarrow 0+0} \mu(t) \cdot t \cdot \mathcal{P}_m^{p/2}(xt) = 0$ .

Учитывая это обстоятельство, после выполнения интегрирования по частям во втором интеграле в правой части (20) будем иметь

$$\frac{d\mathcal{F}}{dx} = x^{rp-1} \left\{ \mathcal{P}_m(ax) \mu(a) a + \int_0^a \mathcal{P}_m^{p/2}(xt) [(rp - 1)\mu(t) - t\mu'(t)] dt \right\}. \tag{21}$$

В силу неравенства (19) и неотрицательности функций  $\mathcal{P}_m$  и  $\mu$ , из (21) вытекает, что  $d\mathcal{F}/dx \geq 0$ .

Таким образом, функция  $\mathcal{F}$  при указанных значениях  $r, p$  и  $\mu$  на множестве  $1 \leq x < \infty$  является неубывающей. Это означает, что имеет место равенство (17) и вместе с ним (18), чем и завершаем доказательство следствия 2.

Приведём некоторые применения следствия 2 при использовании конкретных весовых функций:

1) Пусть  $0 < a \leq \pi$ . Рассмотрим в качестве весовой функции  $\mu(t) := \sin^\gamma t, \gamma > 0$ , использованной Н.Айнуллоевым [9]. Полагаем  $m, n \in \mathbb{N}, 0 < p \leq 2, \gamma \in \mathbb{R}_+, 0 < \gamma \leq rp - 1$ . Тогда при всех  $0 < t \leq \pi$  имеем:



$$(rp-1)\mu(t) - t\mu'(t) = t\sin^{\gamma-l}t[(rp-1)\frac{\sin t}{t} - \gamma \cos t] \geq 0,$$

поскольку  $rp-1 \geq \gamma$  и  $(\sin t / t) \geq \cos t$  при всех  $t \in (0, \pi]$ . В случае  $\gamma = 1$ ,  $\mu(t) = \sin t$ ,  $p = 2$ , при всех  $r \in \mathbb{Z}_+$  в [6] (теорема 2, случай  $\nu = 0$ ) доказано, что

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left( \int_0^\pi \tilde{\omega}_{2m-1}^2(f^{(r)}, t/n) \sin t dt \right)^{1/2}} = \chi_m,$$

где константа  $\chi_m$  в правой части определена равенством

$$\chi_m := \left( 2m - \sum_{l=1}^{m-1} \frac{2l}{4(m-l)^2 - 1} \right)^{-1/2}.$$

2) Пусть  $0 < a \leq \pi$ ,  $\mu(t) := \sin(t/2) + (1/2)\sin t$  – весовая функция, использованная Н.И.Черных [10].

Полагаем  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ ,  $2/r \leq p \leq 2$ ,  $r \geq 2$ . Тогда при всех  $t \in (0, \pi]$  получаем

$$\begin{aligned} & (rp-1)\mu(t) - t\mu'(t) = \\ & = (rp-1)[\sin(t/2) + (1/2)\sin t] - (t/2)[\cos(t/2) + \cos t] = \\ & = (t/2) \left\{ [(rp-1)\frac{\sin(t/2)}{(t/2)} - \cos(t/2)] + [(rp-1)\frac{\sin t}{t} - \cos t] \right\} \geq 0, \end{aligned}$$

поскольку в этом случае  $rp-1 > 1$  и при всех  $t \in (0, 2\pi]$

$$\frac{\sin(t/2)}{(t/2)} \geq \cos(t/2), \quad \frac{\sin t}{t} \geq \cos t.$$

В частности, полагая в (18)  $a = \pi$ ,  $p = 2$ , после некоторых простых выкладок будем иметь

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{3}n^r E_{n-1}(f)}{\left( \int_0^\pi \tilde{\omega}_{2m-1}^2(f^{(r)}, t/n) \left( \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \right) dt \right)^{1/2}} = \mathcal{A}_m,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m := & \left\{ \left[ 2m - \sum_{l=1}^{m-1} \frac{2l(8(m-l)^2 - 1)}{(4(m-l)^2 - 1)(16(m-l)^2 - 1)} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{4}{3} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{2l+1}{(4(m-l)-1)(4(m-l)-3)} \right\}. \end{aligned}$$

Поступило 23.11.2020 г.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения  $2\pi$ -периодических функций суммами Фурье в пространстве  $L_2(2\pi)$ . – Мат. заметки, 2004, т.76, № 6, с.803-811.
2. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве  $L_2$ . – Мат. заметки, 2012, т.92, № 4, с.497-514.
3. Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Некоторые точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в  $L_2$ . – Труды ИММ УрО РАН, 2019, т.25, № 4, с.255-264.
4. Бабенко А.Г. О неравенстве Джексона-Стечкина для наилучших  $L^2$ -приближений функций тригонометрическими полиномами. – Труды ИММ УрО РАН, 2001, т.7, № 1, с.30-46.
5. Барабошкина Н.А. Неравенства Джексона-Стечкина с неклассическим модулем непрерывности. – Труды ИММ УрО РАН, 2001, т.7, № 1, с.62-66.
6. Шабозов М.Ш., Фарозова А.Д. Точное неравенство Джексона-Стечкина с неклассическим модулем непрерывности. – Труды ИММ УрО РАН, 2016, т.2, № 4, с.311-319.
7. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в  $L_2$  некоторых классов  $2\pi$ -периодических функций и точные значения их поперечников. – Мат. заметки, 2011, т.90, № 5, с.764-775.
8. Алаа Сайфулрахмон Курайши. Некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями и неклассическим модулем непрерывности в  $L_2$ . – ДАН РТ, 2020, т.63, № 3-4, с.139-145.
9. Айнуллоев Н. Наилучшие приближения некоторых классов дифференцируемых функций в  $L_2$ . Применение функционального анализа и теории приближений. – Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет, 1986, с.3-10.
10. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в  $L_2$ . – Мат.заметки, 1967, т.2, № 5, с.513-522.

**М.Ш.Шабозов, Алаа Сайфулрахмон Курайши**

**БАЪЗЕ НОБАРОВАРИҶОИ НАМУДИ ЧЕКСОН-СТЕЧКИН, КИ БО МОДУЛИ  
БЕФОСИЛАГИИ ҒАЙРИКЛАССИКӢИ ТАРТИБИ ОЛӢ ДАР  $L_2$**

**АЛОҚАМАНДАСТ**

*Таджикский национальный университет*

Дар мақола бузургии наздиккунии беҳтарини дилхоҳ функсияи давраш  $2\pi$  қимати комплексӣ дошта, ба воситаи зерфазои бисёраъзогиҳои тригонометрии тартиби на зиёд аз  $n-1$  ва қимати миёнакардашудаи модули бефосилагии ғайриклассикӣ ёфта шудааст. Доимии аниқ дар нобаробарии Чексон-Стечкин байни бузургии беҳтарин ва модули ғайриклассикӣ дар нуқтаи  $\pi/2$  муайян карда шудааст.

*Калимаҳои калидӣ: наздикқунии беҳтарин, модули бефосилагии ғайриклассикӣ, нобаробарии намуди Чексон-Стечкин, оператори ғеҷии, функцияи вазнӣ.*

**M.Sh.Shabozov, Alaa Saifulrahmon Quraishi**

**SOME INEQUALITIES OF JACKSON-STECHKIN TYPE RELATED TO  
NONCLASSICAL MODULE OF CONTINUITY OF HIGHER ORDER IN  $L_2$**

*Tajik National University*

In paper the estimate of best approximation  $E_{n-1}(f)$  for arbitrary complex valued of  $2\pi$ -periodic function  $f \in L_2^{(r)}$  by subspace of trigonometric polynomials not higher  $n-1$  order and averaged values of nonclassical module of continuity was obtained. The sharp constant in Jackson-Stechkin inequalities between the best approximation and nonclassical module of continuity at the point  $\pi/2$  was found.

**Key words:** *best approximation, nonclassical modulus of continuity, Jackson-Stechkin type inequalities, shift operator, weight function.*

УДК 517.5

Г.А.Юсупов, М.М.Миркалонова

## НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ $H_q, 1 \leq q \leq \infty$

*Таджикский национальный университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 16.03.2020 г.)*

В работе найдены некоторые точные неравенства между величиной наилучшего полиномиального приближения функции  $f \in H_q, 1 \leq q \leq \infty$  и интегралами, содержащими модуль непрерывности первого порядка от  $r$ -й производной функции по аргументу. Попутно обобщаются некоторые известные результаты Л.В.Тайкова на случай одновременного полиномиального приближения функций, аналитических в единичном круге, и их наилучших приближений  $E_{n-1}(f)_q, 1 \leq q \leq \infty$  последовательности производных  $f^{(s)} (0 \leq s \leq r)$  по аргументу  $f_a^{(r)} \in H_q, 1 \leq q \leq \infty$ .

**Ключевые слова:** наилучшее приближение, модуль непрерывности, аналитическая функция, производная по аргументу, поперечник.

1. Задача нахождения точных значений наилучших полиномиальных приближений аналитических в круге функций вызывает определенный интерес, хотя по данной тематике в настоящее время уже получен целый ряд окончательных результатов (см., например, [1-6] и список литературы к ним).

В данной работе будем рассматривать аппроксимативные свойства аналитических в единичном круге функций  $f(z)$ , принадлежащих банахову пространству Харди  $H_q, 1 \leq q \leq \infty$  с конечной нормой

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} M_q(f, \rho) < \infty,$$

где

$$M_q(f, \rho) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right\}.$$

При этом норма функции  $f(z) \in H_q$  реализуется на ее угловых граничных значениях  $f(e^{it})$ , которые в дальнейшем обозначим просто  $f(t)$ . Обозначим через  $H_{q,\rho}, q \geq 1, 0 < \rho < 1$

**Адрес для корреспонденции:** Юсупов Гулзорхон Амиришоевич. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр.Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: G\_7777@mail.ru

пространство Харди аналитических функций в круге  $|z| < \rho$  функций  $f(z)$ , для которых  $\|f(z)\|_{H_{q,\rho}} = \|f(\rho z)\|_{H_q} < \infty$ .

Обычную производную  $r$ -го порядка функции  $f(z)$  обозначим через  $d^r f / dz^r = f^{(r)}(z)$ , а производную  $r$ -го порядка функции  $f(z)$  по аргументу  $t$  комплексного переменного  $z = \rho e^{it}$  обозначим  $f_a^{(r)}(t)$ . При этом очевидно из разложения в степенной ряд Маклорена

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 < \rho \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

получаем

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \quad \alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1), \quad k \geq r, \quad k, r \in \mathbb{N}.$$

Производную  $r$ -го порядка функции  $f(z)$  по аргументу  $t$  определим рекуррентно по формулам

$$f_a^{(1)}(z) = f'(z) z'_t = f'(z) z i, \quad f_a^{(r)}(z) = \{f_a^{(r-1)}(z)\}'_a, \quad r \geq 2, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что

$$f_a^{(r)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^r c_k(f) z^k, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Далее положим

$$H_q^{(r)} := \{f \in H_q : \|f^{(r)}\|_q < \infty\}, \quad H_{q,a}^{(r)} := \{f \in H_q : \|f_a^{(r)}\|_q < \infty\}.$$

Для функций  $f \in H_q^{(r)} \cap H_{q,a}^{(r)}$  их структурные свойства характеризуем быстротой стремления к нулю модуля непрерывности их граничных значений

$$\omega(f^{(r)}, t)_q := \sup \left\{ \|f^{(r)}(\cdot + h) - f^{(r)}(\cdot)\|_q : |h| \leq t \right\},$$

$$\omega(f_a^{(r)}, t)_q := \sup \left\{ \|f_a^{(r)}(\cdot + h) - f_a^{(r)}(\cdot)\|_q : |h| \leq t \right\}$$

при  $t \rightarrow 0$ . Равенством

$$E_{n-1}(f)_q := \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_q : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\}$$

обозначим величину наилучшего приближения  $f \in H_q$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  подпространством

$$\mathcal{P}_{n-1} := \left\{ p_{n-1}(z) : p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

алгебраических комплексных полиномов степени  $n-1$ .

В данной работе мы приводим некоторые обобщения наших результатов из работы [5].

**Теорема 1.** Для произвольной функции  $f \in H_{q,a}^{(r)} (q \geq 1)$  при любых  $s = 0, 1, \dots, r-1$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r-1 \geq s$  и  $u \in (0, \pi / (2n)]$  справедливо точное неравенство

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_q \leq \frac{1}{4n^{r-s-1}} \int_0^{2u} \omega(f_a^{(r)}, t)_q dt, \tag{1}$$

а если функция  $f \in H_q^{(r)} (q \geq 1)$ , то при любых  $s = 0, 1, \dots, r-1$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r-1 \geq s$  и  $u \in (0, \pi / 2(n-r)]$ ,  $n > r, n, r \in \mathbb{N}$  имеет место точное неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)})_q \leq \frac{n\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \int_0^{2u} \omega(f^{(r)}, t)_q dt. \tag{2}$$

Заметим, что из неравенства (1) при  $s = 0$  и  $u = \pi / (2n)$  получаем известный результат Л.В.Тайкова [1], а из (2) получаем аналог результата Л.В.Тайкова для функций  $f \in H_q^{(r)}$ ,  $q \geq 1, r \in \mathbb{N}$ . В частности, из (1) и (2) при любых  $s, r \in \mathbb{N}, r-1 \geq s, r \geq 2$  и соответственно для  $u \in (0, \pi / (2n)], n \in \mathbb{N}$  и  $u \in (0, \pi / 2(n-r)], n > r, n, r \in \mathbb{N}$  получаем равенства

$$\sup_{f \in H_{q,a}^{(r)}} \frac{n^{r-s-1} E_{n-1}(f_a^{(s)})_q}{\int_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_q dt} = \frac{1}{4}, \tag{3}$$

$$\sup_{f \in H_q^{(r)}} \frac{n(\alpha_{n,s} / \alpha_{n,r}) E_{n-1}(f^{(s)})_q}{\int_0^{\pi/(n-r)} \omega(f^{(r)}, t)_q dt} = \frac{1}{4}. \tag{4}$$

Положим

$$H_{q,\rho,a}^{(r)} = \{f \in H_{q,\rho} : \|f_a^{(r)}\|_{H_{q,\rho}} := \|f_a^{(r)}(\rho \cdot)\|_{H_q}\},$$

$$H_{q,\rho}^{(r)} = \{f \in H_{q,\rho} : \|f^{(r)}\|_{H_{q,\rho}} := \|f^{(r)}(\rho \cdot)\|_{H_q}\}.$$

Равенства (3) и (4) допускают обобщение для соответствующих классов  $H_{q,\rho,a}^{(r)}$  и  $H_{q,\rho}^{(r)}$  ( $r \in \mathbb{N}, 1 \leq q < \infty, 0 < \rho \leq 1$ ).

**Теорема 2.** Пусть  $r \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, r-1 \geq s$  и  $0 < \rho \leq 1, 1 \leq q < \infty$ . Тогда соответственно при  $u \in (0, \pi / (2n)]$  и  $u \in (0, \pi / 2(n-r)]$  справедливы равенства

$$\sup_{f \in H_{q,\rho,a}^{(r)}} \frac{n^{r-s-1} E_{n-1}(f_a^{(s)})_q}{\int_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_q dt} = \frac{\rho^n}{4}, \tag{5}$$

$$\sup_{f \in H_{q,\rho}^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / (n\alpha_{n,s})) E_{n-1}(f^{(s)})_q}{\int_0^{\pi/(n-r)} \omega(f^{(r)}, t)_q dt} = \frac{\rho^n}{4}. \quad (6)$$

Пусть  $\Phi(h), h \in \mathbb{R}_+$  — непрерывная неубывающая функция такая, что  $\Phi(0) = 0$ . Символом  $W_a^{(r)} H_{q,\rho}(\Phi)$  обозначим множество функций  $f \in H_{q,\rho,a}^{(r)}$ , удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_q dt \leq \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Аналогично, через  $W^{(r)} H_{q,\rho}(\Phi)$  обозначим множество функций  $f \in H_{q,\rho}^{(r)}$ , удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\pi/(n-r)} \omega(f^{(r)}, t)_q dt \leq \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right).$$

Если  $\mathfrak{M}^{(r)}$  есть некоторое подмножество функций из  $H_{q,\rho,a}^{(r)}$  или  $H_{q,\rho}^{(r)}$ , то требуется найти величину

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M}^{(r)})_q := \sup\{E_{n-1}(f^{(s)})_q : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\}.$$

В этих обозначениях справедлива следующая

**Теорема 3.** При любых  $n, r \in \mathbb{N}, n \geq r, s \in \mathbb{Z}_+, r-1 \geq s$  имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_a^{(r)} H_{q,\rho}(\Phi))_q &:= \sup\{E_{n-1}(f^{(s)})_q : f \in W_a^{(r)} H_{q,\rho}(\Phi)\} = \\ &= \frac{\rho^n}{4n^{r-s-1}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad 0 < \rho \leq 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)} H_{q,\rho}(\Phi))_q &:= \sup\{E_{n-1}(f^{(s)})_q : f \in W^{(r)} H_{q,\rho}(\Phi)\} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{n\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \rho^n \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right), \quad 0 < \rho \leq 1. \end{aligned}$$

Напомним необходимые понятия и определения для формулировки дальнейших результатов.

Пусть  $S$  — единичный шар в  $H_p$ ;  $\mathfrak{M}$  — выпуклое центрально-симметричное подмножество в  $H_p$ ;  $\mathcal{L}_n \subset H_p$  —  $n$ -мерное подпространство;  $\mathcal{L}^n$  — подпространство коразмерности  $n$ ;  $\Lambda: H_p \rightarrow \mathcal{L}_n$  — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства  $H_p$  в  $\mathcal{L}_n$ ;  $\Lambda^\perp: H_p \rightarrow \mathcal{L}_n$  — непрерывный оператор линейного проектирования  $H_p$  на подпространство  $\mathcal{L}_n$ .

Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, H_p) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : \mathcal{L}_{n+1} \subset H_p\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, H_p) = \inf \{ \sup \{ \|f\|_p : f \in \mathcal{L}^n \} : \mathcal{L}^n \subset H_p \}$$

$$d_n(\mathfrak{M}, H_p) = \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - g\|_p : g \in \mathcal{L}_n \} : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}_n \subset H_p \},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, H_p) = \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \Lambda f\|_p : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda H_p \subset \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset H_p \},$$

называют бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским и линейным  $n$ -поперечниками множества в пространстве  $H_p$ . Между указанными  $n$ -поперечниками имеют место соотношения [7, 8]

$$b_n(\mathfrak{M}, H_p) \leq \frac{d_n(\mathfrak{M}, H_p)}{d^n(\mathfrak{M}, H_p)} \leq \lambda_n(\mathfrak{M}, H_p).$$

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 4.** При любых  $n, r \in \mathbb{N}, n \geq r, 0 < \rho \leq 1, 1 \leq q \leq \infty$  имеют место равенства

$$\delta_n(W_a^{(r)} H_{q,\rho}(\Phi)) = \frac{\rho^n}{4n^{r-1}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

$$\delta_n(W^{(r)} H_{q,\rho}(\Phi)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{n\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right),$$

где  $\delta_n(\cdot)$  — любой из вышеперечисленных  $n$ -поперечников.

Поступило 06.04.2020 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций. — Матем. заметки, 1977, т.22, 2, с.285-295.
2. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди  $H_2$ . — Матем. заметки, 2000, т.68, 5, с.796-800.
3. Юсупов Г.А. Минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди. — ДАН РТ, 2007, т.50, 11-12, с.811-818.
4. Юсупов Г.А., Миркалонова М.М. Наилучшее полиномиальное приближение аналитических функций в пространстве Харди. — ДАН РТ, 2008, т.51, 10, с.722-729.
5. Миркалонова М.М. Наилучшие полиномиальные приближение аналитических функции в пространстве Харди  $H_q, 1 \leq q \leq \infty$ . — ДАН РТ, 2010, т.53, 5, с.336-343.
6. Юсупов Г.А. О наилучших линейных методах приближения функций в пространстве Харди  $H_{q,R}, 0 < R \leq 1$ . — ДАН РТ, 2013, т.56, 12, с.946-953.
7. Pinkus A.  $n$ -Widths in Approximation Theory. — Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985, 252 p.



8. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: МГУ, 1976, 325 с.

Г.А.Юсупов, М.М.Миркалонова

**НОБАРОБАРИҶО БАРОИ НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ФУНКСИЯҶОИ  
АНАЛИТИКӢ ДАР ФАЗОИ БАНАХИИ ХАРДИ  $H_q$ ,  $1 \leq q \leq \infty$**

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола баъзе нобаробариҳои аниқ байни бузургии наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияи  $f \in H_q$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  ва интегралҳои, ки модули бефосилагии тартиби  $r$ -уми аз руи аргументро дар бар доранд, ёфта шудааст. Баъзе натиҷаҳои маълуми Л.В.Тайков ба ҳолати наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияҳои дар дараи воҳиди аналитикӣ ва наздиккунии беҳтарини онҳо  $E_{n-1}(f)_q$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  ба воситаи ҳосилаҳои пайдарпаи  $f^{(s)}$  ( $0 \leq s \leq r$ ) аз рӯи аргумент  $f_a^{(r)} \in H_q$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  умумӣ кунонида шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** наздиккунии беҳтарин, модули бефосилагӣ, функсияи аналитикӣ, аз рӯи аргумент, қутр.

G.A.Yusupov, M.M.Mirkalonova

**INEQUALITIES FOR BEST APPROXIMATIONS OF ANALYTICAL FUNCTIONS  
IN HARDY'S BANACH SPACE  $H_q$ ,  $1 \leq q \leq \infty$**

*Tajik National University*

Some exact inequalities between the value of the best polynomial approximation of the function  $f \in H_q$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  and the integrals containing the first-order modulus of continuity of the  $r$ th derivative of the function with respect to the argument are found. Along the way, some well-known results of L.V.Taykov are generalized to the case of simultaneous polynomial approximation of analytic functions in the unit disk and their best approximations  $E_{n-1}(f)_q$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  sequences of derivatives  $f^{(s)}$  ( $0 \leq s \leq r$ ) with respect to the argument  $f_a^{(r)} \in H_q$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ .

**Key words:** best approximation, modulus of continuity, analytic function, derivative with respect to argument, diameter.

УДК 517.5

Н.М.Мамадаёзов, Ш.Саади\*

## НАИЛУЧШЕЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И ПОПЕРЕЧНИКИ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2$

*Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева,*

*Таджикский педагогический университет им. С.Айни*

*(Представлено академиком АН Республики Таджикистан М.Ш.Шабозовым 14.09.2019 г.)*

В работе найдены точные неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усреднёнными значениями модулей непрерывности функций  $f \in L_2$  в норме пространства  $L_2$ . Для некоторых классов функций, задаваемых указанными модулями непрерывности, вычислены точные значения ряда  $n$ -поперечников.

**Ключевые слова:** наилучшие приближения, модуль непрерывности, весовая функция,  $n$ -поперечники.

1. Пусть  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел;  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ;  $\mathbb{R}_+$  — множество положительных чисел вещественной оси;  $L_2 = L_2[0, 2\pi]$  — пространство измеримых и суммируемых с квадратом по Лебегу  $2\pi$ -периодических функций, у которых норма

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0, 2\pi]} = \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Множество всех тригонометрических полиномов порядка  $\leq n-1, n \in \mathbb{N}$  обозначим  $T_{2n-1}$ . Хорошо известно, что если

$$S_{n-1}(f; x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

— частная сумма порядка  $n-1$  ряда Фурье функции

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

то величина наилучшего приближения элементами подпространства  $T_{2n-1}$  в пространстве  $L_2$  равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &= \inf \{ \|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1} \in T_{2n-1} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (1)$$

*Адрес для корреспонденции:* Мамадаёзов Назаралибек Мирзомамадович. 734000, Республика Таджикистан, г.Хорог, ул.Ленина, 26, Хорогский государственный университет. E-mail: nazar79@mail.ru

где  $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f), k \geq n, k \in \mathbb{N}$ .

Через  $L_2^{(r)}$  ( $r \in \mathbb{N}; L_2^{(0)} \equiv L_2$ ) обозначим множество функций  $f \in L_2$ , у которых производные  $(r-1)$ -го порядка  $f^{(r-1)}$  абсолютно непрерывны, а производные  $r$ -го порядка  $f^{(r)} \in L_2$ .

Модуль непрерывности произвольной  $2\pi$ -периодической суммируемой с квадратом функции  $f$  определим посредством равенства

$$\omega(f; t) := \sup\{\|f(\cdot+t) - f(\cdot)\|_2 : |t| \leq h\}, \quad (2)$$

где

$$\|f(\cdot+t) - f(\cdot)\|_2 = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $r \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}$ . Тогда справедливы соотношения

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left( \frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/2}} = \frac{nh}{2(nh - \sin nh)}, \quad 0 < nh \leq \pi/2; \quad (3)$$

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{\sqrt{2} n^r E_{n-1}(f)}{\left( \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega^2(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/2}} = \left\{ 1 - \left( \frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-1/2}, \quad 0 < nh \leq \pi. \quad (4)$$

**Доказательство.** Равенство (3) есть следствие соотношения (2) работы [1]. Чтобы установить (4), заметим, что для произвольной  $f \in L_2^{(r)}$  и любой  $h \in (0, \pi/n]$  справедливо неравенство [1, с.435]

$$E_{n-1}^2(f) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \left( \frac{2}{kh} \sin \frac{kh}{2} \right)^2 + \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h \int_0^t \omega^2(f^{(r)}; \tau) d\tau dt. \quad (5)$$

Воспользуясь очевидным равенством

$$\int_0^h \int_0^t \omega^2(f^{(r)}, \tau) d\tau dt = \int_0^h (h-t) \omega^2(f^{(r)}; t) dt, \quad (6)$$

перепишем неравенство (5) в виде

$$E_{n-1}^2(f) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \left( \frac{2}{kh} \sin \frac{kh}{2} \right)^2 + \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega^2(f^{(r)}; t) dt.$$

Поскольку  $0 < nh \leq \pi$ , то

$$\max_{u \geq nh} \left( \frac{2}{u} \sin \frac{u}{2} \right)^2 = \left( \frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2$$

и

$$E_{n-1}^2(f) \leq \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2 E_{n-1}^2(f) + \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega^2(f^{(r)}; t) dt.$$

Таким образом,

$$\left\{1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2\right\} E_{n-1}^2(f) \leq \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega^2(f^{(r)}; t) dt. \quad (7)$$

Из (7) следует оценка сверху

$$\frac{\sqrt{2} n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega^2(f^{(r)}; t) dt\right)^{1/2}} \leq \left\{1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}. \quad (8)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию  $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$ , для которой

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \omega^2(f_0^{(r)}; t) = 2n^{2r} (1 - \cos nt),$$

$$\frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega^2(f_0^{(r)}; t) dt = 2n^{2r} \left\{1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2\right\}, \quad 0 < nt \leq \pi.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{\sqrt{2} n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega^2(f^{(r)}; t) dt\right)^{1/2}} &\geq \frac{\sqrt{2} n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega^2(f_0^{(r)}; t) dt\right)^{1/2}} = \\ &= \left\{1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}, \quad 0 < nh \leq \pi. \end{aligned} \quad (9)$$

Требуемое равенство (4) следует из сопоставления неравенств (8) и (9), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Пусть  $\Phi(h), h \geq 0$  – произвольная возрастающая выпуклая вниз функция, в нуле равная нулю.

Для произвольных  $r \in \mathbb{Z}_+$  и  $h > 0$  определим классы функций:

$$W^{(r)}(\Phi; h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(f^{(r)}; t) dt\right)^{1/2} \leq \Phi(h) \right\},$$

$$W_1^{(r)}(\Phi; h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega^2(f^{(r)}; t) dt\right)^{1/2} \leq \Phi(h) \right\}.$$

2. Всюду далее через  $b_n(\mathfrak{M}, L_2)$ ,  $d^n(\mathfrak{M}, L_2)$ ,  $d_n(\mathfrak{M}, L_2)$ ,  $\delta_n(\mathfrak{M}, L_2)$ ,  $\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2)$  соответственно обозначим бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный  $n$ -поперечники множества  $\mathfrak{M}$  в пространстве  $L_2$  (см., например, [2, 3]). Указанные величины монотонно убывают по  $n$  и между ними в пространстве  $L_2$  выполняются соотношения [2, 3]:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \quad (10)$$

Для множества  $\mathfrak{M} \subset L_2$  также полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M}\}.$$

**Теорема 2.** Если мажоранта  $\Phi(h)$  при любых  $h \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$  удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2n))} \geq \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \begin{cases} (nh - \sin nh)/(nh), & 0 < nh \leq \pi, \\ (3nh - 2\pi)/(nh), & nh > \pi, \end{cases} \quad (11)$$

то справедливы равенства

$$\lambda_n(W^{(r)}(\Phi; h); L_2) = E_{n-1}(W^{(r)}(\Phi; h); L_2) = \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \frac{1}{n^r}, \quad (12)$$

где  $\lambda_n(\cdot)$  – любой из  $n$ -поперечников  $b_n(\cdot)$ ,  $d_n(\cdot)$ ,  $d^n(\cdot)$ ,  $\delta_n(\cdot)$ ,  $\Pi_n(\cdot)$ . Множество мажорантных функций, удовлетворяющих условию (11), не пусто.

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что из (3) вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \left\{ \frac{nh}{2(nh - \sin nh)} \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r} \left( \frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(f^{(r)}; t) dt \right)^{1/2}.$$

Полагая в правой части полученного неравенства  $h = \pi/n$ , с учётом определения класса  $W^{(r)}(\Phi; h)$  и соотношения (10) имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_n(W^{(r)}(\Phi; h); L_2) &\leq E_{n-1}(W^{(r)}(\Phi; h); L_2) = \\ &= \sup\{E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}(\Phi; h)\} \leq \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \frac{1}{n^r}. \end{aligned} \quad (13)$$

При получении оценки снизу покажем, что для любого  $n \in \mathbb{N}$   $(2n+1)$ -мерная сфера тригонометрических полиномов

$$S_{2n+1} = \left\{ T_n(x) \in T_{2n+1} : \|T_n\|_2 = \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \frac{1}{n^r} \right\}$$

принадлежит классу  $W^{(r)}(\Phi; h)$ . Согласно первому из условий (11), при  $0 < nh \leq \pi$  и любого  $T_n \in S_{2n+1}$  будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(T_n^{(r)}; t) dt &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \left( 2 \sin \frac{nt}{2} \right)^2 n^{2r} \|T_n\|_2^2 dt = \\ &= \frac{2(nh - \sin nh)}{nh} \cdot n^{2r} \|T_n\|_2^2 = \frac{\pi}{nh} \cdot \frac{nh - \sin nh}{\pi - 2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \Phi(h). \end{aligned} \tag{14}$$

Если же  $nh > \pi$ , то, используя второе неравенство из (11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(T_n^{(r)}; t) dt &\leq \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \omega^2(T_n^{(r)}; t) dt + \frac{1}{h} \int_{\pi/n}^h \omega^2(T_n^{(r)}; t) dt \leq \\ &\leq \frac{\pi}{\pi-2} \left\{ 1 + 2 \left( 1 - \frac{\pi}{nh} \right) \right\} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{nh} \cdot \frac{3nh - 2\pi}{\pi - 2} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \Phi(h). \end{aligned} \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует включение  $S_{2n+1} \subset W^{(r)}(\Phi; h)$ , откуда согласно определению бернштейновского  $n$ -поперечника имеем:

$$\begin{aligned} b_{2n-1}(W^{(r)}(\Phi; h); L_2) &\geq b_{2n}(W^{(r)}(\Phi; h); L_2) \geq \\ &\geq b_{2n}(S_{2n+1}; L_2) = \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \frac{1}{n^r}. \end{aligned} \tag{16}$$

Сопоставляя оценку сверху (13) с оценкой снизу (16), получаем требуемое равенство (12).

Заметим, что функция  $\Phi(h) = h^\alpha$ ,  $\alpha = 2/(\pi-2)$  удовлетворяет условиям теоремы 1. Сначала проверим выполнение первого из неравенств в условии (11). В самом деле, полагая  $2nh/\pi = \mu$ , запишем указанное условие в следующем виде

$$\mu^{\alpha+1} \geq \frac{\pi}{\pi-2} \left( \mu - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\mu\pi}{2} \right), \quad 0 \leq \mu \leq 2. \tag{17}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1} - \frac{\pi}{\pi-2} \left( \mu - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\mu\pi}{2} \right). \tag{18}$$

Пусть сначала  $0 \leq \mu \leq 1$ . Покажем, что в этом случае при всех  $\mu \in [0, 1]$  функция  $\varphi(\mu) \geq 0$ . Так как при  $\varphi(\mu) \rightarrow 0+$

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1}(1 - O(\mu^{2-\alpha})),$$

то в достаточно малой окрестности нуля  $\varphi(\mu) > 0$  и, если бы в некоторой точке  $\xi \in (0,1)$  функция  $\varphi(\mu)$  сменила знак, то, учитывая, что  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ , производная

$$\varphi'(\mu) = (\alpha + 1)\mu^\alpha - \frac{\pi}{\pi - 2} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2}\right) = (\alpha + 1) \left(\mu^\alpha + \cos \frac{\mu\pi}{2} - 1\right)$$

имела бы не меньше двух нулей на интервале  $(0,1)$ . Кроме того,  $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$ , а тогда вторая производная

$$\varphi''(\mu) = (\alpha + 1) \left(\alpha\mu^{\alpha-1} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2}\right)$$

необходимо должна иметь по крайней мере три нуля на интервале  $(0,1)$  и, кроме того,  $\varphi''(0) = 0$ . Отсюда заключаем, что производная третьего порядка

$$\varphi'''(\mu) = (\alpha + 1) \left(\alpha(\alpha - 1)\mu^{\alpha-2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos \frac{\mu\pi}{2}\right)$$

на интервале  $(0,1)$  имеет три нуля, что невозможно, ибо  $\varphi'''(\mu)$  является разностью выпуклой вниз и выпуклой вверх функций.

Если  $1 < \mu \leq 2$ , то из условий  $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0$  и  $\varphi''(\mu) > 0$  сразу следует, что  $\varphi(\mu) > 0$ .

Если же  $\mu > 2$ , то из второго неравенства условия (11) имеем

$$\mu^{\alpha+1} \geq \frac{2}{\pi - 2} \left(\frac{3\pi}{2} - \mu\right) := (\alpha + 1) \left(\frac{3\pi}{2} - \mu\right) \quad (19)$$

и, введя в рассмотрение функцию

$$\varphi_1(\mu) = \mu^{\alpha+1} - (\alpha + 1) \left(\frac{3\pi}{2} - \mu\right),$$

будем иметь  $\varphi_1'(\mu) = (\alpha + 1)(\mu^\alpha + 1) > 0$ . Но это означает, что неравенство (19) имеет место при любом  $\mu \in (2, +\infty)$  и таким образом теорема 2 полностью доказана.

**Теорема 3.** Пусть мажоранта  $\Phi(h)$  при любом  $h \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$  и  $r \in \mathbb{Z}_+$  удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \begin{cases} 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2, & \text{если } 0 < nh \leq \pi, \\ 1 - \frac{4}{\pi^2} + 2\left(1 - \frac{\pi}{nh}\right)^2, & \text{если } nh > \pi. \end{cases} \quad (20)$$

Тогда справедливы равенства

$$\lambda_n(W_1^{(r)}(\Phi; h); L_2) = E_{n-1}(W_1^{(r)}(\Phi; h); L_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{1/2} \frac{1}{n^r}, \tag{21}$$

где  $\lambda_n(\cdot)$  – любой из перечисленных выше  $n$ -поперечников. Множество мажорант, удовлетворяющих соотношению (20), не пусто.

**Доказательство.** Для получения оценки сверху всех вышеперечисленных аппроксимационных величин используем вытекающее из (8) неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \left( \frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-1/2} \cdot \frac{1}{n^r} \left( \frac{2}{h^2} \int_0^h \omega^2(f^{(r)}; t) dt \right)^{1/2}. \tag{22}$$

Из (22) при  $h = \pi/n$ , с учётом определения класса и соотношения (10), получаем оценку сверху

$$\lambda_n(W_1^{(r)}(\Phi; h); L_2) \leq E_{n-1}(W_1^{(r)}(\Phi; h); L_2) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{1/2} \frac{1}{n^r}. \tag{23}$$

С целью получения оценки снизу вводим в рассмотрение  $(2n+1)$ -мерную сферу

$$\mathfrak{S}_{2n+1} = \left\{ T_n(x) \in T_{2n+1} : \|T_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{1/2} \frac{1}{n^r} \right\}$$

и докажем, что  $\mathfrak{S}_{2n+1}$  принадлежит классу  $W_1^{(r)}(\Phi; h)$ . Согласно первому неравенству из (20), при  $0 < nh \leq \pi$  имеем:

$$\begin{aligned} \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega^2(T_n^{(r)}; t) dt &\leq 2n^{2r} \|T_n\|_2^2 \left( \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t) (1 - \cos nt) dt \right) = \\ &= \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \left\{ 1 - \left( \frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \Phi(h). \end{aligned} \tag{24}$$

Если же  $nh > \pi$ , то, используя второе неравенство из (20), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega^2(T_n^{(r)}; t) dt &\leq 2 \left( \frac{n}{\pi} \right)^{2\pi/n} \int_0^{\pi/n} \left( \frac{\pi}{n} - t \right) \omega^2(T_n^{(r)}; t) dt + \\ &+ \frac{2}{h^2} \int_{\pi/n}^h (h-t) \omega^2(T_n^{(r)}; t) dt \leq \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2 \cdot \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \left( 1 - \frac{\pi}{nh} \right)^2 \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) = \\ &= \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \left\{ 1 - \frac{4}{\pi^2} + 2 \left( 1 - \frac{\pi}{nh} \right)^2 \right\} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \Phi(h). \end{aligned} \tag{25}$$



Из неравенств (24) и (25) следует включение  $\mathfrak{S}_{2n+1} \subset W_1^{(r)}(\Phi; h)$ , а потому согласно определению бернштейновского  $n$ -поперечника получаем

$$\begin{aligned} b_{2n-1}(W_1^{(r)}(\Phi; h); L_2) &\geq b_{2n}(W_1^{(r)}(\Phi; h); L_2) \geq \\ &\geq b_{2n}(\mathfrak{S}_{2n+1}; L_2) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{1/2} \frac{1}{n^r}. \end{aligned} \quad (26)$$

Сравнивая неравенства (23) и (26), получаем требуемое равенство (21). Легко убедиться, что функция  $\Phi(h) = h^\alpha$ ,  $\alpha = 8/(\pi^2 - 4)$  удовлетворяет условию (20), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Поступило 21.09.2019 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из  $L_2$ . – Мат. заметки, 1976, т.20, №3, с.433-438.
2. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976, 325 с.
3. Pinkus A.  $n$ -Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo, 1985, 252 p.

Н.М.Мамадаёзов, Ш.Саади\*

### НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ПОЛИНОМИАЛӢ ВА ҚУТРҲОИ МАЧМӢҲО ДАР ФАЗОИ $L_2$

*Донишгоҳи давлатии Хоруғ ба номи М.Назаршоев,*

*\*Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ*

Дар мақола нобаробариҳои аниқ байни наздиккунии беҳтарини полиномиалӣ ва модули бефосилагии миёнакардашудаи функсияҳои  $f \in L_2$  дар норми фазои  $L_2$  ёфта шудаанд. Барои баъзе синфи функсияҳо, ки бавоситаи модули бефосилагӣ дода мешаванд, қимати аниқи як қатор қутрҳо ҳисоб карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** наздиккунии беҳтарин, модули бефосилагӣ, функсияи вазнӣ,  $n$ -қутрҳо.

N.M.Mamadayozov, Sh.Saadi\*

**THE BEST POLYNOMIAL APPROXIMATION AND WIDTHS OF SET  
IN  $L_2$  SPACE**

*M.Nazarshoev Khorog State University,*

*\*S.Ainy Tajik State Pedagogical University*

The exact inequality between the best polynomial approximation and the value of moduli continuity of function in  $f \in L_2$  on norm space  $L_2$  were found in the article. For some classes of functions which are defined by these moduli of continuity, were calculated by exact value of  $n$ -widths.

*Key words: the best approximation, modulus of continuity, the weight function,  $n$ -widths.*

УДК 517.95

Д.С.Сафаров, Х.В.Одинабеков\*

## О РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ С ЗАДАНЫМИ ГЛАВНЫМИ ЧАСТЯМИ

*Бохтарский государственный университет им. Н.Хусрава,**\*Таджикский государственный университет коммерции**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Илоловым 28.09.2019 г.)**В статье для одного класса псевдопараболических систем уравнений вида*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \bar{z}} + a(z) \frac{\partial w}{\partial t} + b(z) w = 0$$

найден обобщенное решение смешанной задачи в классе функций, ограниченных по  $t$  и дwoякопериодических по переменной  $z$ , и с заданными главными частями.

**Ключевые слова:** дwoякопериодическое решение, псевдопараболические системы уравнений, обобщенное решение.

1. В полупространстве  $\mathbb{R}_+^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ ,  $\mathbb{C}$  – комплексная плоскость  $\partial\mathbb{R}_+^3 = \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , рассмотрим систему уравнений вида [1, 2]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \bar{z}} + a(z) \frac{\partial w}{\partial t} + b(z) w = 0, \quad (1)$$

где  $t \in (0, +\infty)$ ,  $z = x + iy$ ,  $w(z, t) = u(x, y, t) + iv(x, y, t)$   $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$  – дифференциальный оператор Коши-Римана,  $a(z)$ ,  $b(z)$  – заданные на плоскость  $\mathbb{C}$  дwoякопериодические с основными периодами  $\omega_1, \omega_2$   $Im\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \neq 0$ .

Будем искать решение уравнения (1), ограниченное по  $t$ , дwoякопериодическое по  $z$  с основными периодами  $\omega_1, \omega_2$  и в любой ограниченной части пространства  $\mathbb{R}_+^3$  имеет главные части

$$\frac{A_k(t)}{z - b_k} + \sum_{j=2}^{\lambda_k} (-1)^{j-1} \frac{(j-1)! A_k^{j-1}(t)}{(z - b_k)^j} \quad k = 1, 2, 3, \dots, \nu, \quad (2)$$

где  $b_1, b_2, \dots, b_\nu$  – заданные точки плоскости  $\mathbb{C}$ ,  $A_k^j$  – дифференцируемые ограниченные функции при  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ .

**Адрес для корреспонденции:** Сафаров Джумабой Сафарович. 735140, Республика Таджикистан, г. Бохтар, ул. Айни, 67, Бохтарский государственный университет. E-mail: Safarov-5252@mail.ru ; Одинабеков Хусрав Вафобекович. 734055, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Дехоти, 1/2, Таджикский государственный университет коммерции. E-mail: Khusrav1982@yandex.ru

В работе [1], следуя подходу в работах [3, 4], изучена начально-краевая задача для уравнения (1) общего вида, содержащего слагаемые  $\bar{w}_1, \bar{w}$ , когда коэффициенты принадлежат классу  $L_p(G), G \subset \mathbb{C}, p > 2$ . Для этого строятся аналоги системы фундаментальных обобщенных аналитических функций  $\{X^{(1)}, X^{(2)}\}$ , введенных Векуа [2] и с помощью этих функций находятся формулы интегрального представления решения уравнения (1) в цилиндрической области  $G \times [0, T], T > 0$ .

Пусть  $\Omega$  – основной параллелограмм периодов дwoякопериодических функций с основными периодами  $\omega_1, \omega_2$ , с вершинами  $z_0, z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2, z_0 + \omega_2$ , то есть  $\Omega = \{z : z = z_0 + t_1 \omega_1 + t_2 \omega_2, 0 \leq t_1 + t_2 \leq 1\}$ .

Предположим, что точки  $(b_1, t), (b_2, t), \dots, (b_\nu, t)$  содержатся внутри области  $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$ .

Достаточно найти решения задач (1), (2) в любой ограниченной области  $\tilde{\Omega}_T \in \Omega_T$ , где  $\tilde{\Omega}_T$  – подмножество области  $\Omega_T$ , не содержащее точки  $(b_1, t), (b_2, t), \dots, (b_\nu, t)$ , то есть  $w \in C_*^2(\tilde{\Omega}_T)$ ,  $C_*^2$  – класс функций, ограниченных по  $t$ , дwoякопериодических по  $z$ , с периодами  $\omega_1, \omega_2$  и допускающий первые и вторые частные и смешанные производные по  $t, x, y$ .

Пусть в условии (2) функции  $A_k^j(t)$  имеют вид

$$A_k^j(t) = a_k^j e^{i\gamma t}, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad a_k^j - const. \tag{3}$$

При этом условии решени задачи (1), (2) будем искать в виде

$$w(z, t) = \varphi(z) e^{i\gamma t},$$

где  $\varphi(z)$  – искомая дwoякопериодическая функция с периодами  $\omega_1, \omega_2$ .

Подставляя эту функцию в (1), получим

$$i\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} + a(z) i\gamma \varphi(z) + b(z) \varphi(z) = 0$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} + \left( a(z) + \frac{b(z)}{i\gamma} \right) \varphi(z) = 0. \tag{4}$$

Таким образом, задача (1) и (2) при условии (3) свелась к задаче нахождения дwoякопериодических решений уравнения (4) с главными частями вида

$$\frac{a_k}{z - b_k} + \sum_{j=2}^{\lambda_k} (-1)^{j-1} \frac{(j-1)! a_k^{j-1}}{(z - b_k)^j}, \quad k = 1, 2, \dots, \nu. \tag{5}$$

Решение задач (4), (5) изучено в работе [5] методом теории обобщенных аналитических функций с привлечением аппарата теории эллиптических функций Вейерштрасса [7].

Пусть  $C_*^{0,\alpha} \equiv H_*^\alpha$  – пространство двоякопериодических функций с периодами  $\omega_1, \omega_2$  и непрерывных по Гельдеру с показателем  $\alpha$  в области  $\Omega$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Пусть  $a(z), b(z) \in H_*^\alpha$ ,  $\alpha \in (0,1)$  и  $a_0, b_0$  – числа вида

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega, \quad b_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} b(z) d\Omega, \quad d\Omega = dx dy, \tag{6}$$

и  $\Gamma$  – решетка периодов на плоскости  $\mathbb{C}$ ,  $\Gamma = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2; m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ . Тогда разрешимость задач (5), (6) зависит от свойств числа  $A_0 = a_0 + \frac{b_0}{i\gamma}$ :  $A_0 \in \Gamma$  или  $A_0 \notin \Gamma$ .

Справедлива следующая [5,6]

**Теорема  $A_1$ .** Пусть  $A_0 \in \Gamma$ , тогда для разрешимости задач (4), (5) необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \dots + \tilde{a}_\nu = 0. \tag{7}$$

При этом все решения задач представимы в виде

$$\varphi(z) = e^{-dz - T_\zeta A(z)} \left[ c + \sum_{k=1}^{\nu} \tilde{a}_k \zeta(z - b_k) + \sum_{j=2}^{\lambda_\nu} \tilde{a}_k^{(j-1)} \wp^{(j-2)}(z - b_k) \right], \tag{8}$$

где  $c$  – произвольная постоянная

$$\tilde{a}_k^{(j)} = a_k^{(j)} e^{ab_k + T_\zeta A(b_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \nu, \tag{9}$$

$T_\zeta A(z)$  – интегральный оператор с ядром  $\zeta(z)$  – функция Вейерштрасса, построенный на периодах  $\omega_1, \omega_2$ ,

$$T_\zeta A(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} A(z) \zeta(t-z) d_t \Omega, \quad A(z) = a(z) + \frac{1}{i\gamma} b(z),$$

$\wp(z) = -\zeta'(z)$ , постоянная  $d$  находится из системы уравнений.

$$\exp(d\omega_1 + \eta_1 A_0) = \exp(d\omega_2 + \eta_2 A_0) = 1. \tag{10}$$

Здесь постоянные  $\eta_1, \eta_2$  и периоды  $\omega_1, \omega_2$  связаны соотношением Лежандра  $\eta_2\omega_1 - \eta_1\omega_2 = 2\pi i$  [7].

Из этой теоремы как следствие получим

**Утверждение 1.** Пусть выполнены условия теоремы, тогда при  $A_0 \in \Gamma$  для существования ненулевого решения задач (4), (5) необходимо и достаточно, чтобы порядок полюсов  $\nu, \nu \geq 2$ .

**Теорема  $A_2$**  [5]. Пусть  $A_0 \in \Gamma$ . Тогда задачи (4), (5) всегда разрешимы с заданными главными частями и их решение представляется в виде

$$\varphi(z) = \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z - z_1)} \mu(z) e^{-T_\zeta A(z)}, \tag{11}$$

причем точки  $z_0, z_1$  выбраны так, чтобы  $z_1 - z_0 = A_0$  и  $\mu(z)$  – дwoякопериодические функции вида

$$\mu(z) = c + d\zeta(z - z_0) + \sum_{k=1}^{\nu} \left[ \tilde{a}_k \zeta(z - b_k) + \sum_{j=2}^{\lambda_\nu} \tilde{a}_k^{(j-1)} \wp^{(j-1)}(z - b_k) \right], \tag{12}$$

здесь постоянные  $c, d, \tilde{a}_k, \tilde{a}_k^{(j)}$  и  $z_0, z_1$  связаны условиями

$$d + \sum_{k=1}^{\nu} \tilde{a}_k = 0,$$

$$c + d\zeta(z_1 - z_0) + \sum_{k=1}^{\nu} \left[ \tilde{a}_k \zeta(z_1 - b_k) + \sum_{j=2}^{\lambda_\nu} \tilde{a}_k^{(j-1)} \wp^{(j-1)}(z_1 - b_k) \right] = 0,$$

$$a_k^{(j)} = e^{T_\zeta A(b_k)} \frac{\sigma(b_k - z_1)}{\sigma(b_k - z_0)} a_k^{(j)}, \quad \tilde{a}_k^{(0)} = a_k,$$

$$b_k - z_1, b_k - z_0 \in \Gamma, \quad j = 1, 2, \dots, \nu.$$

Из этих теорем, получим условие разрешимости задач (1), (2) при условии (3) и явный вид решения.

**Теорема 1.** Пусть в уравнении (1)  $a(z), b(z) \in H_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$  в условии (2)

$A_k^{(j)} = a_k^{(j)} e^{i\gamma t}, \gamma \in \mathbb{R}$  и выполнено условие

$$b_0 \equiv i\gamma a_0 \pmod{\Gamma},$$

$\Gamma$  – решетка периодов  $\Gamma = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}$ . Тогда при  $r \geq 2$  задачи (1), (2) разрешимы, если выполнено условие (7), при этом их решение представимо в виде

$$w(z, t) = \varphi(z) e^{i\gamma t}, \tag{13}$$

где  $\varphi(z)$  имеет вид (8).

Из этого утверждения следует, что если  $\nu < 2$ , то задачи (1), (2) не имеют решения, представимого в виде (14), кроме нулевого.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы  $A_1$  и

$$b_0 \not\equiv i\gamma a_0 \pmod{\Gamma}.$$

Тогда задача (1), (2) при любой  $\nu \geq 1$  всегда имеет решение и оно представимо в виде (13) в котором  $\varphi(z)$  представляется формулой (11).

2. Теперь рассмотрим неоднородное уравнение (1), то есть

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \bar{z}} + a(z) \frac{\partial w}{\partial t} + b(z) w = F(z, t), \tag{14}$$

где  $F(z, t)$  – заданная двоякопериодическая функция по  $z$  с периодами  $\omega_1, \omega_2$  при любой  $t \in (0, T)$  и  $F(z, t) = f(z)e^{i\gamma t}$ .

Тогда, отыскивая решение задачи (14), (2) в виде

$$w(z, t) = \psi(z)e^{i\gamma t},$$

для нахождения  $\psi(z)$  получим уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} + a(z)\psi(z) + \frac{b(z)}{i\gamma}\psi(z) = \frac{1}{i\gamma}f(z). \tag{15}$$

Повторяя результаты работы [6], относительно разрешимости этого уравнения для разрешимости задачи (14), (2) получим

**Теорема 3.** Пусть в уравнении (15)  $a(z), b(z), f(z) \in H_*^\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  и числа  $a_0, b_0, \gamma$  связаны условием теоремы  $A_1$ .

Тогда задача (14), (2) с главными частями вида (2) при  $\nu \geq 1$  имеет решение лишь при выполнении условия

$$\sum_{k=1}^{\nu} \tilde{a}_k = \frac{1}{\pi i \gamma} \iint_{\Omega} f(z) e^{dz + T_{\zeta} A(z)} d\Omega. \tag{16}$$

При этом все решения задач (14), (2) представимы в виде

$$w(z, t) = e^{-dz - T_{\zeta} A(z) + i\gamma t} \left[ \chi(z) + \frac{1}{i\gamma} T_{\zeta} (f(z) e^{dz + T_{\zeta} A(z)}) \right],$$

где

$$\chi(z) = c + \sum_{k=1}^{\nu} \left[ \tilde{a}_k \zeta(z - b_k) + \sum_{j=2}^{\lambda_{\nu}} \tilde{a}_k^{(j-1)} \wp^{(j-2)}(z - b_k) \right],$$

$c$  – постоянная, постоянные  $\tilde{a}_k^{(j)}$ ,  $d$  и функция  $A(z)$  – как в теореме 1.

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теоремы 3 и постоянные  $a_0, b_0, \gamma$  как в теореме 2.

Тогда задач (1), (2) при любой  $\nu \geq 1$  и правой части  $\frac{1}{i\gamma} f(z)$  всегда разрешимы и их решения представимы в виде

$$w(z, t) = \varphi(z) e^{i\gamma t} + \frac{1}{i\gamma} e^{-T_\zeta A(z) + i\gamma t} T_\sigma \left[ f(z) e^{-T_\zeta A(z)} \right],$$

где  $\varphi(z)$  – имеет вид (11),  $T_\sigma \rho(z)$  – интегральный оператор с ядром  $\sigma(z)$  – сигма функция Вейерштрасса

$$T_\sigma \rho = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t-z-A_0)}{\sigma(-A_0)\sigma(t-z)} d_t \Omega.$$

Поступило 23.12.2019

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Gilbert R.P., Schneider M. Generalized meta and pseudo parabolic Equations in the plane. – Комплексный анализ и его приложение. – Сб. статей, посвящ. академику Илье Несторовичу Векуа и его семидесятилетию. – М.: Наука, 1978, с. 160-172.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Госиздат физ.-мат. литературы, 1959, 628 с.
3. Colton D.L. On the analytic theory of pseudoparabolic equations. – Quart. J. Math., 1972, 23, pp. 179-192.
4. Loffter H. Pseudoparabolic equations with generalized analytic functions. – Conf. on Function Theoretic Methods for Partial Differential Equations, Darmstadt, April, 1976.
5. Сафаров Д.С. Двойкопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения. – Душанбе: Дониш, 2012, 190 с.
6. Сафаров Д.С. Двойкопериодические обобщенные аналитические функции. – Дифференциальные уравнения, 1991, т. 27, №4, с. 656-664.
7. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1970, 304 с.

Ч.С.Сафаров, Х.В.Одинабеков \*

### ҲАЛЛИ ЯК СИНФИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ПСЕВДОПАРАБОЛИКӢ ДАР ҲАМВОРӢ БО ҚИСМҲОИ АССОСӢ ДОДА ШУДА

Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав,

\* Донишгоҳи давлатии тичорати Тоҷикистон

Дар мақола барои як синфи системаи муодилаҳои псевдопараболикӣ



$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \bar{z}} + a(z) \frac{\partial w}{\partial t} + b(z) w = 0,$$

дар ҳамворӣ бо қисмҳои асосӣ дода шуда, ҳалли умумии масъалаи омехта дар синфи функсияҳои маҳдуд аз рӯи  $t$  ва дудаврӣ бо давраҳои  $\omega_1, \omega_2$ -и аз рӯи тағйирёбандаи  $z$  ёфта шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** ҳалҳои дудаврӣ, системаи муодилаҳои псевдопараболикӣ, ҳалли регулярий.

**D.S.Safarov, Kh.V.Odinabekov\***

## **SOLUTION OF ONE CLASS OF PSEUDOPARABOLIC EQUATION SYSTEMS ON PLANE WITH GIVEN CHAIN PARTS**

*N.Khusrav Bokhtar State University,*

*\*Tajik State University of Commerce*

In the article for one class of pseudo-parabolic systems of equations of the form

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \bar{z}} + a(z) \frac{\partial w}{\partial t} + b(z) w = 0,$$

found a generalized solution to a mixed problem in a class of functions is found that is bounded in  $t$  and doubly periodic in the variable  $z$ , and with given principal parts.

**Key words:** *doubly periodic solution, pseudo-parabolic systems of equations, generalized solution.*

УДК 519.83

Е.М.Мухсинов

## О ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

*Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики*

*(Представлено академиком НАН Республики Таджикистан Н.Раджабовым 04.09.2020 г.)*

В работе рассматривается задача преследования в смысле Л.С.Понтрягина для нелинейной дифференциальной игры с запаздывающим аргументом. Используя методы теории дифференциальных неравенств в банаховом пространстве, доказана разрешимость задачи преследования.

**Ключевые слова:** задача преследования, нелинейная дифференциальная игра, функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа, терминальное множество, банахово пространство.

Пусть  $X, Y, Z$  – банаховы пространства,  $U([0, \infty), Y)$  – множество всех измеримых отображений, действующих из  $[0, \infty)$  в  $Y$ ,  $h \geq 0$  – заданное действительное число,  $C([-h, 0], X) = C$  – банахово пространство непрерывных функций, отображающих  $[-h, 0]$  в  $X$ , а дифференциальная игра описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x_t, u(t), v(t), t) \quad (1)$$

и замкнутым терминальным множеством  $M \subset X$ , где заканчивается игра.

В дифференциальной игре (1),  $t \geq 0$ ,  $x(t) \in X$ ,  $u(\cdot) \in U([0, \infty), Y)$  – управление преследования, а  $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$  – управление убегания. Если  $T \geq 0$ , то для любого  $t \in [0, T]$  определим  $x_t \in C$  соотношением  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ,  $-h \leq \theta \leq 0$ . Если  $D$  – открытое подмножество  $X \times Y \times Z \times [0, \infty)$ , то отображение  $f: D \rightarrow X$  такое, что для любых  $u(\cdot) \in U([0, \infty), Y)$ ,  $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$ ,  $\varphi(\cdot) \in C$ ,  $T \geq 0$  задача Коши

$$\dot{x}(t) = f(x_t, u(t), v(t), t), \quad x_0 = \varphi \quad (2)$$

имеет единственное абсолютно непрерывное решение  $x(\cdot) = x(\varphi, f)(\cdot)$ , действующее из  $[0, T]$  в  $X$ , это решение соответствующим управлением  $u(\cdot), v(\cdot)$  имеет вид (см. [1, стр.72])

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(x_s, u(s), v(s), s) ds, \quad t \geq 0,$$

$$x_0(s) = \varphi(s), \quad -h \leq s \leq 0. \quad (3)$$

**Замечание 1.** Отметим, что когда отображение  $f: D \rightarrow X$  удовлетворяет условиям Каратеодори, то есть когда  $f(\varphi, u, v, t)$  измеримо по  $t$  при каждом фиксированном  $(\varphi, u, v)$ , непрерывно по

*Адрес для корреспонденции:* Мухсинов Едгор Мирзоевич. 735700, Республика Таджикистан, г.Худжанд, 17 мкр., дом 1. Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики. E-mail: yodgor.mukhsinov@gmail.com

$(\varphi, u, v)$  для каждого фиксированного  $t$  и для любой фиксированной четверки  $(\varphi, u, v, t) \in D$  существует окрестность  $O(\varphi, u, v, t)$  и интегрируемая по Лебегу функция  $m$ , такие что  $\|f(\varphi, u, v, s)\| \leq m(s)$ ,  $(\varphi, u, v, s) \in O(\varphi, u, v, t)$ , то задача (2) имеет единственное абсолютно непрерывное решение вида (3).

**Замечание 2.** Отметим, что дифференциальная игра вида (1) охватывает, в частности, игры, описываемые дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)),$$

если  $h = 0$ ; дифференциально разностными уравнениями вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - h_1(t)), \dots, x(t - h_n(t)), u(t), v(t))$$

если  $0 \leq h_j(t) \leq h, i = 1, 2, \dots, n$ ; а также интегро-дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^0 g(t, \theta, x(t + \theta), u(\theta), v(\theta)) d\theta.$$

**Определение** (см., например, [2, стр. 308], [3, стр. 80]). В игре (1) из начального положения  $\varphi(s), -h \leq s \leq 0, \varphi(0) \in X \setminus M$  возможно завершение преследования, если существует число  $T = T(\varphi) \geq 0$  такое, что для любого измеримого отображения  $v(\cdot) \in U([0, T], Z)$  в каждый момент  $t \in [0, T]$ , зная уравнение (1) и значения  $v(t)$  и  $x(s), 0 \leq s \leq t$ , можно выбрать значение  $u(t)$  таким образом, что  $u(\cdot) \in U([0, T], Y)$  и  $x(T_1) \in M$  при некотором  $T_1 \in [0, T]$ , где  $x(\cdot)$  – решение задачи (2), соответствующее управлениям  $u(\cdot), v(\cdot)$ . При этом число  $T(\varphi)$  называется гарантированным временем преследования, а точная нижняя грань гарантированных времен – оптимальным временем преследования.

**Задача преследования.** Найти множество начальных положений, из которых в игре (1) возможно завершение преследования.

**Предположение 1.** Пусть выполнены следующие условия:

1.  $X, Y$  – сепарабельные банаховы пространства.
2. Отображение  $f: D \rightarrow X$  удовлетворяет условию Каратеодори.
3. Имеется отображение  $V: X \rightarrow (-\infty, \infty)$ , локально удовлетворяющее условию Липшица и такое, что терминальное множество  $M = \{x \in X: V(x) \leq 0\}$ .
4. Функция  $(\xi, t) \rightarrow \lambda(\xi, t)$ , непрерывная по  $\xi \in (-\infty, \infty)$  и измеримая по  $t \in [0, \infty)$ , такая, что для максимального решения  $\bar{\xi}(\cdot)$  задачи

$$\xi'(t) = \lambda(\xi(t), t), \xi(0) = V(\varphi(0)) > 0 \tag{4}$$

существует число  $T = T(\varphi) = \min \{t \geq 0: \bar{\xi}(t) = 0\}$ .

**Замечание 3.** В предположении 1 в качестве отображения  $V(\cdot)$  можно, например, брать  $V(x) = p(x, M)$  – расстояние от точки  $x \in X$  до множества  $M$ .

Справедлива следующая

**Лемма.** Пусть  $V(\cdot): X \rightarrow (-\infty, \infty)$  локально удовлетворяет условию Липшица, а  $x(\cdot): [0, T] \rightarrow X$  абсолютно непрерывно. Тогда отображение  $t \rightarrow V(x(t))$  на  $[0, T]$  абсолютно непрерывно.

**Доказательство.** Выпуклое множество  $\overline{\text{co}}x([0, T]) \subset X$  компактно, ибо  $x(\cdot)$  – абсолютно непрерывно, а  $X$  – банахово пространство. Докажем, что  $V(\cdot)$  удовлетворяет условию Липшица на ком-

пакте  $\overline{c\delta x}([0, T])$ . В силу того, что отображение  $V(\cdot)$  локально удовлетворяет условию Липшица то для любого  $x \in X$  существуют окрестность  $O(x)$  и константа  $L(x)$  такие, что

$$|V(y) - V(z)| \leq L(x)\|y - z\|, \quad y, z \in O(x).$$

В силу компактности  $\overline{c\delta x}([0, T])$  из любого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие  $\cup_{i=1}^n O(x_i) \supset \overline{c\delta x}([0, T])$ , где  $x_i \in \overline{c\delta x}([0, T])$ .

Ясно, что отображение  $V(\cdot)$  на каждой окрестности  $O(x_i)$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L = \max_{1 \leq i \leq n} L(x_i)$ . Покажем, что отображение  $V(\cdot)$  удовлетворяет условию Липшица на  $\overline{c\delta x}([0, T])$  с константой  $L$ . Пусть  $x$  и  $y$  произвольные точки  $\overline{c\delta x}([0, T])$ . В силу выпуклости этого множества отрезок  $[x, y] \subset \overline{c\delta x}([0, T]) \subset \cup_{i=1}^n O(x_i)$ . На отрезке  $[x, y]$  последовательность точек  $z_1, z_2, \dots, z_n$  выбираем таким образом, чтобы пары  $(x, z_1), (z_1, z_2), \dots, (z_k, y)$  лежали соответственно в  $O(x_1), O(x_2), \dots, O(x_n)$  (такие окрестности всегда существуют).

Тогда

$$\begin{aligned} |V(x) - V(y)| &= |V(x) - V(z_1) + V(z_1) - V(z_2) + V(z_2) - \dots - V(y)| \\ &\leq |V(x) - V(z_1)| + |V(z_1) - V(z_2)| + \dots + |V(z_k) - V(y)| \\ &\leq L|x - z_1| + L|z_1 - z_2| + \dots + L|z_k - y| = L|x - z_1 + z_1 - z_2 + z_2 - \dots + z_k - y| \\ &= L|x - y|, \end{aligned}$$

ибо точки  $x, z_1, z_2, \dots, z_k, y$  лежат на отрезке  $[x, y]$ . Следовательно, отображение  $V(\cdot)$  липшицево на компакте  $\overline{c\delta x}([0, T])$ . Далее в силу (см.[4, стр.132]) отображение  $t \rightarrow V(x(t))$  на  $[0, T]$  абсолютно непрерывно.

Лемма доказана.

Далее, если  $V: X \rightarrow (-\infty, \infty)$ , то при любых  $x, z \in X$  положим

$$V_+^{(x; z)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} [V(x + hz) - V(x)] \cdot h^{-1}.$$

Справедлива следующая

**Теорема.** Пусть выполнены предположение 1 и следующие условия:

1. множество  $Y(x, v, t) = \{u \in Y: V_+^{(x; f(x_t, u, v, t))} \leq \lambda(V(x), t)\}$  – замкнуто, а отображение  $(x, v, t) \rightarrow Y(x, v, t)$  измеримо;
2. множество  $\Omega = \{\varphi(0): \varphi \in C \text{ и } V(\varphi(0)) > 0\}$  непусто;
3. существует абсолютно непрерывное отображение  $x(\cdot): [0, T] \rightarrow X$  такое, что  $x(0) = \varphi(0)$  и при почти всех  $t \in [0, T]$  имеет место дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in \bigcap_{v \in Z} f(x_t, Y(x(t), v, t), v, t). \tag{5}$$

Тогда из каждой точки множества  $\Omega$  возможно завершение преследования. При этом число  $T = T(\varphi)$  является гарантированным временем преследования.

**Доказательство.** Для  $\varphi(0) \in \Omega, \varphi \in C$  и  $V(\varphi(0)) > 0$  при произвольном  $v(\cdot) \in U([0, \infty)Z)$  в силу условий 3 этой теоремы существует абсолютно непрерывное отображение  $x(\cdot)$  такое, что  $x(0) = \varphi(0), x_0(s) = \varphi(s), -h \leq s \leq 0$ , и при почти всех  $t \in [0, T]$  имеет место включение (5). Из определения множества  $Y(x, v, t)$ , включения (5) и доказанной леммы следует, что

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = V'_+(x(t), \dot{x}(t)) \leq \lambda(V(x(t), t)). \quad (6)$$

В силу теоремы о неявной функции (см.[5, стр.108]) существует  $u(\cdot) \in U([0, \infty), Y)$  такое, что  $u(t) \in Y(x(t), v(t), t)$  и  $\dot{x}(t) = f(x_t, u(t), v(t), t)$  при почти всех  $t \in [0, T]$ . Следовательно,  $x(\cdot)$  является единственным решением задачи (2), соответствующим управлениям  $u(\cdot), v(\cdot)$  и удовлетворяющим соотношению (6). Из соотношения (6), на основании теоремы о дифференциальных неравенствах (см. [6, стр.41]) получаем, что  $V(x(t)) \leq \bar{\xi}(t)$  при  $t \in [0, T]$ , где  $\bar{\xi}(\cdot)$  – максимальное решение задачи (4). В силу предположений 1(4)  $V(x(T)) \leq \bar{\xi}(T) = 0$  и  $\bar{\xi}(0) = V(\varphi(0)) > 0$ . Поэтому в силу абсолютной непрерывности (т.е. непрерывности) отображения  $t \rightarrow V(x(t))$  следует существование  $0 \leq T_1 \leq T$  такого, что  $V(x(T_1)) = 0$ .

А это в силу того, что  $M = \{x \in X: V(x) \leq 0\}$ , приведет к включению  $x(T_1) \in M$ , то есть из каждой точки множество  $\Omega$  возможно завершение преследования. При этом число  $T = T(\varphi)$ , для которого  $\bar{\xi}(T) = 0$ , является гарантированным временем преследования.

Теорема доказана.

**Замечание 4.** В доказанной теореме предполагается, что у дифференциального включения (5) существует абсолютно непрерывное решение. О достаточных условиях существования решений дифференциального включения можно найти например, в работах (см.[7, стр.101], [8, стр.761]).

**Замечание 5.** Доказанная теорема обобщает соответствующий результат из работы ([9, стр.654]), когда игра описывается нелинейным дифференциальным уравнением запаздывающего типа.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.:Мир, 1984, 421с.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования. – Математический сборник, 1980, т.112 (154), №3(7), с. 307-331.
3. Мухсинов Ё.М., Муродова М.Н. Задача преследования для дифференциальной игры с запаздывающим аргументом в бесконечномерном пространстве. – Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2018, №3, с. 79-86.
4. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М:Наука, 1979, 432 с.
5. Castaing C., Valadier M. Convex analysis and measurable multifunctions. – Lecture notes in Math, 1977, №580, 278 p.
6. Lakshmikantham V., Leela S. Differential and integral inequalities. – New York: Acad.Press, 1962, 392 p.
7. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, СО, 1986, 296 с.
8. Мухсинов А.М. О дифференциальных включениях в банаховых пространствах. – ДАН СССР, 1974, т.217, №4, с. 759-761.
9. Мухсинов Ё.М. О задачах преследования и убегания в банаховом пространстве. – Доклады АН ТаджССР, 1981, т.24, №11, с.653-655.

Е.М.Мухсинов

**МАСЪАЛАИ ТАЪҚИБКУНӢ БАРОИ БОЗИҶОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ  
ҒАЙРИХАТӢ БО АРГУМЕНТИ ДЕРМОНӢ ДАР ФАЗОИ БАНАХ***Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон*

Дар мақола масъалаи таъқибкунӣ бо маънои Л.С.Понтрягин барои бозиҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ бо аргументи дермонӣ дида баромада шудааст. Аналоги функсияи Ляпунов  $V(\cdot)$  ва усулҳои назарияи нобаробариҳои дифференсиалиро истифода бурда, дар фазои Банах ҳалшавандагии масъалаи таъқибкунӣ исбот карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** масъалаи таъқибкунӣ, бозиҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ, муодилаҳои функционалӣ-дифференсиалии намуди дермонӣ, маҷмӯи терминалӣ, фазои Банах.

E.M.Mukhsinov

**ON THE PURSUIT PROBLEM IN NONLINEAR DIFFERENTIAL GAMES WITH  
RETARDED ARGUMENT***Tajik State University of law, business and politics*

The paper considers the pursuit problem in the sense of L.S. Pontryagin for a nonlinear differential game with retarded argument. Using an analogue of the Lyapunov function  $V(\cdot)$  and methods of the theory of differential inequalities in a Banach space, the solvability of pursuit problem is proved.

**Key words:** pursuit problem, nonlinear differential games, retarded functional differential equations, terminal set, Banach space.

УДК 519.25::81.322.2.:811.222.8

М.М.Каюмов

## О РАСПОЗНАВАНИИ АВТОРА ТЕКСТА НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНОСТИ n-ЗНАЧНЫХ $\alpha\beta$ -КОДОВ СЛОВОФОРМ

*Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими**(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Д.Усмановым 23.12.2020 г.)*

В статье решается задача распознавания авторов произведений для классической и современной поэзии, а также современной прозы. Произведениям сопоставляется цифровой портрет, характеризуемый распределением в них частотности многозначных  $\alpha\beta$ -кодов. Подтверждается эффективность применения  $\gamma$ -классификатора и цифровых портретов текстов на основе  $\alpha\beta$ -кодов для идентификации авторов произведений.

**Ключевые слова:** текст, цифровой портрет,  $\alpha\beta$ -коды, классификатор.

Известно, что для количественного описания текста с целью идентификации авторов произведений используется порядка 1000 различных цифровых портретов (ЦП), разделяемых на группы лексических, морфологических, синтаксических, структурных, контентно-специфических, идиосинкразических и стилевых признаков. Среди них по результатам многочисленных исследований на различных естественных языках более высокой информативностью отмечены лингвистические признаки в сравнении с признаками высоких уровней [1].

Продолжая исследование, начатое в [2], мы будем по-прежнему пользоваться новым символьным признаком – ЦП на основе частотности так называемых  $\alpha\beta$ -кодов словоформ.

**Определение.**  $\alpha\beta$ -кодом словоформы  $W = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$  длины  $n$ , состоящей из букв  $\alpha_k \in A, k = 1, \dots, n$ , называется цепочка  $CW = \alpha_{s1}\alpha_{s2} \dots \alpha_{sn}$ , составленная из тех же самых букв, что и в  $W$ , но упорядоченных по алфавиту.

**ПРИМЕР.** Пусть  $W = \text{“реферат”}$ , тогда  $CW = \text{“аеерртф”}$ . Если же  $W = \text{“агент”}$ , то  $CW = \text{“агент”}$ , поскольку в  $W$  буквы уже расположены в алфавитном порядке [3].

Продуктивность использования  $\alpha\beta$ -кодирования выражается в том, что с его помощью множеству  $\{W\}$  словоформ произвольного текста сопоставляется множество  $\alpha\beta$ -кодов.

Конкретный  $\alpha\beta$ -код может быть свойственен либо одной и только одной словоформе, либо сразу нескольким. В первом случае  $\alpha\beta$ -код называется *однозначным (уникальным)*, а во втором – *многозначным*. Совокупность словоформ с единым кодом образует *словоформную анаграмму* [4].

В работе [2] множество  $M^{(\alpha\beta)}$  всех  $\alpha\beta$ -кодов разделялось на два подмножества: одно из них  $M_1^{(\alpha\beta)}$  содержало только однозначные коды, которыми кодировались единственные словоформы, а другое  $M_2^{(\alpha\beta)}$  – только многозначные (каждому коду соответствовало одна словоформа). Текстам со-

---

**Адрес для корреспонденции:** Каюмов Махмадзоир Махмараджабович. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. академиков Раджабовых, 10, Таджикский технический университет. E-mail: ktmakhtadzoir@gmail.com

поставлялись одновременно два цифровых портрета на основе распределения в них частотностей однозначных и многозначных  $\alpha\beta$ -кодов. С помощью  $\gamma$ -классификатора однозначные коды позволили распознать авторство с точностью до 93%, 82.2%, 91.1% соответственно для произведений классической и современной поэзий, а также современной прозы, а многозначные – с точностью до 97.7%, 86.6 %, 97.7%.

В настоящей статье изучается влияние анаграмм различных мощностей на точность определения авторства произведений. Поскольку всякой анаграмме соответствует собственный  $\alpha\beta$ -код, то сказанное эквивалентно тому, что в решении задачи изучается роль по отдельности двухзначных, трехзначных и других кодов, подмножества которых будем обозначать через  $M_2^{(\alpha\beta,2)}$ ,  $M_2^{(\alpha\beta,3)}$  и т.д., причём  $M_2^{(\alpha\beta)} = \bigcup_{k=2}^r M_2^{(\alpha\beta,k)}$  и  $r$  – номер максимального  $r$ -значного кода в тексте.

В дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением подмножеств  $M_2^{(\alpha\beta,2)}$ ,  $M_2^{(\alpha\beta,3)}$ ,  $M_2^{(\alpha\beta,4)}$  и  $M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$  – подмножества, получаемые объединением двух подмножеств. Дело в том, что подмножества  $M_2^{(\alpha\beta,k)}$  с  $k > 4$  содержат значительно меньше элементов, которые, в свою очередь, случайным образом появляются в относительно коротких текстах и едва ли закономерно влияют на распознавание авторства.

**1. Коллекции текстов.** В статье в качестве экспериментального материала, на котором осуществляется исследование, используется заимствованная из [5] модельная коллекция текстов, составленная из произведений классической и современной поэзий, а также современной прозы на таджикском языке.

**2. Процесс обработки коллекции текстов** включает в себя следующие этапы.

**Этап 1.** Предобработка текстов путем удаления из них лишних символов.

**Этап 2.** Создание компьютерной программы для автоматического построения цифровых портретов текстов на основе распределения частотности элементов подмножеств  $M_2^{(\alpha\beta,2)}$ ,  $M_2^{(\alpha\beta,3)}$ ,  $M_2^{(\alpha\beta,4)}$  и  $M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$ .

**Этап 3.** Формирование алфавитов для 4-х подмножеств по отдельности для произведений классической и современной поэзий, а также современной прозы.

**Этап 4.** Создание компьютерной программы и вычисления с её помощью парных расстояний между цифровыми портретами произведений по формуле, предложенной в статьях [6, 7].

**Этап 5.** Нахождение оптимального полуинтервала значений параметра  $\gamma$  и определение коэффициента  $\pi$  эффективности  $\gamma$ -классификатора, предназначенного для распознавания авторов произведений.

**3. Алфавиты однозначных и многозначных -кодов** [8].

Для извлечения из коллекции текстов  $\alpha\beta$ -кодов словоформ и формирования алфавитов на основе 4-х подмножеств  $M_2^{(\alpha\beta,2)}$ ,  $M_2^{(\alpha\beta,3)}$ ,  $M_2^{(\alpha\beta,4)}$  и  $M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$  достаточно ограничиться четырьмя процедурами:

- всю коллекцию рассматривать как единый текст,
- из текста вначале извлечь список словоформ,



- затем каждой словоформе сопоставить её  $\alpha\beta$ -код и, наконец,  
 - составить список различных  $\alpha\beta$ -кодов, разделив их на 5 подмножеств  $M_1^{(\alpha\beta)}$  и  $M_2^{(\alpha\beta,2)}$ ,  $M_2^{(\alpha\beta,3)}$ ,  $M_2^{(\alpha\beta,4)}$ ,  $M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$ .

Отметим, что для каждого текста наборы  $\alpha\beta$ -кодов будут разными, потому что каждый текст имеет, в общем случае, собственный уникальный набор анаграмм и, следовательно, уникальный набор их  $\alpha\beta$ -кодов. В свою очередь, набор кодов (со своими частотами) для каждого текста разделяется на 4 самостоятельных набора, характеризуемых многозначными  $\alpha\beta$ -кодами. Сведения о них сообщаются в таблице 1 сразу для трех коллекций. В 1-й колонке приводятся названия коллекций, во 2-й указываются обнаруженные в них количества словоформ, в 3-й - данные о численности  $M^{(\alpha\beta)}$  всех кодов, в 4-й и 5-й - о численности подмножеств  $M_1^{(\alpha\beta)}$  однозначных и  $M_2^{(\alpha\beta)}$  многозначных  $\alpha\beta$ -кодах, в 6-9 - числовые данные о подмножествах  $M_2^{(\alpha\beta,2)}$ ,  $M_2^{(\alpha\beta,3)}$ ,  $M_2^{(\alpha\beta,4)}$  и  $M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$ .

Таблица 1

Мощности алфавитов 3 коллекций

Коллекции текстов	Число словоформ	$M^{(\alpha\beta)}$	$M_1^{(\alpha\beta)}$	$M_2^{(\alpha\beta)}$	$M_2^{(\alpha\beta)}$			
					$M_2^{(\alpha\beta,2)}$	$M_2^{(\alpha\beta,3)}$	$M_2^{(\alpha\beta,4)}$	$M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$
Классическая поэзия	31530	28600	26335	2265	1872	278	56	2150
Современная поэзия	27033	25105	23605	1500	1271	181	37	1452
Современная проза	53440	48934	45922	3012	2530	376	81	2906

Отметим, что число  $\alpha\beta$ -кодов, в общем случае, меньше числа породивших их словоформ из-за того, что некоторые словоформы, объединяемые в анаграммы, получают одинаковые  $\alpha\beta$ -коды. Кроме того, количество многозначных  $\alpha\beta$ -кодов на порядок меньше числа однозначных  $\alpha\beta$ -кодов по той причине, что наличие в текстах анаграмм в общем случае является редким событием.

#### 4. Цифровые портреты текстов

В работе [1] рассматривались два цифровых портрета (ЦП) произведений, основанных на частотностях элементов только  $M_1^{(\alpha\beta)}$  однозначных и только  $M_2^{(\alpha\beta)}$  многозначных  $\alpha\beta$ -кодов. Поскольку, как показывает табл. 1, большую часть элементов множества  $M_2^{(\alpha\beta)}$  составляют двухзначные  $M_2^{(\alpha\beta,2)}$ , трехзначные  $M_2^{(\alpha\beta,3)}$  и четырехзначные  $M_2^{(\alpha\beta,4)}$  коды, в данной статье внимание сосредоточено на выявление их роли в идентификации авторов произведений.

##### 4.1 Цифровой портрет текстов на основе элементов подмножества $M_2^{(\alpha\beta,2)}$ задается в виде:

$$\begin{aligned} \bar{N} &: 1 \ 2 \ \dots \ m_2 \\ P &: p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{m_2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m_2$  – число различных двухзначных  $\alpha\beta$ -кодов в коллекции текстов; в верхней строке – порядковые номера элементов алфавита двухзначных  $\alpha\beta$ -кодов; в нижней строке – их относительные частоты. В таблице 2

- в первом столбце колонки N приводятся порядковые номера алфавита двухзначных αβ-кодов, во втором столбце первые 7 алфавитных кодов и в конце - последний код;
- в колонке P показаны абсолютные частоты двухзначных αβ-кодов.

Таблица 2

Элементы алфавита и частотность двухзначных αβ-кодов

Коллекция текстов классической поэзии			Коллекция текстов современной поэзии			Коллекции текстов современной прозы		
N		P	N		P	N		P
1	зирӯ	145	1	икох	83	1	иимск	16603
2	диос	4	2	аавнт	174	2	моуш	854
3	но	3370	3	дру	204	3	аадиорҳ	7
4	дрстуу	33	4	аммо	170	4	ииорсҳ	10
5	абдош	507	5	ди	262	5	ин	9307
6	амор	483	6	арс	255	6	алммуъ	307
7	ааблҳ	20	7	акну	77	7	абду	291
...	...	...	...	...	...	...		...
1872	аимрхӯ	2	1271	авдмруу	2	2530	ааавднорррф	3

Из табл. 2 следует, что общее число двухзначных αβ-кодов для коллекции текстов классической поэзии равно  $m_2 = 1872$ , для современной поэзии –  $m_2 = 1271$  и для современной прозы –  $m_2 = 2530$ .

4.2. Цифровой портрет текстов на основе элементов подмножества  $M_2^{(\alpha\beta,3)}$  задается в виде:

де:

$$\begin{aligned} \bar{N} &: 1\ 2\ \dots\ m_3 \\ P &: p_1\ p_2\ \dots\ p_{m_3}, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $m_3$  – число различных трехзначных αβ-кодов в коллекции текстов; в верхней строке – порядковые номера алфавита трехзначных αβ-кодов: в нижней строке – их относительные частоты. В таблице 3

- в первом столбце колонки N приводятся порядковые номера алфавита трехзначных αβ-кодов, во втором столбце первые 7 алфавитных кодов и в конце – последний код;
- в колонке P показаны абсолютные частоты трехзначных αβ-кодов.

Таблица 3

Элементы алфавита и частотность трехзначных αβ-кодов

Коллекция текстов классической поэзии				Коллекция текстов современной поэзии				Коллекции текстов современной прозы			
N		P		N		P		N		P	
1	аикмр	$p_1$	57	1	абр	$p_1$	1555	1	иорҳ	$p_1$	576
2	аикн	$p_2$	57	2	амн	$p_2$	3850	2	агдир	$p_2$	2007
3	адор	$p_3$	90	3	амор	$p_3$	782	3	ааиртф	$p_3$	407
4	абр	$p_4$	2467	4	адмо	$p_4$	442	4	адимнно	$p_4$	359
5	амр	$p_5$	276	5	аазрҳ	$p_5$	36	5	адерс	$p_5$	7
6	аамршҳ	$p_6$	6	6	аавморҳ	$p_6$	5	6	абдеморя	$p_6$	50
7	аргуф	$p_7$	50	7	агдир	$p_7$	665	7	био	$p_7$	184
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
278	инош	$p_m$	4	181	ааабдмнру	$p_m$	4	376	аазимъ	$p_m$	61

Из таблицы 3 следует, что общее число трехзначных  $\alpha\beta$ -кодов в коллекции произведений классической поэзии равно  $m_3=278$ , в коллекции современной поэзии –  $m_3=181$  и в современной прозе –  $m_3=376$ .

**4.4 Цифровой портрет текстов на основе элементов подмножества  $M_2^{(\alpha\beta,4)}$**  задается в виде:

$$\begin{aligned} \bar{N} &: 1\ 2 \dots m_4 \\ P &: p_1\ p_2 \dots p_{m_4}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $m_4$  – число различных четырехзначных  $\alpha\beta$ -кодов в коллекции текстов; в верхней строке – порядковые номера алфавита четырехзначных ( $n_4$ )  $\alpha\beta$ -кодов: в нижней строке – их относительные частоты. В таблице 4

- в первом столбце колонки  $\bar{N}$  приводятся порядковые номера алфавита четырехзначных  $\alpha\beta$ -кодов, во втором столбце первые 7 алфавитных кодов и в конце - последний код;

- в колонке  $P$  показаны абсолютные значения частот четырехзначных  $\alpha\beta$ -кодов.

Таблица 4

Элементы алфавита и частотность четырехзначных  $\alpha\beta$ -кодов

Коллекция текстов классической поэзии			Коллекция текстов современной поэзии			Коллекции текстов современной прозы		
N		P	N		P	N		P
1	аднор	17	1	аирс	389	1	аооррсx	8
2	дор	117	2	абирк	46	2	аадкн	276
3	авотф	6	3	адимр	68	3	абиорт	109
4	аадммно	11	4	авнор	80	4	аднор	65
5	абдир	13	5	аагдинр	39	5	абдру	229
6	аабрх	18	6	инор	27	6	адикр	56
7	аморх	31	7	аимст	60	7	адимр	148
...	...	...	...	...	...	...	...	...
56	ааакмрш	18	37	аиоск	8	81	адух	17

Из таблицы 4 следует, что общее число четырехзначных  $\alpha\beta$ -кодов для коллекции текстов классической поэзии равно  $m_4= 56$ , для современной поэзии –  $m_4=37$  и для современной прозы –  $m_4= 81$ .

**4.4 Цифровой портрет текстов на основе частотности элементов объединения подмножеств  $M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$**  задается в виде:

$$\begin{aligned} \bar{N} &: 1\ 2 \dots m_U \\ P &: p_1\ p_2 \dots p_{m_U}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $m_U = m_2 + m_3$  – суммарное число различных двухзначных и трехзначных  $\alpha\beta$ -кодов; в верхней строке – порядковые номера элементов алфавита объединения подмножеств  $M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$ : в нижней строке – их относительные частоты. В таблице 5

- в первом столбце колонки  $\bar{N}$  приводятся порядковые номера алфавита объединения подмножеств  $M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$ , во втором столбце первые 7 алфавитных кодов и в конце - последний код;

- в колонке  $P$  показаны абсолютные значения элементов алфавита объединения подмножеств  $M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$ .

Таблица 5

Элементы алфавита и частотность их  $\alpha\beta$ -кодов объединения подмножеств  $M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$

Коллекция текстов классической поэзии			Коллекция текстов современной поэзии			Коллекции текстов современной прозы		
N		P	N		P	N		P
1	зиру	145	1	абр	1555	1	иимсқ	16603
2	диос	4	2	икох	83	2	иорх	576
3	но	3370	3	аавнт	174	3	моуш	854
4	дрстуу	33	4	дру	204	4	агдир	2007
5	абдош	507	5	аммо	170	5	аадиорх	7
6	амор	483	6	ди	262	6	ииорсх	10
7	ааблх	20	7	арс	255	7	ин	9307
...	...	...	...	...	...	...	...	...
2150	аимрхӯ	2	1452	авдмруу	2	2906	аавдноррф	3

Из таблицы 5 следует, что общее число  $\alpha\beta$ -кодов объединения подмножеств  $M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$  для коллекции текстов классической поэзии равно  $m_1 = 2150$ , для современной поэзии –  $m_1 = 1452$  и для современной прозы –  $m_1 = 2530$ .

**5. Расстояния  $\rho(T_1, T_2)$  между парами текстов  $T_1$  и  $T_2$  по отдельности в каждой из трех коллекций вычислялись по однотипной формуле**

$$\rho(T_1, T_2) = \sqrt{\frac{m}{2}} \max_s \left| \sum_{k=1}^s (p_k^{(1)} - p_k^{(2)}) \right|, \tag{5}$$

в которой, однако, учитывалась специфика коллекции в выборе значений суммарного числа  $m$  и относительных частот  $p_k^{(1)}$   $p_k^{(1)}$  и  $p_k^{(2)}$  ( $k = 1, \dots, s$  и  $s = 1, \dots, s$ ) встречаемости  $\alpha\beta$ -кодов в цифровых портретах (1)-(4), см. [4].

В таблицах 6-9 только для произведений классической поэзии показаны результаты вычислений парных расстояний на основе 4-х цифровых портретов, для произведений современной поэзии и современной прозы соответствующие данные не приводятся.

Таблица 6

Расстояния между ЦП произведений классической поэзии на основе распределения частотности двухзначных  $\alpha\beta$ -кодов

		А.Рудаки		А.Фирдавси		Дж.Руми		С.Шерози		Х.Шерози	
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	Ф <sub>1</sub>	Ф <sub>2</sub>	Д <sub>1</sub>	Д <sub>2</sub>	Ш <sub>1</sub>	Ш <sub>2</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
А.Рудаки	P <sub>1</sub>										
	P <sub>2</sub>	8.455									
А.Фирдавси	Ф <sub>1</sub>	8.07	4.87								
	Ф <sub>2</sub>	8.86	4.63	1.541							
Дж.Руми	Д <sub>1</sub>	8.99	6.05	4.72	4.013						
	Д <sub>2</sub>	9.03	6.15	4.87	4.28	0.82					
С.Шерози	Ш <sub>1</sub>	8.17	5.63	4.27	3.64	1.162	1.43				
	Ш <sub>2</sub>	8.38	5.5	4.15	3.47	1.9	2.09	0.81			
Х.Шерози	X <sub>1</sub>	8.91	5.94	4.43	3.57	1.46	1.53	1.119	1.539		
	X <sub>2</sub>	9.30	6.55	5.06	4.27	1.97	2.23	1.58	1.4	0.75	

Таблица 7

Расстояния между ЦП произведений классической поэзии  
на основе распределения частотности трехзначных  $\alpha\beta$ -кодов

		А.Рудаки		А.Фирдавси		Дж.Руми		С.Шерози		Х.Шерози	
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	Ф <sub>1</sub>	Ф <sub>2</sub>	Д <sub>1</sub>	Д <sub>2</sub>	Ш <sub>1</sub>	Ш <sub>2</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
А.Рудаки	P <sub>1</sub>										
	P <sub>2</sub>	9.28									
А.Фирдавси	Ф <sub>1</sub>	7.2	4.56								
	Ф <sub>2</sub>	7.153	4.413	1.27							
Дж.Руми	Д <sub>1</sub>	7.39	4.7	3.256	2.616						
	Д <sub>2</sub>	7.31	4.59	3.038	2.44	0.42					
С.Шерози	Ш <sub>1</sub>	9.385	4.919	3.524	2.58	0.796	1.005				
	Ш <sub>2</sub>	9.389	4.825	3.26	2.7	0.816	1.033	0.615			
Х.Шерози	X <sub>1</sub>	9.65	6.04	4.9	4.21	2.76	2.652	2.23	2.222		
	X <sub>2</sub>	9.88	6.46	4.94	4.42	3.077	2.953	2.54	2.523	0.516	

Таблица 8

Расстояния между ЦП произведений классической поэзии  
на основе распределения частотности четырехзначных  $\alpha\beta$ -кодов

		А.Рудаки		А.Фирдавси		Дж.Руми		С.Шерози		Х.Шерози	
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	Ф <sub>1</sub>	Ф <sub>2</sub>	Д <sub>1</sub>	Д <sub>2</sub>	Ш <sub>1</sub>	Ш <sub>2</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
А.Рудаки	P <sub>1</sub>										
	P <sub>2</sub>	3.958									
А.Фирдавси	Ф <sub>1</sub>	4.309	1.775								
	Ф <sub>2</sub>	4.527	1.777	0.611							
Дж.Руми	Д <sub>1</sub>	4.183	1.206	0.708	0.717						
	Д <sub>2</sub>	4.503	1.614	0.998	0.827	0.506					
С.Шерози	Ш <sub>1</sub>	4.659	2.79	1.429	1.653	1.787	1.459				
	Ш <sub>2</sub>	4.356	2.424	1.063	1.287	1.348	1.021	0.575			
Х.Шерози	X <sub>1</sub>	4.249	1.854	1.049	0.717	0.745	0.418	1.06	0.62		
	X <sub>2</sub>	4.267	2.145	1.174	1.009	1.091	0.764	0.714	0.494	0.346	

Таблица 9

Расстояния между ЦП произведений классической поэзии  
на основе распределения частотности одновременно двухзначных и трехзначных  $\alpha\beta$ -кодов

		А.Рудаки		А.Фирдавси		Дж.Руми		С.Шерози		Х.Шерози	
		P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	Ф <sub>1</sub>	Ф <sub>2</sub>	Д <sub>1</sub>	Д <sub>2</sub>	Ш <sub>1</sub>	Ш <sub>2</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
А.Рудаки	P <sub>1</sub>										
	P <sub>2</sub>	10.89									
А.Фирдавси	Ф <sub>1</sub>	9.91	5.047								
	Ф <sub>2</sub>	10.63	5.47	1.748							
Дж.Руми	Д <sub>1</sub>	11.203	7.133	5.446	4.58						
	Д <sub>2</sub>	11.233	7.216	5.548	4.815	0.883					
С.Шерози	Ш <sub>1</sub>	10.37	6.7	5.006	4.09	1.266	1.48				
	Ш <sub>2</sub>	10.66	6.529	4.79	3.944	2.073	2.286	0.858			
Х.Шерози	X <sub>1</sub>	11.43	7.48	5.68	4.648	1.659	1.894	1.387	1.423		
	X <sub>2</sub>	11.9	8.192	6.32	5.394	2.305	2.592	1.842	1.966	0.831	

**6. Настройка  $\gamma$ -классификатора** осуществлялась на основе применения Ш-гипотезы: *произведения одного автора - "однородные", а разных авторов - "неоднородные"*, [4].

Математической интерпретацией (моделью) этой гипотезы является

**Определение.** Тексты  $T_1$  и  $T_2$  называются -однородными, если

$$\rho(T_1, T_2) \leq \gamma, \tag{6}$$

и -неоднородными, если

$$\rho(T_1, T_2) > \gamma. \tag{7}$$

Качество кластеризатора при фиксированном  $\gamma$  оценивается величиной  $\pi$ , вычисляемой по формуле

$$\pi = 1 - \tau / L, \tag{8}$$

Здесь  $\tau = \tau(\gamma)$  – число нарушений неравенств (6), (7) и для всех 3-х коллекций текстов  $L = 45$  – суммарное число расстояний между 10 произведениями, входящими в состав каждой коллекции.

Поскольку величина  $\pi$  зависит от параметра  $\gamma$ , то настройка  $\gamma$ -классификатора состоит в том, чтобы с помощью алгоритма, описанного в [6,7], определить такое значение  $\gamma$ , при котором достигается минимальное значение величины  $\tau = \tau(\gamma)$  по отдельности на текстах трех модельных коллекций.

После соответствующих вычислений итоговые результаты для трех коллекций показаны в таблице 10.

Таблица 10

Распознавание авторства текстов с помощью  $\gamma$ -классификатора на основе цифровых портретов

Для коллекции произведений классической поэзии				
Основа цифрового портрета	Число аβ-кодов	Оптимальный полуинтервал $\gamma$	$\tau$	$\pi$
$M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$	2150	[0.883:1.266)	2	0.955
$M_2^{(\alpha\beta,2)}$	1872	[0.82:1.119)	2	0.955
$M_2^{(\alpha\beta,3)}$	278	[0.615:0.796)	2	0.955
$M_2^{(\alpha\beta,4)}$	56	[0.611:0.62)	3	0.933
Для коллекции произведений современной поэзии				
Основа цифрового портрета	Число аβ-кодов	Оптимальный Полуинтервал $\gamma$	$\tau$	$\pi$
$M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$	1452	[1.08:1.332)	2	0.955
$M_2^{(\alpha\beta,2)}$	1271	[1.66:2.026)	2	0.955
$M_2^{(\alpha\beta,3)}$	181	[0.323:0.419)	4	0.91
$M_2^{(\alpha\beta,4)}$	37	[0.192:0.356)	3	0.93
Для коллекции произведений современной прозы				
Основа цифрового портрета	Число аβ-кодов	Оптимальный Полуинтервал $\gamma$	$\tau$	$\pi$
$M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$	2906	[1.711:1.891)	1	0.977
$M_2^{(\alpha\beta,2)}$	2530	[1.578:1.76)	1	0.977
$M_2^{(\alpha\beta,3)}$	376	[1.157:1.178)	2	0.955
$M_2^{(\alpha\beta,4)}$	81	[0.35:0.49)	3	0.93

Таблица 10 – итоговая. В ней в 1-й колонке располагаются подмножества  $n$  –значных кодов ( $n = 2, 3, 4 \dots$ ) В соответствующих строчках 2-ой колонки указывается число элементов соответствующих подмножеств. В 3-й колонке выписаны оптимальные значения параметра  $\gamma$ . Как оказалось,  $\gamma^{opt}$  – это

полуинтервал, а не число. В связи с чем правило принятия решения об определении однородности текстов  $T_1$  и  $T_2$  выглядит следующим образом: если  $\rho(T_1, T_2)$  строго меньше правого крайнего значения  $\gamma^{\text{опт}}$ , то  $T_1$  и  $T_2$  однородны, если же  $\rho(T_1, T_2)$  строго больше правого крайнего значения  $\gamma^{\text{опт}}$ , то тексты не однородны. Это правило, применённое ко всем парам расстояний таблиц 2 – 9, приводит к следующим результатам, см. верхнюю часть таблицы 10: для первых трёх цифровых портретов число нарушений неравенств (6), (7) равно 2 ( $\tau = 2$ ), Следовательно, точность идентификации  $\pi$  вследствие формулы (8) равна 0.955. Для 4-х значных кодов  $\tau = 3$  и потому  $\pi = 0.933$ , см. колонки 4 и 5.

Для двух других коллекций произведений (современной поэзии и современной прозы) итоговые результаты показаны в середине и нижней части таблицы 10.

Что касается наивысших показателей эффективности математической модели идентификации авторов, то они достигнуты на произведениях современной прозы,  $\pi = 0.977$ . Если же оценивать полученные результаты в общем, то можно сделать вывод о возможности практического применения ЦП на основе  $\alpha\beta$ -кодов словоформ с привлечением  $\gamma$ -классификатора.

*Поступило 28.12.2020 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Романов А.С., Шелупанов А.А., Мещеряков Р.В. Методология и моделирование систем для идентификации автора текста. – Томск: В-Спектр, 2011, 190 с.
2. Каюмов М.М. О распознавании автора текста на основе частотности  $\alpha\beta$ -кодов словоформ. – Политехнический вестник. Серия Интеллект. Инновации. Инвестиции, 2020, №2 (51), с 29-36.
3. Усманов З.Д. Об упорядоченном алфавитном кодировании слов естественных языков. – ДАН РТ, 2012, т.55, № 7, с. 545-548.
4. Усманов З.Д. Автоматический поиск и статистические закономерности множества анаграмм. – Душанбе: Дониш, 2020, 78 с.
5. Косимов А.А., Бахтеев К.С. Применение специфичного цифрового портрета для идентификации авторов произведений. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. н., 2019, № 3 (176), с.7-11.
6. Усманов З.Д. Классификатор дискретных случайных величин. – ДАН РТ, 2017, т.60, № 7-8, с. 291-300.
7. Усманов З.Д. Алгоритм настройки кластеризатора дискретных случайных величин. – ДАН РТ, 2017, т.60, № 9, с. 392-397.
8. Усманов З.Д. Оценка эффективности применения  $\gamma$ -классификатора для атрибуции печатного текста. – ДАН РТ, 2020, т.63, № 3-4, с.172-179.

М.М.Каюмов

## ДАР БОРАИ МУАЙЯН СОХТАНИ МУАЛЛИФИ МАТН ДАР АСОСИ БАСОМАДИ $\alpha\beta$ -РАМЗҲОИ БИЁСРТАРКИБАИ КАЛИМАСОЗӢ

*Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ*

Дар мақола мушкилоти шинохтани муаллифони асарҳо барои назми классикӣ ва муосир ва инчунин насри муосир ҳал карда шудааст. Корҳо бо портрети рақамӣ муқоиса карда мешаванд, ки бо паҳншавии басомади  $\alpha\beta$ -рамзҳои биёсртаркибаи калимасозӣ дар онҳо гуногун тавсиф карда мешаванд. Самаранокии истифодаи классификатор ва портретҳои рақамии матнҳо дар асоси рамзҳои  $\alpha\beta$ -барои муайян кардани муаллифони асарҳо тасдиқ карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** матн, портрети рақамӣ,  $\alpha\beta$ -рамзҳо, таснифгар.

M.M.Kayumov

## ABOUT RECOGNITION OF THE AUTHOR OF THE TEXT BASED ON THE FREQUENCY OF MULTI-SIGNED $\alpha\beta$ -CODES OF WORD FORMS

*M.S.Osimi Tajik Technical University*

The article solves the problem of recognizing the authors of works for classical and modern poetry, as well as modern prose. The works are compared with a digital portrait, characterized by the distribution of the frequency of multivalued  $\alpha\beta$  -codes in them. The effectiveness of the use of the -classifier and digital portraits of texts based on  $\alpha\beta$  -codes for the identification of authors of works is confirmed.

**Key words:** text, digital portrait,  $\alpha\beta$ -codes, classifier.



УДК 523. 532

Член-корреспондент НАН Таджикистан Г.И.Кохирова,  
академик НАН Таджикистана П.Б.Бабаджанов,  
У.Х.Хамроев, А.И.Джонмухаммади, И.В.Кулаев

## АСТЕРОИДНО-МЕТЕОРОИДНЫЙ КОМПЛЕКС ВИРГИНИД. АСТЕРОИДЫ, СВЯЗАННЫЕ С МЕТЕОРОИДНЫМ РОЕМ МЮ-ВИРГИНИДЫ

*Институт астрофизики НАН Таджикистана*

*Представляемые результаты завершают исследование по выявлению новых астероидов, сближающихся с Землей, принадлежащих астероидно-метеороидному комплексу Виргинид. По данным вычисления эволюции орбит ряда АСЗ и определения теоретических параметров их родственных потоков, выполнен поиск наблюдаемых активных потоков, схожих с теоретически предсказанными во всех опубликованных базах данных. Оказалось, что предсказанные метеорные потоки, родственные с 4 АСЗ, были отождествлены с активными потоками, порождаемыми метеороидным роем Мю-Виргиниды. Установленная родственная связь свидетельствует о кометной природе рассмотренных объектов, которые движутся в рое Виргинид и с высокой вероятностью являются угасшими фрагментами родительской кометы роя. На основе представленной серии работ сделан обобщающий вывод: астероидно-метеороидный комплекс Виргинид состоит из ряда роев и суброев, порождающих метеорные потоки, и 31 объект кометной природы, представляющих собой угасшие фрагменты большей кометы-прародительницы комплекса.*

**Ключевые слова:** комета, астероид, угасшая комета, метеороидный рой, метеорный поток, орбита, радиант.

В предыдущих трех работах представлены результаты, подтверждающие родственную связь 15 астероидов, сближающихся с Землей (АСЗ), с метеороидным роем  $\alpha$ -Виргиниды, связь 7 АСЗ с роем  $\eta$ -Виргиниды и 5 АСЗ с роем  $\nu$ -Виргиниды [1-3]. Эти рои порождают активные метеорные потоки, наблюдаемые на Земле. Сделано заключение о кометном происхождении этих астероидов, ныне представляющих собой угасшие крупные фрагменты родительской кометы. Метод исследования приведен в [1]. Данная статья является завершающей в серии работ, посвященных изучению Виргинид, и представляющей результаты исследования астероидно-метеороидного комплекса  $\mu$ -Виргиниды.

### **Астероиды, сближающиеся с Землей, кандидаты в угасшие кометы.**

В базе данных [4] нами выявлены АСЗ, пересекающие орбиту Земли и движущиеся по кометоподобным орбитам и, возможно, представляющих собой ядра угасших комет. Основные параметры АСЗ приведены в табл.1, где даны номер АСЗ, элементы орбиты в равноденствии 2000.0:  $a$  – большая полуось,  $e$  – эксцентриситет,  $q$  – перигелийное расстояние,  $i$  – наклонение,  $\Omega$  – долгота восходящего

---

*Адрес для корреспонденции:* Кохирова Гулчехра Исроиловна. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бухоро, 22, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: Kokhirova2004@mail.ru

узла,  $\omega$  – аргумент перигелия,  $\pi$  – долгота перигелия,  $H$  – абсолютная звездная величина,  $d$  – эквивалентный диаметр астероида,  $R_a$ ,  $R_d$  – гелиоцентрические расстояния восходящего и нисходящего узлов орбиты в настоящее время,  $N_i$  – число пересечений орбиты астероида с орбитой Земли за один цикл изменения аргумента перигелия и, следовательно, оно соответствует теоретически предсказываемому количеству метеорных потоков, связанных с данным астероидом [5]. Диаметр, помеченный в табл.1 звездочкой, дан в базе данных. Остальные вычислены нами по общепринятой эмпирической формуле, связывающей диаметр с абсолютным блеском и альбедо астероида [6]. При этом для альбедо использовано среднее значение 0.07, принятое для темных астероидов (или кометных ядер) [7].

Таблица 1

Основные параметры АСЗ, связанных с метеороидным роем  $\mu$ -Виргиниды

Астероид	a, а.е.	e	q, а.е.	$i^\circ$	$\Omega^\circ$	$\omega^\circ$	$\pi^\circ$	H	d, km	Ni	Tj
2010XD11	2.210	0.854	0.322	16.4	118.0	196.1	314.2	18.1	1.21	4	3.01
2010GO33	2.409	0.699	0.724	19.1	143.6	153.6	297.2	19.2	0.31*	4	3.08
2011VG9	2.275	0.776	0.509	1.3	236.1	65.9	302.0	22.2	0.18	4	3.11
2003WW26	2.388	0.798	0.482	6.3	57.7	254.6	312.3	22.2	0.20	4	2.99

### Исследование эволюции орбит астероидов и вычисление теоретических потоков

Эволюция орбит АСЗ вычислена по методу Эверхарта RADAU19 [8,9] на интервале времени, охватывающем один цикл изменения аргумента перигелия. Численное интегрирование уравнений движения выполнено с учетом гравитационных возмущений от больших планет. В результате выявлено, что в течение одного цикла изменения  $\pi$  все астероиды пересекают орбиту Земли четыре раза, то есть величины  $R_a$  и  $R_d$  орбит АСЗ четыре раза принимают значения, равные 1 а.е. – по два на каждый из узлов. Изменения  $R_a$  и  $R_d$  орбит двух астероидов в зависимости от времени и аргумента перигелия приведены на рис.1, 2, где положения пересечений с орбитой Земли указаны стрелками. Такие графики являются типичными для всех рассмотренных АСЗ, поэтому здесь мы приводим зависимости только для двух из них. Напомним, что согласно концепции образования и эволюции метеороидных роев [5], количество пересечений соответствует числу метеорных потоков, которые, возможно, связаны с этим астероидом. Значения аргументов перигелия орбит АСЗ в положениях пересечений с орбитой Земли приведены в табл.2, где теоретические потоки даны в следующем порядке: Северная ветвь ночного потока, Южная ветвь ночного потока, Северная ветвь дневного потока, Южная ветвь дневного потока.

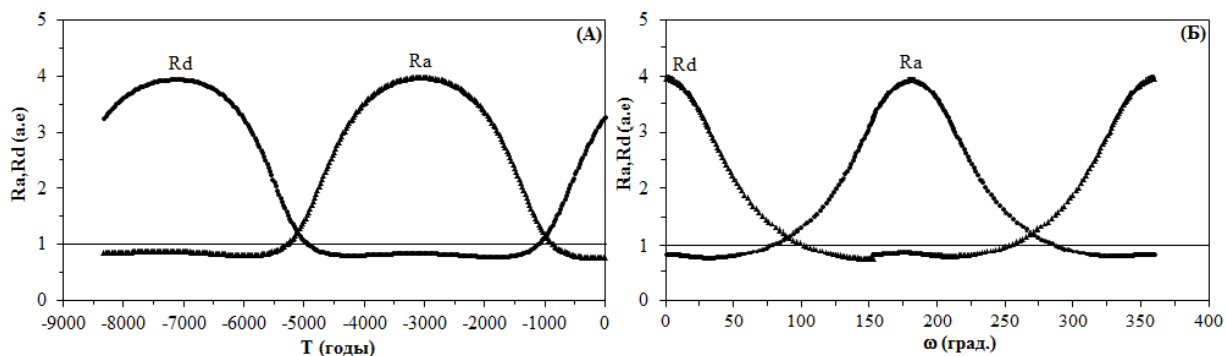


Рис.1. Зависимость  $R_a$  и  $R_d$  орбиты астероида 2010GO33 от времени (А) и аргумента перигелия (Б).

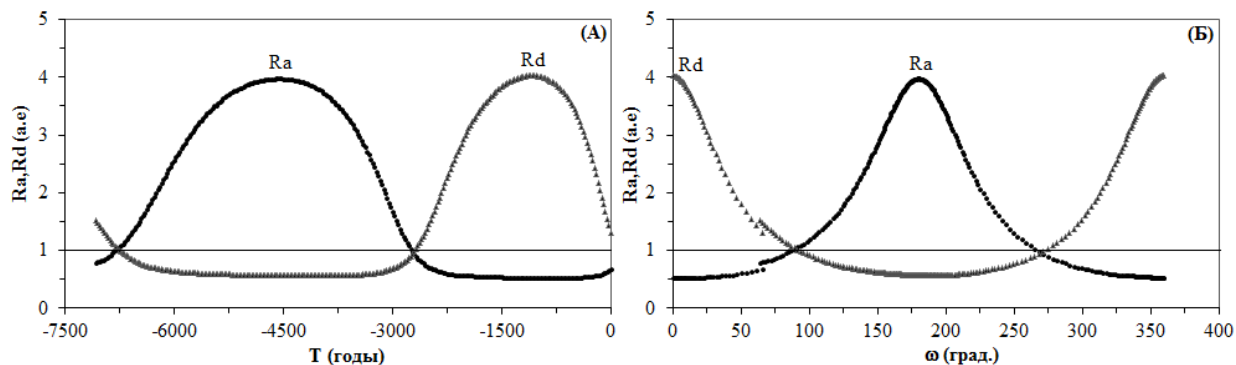


Рис.2. Зависимость  $R_a$  и  $R_d$  орбиты астероида 2011VG9 от времени (А) и аргумента перигелия (Б).

Таблица 2

Значения аргумента перигелия АСЗ, связанных с роём  $\mu$ -Виргиниды (00047 DLI), в положениях пересечений с орбитой Земли

Потоки	Северный Ночной	Южный Ночной	Северный Дневной	Южный Дневной
2010XD11	294.41	117.75	62.67	245.51
2010GO33	251.80	76.16	103.00	287.96
2003WW26	279.73	94.65	85.34	260.35
2011VG9	273.07	87.21	267.16	92.47
Среднее значение	$275.30 \pm 17.67$	$96.17 \pm 17.02$	$83.66 \pm 16.51$	$264.59 \pm 17.60$

Наборы элементов орбит, соответствующих найденным из вычисления эволюции пересечениям с орбитой Земли, служат исходными данными для вычисления координат теоретических геоцентрических радиантов (прямое восхождение  $\alpha_g$  и склонение  $\delta_g$ ), геоцентрических скоростей  $V_g$ , долгот Солнца  $L_\odot$  и соответствующих им дат активности теоретических потоков.

**Результаты**

Автоматизированный поиск теоретически предсказанных радиантов и скоростей проводился нами в опубликованных каталогах наблюдаемых потоков. При этом поиске было допущено, что положения теоретического и наблюдаемого радиантов близки, если их разность удовлетворяет условиям  $\Delta\alpha \leq 10^\circ$  и  $\Delta\delta \leq \pm 10^\circ$ , разность величин теоретической и наблюдаемой скорости  $\Delta V_g \leq \pm 5$  км/с и различие дат активности  $\Delta t \leq \pm 15$  дней. Схожесть теоретической и наблюдаемой орбит контролировалась с помощью  $D_{SH}$  – критерия Саутворта-Хокинса [10], являющегося мерой близости двух орбит. При соблюдении условия  $D_{SH} \leq 0.2$ , принято считать орбиты схожими.

В результате поиска показано, что метеороидный рой, порождающий метеорные потоки η-Виргиниды (00047 DLI) [11] связан с 4 АСЗ (табл.1), двигающихся по кометоподобным орбитам. Теоретические потоки, родственные с этими астероидами, отождествлены с ночными потоками Северные и Южные μ-Виргиниды. Об этом свидетельствует схожесть теоретических и наблюдаемых орбит, подтвержденная величинами  $D_{SH}$  критерия, а также близость положений радиантов, скоростей и дат активности потоков. В табл. 3 и 4 приведены результаты отождествления теоретических потоков с активными потоками для АСЗ 2010XD11 и 2010GO33. Обозначения использованных каталогов аналогичны тем, что приведены в [1-3], дополнительный каталог обозначен как С [12]. Для остальных астероидов результаты являются аналогичными, и поэтому мы их не приводим. Более того, найдено, что орбита АСЗ 2011VG9 в настоящее время соответствует южной ветви ночного потока, орбита 2003WW26 – южной ветви дневного потока. Следовательно, в случае возможных столкновений этих астероидов с Землей, к примеру, для 2003WW26, координаты точки вторжения в земную атмосферу будут:  $\alpha_g=228.8^\circ$  и  $\delta_g=-25.2^\circ$ , геоцентрическая скорость  $V_g=25.7$  км/с и дата 20 ноября. Теоретические дневные потоки не отождествились с наблюдаемыми потоками, поскольку в использованной нами базе данных наблюдений потоков с такими параметрами пока не имеется. Тем не менее, отождествление теоретических ночных потоков позволяет говорить о родственной связи астероидов с роем и этими потоками. Такая ассоциация вместе с кометоподобными орбитами астероидов свидетельствуют о кометной природе объектов, следовательно, можно предположить, что они являются угасшими фрагментами родительской кометы метеороидного роя μ-Виргиниды.

Таблица 3

Метеорные потоки, связанные с АСЗ 2010XD11 (J2000.0)

Метеорные потоки	$q_{(AU)}$	$e$	$i^\circ$	$\Omega^\circ$	$\omega^\circ$	$L^\circ_\odot$	Дата	$\alpha^\circ$	$\delta^\circ$	$V_g$	$D_{S-H}$	Тип	Каталог
<b>СНП</b>	<b>0.356</b>	<b>0.839</b>	<b>5.3</b>	<b>19.8</b>	<b>294.4</b>	<b>19.8</b>	<b>09 апр</b>	<b>210.6</b>	<b>-7.8</b>	<b>29.3</b>	-	<b>N</b>	-
00047 DLI (N)	0.418	0.835	9.1	38.3	286.5	38.3	28 апр	226.8	-8.7	28.3	0.18	N	G
00047 DLI (N)	0.334	0.868	7.2	30.2	295.9	30.2	20 апр	221.5	-10.4	30.7	0.19	N	J1
00047 DLI (N)	0.349	0.849	7.7	30.5	294.9	30.5	20 апр	221.8	-9.5	29.7	0.17	N	EDM1
00047 DLI (N)	0.530	0.830	10.0	35.0	280.0	35.0	25 апр	221.0	-5.0	29.0	0.20	N	C
N. Virids	0.278	0.785	4.8	11.9	310.3	11.9	01 апр	210.4	-8.5	27.4	0.15	N	S3
00047 DLI (N)	0.357	0.885	2.2	20.5	291.7	20.5	10 апр	209.0	-10.0	30.8	0.08	N	T1
220495a	0.499	0.790	4.1	31.7	277.5	31.7	21 апр	215.0	-8.9	25.1	0.17	N	EN
680330	0.270	0.900	9.5	9.0	302.4	9.0	29 мар	206.0	-3.9	33.4	0.14	N	PN
<b>ЮНП</b>	<b>0.325</b>	<b>0.853</b>	<b>5.5</b>	<b>196.4</b>	<b>117.8</b>	<b>16.4</b>	<b>06 апр</b>	<b>205.8</b>	<b>-15.1</b>	<b>30.3</b>	-	<b>N</b>	-
00651 OAV	0.373	0.842	4.7	197.4	109.8	17.4	07 апр	202.0	-13.5	28.9	0.11	N	J1
S. Virids	0.312	0.828	0.0	183.7	121.8	3.7	24 мар	197.4	-7.4	29.2	0.16	N	S2
86-Virids	0.264	0.864	3.5	194.5	126.0	14.5	04 апр	208.0	-14.0	31.5	0.12	N	T1
830404 CN	0.373	0.715	1.2	193.5	120.3	13.5	04 апр	205.4	-11.8	24.2	0.16	N	MORP
850329 CN	0.256	0.949	5.8	188.0	122.1	8.0	29 мар	299.5	-11.9	35.8	0.13	N	MORP
680411	0.375	0.850	4.9	201.0	109.4	21.0	11 апр	205.0	-15.7	28.9	0.08	N	PN
<b>СДП</b>	<b>0.329</b>	<b>0.851</b>	<b>5.2</b>	<b>251.5</b>	<b>62.7</b>	<b>251.5</b>	<b>03 дек</b>	<b>237.4</b>	<b>-15.9</b>	<b>30.1</b>	-	<b>D</b>	-
Объекты не обнаружены													
<b>ЮДП</b>	<b>0.356</b>	<b>0.839</b>	<b>5.3</b>	<b>68.7</b>	<b>245.5</b>	<b>248.7</b>	<b>01 дек</b>	<b>233.8</b>	<b>-23.9</b>	<b>29.2</b>	-	<b>D</b>	-
2003WW26	0.482	0.798	6.3	57.7	254.6	237.7	20 ноя	228.8	-25.2	25.7	0.14	D	-

Таблица 3

Метеорные потоки, связанные с АС3 2010GO33 (J2000.0)

Метеорные потоки	$q_{(AU)}$	$e$	$i^\circ$	$\Omega^\circ$	$\omega^\circ$	$L^\circ$	Дата	$\alpha^\circ$	$\delta^\circ$	$V_g$	$D_{S-H}$	Тип	Каталог
<b>СНП</b>	<b>0.713</b>	<b>0.703</b>	<b>10.5</b>	<b>45.4</b>	<b>251.8</b>	<b>45.4</b>	<b>6 май</b>	<b>220.8</b>	<b>2.6</b>	<b>19.6</b>	-	<b>N</b>	
00047 DLI (N)	0.696	0.748	3.3	43.2	253.7	43.2	3 май	214.0	-8.0	20.1	0.13	N	T1
454 MPV	0.650	0.744	10.4	41.6	259.7	41.6	2 май	220.2	0.3	21.7	0.09	N	EDM2
770501 CN	0.660	0.563	11.9	40.5	267.4	40.5	1 май	224.7	4.0	18.0	0.19	N	MORP
730503	0.636	0.630	9.6	42.0	267.5	42.0	2 май	224.0	-1.4	19.4	0.17	N	PN
<b>ЮНП</b>	<b>0.680</b>	<b>0.717</b>	<b>10.6</b>	<b>221.0</b>	<b>76.2</b>	<b>41.0</b>	<b>1 май</b>	<b>207.1</b>	<b>-28.8</b>	<b>20.6</b>	-	<b>N</b>	
00047 DLI (S)	0.720	0.696	2.0	223.1	72.3	43.1	3 май	210.0	-16.0	18.6	0.16	N	T1
690512	0.800	0.680	6.0	231.0	63.5	51.0	11 май	210.0	-25.0	17.1	0.15	N	PN
2011VG9	0.508	0.776	1.3	236.1	65.8	-	-	-	-	-	0.25	D	-
<b>СДП</b>	<b>0.675</b>	<b>0.719</b>	<b>10.6</b>	<b>194.2</b>	<b>103.0</b>	<b>194.2</b>	<b>7 окт</b>	<b>204.0</b>	<b>7.8</b>	<b>20.8</b>	-	<b>D</b>	
Объекты не обнаружены													
<b>ЮДП</b>	<b>0.716</b>	<b>0.703</b>	<b>10.5</b>	<b>9.3</b>	<b>288.0</b>	<b>189.3</b>	<b>3 окт</b>	<b>188.5</b>	<b>-22.9</b>	<b>19.6</b>	-	<b>D</b>	
Объекты не обнаружены													

### З а к л ю ч е н и е

Итак, обобщим результаты, представленные в предыдущих и настоящей статьях. Нами выявлено существование активных метеорных потоков, порождаемых метеороидными роями  $\alpha$ -Виргиниды,  $\eta$ -Виргиниды,  $\nu$ -Виргиниды и  $\mu$ -Виргиниды и их родственная связь с 4 группами астероидов. Перечисленные рои и порождаемые ими метеорные потоки и субпотоки относятся к комплексу Виргинид. Установленная связь является очень сильным аргументом в пользу кометного происхождения 31 АСЗ, двигающихся по кометоподобным орбитам. В этом случае и с учетом того, что каждая группа содержит несколько астероидов можно предложить несколько сценариев их образования.

1. Самый крупный объект группы является угасшей JFC родительской кометой роя, а остальные объекты являются ее фрагментами также потухшими.

2. Все объекты каждой группы образовались в результате распада большей кометы-родительницы соответствующего роя.

3. В результате распада единой гигантской кометы-прародительницы комплекса Виргинид образовались более мелкие кометы, которые в процессе эволюции под действием гравитационных и негравитационных возмущений сформировали суброй комплекса Виргинид. Ныне эти неактивные кометы составляют рассмотренные нами 4 группы.

Однако каким бы не был механизм образования, отсюда следует однозначный вывод, а именно, четыре выявленных нами новых семейства являются неотъемлемой частью комплекса Виргинид. Каждое из них состоит из метеороидного роя, порождающего активные потоки, и содержит от 4 (суброй  $\mu$ -Виргиниды) до 15 ( $\alpha$ -Виргиниды) крупных угасших фрагментов родительских комет (или кометы). Проведенное исследование вновь подтвердило, что метеороидные рои состоят не только из мелких мм-размеров, но и крупных тел декаметровых и более размеров, представляющих потенциальную опасность, как для Земли, так и для космической технологии. Наши результаты позволяют

получить прогноз характеристик вторжения таких объектов в атмосферу Земли, что необходимо для разработки превентивных мер.

В будущем необходимо продолжить поиск возможно существующих других крупных остатков ядер родительских комет. Они также являются угасшими в настоящий момент, но могут быть обнаружены среди как известных АСЗ, так и вновь открываемых.

Представленные результаты показывают, что использованный метод идентификации угасших комет среди околоземных астероидов является эффективным и дает надежные результаты. Для большей уверенности необходимо больше наблюдательных данных потоков комплекса Виргинид для получения более точных физических и динамических характеристик метеороидов роев и суброев этого комплекса, который связан с 31 объектом кометной природы.

*Поступило 10.02.2020 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кохирова Г.И., Бабаджанов П.Б., Хамроев У.Х., Джонмухаммади А.И., Кулаев И.В. Астероидно-метеороидный комплекс Виргинид. Астероиды, связанные с роем Альфа-Виргиниды. – ДАН РТ, 2020, т.63, №3-4, с.1187-198.
2. Кохирова Г.И., Бабаджанов П.Б., Хамроев У.Х., Джонмухаммади А.И., Кулаев И.В. Астероидно-метеороидный комплекс Виргинид. Астероиды, связанные с роем Эта-Виргиниды. – ДАН РТ, 2020, т.63, №9-10, с.591-597.
3. Кохирова Г.И., Бабаджанов П.Б., Хамроев У.Х., Джонмухаммади А.И., Кулаев И.В. Астероидно-метеороидный комплекс Виргинид. Астероиды, связанные с роем Нью-Виргиниды. – ДАН РТ, 2020, т.63, №11-12, 708-714.
4. NEOP 2019, <http://www.neo.jpl.nasa.gov>, 2019
5. Babadzhanov P.B., Obrubov Yu.V. Evolution of short-period meteoroid streams, *Cel. Mech. and Dyn. Astron.*, 1992, v. 54, pp. 111-127.
6. Harris A.W. On the Slow Rotation of Asteroids. – *Icarus*, 2002, v. 156 (1), pp. 184-190.
7. Jewitt, D.C. Cometary photometry. In: *Comets in the Post-Halley Era*, Eds. R.L. Newburn et al., Dordrecht: Kluwer, 1992, v.1, pp. 19-65.
8. Everhart E. Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits. *Celestial Mechanics*, 1974, v. 10, pp. 35-55.
9. Бабаджанов П.Б., Кохирова Г.И. Метеорные потоки, астероидов, пересекающих орбиту Земли, Душанбе, Дониш, 2009, 185 с.
10. Southworth R.B., Hawkins G.S. Statistics of meteor streams, *Smith. Contrib. Astrophys.*, 1963, v. 7, pp. 261-285.
11. <https://www.ta3.sk/IAUC22DB/MDC2007/>, 2019.
12. Cook A.F. A working list of meteor streams, In: *Evolutionary and Physical Properties of Meteoroids*, Eds. C.L.Hemenway, P.M.Millman, A.F.Cook, NASA, SP-319, Washington, DC, 1973, pp. 183-191.

Г.И.Кохирова, П.Б.Бобочонов, У.Х.Хамроев, А.И.Чонмухаммади, И.В.Кулаев  
**КОМПЛЕКСИ АСТЕРОИДЌИ-МЕТЕОРОИДИИ ВИРГИНИД.  
 АСТЕРОИДҲОИ БО ТУДАИ МЕТЕОРОИДИИ МЮ-ВИРГИНИДҲО  
 АЛОҚАМАНД**

*Институти астрофизикаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Натиҷаҳои пешниҳодшуда ошкор намудани астероидҳои нави ба Замин наздикшавандаи ба комплекси астероидию-метеороидии Виргинидҳо таалукдоштаро ба анҷом мерасонанд. Аз руи натиҷаҳои ҳисоб намудани таҳаввули мадори як қатор АНЗ ва муайян намудани параметрҳои назариявии селҳои хешовандии онҳо, ҷустуҷӯи селҳои мушоҳидашавандаи ғабӯли ба назариявиашон монанд дар ҳамаи маводи нашргардида гузаронида шуд. Маълум карда шуд, ки селҳои метеориди пешгӯӣ шуда бо 4 АНЗ хешовандӣ дошта, бо сели метеориди ғабӯле, ки тудайи  $\mu$ -Виргинид тавлид мекунад, робита доранд. Робитаи ошкоршуда пайдоиши каметавии АНЗ-ҳои баррасишавандаро нишон медиҳад. Объектҳои омӯхташуда дар дохили тудайи Виргинидҳо ҳаракат намуда, бо эҳтимолияти зиёд пораҳои кометавӣ бузурги волидайнӣ комплекси астероидию-метеороидии Виргинидҳо мебошанд. Дар асоси пешниҳоди силсилаи мақолаҳо мухтасар хулосабарорӣ карда шуд: комплекси астероидию-метеороидии Виргинид аз як қатор тудаҳои сели метеориди тавлидкунанда ва 31 объектҳои табиати кометавӣ доша иборат буда, пораҳои хомӯшгаштаи кометавӣ бузурги волидайнӣ комплексро менамояд. **Калимаҳои калидӣ:** *комета, астероид, кометавӣ хомӯшишуда, тудайи метеороидӣ, сели метеоридӣ, мадор, радиант.*

G.I.Kokhirova, P.B.Babadzhanov, U.H.Khamroev, A.I.Zhonmuhammad, I.V.Kulaev  
**VIRGINID ASTEROID-METEOROID COMPLEX.  
 NEAR-EARTH ASTEROIDS ASSOCIATED WITH THE MU-VIRGINID  
 METEOROID STREAM**

*Institute of Astrophysics of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

Presented results complete the study aimed to finding new near-Earth asteroids belonging to the Virginid asteroid-meteoroid complex. On the base of calculation of orbital evolution of a sample of NEAs and determination of theoretical features of related showers a search for observable active showers close to theoretically predicted ones was carried out within published databases. As a result, predicted showers of 4 NEAs were identified with the active showers produced by the  $\mu$ -Virginid meteoroid stream. Revealed association points to a cometary nature of NEAs that are moving within the stream and may be considered as extinct fragments of a larger comet-progenitor of the stream. Coming from the presented series of papers a summary conclusion was made, namely, the Virginid asteroid-meteoroid complex consists of a lot of streams and substreams producing meteor showers, and of 31 object of a cometary nature presenting themselves extinct fragments of a larger comet-progenitor of the complex.

**Key words:** *comet, asteroid, extinct comet, meteoroid stream, meteor shower, orbit, radiant.*

УДК 523.6

А.А.Ибрагимов

## ОБ ОРИЕНТАЦИИ ПЛАЗМЕННЫХ ХВОСТОВ КОМЕТ

*Институт астрофизики НАН Таджикистана**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Г.И. Кохировой 30.11.2020 г.)*

В данной работе, на основании имеющихся данных об aberrации плазменного хвоста комет, была исследована возможность применения метода определения скорости солнечного ветра по ориентации плазменных хвостов комет. Приведены результаты сравнительного анализа скоростей, измеренных космическим аппаратом, и расчетных данных, полученных по отклонению хвостов комет относительно продолженного радиус-вектора. Показано условие соответствия измеренных и расчетных данных.

**Ключевые слова:** комета, плазменный хвост, aberrация, тангенциальный солнечный ветер.

Кометы могут служить прямыми индикаторами электромагнитного и корпускулярного излучений Солнца и, следовательно, условий в межпланетной среде. Корпускулярное излучение состоит из солнечного ветра (СВ) и космических лучей. Плазменный хвост кометы – наиболее впечатляющая часть кометы, которая мгновенно реагирует на изменение параметров СВ. Длина хвостов меняется почти от нуля до огромных размеров порядка 1 а.е. Согласно современным представлениям:

1. Предполагается, что плазменный хвост лежит в плоскости орбиты.
2. Ось симметрии плазменного хвоста кометы, как правило, отклоняется от продолженного радиус-вектора (aberrация плазменного хвоста кометы) в противоположном направлении движения кометы.
3. Углы отклонения чаще всего менее  $5^\circ$ .
4. Плазменный хвост кометы опережает продолженный радиус-вектор (отрицательная aberrация) только на небольшие величины.
5. Отрицательная aberrация, как и отклонение назад на большие углы порядка  $15-20^\circ$ , очень редки.

Все это требует своего объяснения. Известно, что радиальное расширение солнечного вещества образует плазменный хвост кометы. Плоскость орбиты кометы может быть очень удобной исходной плоскостью для изучения ориентации хвоста и в этой области оказалось возможным построить некоторую теоретическую схему взаимодействия кометного вещества и корпускулярных потоков, эмитируемых Солнцем. По мнению Бирмана [1], ориентация хвоста определяется относительными направлениями и значениями скоростей радиально расширяющейся солнечной плазмы и кометы, движущейся по своей орбите:

---

*Адрес для корреспонденции:* Ибрагимов Алишер Абдуллоходжаевич. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бухоро, 22, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: a.ibragimov73@mail.ru



$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{v_{\perp}}{w_r},$$

где  $\varepsilon$  – угол аберрации плазменного хвоста кометы,  $v_{\perp}$  – трансверсальная скорость и  $w_r$  – радиальная скорость СВ.

Однако, еще в 1943 г., К.Хоффмейстер [2] опубликовал результаты всестороннего изучения ориентации ионизованных хвостов комет, которые являются первым количественным исследованием солнечного ветра. На одном из его графиков приведено изменение тангенса угла  $\varepsilon$  между осью хвоста и продолжением радиус-вектора в зависимости от скорости кометы. Как указывает Брандт [2], детальный анализ данных Хоффмейстера дает среднее значение радиальной скорости солнечного ветра  $474 \pm 21$  км/с. Сам Брандт [2], на основе ориентации плазменных хвостов комет, получает для радиальной скорости спокойного солнечного ветра значения: среднее  $450 \pm 11$  км/с и минимальное  $225 \pm 50$  км/с. В этой же работе получено среднее значение для азимутальной (поперечной, тангенциальной, трансверсальной – в зависимости от выбора системы координат) скорости  $8.4 \pm 1.3$  км/с и отмечено, что в геомагнитноспокойные периоды азимутальная скорость  $4 \pm 2$  км/с, а для возмущенных периодов намного больше.

В работе [3] по наблюдениям кометы Tago-Sato-Kosaka 1969IX вычисленные углы аберраций плазменных хвостов комет лежат в интервале  $0^{\circ}$ - $6.17^{\circ}$ , а радиальные скорости солнечного ветра лежат в интервале 142-467 км/с. Используя данные радиальной скорости 300-400 км/с, измеренные с помощью космического аппарата «Vela», авторы выводят значения для азимутальной компоненты в пределах 0.2-25.2 км/с.

В работе [4] по наблюдениям комет C/2001 Q4 (NEAT) и C/2002 T7 (LINEAR) в период апрель – май 2004 г. выводятся значения для радиальной скорости солнечного ветра 300-500 км/с, азимутальная компонента скорости пренебрежимо мала по сравнению с радиальной. Однако полученные значения в этой работе не коррелируют (за исключением одного измерения) с данными Advanced Composition Explorer [5] и это объясняется тем, что измеряемые потоки различаются.

По наблюдениям комет C/2001 Q4 (NEAT), C/2004 Q2 (Machholz) и C/2006 M4 (SWAN) Сизоненко [6,7] определяет скорость солнечного ветра и сравнивает с данными космического аппарата. За период наблюдения получает значения, изменяющиеся в пределах 237-1498 км/с. Возможной причиной расхождений значений по наблюдениям аберраций плазменного хвоста комет и прямых измерений, Сизоненко считает наличие поперечной скорости. Приняв среднюю радиальную скорость 750 км/с, наблюдает как минимум шесть отклонений поперечной скорости солнечного ветра от среднего значения (10 км/с), которые варьируют в пределах от -20 км/с до +80 км/с.

По данным прямых измерений автоматического спутника Advanced Composition Explorer в [8] показано, что поперечная скорость может быть 35-60 км/с и выше, и существует тенденция 28 суточной периодичности.

Таким образом, возникает вопрос, что наряду с радиальной компонентой скорости СВ на ориентацию плазменного хвоста влияет и тангенциальная составляющая. Причиной для возникновения такой скорости может послужить диссипация поля, вращение расширяющейся короны и др. Скорость

диссипации поля характеризуется временем  $t_d$  [9], за которое оно распространяется из области, первоначально им занимаемой, на расстояние  $L$ :

$$t_d \sim \sigma_e L^2,$$

где  $\sigma_e$  – проводимость плазмы, определяемая столкновениями электронов с нейтральными атомами. Если проводимость велика, что говорит о редких столкновениях между электронами и ионами, то диссипация поля занимает большое время. В частности, для солнечных пятен, при  $L=1$  а.е.,  $t_d$  порядка 300 лет, что значительно ниже частоты события возникновения тангенциального солнечного ветра. Несмотря на то, что нет жесткого совместного вращения газа с Солнцем, солнечный ветер действительно отводит значительную часть углового момента, обусловленный магнитным полем. Согласно [10], тангенциальное значение скорости, максимально увеличиваясь до  $\sim 40$  км/с на расстоянии  $20 r_{\odot}$  ( $r_{\odot}$  – солнечный радиус), уменьшается до 10 км/с на расстоянии  $220 r_{\odot}$  ( $\approx 1$  а.е.). Результатом пересечения кометой секторной структуры СВ или области магнитного пересоединения, при котором происходит сложное взаимодействие ударных волн и магнитных полей, может быть возникновение значительной тангенциальной компоненты скорости солнечного ветра.

Оставляя причины возникновения тангенциальной скорости СВ открытыми и считая основным механизмом возникновения взаимодействия разноскоростных потоков, рассмотрим ориентацию плазменного хвоста кометы с учетом этой компоненты в кометоцентрических координатах.

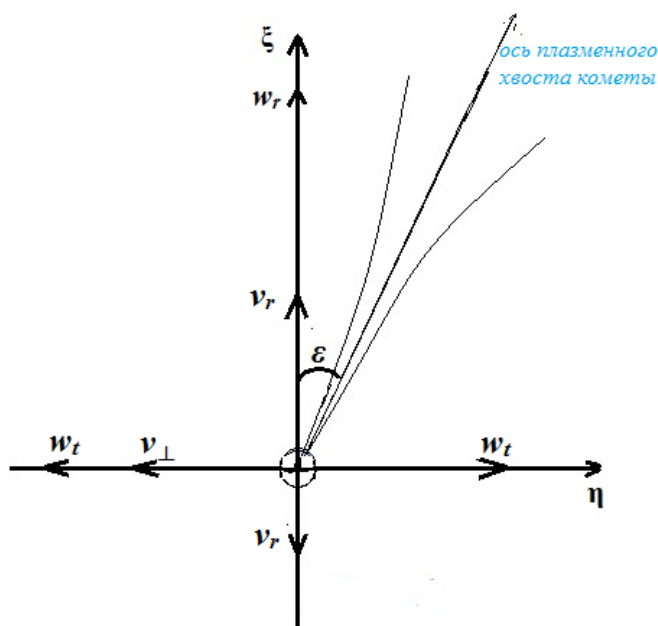


Рис. Проекция скоростей солнечного ветра и кометы.

Радиальная скорость кометы до перигелия имеет положительное значение, а после перигелия – отрицательное.

Учитывая рис., можем записать:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{w_{\eta} - v_{\eta}}{w_r - v_{\xi}}, \quad (1)$$

где  $w_{\eta}$  – проекция тангенциальной скорости СВ,  $v_{\xi}$  и  $v_{\eta}$  – проекции радиальной и трансверсальной скоростей кометы, которые, согласно [11], вычисляются по формулам:

$$v_{\perp} = v_p \frac{q}{r},$$

$$v_r = v_p \frac{q}{r} \sqrt{\left(\frac{r}{q} - 1\right) \left(1 + \frac{r}{q} \frac{e-1}{e+1}\right)},$$

$$v_p = 29.78 \sqrt{\frac{1+e}{q}},$$

где  $r$  – гелиоцентрическое расстояние кометы в а.е.,  $q$  и  $e$  – элементы орбиты кометы.

Проанализируем значение тангенциальной скорости СВ на основе наблюдений долгопериодических комет ( $e \rightarrow 1$ ) с благоприятными условиями наблюдения для земных телескопов до 3 а.е. Трансверсальные скорости комет будут лежать в пределах от нескольких до десятков км/с. В частности, для кометы C/1882 R1 [12] на расстоянии 3 а.е.  $v_{\perp} \approx 1.2$  км/с и при условии видимости на расстоянии  $\sim 5^{\circ}$  от Солнца  $v_{\perp} \approx 74$  км/с. Соответственно, радиальная скорость этой кометы 24-173 км/с, при перигелийной скорости 478 км/с. По формуле (1) видно, что при  $w_t > v_{\perp}$  отрицательная абберация будет наблюдаться при условии совпадения направлений  $w_t$  и  $v_{\perp}$ , а при противоположном направлении тангенциальной скорости СВ и трансверсальной скорости кометы будут наблюдаться аномально большие отклонения оси хвоста от продолженного радиус-вектора. Если на больших гелиоцентрических расстояниях ( $\sim 1$  до 3 а.е) редкие значения отрицательных абберационных углов плазменных хвостов могут наблюдаться при среднем значении тангенциальной скорости  $w_t \approx 8$  км/с, полученной по наблюдениям комет [13], то на расстояниях в десятки солнечных радиусов этому может сопутствовать значительное значение тангенциальной скорости СВ (порядка нескольких десятков км/с). Также на малых гелиоцентрических расстояниях стоит учитывать вращение расширяющейся короны, действие которой будет разным для комет с прямым и обратным движением. При выводе значений тангенциальной скорости СВ по формуле (1) необходимо руководствоваться тем, что вычисляемое значение тангенциальной скорости кратковременно, около двух суток согласно [8], а в качестве значений радиальной компоненты скорости СВ можно использовать значения с учетом веса каждого наблюдения или просто по числу наблюдений, или же данные, полученные прямыми измерениями при условии соответствия измеряемых потоков космическими аппаратами.

В [14] перечислены условия, влияющие на значение вычисляемой скорости. Стоит добавить, что при отклонении плазменного хвоста в плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты кометы, значения скорости СВ, вычисленные по наблюдениям комет, также будут занижены. В [6] отмечается, что систематическое занижение скорости СВ (на 50-100 км/с) по наблюдениям комет при больших углах отклонения оси плазменного хвоста невозможно объяснить ошибками измерений. Это видно по

величине доверительных интервалов, полученных из наблюдений. Причина такого занижения скорости не совсем ясна. Предполагается наличие силы, не учтенной векторным уравнением [2] для оси кометного хвоста  $T = w - V$ , где  $T$  – вектор направления хвоста,  $w$  – вектор скорости СВ,  $V$  – вектор орбитальной скорости кометы. При больших значениях скорости СВ действие этой силы не существенно, оно сказывается лишь при минимальном воздействии СВ на кометные ионы.

Природа образования плазменных и пылевых хвостов комет может пролить свет на эту проблему. Частицы, из которых состоят хвосты кометы, обладают неодинаковым составом и свойствами и по-разному располагаются относительно продолженного радиус-вектора. По исторически сложившейся традиции ускорения в хвостах комет принято выражать безразмерной величиной:

$$\frac{F_r}{F_g} = 1 + \mu = \frac{a}{g_{\odot}},$$

где  $a$  и  $F_r$  — ускорение и сила отталкивания,  $g_{\odot}$  и  $F_g$  — солнечное гравитационное ускорение и сила на данном гелиоцентрическом расстоянии. Бредихиным была проведена классификация хвостов по величине  $1 + \mu$ , которая сохранена и в настоящее время [15]. По этой классификации хвосты комет делят на типы, по которым  $1000 > 1 + \mu > 20$  соответствует плазменным хвостам и  $1 + \mu \sim 1$  — пылевым. Таким образом, видно, что отклонение оси хвоста от продолженного радиус-вектора зависит от эффективной силы (эффективного ускорения) и эту зависимость запишем в виде:

$$tg \Delta \varepsilon \sim \frac{\sqrt{1 + \mu}}{1 + \mu},$$

где  $\Delta \varepsilon$  – угол отклонения (смещения) оси хвоста гравитацией Солнца. Эффект смещения оси хвоста от продолженного радиус-вектора гравитацией Солнца для условных границ  $1 + \mu$  плазменного хвоста составит  $1.8^\circ < \Delta \varepsilon < 12.6^\circ$ .

Полученные значения для угла  $\Delta \varepsilon$  могут объяснить систематическое занижение абберационных скоростей относительно данных космических аппаратов. Также подтверждают тот факт, что при низких скоростях СВ действие поперечных сил наиболее выражено (при смещении оси от радиус-вектора притяжение возрастает квадратично). Исходя из вышеизложенного для абберационного угла оси плазменного хвоста с учетом воздействия поперечных сил, можем записать:

$$tg \varepsilon = \frac{w_\eta - v_\eta}{w_r - v_\xi} + tg \Delta \varepsilon.$$

Значение эффективного ускорения можно получить по наблюдениям движения сгущений или каких-либо образований в плазменном хвосте кометы [16].

Возникающая тангенциальная скорость СВ по направлению движения кометы уменьшает значение эффективного ускорения и, соответственно, увеличивается угол смещения. При тангенциальной скорости СВ направленной против движения кометы, происходит обратный эффект, тем самым сохраняется доверительный интервал вычисляемых абберационных скоростей.

**В ы в о д ы**

В качестве причины больших отклонений (около  $20^\circ$ ) плазменных хвостов комет от продолженного радиус-вектора предлагается воздействие тангенциальной составляющей скорости солнечного ветра, которая противоположна направлению кометы, и смещение оси хвоста гравитацией Солнца.

В качестве причины опережения плазменных хвостов продолженного радиус-вектора (отрицательная абберация) предлагается воздействие тангенциальной составляющей скорости солнечного ветра, значение которой больше трансверсальной скорости кометы и действует по направлению движения кометы.

При низких скоростях солнечного ветра смещение оси плазменного хвоста кометы гравитацией Солнца максимально.

*Поступило 02.12.2020 г.*

**Л И Т Е Р А Т У Р А**

1. Biermann L. Physical processes in comet tails and their relation to solar activity. – *La physique des cometes*, Louvain, 1953, 251 p.
2. Брандт Дж. Солнечный ветер. – М.: Мир, 1973, 207 с.
3. Jockers K., Lust R., Nowak Th. The Kinematical Behaviour of the Plasma Tail of Comet Tago-Sato-Kosaka 1969IX – *Astron. and Astrophys.*, 1972, 21, P. 199-207.
4. Buffington A., Bisi M. M., Clover J. M., Hick P. P., Jackson B. V., Kuchar T. A. Analysis of plasma-tail motions for comets C/2001 Q4 (NEAT) and C/2002 T7 (LINEAR) using observations from SMEI – *Astrophys. J.*, 2008, vol. 677, P. 798-807.
5. <https://www.swpc.noaa.gov/products/real-time-solar-wind-phase-ii>.
6. Сизоненко Ю.В. Кометы C/2001 Q4 и C/2004 Q2: структуры плазменных хвостов – *Кинематика и физика небесных тел*, 2007, Т. 23, № 5, с. 286-294.
7. Сизоненко Ю.В. Эволюция хвостов кометы C/2006 M4 (SWAN) – *Кинематика и физика небесных тел*, 2012, т. 28, № 1, с. 16-24.
8. Scott C.J., Harrison R.G., Owens M.J., Lockwood M., Barnard L. Evidence for solar wind modulation of lightning. – *Environmental Research Letters*, 2012, v. 9, No. 5, <http://iopscience.iop.org/1748-9326/9/5/055004/article>.
9. Горбацкий В.Г. Космическая газодинамика. – М.: Наука, 1977, 360 с.
10. Weber E., Davis L. Jr. The Angular Momentum of the Solar Wind. – *Astrophysical Journal*, 1967, vol. 148, p.217-227.
11. Jockers K. The ion tail of comet Kohoutek 1973 XII during 17 days of solar wind gusts. – *Astron. and Astrophys. Suppl. Ser.*, 1985, 62, pp. 791-838.
12. Sekanina Z., Chodas P.W. Fragmentation hierarchy of bright sungrazing comets and the birth and orbital evolution of the Kreutz system. ii. The case for cascading fragmentation. – *Astrophys. J.*, 2007, v.663, pp. 657-676.
13. Belton M.J.S., Brandt J.C. Interplanetary Gas. XII. A Catalogue of Comet-Tail Orientations. – *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 1966, v.13, p.125.

14. Ибрагимов А.А. Определение скорости солнечного ветра по наблюдениям плазменных хвостов комет. – ДАН РТ, 2020, т.63, №5-6, с. 343-349.
15. Бредихин Ф. А. О хвостах комет – Москва, Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934, с. 279
16. Орлов А.Я. Избранные труды. – Киев: Изд-во АН УССР, 1961, т.2, 318 с.

**А.А.Ибрагимов**

## **ОИДИ ҲОЛАТИ ФАЗОГИИ ДУМИ ПЛАЗМАВИИ КОМЕТАҲО**

*Институти астрофизикаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар асоси абerratсияи думи плазмавии кометаҳо имконияти татбиқи усули муайян намудани суръати шамоли карда офтобӣ аз рӯи мушоҳидаи ҳолати фазогии думи плазмавии комета таҳқиқ шуд. Натиҷаҳои таҳлили муқоисавии суръатҳои бо асбобҳои кайҳонӣ чен карда шуда ва аз рӯи майли думи кометаҳо нисбати радиус-вектори давомёфта ҳисобшуда, оварда шудааст. Шарти мувофиқати натиҷаҳо нишон дода шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** *комета, думи плазмавӣ, абerratсия, шамоли офтобии тангенциалӣ.*

**A.A.Ibragimov**

## **ABOUT OF COMETS TAIL ORIENTATION**

*Institute of Astrophysics, National Academy of Sciences of Tajikistan*

Based on the available data on the aberration of the plasma tail of comets, the possibility of using the method for determining the velocity of the solar wind from the orientation of plasma tails of comets was investigated. The results of a comparative analysis of the velocities measured by the spacecraft and the calculated data obtained from the deviation of comet tails relative to the extended radius vector are presented. The condition of correspondence between measured and calculated data is shown.

**Key words:** *comet, plasma tail, aberration, tangential solar wind.*

УДК 530.1

М.С.Курбониён, З.Умар, Томоюки Ямамото\*,  
академик НАН Таджикистана Ф.Рахими\*\*

## ПЕРВОПРИНЦИПНЫЕ РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРОННОЙ СТРУКТУРЫ $AMO_3$ ( $A=Ca, Sr$ ; $M=Sn, Zr, Ti, Hf$ ), ЛЕГИРОВАННОГО ИОНАМИ $Mn^{4+}$

Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана,

\* Факультет науки и техники Университета Васэда, Токио, Япония,

\*\* Президиум НАН Таджикистана

В статье представлены результаты квантово-механических расчетов основного электронного строения кристаллических  $AMO_3$  ( $A=Ca, Sr$ ;  $M=Sn, Zr, Ti, Hf$ ), легированных ионами  $Mn^{4+}$ , в рамках теории функционала плотности. Определено, что оценённые значения ширины запрещённых зон  $AMO_3$  материалов с использованием потенциала Бекке-Джонсона ( $mBJ$ ) близки к значениям экспериментальных результатов. Вычислены параметры кристаллического поля ( $10Dq$ ) и длины красного излучения фосфорных материалов  $AMO_3:Mn^{4+}$ .

**Ключевые слова:** фосфор, теория функционала плотности, ширина запрещённой зоны, параметр кристаллического поля ( $10Dq$ ), красное излучение.

В настоящее время белые светодиоды широко используются в качестве источников освещения благодаря их свойствам к энергосбережению. Технология производства большинства современных белых светодиодов (w-LED) в основном состоит из сочетания синего светодиода  $InGaN$  и желтого люминофора  $YAG:Ce^{3+}$  ( $Y_3Al_5O_{12}:Ce^{3+}$ ). Однако интенсивность красного излучения  $YAG:Ce^{3+}$  очень слаба, и этот недостаток приводит к ухудшению индекса цветопередачи и более высокой цветовой корреляции температуры. Одним из способов преодоления этой проблемы является добавление некоторого количества высокоэффективных красных люминофоров в коммерческие белые светодиоды [1].

С учетом вышеизложенного были разработаны красные люминофоры, легированные редкоземельными ионами [2]. Однако, с учетом ограниченности встречаемости в природе редкоземельных элементов и высоких цен на них, разработка и поиск новых недорогих и эффективных красных люминофоров является актуальной задачей. Люминофоры, легированные переходными элементами, являются альтернативой среди легированных материалов. Выявлено, что  $Mn^{4+}$  является лучшим кандидатом, заменяющим люминофоры, легированные редкоземельными элементами. Для получения новых фосфорных материалов, легированных ионами  $Mn^{4+}$ , с целью долгосрочного пользования с высокой люминесцентной эффективностью, необходимо знать локальную среду материалов в атомарном масштабе и их электронную структуру. Весьма необходимы в этих исследованиях квантово-механических расчетов по первому принципу в рамках теории функционала плотности [3].

**Адрес для корреспонденции:** Курбониён Мехрдод Субхони, Зафари Умар. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАНТ. E-mail: mehrdodq@gmail.com; zafari\_umar@mail.ru

Согласно многочисленным экспериментальным и теоретическим работам, оксидные материалы со структурой перовскита, легированные ионами  $Mn^{4+}$ , могут выступать в качестве люминофоров с красной полосой излучения. В статьях [4-6] приведены результаты работы по синтезу, структуре и люминесцентным свойствам нанокристаллических оксидов со структурой перовскита  $CaSnO_3$ ,  $LaScO_3$ ,  $CaZrO_3$ , легированных ионами  $Mn^{4+}$ .

В настоящей работе представлены результаты квантово-механических расчётов оксидов со структурой перовскита  $AMO_3$ , легированных ионами  $Mn^{4+}$ . Рассчитаны параметр кристаллического поля ( $10Dq$ ) и длина красного излучения  $AMO_3:Mn^{4+}$ , а также расщепления  $3d$  состояний иона  $Mn^{4+}$  и их энергетические характеристики.

### Геометрическая структура и метод расчета

Все рассматриваемые нами материалы  $AMO_3$  имеют искажённую орторомбическую структуру с пространственной группой  $Pnma$  (порядковый номер №62). Из группы  $CaMO_3$  ( $M=Ti, Zr, Sn$ ) структура перовскита  $CaTiO_3$  менее искажена ( $\tau=0.97$ ), чем у  $CaSnO_3$  ( $\tau=0.93$ ) и  $CaZrO_3$  ( $\tau=0.92$ ) [7]. Это связано с диапазоном октаэдрических ионных радиусов  $Ti^{4+}$ ,  $Sn^{4+}$  и  $Zr^{4+}$  - 0.61, 0.69 и 0.72 Å, соответственно.

Орторомбическая модификация оксидов типа  $AMO_3$  содержит четыре формульных единицы на примитивную ячейку. Кристаллическая ячейка этих материалов содержит один атом  $M$ , один атом  $A$  и два кристаллохимических неэквивалентных атома  $O$ .

Квантово-механический расчёт электронной структуры выполнен методом (линеаризованных) присоединенных плоских волн  $LAPW$  с помощью программного пакета  $WIEN2k$  [8]. Сходимость самосогласованных вычислений достигается с точностью до 0.001  $mRy$ , а сходимость заряда -0.0004 е и  $R_{min}K_{max}=6.5$ , где  $R_{min}$  - радиус минимальной атомной сферы,  $K_{max}$  - граница обрыва плоских волн. Квантово-механические расчёты с помощью пакета программ  $WIEN2k$  выполнены с использованием 2000  $k$ -точек в первой зоне Бриллюэна для элементарной ячейки с помощью  $LDA$ ,  $GGA$  и  $mBJ$  приближений.

Для моделирования электронной структуры  $AMO_3$ , легированного ионами  $Mn^{4+}$ , использовалась суперячейка размером  $2 \times 1 \times 2$  из 80 атомов. Дальше замещается один атом  $M$  на ион  $Mn^{4+}$ . При этом ион  $Mn^{4+}$  находится в октаэдрическом окружении шести ионов  $O^{2-}$ .

### Результаты и обсуждения

На рис.1-4 приведены результаты квантово-механических расчетов нелегированных  $AMO_3$  в рамках  $LDA$ ,  $GGA$  и  $mBJ$  приближениях.

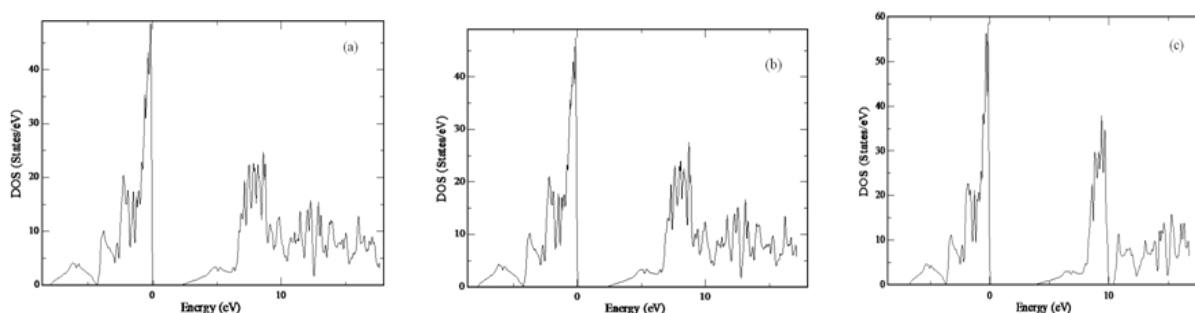


Рис. 1. Общая плотность состояний  $CaSnO_3$  при  $LDA$  (a),  $GGA$  (b)  $mBJ$  (c) расчетах.



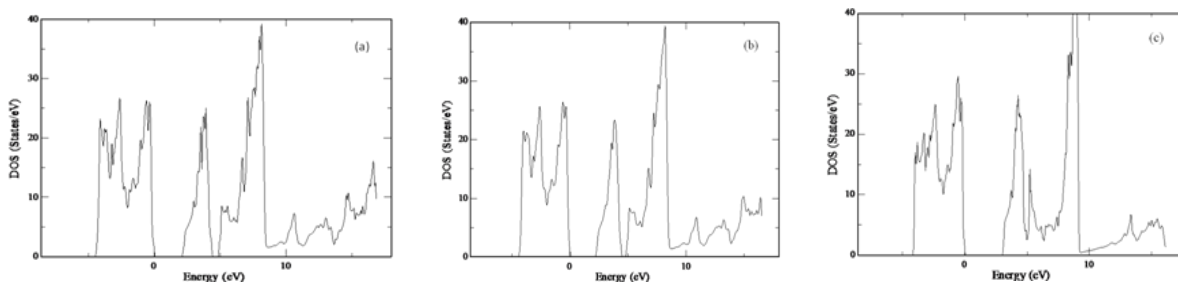


Рис. 2. Общая плотность состояний  $CaTiO_3$  при  $LDA$  (a),  $GGA$  (b)  $mBJ$  (c) расчетах.

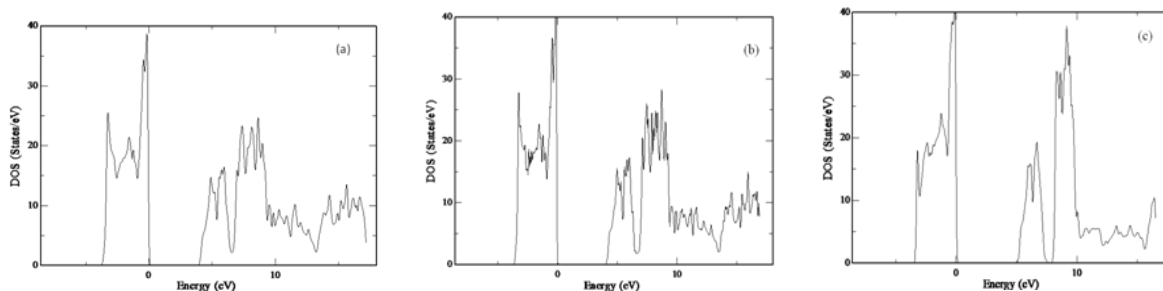


Рис. 3. Общая плотность состояний  $CaZrO_3$  при  $LDA$  (a),  $GGA$  (b)  $mBJ$  (c) расчетах.

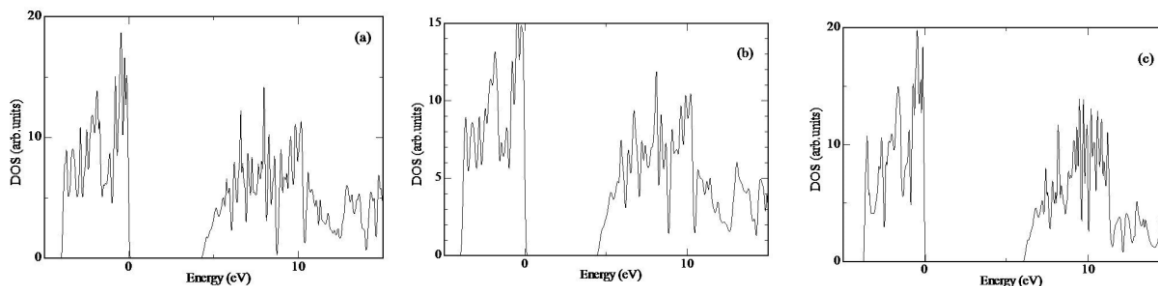


Рис. 4. Общая плотность состояний  $SrHfO_3$  при  $LDA$  (a),  $GGA$  (b)  $mBJ$  (c) расчетах.

В таблице приведены значения ширины запрещенной зоны исследуемых объектов при  $LDA$ ,  $GGA$  и  $mBJ$  вычислениях.

Таблица

Значения ширины запрещенной зоны (эВ).

Системы	$LDA$	$GGA$	$mBJ$	Эксп.
$CaSnO_3$	2.286	2.391	3.872	4.5 [9]
$CaTiO_3$	2.132	2.228	3.051	3.5 [9]
$CaZrO_3$	3.950	4.047	5.094	5.7 [9]
$SrHfO_3$	4.26	4.32	6.01	6.1 [10]

Значения ширины запрещенных зон при  $mBJ$  методе расчета наиболее близки к экспериментальным результатам. Разница между значениями ширины запрещенных зон при  $mBJ$  методе расчета и экспериментальными результатами лежит в пределах 05-06 эВ, в то время как эта разница в рамках  $GGA-PBE$  расчетов лежит в пределах 2-2.3 эВ.

Расчеты электронной структуры проводились с учетом спиновой поляризации. Число  $k$ -точек в первой зоне Бриллюэна для суперячейки было выбрано 100.

Результаты квантово-механических расчетов приведены на рис.5-8.

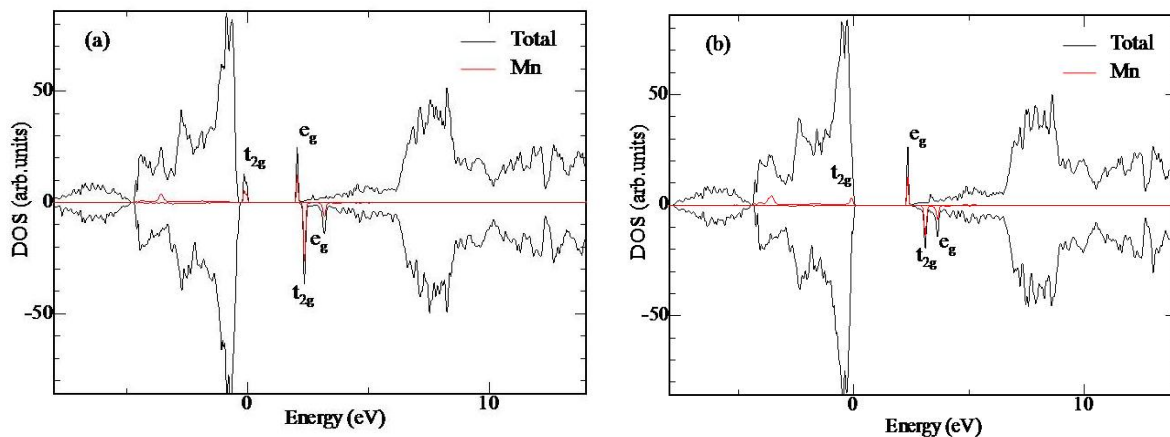


Рис. 5. Общая плотность электронных состояний  $\text{CaSnO}_3:\text{Mn}^{4+}$  при GGA (a) и GGA+U (b) ( $U=3$  эВ) расчетах.

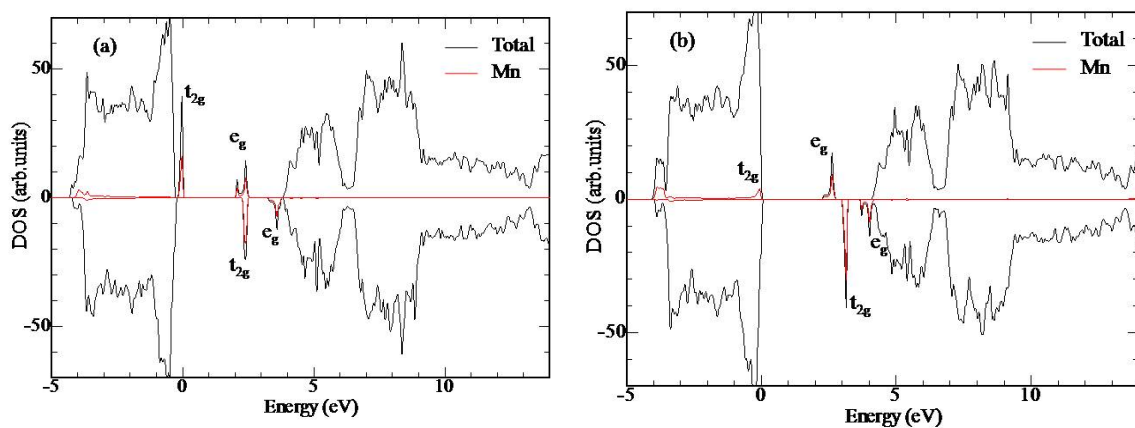


Рис. 6. Общая плотность электронных состояний  $\text{CaZrO}_3:\text{Mn}^{4+}$  при GGA (a) и GGA+U (b) ( $U=3$  эВ) расчетах.

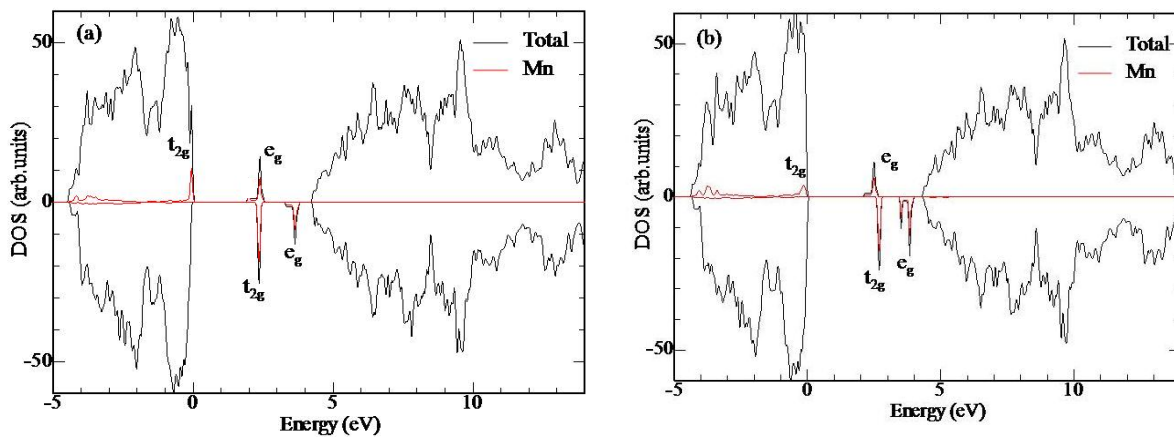


Рис. 7. Общая плотность электронных состояний  $\text{SrHfO}_3:\text{Mn}^{4+}$

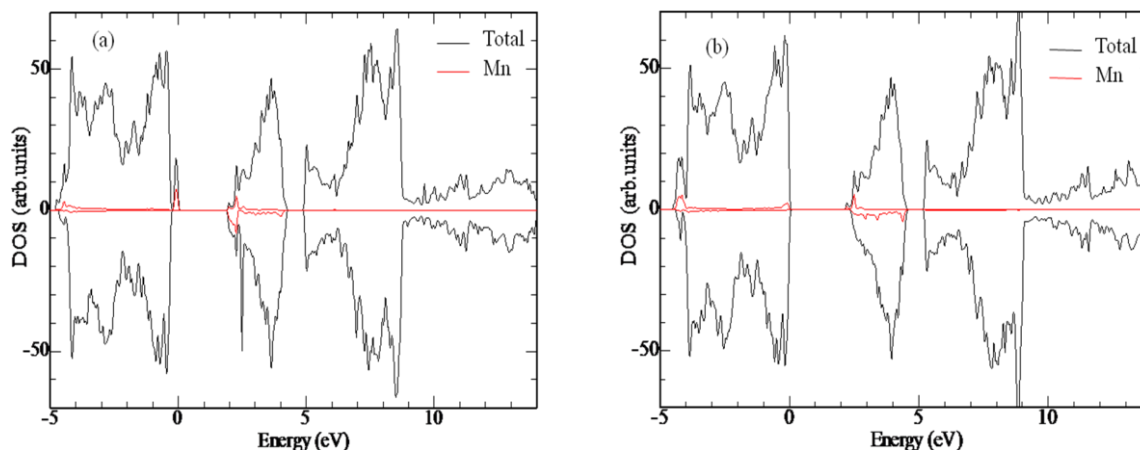


Рис. 8. Общая плотность электронных состояний  $\text{CaTiO}_3:\text{Mn}^{4+}$  при  $GGA$  (a) и  $GGA+U$  (b) ( $U=3$  эВ) расчетах.

В запрещенной зоне рассматриваемых объектов формируются новые спин-вверх и спин-вниз электронные состояния. Анализ парциальных электронных состояний показывает, что эти состояния формируются за счет  $3d$ -электронных состояний иона  $\text{Mn}^{4+}$ . В правильном октаэдрическом поле пять  $d$ -орбиталей  $\text{Mn}^{4+}$  расщепляется на две группы. Одна группа состоит из трех орбит  $d_{yz}$ ,  $d_{zx}$ ,  $d_{xy}$ , а другая — из двух  $d_{z^2-r^2}$ ,  $d_{x^2-y^2}$ . Орбиты первой группы мы будем называть  $t_{2g}$ , а второй -  $e_g$ . Для обозначения энергетической щели между  $t_{2g}$  и  $e_g$  орбиталями используют символ  $\Delta$  или  $10Dq$ .

Энергетическая разница  $t_{2g}$  и  $e_g$  между спин-вверх электронными состояниями отличается друг от друга. Согласно теории кристаллического поля, энергетическая разница  $E(e_g)-E(t_{2g})=10Dq$  определяет параметр кристаллического поля, где  $q$  - заряд лиганда,  $D$  - величина, зависящая от геометрии кристаллического поля. Исходя из этого, рассчитанный параметр кристаллического поля  $10Dq$  в рамках  $GGA$  расчётов равен 1.897, 2.059 и 2.34164 эВ для  $\text{CaSnO}_3$ ,  $\text{CaZrO}_3$  и  $\text{SrHfO}_3$ , соответственно. Расщепление  $t_{2g}$  и  $e_g$  состояний в рамках наших квантово-механических расчетов для  $\text{CaTiO}_3$  не получилось. По нашему выводу, это связано с шириной запрещенной зоны  $\text{CaTiO}_3$ , поскольку для кристаллофосфоров характерна широкая запрещенная зона 4-14 эВ [11]. Сильные корреляции между  $d$ - и  $f$ -электронами в рамках потенциала Бекке-Джонсона ( $mBJ$ ) не учтены. Для учета корреляции  $d$ - и  $f$ -локализованных электронов исследуемого объекта в рамках метода функционала плотности можно использовать  $GGA+U$  или  $mBJ+U$  схемы расчета. Квантово-механические расчеты  $GGA+U$  проведены со следующими значениями параметра -  $U$ :  $U=1$  эВ,  $U=2$  эВ,  $U=3$  эВ,  $U=4$  эВ и  $U=5$  эВ. Параметр  $U$  учтён для сильно-коррелированных  $3d$ -электронов иона  $\text{Mn}^{4+}$ .

Результаты расчетов показывают, что учёт поправки Хаббарда при  $GGA+U$  приведет к значительному изменению энергетического положения  $t_{2g}$  и  $e_g$  электронных состояний. Полученные результаты показывают, что энергетическая разница  $t_{2g}$  и  $e_g$  спин-вверх электронного состояния при  $GGA+U$  расчетах расширяется. Параметр  $10Dq$  в рамках  $GGA+U$  ( $U=3$  эВ) расчётов равен 2.27 и 2.55, 2.47 эВ для  $\text{CaSnO}_3$ ,  $\text{CaZrO}_3$  и  $\text{SrHfO}_3$ , соответственно. Результаты наших расчетов близки к экспериментальным значениям, приведенным в [4] для  $\text{CaSnO}_3$  (2.16эВ) и [6] для  $\text{CaZrO}_3$ . (2.31 эВ). К сожалению, параметры расщепления  $10Dq$  для  $\text{SrHfO}_3$  ещё экспериментально не измерены.

## З а к л ю ч е н и е

Проведены расчеты по первому принципу электронных свойств ряда люминофоров  $AMO_3$  ( $A=Ca, Sr, M=Sn, Zr, Ti, Hf$ ), легированных ионами  $Mn^{4+}$  в рамках теории функционала плотности. Расчеты с помощью потенциала Бекке-Джонсона ( $mBJ$ ) точно оценивают величину запрещенной зоны  $AMO_3$  систем. Определены параметр кристаллического поля ( $10Dq$ ) и длина красного излучения фосфоров  $AMO_3$ , легированных ионами  $Mn^{4+}$ , а также исследован вклад  $3d$ -орбиталей иона  $Mn^{4+}$  в образование  $t_{2g}$  и  $e_g$ .

Работа была поддержана фондом Международного инновационного центра нанотехнологий СНГ (гранты №21-106 и №21-108).

Поступило 23.11.2020 г.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Smet P.F., Parmentier A.B., Poelman D. Selecting conversion phosphors for white light-emitting diodes. – J. Electrochem. Soc., 2011, v. 158, pp.37-54.
2. Xie R., Hirosaki N., Sakuma K., Kimura N. White light-emitting diodes (LEDs) using (oxy)nitride phosphors. – J. Phys. D, 2008, v.41, p.144013.
3. Brik M.G. and Srivastava A.M. On the optical properties of  $Mn^{4+}$  in solids. – Opt. Mater., 2013, v. 35, p.1251.
4. Srivastava A.M., Brik M.G., Comanzo H.A., Beers W.W., Cohen W., Cherepy N., Payne S.A. Luminescence of  $Mn^{4+}$  in the Orthorhombic Perovskites,  $ASnO_3$  ( $A=Ca, Sr$ ). – ECS Journal of Solid State Science and Technology, 2020, v. 9, p.016009.
5. Liangling S., Devakumar B., Guo H., Liang J., Li B., Wang S., Sun Q., Huang X. Synthesis, structure, and luminescence characteristics of far-red emitting  $Mn^{4+}$ -activated  $LaScO_3$  perovskite phosphors for plant growth – RSC Adv., 2018, v. 8, pp.33035-33041
6. Mikhail G.B. and Alok M.S. Electronic energy levels of the  $Mn^{4+}$  ion in the perovskite,  $CaZrO_3$  – Journal of solid State Science and technology, 2013, v. 2(7), R148-R152.
7. Urusov V.S., Leonenko E.V. Atomistic computer simulation of  $ABO_3$  ( $A = Ca; b=Zr, Ti, Sn$ ) perovskites: crystal structure, intrinsic point defects and dopant formation. – Mineral Jour., 2012, v. 34, №1, pp.3-11.
8. Blaha P., Schwarz K., Madsen G.K.H., Kvasnicka D., Luitz J. WIEN2k, an augmented plane wave+local orbitals program for calculating crystal properties. – Karlheinz Schwarz Technische Universitat, Wien, Austria, 2001.
9. Subhoni M., Zafari U., Yamamoto T. Electronic structure analysis of  $Mn$ -doped  $CaMO_3$  perovskites. – AMTC Letter (International Journal of Advanced Microscopy and Theoretical Calculations), 2019, v.6, pp.256-257.
10. Sousa M., Rossel C., Marchiori C. Optical properties of epitaxial  $SrHfO_3$  thin films grown on Si. – J. Appl. Phys, 2007, v. 102, p.104103
11. Пустоваров В.А. Люминесценция твердых тел. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2017, 128 с.

М.С.Курбониён, З.Умар, Томоюки Ямамото\*, Ф.Рахимӣ\*\*

## ҲИСОБҲОИ СОҲТОРИ ЭЛЕКТРОНИИ $AMO_3$ ( $A=Ca, Sr, M=Sn, Zr, Ti, Hf$ ) БО ИОНИ $Mn^{4+}$ ИЛОВАКАРДАШУДА АЗ РӯИ ПРИНЦИПИ АВВАЛ

*Маркази рушди инноватсионии илм ва технологияҳои нави*

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*\*Факултети илм ва техникаи Донишгоҳи Васэда, Токио, Япония,*

*\*\*Райсати Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаҳои ҳисоббарории квантӣ-механикии маводи  $AMO_3$  ( $A=Ca, Sr, M=Sn, Zr, Ti, Hf$ ) иони  $Mn^{4+}$  иловакардашуда дар доираи назарияи функционали зичӣ пешниҳод шудааст. Муайян карда шуд, ки қимати ҳисобкардашудаи зонаи мамнӯи  $AMO_3$  системаҳо дар доираи методи  $mBJ$  ба натиҷаҳои эксперименталӣ наздик аст. Параметри майдони кристаллӣ ( $10Dq$ ) ва дарозии афканишоти ранги сурхи фосфорҳо  $AMO_3:Mn^{4+}$  баҳо дода шуд. Ҳамчунин, саҳми ҳолатҳои орбиталҳои  $3d$ -и иони  $Mn^{4+}$  ба савияҳои энергетикӣ  $t_{2g}$  ва  $e_g$  муайян карда шуд.

**Калимаҳои калидӣ:** *фосфор, назарияи функционали зичӣ, зонаи мамнӯъ, параметри кристаллии майдон ( $10Dq$ ), нури сурх.*

M.S.Qurbonien, Z.Umar, Tomoyuki Yamamoto\*, F.Rahimi\*\*

## THE FIRST-PRINCIPLES CALCULATIONS OF THE ELECTRONIC STRUCTURE OF $Mn^{4+}$ DOPED $AMO_3$ ( $A=Ca, Sr, M=Sn, Zr, Ti, Hf$ )

*Centre for innovative development of science and new technologies*

*of the National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*\*Faculty of Science and Engineering Waseda University, Tokyo, Japan,*

*\*\*Presidium of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

The article presents the results of quantum-mechanical calculations of the electronic structure of  $Mn^{4+}$  doped  $AMO_3$  ( $A=Ca, Sr, M=Sn, Zr, Ti, Hf$ ) with density functional theory. The  $mBJ$  estimated of band gap of the  $AMO_3$  systems are closer to the experimental ones. The crystal field parameters ( $10Dq$ ) and the red emission wavelength of the phosphors are estimated. The electronic structure of the split  $3d$ - $Mn^{4+}$  orbitals and their contribution to the  $t_{2g}$  and  $e_g$  states are studied in detail here.

**Key words:** *phosphor, density functional theory, band gap, crystal field parameter ( $10Dq$ ), red emission.*

УДК 541.64:539.2

Член-корреспондент НАН Таджикистана **Ш.Туйчиев**,

Дж.Рашидов, С.Х.Табаров, Л.Туйчиев, Ш.И.Акназарова, Ф.Х.Содиков

**ФОТОСТАРЕНИЕ АМОРФНЫХ ПОЛИМЕРНЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ***Таджикский национальный университет*

*Исследованы изменения в структуре и свойствах аморфных нанокomпозитов на основе фуллереннаполненных полиметилметакрилата и полистирола в поле ультрафиолетового излучения. Показано, что при фотостарении наблюдается экстремальное изменение структуры, механических и тепловых свойств композитов.*

**Ключевые слова:** полимер, фуллерен, композит, облучение, структура, прочность, деформация, фотостарение.

Важнейшими характеристиками полимеров наряду с механическими свойствами являются термо- и фотостабильность [1-4]. В последнее время для улучшения этих показателей используют методы их модификации нанокomпозитами [3-5].

В настоящей работе исследованы изменения структуры, механических и тепловых свойств фуллереннаполненных аморфных пленок из полиметилметакрилата (ПММА) и полистирола (ПС) под действием монохроматического ультрафиолетового (УФ) излучения.

Объектами исследования служили полимерные композиты на основе атактических ПММА и ПС с молекулярными массами  $M=8 \cdot 10^4$  и  $28 \cdot 10^4$  соответственно и фуллеренов  $C_{60}$  и  $C_{70}$  с химической чистотой 99.7%. Пленки композитов получали из смешанных растворов полимеров и фуллеренов в бромбензоле при комнатных условиях. Концентрацию наполнителей варьировали в интервале  $C=0.1-10$  масс.%, толщину пленок меняли в пределах 15-80 мкм.

Двустороннее УФ-облучение образцов производили светом двух бактерицидных ламп типа БУВ-30 на расстоянии 15 мм от каждой. Время облучения изменяли в интервале  $t=0-400$  ч. Состояние поверхностей образцов, распределение внедренных наночастиц наполнителей в них изучали на поляризационном микроскопе МИН-8, спектры поглощения в УФ и ИК диапазонах снимали на спектрометрах UV-1800 и IR affinity-1 фирмы Шимадзу соответственно. Потерю массы пленок при облучении определяли на электронных аналитических весах ВЛА-200М. Рентгенографические исследования образцов проводили на установках ДРОН-2 и КРМ-1 с использованием медного излучения, фильтрованного никелем. Термографические исследования проводили на установке DSC 204F1 фирмы Netzsch со скоростью нагрева и охлаждения 10 град/мин. Механические свойства образцов изучали на стандартной разрывной машине РМ-1 при скорости движения нижнего зажима 12 мм/мин. Все испытания проводили при комнатных условиях, состояние образцов во всех испытаниях было неориентированное.

**Адрес для корреспонденции:** Рашидов Джалил. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр.Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: rashidov.1943@mail.ru

Исходные пленки ПММА и ПС внешне были чистыми и прозрачными. С ростом концентрации фуллеренов в интервале  $C=0.1-3\%$  происходит изменение цвета образцов со светло-розового (бордового) до темно-фиолетового в случае ПММА+ $C_{60}$ , со светло-желтого до темно-коричнево-красного цвета в случае ПММА+ $C_{70}$ , что свидетельствует о диспергировании молекул фуллеренов до молекулярного уровня. На микрофотографиях при  $C=1\%$  обнаруживаются рыхлые сферические образования размерами 1-5 см, а при  $C=3-5\%$  макроструктуры типа веера, веток и др. [6-8]. С увеличением времени УФ-облучения в пределах  $t=0-400$  ч происходит постепенное разрушение супраструктур и поверхность образцов становится слегка шероховатой.

Рентгенодифракционные исследования на больших углах рассеяния показали, что с ростом концентрации фуллеренов наблюдается деформация контуров отражений и на их фоне появляются рефлексы от фуллеренов; на малоугловых рентгенограммах наблюдается заметный рост диффузного рассеяния, свидетельствующий о повышении микрогетерогенности в структуре, то есть об образовании неоднородностей типа пор и трещин [6-8]. Предварительное УФ-облучение не приводит к изменению характера рентгенограмм композитов.

Термографические исследования показали, что концентрационные изменения температур физических переходов (стеклования  $T_c$ , плавления  $T_{пл}$ ) для композитов ПММА+ $C_{60}$ , ПММА+ $C_{70}$ , ПС+ $C_{60}$  и ПС+ $C_{70}$  различаются [6-8]. Например, для композита ПММА+ $C_{70}$  температура стеклования  $T_c$  с ростом концентрации фуллерена монотонно снижается с 75 до 66°C (рис.1 а), а в композите ПС+ $C_{70}$  изменяется экстремально, то есть вначале уменьшается с 78 до 63°C, а затем увеличивается до 74°C (рис. 1б).

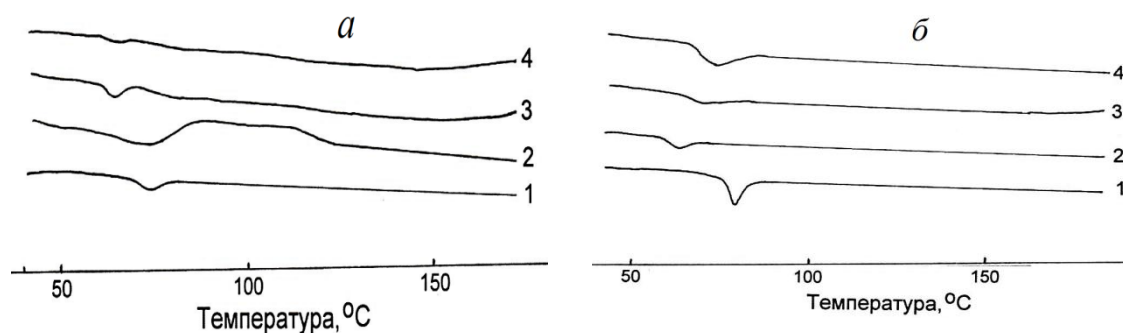


Рис. 1. Термограммы композитов ПММА+ $C_{70}$  (а) и ПС+ $C_{70}$  (б):  
1- $C=0$ ; 2-1; 3-3; 4-5 масс. %.

Наблюдаемые монотонные и экстремальные изменения  $T_c$ , по-видимому, связаны с образованием структур с различной степенью порядка и совершенства. При облучении эти изменения сглаживаются и  $T_c$  практически остается неизменной (см. таблицу). Наличие супраструктур не влияет на величину  $T_c$  и механические свойства всех исследованных композитов на основе ПММА и ПС.

Таблица

Механические и тепловые свойства облученных композитов ПММА+C<sub>60</sub>

Образец	тобл = 0 час			тобл = 50 час			тобл = 100 час		
	$\sigma_p$ , МПа	$\varepsilon_p$ , %	$T_c$ , °C	$\sigma_p$ , МПа	$\varepsilon_p$ , %	$T_c$ , °C	$\sigma_p$ , МПа	$\varepsilon_p$ , %	$T_c$ , °C
ПММА	52	5.0	75	48	5.1	75	45	4	74
ПММА+1%C <sub>60</sub>	52	5.0	74	46	3.4	74	43.5	3.4	74
ПММА+3%C <sub>60</sub>	46	3	72	45	3.2	75	37	3.2	75
ПММА+5%C <sub>60</sub>	44	2	72	45	2.6	76	35	3.0	75
ПММА+10%C <sub>60</sub>	35	1.2	66	34	2	76	33	2	76

Образец	тобл = 150 час			тобл = 300 час		
	$\sigma_p$ , МПа	$\varepsilon_p$ , %	$T_c$ , °C	$\sigma_p$ , МПа	$\varepsilon_p$ , %	$T_c$ , °C
ПММА	38.0	3.5	75	33	3	78
ПММА+1%C <sub>60</sub>	35.0	2.8	75	30.0	2.6	77
ПММА+3%C <sub>60</sub>	35.0	2.5	76	30.1	2.4	78
ПММА+5%C <sub>60</sub>	32.0	2	76	30.6	2	78
ПММА+10%C <sub>60</sub>	30.0	2	76	26.0	1.5	79

Спектроскопические исследования показали, что при облучении ПММА УФ-светом на воздухе происходит фото- и фотоокислительная (по большей части в приповерхностных слоях) деструкция полимера [1-4]. Основными продуктами фотодеструкции ПММА являются метилформиат, метанол, метилметакрилат, метан, водород, окись и двуокись углерода [4]. ИК-спектры поглощения облученного ПММА почти не отличаются от спектров необлученного ПММА. Наблюдается лишь уширение полосы поглощения 1750 см<sup>-1</sup> и появление новых полос при 1615 и 1640 см<sup>-1</sup>, обусловленные поглощением олефинов.

На ИК-спектрах фуллеренов обнаруживаются четыре полосы поглощения в областях 1429, 1183, 577 и 528 см<sup>-1</sup>. На ИК-спектрах композитов ПММА+C<sub>60</sub> проявляются как полосы поглощения ПММА, так и полосы поглощения фуллерена C<sub>60</sub> в областях 577, 528, 1429, 1183 см<sup>-1</sup>, две последние из которых совпадают с собственными полосами поглощения чистого ПММА. Отметим, что влияние фуллеренов C<sub>60</sub> и C<sub>70</sub> на ИК-спектры поглощения композитов сводится лишь к изменениям в интенсивностях полос поглощения.

Кривые деформации чистых образцов, а также композитов ПММА и ПС почти линейны и не отличаются друг от друга. С ростом концентрации фуллеренов происходит снижение разрывных прочности  $\sigma_p$  и деформации  $\varepsilon_p$ , которая довольно незначительна (уменьшается с 5% до 2%). С ростом времени облучения наблюдается также монотонное падение прочности при малом изменении деформации [6-8] (см. таблицу).

Деградация механических свойств композитов ПММА+C<sub>60</sub>, C<sub>70</sub> и ПС+C<sub>60</sub>, C<sub>70</sub> при облучении происходит одинаково и однотипно, однако с разными скоростями. Так, например, в композитах ПММА+C<sub>70</sub> эти изменения происходят быстрее, чем в ПС+C<sub>70</sub>. Об этом также свидетельствуют диаграммы потери массы композитов при облучении (рис.2).



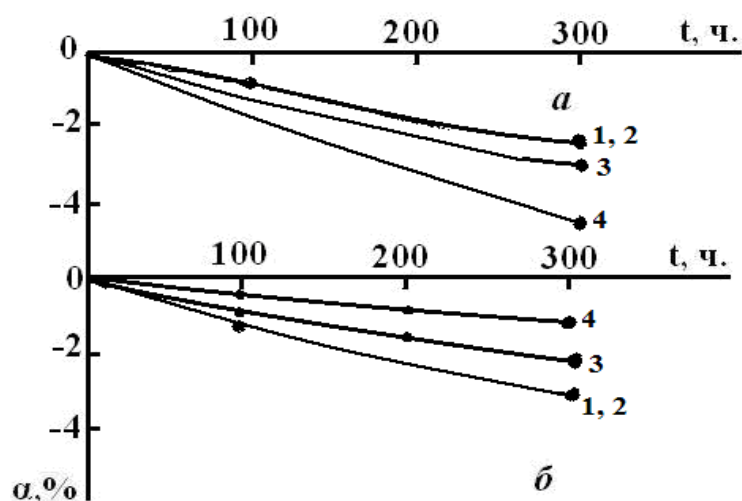


Рис. 2. Потеря массы композитов ПММА+С<sub>70</sub> (а) и ПС+С<sub>70</sub> (б) в зависимости от времени УФ-облучения: 1 – чистые полимеры (С=0); 2 – 1; 3 – 3; 4 – 5% С<sub>70</sub>.

Как видно из рис. 2, с увеличением концентрации фуллерена и времени облучения потеря массы для ПММА+С<sub>70</sub> превосходит таковую для ПС+С<sub>70</sub>. Это может быть связано как с течением радикально-химических реакций деструкции и сшивания, так и улетучиванием низкомолекулярных продуктов фотодеструкции, возможно, и внедрённого фуллерена. Известно, что ПММА относится к деструктурирующимся, а ПС к сшивающимся полимерам [1-4]. Следовательно, конкуренция между процессами сшивки и деструкции цепных молекул при облучении с одной стороны, изменение массового содержания и стабилизирующая роль фуллеренов с другой стороны, обуславливают аномалии в изменениях свойств композитов. При этом физическое состояние (стеклообразное) аморфных композитов сохраняется.

Работа выполнена в соответствии с планом НИР Научно-исследовательского института Таджикского национального университета.

Поступило 23.05.2018 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фойгт И. Стабилизация синтетических полимеров против действия света и тепла. – Л.: Химия, 1978, 391 с.
2. Эммануэль Н.М., Бучаченко А.Л. Физическая химия старения полимеров. – М.: Наука, 1982, 381 с.
3. Заиков Г.Е. Деструкция и стабилизация полимеров. – М.: МИТХТ, 1993, 248 с.
4. Рэнби Б., Рабек Я. Фотодеструкция, фотоокисление, фотостабилизация полимеров. – М.: Мир, 1978, 675 с.
5. Поздняков О.Ф., Попов Е.О., Поздняков А.О. Письма в ЖТФ, 2012, т.38, №23, с.19-24.
6. Туйчиев Ш., Гинзбург Б.М., Рашидов Д. и др. – Высокомолекулярные соединения. Сер. А, 2012, т.54, №8, с.1283-296.
7. Гинзбург Б.М., Меленевская и др. – Высокомолекулярные соединения. Сер. А, 2004, т.46, №2, с.295-303.

8. Туйчиев Ш., Гинзбург Б.М. и др. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн.н., 2007, №3(129), с.59-64.

**Ш.Туйчиев**, Дж.Рашидов, С.Х.Табаров, Л.Туйчиев, Ш.Акназарова, Ф.Х.Содиқов

## **ФОТОКУҲНАШАВИИ НАНОКОМПОЗИТҲОИ ПОЛИМЕРИИ АМОРФӢ**

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Тағйироти сохтор ва хосиятҳои нанокмпозитҳои аморфӣ дар асоси полиметилметакрилат, полистирол ва нанозарраҳои фуллеренӣ сохташуда дар майдони таъсири нурбориши ултрабунафш омӯхта шуданд. Нишон дода шудааст, ки сохтор, хосиятҳои механикӣ ва гармии нанокмпозитҳо бо афзоиши вақти нурбориш ба тариқи экстремалӣ тағйир меёбанд.

**Калимаҳои калидӣ:** полимер, фуллерен, композит, нурбориш, сохтор, мустаҳкамӣ, деформатсия, фотокуҳнашавӣ.

**Sh.Tuichiev**, D.Rashidov, S.Kh.Tabarov, L.Tuichiev, Sh.I.Aknazarova, F.Kh.Sodikov

## **THE PHOTOAGING OF AMORPHOUS POLYMERIC NANOCOMPOSITES**

*Tajik National University*

Investigation of the change in the structure and properties of amorphous PMMA and PS nanocomposites in the field of UV irradiation were studied. It is shown that during photoaging an extremal changes in the structure, mechanical and thermal properties of the composites are observed.

**Key words:** polymer, fullerene, composite, irradiation, structure, strength, deformation, photoaging.

УДК 541.64:539.2

С.Дж.Гафуров, член-корреспондент НАН Таджикистана Т.Б.Бобоев**ВЛИЯНИЕ ФУЛЛЕРЕНА C<sub>60</sub> НА ФОТОДЕСТРУКЦИИ  
ПОЛИМЕТИЛМЕТАКРИЛАТА***Таджикский национальный университет*

*Исследовано влияние фуллера на светостойкость полиметилметакрилата в условиях действия УФ-излучения. Показано, что введение в полимер химических добавок приводит к снижению фотодеструктивных процессов. Установлено, что с ростом концентрации фуллера резко уменьшается падение молекулярной массы полимера и повышается ее светостойкость.*

**Ключевые слова:** *полиметилметакрилат, фуллерен, УФ-облучение, разрывная прочность, разрывная деформация, молекулярная масса, светостойкость.*

Деструкция полимеров и полимерных материалов является часто встречающимся явлением, которое приводит к падению молекулярной массы полимера и резкому ухудшению его физических и механических свойств [1-5]. Такое поведение физических свойств полимеров связывается со многими факторами, вызывающими деградацию полимера: УФ-свет, тепловое, химическое воздействие и др. [6]. УФ-излучение является наиболее распространенным фактором, вызывающим фотодеструкцию полимеров и приводящим к изменению их структуры и эксплуатационных характеристик [7,8]. Для предотвращения деструкции и сшивания полимеров под действием УФ-света, присутствующего в солнечном свете и испускаемого различными источниками света, применяют различные химические добавки. В настоящее время известно несколько способов защиты полимеров, подвергающихся облучению [9-11]. Введение в полимер низкомолекулярных добавок – светостабилизаторов (олигомеров, сажи, красителей и др.) позволяет повысить их устойчивость к действию УФ-излучения [11-14]. В связи с этим перед нами стояла задача исследования светостойкости некоторых фуллеренсодержащих полимеров, на примере полиметилметакрилата (ПММА), и выявления природы взаимодействия частиц наполнителя с полимерной матрицей.

В качестве объекта исследования был выбран широко применяемый на практике ПММА, соответствующий ГОСТ 16667. В качестве светостабилизатора использовали фуллерен C<sub>60</sub> с химической чистотой 99.7%. Для получения композиционного материала ПММА+C<sub>60</sub> готовили достаточное количество концентрированного раствора фуллера в бромбензоле (BrBe). В таком же растворителе готовили раствор исследуемого полимера, затем в него в нем добавили требуемый объем концентрированного раствора фуллера C<sub>60</sub> и тщательно довели до получения оптически однородной массы. Получаемая смесь растворов полимера и C<sub>60</sub> подбиралась с расчётом получения более удобной для отлития плёнок (~4-5 масс.%). Далее смесь отливалась на сушку до полного испарения растворителя.

---

**Адрес для корреспонденции:** Гафуров Сафархон Джурахонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: gafurovs.d@mail.ru

Растворение полимера и отливка плёнок производилась при комнатных условиях. Толщина получаемых плёнок варьировалась в пределах 50-100 мкм. Концентрацию фуллерена в композициях изменяли в интервале  $C=0-8$  масс. %.

Светостойкость образцов к УФ-излучению оценивали по изменению разрывной прочности облученных ( $\sigma_t$ ) и необлученных ( $\sigma_0$ ) образцов пленок в зависимости от времени облучения ( $t$ ) и по изменению молекулярной массы образцов, стабилизирующих и нестабилизирующих от времени предварительного облучения. Для механических испытаний из полученных плёнок специальным ножом вырезали образцы в форме двойной лопаты шириной 2 мм и длиной рабочей части 22 мм.

Механическое испытание образцов производили при комнатных условиях на разрывной машине РМ-1 (ГОСТ 1262-68) со скоростью движения подвижного зажима 12 мм/мин. Облучение образцов производили монохроматическим светом лампы холодного свечения БУВ-30 с длиной волны  $\lambda=254$  нм с интенсивностью падающего излучения  $j=5.35 \cdot 10^{25}$  квант/м<sup>2</sup>с, так как 80% ее излучения приходится на эту длину волны.

Молекулярную массу определяли вискозиметрическим методом при комнатной температуре.

Результаты механических испытаний необлученных фуллереннаполненных образцов пленок ПММА с различным содержанием фуллерена приведены на рис. 1 (а, б).

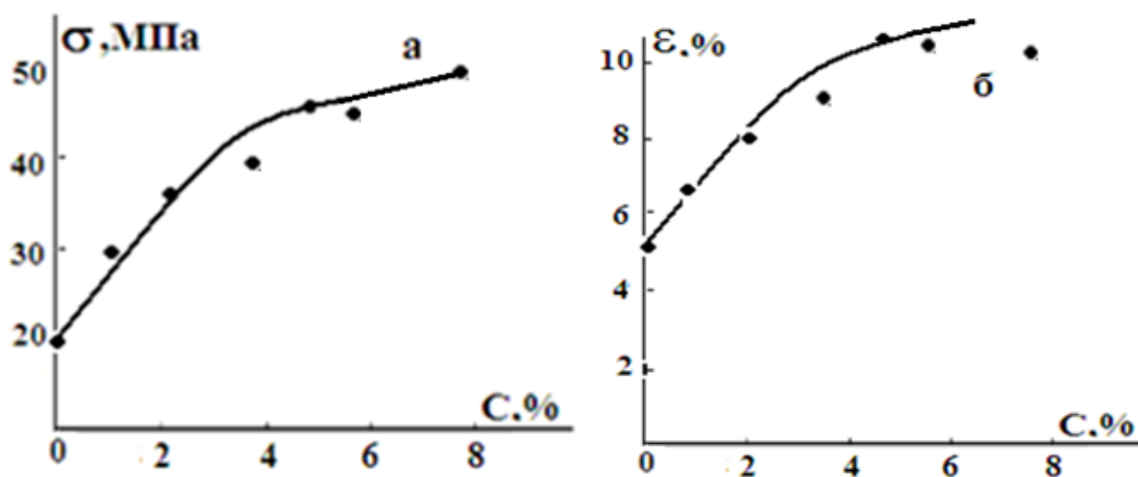


Рис.1. Зависимости разрывной прочности (а) и разрывной деформации (б) образцов ПММА от концентрации фуллерена  $C_{60}$ .

Из рисунков видно, что с ростом концентрации фуллерена наблюдается плавный рост как разрывной прочности  $\sigma_p$ , так и разрывной деформации  $\varepsilon_p$ .

На рис. 2 приведены зависимости относительного изменения разрывной прочности  $\sigma_t/\sigma_0$  от времени облучения УФ-светом ( $t$ ), где  $\sigma_t$  и  $\sigma_0$  – разрывные прочности облученных и исходных образцов.

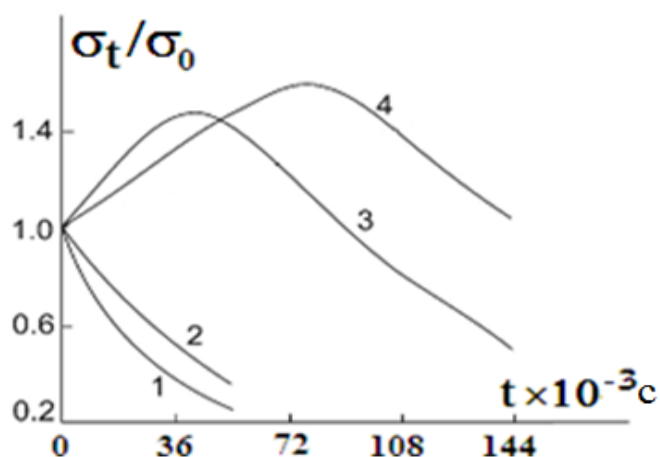


Рис. 2. Зависимость светостойкости  $\sigma_t/\sigma_0$  ПММА+ $C_{60}$  от времени УФ-облучения. 1- $C=0$ ; 2-1; 3-3; 4-5%  $C_{60}$ .

Видно, что при одинаковых временах предварительного облучения светостойкость исходного образца снижается на 60%, а у образца с 1%-м содержанием  $C_{60}$  на 50%. Для образцов с 3 и 5% содержанием фуллерена сначала возрастает до 35%, после чего снижается. Зато с ростом концентрации  $C_{60}$  в интервале 3-5% максимумы светостойкости смещаются в сторону больших времен облучения.

Для изучения влияния фуллерена  $C_{60}$  на светостойкость ПММА мы также изучали относительное изменение молекулярной массы  $M_t/M_0$  ( $M_t$ -и  $M_0$  – молекулярная масса облученного и исходного образцов) в зависимости от концентрации  $C_{60}$  ( $C=10^{-3}$ - $10^{-2}\%$ ) и времени предварительного облучения  $t$  (рис.3).

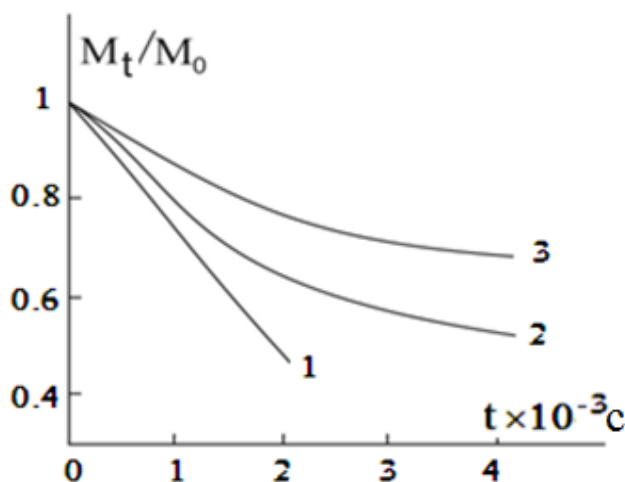


Рис. 3. Зависимости относительного изменения молекулярной массы пленок ПММА+ $C_{60}$  от времени предварительного облучения. 1 – ненаполненный; 2 –  $10^{-3}\%$   $C_{60}$ ; 3 –  $10^{-2}\%$   $C_{60}$

Результаты опытов показывают, что с ростом  $C_{60}$  в полимер резко уменьшается падение молекулярной массы по сравнению с исходным полимером.

Так, ММ исходных образцов, облученных в течение 4 ч уменьшается на 60%, в то же время для фуллереннаполненных образцов с  $C=10^{-3}$ - $10^{-2}\%$  ММ уменьшается на 43 и 28% соответственно.

### З а к л ю ч е н и е

Таким образом, результаты исследования показывают, что молекулы фуллерена  $C_{60}$ , играя роль светостабилизатора в условиях УФ-облучения полимерных композитов, стимулируют процессы структурирования и предохраняют макромолекулы от фоторазрушения, что в результате способствует улучшению механических свойств и повышению светостойкости изученных образцов ПММА.

*Поступило 30.12.2020 г.*

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Заиков Г.Е. Деструкция и стабилизация полимеров. – М.: Изд-во МИТХТ им. М.В.Ломоносова, 1993, 248 с.
2. Эмануэль Н.М., Заиков Г.Е., Крицман В.А. Химическая кинетика и цепные реакции. – М.: Наука, 1989, 312 с.
3. Zaikov G.E. Degradation and stabilization Polymers. – N.Y.: Novasci. Pule., 1999, 296 p.
4. Parfenov E.A., Zaikov G.E. Biotic Type Antioxidants. – Utrecht: VSP Intern. Sci. Pule., 2000, 560 p.
5. Бобоев Т.Б., Гафуров С.Дж. Влияние режима предварительной термообработки на светостойкость полистирола. – Известия РАН. Механика твердого тела, 2020, №2, с.159-163.
6. Allen NS, Edge M. Fundamentals of polymer degradation and stabilization. – London: Elsevier Applied Science, 1992 [Chapter 4].
7. Бадамшипа Э.Р., Гафурова М.П. Модификация свойств полимеров путем допирования фуллерена  $C_{60}$ . – Высокомолекул. соед., серия Б, 2008, т. 50, №8, с.1572-1584.
8. Истамов Ф., Бобоев Т. Влияние фуллерена  $C_{60}$  на кинетику фотодеструкции полиметилметакрилата. – Тез. докл. НТК «Современные проблемы физики конденсированных сред», Душанбе, 2007, с.82-83.
9. Туйчиев Ш.Т. и др. – Влияние фуллерена  $C_{60}$  на светостойкость полиэтилена низкой плотности и атактического ПММА. – ДАН РТ, 2015, т.58, №51, с.63-66.
10. Гафуров С.Дж., Бобоев Т.Б., Истамов Ф.Х. Влияние термомеханического воздействия на светостойкость полиэтилена. – Прикладная физика, 2018, №3, с.70-73.
11. Туйчиев Ш., Гинзбург Б.М., Осава Е., Бобоев Т., Истамов Ф., Рашидов Дж., Дустов И. Исследование светостойкости фуллеренсодержащих полимеров. – Изв. АН РТ, Отд. физ. мат., хим. и геол. н. 2007, №3, с.59-64.
12. Ануфриева Е.В., Краковяк М.Г. и др. Взаимодействие полимеров с фуллереном. – ФТТ, 2002, т.44, в.3, с.443-450
13. Гладченко С.В., Полоцкая Г.А. и др. Исследование твердофазной композиции полистирол-фуллерен. – ЖТФ, 2002, т.72, в.1, с.105-109.
14. Тропцкий Б.Б., Домрачов Г.А. и др. Исследование влияния фуллерена  $C_{60}$  на стабилизацию полиметилметакрилата при воздействии ионизирующего излучения. – Доклады РАН, 2002, т.363, №4, с.510-511.

С.Дж.Гафуров, Т.Б.Бобоев

**ТАЪСИРИ ФУЛЛЕРЕНИ C<sub>60</sub> БА ФОТОВАЙРОНШАВИИ  
ПОЛИМЕТИЛМЕТАКРИЛАТ***Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Таъсири фуллерен ба устувории рушноӣ полиметилметакрилат дар шароитҳои нурафканиш бо нури УВ таҳқиқ карда шудааст. Нишон дода шудааст, ки воридкунии иловаҳои химиявӣ ба полимер ба пастшавии равандҳои фотовайроншавӣ оварда мерасонад. Муқаррар карда шудааст, ки бо афзоиши консентратсияи фуллерен яку яқбора массаи молекулавии полимер кам шуда, устувории он ба таъсири рушноӣ баланд мешавад.

**Калимаҳои калидӣ:** *полиметилметакрилат, фуллерен, афканишоти УВ, устуворӣ ба кандашавӣ, устуворӣ ба деформатсияшавӣ, массаи молекулавӣ, рушноӣустуворӣ.*

S.J.Gafurov, T.B.Boboev

**EFFECT OF FULLERENE C<sub>60</sub> ON PHOTODESTRUCTION OF  
POLYMETHYLMETAKRILAT***Tajik National University*

The effect of fullerene on the lightfastness of polymethyl methacrylate under UV radiation has been studied. It is shown that the introduction of chemical additives into the polymer leads to a decrease in photodestructive processes. It was found that with an increase in the fullerene concentration, the drop in the molecular weight of the polymer sharply decreases and its lightfastness increases.

**Key words:** *polymethylmethacrylate, fullerene, UV irradiation, tensile strength, tensile deformation, molecular weight, lightfastness.*

УДК 546: 591.272

М.Т.Тагоев, Е.Ю.Малышева, Ш.Д.Отаев, Ш.О.Аъзамов,

академик НАН Таджикистана У.М.Мирсаидов

**ПОЛУЧЕНИЕ ГЛИНОЗЁМА И ОКСИДА ЖЕЛЕЗА ИЗ  
АЛЮМОСИЛИКАТНЫХ РУД ТАДЖИКИСТАНА СПЕКАНИЕМ С NaOH***Институт химии им.В.И.Никитина НАН Таджикистана*

*В статье приводятся результаты спекания алюмосиликатных руд: каолиновых глин, зелёных каолиновых глин и аргиллитов с NaOH. Найдены оптимальные параметры извлечения оксидов алюминия и железа после водно-кислотной обработки спека. Среди алюмосиликатных руд аргиллиты при спекании с NaOH являются наиболее предпочтительными.*

**Ключевые слова:** спекание, разложение, водно-кислотная обработка, извлечение, оксид алюминия, оксид железа, NaOH.

Одной из основных задач, которые стоят перед экономикой Таджикистана, является обеспечение ОАО «ТАЛКО» местными сырьевыми материалами, в том числе глинозёмом. Однако в республике отсутствует качественное алюминийсодержащее сырьё. Поэтому перед исследователями стоит задача по комплексному использованию низкокачественных алюмосодержащих руд.

Как известно, глинозём в основном получают по методу Байера. Способ Байера – это гидрохимический способ получения глинозёмов из бокситов. Этот способ был открыт в России К.И.Байером в 1895-1898 гг. Большой вклад в разработку способа, особенно для выщелачивания бокситов диаспор-бемитового типа, внесли учёные Д.П.Манойлов, Ф.Н.Строков, Ф.Ф.Вольф, И.С.Липеев, С.И.Кузнецов и др. В настоящее время более 95% глинозёма получают способом Байера [1].

В настоящей работе изучено взаимодействие алюмосиликатных руд с твёрдым NaOH, в отличие от способа Байера, где используют щелочной раствор NaOH.

Для химического анализа руд использован метод комплексонометрии – для определения алюминия, метод пламенной фотометрии – для определения щелочных металлов, весовой метод и др. [2-4].

Методика эксперимента была разработана с учётом параллельных образцов руд, с использованием среднего значения анализа. Спекание руд с NaOH проводили в муфельной шахтной печи СШОЛ с мешалкой, температурой до 1250°C и объёмом 2.5 л. Продолжительность нагрева составила 60 мин.

Рентгенофазовый и дифференциально-термический анализы проводили на усовершенствованных аппаратах с программным обеспечением марки ДРОН-2 и на дериватографе Q-1500 фирмы МОМ» системы Паулик-Эрдей с рабочим диапазоном температуры от комнатной температуры до 1000°C. Скорость нагрева 10°C/мин с автоматической загрузкой образцов.

---

*Адрес для корреспонденции:* Тагоев Муродбек Махмадалиевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: murodbek.tagoev@mail.ru



Рентгенофазовый анализ (РФА) проводили во всех этапах работы от исходных веществ до конечных продуктов, учитывая процесс спекания и водно-кислотной обработки.

Дифференциально-термический анализ проводили также последовательно во всех этапах эксперимента.

Изучено спекание алюмосиликатных руд: каолиновых глин месторождения Чашма-Санг, зелёных каолиновых глин и аргиллитов месторождения Зидды. Химический состав этих руд приведён в табл.1.

Таблица 1

Химический состав алюмосиликатных руд (в %)

Руда	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> +FeO	Na <sub>2</sub> O	K <sub>2</sub> O	CaO	SiO <sub>2</sub>	П.п.п.
Каолиновые глины (Чашма-Санг)	24.6	11.0	0.3	2.65	1.0	50.1	6.3
Зелёные каолиновые глины с содержанием меди и кобальта (Чашма-Санг)	20.4	12.0	1.0	2.45	-	51.3	10.0
Аргиллиты месторождения Зидды	31.0	8.74	0.1	2.95	1.0	42.9	10.0

Как видно из табл.1, более предпочтительными для комплексной переработки алюмосиликатных руд являются аргиллиты месторождения Зидды, в которых содержание Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> составляет 31.1%, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> – 8.74%. Кроме того, аргиллиты месторождения Зидды содержат 2.95% K<sub>2</sub>O, и при комплексной переработке можно получить калийные удобрения.

Ранее в работах [5, 6] были изучены оптимальные параметры переработки каолиновых глин, зелёных каолиновых глин (зелёный оттенок руд свидетельствует о содержании в рудах меди и кобальта) и аргиллитов месторождения Зидды.

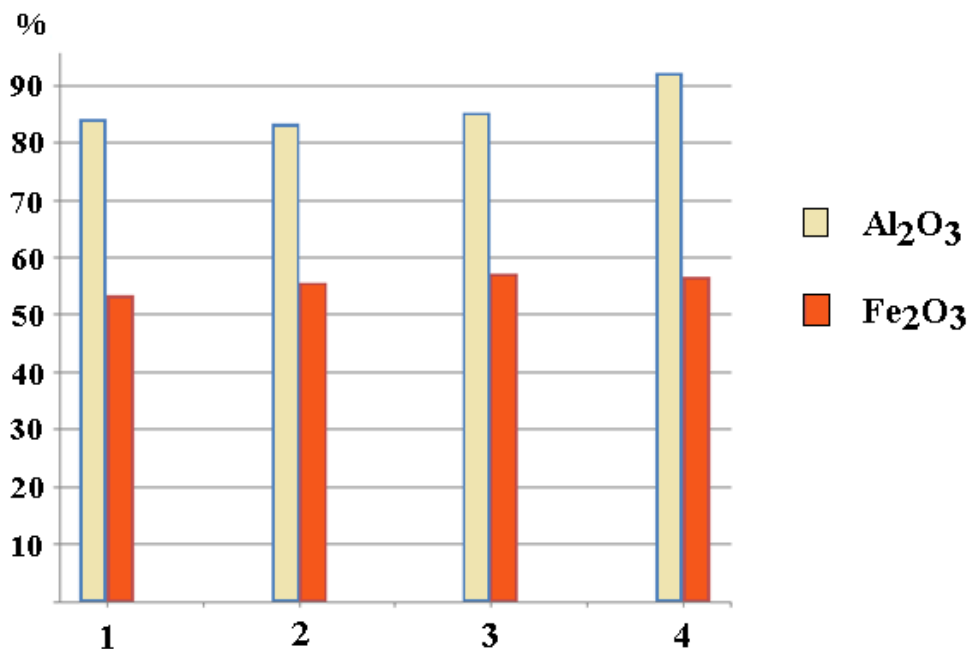
С учётом дополнительных экспериментальных работ нами обобщено выделение полезных компонентов из алюмосодержащих руд (табл.2, рис.).

Как видно из табл.2 и рисунка, наибольшие степени извлечения Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> наблюдаются для аргиллитов при спекании с NaOH с последующей обработкой спека 40% серной кислотой. Для всех алюмосиликатных руд степени выделения Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> колеблются от 53.5% (каолиновые глины Чашма-Санга) до 57.3% (зелёные глины). Низкое выделение оксида железа, по-видимому, обусловлено трудноразлагаемыми железосодержащими минералами, которые имеются в составе руд.

Таблица 2

Спекание алюмосиликатных руд с гидроксидом натрия

Спекание с NaOH при t=750-850°C, τ=60 мин	Алюмосиликатные руды							
	Каолиновые глины Чашма-Санга		Зелёные глины Чашма-Санга				Аргиллитовые руды Зидды	
Концентрация кислоты	HNO <sub>3</sub> – 40%		H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> – 40%		HCl – 20%		H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> – 40%	
Оксиды	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
Извлечение при оптимальных параметрах: t=95-98°C, τ=60мин, %	84.2	53.5	83.5	55.6	85.4	57.3	92.2	56.7



**Рисунок.** Сравнительная оценка извлечения оксидов алюминия и железа из алюмосиликатных руд: 1 – каолиновые глины месторождения Чашма-Санг + HNO<sub>3</sub>; 2 – зелёные глины месторождения Чашма-Санг + H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>; 3 – зелёные глины месторождения Чашма-Санг + HCl; 4 – аргиллиты месторождения Зидды + H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>.

Поступило 01.12.2020 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник химика / Под ред. Б.П. Никольского. – Л.: Химия, 1971.
2. Крешков А.П. Основы аналитической химии. – М.: Химия, 1970.
3. Пришбил Р. Комплексоны в химическом анализе. – М.: ИЛ, 1960.
4. Полуэктов Н.С. Методы анализа по фотометрии пламени. – М.: Химия, 1967.
5. Мирзоев Д.Х., Аъзамов Ш.О., Отаев Ш.Д., Мирсаидов У.М. Водно-солянокислотное разложение алюмосиликатных руд с предварительным спеканием в гидроксидом натрия. – ДАН РТ, 2019, т.62, №5, с.467-469.
6. Отаев Ш.Д., Мирзоев Д.Х., Джамолов Н.Н., Мирсаидов У.М. Физико-химические основы переработки каолиновых глин месторождения Чашма-Санг Таджикистана спеканием с гидроксидом натрия с последующим азотнокислотным разложением. – Докл. НАНТ, 2020, т.63, №3-4.

**М.Т.Тағоев, Е.Ю.Малишева, Ш.Д.Отаев, Ш.О.Аъзамов, У.М.Мирсаидов**  
**ИСТЕҲСОЛИ ОКСИДҲОИ АЛЮМИНИЙ ВА ОҶАН АЗ МАЪДАНИ**  
**АЛЮМИНОСИЛИКАТИИ ТОҶИКИСТОН БО РОҶИ ПҶХТАН БО NAOH**

*Институти кимиёи ба номи В.И.Никитини Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаҳои пӯختани маъданҳои алюмосиликатӣ: гилҳои каолинӣ, гилҳои каолинии сабз ва аргиллитҳо бо NaOH оварда шудаанд. Чузъҳои мусоидтарини истихроҷи оксидҳои алюминий

ва оҳан пас аз коркарди обӣ-кислотагии пӯхта ёфт шуданд. Аргиллитҳо аз байни маъданҳои алюмосиликатӣ ҳангоми бо NaOH пӯхтан афзалтар доништа шуданд.

*Калимаҳои калидӣ:* пӯхтан, таҷзия, коркарди обӣ-кислотагӣ, истихроҷ, оксиди алюминий, оксиди оҳан, NaOH.

M.T.Tagoev, E.Yu.Malysheva, Sh.D.Otaev, Sh.O.Azamov, U.M.Mirsaidov

## ALUMINUM AND IRON OXIDES OBTAINING FROM TAJIKISTAN ALUMINOSILICATE ORES BY SINTERING WITH NaOH

*V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National academy of sciences of Tajikistan*

The article presents the sintering results of aluminosilicate ores: kaolin clays, green kaolin clays and argillites with NaOH. The optimal parameters for the extraction of aluminum and iron oxides after the water-acid treatment of the sinter have been found. Among aluminosilicate ores, argillites are most preferred when sintered with NaOH.

*Key words:* sintering, decomposition, water-acid treatment, extraction, aluminum oxide, iron oxide, NaOH.

УДК 539.01÷546.791; 539.12÷621.039

М.Д.Бобоёров, Б.Б.Баротов, И.Мирсаидзода (И.У.Мирсаидов), К.О.Бобоев,

академик НАН Таджикистана У.М.Мирсаидов

**ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СЕРНОКИСЛОТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ  
УРАНСОДЕРЖАЩИХ РУД ТАДЖИКИСТАНА***Агентство по ядерной и радиационной безопасности НАН Таджикистана*

*В статье приводятся результаты сернокислотного разложения урансодержащих руд Таджикистана. Найдены оптимальные параметры обработки урансодержащих руд месторождений «Северный», «Центральный» и «Западный Таджикистан» серной кислотой. Предложена принципиальная технологическая схема переработки урановых руд.*

**Ключевые слова:** урановые руды, сернокислотное разложение, переработка, оптимальные параметры.

Урановые месторождения Таджикистана сыграли важную роль в практическом решении возникшей в послевоенные годы в СССР проблеме радиоактивного сырья. Пионером этой отрасли стал комбинат №6 (в настоящее время ГП «Таджикредмет»). Из руды, добытой на месторождениях республики, был получен первый советский урановый концентрат. В Советском Союзе гидрометаллургический завод (ГМЗ) в составе комбината ГП «Таджикредмет» занимал ведущее место и выпускал 20% от общего объема получаемого концентрата урана в СССР [1].

Обнаружить уран можно в совершенно различном геологическом окружении, а для добычи руд с ним пригодны (и в какой-то момент использовались) почти все существующие методы. Также разрабатывались и новые технологии для удовлетворения специальных потребностей в этой отрасли промышленности. Разнообразие месторождений урановой руды выливается в вариации технологии ее последующей переработки.

Наличие в урановой технологии такого разнообразия методов добычи и обработки урана обусловлено тем, что урановые руды могут иметь весьма различный состав. В настоящее время технологические схемы обработки урановой руды разрабатываются с учетом минералогического состава и характеристик обрабатываемой руды. Как известно, характеристики обрабатываемой руды, добываемой из различных точек даже одной шахты, могут в значительной степени различаться. Поэтому при проведении технологических работ, направленных на разработку технологической схемы для конкретного предприятия, такие различия определяют количественно и затем обеспечивают такую комбинацию операций, которая приведет к наибольшей рентабельности технологического процесса [2].

Перспективы на будущее включают выщелачивание урана с последующей его сорбцией сорбентом из раствора, десорбции урана и получения товарной закиси-оксида урана.

В настоящей работе изучено сернокислотное разложение урановых руд Таджикистана.

---

*Адрес для корреспонденции:* Баротов Бахтиёр Бурхонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр.Рудаки, 33, Агентство по ядерной и радиационной безопасности НАНТ. E-mail: b.barotov@nrta.tj

Ранее в работах [2-6] была изучена кислотная обработка урановых руд и вторичная обработка отходов урановой промышленности. Однако систематическое изучение урансодержащих руд Таджикистана в литературе отсутствует.

В таблице приводится химический состав урансодержащих руд отдельных образцов месторождений «Северный Таджикистан», «Центральный Таджикистан» и «Западный Таджикистан».

Таблица

Химический состав урансодержащих руд Таджикистана

№	Руда	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	TiO <sub>2</sub>	MnO <sub>2</sub>
1	Северный	59.4	7.2	16.1	1.76	1.27
2	Центральный	53.1	8.25	6.3	1.4	0.26
3	Западный	69.4	13.7	8.13	0.53	0.27

Данные РФА показывают, что основными урановыми минералами являются титанаты, силикаты урана, уранинит, известняковые титановые и марганцовые минералы.

В качестве примера на рис. 1 приведена штрихдифрактограмма пробы руды месторождения «Северный Таджикистан».

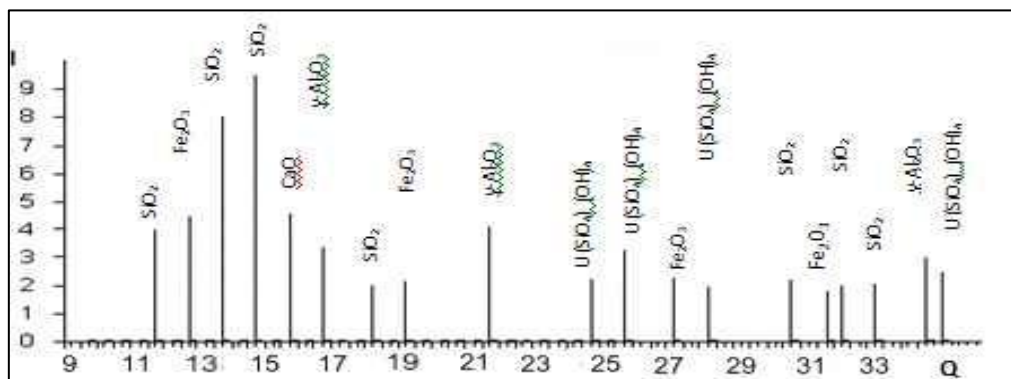


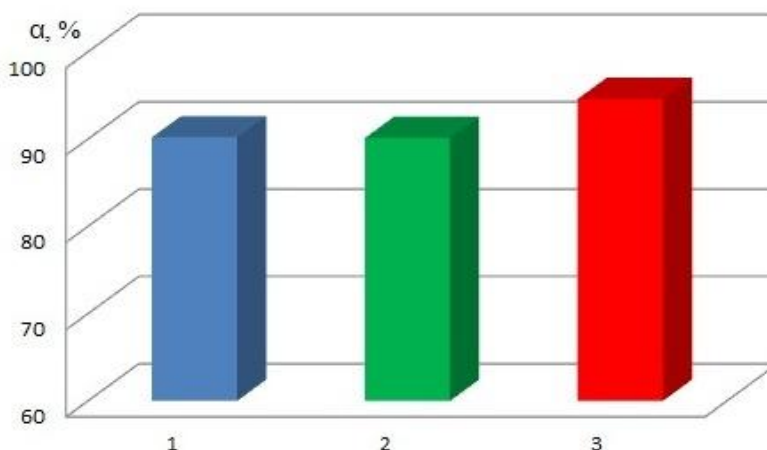
Рис. 1. Штрихдифрактограмма пробы руды, отобранной из месторождения «Северный Таджикистан».

Как видно из табл. 1 и рис. 1, руды Таджикистана являются силикатными, содержание SiO<sub>2</sub> колеблется от 53.1 до 69.4%. Содержание урана в образцах составляет от 0.11 до 0.24%. Учитывая, что руды являются силикатными, для них использовали кислотное разложения с применением различных окислителей. При полном удалении урана и других радиоактивных веществ, руду можно перерабатывать комплексно с получением полезных компонентов – оксидов алюминия и железа.

В настоящей работе, используя результаты работ [2,3], рассматривали вопрос сравнительной оценки разложения урановых руд. Провели исследования по сернокислотному разложению руд, где подбирались размеры частиц измельченной руды, оптимальные концентрации кислоты, продолжительность процесса, применение окислителей и другие параметры технологического процесса.

На рис. 2 приведены диаграммы извлечения урана различных месторождений и зависимость степени извлечения урана от параметров технологического процесса.

Как видно из рис. 2, извлечение урана составляет свыше 90% и наиболее эффективной является руда месторождения «Западный Таджикистан». Хотя содержание урана в ней меньше, чем в других урановых рудах.

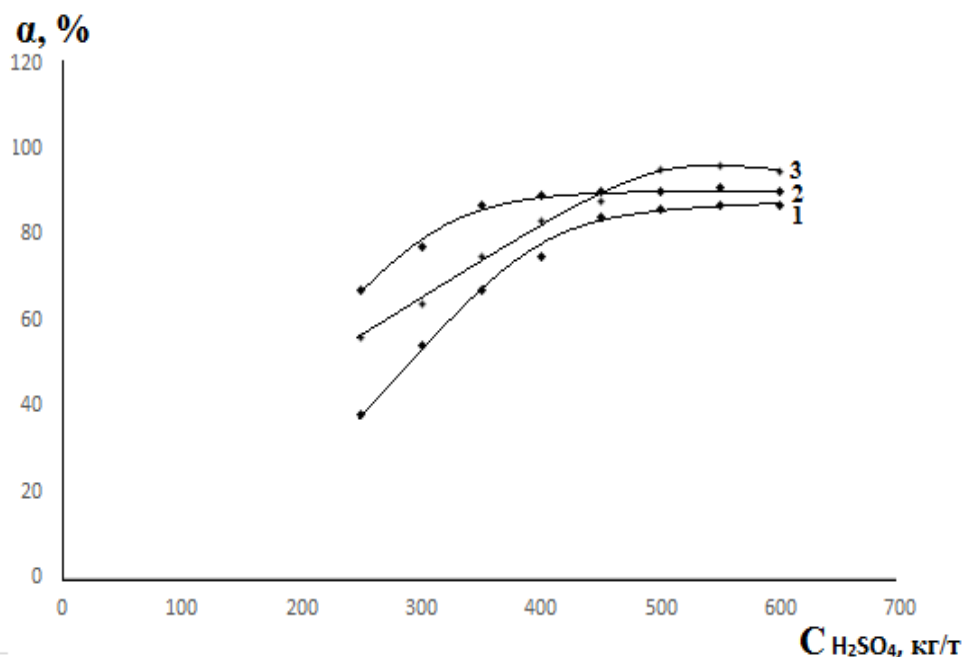


**Рис 2.** Сравнительная оценка степени извлечения урана из различных месторождений Таджикистана.

Здесь и на рис. 3-5:

- 1 – месторождение «Северный Таджикистан»;
- 2 – месторождение «Центральный Таджикистан»;
- 3 – месторождение «Западный Таджикистан».

На рисунках 3-5 приведена зависимость степени извлечения урана из руд от концентрации серной кислоты, температуры и длительности процесса, соответственно. По характеру кривые мало отличаются друг от друга, что свидетельствует о том, что минералогический состав урановых руд Таджикистана является близким.



**Рис. 3.** Сравнительная оценка степени извлечения урана из уранодержащих руд Таджикистана в зависимости от концентрации серной кислоты.

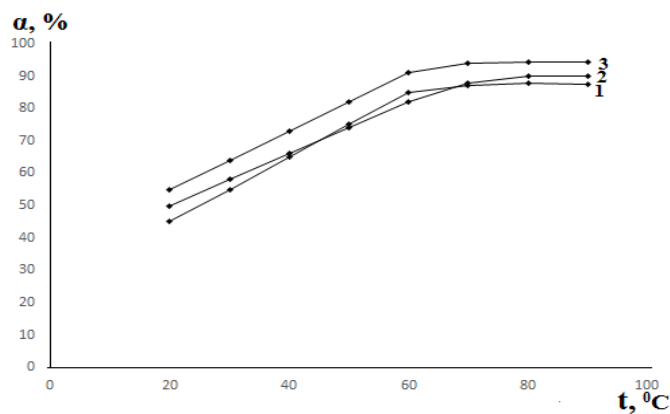


Рис. 4. Сравнительная оценка степени извлечения урана из урансодержащих руд Таджикистана в зависимости от температуры.

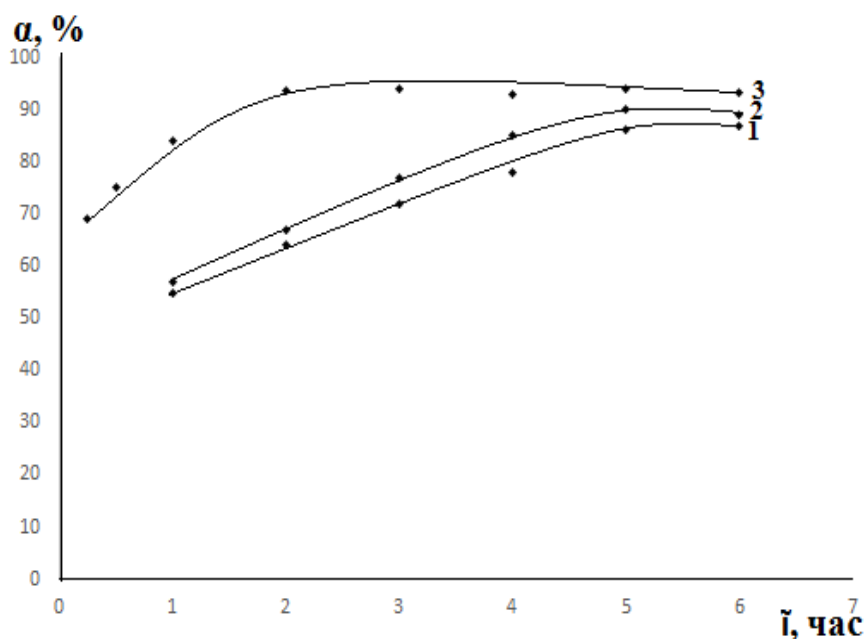


Рис. 5. Сравнительная оценка степени извлечения урана из урансодержащих руд Таджикистана в зависимости от продолжительности процесса выщелачивания.

Таким образом, в работе изложены физико-химические и технологические основы переработки урановых руд Таджикистана и разработана принципиальная технологическая схема их переработки с получением  $U_3O_8$ .

Поступило 04.01.2021 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Разыков З.А., Гусаков Э.Г., Маруценко А.А., Ботов А.Ю., Юнусов М.М. Урановые месторождения Таджикистана. – Худжанд: ООО «Хуросон», 2001, 2012 с.
2. Мирсаидов И.У. Физико-химические основы получения урановых концентратов из отходов и сырьевых материалов. – Душанбе: Дониш, 2014, 107 с.

3. Ходжиев С.К., Назаров Х.М., Хочиён М.М., Ахмедов М.З., Баротов Б.Б., Пулатов М.С., Мирсаидов И.У. Возможности переработки урансодержащих руд месторождения «Центральный Таджикистан». – ДАН РТ, 2017, т.60, №3-4, с.168-172.
4. Ходжиев С.К., Пулатов М.С., Муминов С.В., Бахронов С.М., Ахмедов М.З., Мирсаидов И.У. Физико-химические основы переработки урановых руд сернокислотным разложением. – ДАН РТ, 2017, т.60, №5-6, с.247-250.
5. Ходжиев С.К., Назаров Х.М., Баротов Б.Б., Бобоёров М.Д., Мирсаидов У.М. Сернокислотное выщелачивание урана из руд месторождения «Центральный Таджикистан». – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2018, №4, (169), с.71-75.
6. Ходжиев С.К., Назаров Х.М., Бобоёров М.Д., Мирсаидов У.М. Физико-химические свойства урановых руд месторождения «Центральный Таджикистан». – ДАН РТ, 2018, т.61, №2, с.183-189.

**М.Д.Бобоёров, Б.Б.Баротов, И.Мирсаидзода (И.У.Мирсаидов), К.О.Бобоев, У.М.Мирсаидов**  
**АСОСҲОИ ФИЗИКИҶО-ХИМИЯВИИ ҶУДОКУНИИ УРАН АЗ КОНҲОИ**  
**УРАНДОРИ ТОҶИКИСТОН БО КИСЛОТАИ СУЛФАТ**

*Агентии амнияти ядрои ва радиатсионии АМИ Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаҳои ҷудокунии уран аз конҳои урандор тариқи кислотаи сулфат оварда шудаанд. Параметрҳои оптималии коркард намудани конҳои урандори «Тоҷикистони Шимолӣ», «Тоҷикистони Марказӣ» ва «Тоҷикистони Ғарбӣ» муайян карда шудаанд. Инчунин нақшаи технологияи коркарди конҳои уран пешниҳод карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** конҳои уран, ҷудокунӣ бо кислотаи сулфат, коркард, параметрҳои оптималӣ.

**M.D.Boboyorov, B.B.Barotov, I.Mirsaidzoda (I.U.Mirsaidov), K.O.Boboev, U. M.Mirsaidov**  
**PHYSICO-CHEMICAL BASIS OF SULFURIC ACID DECOMPOSITION OF**  
**URANIZING ORES OF TAJIKISTAN**

*Nuclear and Radiation Safety Agency of NAS of Tajikistan*

The article presents the results of sulfuric acid decomposition of uranium-containing ores in Tajikistan. The optimal parameters of processing of uranium-containing ores: “Northern”, “Central” and “Western Tajikistan” have been found. The basic technological scheme of uranium ore processing is proposed.

**Key words:** uranium ores, sulfuric acid decomposition, processing, optimal parameters.



УДК 622.364.622.765

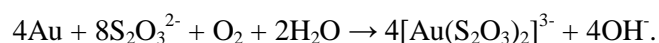
Ш.Р.Самихов, Дж.Б.Асриев

**КИНЕТИКА ТИОСУЛЬФАТНОГО ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ ЗОЛОТА И СЕРЕБРА  
ИЗ КОНЦЕНТРАТА МЕСТОРОЖДЕНИЯ ДУОБА***Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана И.Н.Ганиевым 30.09.2020 г.)*

*В статье приведены результаты исследования кинетики тиосульфатного выщелачивания золота и серебросодержащего концентрата, и определены оптимальные параметры процесса. Показано, что при 12-часовом процессе выщелачивания извлечение золота в раствор составляет 88.1%.*

**Ключевые слова:** *тиосульфатное выщелачивание, месторождение, извлечение золота, извлечение серебра, температура процесса, концентрат, обожженный концентрат.*

Тиосульфатное выщелачивание серебра и золота из минеральных пород впервые было предложено российскими авторами в 1975 г. [1]. Тиосульфаты содержат группу  $(S_2O_3)^{2-}$ , где один атом кислорода заменен на атом серы. Уникальность тиосульфат-иона, имеющего структуру  $[S-SO_3]^{2-}$ , определяется сульфидоподобным атомом серы, который придает ему способность к комплексообразованию. Установлено, что растворение золота или серебра может быть выражено следующим уравнением:



Термодинамическая вероятность приведенной реакции достаточно велика ( $\Delta G^\circ = -96.5$  кДж/моль) и возрастает с повышением температуры. Ион тиосульфата связан с золотом очень прочно [2-7].

Золото с тиосульфат-ионом образует достаточно прочный комплекс состава  $[Au(S_2O_3)_2]^{3-}$ , для которого энергия Гиббса образования составляет  $-1024.9$  кДж/мол. Константа нестойкости этого комплекса равна  $4 \cdot 10^{-30}$ , поэтому стандартный потенциал окисления золота в присутствии ионов  $SO_3S^{2-}$  снижается до  $+0.15$  В, и окисление золота кислородом с переходом в раствор становится термодинамически возможным [8].

В работе [3] показано, что наиболее высокие скорости растворения золота и серебра достигались при температурах  $40-60^\circ C$ , а извлечение Au и Ag из руд «двойной упорности» составляло 75-80%.

Нами был исследован процесс тиосульфатного выщелачивания золотосодержащих концентратов из месторождения Дуоба с содержанием золота 56.4 и серебра 12.2 г/т.

---

**Адрес для корреспонденции:** Самихов Шонавруз Рахимович, Асриев Джононидин Бахриддинович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе ул. Айни, 229/2, Институт химии НАН РТ. E-mail: samikhov72@mail.ru, abjononidin@gmail.com

Первоначально, при постоянстве соотношения Ж:Т, концентрации  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$  и времени обработки концентрата изменяли рН среды и концентрации  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  и  $\text{NaOH}$ . Последние реагенты вводили отдельно в смеси в равных количествах. Результаты исследования представлены в табл. 1.

Таблица 1

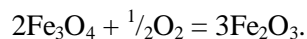
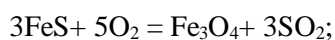
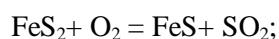
Результаты тиосульфатного выщелачивания Au и Ag из концентратов месторождения Дубоа

τ, ч	рН	Ж:Т	Загрузка реагентов, г/л			Концентрация в растворе, мг/л		Степень извлечения, %	
			$\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$	$(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ , моль/л	$\text{NaOH}$ , моль/л	Au	Ag	Au	Ag
8	9.4	5:1	60	0.1		4.365	0.871	38.7	35.7
8	9.3	5:1	60	0.2		5.561	1.120	49.3	45.9
8	9.1	5:1	60	0.3		5.741	1.208	50.9	49.5
8	8.4	5:1	60		0.1	4.580	0.927	40.6	38.0
8	8.2	5:1	60		0.2	5.211	1.066	46.2	43.7
8	9.3	5:1	60		0.3	5.505	1.125	48.8	46.1
8	8.5	5:1	60	0.1	0.1	7.061	1.422	62.6	58.3
8	8.0	5:1	60	0.2	0.2	7.828	1.593	69.4	65.3

Добавление  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  и  $\text{NaOH}$  в отдельности в смеси тиосульфата натрия с концентратом не давало заметных результатов, в обоих случаях степень извлечения Au и Ag примерно одинакова. Некоторое повышение степеней извлечения получено при совместном введении  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  и  $\text{NaOH}$ , причем с увеличением их количества выход золота и серебра из концентрата увеличивается, однако еще до 30% Au и 35% Ag остаются в концентрате.

С целью улучшения процесса тиосульфатного выщелачивания флотоконцентраты подвергались обжигу при температуре  $600^\circ\text{C}$  в течение 2 часов. При обжиге происходит вскрытие упорных золотосульфидных концентратов, в то же время минералы пирит и арсенопирит окисляются, по этой причине происходит вскрытие содержащегося в них золота. Окисление пирита начинается при температурах  $450-500^\circ\text{C}$ .

При этом предполагается, что первоначально образуется пирротин, который далее окисляется до магнетита и переходит в гематит по следующему механизму реакций:



Результаты исследования приведены в табл. 2. Видно, что при суммарном содержании  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  и  $\text{NaOH}$  от 0.4 до 0.6 моль/л степень извлечения золота повышается от 78.5 до 87.6...89.3%, а степень извлечения серебра от 63.2 до 73.2...75.8%. В то же время повышение суммарного содержания  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  и  $\text{NaOH}$ , от 0.4 до 0.6 не дало существенного увлечения степеней извлечения металлов от концентрата, поэтому количество 0.4 моль/л можно считать оптимальным для использования данных реагентов в технологии извлечения Au и Ag из их концентрата.

Таблица 2

Результаты тиосульфатного выщелачивания Au и Ag из концентрата месторождения Дуоба после их обжига при температуре 600°C

τ, ч	pH	Ж:Т	Загрузка реагентов, г/л			Концентрация в растворе, мг/л		Степень извлечения, %	
			Na <sub>2</sub> S <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	(NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> , моль/л	NaOH, моль/л	Au	Ag	Au	Ag
8	8.7	5:1	60	0.1	0.1	9.357	1.934	78.5	63.2
8	9.2	5:1	60	0.2	0.2	10.644	2.286	89.3	74.7
8	8.9	5:1	60	0.2	0.2	10.442	2.240	87.6	73.2
8	9.0	5:1	60	0.3	0.3	10.537	2.319	88.4	75.8

В следующих сериях опытов при постоянстве всех параметров выяснили влияние концентрации тиосульфата натрия на кинетику выщелачивания Au и Ag из концентрата. Обнаружено, что с повышением содержания Na<sub>2</sub>S<sub>2</sub>O<sub>3</sub> в смеси повышается степень извлечения Au и Ag, при этом оптимальным является расход Na<sub>2</sub>S<sub>2</sub>O<sub>3</sub> 60 г/л, что согласуется также с данными табл. 3.

Таблица 3

Результаты исследования влияния расхода тиосульфата натрия на степени выщелачивания золота и серебра из концентрата месторождения Дуоба

τ, ч	pH	Ж:Т	Загрузка реагентов, г/л			Концентрация в растворе, мг/л		Степень извлечения, %	
			Na <sub>2</sub> S <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	(NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> , моль/л	NaOH, моль/л	Au	Ag	Au	Ag
8	8.7	5:1	20	0.2	0.2	5.817	0.939	48.8	30.7
8	9.6	5:1	30	0.2	0.2	7.450	1.322	62.5	43.2
8	8.7	5:1	40	0.2	0.2	8.511	1.616	71.4	52.8
8	9.0	5:1	50	0.2	0.2	9.548	1.934	80.1	63.2
8	9.3	5:1	60	0.2	0.2	10.537	2.228	88.4	72.8
8	8.8	5:1	60	0.2	0.2	10.633	2.246	89.2	73.4

Повышение продолжительности обработки концентрата с 8 до 12 ч не дает желаемого эффекта (табл. 4), поэтому оптимальное время проведения процесса выщелачивания Au и Ag можно считать 8 ч.

Таблица 4

Результаты исследования влияния продолжительности процесса на степень выщелачивания золота и серебра из концентратов месторождения Дуоба

τ, ч	pH	Ж:Т	Загрузка реагентов, г/л			Концентрация в растворе, мг/л		Степень извлечения, %	
			Na <sub>2</sub> S <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	(NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> , моль/л	NaOH, моль/л	Au	Ag	Au	Ag
2	9.2	5:1	60	0.2	0.2	7.712	1.582	64.7	51.7
4	9.3	5:1	60	0.2	0.2	9.035	1.909	75.8	62.4
8	10.2	5:1	60	0.2	0.2	10.287	2.197	86.3	71.8
10	9.4	5:1	60	0.2	0.2	10.335	2.212	86.7	72.3
12	9.3	5:1	60	0.2	0.2	10.501	2.264	88.1	74.0

При изменении соотношения Ж:Т в смеси по результатам табл. 5, более оптимальная степень извлечения металлов достигается при соотношении Ж:Т = 5:1. Эти данные согласуются с предыдущими результатами.

Таблица 5

Результаты изучения влияния соотношения Ж:Т на степень выщелачивания золота и серебра из концентрата месторождения Дуоба

τ, ч	рН	Ж:Т	Загрузка реагентов, г/л			Концентрация в растворе, мг/л		Степень извлечения, %	
			Na <sub>2</sub> S <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	(NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> , моль/л	NaOH, моль/л	Au	Ag	Au	Ag
8	10.2	2:1	60	0.2	0.2	20.502	3.917	68.8	51.2
8	9.4	3:1	60	0.2	0.2	15.416	3.024	77.6	59.3
8	8.7	4:1	60	0.2	0.2	12.561	2.555	84.3	66.8
8	8.8	5:1	60	0.2	0.2	10.335	2.252	86.7	73.6
8	9.3	6:1	60	0.2	0.2	8.672	1.872	87.3	73.4
8	9.5	7:1	60	0.2	0.2	7.305	1.595	85.8	73.0

Влияние температуры на реакции золота с тиосульфатом натрия изучено в интервале температур 25-90°C при расходе тиосульфата 60 г/л, в присутствии сульфата аммония и каустической соды и продолжительности процесса 8 часов. Концентрат обрабатывали стехиометрическим количеством тиосульфата натрия в течение 12 часов. Степень извлечения золота и серебра в раствор с повышением температуры от 25 до 90°C изменяется следующим образом (табл 6). При температуре 25°C степень извлечения благородных металлов составила: Au – 28.2 и Ag – 23.6%, соответственно. При увеличении температуры до 80-90°C степень извлечения металлов заметно возрастает, составляя: Au – 84.7 и Ag – 73.6%. Дальнейшее повышение температуры не приводит к увеличению степени извлечения данных металлов.

Таблица 6

Влияние температуры процесса на выщелачивание компонентов из концентрата месторождения Дуоба

°C	рН	Ж:Т	Загрузка реагентов, г/л			Концентрация в растворе, мг/л		Степень извлечения, %	
			Na <sub>2</sub> S <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	(NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> , моль/л	NaOH, моль/л	Au	Ag	Au	Ag
25	9.4	5:1	60	0.2	0.2	3.361	0.722	28.2	23.6
30	9.2	5:1	60	0.2	0.2	4.351	0.896	36.5	29.3
40	8.6	5:1	60	0.2	0.2	5.531	1.147	46.4	37.5
50	8.8	5:1	60	0.2	0.2	7.307	1.561	61.3	51.0
60	10.2	5:1	60	0.2	0.2	8.690	1.860	72.9	60.8
70	8.4	5:1	60	0.2	0.2	9.596	2.124	80.5	69.4
80	8.5	5:1	60	0.2	0.2	10.025	2.228	84.1	72.8
90	8.3	5:1	60	0.2	0.2	10.096	2.252	84.7	73.6

### Выводы

В результате исследования кинетики тиосульфатного выщелачивания Au и Ag из концентрата месторождения Дуоба определено, что наиболее оптимальными параметрами процесса переработки данного концентрата являются: рН=9.3-9.4; Ж:Т=5:1; расход Na<sub>2</sub>S<sub>2</sub>O<sub>3</sub> – 60 г/л; суммарный расход (NH<sub>4</sub>)<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> + NaOH = 0.2 моль/л, время обработки – 8 ч и температура процесса – 80°C.

Поступило 30.09.2020 г.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Каковский И.А., Поташникова Ю.М. Кинетика процессов растворения. – М.: Металлургия, 1975, 224 с.
2. Холмогоров А.Г., Пашков Г.Л., Кононова О.Н. и др. – Химия в интересах устойчивого развития, 2001, № 9, с. 293-298.
3. Самихов Ш.Р., Зинченко З.А. – ДАН РТ, 2014, т. 57, № 2, с. 145-150.
4. Зинченко З.А., Самихов Ш.Р. – Горный журнал, 2011, № 4, с. 97-98.
5. Самихов Ш.Р., Зинченко З.А. – Цветные металлы, 2014, № 2, с. 62-66.
6. Самихов Ш.Р., Зинченко З.А. – Вестник Таджикского национального университета, 2016, № 1/2 (196), с. 160-165.
7. Самихов Ш.Р., Шарифбоев Н.Т., Назаров Х.М., Хочиён М.К. – Вестник Таджикского национального университета. Сер. естеств. н., 2018, №3, с. 203-209.
8. Жучков И.А., Бубеев И.П. – Цветная металлургия, 1992, № 5, с. 91-97.

Ш.Р.Самихов, Ч.Б.Асриев

## ИШҚОРРОНИИ ТИОСУЛФАТИИ ТИЛЛО ВА НУҚРА АЗ КОНСЕНТРАТҲОИ КОНИ ДУОБА

*Институти химияи ба номи В.И.Никитини Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаҳои омӯзиши кинетикаи ишқорронии тиосульфатии концентрати тилло ва нуқрадор оварда шудааст ва параметрҳои оптималии раванд муайян карда шудааст. Нишон дода шудааст, ки дар раванди ишқорронии 12 соат, ҷудошавии тилло дар маҳлул 88,1% -ро ташкил медиҳад.

**Калимаҳои калидӣ:** ишқорронии тиосульфатӣ, кон, ҷудошавии тилло, ҷудошавии нуқра, ҳарорати раванд, концентрат, концентрати нӯхташуда.

Sh.R.Samikhov, J.B.Asriev

## THIOSULPHATE LEACHING OF GOLD AND SILVER FROM CONCENTRATES OF DUOBA DEPOSIT

*V.I.Nikitin Institute of Chemistry, National Academy of Sciences of Tajikistan*

This article presents the results of the study of thiosulfate leaching kinetics of gold and silver containing concentrates, and optimum conditions of this process are specified. It is shown that during a 12 hour leaching process the extraction of gold in the solution makes 88,1%.

**Key words:** thiosulphate leaching, deposit, gold recovery, silver recovery, process temperature, concentrate, baked concentrate.

УДК 669.054:669.071

Г.Аминджони, Н.А.Наимов, К.Дж.Суяров\*, Дж.Р.Рузиев,

академик НАН Таджикистана Х.Сафиев

**ТЕРМОДИНАМИКА ПРОЦЕССА ПЕРЕРАБОТКИ ФЛОТАЦИОННОГО МУСКОВИТОВОГО КОНЦЕНТРАТА МЕТОДОМ СУЛЬФАТИЗАЦИИ***ГУ «Научно-исследовательский институт металлургии» ОАО «ТалКо»,**\*Таджикский национальный университет*

*В статье приведены результаты термодинамических параметров процесса переработки флотационного мусковитового концентрата Курговадского месторождения методом сульфатизации. Для выяснения возможности протекания химических реакций при взаимодействии минералов флотационного мусковитового концентрата с серной кислотой в интервале температур от 393 до 573 К был осуществлён термодинамический расчёт изменения свободной энергии Гиббса и расчёт констант равновесий реакций. Также для протекающих реакций по уравнению Кирхгоффа был проведён расчёт значений энтальпии. Сравнение зависимостей изменения энтальпии и свободной энергии Гиббса реакций от температуры свидетельствует о уменьшении значений двух сравниваемых термодинамических величин. В результате проведённых расчётов термодинамических величин исследуемых реакций при различных температурах выяснилось, что в процессе сульфатизации значения изменений энергии Гиббса отрицательны.*

**Ключевые слова:** мусковитовый концентрат, глинозём, сульфатизация, сульфат алюминия, гидроксид алюминия, энергия Гиббса, энтальпия, теплоёмкость.

В современном мире для получения глинозёма в основном используют бокситы с содержанием наименьшего количества оксида кремния. Однако в нашей республике в промышленном масштабе отсутствует сырьё с высоким содержанием оксида алюминия. Данное обстоятельство обуславливает импорт глинозёма для обеспечения отечественного завода по производству алюминия. Следует отметить, что импорт глинозёмсодержащего сырья, в том числе глинозёма, приводит к повышению себестоимости получаемого алюминия [1]. Поэтому с целью уменьшения себестоимости алюминия-сырца и улучшения экономических показателей алюминиевого предприятия, а также для реализации четвертой национальной цели – ускоренной индустриализации страны [2], применение низкокачественного отечественного сырья для получения сульфата алюминия, гидроксида алюминия и глинозёма, которые имеют огромные запасы и доступность местоположения [3], является актуальной современной задачей. Кроме того, важно отметить, что в настоящее время в Таджикистане функционирует предприятие по производству серной кислоты [4].

В связи с этим, определение термодинамических параметров процесса переработки флотационного мусковитового концентрата месторождения «Курговад» методом сульфатизации с целью по-

---

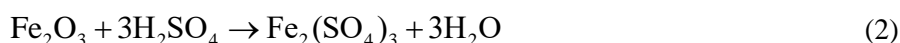
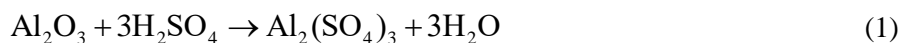
*Адрес для корреспонденции:* Сафиев Хайдар. 734003. Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Х.Хакимзаде, 17, ГУ «Научно-исследовательский институт металлургии» ОАО «ТалКо». E-mail: inmet.talco@mail.ru, h.safiev@mail.ru

лучения сульфата алюминия, гидроксида алюминия и глинозёма является актуальной задачей для алюминиевой промышленности Республики Таджикистан [3].

Научное обоснование термодинамических процессов сульфатизации и разработка технологии получения сульфата алюминия, гидроксида алюминия и глинозёма позволяет добиться значительного экономического эффекта и способствует к повышению производства коагулянта, фтористых солей и глинозёма [5].

В качестве исходных материалов для сульфатизации был использован флотационный мусковитовый концентрат Курговадского месторождения. Рентгенофазовым анализом установлено [6], что породообразующими минералами флотационного мусковитового концентрата являются мусковит, ставролит, магнетит и кварц. Химический состав мусковитового концентрата, мас. %:  $\text{SiO}_2$  – 48.36;  $\text{Al}_2\text{O}_3$  – 27.87;  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  – 11.05;  $\text{CaO}$  – 1.81;  $\text{MgO}$  – 0.82;  $\text{Na}_2\text{O}$  – 1.61;  $\text{K}_2\text{O}$  – 8.23.

При взаимодействии серной кислоты с компонентами состава флотационного мусковитового концентрата возможно протекание следующих превращений:



Для подтверждения протекания данных химических реакций была изучена термодинамика процесса сульфатизации в области температур от 393 до 573 К, то есть рассчитаны значения изменений энтальпии и свободной энергии Гиббса в условиях неизменных значений  $\Delta S$ .

Для каждой реакции по уравнению Кирхгоффа [7] проведен расчёт значений изменения энтальпии для указанных реакций (табл. 1). Сравнение зависимостей, наблюдаемых в табл. 1 (изменения энтальпии реакций от температуры) и табл. 2 (изменения свободной энергии Гиббса реакций от температуры), свидетельствует о сходстве влияния температуры на значения двух сравниваемых термодинамических величин, что указывает на правильность выбора возможных реакций в процессе сульфатизации.

Таблица 1

Зависимость значений энтальпии от температуры (по уравнению Кирхгоффа)

№	Коэффициент уравнения $C_p = f(T)$ , Дж/моль			Расчёт энтальпии ( $\Delta H^\circ$ ) по уравнению Кирхгофа, кДж/моль				
	A	$b \cdot 10^{-3}$	$c \cdot 10^{-5}$	393 К	433 К	493 К	533 К	573 К
1	-75.27	81.85	-76.2	-16356.26	-21563.53	-27701.54	-31350.7	-34263.99
2	-424.75	-40.1	13.8	-40724.89	-58038.53	-72957.27	-82026.18	-91289.61
3	-88.41	0.103	7.27	-4620.71	-6259.31	-8452.24	-9680.97	-1879.69
4	-55.27	3.44	6.53	-108.73	-111.43	-114.13	-119.49	-122.16
5	-109.8	10.23	0.35	-10481.71	-14699.88	-20996.7	-25174.58	-2956.78
6	-55.24	83.48	-17.47	-6921.32	-8231.02	-9844.62	-10809.28	-10042.93

С целью установления вероятности самопроизвольного протекания реакций по уравнению  $\Delta G^\circ = \Delta H^\circ - T\Delta S^\circ$  [7] вычислены значения изменения  $\Delta G^\circ$  в исследуемом интервале температур. Известно, что течению реакции в прямом направлении благоприятствуют большие отрицательные значения  $\Delta H^\circ$  (т.е. значительное выделение энергии) и большие положительные значения  $\Delta S^\circ$  (т.е. возрастание энтропии). Для многих не слишком сложных реакций, к которым относятся предложенные нами превращения при сульфатизации флотационного мусковитового концентрата Курговладского месторождения (реакции 1-6), первый фактор (энергетический) отражает обычное повышение устойчивости системы при уменьшении запаса ее внутренней энергии, проявляющейся в тенденции к большой агрегации вещества и укрупнению частиц, второй же фактор (энтропийный) отражает тенденцию к усилению различных процессов диссоциации на более простые частицы, происходящей под действием теплового движения частиц [7].

Расчеты  $\Delta G^\circ$  для реакций (1-6) проведены с условием постоянства значений  $\Delta S^\circ$  в этом температурном интервале, поскольку все реакции протекают в жидкой фазе и изменений числа частиц до и после реакций не наблюдается. Значения  $\Delta H^\circ$  взяты из табл. 1 для каждой температуры. Проведение термодинамических расчётов в интервале температур 393-573 К (табл. 2) и полученные данные свидетельствуют о том, что значения  $\Delta G^\circ$  меньше нуля ( $\Delta G_{298}^\circ < 0$ ) и процесс сульфатизации с образованием сульфата алюминия (реакция 1) протекает самопроизвольно в указанном интервале температур.

Таблица 2

Значения термодинамических характеристик реакций, протекающих при сульфатизации

№ реакции	$\Delta S^\circ$ , кДж/Т· моль	$\Delta G^\circ \cdot 10^{-2}$					
		T=298 К	T=393 К	T=433 К	T=493 К	T=533 К	T=573 К
1.	0.288	-139.2	-164.69	-216.88	-278.43	-315.04	-344.29
2.	0.2883	-140.19	-408.38	-561.63	-730.98	-821.79	-914.54
3.	0.0987	-242.6	-46.59	-63.03	-85.00	-95.33	-99.06
4.	0.0967	-136.19	-13.82	-14.53	-17.53	-18.57	-19.62
5.	0.1084	-431.24	-105.24	-147.46	-210.50	-252.29	-29.23
6.	0.11164	-549.05	-69.65	-82.79	-98.99	-108.68	-11.06



Как видно из табл. 2, значения изменений энергии Гиббса во всех реакциях меньше нуля ( $\Delta G_{298}^0 < 0$ ), то есть при проведении процесса сульфатизации по возрастанию температуры тепловые эффекты реакций постепенно меняются в сторону больших отрицательных значений  $\Delta H$ , что в свою очередь способствует отрицательным значениям  $\Delta G$ .

При температурах 298, 393, 433, 493, 533, 573 К были определены зависимости изменения энергии Гиббса ( $\Delta G^\circ$ ) от температуры (рис. 1).

Из рисунка видно, что при увеличении температуры сульфатизации значения изменения энергии Гиббса протекающих реакций отрицательны, а также плавно уменьшаются.

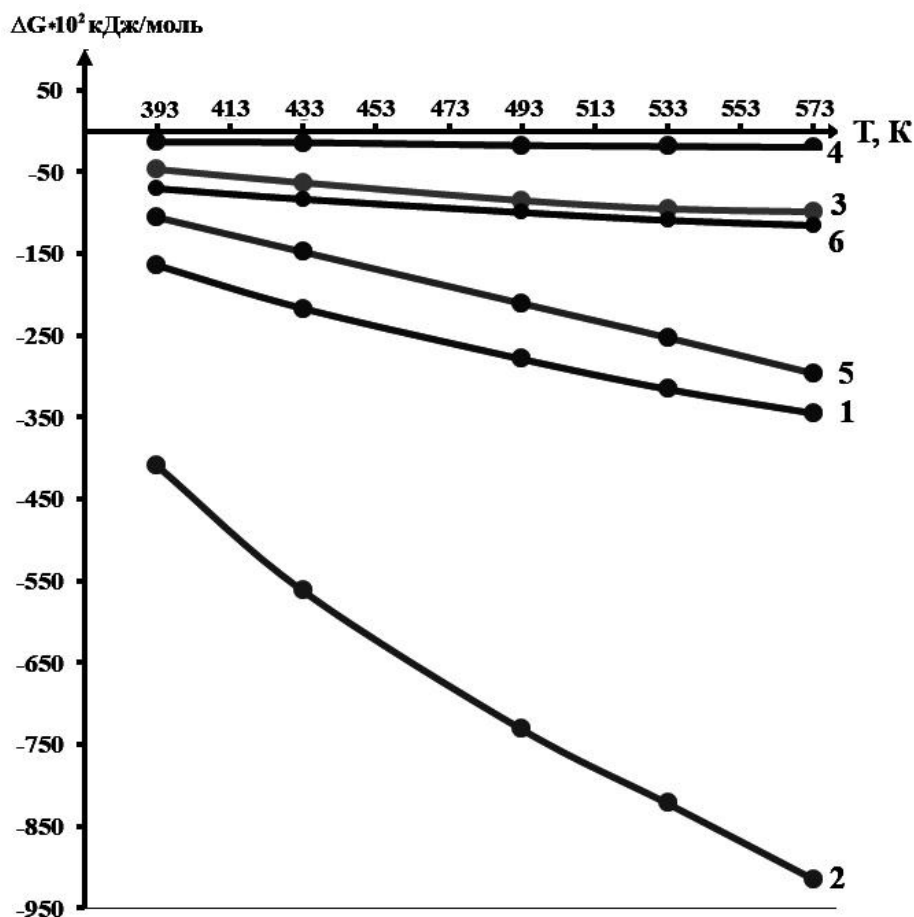


Рис. 1. Зависимость свободной энергии Гиббса реакции от температуры.

Исходя из этого, полученные данные при термодинамических расчётах процесса сульфатизации флотационного мусковитового концентрата свидетельствуют о том, что почти все предполагаемые реакции протекают в области температур от 393 до 573 К.

Поступило 30.11.2020 г.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ёров З.Ё., Кабиров Ш.О., Муродиён А., Сироджев Н.М. Минерально-сырьевая база химико-металлургической промышленности Таджикистана. – Душанбе: Отп. в «Мега Басы:» – Стамбул, Турция, - 2012, 416 с.
2. Юсупов Дж. Ускоренная индустриализация – фактор решения экономических проблем. [http://www.narodnaya.tj/index.php?option=com\\_content&view=article&id=11555:2020-06-25-05-26-22&catid=56:promishlenost&Itemid=208](http://www.narodnaya.tj/index.php?option=com_content&view=article&id=11555:2020-06-25-05-26-22&catid=56:promishlenost&Itemid=208). 25.06.2020.
3. Наимов Н.А., Суяров К.Дж., Аминджони Г., Бобоев Х.Э., Салимова П.Т., Сафиев Х. Термодинамика процесса переработки каолиновых глин Таджикистана методом сульфатизации. – ДАН РТ, 2018, т. 61, №11-12, с.878-882.
4. Наимов Н.А., Рузиев Дж.Р., Бобоев Х.Э., Сафиев А.Х., Сафиев Х. Физико-химические аспекты сульфатизации каолиновых глин Таджикистана. – ДАН РТ, 2017, т. 60, №7-8, с.356-361.
5. Раджабов Ш.Х., Рузиев Дж.Р., Бобоев Х.Э., Азизов Б.С., Сафиев Х. Термодинамический анализ процесса сернокислотного разложения фтор- и глинозёмсодержащих отходов производства алюминия. – Вестник национального университета. Серия естественных наук. – Душанбе, 2012, №1/2(81), с.131-134.
6. Аминджони Г., Наимов Н.А., Рузиев Дж.Р., Бобоев Х.Э., Назаров Ш.Б., Сафиев Х. Физико-химические аспекты переработки флотационного мусковитового концентрата способом сульфатизации. – ДАН РТ, 2020, т. 63, №5-6, с.273-279.
7. Артемов А.В. Физическая химия: Учебник. - М.: Academia, 2019, 256 с.

Г.Аминҷони, Н.А.Наимов, Қ.Қ.Суяров\*, Қ.Р.Рузиев, Ҳ.Сафиев

## ТЕРМОДИНАМИКАИ РАВАНДИ КОРКАРДИ КОНСЕНТРАТИ МУСКОВИТИ ФЛОТАТСИОНӢ БО УСУЛИ СУЛФАТКУНОӢ

*МД «Паҷӯғишгоҳи илмию таҳқиқотии металлургия»-и ҶСК «ШАТ»,*

*\*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақолаи мазкур натиҷаҳои параметрҳои термодинамикии раванди коркарди концентрати мусковити флотатсионии кони «Курговад» бо усули сульфаткуноӣ оварда шудааст. Барои муайян намудани эҳтимолияти гузариши реаксияҳои химиявӣ зимни бо ҳамтаъсиркунии минералҳои концентрати мусковити флотатсионӣ бо кислотаи сульфат дар ҳудуди ҳароратҳои 323-573 К, ҳисоби термодинамикии тағйирёбии қиматҳои энергияи озоди Гиббс ва ҳисоби константаи мувозинатии реаксияҳо, амалӣ гардонида шуд. Ҳамчунин барои реаксияҳои гузаранда ҳангоми коркарди концентрати мусковити флотатсионӣ бо кислотаи сульфат, ҳисоби қиматҳои энталпия аз рӯи муодилаи Кирхгофф гузаронида шуд. Муқоисаи вобастагии тағйирёбии энталпия ва энергияи озоди Гиббси реаксияҳо аз ҳарорат, шаҳодати коҳиш ёфтани қиматҳои муқоисашавандаи ду бузургии термодинамикӣ мебошад. Дар натиҷаи ҳисобҳои гузаронидашудаи бузургиҳои термодинамикии реаксияҳои таҳқиқшаванда дар ҳароратҳои гуногун маълум гардид, ки дар раванди сульфаткуноӣ тағйирёбии энергияи озоди Гиббс қиматҳои манфӣ мегирад.

**Калимаҳои калидӣ:** концентрати мусковит, гилхок, сульфаткуноӣ, сульфати алюминий, гидроксиди алюминий, энергияи Гиббс, энталпия, гармигунҷоши.

G.Aminjoni, N.A.Naimov, Q.J.Suyarov\*, J.R.Ruziev, H.Safiev

## THERMODYNAMICS OF PROCESSING OF FLOTATION MUSCOVITE CONCENTRATE BY THE METHOD OF SULPHATIZATION

*State Institution «Scientific Research Institute of Metallurgy» JSC «TALCO»,*

*\*Tajik National University*

In work presents the results of the thermodynamic parameters of the process of processing the flotation muscovite concentrate of the Kurgovad deposit by the sulfatization method. To clarify the possibility of chemical reactions during the interaction of minerals of the flotation muscovite concentrate with sulfuric acid in the temperature range from 393 to 573 K, a thermodynamic calculation of the change in the Gibbs free energy and the calculation of the equilibrium constants of the reactions were carried out. Also, for the reactions taking place according to the Kirchhoff equation, the enthalpy values were calculated. Comparison of the temperature dependences of the change in enthalpy and Gibbs free energy of reactions indicates a decrease in the values of the two compared thermodynamic quantities. As a result of the calculations of the thermodynamic values of the reactions under study at different temperatures, it was found that in the process of sulfatization, the values of changes in the Gibbs energy are negative.

**Key words:** *muscovite concentrate, alumina, sulfatization, aluminum sulfate, aluminum hydroxide, Gibbs energy, enthalpy, heat capacity.*

УДК 582.26 (584)

Академик НАН Таджикистана Х.Х.Хисориев, Ш.М.Мирсабуров\*

**О ЗЕЛЁНЫХ ВОДОРΟΣЛЯХ – CHLOROPHYTA БАССЕЙНА р. ИСФАРЫ***Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана,**\*Худжандский государственный университет им. академика Б.Гафурова*

*В статье впервые приводятся данные о новых флористических находках зеленых водорослей (Chlorophyta), обнаруженных в водоёмах и водотоках бассейна р. Исфары. Водоросли данной реки ранее не были изучены. Всего обнаружено 26 видов зелёных водорослей, которые относятся к 3 классам, 7 порядкам, 11 семействам и 14 родам. По многообразию видов доминируют семейства Scenedesmaceae, Ulotrichaceae и роды Ulothrix, Scenedesmus.*

**Ключевые слова:** *зелёные водоросли, биоразнообразие, альгофлора, р. Исфара, Таджикистан.*

В настоящее время биоразнообразие и экологические особенности распространения видов водорослей (Algae) в водоёмах и водотоках Северного Таджикистана изучены крайне недостаточно. Имеются кратковременные исследования по изучению синезелёных, эвгленовых, стрептофитовых и других групп водорослей в отдельных водоёмах Северного Таджикистана [1-7].

Материалом для настоящей статьи послужили образцы водорослей, собранные нами осенью 2020 г. в различных пойменных водоёмах и водотоках среднего течения р. Исфары. Данная река берет свое начало на северных склонах Туркестанского хребта после слияния ручьёв Карафшин и Кишанбич и является одним из крупных притоков р. Сырдарьи в пределах Северного Таджикистана.

Протяженность реки 107 км, площадь водосбора – 3240 км<sup>2</sup>, питается несколькими средними ледниками, а также атмосферными осадками. Русло реки неширокое (5-10 м), с относительно глубоким дном (2-3 м). Скорость течения воды в реке в зависимости от рельефа дна варьирует от 1 до 5 м/с. Вода в реке в основном прозрачная (1-2 м), чистая и без запаха, однако во время весенне-летних паводков становится немного мутной и прозрачность воды уменьшается до 25-30 см [8].

По результатам наших исследований в бассейне р. Исфары выявлено 26 видов зелёных водорослей, которые относятся к 3 классам, 7 порядкам, 11 семействам и 14 родам. (см. таблицу и систематический список). В составе зелёных водорослей р. Исфары по разнообразию видов преобладают семейства Scenedesmaceae (7 видов), Ulotrichaceae (5 видов) и роды *Scenedesmus* и *Ulothrix*.

Таблица 1

Систематический состав зелёных водорослей (Chlorophyta) водоёмов бассейна р. Исфары

Таксоны	Количество		% от общего состава видов
	родов	видов	
<b>1. Класс Chlorophyceae</b>	10	16	61.53
<b>Порядок Chlamydomonadales</b>	3	3	6.25
Семейство Chlamydomonadaceae	1	1	6.25
Семейство Volvocaceae	1	1	6.25
Семейство Phacotaceae	1	1	6.25
<b>Порядок Chaetophorales</b>	2	2	12.5
Семейство Chaetophoraceae	2	2	12.5
<b>Порядок Oedogoniales</b>	1	1	6.25
Семейство Oedogoniaceae	1	1	6.25
<b>Порядок Sphaeropleales</b>	4	10	25
Семейство Hydrodictyaceae	1	2	12.5
Семейство Scenedesmaceae	2	7	43.75
Семейство Selenastraceae	1	1	6.25
<b>2. Класс Trebouxiophyceae</b>	1	3	11.53
<b>Порядок Chlorellales</b>	1	3	11.53
Семейство Oocystaceae	1	3	11.53
<b>3. Класс Ulvophyceae</b>	3	7	26.92
<b>Порядок Ulotrichales</b>	2	5	71.4
Семейство Ulotrichaceae	2	5	71.4
<b>Порядок Cladophorales</b>	1	2	28.5
Семейство Cladophoraceae	1	2	28.5
Всего:	14	26	100.00

Ниже приводится полный систематический список зелёных водорослей водоёмов бассейна р. Исфары с указанием места обнаружения видов. Краткая морфологическая, сапробиологическая характеристика, а также общее распространение видов приводятся здесь по литературным источникам [9-11].

#### Отдел Chlorophyta – Зелёные водоросли

#### Класс 1. Chlorophyceae – Хлорофициковые

#### Порядок Chlamydomonadales – Хламидоманадовые

#### Семейство Phacotaceae – Факотовые

Род *Phacotus* – Факотус

1. *Phacotus lenticularis* Ehrenberg – Факотус чечевицеобразный.

Клетки с узкой стороны линзовидные, с широкой стороны округлые 12-24 мкм в диаметре.

Среднее течение р. Исфары, в окрестностях Чоркух, единично,  $\beta$ -бета-мезосапроб.

**Общее распространение:** широко распространенный вид.

#### Семейство Hydrodictyaceae – Гидродикциевые

Род *Pediastrum* – Педиаструм

2. *Pediastrum duplex* Meyen – Педиаструм двойной.

Индивиды ценобиальные чаще всего состоят из 16-32 клеток, ценобии 35-198 мкм в диаметре. Среднее течение р. Исфары, в окрестностях Чоркух, единично,  $\beta$ -бета-мезосапроб.

**Общее распространение:** космополит.

**Семейство Scenedesmaceae – Сценедесмусовые**

Род *Scenedesmus* – Сценедесмус

3. *Scenedesmus acuminatus* (Lagerh.) Chod. – Сценедесмус остроконечный.

Клетки узковеретеновидные 18-40 мкм дл., 3.4-8.4 мкм шир. Ценобии из 4 клеток плоские и дугообразно изогнутые заостренные. Среднее течение р. Исфары, в окрестностях Чоркух, нередко, *β-бета-мезосапроб*.

**Общее распространение:** Азия, Северная Америка, Европа.

Род *Scenedesmus* – Сценедесмус

4. *Scenedesmus obliquus* Kütz. – Сценедесмус косой.

Ценобии чаще состоят из 4-8 клеток. Клетки веретеновидные 3-4 мкм дл., 2.4-9.6 мкм шир., оболочка гладкая. Среднее течение р. Исфары, изредка, *β-бета-мезосапроб*.

**Общее распространение:** Австралия, Азия, Центральная Америка, Европа.

**Порядок Chaetophorales – Хаетофоровые****Семейство Chaetophoraceae – Хаетофорацовые**

Род *Stigeoclonium* – Стигоклониум

5. *Stigeoclonium tenue* Kütz. – Стигоклониум тонкий

Кустиковидные, светло-зеленые, образующие пучковидные дерновинки от несколько миллиметров до 5 см. В проточных, реже стоячих водах, на различных субстратах. Среднее течение р. Исфары, в плавательном бассейне в санатории Зумрат, изредка, *α-альфа-мезосапроб*.

**Общее распространение:** РСФСР (Оренбургская обл., Башкирская АССР), УССР (Львовская и Тернопольская обл.).

Род *Draparnaldia* – Драпарналдия

6. *Draparnaldia plumosa* (Vauch.) Ag.

Кустики светло или темно-зеленые до 10 см высоты. Главный ствол сильно разветвленный. В стоячих и проточных водах, на камнях, водных цветковых растениях. Среднее течение р. Исфары, в плавательном бассейне в санатории Зумрат, изредка, *X-ксено-олигосапроб*.

**Общее распространение:** широко распространенный вид.

**Класс 2. Ulvophyceae – Ульвофицовые****Порядок Ulotrichales – Улотриковые****Семейство Ulotrichaceae – Улотриковые**

Род *Ulothrix* – Улотрикс

7. *Ulothrix aequalis* Kütz. – Улотрикс водяной.

Нити длинные желтовато-зеленые. Клетки цилиндрические, 12-22 мкм шир., по длине равные ширине или до двух раз больше. Среднее течение р. Исфары, в окрестностях Чоркух, нередко, *O-олигосапроб*.

**Общее распространение:** широко распространенный вид.

Род *Ulothrix* – Улотрикс

8. *Ulothrix tenerrima* Kütz. – Улотрикс тончайший.

Нити длинные до 10 см, светло-зелёные. Клетки цилиндрические, 6 -10 мкм шир., по длине равные ширине. Среднее течение р. Исфары, нередко, *О-олиго-альфа-мезосапроб*.

**Общее распространение:** широко распространенный вид.

**Порядок Cladophorales – Кладофоровые**

**Семство Cladophoraceae – Кладофоровые**

Род *Cladophora* – Кладофора

9. *Cladophora glomerata* Kütz. Кладофора скрученная.

Дерновинки кустистые, рыхлые, прикрепленные или свободно-движущиеся и лежащие на дне разнообразной структуры. Клетки цилиндрические, у оснований 100-275 мкм шир. Среднее течение р. Исфары, единично, *β-бета-мезосапроб*.

**Общее распространение:** широко распространенный вид.

Род *Cladophora* – Кладофора

10. *Cladophora fracta* Kütz. – Кладофора слабая.

Дерновинки свободно-движущиеся, неправильного строения, имеют разную длину и возраст. Клетки у оснований осей 45-85 мкм шир. Среднее течение р. Исфары, в окрестностях Чоркух, изредко, *β-бета-мезосапроб*.

**Общее распространение:** широко распространенный вид.

Поступило 30.11.2020 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Музафаров А.М. Флора водорослей горных водоёмов Средней Азии. – Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1958, 379 с.
2. Музафаров А.М. Флора водорослей водоёмов Средней Азии. – Ташкент: Фан, 1965, 570 с.
3. Музафаров А.М., Мусаев К.Ю. Материалы к познанию флоры водорослей водоёмов верхнего течения р. Зеравшан. Флора водорослей водоёмов Узбекистана. – Ташкент: Фан, 1969, с. 3-31.
4. Хисориев Х.Х., Маджидов Ф. Материалы к альгофлоре Каттасайского водохранилища. – Сб. науч. трудов молодых ученых и специалистов АН Таджикской ССР. – Душанбе, 1987, с. 20-26.
5. Хисориев Х.Х. Первое сообщение об эвгленовых водорослях Северного Таджикистана. – Вестник Тадж. ГУ. Сер. биол., 1990, №4, с. 52-56.
6. Хисориев Х.Х., Шамирова М. Биоразнообразие синезелёных водорослей (*Cyanophyta*) некоторых рек Таджикистана. – Изв. АН РТ. Отд. биол. и мед. н., 2009, №3 (168), с. 15-21.
7. Хисориев Х.Х., Хожакулыева Б.Г., Шамирова М.М. Синезелёные водоросли (*Cyanophyta*) Кайрак-кумского водохранилища (Таджикистан). – Изв. АН РТ. Отд. биол. и мед. н., 2010, №3 (172), с. 7-16.
8. [www.riverbp.net](http://www.riverbp.net)
9. Голлербах М.М., Мошкова М.А. Зелёные водоросли. (Определитель пресноводных водорослей СССР). Вып.10(1). – Л.: Наука, 1986, 360 с.
10. Царенко П.М. Краткий определитель хлорококковых водорослей Украинской ССР (под. ред. Паламарь-Мордвинцевой Г.М.). – Киев: Наукова думка, 1990, 208 с.

11. Баринава С.С., Медведева Л.А. Атлас водорослей индикаторов сапробностей. – Владивосток: Дальнаука, 1996, 279 с.

**Ҳ.Ҳ.Ҳисориев, Ш.М.Мирсабуров\***

### **ДАР БОРАИ ОБСАЗҶОИ САБЗ – CHLOROPHYTA ДАР ҲАВЗАИ д. ИСФАРА**

*Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани,*

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*\*Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи академик Б.Ғафуров*

Дар мақола маълумотҳо оид ба бозёфтҳои нави флоравии обсабзҳои сабз (Chlorophyta), ки нахустин бор дар обҳавзаву сарчашмаҳои обии ҳавзаи дарёи Исфара дарёфт гардидаанд оварда шудааст. Обсабзҳои дарёи мазкур пеш аз ин омӯхта нашудаанд. Ҳамагӣ 26 намуд ва зернамуди обсабзҳои сабз, ки ба 3 синф (Chlorophyceae, Trebouxiophyceae, Ulvophyceae). 7 тартиб (Chlamydomonadales, Chaetophorales, Sphaeropleales, Chlorellales, Ulotrichales, Cladophorales, Oedogoniales), 11 оила ва 14 авлод мансубанд, ба қайд гирифта шуданд. Аз рӯи гуногуннамудӣ оилаҳои Scenedesmaceae, Ulotrichaceae ва авлодҳои *Ulothrix*, *Scenedesmus* баргардӣ доранд.

**Калимаҳои калидӣ:** *обсабзҳои сабз, гуногунӣ, алгофлора, д. Исфара, Тоҷикистон.*

**H.H.Hisoriev, Sh.M.Mirsaburov\***

### **GREEN ALGAE – CHLOROPHYTA OF THE ISFARA RIVER BASIN**

*Institute of Botany, plant Physiology and Genetics, National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*\*B.Gafurov Khujand State University*

The article provides information on the new floristic finds of green algae (Chlorophyta) in water bodies of Isfara river. Diversity of algae of this river have not been studied before. Totaly 26 species of green algae were found in this river, which belonging to 3 classes, 7 orders, 11 families and 14 genera. Scenedesmaceae, Ulotrichaceae family and the *Ulothrix*, *Scenedesmus* genera are dominant in species diversity.

**Key words:** *green algae, biodiversity, algoflora, Isfara river, Tajikistan.*



УДК 581.132:631.52

Б.А.Солиева, Н.Х.Ойзода, Б.Н.Сагторов, А.Э.Эргашев, Р.Ш.Хакимова\*, Н.А.Маниязова,

член-корреспондент НАН Таджикистана Х.А.Абдуллаев

**ВОДОУДЕРЖИВАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ХЛОПЧАТНИКА В  
ЗАВИСИМОСТИ ОТ ФОРМЫ И ОКРАСКИ ЛИСТА***Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана,**\*Худжандский государственный университет им. академика Б.Гафурова*

Приведены результаты исследования водоудерживающей способности листьев инбредных линий средневолокнистого хлопчатника с различными формами и окрасками листовой пластинки. Установлено, что на потерю воды листьями влияет форма и окраска листа, а также время дня и, возможно, возраст листа.

**Ключевые слова:** средневолокнистый хлопчатник *Gossypium hirsutum* L., инбредные линии, форма и окраска листовой пластинки, водоудерживающая способность листа.

Водоудерживающая способность клеток, тканей и листьев является важным показателем водного режима растений. Этот показатель может служить индикатором ответной реакции растений на изменяющиеся условия среды или на действия абиотических стрессов.

В основе водоудерживающей способности листьев лежит процесс гидратации коллоидов протоплазмы клеток и тканей [1]. Существует положительная корреляция между содержанием связанной воды и устойчивостью клеток к неблагоприятным условиям.

Считают, что чем более мощная водоотнимающая сила, тем меньше удерживается вода в растении [1].

Ранее на тонковолокнистом хлопчатнике нами было показано, что при дефолиации водоудерживающая способность листьев изменяется в сторону увеличения, то есть чем больше степень дефолиации, тем больше водоудерживающая способность оставшихся листьев на растении [2].

Нам казалось интересным выяснить вопрос: зависит ли водоудерживающая способность хлопчатника от формы и окраски листовой пластинки.

**Материалы и методы исследований**

Материалом для исследования служили самоопыленные инбредные линии средневолокнистого хлопчатника Л-3, Л-461, Л-501, Л-549, Л-601 из генетической коллекции *Gossypium hirsutum* L. Ташкентского государственного университета им. Улугбека (Узбекистан), контрастные по форме и окраске листовой пластинки. Эти линии любезно были предоставлены нам академиком АН Республики Узбекистан **Д.А.Мусаевым** и профессором **М.Ф.Абзаловым**. Линии Л-3 и Л-461 имеют пальчаторассечённые листья типа окра и суперокра соответственно с антоциановой и зелёной окраской. Характерной особенностью линии Л-501 и Л-549 является детерминантный рост и цельнокраяя

*Адрес для корреспонденции:* Абдуллаев Хамиджон Абдуллаевич. 734017, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул.Каримова, 27, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАНТ. E-mail: homidjon1945@mail.ru

форма листовой пластинки зелёной и антоциановой окраски. Линия Л-601 и инцухтированный промышленный сорт Ташкент-1 имеют листья пальчатодольчатой формы тёмно-зелёной окраски.

Растения для опытов выращивали на экспериментальном участке Института ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана, расположенном в восточной части Гиссарской долины на высоте 830 м над ур.м., в одинаковых условиях, согласно агрорекомендациям по выращиванию хлопчатника в Таджикистане [3] в едином опыте. Делянки опыта – четырёхрядковые, десятилуночные, схема посева – 60х30х1, биологическая повторность трёхкратная, рендомизированная. Для анализов брали растения с одинаковым уровнем роста и развития.

Водоудерживающую способность листьев (процент сохранения воды) определяли по А.А.Ничипоровичу [4].

Статистический анализ полученных данных проводили с использованием программы *Microsoft Excel 2010*. В таблицах приведены среднеарифметические величины и стандартные ошибки трёх определений из трёх биологических повторностей. Достоверность различий определяли по *t-критерию* Стьюдента при числе степеней свободы  $n'=(n+n_2)-2=4$  и уровне значимости  $P=0.01$ .

### Результаты исследований и их обсуждение

Результаты определения водоудерживающей способности листьев у инбредных линий средневолокнистого хлопчатника с различными формами и окрасками листовой пластинки приведены в таблице.

Таблица 1

Водоудерживающая способность листьев (сохранение воды,%) у инбредных линий средневолокнистого хлопчатника с разной формой и окраской листовой пластинки.

Фаза – массовое плодоношение. 20.08.20 г.

Линия, форма и окраска листа	Время определения, часы		
	8 <sup>00</sup>	12 <sup>00</sup>	15 <sup>00</sup>
Л-3, пальчаторассечённая (окра), антоциановая	50.28±1.85	63.29±0.13	32.76±5.78
Л-461, суперокралиственная, светло-зелёная	35.4±3.34	61.8±0.30	51.47±0.73
Л-501, цельнокрайняя, округлая, зелёная	51.9±1.18	54.65±2.09	45.62±0.58
Л-549, цельнокрайняя, округлая, антоциановая	52.62±0.07	63.16±0.12	45.03±0.43
Л-601, пальчатодольчатая, тёмно-зелёная	48.00±1.92	61.75±0.31	44.05±0.66

Как видно из данных табл.1, по показателю водоудерживающей способности листьев в 8<sup>00</sup> ч утра между исследованными генотипами разницы нет, за исключением линии Л-461 с суперокралиственной формой листа со светло-зелёной окраской.

По максимальным значениям водоудерживающей способности листьев в 12<sup>00</sup> ч дня (таблица) в зависимости от окраски и формы листовой пластинки между инбредными линиями также достоверных различий не наблюдается за исключением линии Л-501 с листьями цельнокрайней формы, зелёной окраской.

После полудня, в 15<sup>00</sup> ч только у линии Л-3 с окралистной формой листа и антоциановой окраской наблюдается уменьшение величины водоудерживающей способности листьев (32.7%), то есть самая большая потеря воды.

Возникает, естественно, вопрос: можно ли с помощью корреляционного анализа оценить взаимосвязь водоудерживающей способности листа с его окраской?

Исходя из того, что наблюдаемый цвет того или иного предмета соответствует определённым длинам волн солнечного света, который отражается его поверхностью и воспринимается нами как цвет объекта, мы использовали цифровые значения длины этих волн для вычисления коэффициентов корреляции между водоудерживающей способностью листа и его окраской (табл.2).

Проведённый нами анализ показал, что между вышеуказанными признаками в 8<sup>00</sup> и 12<sup>00</sup> ч дня существует отрицательная корреляция средней силы (-0.668 и -0.542 соответственно), а в 15<sup>00</sup> ч – сильная положительная связь ( $r = 0.742$ ).

Таблица 2

Коэффициент корреляции между водоудерживающей способностью листа и его окраской

Линия	Окраска листа	Длина волны, нм	Водоудерживающая способность листа, % часы определения		
			8 <sup>00</sup>	12 <sup>00</sup>	15 <sup>00</sup>
Л-3	антоциановая	380-440	50.3	63.3	32.8
Л-461	светло-зелёная	500-565	35.4	61.8	51.5
Л-501	зелёная	500-565	51.9	54.6	45.6
Л-601	тёмно-зелёная	440-485	48.0	61.7	44.0
Л-549	антоциановая	380-440	52.6	63.1	45.0
Коэффициент корреляции, $r$			-0.668	-0.542	0.742

Таким образом, на основании полученных данных можно заключить, что водоудерживающая способность листьев может зависеть от окраски и формы листа, времени дня, возможно, и от возраста листа.

Поступило 23.11.2020 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алексеев А.М. Некоторые итоги изучения водного режима растений и вопросы, подлежащие дальнейшему исследованию. – В сб.: Водный режим растений в связи с обменом веществ и продуктивностью. – М.: Изд-во АН СССР, 1963, с.23-32.
2. Эргашев А., Сатторов Б.Н., Авезов Т., Солиева Б.А., Ойзода Н.Х., Хакимова Р.Ш., Саиднабиев М.М., Абдуллаев Х.А. Водный режим растений хлопчатника при удалении листьев. – ДАН РТ, 2020, т.63, №1-2, с.113-117.
3. Научная система ведения сельского хозяйства Таджикистана (на тадж.яз.)/Под ред. акад. ТАСХН Ахмедова Х.М., Набиева Т.Н., Бухориева Т.А. – Душанбе: Матбуот, 2009, 764 с.
4. Ничипорович А.А. О потере воды срезанными растениями в процессе завядания. – Журн.опытной агрономии Юго-Востока (Россия), 1926, т.3, вып.1, с.11-13.

Б.А.Солиева, Н.Х.Ойзода, Б.Н.Сагторов, А.Э.Эргашев, Р.Ш.Хакимова\*, Н.А.Маниязова,  
Х.А.Абдуллоев

## ҚОБИЛИЯТИ ОБНИГОҲДОРИИ РАСТАНИИ ПАХТА ВОБАСТА АЗ ШАКЛ ВА РАНГИ БАРГ

*Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани*

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*\*Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи академик Б.Фафуров*

Дар мақола натиҷаҳои тадқиқоти нишондиҳандаи речаи оби растани пахта – қобилияти обнигоҳдории баргҳо вобаста аз шакл ва ранги пластинкаи барг, оварда шудааст. Муайян карда шудааст, ки қобилияти обнигоҳдории баргҳо аз шакл ва ранги пластинкаи барг, вақти рӯз ва ҳатто аз синни барг вобастагӣ дорад.

**Калимаҳои калидӣ:** пахтаи миёнаҳои *Gossypium hirsutum L.*, линияҳои инбредӣ, шакл ва ранги пластинкаи барг, қобилияти обнигоҳдории баргҳо.

B.A.Solieva, N.Kh.Oyzoda, B.N.Sattorov, A.E.Ergashev, R.Sh.Khakimova\*, N.A.Maniyazova,  
Kh.A.Abdullaev

## WATER KEEPING ABILITY OF COTTON LEAVES WITH DIFFERENT SHAPES AND COLORS

*Institute of Botany, Plant Physiology and Genetic, National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*\*B.Gafurov Khudjand State University*

In this paper the results of study of water keeping ability leaves of inbred lines uplant cotton with different shapes and colors leaves are presents. It is shown the water keeping ability is dependent from leaves shapes and colors, times of the day and, possibly, from leaf ages.

**Key words:** middle stable cotton *Gossypium hirsutum L.*, inbred lines, shape and colour of leaf, water keeping ability.