

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- З.Х.Рахмонов, Д.Д.Рахмонов.** Короткие тригонометрические суммы с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг121
- Ш.А.Хайруллоев.** Расстояние между соседними нулями производной j -го порядка функции Харди.....129
- Ш.М.Зулфонов.** Применение преобразования Лапласа-Карсона к решению начально-краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений135
- М.Ш.Шабозов, А.С.Курайши.** О точных верхних гранях среднеквадратичных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2 142
- Г.А.Юсупов, А.А.Шабозова.** Среднеквадратическое полиномиальное приближение периодических дифференцируемых функций150
- Ф.Раимзода.** Точные неравенства, содержащие наилучшие приближения и нормы разности высших порядков в L_2156
- Р.Пиров, М.А.Джабборов.** Об исследовании некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями в пространстве.165

АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Кохирова, А.В.Иванова, Ф.Дж.Рахматуллаева, С.А.Борисенко, В.К.Агнихотри, А.М.Буриев.** Распад кометы Атлас по наблюдениям в Таджикистане и Индии171

ФИЗИКА

- Фарход Рахими, Б.Г.Пиров.** Магнетики Гейзенберга со спином $S=3/2$ в многомерном пространстве183
- Х.О.Абдуллоев, Д.К.Солихов, С.С.Рахмонов.** Решение нелинейного уравнения Шредингера в рамках легкоосной модели Гейзенберга и поведение пакетов спиновых волн193
- Ш.Туйчиев, Д.Рашидов, С.Х.Табаров, Ф.Х.Содиков.** Влияние нанографенов на структуру и некоторые свойства полимеров.....198
- Н.У.Муллоев, Н.А.Маджидов, Н.Л.Лаврик.** Квантово-химический расчёт структуры димеров имидазола.....202

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

- Д.Н.Низомов.** Граничные интегральные уравнения трехмерных задач теории упругости.....207

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ**У.М.Мирсаидов, Б.Б.Баротов, К.О.Бобоев, И.Мирсаидзода (И.У.Мирсаидов), Дж.Н.Эшов.**

Выделение урановых концентратов из рассолов, дренажных и технических вод219

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ**А.Шарифов, З.Х.Гайбуллаева, Д.С.Неъматзода, З.А.Гозиев.** Коррозия гидротехнического

бетона и причины ее протекания224

МИНЕРАЛОГИЯ**Ф.А.Файзиев, С.Б.Ятимов, А.Р.Файзиев.** О генезисе полиметаллических месторождений

Юго-Западного Карамазара (на примере Кансайской и Такелийской группы месторождений)232

CONTENTS

MATHEMATICS

- Z.Kh.Rakhmonov, D.D.Rahmonov.** Short exponential sums with primes in a small neighborhood of the center of major arcs121
- Sh.A.Khayrulloev.** Distance between adjacent zeros of the derivative of the j -th order of the Hardy function129
- Sh.M.Zulfonov.** Application of the Laplace-Carson transform to the solution of the initial-boundary value problem for integro differential equations135
- M.Sh.Shabozov, A.S.Quraishi.** On exact upper bounds of root mean square approximations some classes of periodic differentiable functions in space L_2 142
- G.A.Yusupov, A.A.Shabozova.** Average squared polynomial approximation of periodic differentiated functions.....150
- F.Raimzoda.** Exact inequalities containing best approximations and high order difference norms in L_2156
- R.Pirov, M.A.Jabborov.** On the study of some systems of partial differential equations with two unknown functions in space165

ASTRONOMY

- G.I.Kokhirova, O.V.Ivanova, F.Dzh.Rakhmatullaeva, S.Borysenko, V.K.Agnihotri, A.M.Buriev.** The disintegrations of comet Atlas by observations in Tajikistan and India.....171

PHYSICS

- Farhod Rahimi, B.G.Pirov.** Heisenberg magnets with spin $S=3/2$ in multidimensional space183
- Kh.O.Abdulloev, D.K.Solihov, S.S.Rakhmonov.** Solution of the nonlinear Schrödinger equation within the easy-axis Heisenberg model and the behavior of spin wave packets193
- Sh.Tuichiev, D.Rashidov, S.Kh.Tabarov, F.Kh.Sodikov.** Influence of nanographenes on structure and some properties of polymers198
- N.U.Mulloyev, N.A.Majidov, N.L.Lavrik.** Quantum-chemical calculation of the structure of imidazole dimers202

STRUCTURAL MECHANICS

- J.N.Nizomov.** Boundary integral equations three-dimensional problems of elasticity theory207

INORGANIC CHEMISTRY

- U.M.Mirsaidov, B.B.Barotov, K.O.Boboev, I.Mirsaidzoda, J.N.Eshov.** Uranium concentrates separation from brine, drainage and process waters219

PHYSICAL CHEMISTRY

A.Sharifov, Z.H.Gaibullaeva, D.S.Nematzoda, Z.A.Goziev. Corrosion of hydraulic concrete and causes of its flow224

MINERALOGY

F.A.Fayziev, S.B.Yatimov, A.R.Fayziev. On the formation of polymetal deposits of South-Western Karamazar (on the example of Konsoy and Takeli groups).....232

УДК 511.325

Академик НАН Таджикистана З.Х.Рахмонов, Д.Д.Рахмонов

КОРОТКИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ В МАЛОЙ ОКРЕСТНОСТИ ЦЕНТРА БОЛЬШИХ ДУГ

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

Для тригонометрической суммы вида $\sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n)e(\alpha n^k)$ в окрестности $|\alpha - \frac{a}{q}| \leq (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ центра $\frac{a}{q}$ больших дуг при $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25b+18}$, $\mathcal{L} = \ln xq$, $q \leq \mathcal{L}^b$ доказана асимптотическая формула.

Ключевые слова: короткая тригонометрическая сумма с простыми числами, большие дуги, плотностная теорема, L -функция Дирихле.

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon \tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α , для которых $q \leq P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α . $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

И.М.Виноградов [1] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

при $k=1$, используя свой метод оценок сумм с простым числом, он доказал нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln \ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при $y > x^{\frac{2+\varepsilon}{3}}$. Затем С.Б.Хейзелгроув [2], В.Статулявичус [3], Ч.Д.Пан и Ч.Б.Пан [4], Ж.Тао [5] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \geq x^\theta$, получив нетривиальную оценку в малых дугах и изучив ее поведение в больших дугах, доказали асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i - N/3| \leq H$, $H = N^\theta$, соответственно при

$$\theta = \frac{63}{64} + \varepsilon, \quad \frac{279}{308} + \varepsilon, \quad \frac{2}{3} + \varepsilon, \quad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Адрес для корреспонденции: Рахмонов Зарулло Хусенович, Рахмонов Достонджон Давронович. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: zrahmonov@mitas.tj; r.doston@bk.ru

Дж.Лю и Ж.Тао [6], как в малых дугах, так и в больших дугах, получив нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha; x, y)$ при $y \geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$, доказали теорему, что достаточно большое натуральное число N можно представить в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2, \quad \left| p_j - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad \left| p_3^2 - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{27}{32}+\varepsilon},$$

а в [7] при помощи теоремы М.Ютилы [8] о четвертом моменте L -функций Дирихле в критической прямой в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathcal{L}^c)$, $\tau = y^{2k-1} x^{-k+1} \mathcal{L}^{-c_3}$, $\mathcal{L} = \ln xq$, за исключением малой окрестности их центров, получили нетривиальную оценку $S_k(\alpha; x, y)$, $k \geq 3$ при $y \geq x^{1-\frac{1}{2k-1}+\varepsilon}$. Нетривиальную оценку $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$, $\tau = x^{k-\frac{2}{2k+3}} P^{-1}$ при $y \geq x^{1-\frac{1}{2k+3}+\varepsilon}$ получил А.В.Кумчев [9].

В 2016 г. З.Х.Рахмонов и Ф.З.Рахмонов [10–12] при $y \geq x^{\frac{4}{5}} \mathcal{L}^{8B+151}$, на малых дугах $\mathfrak{m}(\mathcal{L}^{32(B+20)})$, $\tau = y^5 x^{-2} \mathcal{L}^{-32(B+20)}$, где B – абсолютная постоянная, получили нетривиальную оценку суммы $S_3(\alpha; x, y)$. В работах [13,14] исследовано поведение суммы $S_3(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathcal{L}^b)$.

В этой статье результат работы [13] обобщен для произвольного фиксированного $k \geq 3$, то есть с использованием теоремы о втором моменте L -функций Дирихле в критической прямой исследовано поведение суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг.

Теорема. Пусть $x \geq x_0$, A , b_1 , b — произвольные фиксированные положительные числа, $1 \leq q \leq \mathcal{L}^b$, $\tau = y^{2k-1} x^{k-1} \mathcal{L}^{-b_1}$,

$$\tau(\chi, a, k) = \sum_{n=1}^q \chi(n) e\left(\frac{an^k}{q}\right).$$

Тогда при $\lambda \leq (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ и $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25b+18}$ справедлива асимптотическая формула:

$$S_k(\alpha; x, y) = \frac{\tau(\chi_0, a, k)}{\varphi(q)} \int_{x-y}^x e(\lambda u^k) du + O(y \mathcal{L}^{-A}).$$

Схема доказательства теоремы. Воспользовавшись свойством ортогональности характеров, преобразованием Абеля в интегральной форме, формулой разложения функции Чебышева $\psi(x, \chi)$ по нулям $L(s, \chi)$ при $T_0 = (xy^{-1} + |\lambda| x^k) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3}$ и формулой интегрирования по частям, найдем:

$$S_k(\alpha; x, y) = \frac{\tau(\chi_0, a, k)}{\varphi(q)} \int_{x-y}^x e(\lambda u^k) du - W(\alpha; x, y) - E_1 W_1(\alpha; x, y) + R_k. \tag{1}$$

$$W_1(\alpha; x, y) = \frac{\tau(\chi_1, a, k)}{\varphi(q)} I(\beta_1, \lambda), \quad I(\rho, \lambda) = \int_{x-y}^x u^{\beta-1} e\left(\lambda u^k + \frac{\gamma}{2\pi} \ln u\right) du,$$

$$W(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} \tau(\bar{\chi}, a, k) \sum_{\substack{|\rho| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} I(\rho, \lambda),$$

$$R_k \ll \frac{(1 + |\lambda| y x^{k-1}) x \mathcal{L}^2}{T_0} \max_{\chi \pmod q} |\tau(\chi, a, k)|,$$

где $E_1 = 1$, если по модулю q существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s, \chi_1)$ имеет действительный нуль β_1 , $\beta_1 \geq 1 - c / \ln q$ и $E_1 = 0$ в противном случае. Пользуясь тривиальными оценками суммы $\tau(\chi_1, a, k)$ и интеграла $I(\beta_1, \lambda)$, затем воспользовавшись теоремой К.Зигеля о границе действительного нуля, найдем

$$|W_1(\alpha; x, y)| \ll y x^{\beta_1-1} \leq y \exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathcal{L}}{\mathcal{L}^{b\varepsilon}}\right) \ll y \exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathcal{L}}) \ll y \mathcal{L}^{-A}. \tag{2}$$

Из условия $1 \leq q \leq \mathcal{L}^b$ и известной оценки И.М.Вингрардова следует, что

$$|\tau(\chi, a, k)| \leq 2\sqrt{q} (\tau(q))^{\frac{\ln k}{\ln 2}} \ll \frac{\varphi(q)\mathcal{L}}{\sqrt{q}}. \tag{3}$$

Воспользовавшись этой оценкой и явным видом параметра T_0 , находим

$$R_k \ll y \mathcal{L}^{-A}. \tag{4}$$

Переходя в $W(\alpha; x, y)$ к оценкам и воспользовавшись оценкой (3), имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \leq \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{q}} \sum_{\chi \pmod q} \mathcal{W}(\lambda, \chi), \quad \mathcal{W}(\lambda, \chi) = \sum_{\substack{|\rho| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\rho, \lambda)|, \tag{5}$$

$|W(\alpha; x, y)|$ будем оценивать только в случае $\lambda \geq 0$. Случай $\lambda \leq 0$ сводится к случаю $\lambda \geq 0$ с помощью соотношения $\mathcal{W}(\lambda, \chi) = \mathcal{W}(\chi, -\lambda)$. Оценивая интеграл $I(\rho, \lambda)$, тривиально и по величине производных первого и второго порядков, имеем

$$|I(\rho, \lambda)| \ll x^\beta \min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min|\gamma + 2\pi k \lambda u^k|}, \frac{1}{\sqrt{|2\pi k(k-1)\lambda u^k - \gamma|}}\right). \tag{6}$$

Будем считать, что для параметра y выполняется условие

$$x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25b+18} \leq y \leq x \mathcal{L}^{-A-0.5b+3}. \tag{7}$$

Все нули $\rho = \beta + i\gamma$ функции ζ с условием $|\gamma| \leq T_0$ разобьем на множества D_1 , D_2 и D_3 следующим образом:

$$D_1 = \left\{ \rho : -T_0 + 2\pi k \lambda u^k \leq \gamma + 2\pi k \lambda u^k < -2\pi k \lambda x^k + 2\pi k \lambda u^k - \frac{x}{y} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ \rho : -2\pi k \lambda x^k - \frac{x}{y} \leq \gamma \leq -2\pi k \lambda (x-y)^k + \frac{x}{y} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ \rho : 2\pi k \lambda u^k - 2\pi k \lambda (x-y)^k + \frac{x}{y} < \gamma + 2\pi k \lambda u^k \leq T_0 + 2\pi k \lambda u^k \right\}.$$

Обозначая через $\mathcal{W}_j(\lambda, \chi)$, $j=1,2,3$ сумму модулей интеграла $I(\rho, \lambda)$ по нулям ρ , принадлежащим множеству D_j , представим $\mathcal{W}(\lambda, \chi)$ в (5) в виде:

$$\mathcal{W}(\lambda, \chi) = \mathcal{W}_1(\lambda, \chi) + \mathcal{W}_2(\lambda, \chi) + \mathcal{W}_3(\lambda, \chi). \tag{8}$$

Оценка $\mathcal{W}_1(\lambda, \chi)$. В отрезке $x-y \leq u \leq x$ функция $2\pi k \lambda u^k$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы множества D_1 имеем $-2\pi k \lambda x^k + 2\pi k \lambda u^k - \frac{x}{y} \leq -\frac{x}{y}$. Следовательно, если ρ принадлежит множеству D_1 , то выполняется неравенство $\gamma + 2\pi k \lambda u^k < -\frac{x}{y}$, поэтому для монотонной возрастающей функции $\gamma + 2\pi k \lambda u^k$ в отрезке $x-y \leq u \leq x$ справедливо соотношение

$$\min |\gamma + 2\pi k \lambda u^k| = -\max(\gamma + 2\pi k \lambda u^k) = -\gamma - 2\pi k \lambda x^k \geq \frac{x}{y}, \text{ если } \rho \in D_1.$$

Отсюда, с учетом второй оценки (6), находим

$$\mathcal{W}_1(\lambda, \chi) \ll \sum_{\rho \in D_1} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi k \lambda x^k}.$$

Все нули в множестве $D_1 = \left\{ \rho : \frac{x}{y} \leq -\gamma - 2\pi k \lambda x^k < T_0 - 2\pi k \lambda x^k \right\}$ разобьем на классы D_{11}, \dots, D_{1r} ,

$r \ll T_0 x^{-1} y$ следующим образом: в класс D_{1n} отнесем те нули ρ , для которых выполняются условия:

$$\frac{nx}{y} < -\gamma - 2\pi k \lambda x^k \leq \frac{(n+1)x}{y}.$$

Поэтому

$$\mathcal{W}_1(\lambda, \chi) \ll \leq \frac{y}{x} \sum_{n=1}^r \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{n} \leq \frac{y\mathcal{L}}{x} \max_{1 \leq n \leq r} \sum_{\rho \in D_{1n}} x^\beta \leq \frac{y\mathcal{L}}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} < \gamma \leq T} x^\beta.$$

Оценка $\mathcal{W}_3(\chi, \lambda)$. В отрезке $x - y \leq u \leq x$ функция $2\pi k \lambda u^k$ монотонно возрастает, поэтому для левой границы множества D_3 имеем $2\pi k \lambda u^k - 2\pi k \lambda (x - y)^k + \frac{x}{y} \geq \frac{x}{y}$. Следовательно, если ρ принадлежит множеству D_3 , то выполняется неравенство $\gamma + 2\pi k \lambda u^k > \frac{x}{y}$, поэтому для монотонно возрастающей функции $\gamma + 2\pi k \lambda u^k$ в отрезке $x - y \leq u \leq x$ справедливо соотношение

$$\min |\gamma + 2\pi k \lambda u^k| = \min(\gamma + 2\pi k \lambda u^k) = \gamma + 2\pi k \lambda (x - y)^k \geq \frac{x}{y}, \quad \text{если } \rho \in D_3.$$

Отсюда с учетом второй оценки (6), а затем, поступая аналогично, как в случае оценки $W_1(\chi, \lambda)$, найдем

$$W_3(\chi, \lambda) \ll \sum_{\rho \in D_3} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi k \lambda (x - y)^k} \ll \frac{y\mathcal{L}}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} < \gamma \leq T} x^\beta.$$

Оценка $\mathcal{W}_2(\lambda, \chi)$. Из соотношения $\lambda \leq (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ следует, что для длины множества D_2 выполняется неравенство

$$2\pi k \lambda (x^k - (x - y)^k) + \frac{2x}{y} \leq 2\pi k^2 \lambda x^{k-1} y + \frac{2x}{y} \leq \frac{(2k + 2)x}{y}$$

и, воспользовавшись тривиальной оценкой интеграла $I(\rho, \lambda)$, имеем

$$\mathcal{W}_2(\lambda, \chi) \ll \frac{y}{x} \sum_{\rho \in D_2} x^\beta \leq \frac{(2k + 2)y}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} \leq -\gamma \leq T} x^\beta \ll \frac{y}{x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \frac{x}{y} \leq \gamma \leq T} x^\beta.$$

Подставляя оценки для $\mathcal{W}_1(\lambda, \chi)$, $\mathcal{W}_2(\chi, \lambda)$ и $\mathcal{W}_3(\chi, \lambda)$ в (8), а затем в (5), найдем:

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \frac{y\mathcal{L}^2}{\sqrt{q}x} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{\text{mod } q} \sum_{T - \frac{x}{y} < \gamma \leq T} x^\beta.$$

Воспользуемся плотностной теоремой в узких прямоугольниках критической полосы для нулей L -рядов Дирихле и теоремой о границе этих нулей, имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \frac{y\mathcal{L}^k}{\sqrt{q}x} \max_{|T| \leq T_0} \max_{0.5 \leq u \leq 1 - \delta} x^u \sum_{z \text{ mod } q} \left(N(u, T, \chi) - N\left(u, T - \frac{x}{y}, \chi\right) \right),$$

$$\delta = \delta(q, T_0) = \frac{c_1}{\max\left(\ln q, (\ln(T_0 + 3) \ln \ln(T_0 + 3))^{\frac{3}{4}}\right)}.$$

Из определения T_0 , условия $\lambda \leq (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ и (7) имеем

$$\frac{T}{(xy^{-1})^3} \leq \frac{T_0}{(xy^{-1})^3} = \left(\frac{y^2}{x^2} + \lambda x^{k-3} y^3\right) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3} \leq \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{2\pi k^2 x}\right) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3} \leq 1.$$

Следовательно, в последней сумме по $\chi \pmod q$ выполняется условие $\frac{x}{y} \geq T^{\frac{1}{3}}$, то есть к этой сумме

можно применить плотностную теорему Ж.Тао [15, стр. 206]. Полагая в этой теореме $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2. \tag{9}$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{y \mathcal{L}^{12}}{\sqrt{q} x} \max_{0.5 \leq u \leq 0.75} x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{4-4u}{3-2u}}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{y \mathcal{L}^k}{\sqrt{q} x} \max_{0.75 \leq u \leq 1-\delta} x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}.$$

Суммы \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 в точности совпадают с суммами, рассмотренными в работе [13], для которых были получены оценки

$$\mathcal{A}_1 \ll y \mathcal{L}^{-A},$$

$$\mathcal{A}_2 \ll y \mathcal{L}^k \exp(-0.125\delta \mathcal{L}).$$

Из условий $\lambda \leq (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ и $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25b+18}$ легко следует, что $T_0 < x$, воспользовавшись которым, оценим снизу параметр $\delta = \delta(q, T_0)$:

$$\delta(q, T_0) \geq \frac{c_1}{\max\left(b \ln \mathcal{L}, (\mathcal{L} \ln \mathcal{L})^{\frac{3}{4}}\right)} \geq c_1 \mathcal{L}^{-0.76}.$$

Поэтому

$$\mathcal{A}_2 \ll y \mathcal{L}^k \exp(-0.125c_1 \mathcal{L}^{0.24}) \ll y \mathcal{L}^{-A}.$$

Подставляя эту оценку и оценку для суммы \mathcal{A}_1 в (9), получим

$$|W(\alpha; x, y)| \ll y \mathcal{L}^{-A}.$$

Из этой оценки, а также оценок (2) и (4) ввиду (1) получим утверждение теоремы.

Поступило 30.03.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Виноградов И.М. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1952.
2. Haselgrove C.B. Some theorems in the analytic theory of number. — J. London Math. Soc, 1951, v. 26, pp. 273-277.
3. Статулявичус В. О представлении нечетных чисел суммой трех почти равных простых чисел. — Вильнюс, Ученые труды университета, сер. мат., физ. и хим. н., 1955, 2, с. 5-23.
4. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III). — Chinese Ann. of Math., 1990, v. 2, pp. 138-147.
5. Zhan Tao. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes. — Acta Math Sinica, new ser., 1991, v. 7, 3, pp. 135-170.
6. Liu J.Y., Zhan Tao. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I. — Mh. Math., 1999, v. 127, pp. 27-41.
7. Liu J.Y., Zhan Tao. Hua's Theorem on Prime Squares in Short Intervals. — Acta Math. Sinica. English Series. Oct., 2000, v. 16, No 4, pp. 669-690.
8. Jutila M. Mean value estimates for exponential sums with applications to L -functions. — Acta Arithmetica, 1991, v. 57, Is. 2, pp. 93-114.
9. Kumchev A.V. On Weyl sums over primes in short intervals. — "Arithmetic in Shangrila" — Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications, 2012, v. 9, Singapore: World Scientific, pp. 116-131.
10. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм в малых дугах. — ДАН РТ, 2016, т. 59, 7-8, с. 273-277.
11. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Короткие кубические суммы с простыми числами. — Труды МИАН, 2016, т. 296, с. 220-242.
12. Rakhmonov Z.Kh., Rakhmonov F.Z. Short Cubic Exponential Sums over Primes. — Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2017, v. 296, pp. 211-233.
13. Рахмонов З.Х., Собиров А.Ш., Фозилова П.М. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг. — ДАН РТ, 2020, т. 63, 5-6, с. 279-288.
14. Рахмонов З.Х., Собиров А.Ш., Фозилова П.М. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах. — ДАН РТ, 2020, т. 63, 7-8, с. 405-415.
15. Zhan Tao. On the Mean Square of Dirichlet L -Functions. — Acta Mathematica Sinica. New Series, 1992, v. 8, No 2, pp. 204-224.

З.Х.Рахмонов, Д.Д.Рахмонов

**СУММАҲОИ ТРИГОНОМЕТРИИ КЎТОҲ БО АДАДҲОИ СОДДА ДАР
АТРОФИ ХУРДИ МАРКАЗИ КАМОНҲОИ КАЛОН**

Институти математикаи ба номи А. Ҷўраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Барои суммаи тригонометрии намуди $\sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n)e(\alpha n^k)$ дар атрофи

$$|\alpha - \frac{a}{q}| \leq (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$$

маркази $\frac{a}{q}$ камонҳои калон ҳангоми $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25b+18}$, $\mathcal{L} = \ln xq$,

$q \leq \mathcal{L}^b$ формулаи асимптотӣ исбот карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: суммаи тригонометрии кӯтоҳ бо ададҳои содда, камонҳои калон, теоремаҳои зичӣ, L-функсияи Дирихле.

Z.Kh.Rakhmonov, D.D.Rahmonov

**SHORT EXPONENTIAL SUMS WITH PRIMES IN A SMALL NEIGHBORHOOD
OF THE CENTER OF MAJOR ARCS**

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan

For a exponential sums of the form $\sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n)e(\alpha n^k)$ in the neighborhood

$$|\alpha - \frac{a}{q}| \leq (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$$

of the center $\frac{a}{q}$ of major arcs when $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25b+18}$, $\mathcal{L} = \ln xq$, $q \leq \mathcal{L}^b$

the asymptotic formula is proved.

Key words: short exponential sum with primes, major arcs, density theorem, Dirichlet L-function.

УДК 511.325

Ш.А.Хайруллоев

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СОСЕДНИМИ НУЛЯМИ ПРОИЗВОДНОЙ j -ГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ ХАРДИ

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 05.04.2021 г.)

В работе получена новая оценка снизу длины промежутка критической прямой, содержащей нуль нечётного порядка производной j -го порядка функции Харди.

Ключевые слова: *функция Харди, экспоненциальная пара, дзета-функция Римана, критическая прямая, тригонометрическая сумма.*

Функция Харди $Z(t)$, задаваемая равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \quad e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \right|^{-1},$$

принимает вещественные значения при вещественных значениях t , и вещественные нули $Z(t)$ являются нулями $\zeta(0.5 + it)$, то есть нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой. Одной из актуальных нерешенных проблем теории нулей дзета-функции Римана и её обобщения для более общих рядов Дирихле является оценка снизу величины промежутка критической прямой, на котором заведомо лежит нуль функции $Z(t)$. Существует гипотеза [1], что эта величина, а именно длина H промежутка $(T, T + H)$, содержащего нуль функции $Z(t)$, сверху ограничена величиной T^ε , где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое фиксированное число.

Первым результатом о нулях дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой является теорема Г.Харди [2]. В 1914 г. он доказал, что $\zeta(1/2 + it)$ имеет бесконечно много вещественных нулей. Затем Харди и Литтлвуд [3] в 1921 г. доказали, что промежуток $(T, T + H)$ при $H \geq T^{1/4+\varepsilon}$ содержит нуль нечётного порядка $\zeta(1/2 + it)$. Ян Мозер [4] в 1976 г. показал, что это утверждение имеет место при $H \geq T^{1/6} \ln^2 T$. В 1981 г. А.А.Карацуба [1] доказал теорему Харди-Литтлвуда уже при $H \geq T^{5/32} \ln^2 T$.

А.А.Карацуба, наряду с задачей о соседних нулях функции Харди, рассматривая более общую задачу о соседних нулях функции $Z^{(j)}(t)$, доказал: пусть j — натуральное число, $T \geq T_0(j) > 0$, $c = c(j) > 0$, тогда функция $Z^{(j)}(t)$ содержит нуль нечётного порядка в промежутке $(T, T + H)$, если

Адрес для корреспонденции: *Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: shamsullo@rambler.ru*

$$H \geq cT^{\frac{1}{6j+6}} (\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \tag{1}$$

тем самым он показал, что с увеличением j длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль $Z^{(j)}(t)$, уменьшается.

Определение. Если $B \geq 1, 0 < h \leq B, F(u) \in C^\infty(B, 2B), A \geq 1,$

$$AB^{1-r} \ll |F^{(r)}(u)| \ll AB^{1-r}, r = 1, 2, 3, \dots,$$

где постоянные под знаком \ll зависят только от r , и имеет место оценка

$$\sum_{B \leq n \leq B+h} e(F(n)) \ll A^\kappa B^\lambda, \quad 0 \leq \kappa \leq 0.5 \leq \lambda \leq 1,$$

то пара (κ, λ) называется экспоненциальной парой.

Тривиальная оценка показывает, что $(0; 1)$ является экспоненциальной парой. E.Phillips [5] доказал, что если (κ, λ) экспоненциальная пара, то

$$A(\kappa, \lambda) = \left(\frac{\kappa}{2\kappa+2}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\kappa+2} \right), \quad B(\kappa, \lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}, \kappa + \frac{1}{2} \right)$$

также являются экспоненциальными парами.

В работе [6] задача о величине промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t), j \geq 1,$ сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм, то есть: пусть (κ, λ) – произвольная экспоненциальная пара, j – натуральное число, $T \geq T_0(j) > 0, c = c_0(j) > 0,$ тогда функция $Z^{(j)}(t)$ содержит нуль нечётного порядка в промежутке $(T, T + H),$ если

$$H \geq cT^{\omega_j(\kappa, \lambda)} (\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \quad \omega_j(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda - 0.5}{2\kappa + 4\lambda + 2j - 1}. \tag{2}$$

Заметим, что теорема А.А.Карацубы, то есть оценка (1), является следствием оценки (2) при

$$(\kappa, \lambda) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3} \right).$$

Основным результатом работы является новая оценка снизу длины промежутка, содержащая нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t).$

Теорема. Пусть $j \geq 3$ – натуральное число, $T \geq T_0(j) > 0, c = c(j) > 0,$ тогда функция $Z^{(j)}(t)$ содержит нуль нечётного порядка в промежутке $(T, T + H),$ если

$$H \geq cT^{\frac{1}{6+6j} - \frac{1}{6(1+j)(19+18j)}} (\ln T)^{\frac{2}{j+1}}.$$

Доказательство. Минимизируем функцию $\omega_j(\kappa, \lambda)$, определенную в (2) по множеству всех экспоненциальных пар \mathcal{P} . Воспользовавшись представлением

$$\omega_j(\kappa, \lambda) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2 - \delta_j^{-1}(\kappa, \lambda)} \right), \quad \delta_j(\kappa, \lambda) = \frac{\lambda + j}{0.5 - \kappa + j},$$

эту минимизацию сводим к минимизации $\delta_j(\kappa, \lambda)$ и пользуемся алгоритмом определения оптимальных экспоненциальных пар по множеству \mathcal{P} ([5], стр. 62) для минимизации дробно-линейной функции $\theta(\kappa, \lambda) = \theta\Lambda$, где

$$\theta = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix},$$

a, b, c, d, e, f — вещественные числа. Основу этого алгоритма составляют леммы 1, 2 и 3 (см. [5], теоремы 5.5, 5.6 и 5.8), в формулировке которых используются обозначения:

$$u = bf - ce, \quad v = af - cd, \quad w = ae - bd, \quad \xi(\theta) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Лемма 1. Пусть для всех $(\kappa, \lambda) \in \mathcal{P}$ выполняется $d\kappa + e\lambda + f > 0$, r — произвольное вещественное число, удовлетворяющее условию $r \leq \inf_{\mathcal{P}} (\kappa + \lambda)$, $Y = \max(wr + v - u, w + v - u)$, $Z = \min(wr + v - u, w + v - u)$. Тогда

$$\inf \theta = \begin{cases} \inf \theta A, & \text{если } Z \geq 0; \\ \inf \theta B A, & \text{если } Y \leq 0. \end{cases}$$

Лемма 2. Пусть r такое, как в лемме 1, C — некоторое конечное произведение A и B , что $\inf \theta B A = \inf \theta B A C$, и $\sup\{\kappa + \lambda : (\kappa, \lambda) \in C A \mathcal{P}\} = r_1$, а также $\min(rw + v - u, r_1 w + v - u) \geq 0$, тогда $\inf \theta = \inf \theta A$.

Лемма 3. Пусть u, v, w такие, как в лемме 1, тогда следующие условия эквивалентны:

- a) $\inf \theta = \inf \theta A^q, \forall q \geq 0$;
- b) $\inf \theta = \theta(0, 1)$;
- c) $w + v \geq u, u \leq 0$.

Каждая итерация алгоритма состоит из следующих 6 шагов:

1. проверяем условие $d\kappa + e\lambda + f \geq 0$;
2. вычисляем $\xi(\theta)$;
3. если условие $\inf \theta = \theta(0, 1)$ в лемме 3 выполняется, то останавливаемся;

4. проверяем выполнение условий леммы 3 к θB , то есть, если выполняется условие $\inf \theta = \theta(0.5, 0.5)$, то останавливаемся;

5. проверяем выполнение условий леммы 1, если лемма 1 неприменима, то проверяем условие леммы 2, если и лемма 2 неприменима, то завершаем алгоритм, ибо он не работает в этом случае;

6. если $\inf \theta = \inf \theta A$, то заменяем $\xi(\theta)$ на $\xi(\theta A)$, если же $\inf \theta = \inf \theta BA$, то $\xi(\theta)$ заменяем на $\xi(\theta BA)$, иначе возвращаемся к шагу 5.

Минимизация по множеству всех экспоненциальных пар \mathcal{P} функции

$$\delta_j(\kappa, \lambda) = \frac{\lambda + j}{0.5 - \kappa + j} = \delta_j \Lambda, \quad \delta_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & j \\ -1 & 0 & 0.5 + j \end{pmatrix}$$

при помощи вышеуказанного алгоритма состоит всего из четырёх итераций, которые для удобства обозначим соответственно буквами D , E , F и G . Имеем

D1. Условия леммы 1, то есть неравенство $-\kappa + 0.5 + j > 0$, выполняется.

D2. По формуле (3), вычисляя параметры u , v и w , составим вектор

$$\xi(\delta_j) = \begin{pmatrix} 0.5 + j \\ j \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D3. $w + v = 1 + j$, $u = 0.5 + j$, то есть условия с) леммы 3, не выполняются, следовательно, не выполняются также и условия а) и б) этой леммы.

D4. Применяя лемму 3 к $\delta_j B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 + j \\ 0 & -1 & 1 + j \end{pmatrix}$, и вычисляя параметры u , v и w ,

составим вектор

$$\xi(\delta_j B) = \begin{pmatrix} 0.5 + j \\ 1 + j \\ -1 \end{pmatrix},$$

и имеем $w + v = j$ и $u = 0.5 + j$, то есть условия с) леммы 3, не выполняются, следовательно, не выполняются также и условия а) и б) этой леммы.

D5. К δ_j , применяя лемму 1 при $r = \frac{1}{2}$, $Y = 0.5 > 0$, $Z = r - 0.5 > 0$, имеем $\inf \delta_j = \inf \delta_j A$.

D6. Заменяя $\xi(\delta_j)$ на $\xi(\delta_j A)$, имеем

$$\delta_j A = \begin{pmatrix} 1 + 2j & 1 & 1 + 2j \\ 2j & 0 & 1 + 2j \end{pmatrix}, \quad \xi(\delta_j A) = \begin{pmatrix} 1 + 2j \\ 1 + 2j \\ -2j \end{pmatrix}.$$

Е5. Применяя лемму 1 к $\delta_j A$ при $Y = -2jr < 0$, $Z = -2j < 0$, имеем $\inf \delta_j A = \inf \delta_j ABA$.

Е6. Заменяя $\xi(\delta_j A)$ на $\xi(\delta_j ABA)$, находим

$$\delta_j ABA = \begin{pmatrix} 4+4j & 1+2j & 3+4j \\ 2+4j & 2j & 2+4j \end{pmatrix}, \quad \xi(\delta_j ABA) = \begin{pmatrix} 2+2j \\ 2+4j \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ф5. Применяя лемму 1 к $\delta_j ABA$ при $Y = -2r + 2j > 0$, $Z = -2 + 2j \geq 0$, получим $\inf \delta_j ABA = \inf \delta_j ABA^2$.

Ф6. Заменяя $\xi(\delta_j ABA)$ на $\xi(\delta_j ABA^2)$, имеем

$$\delta_j ABA^2 = \begin{pmatrix} 11+14j & 1+2j & 7+10j \\ 6+14j & 2j & 4+10j \end{pmatrix}, \quad \xi(\delta_j ABA^2) = \begin{pmatrix} 4+4j \\ 2+8j \\ -6-4j \end{pmatrix}.$$

Г5. Лемму 1 к $\delta_j ABA^2$ применить нельзя, так как $Y = -6r - 4rj - 2 + 4j > 0$, $Z = -8 < 0$.

Поэтому при

$$\min(rw + v - u, r_1 w + v - u) = -6r_1 - 4jr_1 - 2 + 4j < 0,$$

применяя лемму 2, завершаем алгоритм. Имеем

$$\inf \delta_j = \delta_j ABA^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \delta_j \left(\frac{1}{9}, \frac{13}{18} \right) = 1 + \frac{6}{7+18j}.$$

Следовательно,

$$\omega_j \left(\frac{1}{9}, \frac{13}{18} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2 - \delta_j^{-1} \left(\frac{1}{9}, \frac{13}{18} \right)} \right) = \frac{1}{6+6j} - \frac{1}{6(1+j)(19+18j)}.$$

Поступило 09.04.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карацуба А.А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой. — Труды МИАН, 1981, т. 157, с. 49-63.
2. Hardy G.H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. — Compt.Rend. Acad.Sci., 1914, v.158, pp. 1012-1014.

3. Hardy G.H., Littlewood J.E. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line. — Math.Z., 1921, bd. 10, s. 283-317.
4. Мозер Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана. – Acta arith., 1976, 31, s. 31-43.
5. Graham S.W., Kolesnik G. Vander Corput's Method of Exponential sums. – Cambridge university press., 1991, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney.
6. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой. – ДАН РТ, 2006, т. 49, 5, с. 393-400.

Ш.А.Хайруллоев

МАСОФАИ БАЙНИ НУЛ ТАРТИБИ j -УМИ ФУНКСИЯИ ХАРДИ

Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Баҳои нави поёнии дарозии порчаи хатти рости критикӣ, ки дорои нули тартиби токи ҳосилаҳои тартиби j -уми функсияи Харди мебошад, гирифта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *функсияи Харди, ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, дзета-функсияи Риман, хати рости критикӣ, суммаи тригонометрӣ.*

Sh.A.Khayrulloev

DISTANCE BETWEEN ADJACENT ZEROS OF THE DERIVATIVE OF THE j -TH ORDER OF THE HARDY FUNCTION

A.Juraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan

In this paper, a new lower bound for the length of an interval of the critical line containing a zero of odd order of the j -th order derivative of the Hardy function is obtained.

Key words: *Hardy function, exponential pair, the Riemann zeta function, critical line, trigonometric sum.*

УДК 511.5

Ш.М.Зулфонов

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА-КАРСОНА К РЕШЕНИЮ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Илоловым 11.12.2020 г.)

В работе исследуется вопрос о применении операционного исчисления по двум переменным к решению интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: *преобразование Лапласа-Карсона, начально-краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение, функция Хевисайда.*

В работах японского математика Y.Fujita [1, 2] исследована следующая задача Коши: найти решение уравнения

$$u(x, t) = f(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2} d\tau, \quad 1 \leq \alpha \leq 2, \quad (1)$$

удовлетворяющее условию

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

В [1] доказано, что при $1 < \alpha < 2$ уравнение (1 α) интерполирует уравнение теплопроводности (1 $_1$) и волновое уравнение (1 $_2$) и формально представляет собой дробное по t дифференциальное уравнение в частных производных. В [1] найдено решение задачи (1 α), (2) в классе обобщенных функций Шварца с помощью преобразования Фурье по переменной x .

1. В настоящей работе рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u(x, t) = f(t) + \int_0^t a(t-\tau) \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} d\tau \quad (3)$$

с начальным условием (2) и с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \varphi(t), \quad t \geq 0, \\ u'_x(0, t) &= c(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В качестве ядра интеграла берется функция

$$a(t) = te^{-bt}, \quad (5)$$

Адрес для корреспонденции: Зулфонов Шахриер Мулозулфонович. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121, ТГПУ. E-mail: zulfonov.shakhriev@mail.ru

где b – действительное число. Нетрудно заметить, что при $b = 0$ задача (3), (1), (4) сводится к соответствующей задаче для волнового уравнения. Целью работы является получение представления решения с помощью двумерного преобразования Лапласа-Карсона.

2. Приведем необходимые для дальнейшего сведения из операционного исчисления [3].

Преобразования вида

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx \tag{6}$$

и

$$F(p, q) = pq \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-px - qy} f(x, y) dx dy \tag{7}$$

называются соответственно одномерным и двумерным преобразованиями Лапласа-Карсона с символическими записями

$$F(p) \doteq f(x) \text{ и } F(p, q) \doteq f(x, y).$$

При этом функции $F(p)$ и $F(p, q)$ в (6) и (7) называются изображениями, а функции $f(x)$ и $f(x, y)$ оригиналами. Будем считать, что преобразование Лапласа-Карсона единичной функции Хевисайда

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{если } x < 0, y < 0, x > 0, y < 0, x < 0, y < 0 \end{cases}$$

переходит в единицу, то есть $H(p, q) = 1$.

Для преобразования Лапласа-Карсона справедлива теорема умножения:

Если

$$F_1(p, q) \doteq f_1(x, y) \text{ и } F_2(p, q) \doteq f_2(x, y),$$

то имеет место соотношение

$$f_1(x, y) \underset{**}{*} f_2(x, y) \doteq \frac{1}{pq} F_1(p, q) \cdot F_2(p, q),$$

где

$$f_1(x, y) \underset{**}{*} f_2(x, y) = \int_0^x \int_0^y f_1(\xi, \eta) f_2(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta.$$

Двойная звездочка обозначает двойную свертку по x и y , в отличие от свертки только по x ,

$$f_1(x, y) \overset{x}{*} f_2(x, y) = \int_0^x f_1(\xi, \eta) f_2(x - \xi, y) d\xi,$$

или только по y

$$f_1(x, y) \overset{y}{*} f_2(x, y) = \int_0^y f_1(\xi, \eta) f_2(x, y - \eta) d\eta.$$

Нам понадобится также изображение функции $f(|x - y|)$. Считая $f(x)$ при отрицательном аргументе равной нулю, можно найти изображение для функции $f(x, y)$.

Обозначив

$$f_1(x, y) = \begin{cases} f(x - y), & \text{если } x > y, \\ 0, & \text{если } x < y, \end{cases}$$

имеем

$$F_1(p, q) = pq \int_0^\infty e^{-qy} dy \int_0^\infty e^{-px} f(x - y) dx.$$

Полагая $x - y = u$, будем иметь

$$f_1(x, y) \doteq\doteq F_1(p, q) = \frac{q}{p + q} F(p). \tag{8}$$

Аналогично находим изображение функции

$$f_2(x, y) = \begin{cases} f(y - x), & \text{если } x > y, \\ 0, & \text{если } x < y, \end{cases}$$

которое по симметрии имеет с (8) вид

$$f_2(x, y) \doteq\doteq \frac{p}{p + q} F(q). \tag{9}$$

Складывая (8) и (9), получим

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = f(|x - y|) \doteq\doteq \frac{pF(q) + qF(p)}{p + q}.$$

3. Вернемся теперь к задаче (1)-(3). Пусть

$$\begin{aligned} u(x, y) \doteq\doteq U(p, q), \quad u(x, 0) = f(x) \doteq F(p), \\ u(0, t) = \varphi(t) \doteq \Phi(q), \quad u'(0, t) = c(t) \doteq C(p). \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя (10) в (3), (2), (4), (5) и учитывая теорему об умножении, получим уравнение для изображений

$$U(p, q) = \frac{F(p) - 1/qA(q)p^2\Phi(p) - 1/qA(q)C(q)}{1 - 1/qA(q)p^2}. \tag{11}$$

С учетом конкретного вида ядра

$$a(t) = te^{-bt}$$

и его преобразования Лапласа-Карсона

$$a(t) \div A(q) = q / (q + b)^2$$

уравнение (11) примет вид

$$U(p, q) = \frac{(q + b)^2 F(p) - p^2\Phi(q) - pC(q)}{(q + p)^2 - p^2}. \tag{12}$$

Знаменатель в (12) имеет корни:

$$p = q + b, \quad p = -(q + p).$$

Второй корень нас не интересует, так как при достаточно больших $Re q$ не лежит в области сходимости интеграла Лапласа-Карсона. Однако первый корень $p = q + b$ лежит в указанной области. Следовательно, числитель в правой части (12) должен иметь корень $p = q + b$, без чего функция $U(p, q)$ перестала бы быть аналитической функцией при $p^2 = (q + b)^2$. Поэтому справедливо равенство

$$(q + b)^2 F(q + b) - (q + b)^2 \Phi(q) - (q + b)C(q) = 0, \tag{13}$$

связывающее между собой функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и $c(x)$, так что только два из них могут быть выбраны произвольно. Пусть, например, требуется вычислить функцию $\varphi(x)$ по известным функциям $f(x)$ и $c(x)$. Определяя $\Phi(p)$ из равенства (13), получим

$$U(p, q) = \left\{ \frac{(q + b)^2 F(p) - p^2 F(q + b)}{(q + b)^2 - p^2} \right\} + \left\{ \frac{-pC(q)}{(q + b)(p + q + b)} \right\}. \tag{14}$$

Каждое из слагаемых в (14) рассматривается отдельно. Нашей задачей является нахождение функций оригинала для слагаемых в правой части (14). Для этого необходимо вычислить изображения отдельных функций с учетом формул (8) и (9).

Непосредственные вычисления приводят к следующим формулам:

$$e^{-bt-cx} f(t-x) \doteq\doteq \frac{pqF(q+b)}{(q+b)(p+q+b+c)} \text{ при } t > x, \quad (15)$$

$$e^{-bt-cx} f(x-t) \doteq\doteq \frac{pqF(p+c)}{(p+c)(q+b+p+c)} \text{ при } t < x. \quad (16)$$

Теперь с учетом (8), (9) и (15), (16) получим

$$e^{-bt-cx} f(|x-t|) \doteq\doteq \frac{pq}{p+q+b+c} \left(\frac{F(q+b)}{q+b} - \frac{F(p+c)}{p+c} \right). \quad (17)$$

Из (17) при $c = 0$ следует соотношение

$$e^{-bt} f(|x-t|) \doteq\doteq \frac{q}{q+b} \left(\frac{pF(q+b) + (q+b)F(p)}{p+q+b} \right). \quad (18)$$

Введем также дельта-функцию Дирака

$$\delta(t-s) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = s, \\ \infty, & \text{если } t \neq s. \end{cases}$$

С учетом этой функции и функции Хевисайда $\eta(x, t)$ и с помощью довольно громоздких вычислений находим преобразование Лапласа-Карсона для функции

$$\int_0^t [\delta(t-s) + b\eta(t-s)] e^{-bs} f(|x-s|) ds \doteq\doteq \frac{pF(q+b) + (q+b)F(p)}{p+q+b}. \quad (19)$$

Далее имеем следующие соотношения

$$e^{-bt} f(|x-t|) \doteq\doteq \frac{q}{q+b} \cdot \frac{pF(q+b) - (q+b)F(p)}{p - (q+b)}, \quad (20)$$

и

$$\int_0^t [\delta(t-s) + b\eta(t-s)] e^{-bs} f(x+s) ds \doteq\doteq \frac{pF(q+b) - (q+b)F(p)}{p - (q+b)}. \quad (21)$$

Отметим, что в опубликованных ранее работах [4,5] была установлена следующая формула

$$\int_0^{\min(x,t)} e^{-(1+b)\lambda} g(x-\lambda, t-\lambda) d\lambda \doteq\doteq \frac{G(p, q)}{p+q+b+1}, \quad (22)$$

где $g(x, t)$ является интегрируемой функцией. С учетом (22) и теоремы умножения получаем

$$\int_0^{\min(x,t)} [\delta(t-s) + b\eta(t-s)] e^{-bs} f(x+s) ds \doteq\doteq \frac{(q+b)F(p)}{p+q+b}. \quad (23)$$

Преобразования (15)-(21) и (23) позволяют выписать функцию оригинала для первого слагаемого справа в равенстве (14) в следующем виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t [\delta(t-s) + b\eta(t-s)] e^{-bs} f(s+x) + f(s-x) ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\min(x,t)} [\delta(t-s) + b\eta(t-s)] e^{-bs} f(|x-s|) ds \doteq\doteq \\ & \doteq\doteq \frac{(q+b)^2 F(p) - p^2 F(q+b)}{(q+b)^2 - p^2} . \end{aligned} \tag{24}$$

Функция оригинала для второго слагаемого в правой части равенства (14) имеет вид

$$\int_0^t e^{-b(t-s+x)} C(s-x) ds \doteq\doteq \frac{pC(q)}{(q+b)(p+q+b)} . \tag{25}$$

Складывая равенства (24) и (25), получим искомую функцию $u(x,t)$ в виде представления

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \frac{1}{2} \int_0^t [\delta(t-s) + b\eta(t-s)] e^{-bs} (f(x+s) + f(s-x)) ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\min(x,t)} [\delta(t-s) + b\eta(t-s)] e^{-bs} f(x-s) ds - \int_0^t e^{-b(t-s+x)} C(s-x) ds. \end{aligned}$$

4. Применение операционного исчисления по двум переменным к решению интегро-дифференциальных уравнений в частных производных распадается на три этапа. На первом этапе выписывается алгебраическое уравнение для изображений. Второй этап состоит в нахождении решения этого изображающего уравнения. Наконец на третьем осуществляется переход от решения, изображающего уравнение к искомому решению с помощью формулы обращения. В настоящей работе найдены некоторые специфические приемы обращения для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, допускающих обобщение на многомерный случай.

Поступило 11.12.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fujita Y. Integrodifferential equations which interpolates the heat equation and the wave equation. – Osaka J. Math. v.27 №2, 1990, pp. 309-321.
2. Fujita Y. Integrodifferential equations which interpolates the heat equation and the wave equation (11). – Osaka J. Math., 1990, v.27, №4, pp. 797-804.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. – Москва: Физматлит, 1958, 178 с.

4. Илолов М., Зулфонов Ш.М. Начально краевая задача для уравнения в частных производных второго порядка. Мат-лы Междунар. науч. конф., посвящ. 70-летию проф. Джангибекова Г. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.) 2020, с. 135-141.
5. Илолов М., Зулфонов Ш.М. Решение начально-краевой задачи для уравнения в частных производных второго порядка с помощью преобразования Лапласа-Карсона. – Мат-лы Междунар. науч. конф., посвящ. 60-летию акад. АН РТ, доктора физ.-мат. н., проф. Рахмонова З.Х. и чл.-корр. АН РТ доктора физ.-мат. н., проф. Исхокова С.А. (Душанбе, декабрь 2019 г.), 2019, с. 108-112.

Ш.М.Зулфонов

ТАТБИҚИ ТАБДИЛОТИ ЛАПЛАС-КАРСОН БА ҲАЛЛИ МАСЪАЛАИ ИБТИДОӢ КАНОРӢ БАРОИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНСИАЛӢ

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Дар ин мақола масъалаи татбиқи ҳисобкунии амалиётиро ду тағйирёбанда ба ҳалли муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусуси таҳқиқ карда мешавад.

Калимаҳои калидӣ: *табдилоти Лаплас-Карсон, масъалаи ибтидоии канорӣ, муодилаи интегро-дифференсиалӣ, функсияи Хевисайд.*

Sh.M.Zulfonov

APPLICATION OF THE LAPLACE-CARSON TRANSFORM TO THE SOLUTION OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR INTEGRO DIFFERENTIAL EQUATIONS

S.Ayni Tajik State Pedagogical University

In this paper, we investigate the question of the application of operational calculations in two variables to the solution of integro-differential equations in partial derivatives.

Key words: *Laplace-Carson transform, initial-boundary value problem, integro-differential equation, Heaviside function.*

УДК 517.5

Академик НАН Таджикистана М.Ш.Шабозов, А.С.Курайши

**О ТОЧНЫХ ВЕРХНИХ ГРАНЯХ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ
НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ
ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2** *Таджикский национальный университет*

В статье найдены точные значения верхних граней наилучших среднеквадратических приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами, характеризующимися обобщённым модулем непрерывности, порождённым конкретным оператором обобщённого сдвига в пространстве $L_2 := [0, 2\pi]$.

Ключевые слова: наилучшее среднеквадратическое приближение функций, верхние грани, обобщённый модуль непрерывности, оператор обобщённого сдвига.

Известно, что при аппроксимации 2π -периодических функций тригонометрическими полиномами важную роль играет обычный оператор сдвига $T_h f(x) := f(x+h)$, $x, h \in \mathbb{R}$ и определяемые с его помощью классические модули непрерывности различных порядков. В последнее время при решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций часто используются различные модификации классических модулей непрерывности, порождённых обобщёнными операторами сдвига (см., например, [1-5] и приведенную в них литературу). Это связано с тем, что многие задачи гармонического анализа можно решать, используя различные операторы обобщённого сдвига вместо обычного оператора сдвига [6,7]. Операторы сдвига обладают многими замечательными свойствами, например, преобразование Фурье представляет собой разложение по собственным функциям оператора сдвига, посредством оператора сдвига определяется свёртка функций и т.д.

Данная статья продолжает указанную тематику и является дальнейшим обобщением и развитием идей, изложенных в работах [3-5]. Здесь найдены точные значения верхних граней наилучших среднеквадратических приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности, порождённым конкретным оператором сдвига.

В дальнейшем символами $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}$ обозначим множество натуральных, целых неотрицательных, положительных, вещественных чисел. Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство измеримых по Лебегу суммируемых с квадратом 2π -периодических функций с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2};$$

\mathcal{T}_{2n-1} – пространство действительных тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

где $a_k(f), b_k(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье. Величина её наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством \mathcal{T}_{2n-1} равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &:= \inf \{ \|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

– частная сумма порядка $(n-1)$ ряда Фурье функции f , а

$$\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Введём в рассмотрение функцию

$$T(x, y; h) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(x-y)} \cdot h^{|n|}, \quad 0 < h < 1, \tag{1}$$

которая играет важную роль при решении некоторых задач математической физики (см, например, [8, с.420]).

Функция (1) естественным образом возникает при решении ряда задач классического анализа. Так, например, функция $T(x, y; h)$ определяется равенством

$$T(x, y; h) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} h^k \cos k(x-y) = \frac{1-h^2}{1-2h \cos(x-y) + h^2} \tag{2}$$

и связана с интегралом Пуассона соотношением [8, с.441]

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-\varphi) + r^2} dt$$

являющимся решением внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге. Отметим также, что функция (2) встречается в теории суммирования тригонометрических рядов методом Пуассона [9, с.152-154]. Таким образом, функция $T(x, y; h)$ играет важную роль в различных вопросах математики. В пространстве L_2 определим оператор

$$F_h f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) T(x, t; 1-h) dt, \tag{3}$$

который назовём оператором обобщенного сдвига. Легко проверить, что оператор (3) обладает следующими простыми свойствами:

1. $F_h(\alpha f + \beta g) = \alpha F_h(f) + \beta F_h(g), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2. $\| F_h f \| \leq \| f \|$;
3. $\| F_h f - f \| \rightarrow 0, h \rightarrow 0+$;
4. $F_h(\cos nx) = (1-h)^n \cos nx, F_h(\sin nx) = (1-h)^n \sin nx$, где $0 < h < 1$.

Пусть $f \in L_2$. Определим, как и в классическом анализе, конечные разности первого и высших порядков функции f равенствами

$$\Delta_h f(x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E) f(x), \tag{4}$$

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (F_h - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x), \tag{5}$$

где $F_h^0 f(x) = E f(x) = f(x), F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x)), k = \overline{1, m}; E$ – единичный оператор в пространстве L_2 . Величину

$$\Omega_m(f; t)_2 = \sup \{ \| \Delta_h^m f(\cdot) \|_2 : 0 < h \leq t \} \tag{6}$$

будем называть обобщённым модулем непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$. В [10] доказано, что для произвольной функции $f \in L_2$ имеют место равенства

$$a_n(F_h f) = (1-h)^n a_n(f), b_n(F_h f) = (1-h)^n b_n(f),$$

пользуясь которыми для оператора (3) находим следующее разложение в ряд Фурье

$$\begin{aligned} F_h f(x) &= \frac{1}{2} a_0(F_h f) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(F_h f) \cos kx + b_k(F_h f) \sin kx) = \\ &= \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} (1-h)^k (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx). \end{aligned} \tag{7}$$

Следовательно, для разности первого порядка в силу (4) и (7) имеем

$$\Delta_h f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [(1-h)^k - 1] (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \tag{8}$$

и далее, применяя метод математической индукции, для произвольной $m \in \mathbb{N}$ с учетом (8) запишем

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [(1-h)^k - 1]^m (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx).$$

Отсюда, применяя равенство Парсеваля, находим

$$\|\Delta_h^m f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (1-h)^k]^{2m} \rho_k^2(f), \quad 0 < h \leq t$$

и в силу (6) будем иметь

$$\Omega_m^2(f; t)_2 = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (1-t)^k]^{2m} \rho_k^2(f), \quad 0 < t < 1. \tag{9}$$

Как обычно, $C^{(r)} := C^{(r)}[0, 2\pi]$ ($C^{(0)} := C[0, 2\pi]$, $r \in \mathbb{N}$) – множество r раз непрерывно дифференцируемых на всей оси 2π -периодических функций; $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ ($L_2^{(0)} := L_2[0, 2\pi]$, $r \in \mathbb{N}$) — совокупность заданных на всей оси функций f периода 2π , у которых производная $f^{(r-1)}$ $r \in \mathbb{N}$ локально абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$, а производная r -го порядка $f^{(r)} \in L_2$.

Если $f \in C^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$), то r -кратным интегрированием по частям получаем

$$|a_k(f)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt \right| = \begin{cases} k^{-r} |b_k(f^{(r)})|, & k \in \mathbb{N}, r = 1, 3, 5, \dots \\ k^{-r} |a_k(f^{(r)})|, & k \in \mathbb{N}, r = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$|b_k(f)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt \right| = \begin{cases} k^{-r} |a_k(f^{(r)})|, & k \in \mathbb{N}, r = 1, 3, 5, \dots \\ k^{-r} |b_k(f^{(r)})|, & k \in \mathbb{N}, r = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Из этих равенств следует, что

$$\rho_k^2(f^{(r)}) := a_k^2(f^{(r)}) + b_k^2(f^{(r)}) = k^{2r} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) = k^{2r} \rho_k^2(f). \tag{10}$$

Учитывая (10), из соотношений (9) получаем

$$\Omega_m^2(f^{(r)}; t)_2 = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (1-t)^k]^{2m} \rho_k^2(f^{(r)}) = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (1-t)^k]^{2m} k^{2r} \rho_k^2(f).$$

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ все её промежуточные производные $f^{(\nu)}$ ($\nu = \overline{0, r}$) принадлежат пространству L_2 , а потому определённый интерес

представляет изучение поведения величин $E_{n-1}(f^{(\nu)})_2, (\nu = \overline{0, r})$ на классе $L_2^{(r)}$ или на некотором подклассе функций $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$. Имеет место следующее утверждение

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}, r, \nu \in \mathbb{Z}_+, r \geq \nu, \nu = \overline{0, r}$. Тогда справедлива оценка

$$E_{n-1}(f^{(\nu)})_2 \leq [1 - (1-t)^n]^{-m} \cdot n^{-(r-\nu)} \Omega_m(f^{(r)}, t)_2. \tag{11}$$

При каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$, константа в правой части неравенства (11) уменьшена быть не может.

Всюду далее, в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$, подразумевается, что $f \neq const$.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\Omega_m(f^{(r)}, t)_2} = [1 - (1-t)^n]^{-m}.$$

Более того, при любых $\nu = \overline{0, r}, r, \nu \in \mathbb{Z}_+, r \geq \nu$ и $m, n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\Omega_m(f^{(r)}, 1/n)_2} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right]^{-m} = (1 - e^{-1})^{-m}.$$

Условимся под весовой функцией на отрезке $[0, h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию φ , не эквивалентную нулю на этом отрезке.

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}, r, \nu \in \mathbb{Z}_+, r \geq \nu, 0 < h < 1, 0 < p \leq \infty, \varphi(t)$ – весовая на $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^n]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}.$$

Из теоремы 2 вытекает ряд следствий.

Следствие 2. В утверждении теоремы 2 при $p = 1/m, m \in \mathbb{N}, \varphi(t) \equiv 1$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left((n+1) \int_0^h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_2 dt \right)^m} = [(n+1)h - 1 + (1-h)^{n+1}]^{-m}. \tag{12}$$

В частности, полагая $h = 1/(n+1)$, из (12) получаем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left((n+1) \int_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_2 dt \right)^m} = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-m(n+1)},$$

откуда

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left((n+1) \int_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_2 dt \right)^m} = e^m.$$

Следствие 3. Если в условиях теоремы 2 положить $\varphi(t) = n(1-t)^{n-1}$, $0 < t < 1$, то имеем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left(n \int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 (1-t)^{n-1} dt \right)^{1/p}} = \left\{ \frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \quad (13)$$

В частности, полагая $p = 1/m$, $h = 1/n$, $m, n \in \mathbb{N}$, из (13) получаем

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left(n \int_0^{1/n} \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_2 (1-t)^{n-1} dt \right)^m} = \\ = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{2}{[1-(1-1/n)^n]^2} \right\}^m = \frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}. \end{aligned}$$

Символом $W_{p,m}^{(r)}(h) := W_p^{(r)}(\Omega_m; \varphi, h)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, φ — весовая на $[0, h]$, $0 < h < 1$ функция обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \leq 1.$$

Требуется найти значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(\nu)}(W_{p,m}^{(r)}(h))_2 := \sup\{E_{n-1}(f^{(\nu)})_2 : f \in W_{p,m}^{(r)}(h)\}.$$

Теорема 3. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $n > r > \nu$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1)$, φ — весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(\nu)}(W_{p,m}^{(r)}(h))_2 = \frac{n^{-(r-\nu)}}{\left(\int_0^h [1-(1-t)^n]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}.$$

Следствие 4. В условиях теоремы 3 при $p = 1/m$, $m, n \in \mathbb{N}$, $h = 1/(n+1)$ и $\varphi(t) \equiv 1$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(\nu)} \left(W_{1/m, m}^{(r)} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right)_2 = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-m(n+1)} \cdot n^{-(r-\nu)}.$$

Поступило 30.01.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ditzian Z., Totik V. Moduli of Smoothness, Springer Ser. Comput. Math., 9 Springer, New York, 1987.
2. Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости. – М.: Мир, 1988.
3. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π -периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$. – Матем. заметки, 2004, т. 76, №6, с. 803-811.
4. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 . – Сиб. матем. журн., 2011, т. 52, №6, с. 1414-1427.
5. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 . – Матем. заметки, 2012, т. 92, №4, с. 497-514.
6. Платонов С.С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой. – Изв. РАН, сер. матем., 2007, т. 71, в. 5, с. 149-196.
7. Иванов А.В., Иванов В.И. Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом. – Труды ИМ и М УрО РАН, 2010, т. 16, №4, с. 180-192.
8. Владимиров В.С. Уравнение математической физики. – М., Наука, 1976.
9. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматиз, 1961, 933 с.
10. Керимов М.К., Селимханов Э.В. О точных оценках скорости сходимости рядов Фурье для функции одной переменной в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$. – ЖВМ и МФ, 2016, т. 56, №5, с. 730-741.

М.Ш.Шабозов, А.С.Курайши

ДОИР БА САРҲАДИ САҲЕҲИ БОЛОИИ НАЗДИККУНИИ МИЁНАКВАДРАТИИ БАЪЗЕ СИНФИ ФУНКСИЯҲОИ ДАВРИИ ДИФФЕРЕНСИРОНИДАШАВАНДА ДАР ФАЗОИ L_2

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола қиммати аниқ сарҳади саҳеҳи наздиккунии беҳтарини миёнакватрагии баъзе синфи функцияҳои даврии дифференсиронидашаванда ба воситаи бисёрраъзогиҳои тригонометрӣ, ки модули бефосилагӣ бо операторҳои дар фазои $L_2 := [0, 2\pi]$ тавсифи шудаанд, ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарини миёнакватрагии функцияҳо, сарҳади болоӣ, модули бефосилагии умумикардашуда, оператори умумикардашудаи геҷиш.

M.Sh.Shabozov, A.S.Quraishi

**ON EXACT UPPER BOUNDS OF ROOT MEAN SQUARE APPROXIMATIONS
SOME CLASSES OF PERIODIC DIFFERENTIABLE FUNCTIONS IN SPACE L_2**

Tajik National University

In the article, the exact values of the upper bounds of the best mean non-quadratic approximations of some classes of periodic of rendered functions by trigonometric polynomials, characterizing generalized modulus of continuity generated by a specific generalized shift operator in the space $L_2:=[0,2\pi]$ are found.

Key words: *best root mean square approximation functions, upper bounds, generalized modulus of continuity, generalization operator displacement.*

УДК 517.5

Г.А.Юсупов, А.А.Шабозова

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком АН Республики Таджикистан М.Ш.Шабозовым 16.07.2019 г.)

В работе получены точные константы в неравенствах Джексона – Стечкина и для функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых последовательные производные $f^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots, r$) принадлежат пространству L_2 , найдено значение величины наилучших совместных приближений $E_{n-1}(f^{(s)})$ на классе $L_2^{(r)}$.

Ключевые слова: периодическая функция, наилучшее полиномиальное приближение, точная константа, неравенства Джексона-Стечкина, модуль непрерывности, весовая функция, n -поперечники.

Пусть \mathbb{N} — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; \mathbb{R}_+ — множество всех положительных чисел вещественной оси; L_2 — пространство измеримых и суммируемых с квадратом по Лебегу вещественных 2π -периодических функций f , имеющих конечную норму

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{L_2} := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Совокупность всевозможных тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$ обозначим символом \mathcal{T}_{2n-1} . Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье, величина $E_{n-1}(f)_2$ её наилучшего полиномиального приближения элементами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf_{T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_{n-1}\| = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2},$$

где $S_{n-1}(f, x)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f , $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \in \mathbb{N}$, $a_k(f), b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f . Символом $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}, L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)} \in L_2$.

Адрес для корреспонденции: Юсупов Гулзорхон Амиришоевич. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: G_7777@mail.ru.

Обозначим через $\Delta_h^m(f)$ норму разности m -го порядка функции f из пространства L_2 с шагом h

$$\Delta_h^m(f) := \left\| \Delta_h^m f(\cdot) \right\| = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kh) \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

и равенством

$$\omega_m(f; t) \stackrel{def}{=} \sup \{ \Delta_h^m(f) : |h| \leq t \} \tag{1}$$

определим модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$.

Напомним, что под неравенствами типа Джексона-Стечкина в любом нормированном пространстве X понимают соотношения вида

$$E_{n-1}(f)_X \leq \chi n^{-r} \omega_m(f^{(r)}, \tau/n)_X, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \tau > 0,$$

в которых погрешность приближения индивидуальной функции f оценивается через заданную характеристику гладкости ω_m самой приближаемой функции f или некоторой её производной $f^{(r)} \in X$. Здесь возникает задача отыскания точных констант в неравенстве Джексона-Стечкина между величинами наилучших приближений и усреднённым значением модуля непрерывности (1).

Условимся в дальнейшем функцию φ называть весовой функцией на отрезке $[0, h]$, если φ является неотрицательной измеримой суммируемой на $[0, h]$ не эквивалентной нулю функцией.

Введём следующую экстремальную характеристику (далее соотношение 0/0 полагаем равным нулю):

$$\chi_{m,n,r,p,s}(\varphi, h) = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{2^m n^{r-s} E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}}, \tag{2}$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq s \leq r$, $0 < h \leq 3\pi / (4n)$, $\varphi(t) \geq 0$ — весовая функция. Величина (2) при $r = s$, в том числе дробных r , была исследована в работах М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [1-3], а при $r = s$, $p = 2$ еще раньше А.А.Лигуном [4] и при различных значениях параметров m, p и конкретных весовых функциях $\varphi(t)$ другими математиками (подробная литература с комментариями см. в [1-3, 5, 6]).

Поскольку для $f \in L_2^{(r)}$ её последовательные производные $f^{(s)} \in L_2$ ($s = 0, 1, \dots, r$), то представляет интерес изучение поведения величины наилучших приближений $E_{n-1}(f^{(s)})(s = 0, 1, \dots, r)$ на указанном классе $L_2^{(r)}$. Приводим решение этой задачи, когда

структурные характеристики функции $f \in L_2^{(r)}$ характеризуются усреднёнными с весом $\varphi(t)$ значениями модулей непрерывности $\omega_m(f^{(r)}, t)_2$. Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq 3\pi / (4n)$, $r \in \mathbb{R}_+$, $s = 0, 1, \dots, r$; $\varphi(t)$ – весовая функция на отрезке $[0, h]$, удовлетворяющая условию

$$(sp - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0.$$

Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \tag{3}$$

Из теоремы 1 вытекает ряд следствий.

Следствие 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $r \in \mathbb{R}_+$, $s = 0, 1, \dots, r$; $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \leq h$, $0 < h \leq \pi / n$. Тогда

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p}. \tag{4}$$

Отметим, что равенство (4) при $s = r \in \mathbb{N}$ ранее получено в работе [7].

Следствие 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $p = 2 / m$, $s = 0, 1, \dots, r$; $r \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(t) = 1$, $0 < t \leq h, 0 < h \leq \pi / n$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^{s-m/2} E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}; t)_2 dt \right)^{m/2}} = \frac{1}{(nh - \sin nh)^{m/2}}. \tag{5}$$

Равенство (5) при $s = r \in \mathbb{N}$ и $m = 1$ было доказано Л.В.Тайковым [8], а при $s = r \in \mathbb{N}$ и любых $m \in \mathbb{N}$ доказано С.Б.Вакарчуком [9].

Следствие 3. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $p = 2 / m$, $s = 0, 1, \dots, r$; $r \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(t) = t$, $0 < h \leq \pi / n$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{h^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int_0^h t \omega_m^{2/m}(f^{(r)}; t)_2 dt \right)^{m/2}} = \left\{ 1 - \frac{2 \sin nh}{nh} + \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2}.$$

Из теоремы 1 при $\varphi(t) = \sin^\gamma(\beta t / h)$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 < h \leq \pi / n$ вытекает

Следствие 4. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $0 < p \leq 2$, $s = 0, 1, \dots, r$, $\gamma \geq 0$, $0 < \beta \leq \pi$, $0 < h \leq \pi/n$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t dt \right)^{-1/p}. \quad (6)$$

В частности, из (6) при $s = r \in \mathbb{N}$, $p = 2$, $0 < \gamma \leq 2r - 1$, $\beta = \pi/2$, $h = \pi/n$ получаем результат Н.Айнуллоева [3], а в случае $s = r \in \mathbb{N}$ и выполнении остальных условий следствия 4 получаем основной результат работы М.Г.Есмаганбетова [10].

Через $W_{p,h}^{(r)}(\omega_m, \varphi)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при всех $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$ выполняется условие

$$\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \leq 1.$$

Теперь заметим, что из равенства (3) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) при любом $s \in \overline{0, r}$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{1}{2^m n^{r-s}} \cdot \frac{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}}{\left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}. \quad (7)$$

Требуется найти точное значение величины

$$\sup\{E_{n-1}(f^{(s)})_2 : f \in W_{p,h}^{(r)}(\omega_m, \varphi)\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$ и $s = 0, 1, \dots, r$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sup\{E_{n-1}(f^{(s)})_2 : f \in W_{p,h}^{(r)}(\omega_m, \varphi)\} &= \\ &= 2^{-m} n^{-r+s} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство. Оценку сверху величины (8) для произвольной функции $f \in W_{p,h}^{(r)}(\omega_m, \varphi)$ получаем из неравенства (7)

$$\sup\{E_{n-1}(f^{(s)})_2 : f \in W_{p,h}^{(r)}(\omega_m, \varphi)\} \leq$$

$$\leq 2^{-m} n^{-r+s} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \tag{9}$$

С целью получения соответствующей оценки снизу величины, стоящей в левой части (8), введём в рассмотрение функцию

$$f_0(x) = \frac{1}{2^m n^r} \cdot \frac{\cos nx}{\left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \in W_{p,h}^{(r)}(\omega_m, \varphi),$$

для которой легко подсчитать, что

$$E_{n-1}(f_0^{(s)})_2 = \frac{1}{2^m n^{r-s}} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}, \tag{10}$$

$$\int_0^h \omega_m^p(f_0^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt = 1. \tag{11}$$

Пользуясь равенствами (10) и (11) получаем

$$\begin{aligned} & \sup\{E_{n-1}(f^{(s)})_2 : f \in W_{p,h}^{(r)}(\omega_m, \varphi)\} \geq \\ & \geq 2^{-m} n^{-r+s} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \tag{12}$$

Требуемое равенство (8) получаем из сопоставления оценки сверху (9) и оценки снизу (12), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Поступило 30.04.2019 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников. — Матем. заметки, 2011, т.90, №5, с.764-775.
2. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 . — J. of Approx. Theory, 2012, v.164, iss. 1, pp.869-878.
3. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. n -Widths of Certain Function Classes Defined by the Modulus of Continuity. — J. of Approx. Theory, 2017, v.215, iss. 1, pp.145-162.
4. Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 . — Матем. заметки, 1988, т.43, №6, с.757-769.

5. Юсупов Г.А. Точные значения поперечников некоторых классов функций из L_2 и минимизация констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина. — Модел. и анализ информ. систем, 2013, т.20, №5, с.106-116.
6. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точные неравенства типа Джексона – Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций. — ДАН России, 2013, т.451, №6, с.625-628.
7. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$. — Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
8. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 . – Матем. заметки, 1979, т.25, №2, с.217-223.
9. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 . — Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.
10. Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона. — Матем. заметки, 1999, т.65, №6, с.816-820.

Г.А.Юсупов, А.А.Шабозова

НАЗДИККУНИИ МИЁНАКВАДРАТИИ ПОЛИНОМИАЛИИ ФУНКСИЯҶОИ ДАВРИИ ДИФФЕРЕНСИРОНИДАШАВАНДА

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола доимҳои аниқ дар нобаробариҳои Чексон-Стечкин ёфта шуда, барои функсия $f \in L_2^{(r)}$, ки пай дар пайи $f^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots, r$) ҳам ба фазои L_2 тааллуқ доранд, қимати бузургии наздиккунии беҳтарин яқояи $E_{n-1}(f^{(s)})$ барои синфи функсия $L_2^{(r)}$ ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *функсияи даврӣ, наздиккунии беҳтарини полиномиалӣ, доимии аниқ, нобаробариҳои Чексон-Стечкин, модули бефосилагӣ, функсияи вазнӣ, n-қутрҳо.*

G.A.Yusupov, A.A.Shabozova

AVERAGE SQUARED POLYNOMIAL APPROXIMATION OF PERIODIC DIFFERENTIATED FUNCTIONS

Tajik National University

In this paper, we obtain the exact constants in the Jackson - Stechkin inequalities and for the function $f \in L_2^{(r)}$ in which the sequential derivatives are $f^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots, r$) belong to the space L_2 , the behavior of the value of the best joint approximations $E_{n-1}(f^{(s)})$ on the class $L_2^{(r)}$ is studied.

Key words: *periodic function, best polynomial approximation, exact constant, Jackson-Stechkin inequalities, modulus of continuity, weight function, n-widths.*

УДК 517.5

Ф.Раимзода

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И НОРМЫ РАЗНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В L_2

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 25.12.2021 г.)

В работе найдены точные неравенства между величиной наилучшего полиномиального приближения периодических дифференцируемых функций в L_2 и интегралами, содержащими нормы разности высших порядков функций, а также даны некоторые применения полученных результатов.

Ключевые слова: *точные неравенства, наилучшее приближение, тригонометрический полином, разность m -го порядка, совместное приближение.*

1. Вопросы получения точных неравенств между величиной наилучшего приближения и интегралами, содержащими характеристики гладкости различного типа, ранее рассматривались, например, в работах (см. [1-10] и приведенную в них литературу).

В этой работе приводим обобщение некоторых результатов, полученных нами в работах [11, 12]. Обозначим через \mathbb{N} – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; \mathbb{R}_+ – множество положительных чисел; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство суммируемых с квадратом по Лебегу 2π -периодических действительных функций с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0, 2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Множество всех тригонометрических полиномов

$$T_{n-1}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

порядка $n-1$ обозначим через \mathfrak{S}_{2n-1} . Если $S_{n-1}(f, x)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f :

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

Адрес для корреспонденции: Раимзода Фарахноз. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: farahnoz@mail.ru

то хорошо известно свойство частичной суммы ряда Фурье функций f , которое состоит в том, что наилучшее приближение функций f в метрике L_2 тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(x) \in \mathfrak{T}_{2n-1}$ реализуется частичной суммой ряда Фурье $S_{n-1}(f, x)$:

$$E_{n-1}(f)_2 := \inf \{ \|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \mathfrak{T}_{2n-1} \} = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где, ради простоты, положено $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$, $a_k(f), b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты Фурье функций $f \in L_2$.

Через $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} = L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)} \in L_2$. Модуль непрерывности m -го порядка произвольной 2π -периодической измеримой и суммируемой с квадратом функции $f \in L_2$ определим равенством

$$\omega_m(f, t) := \sup \{ \|\Delta_h^m f(\cdot)\|_2 : |h| \leq t \}, \quad (2)$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x + (m-k)h)$$

— разность m -го порядка функции f в точке x с шагом h . Непосредственным вычислением, применяя равенство Парсеваля, получаем соотношение

$$\|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) (1 - \cos kh)^m. \quad (3)$$

Далее положим

$$\text{sinct} := \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{при } t \neq 0; \\ 1, & \text{при } t = 0 \end{cases}.$$

В следующем утверждении приведено точное равенство, содержащее наилучшее приближение и усредненное значение нормы разности высшего порядка функций $f \in L_2^{(r)}$, $f \neq \text{const}$.

Теорема 1. При любых $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ и любом $h > 0$, удовлетворяющем неравенство $0 < nh \leq \pi$, справедливы равенства

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) dt \right)^{m/2}} = \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2}, \tag{4}$$

где $Si(u) := \int_0^u \sin ct dt$ — интегральный синус.

Доказательство. Равенство (3) справедливо для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ и из него вытекает неравенство

$$\|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^2 \geq 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) (1 - \cos kh)^m.$$

В силу определения величины (1), запишем равенство

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f)_2 - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cos kh &= \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) (1 - \cos kh) = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} (\rho_k(f))^{2-2/m} (\rho_k(f))^{2/m} (1 - \cos kh). \end{aligned} \tag{5}$$

Применяя к правой части (5) неравенство Гельдера

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k(f) b_k(f) \right| \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |b_k(f)|^q \right)^{1/q}$$

$$(p^{-1} + q^{-1} = 1, \quad 1 \leq p \leq \infty),$$

со значениями $p = m/(m-1)$, $q = m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, будем иметь

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f)_2 - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cos kh &\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right)^{1-1/m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) (1 - \cos kh)^m \right)^{1/m} \leq \\ &\leq (E_{n-1}(f)_2)^{2-2/m} \cdot \frac{1}{2n^{2r/m}} \left(2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) (1 - \cos kh)^m \right)^{1/m} \leq \\ &\leq (E_{n-1}(f)_2)^{2-2/m} \cdot \frac{\|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m}}{2n^{2r/m}}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cos kh + (E_{n-1}(f)_2)^{2-2/m} \cdot \frac{\|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m}}{2n^{2r/m}}. \tag{6}$$

Проинтегрировав обе части неравенства (6) по переменной h в промежутке $[0, \tau]$ и поделив результат на $\tau \neq 0$, имеем

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \frac{\sin k\tau}{k\tau} + (E_{n-1}(f)_2)^{2-2/m} \frac{1}{2n^{2r/m}} \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh.$$

Интегрируя обе части полученного неравенства по τ на отрезке $[0, t]$ ($0 \leq t \leq \pi/n$) и поделив полученный результат на $t \neq 0$, приходим к неравенству

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \frac{Si(kt)}{kt} + E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{2tn^{2r/m}} \int_0^t \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau. \tag{7}$$

Хорошо известно, что при значениях $\tau \in [0, +\infty)$ функция $Si(\tau) = \int_0^{\tau} \sin cu du$ монотонно возрастает от значения $Si(0) = 0$ до значения $Si(+\infty) = \pi/2$, вследствие чего отношение $Si(k\tau)/(k\tau)$ ($n \leq k < +\infty, 0 \leq \tau < \infty$) при $k \rightarrow \infty$ монотонно убывает, а потому имеет место равенство

$$\sup_{k \geq n} \frac{Si(kh)}{kh} = \frac{Si(nh)}{nh}. \tag{8}$$

Используя соотношение (8), из (7) будем иметь

$$E_{n-1}^2(f)_2 \left(1 - \frac{Si(nt)}{nt} \right) \leq E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{2tn^{2r/m}} \int_0^t \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau,$$

откуда следует неравенство

$$E_{n-1}^{2/m}(f)_2 \left(1 - \frac{Si(nt)}{nt} \right) \leq \frac{1}{2tn^{2r/m}} \int_0^t \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau.$$

Возведя обе части полученного неравенства в степень $m/2$, получаем

$$E_{n-1}(f)_2 \left(1 - \frac{Si(nt)}{nt} \right)^{m/2} \leq \frac{1}{(2t)^{m/2} n^r} \left(\int_0^t \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau \right)^{m/2}. \tag{9}$$

Так как неравенство (9) имеет место для любой функции $f \in L_2^{(r)}$, то отсюда следует оценка сверху для величины, стоящей в левой части равенства (4):

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau \right)^{m/2}} \leq \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2}. \tag{10}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу той же величины введем в рассмотрение функцию $g_0(x) = \sin nx \in L_2^{(r)}$, для которой

$$E_{n-1}(g_0)_2 = 1, \quad \|\Delta_h^m g_0^{(r)}(\cdot)\|_2 = 2^{m/2} n^r (1 - \cos nh)^{m/2}, \quad 0 < nh \leq \pi,$$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\Delta_h^m g_0^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh = 2n^{2r/m} (1 - \operatorname{sinc} n\tau),$$

$$\left(\int_0^t \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\Delta_h^m g_0^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau \right)^{m/2} = n^r \left\{ \frac{2(nt - Si(nt))}{n} \right\}^{m/2}.$$

Пользуясь этими равенствами, получаем оценку снизу

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau \right)^{m/2}} \geq \\ & \geq \frac{n^r E_{n-1}(g_0)_2}{\left(\int_0^h \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\Delta_h^m g_0^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau \right)^{m/2}} = \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Требуемое соотношение (4) получаем из сопоставления оценок (10) и (11), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Легко заметить, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ все ее последовательные производные $f^{(s)}$ ($s = \overline{1, r-1}, r \geq 2, r \in \mathbb{N}$) принадлежат пространству L_2 , а так как функции f и $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2 по определению множества $L_2^{(r)}$, то в дальнейшем будем предполагать, что все производные $f^{(s)}$ ($s = 0, 1, 2, \dots, r$) принадлежат пространству L_2 . Представляет несомненный интерес нахождение точного значения величины совместного наилучшего полиномиального приближения

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 := \{ \|f^{(s)} - p_{n-1}^{(s)}\|_2 : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

на некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$. Легко вычислить, что

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 = \|f^{(s)} - S_{n-1}(f^{(s)})\|_2 = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f).$$

Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда для любого $t \in (0, \pi/n]$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int_0^t \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau \right)^{m/2}} = \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2}. \quad (12)$$

Доказательство. В самом деле, если в левой части равенства (12) полагать $f^{(s)} = g$, то будем иметь $f^{(r)} = g^{(r-s)}$ и из того, что $f \in L_2^{(r)}$, следует, что $g \in L_2^{(r-s)}$. Но тогда, учитывая результат теоремы 1, в новых обозначениях получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int_0^t \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau \right)^{m/2}} = \\ & = \sup_{g \in L_2^{(r-s)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(g)_2}{\left(\int_0^t \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\Delta_h^m g^{(r-s)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau \right)^{m/2}} = \\ & = \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{m/2}, \end{aligned} \quad (13)$$

откуда и следует утверждение теоремы 2.

Пусть $\Phi(h)$, $h \in \mathbb{R}_+$ — непрерывная неубывающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Символом $W_m^{(r)}(\Phi, h)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $t \in (0, \pi/n]$ выполняется условие

$$\left(\int_0^t \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau \right)^{m/2} \leq \Phi(t).$$

Требуется при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ найти точное значение величины

$$E_{n-1}^{(s)}(W_m^{(r)}(\Phi, h))_2 := \{E_{n-1}(f^{(s)})_2 : f \in W_m^{(r)}(\Phi, h)\}. \quad (14)$$

В этих обозначениях имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < t \leq \pi/n$. Тогда справедливо равенство

$$E_{n-1}^{(s)}(W_m^{(r)}(\Phi, t))_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nt - Si(nt))} \right\}^{m/2} \Phi(t). \quad (15)$$

Доказательство. В самом деле, из равенства (12) для произвольной функции $f \in W_m^{(r)}(\Phi, t)$ получим

$$\begin{aligned}
 E_{n-1}(f^{(s)})_2 &\leq \\
 &\leq \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nt - Si(nt))} \right\}^{m/2} \left(\int_0^t \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau \right)^{m/2} \leq \\
 &\leq \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nt - Si(nt))} \right\}^{m/2} \Phi(t),
 \end{aligned}$$

откуда сразу следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (15):

$$E_{n-1}^{(s)}(W_m^{(r)}(\Phi, t))_2 \leq \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nt - Si(nt))} \right\}^{m/2} \Phi(t). \tag{16}$$

Оценка снизу той же величины достигается на функции

$$g_1(x) = \frac{1}{n^r} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nt - Si(nt))} \right\}^{m/2} \Phi(t) \sin nx,$$

для которой при любом $s = 0, 1, 2, \dots, r$ имеем

$$g_1^{(s)}(x) = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nt - Si(nt))} \right\}^{m/2} \Phi(t) \sin \left(nx + \frac{s\pi}{2} \right),$$

$$E_{n-1}(g_1^{(s)})_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nt - Si(nt))} \right\}^{m/2} \Phi(t),$$

$$\|\Delta_h^m g_1^{(r)}(\cdot)\|_2 = \left\{ \frac{n}{2(nt - Si(nt))} \right\}^{m/2} \Phi(t) \cdot 2^{m/2} (1 - \cos nh)^{m/2}, \quad 0 < nh \leq \pi,$$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\Delta_h^m g_1^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh = \left\{ \frac{n}{2(nt - Si(nt))} \right\} \{\Phi(t)\}^{2/m} \cdot 2(1 - \sin c n \tau), \quad 0 < n\tau \leq \pi,$$

$$\left(\int_0^t \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\Delta_h^m g_1^{(r)}(\cdot)\|_2^{2/m} dh \right) d\tau \right)^{m/2} = \Phi(t).$$

Последнее равенство означает, что $g_1 \in W_m^{(r)}(\Phi, t)$, а потому запишем

$$E_{n-1}^{(s)}(W_m^{(r)}(\Phi, h))_2 := \{E_{n-1}(f^{(s)})_2 : f \in W_m^{(r)}(\Phi, h)\} \geq$$

$$\geq E_{n-1}(g_1^{(s)})_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nt - Si(nt))} \right\}^{m/2} \Phi(t). \quad (17)$$

Равенство (15) получаем из сравнения неравенств (16) и (17). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Если выполнены предположения теоремы 3, то имеют место равенства

$$\begin{aligned} \sup\{|a_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(\Phi, t)\} &= \sup\{|b_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(\Phi, t)\} = \\ &= \frac{1}{n^r} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nt - Si(nt))} \right\}^{m/2} \Phi(t). \end{aligned} \quad (18)$$

В частности, из (18) при $t = \pi/n$ имеем:

$$\begin{aligned} \sup\{|a_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(\Phi, \pi/n)\} &= \sup\{|b_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(\Phi, \pi/n)\} = \\ &= \frac{1}{n^r} \cdot \left\{ \frac{n}{2(\pi - Si(\pi))} \right\}^{m/2} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Поступило 03.01.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 . — Матем. заметки, 1967, т.2, №5, с.513-522.
2. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 . — Матем. заметки, 1979, т.25, №2, с.217-223.
3. Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона. — Мат. заметки, 1999, т.65, №6, с.816-820.
4. Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 . — Матем. заметки, 1988, т.43, №6, с.757-769.
5. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 . — Матем. заметки, 2005, т.78, №5, с.792-796.
6. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 . — Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.
7. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$. — Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
8. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Неравенства между наилучшими приближениями и усреднениями модулей непрерывности в пространстве L_2 . — ДАН России, 2010, т.435, №2, с.178-181.
9. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников. — Матем. заметки, 2011, т.90, №5, с.764-775.
10. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 . — Сибир. мат. журн., 2011, т.52, №6, с.1414-1427.

11. Раимзода Ф. Точные неравенства, содержащие наилучшие приближения функций и нормы разности в L_2 . — ДАН РТ, 2020, т.63, №11-12, с.679-687.
12. Раимзода Ф. Об одновременном приближении функции и ее производных тригонометрическими полиномами в L_2 . — Изв. АН РТ, Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2020, №1(178), с.29-36.

Ф.Раимзода

НОБАРОБАРИҲОИ АНИҚ, КИ НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИН ВА НОРМАИ ФАРҚИЯТҲОИ ТАРТИБИ ОЛИРО ДАР ФАЗОИ L_2 ДАР БАР ДОРАНД

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола нобаробариҳои аниқ байни бузургии наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияҳои даврии дифференсиронидашаванда дар фазои L_2 ва интегралҳое, ки нормаи фарқи тартиби олии функсияро дар бар мегиранд, ёфта шуда, баъзе татбиқҳои онҳо нишон дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: нобаробариҳои аниқ, наздиккунии беҳтарин, бисераъзогии тригонометрӣ, фарқи тартиби m -ум, наздиккунии муштарак.

F.Raimzoda

EXACT INEQUALITIES CONTAINING BEST APPROXIMATIONS AND HIGH ORDER DIFFERENCE NORMS IN L_2

Tajik National University

The exact inequalities between the value of the best polynomial approximation of a periodic differentiable function in L_2 and integrals containing the norms of the difference of higher orders of functions are found, and some applications of the results are given.

Key words: exact inequalities, best approximation, trigonometric polynomial, m -th order difference, joint approximation.

УДК 517.956

Р.Пиров, М.А.Джабборов*

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни,

**Таджикский технический университет им. академика М.Осими*

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Илоловым 03.02.2021 г.)

В работе исследуется один класс переопределённых систем четырёх дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями в \mathcal{R}^3 . Найдены явные условия совместности, доказаны теоремы существования и единственности решений.

Ключевые слова: условия совместности, система в полных дифференциалах, переопределённые системы, многообразия решений.

1. В статье изучаются важные для переопределённых систем вопросы совместности и однозначной разрешимости систем

$$u_x, u_y, v_y, v_z = f^i(x, y, z; u, v, u_z), \quad i = \overline{1,4}, \quad (x, y, z) \in \mathcal{R}^3, \quad (1)$$

и

$$u_x, u_z, v_y, v_z = f^i(x, y, z; u, v, v_x), \quad i = \overline{1,4}, \quad (x, y, z) \in \mathcal{R}^3. \quad (2)$$

При этом укажем на исследования работ [1-7], наиболее близко соприкасающихся с содержанием данной статьи. Эти работы в основном относятся к трудам математической школы акад. Л.Г.Михайлова.

2. **Исследование системы (1).** Для системы (1), где $f^i \in C^2(\Pi)$, $i = \overline{1,4}$, $u \in C^3(\Pi)$, $v \in C^2(\Pi)$,

$$\{(x, y, z; u, v): \Pi: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq a, |z - z_0| \leq a, |u - u_0| \leq b, \\ |v - v_0| \leq b\},$$

неизвестные $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ ищутся в классе $C^2(\Pi_0)$, где

$$\Pi_0 = \{(x, y, z): |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |z - z_0| \leq b\}$$

при некотором $a > 0$.

Введя новую неизвестную функцию $u_z = w$, с помощью операции перекрестного дифференцирования (о.п.д.), получим

Адрес для корреспонденции: Пиров Рахмон. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет. E-mail: Pirov_60@mail.ru; Джабборов Мустафо Абдурозикович. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. академиков Раджабовых, 10, Таджикский технический университет. E-mail: Jabbor7@bk.ru

$$\begin{aligned}
 f_y^1 + f_u^1 \cdot f^2 + f_v^1 \cdot f^3 + f_w^1 \cdot w_y &= f_x^2 + f_u^2 \cdot f^1 + f_v^2 \cdot v_x + f_w^2 \cdot w_x: (u_{xy} = u_{yx}), \\
 w_x &= f_z^1 + f_u^1 \cdot w + f_v^1 \cdot f^4 + f_w^1 \cdot w_z: (u_{zx} = u_{xz}), \\
 w_y &= f_z^2 + f_u^2 \cdot w + f_v^2 \cdot f^4 + f_w^2 \cdot w_z: (u_{zy} = u_{yz}), \\
 f_z^3 + f_u^3 \cdot w + f_v^3 \cdot f^4 + f_w^3 \cdot w_z &= f_y^4 + f_u^4 \cdot f^2 + f_v^4 \cdot f^3 + f_w^4 \cdot w_y: (v_{yz} = v_{zy}).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Отсюда имеем возможности составлять систему

$$\begin{cases}
 u_x, u_y, v_y, v_z = f^i(x, y, z; u, v, w), i = \overline{1,4}, u_z = w, \\
 f_w^2 \cdot w_x - f_w^1 \cdot w_y + f_v^2 \cdot v_x = -f_x^2 + f_y^1 - f_u^2 \cdot f^1 + f_u^1 \cdot f^2 + f_v^1 \cdot f^3, \\
 f_w^4 \cdot w_y - f_w^3 \cdot w_z = -f_y^4 + f_z^3 - f_u^4 \cdot f^2 + f_u^3 \cdot w - f_v^4 \cdot f^3 + f_v^3 \cdot f^4, \\
 w_x - f_w^1 \cdot w_z = f_z^1 + f_u^1 \cdot w + f_v^1 \cdot f^4, \\
 w_y - f_w^2 \cdot w_z = f_z^2 + f_u^2 \cdot w + f_v^2 \cdot f^4.
 \end{cases}
 \tag{4}$$

В случае, когда определитель Δ , составленный из коэффициентов при w_x, w_y, w_z, v_x

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_w^2 & -f_w^1 & 0 & f_v^2 \\ 0 & f_w^4 & -f_w^3 & 0 \\ 1 & 0 & -f_w^1 & 0 \\ 0 & 1 & -f_w^2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то есть

$$f_w^3 - f_w^2 \cdot f_w^4 \neq 0, f_v^2 \neq 0
 \tag{5}$$

приходим к системе в полных дифференциалах (п.д.-система)

$$u_x, u_y, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z, v_x = f^i(x, y, z; u, v, w), i = \overline{1,8}, u_z = w.
 \tag{6}$$

В общей своей совокупности п.д.-система (6), вытекающая из (1), (3), (4) для функций $(u, v, w = u_z)$ по переменным x, y, z составит законченную систему в полных дифференциалах достаточно подробно изучавшуюся в [1] или [7].

Очевидно, что при тождественном выполнении условий

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_y(6_8) - \mathcal{D}_x(6_3) &\equiv \mathfrak{f}_y^8 - \mathfrak{f}_x^3 + \mathfrak{f}_u^8 \cdot \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_u^3 \cdot \mathfrak{f}^1 + \\
 &+ \mathfrak{f}_v^8 \cdot \mathfrak{f}^3 - \mathfrak{f}_v^3 \cdot \mathfrak{f}^8 + \mathfrak{f}_{wv}^8 \cdot \mathfrak{f}^6 - \mathfrak{f}_{wv}^3 \cdot \mathfrak{f}^5 = 0, \\
 \mathcal{D}_x(6_4) - \mathcal{D}_z(6_8) &\equiv \mathfrak{f}_x^4 - \mathfrak{f}_z^8 + \mathfrak{f}_u^4 \cdot \mathfrak{f}^1 - \mathfrak{f}_u^8 \cdot w + \\
 &+ \mathfrak{f}_v^4 \cdot \mathfrak{f}^8 - \mathfrak{f}_v^8 \cdot \mathfrak{f}^4 + \mathfrak{f}_{wv}^4 \cdot \mathfrak{f}^5 - \mathfrak{f}_{wv}^8 \cdot \mathfrak{f}^7 = 0, \\
 \mathcal{D}_y(6_5) - \mathcal{D}_x(6_6) &\equiv \mathfrak{f}_y^5 - \mathfrak{f}_x^6 + \mathfrak{f}_u^5 \cdot \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_u^6 \cdot \mathfrak{f}^1 + \\
 &+ \mathfrak{f}_v^5 \cdot \mathfrak{f}^3 - \mathfrak{f}_v^6 \cdot \mathfrak{f}^8 + \mathfrak{f}_{wv}^5 \cdot \mathfrak{f}^6 - \mathfrak{f}_{wv}^6 \cdot \mathfrak{f}^5 = 0, \\
 \mathcal{D}_z(6_5) - \mathcal{D}_x(6_7) &\equiv \mathfrak{f}_z^5 - \mathfrak{f}_x^7 + \mathfrak{f}_u^5 \cdot w - \mathfrak{f}_u^7 \cdot \mathfrak{f}^1 + \\
 &+ \mathfrak{f}_v^5 \cdot \mathfrak{f}^4 - \mathfrak{f}_v^7 \cdot \mathfrak{f}^8 + \mathfrak{f}_{wv}^5 \cdot \mathfrak{f}^7 - \mathfrak{f}_{wv}^7 \cdot \mathfrak{f}^5 = 0, \\
 \mathcal{D}_z(6_6) - \mathcal{D}_y(6_7) &\equiv \mathfrak{f}_z^6 - \mathfrak{f}_y^7 + \mathfrak{f}_u^6 \cdot w - \mathfrak{f}_u^7 \cdot \mathfrak{f}^2 + \\
 &+ \mathfrak{f}_v^6 \cdot \mathfrak{f}^4 - \mathfrak{f}_v^7 \cdot \mathfrak{f}^3 + \mathfrak{f}_{wv}^6 \cdot \mathfrak{f}^7 - \mathfrak{f}_{wv}^7 \cdot \mathfrak{f}^6 = 0,
 \end{aligned} \tag{7}$$

в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0, u_z^0)$ в соответствии с [1] для системы (1) (или (6)) задача с начальными данными ставится в виде

$$[u]_0 = \mathcal{C}_1, [v]_0 = \mathcal{C}_2, [w]_0 \equiv [u_z]_0 = \mathcal{C}_3. \tag{8}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть дана система (1), где $u \in \mathcal{C}^3(\Pi)$, $v \in \mathcal{C}^2(\Pi)$, $\mathfrak{f}_{wv}^3 - \mathfrak{f}_{wv}^2 \cdot \mathfrak{f}_v^4 \neq 0$, $\mathfrak{f}_v^2 \neq 0$ и в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0; u_0, v_0, v_z^0)$ тождественно выполняются условия (7) и $\alpha < \min\left(a, \frac{\mathfrak{b}}{\mathcal{M}}\right)$, $\mathcal{M} = \max|\mathfrak{f}^i|, i = \overline{1,4}$. Тогда на $\Pi(\alpha, \mathfrak{b})$ задача (1) (8) в классе $\mathcal{C}^2(\Pi_0)$ разрешима единственным образом и многообразия решений содержит три произвольных постоянных.

Замечание 1. В линейном случае, то есть $\mathfrak{f}^i, i = \overline{1,4}$ линейны по u , u_z и v , условие $\alpha < \min\left(a, \frac{\mathfrak{b}}{\mathcal{M}}\right)$ отсутствует, локальная теорема превращается в нелокальную.

Замечание 2. Если хотя бы одно из условий (7) не выполняется тождественно, например $\mathcal{H} \equiv \mathcal{D}_x(6_4) - \mathcal{D}_z(6_8) = 0$ и при $[\mathcal{H}'_{wv}]_0 \neq 0$ разрешимо в виде

$$w = \psi(x, y, z, u, v), \quad \psi \in \mathcal{C}^1(\Pi), \tag{9}$$

то решение системы содержит две произвольные постоянные. Действительно, в этом случае соотношение (9) принимает определенное значение $w_0 = \psi(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ и достаточно задавать задачу с начальными данными в виде

$$[u]_0 = \mathcal{C}_1, [v]_0 = \mathcal{C}_2. \tag{10}$$

Кроме того, соотношение (9) должно быть подставлено во все уравнения (6). Подстановка его в (6₁) – (6₄), (6₈) и (6₉) дает систему

$$\begin{cases} u_x, u_y, v_y, v_z = \mathfrak{f}^i[x, y, z; u, v, \psi(x, y, z, u, v)], & i = \overline{1,4}, \\ v_x = \mathfrak{f}^8[x, y, z; u, v, \psi(x, y, z, u, v)], & u_z = \psi(x, y, z, u, v) \end{cases} \tag{11}$$

и три функциональных соотношения

$$\begin{aligned} \psi_x + \psi_u \cdot f^1 + \psi_v \cdot f^8 &= f^5[x, y, z; u, v, \psi(x, y, z, u, v)], \\ \psi_y + \psi_u \cdot f^2 + \psi_v \cdot f^3 &= f^6[x, y, z; u, v, \psi(x, y, z, u, v)], \\ \psi_z + \psi_u \cdot \psi + \psi_v \cdot f^4 &= f^7[x, y, z; u, v, \psi(x, y, z, u, v)]. \end{aligned} \tag{12}$$

Перекрестные дифференцирования $u_{xy} = u_{yx}, u_{yz} = u_{zy}, u_{zx} = u_{xz}, v_{xy} = v_{yx}, v_{yz} = v_{zy}, v_{zx} = v_{xz}$ уравнений (11), дающие соотношения

$$\begin{aligned} f_x^2 - f_y^1 + f_u^2 \cdot f^1 - f_u^1 \cdot f^2 + f_v^2 \cdot f^8 - f_v^1 \cdot f^3 + f_\psi^2 \cdot f^5 - f_\psi^1 \cdot f^6 &= 0, \\ f_z^2 + f_u^2 \cdot \psi + f_v^2 \cdot f^4 + f_\psi^2 \cdot f^7 - f^6 &= 0, \\ f_z^1 + f_u^1 \cdot \psi + f_v^1 \cdot f^4 + f_\psi^1 \cdot f^7 - f^5 &= 0, \\ f_x^3 - f_y^8 + f_u^3 \cdot f^1 - f_u^8 \cdot f^2 + f_v^3 \cdot f^8 - f_v^8 \cdot f^3 + f_\psi^3 \cdot f^5 - f_\psi^8 \cdot f^6 &= 0, \\ f_y^4 - f_z^3 + f_u^4 \cdot f^2 - f_u^3 \cdot \psi + f_v^4 \cdot f^3 - f_v^3 \cdot f^4 + f_\psi^4 \cdot f^6 - f_\psi^3 \cdot f^7 &= 0, \\ f_x^4 - f_z^8 + f_u^4 \cdot f^1 - f_u^8 \cdot \psi + f_v^4 \cdot f^8 - f_v^8 \cdot f^4 + f_\psi^4 \cdot f^5 - f_\psi^8 \cdot f^7 &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

и преобразуемые с помощью (12), выполняются тождественно относительно u и v .

Теорема 2. Пусть в системе (1), $f^i, i = \overline{1,4}, u, v \in C^3(\Pi)$, и необходимое условие совместности (7) выполняется на многообразии (9). Если $\alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right), M = \max|f^i|$, то для однозначной разрешимости в $P(\alpha, b)$ задачи (1)-(10) необходимо и достаточно выполнение условия (13).

3. Исследование системы (2). Пусть задана система

$$u_x, u_z, v_y, v_z = f^i(x, y, z; u, v, v_x), \quad i = \overline{1,4}$$

(одинаковое обозначение f^i для правых частей систем (1) и (2) оправдано тем, что эти системы, как видно, изучаются независимо друг от друга).

Осуществляя замену

$$v_x = p(x, y, z), \tag{14}$$

прделаем четыре о.п.д.:

$$D_z f^1 = D_x f^2, D_z f^3 = D_y f^4, D_x f^3 = p_y, D_x f^4 = p_z. \tag{15}$$

С учетом этих действий, а также замены появляющихся производных в правых частях (2), получим следующие четыре новых уравнения:

$$\left\{ \begin{aligned} f_p^1 \cdot p_z - f_p^2 \cdot p_x &= f_x^2 - f_z^1 + f_u^2 \cdot f^1 - f_u^1 \cdot f^2 + f_v^2 \cdot p - f_v^1 \cdot f^4, \\ f_p^3 \cdot p_z - f_p^4 \cdot p_y - f_u^4 \cdot u_y &= f_y^4 - f_z^3 - f_u^3 \cdot f^2 + f_v^4 \cdot f^3 - f_v^3 \cdot f^4, \\ p_y - f_p^3 \cdot p_x &= f_x^3 + f_u^3 \cdot f^1 + f_v^3 \cdot p, \\ p_z - f_p^4 \cdot p_x &= f_x^4 + f_u^4 \cdot f^1 + f_v^4 \cdot p. \end{aligned} \right. \tag{16}$$

Отсюда, при выполнении условий $-\dot{f}_p^1 \cdot \dot{f}_p^4 - \dot{f}_p^2 \neq 0$ и $\dot{f}_u^4 \neq 0$, производные p_x, p_y, p_z и u_y разрешаются и обозначаются через $\dot{f}^k(x, y, z; u, v, p)$, ($k = \overline{5,8}$). Прибавляя полученные уравнения к системе (2), приходим к следующей п.д.-системе относительно искомых функций u, v и $p = v_x$:

$$\begin{cases} u_x, u_z, v_y, v_z = \dot{f}^i(x, y, z; u, v, p), i = \overline{1,4}, v_x = p(x, y, z), \\ p_x, p_y, p_z, u_y = \dot{f}^k(x, y, z; u, v, p), k = \overline{5,8}, (x, y, z) \in \mathcal{R}^3. \end{cases} \quad (17)$$

Отметим, что системы (2) и (17) являются эквивалентными, то есть всякое решение системы (2) удовлетворяет систему (17) и наоборот.

Можно применить к (17) п.д.-теорию [7] и установить, что начальное условие в этой системе задаётся в виде

$$[u]_0 = \mathcal{C}_1, [v]_0 = \mathcal{C}_2, [p]_0 \equiv [v_x]_0 = \mathcal{C}_3. \quad (18)$$

Здесь можно утверждать, что для системы (2), с учётом выполнения условий $-\dot{f}_p^1 \cdot \dot{f}_p^4 - \dot{f}_p^2 \neq 0$ и $\dot{f}_u^4 \neq 0$, справедливы результаты типа теорем 1 и 2.

Поступило 05.02.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. – Душанбе: Дониш, 1986, 116 с.
2. Михайлов Л.Г., Пиров Р. Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых переопределённых систем уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями. – ДАН России, 2013, т. 451, №3, с.251-254.
3. Пиров Р. О некоторых нелинейных системах четырёх уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями от трёх переменных. – Доклады АН Таджикской ССР, 1987, т.30, №3, с.145-149.
4. Пиров Р. Об одном способе исследования решения систем уравнений в частных производных, возникающей в трехмерной теории поля. – Вестник Воронеж. гос. ун-та, серия физика, математика, 2015, №4, с.175-180.
5. Пиров Р. Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых классов переопределённых систем уравнений в частных производных с несколькими неизвестными функциями: Автореф. дисс.... д.физ.-мат.н. – Душанбе, 2018, 50 с.
6. Жибер А.Б., Шабат А.Б. Системы уравнений $u_x=p(u,v)$, $v_y=q(u,v)$, обладающие симметриями. – ДАН СССР, 1984, т.277, №1, с.29-33.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970, 719 с.

Р.Пиров, М.А.Чабборов*

ТАДҚИҚИ БАЪЗЕ СИСТЕМАҲОИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНЦИАЛӢ БО ҲОСИЛАҲОИ ХУСУСИИ ДУ ФУНКСИЯҲОИ НОМАЪЛУМ ДАР ФАЗО

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ,

**Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.Осимӣ*

Дар мақола оид ба як намуди системаҳои барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференциалии тартиби якум бо ҳосилаҳои хусусии дуномаълума дар фазо татқиқот гузаронида шудааст. Инчунин шартҳои ҳамчоягии системаҳо муайян карда шуда, теоремаҳои мавҷудият ва ягонагии ҳалли системаҳои додашуда исбот гардидаанд.

Калимаҳои калидӣ: шартҳои ҳамчоягӣ, системаҳо дар дифференциали пурра, системаҳои барзиёдмуайяншуда, ҳалҳои бисёршакла.

R.Pirov, M.A.Jabborov*

ON THE STUDY OF SOME SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO UNKNOWN FUNCTIONS IN SPACE

S.Ainy Tajik State Pedagogical University,

**M.Osimi Tajik Technical University*

This paper considers a single class of redefined systems of first-order partial differential equations with two unknown functions in space. Explicit compatibility conditions are found, and the existence and uniqueness theorems of solutions are proved.

Key words: the condition of jointness, the system of total differential, overrides the system, the diversity of solutions.

УДК 523. 532

Член-корреспондент НАН Таджикистана Г.И.Кохирова, А.В.Иванова^{*,**,**},Ф.Дж.Рахматуллаева, С.А.Борисенко^{**}, В.К.Агнихотри^{****}, А.М.Буриев

РАСПАД КОМЕТЫ АТЛАС ПО НАБЛЮДЕНИЯМ В ТАДЖИКИСТАНЕ И ИНДИИ

*Институт астрофизики НАН Таджикистана,***Астрономический Институт Словацкой Академии наук, Братислава, Словакия,****Главная астрономическая обсерватория НАН Украины, Киев, Украина,*****Астрономическая обсерватория Киевского национального университета им. Т.Шевченко,**Киев, Украина,******Цефеид обсерватория, Равабхата Виа Кота, Радж, Индия*

Долгопериодическая комета C/2019Y4 (Atlas) открыта в конце 2019 г., 31 мая 2020 г. она прошла перигелий своей орбиты. В конце марта 2020 г. наблюдения космического телескопа Хаббл зарегистрировали распад ядра кометы на несколько фрагментов. Для исследования этого явления в Цефеид обсерватории Индии, Международной астрономической обсерватории Санглох (МАОС) и Гиссарской астрономической обсерватории Института астрофизики НАНТ в марте-апреле 2020 г. проведены наблюдения кометы Атлас. Показано снижение видимого и абсолютного блеска кометы в фильтрах VRI, что подтверждает распад ядра, произошедший в этот период. Оценка скорости разлета фрагментов составляет несколько м/с, при таких скоростях дезинтеграция ядра может быть обусловлена мощным выбросом газов, что привело к разрушению механических связей конгломератов ядра кометы. Определены координаты кометы, вычислена орбита и показано, что распад ядра не повлиял на стабильность орбиты основного компонента ядра кометы.

Ключевые слова: комета, фотометрия, блеск, кривая блеска, астрометрия, координаты, орбита.

Новая долгопериодическая комета была открыта 28 декабря 2019 г. в рамках роботизированного астрономического обзора ATLAS, проводимого в двух обсерваториях под руководством Университета Института астрономии на Гавайях в США. Комета с почти параболической орбитой получила наименование C/2019 Y4 (Atlas) (далее по тексту Атлас), и стала последней кометой, открытой в 2019 г. [1]. Период обращения кометы вокруг Солнца составляет почти 6 тысяч лет [2], в последний раз она находилась во внутренней Солнечной системе примерно в конце 4-го тысячелетия до н.э., и в следующий раз появится на нашем небе в конце 76-го века н.э. Наблюдатель L. Denneau первым отождествил кометные признаки у нового объекта [3], дальнейшие наблюдения в последующие ночи подтвердили наличие комы и заметно увеличивающийся кометный хвост [4].

На момент открытия видимый блеск кометы составил 19.6 звёздных величин [5,6]. Яркость кометы с начала февраля до почти третьей декады марта 2020 г. увеличилась с 17 до 8 звездной вели-

Адрес для корреспонденции: Кохирова Гулчехра Исроиловна. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бухоро, 22, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: kokhirova2004@mail.ru

чины [7]. Ожидалось, что к моменту прохождения перигелия видимый блеск кометы должен достигнуть 3-4 звёздных величин, и она должна была бы стать видимой невооруженным глазом. Но примерно 22 марта начался распад ядра кометы [8-10], в результате которого яркость кометы стала ослабевать и не достигла ожидаемой величины. Ядро кометы распалось, как минимум, на 4 фрагмента [11]. К середине мая комета даже через телескоп выглядела как очень размытый слабый объект, а с 20 мая стала вообще невидимой [12].

Согласно базе данных [2], общая абсолютная яркость кометы составляет $M_J=11.3$ зв. вел.

Наблюдения космического телескопа Хаббл 20-23 апреля 2020 г. зарегистрировали порядка 30 фрагментов, образовавшихся в результате распада ядра [13]. Оценка скорости разлета фрагментов составляет порядка нескольких м/с (<10 м/с) [14,15], при таких скоростях дезинтеграция ядра может быть обусловлена выбросом газов, вызванного увеличением центробежной силы кометы, и приведшего к разрушению механических связей между конгломератами ядра. Отметим, Voehnhardt [16], показал, что типичная скорость разлета фрагментов распавшихся комет находится в пределах $0.1 < V_{sep} < 10$ м/с.

На такой механизм распада также указывает значительный радиальный негравитационный эффект в гелиоцентрическом движении кометы, выявленный по астрометрическим наблюдениям в январе-апреле 2020 г. [15]. Считается, что такая фрагментация является типичной для сангрейзеров группы Крейтца, то есть комет, близко подходящих к Солнцу. По некоторым оценкам диаметр ядра кометы Атлас перед его распадом составлял более 120 м [15].

Комета Атлас относится к долгопериодическим кометам, имеющим период обращения более 200 лет и, как правило, наблюдающихся в течение не более одного прохождения перигелия орбиты. Орбита кометы крайне вытянута, простираясь к далеким окраинам Солнечной системы вплоть до 660 а.е. При этом в перигелии комета достаточно близко приближается к Солнцу – на расстояние 0.25 а.е. С эксцентриситетом 0.999 орбита является высоко эллиптической с наклоном к плоскости эклиптики 45 град. Элементы орбиты кометы Атлас, согласно [16], вычисленные на эпоху 7 марта 2020 г., приведены в табл. 1, где a – большая полуось, e – эксцентриситет, q , Q – перигелийное и афелийное расстояния, i – наклонение, ω – аргумент перигелия, Ω – долгота восходящего узла. Эта орбита имеет период обращения кометы 5686 лет (без учета негравитационных возмущений). Оказалось, что орбита кометы Атлас очень схожа с орбитой кометы C/1844 Y1, на основании чего сделано предположение, что обе кометы являются фрагментами общего родительского тела, распад которого произошел около 5 тысяч лет назад [14,15].

Таблица 1

Элементы орбиты кометы C/2019 Y4 (ATLAS) (J2000.0)

Эпоха	a , а.е.	e	q , а.е.	Q , а.е.	i , град.	ω , град.	Ω , град.
31.05.2020	311.4	0.999	0.253	622.5	45.4	177.4	120.6

Для орбиты кометы Атлас параметр Тиссерана относительно Юпитера имеет значение $T_J=0.454$ [2], что характерно для кометоподобных орбит.

Принято считать, что источником долгопериодических комет является так называемое облако Оорта [18], расположенное на расстоянии более 200 тысяч а.е. от Солнца. Под действием гравитационных возмущений от сближающихся с Солнцем звезд или гигантских газо-пылевых облаков кометы из этой области попадают во внутреннюю область нашей планетной системы, где обнаруживаются, как новые кометы. Если в планетарной системе гравитационные возмущения от больших планет не перебросят кометы на короткопериодические орбиты, то новые кометы классифицируются как долгопериодические.

Актуальность изучения долгопериодических комет заключается в том, что исследовано лишь небольшое количество таких объектов. В силу того, что они имеют очень длительный период обращения, и не все кометы приближаются к Солнцу настолько, чтобы стать видимыми, каждое появление такой кометы является уникальным случаем, в результате изучения которого появляются факты, проливающие свет на природу, происхождение, общность и различия комет.

Появление кометы Атлас стало таким исключительным событием, которое привлекло внимание астрономов всего мира и явилось мотивацией для ее обширных наземных наблюдений. Нами проведены длительные совместные ряды наблюдений кометы в Цефеид обсерватории Индии с использованием 0.28 м телескопа Шмидта-Кассегрена, в Международной астрономической обсерватории Санглох (МАОС) и Гиссарской астрономической обсерватории (ГисАО) Института астрофизики НАН Таджикистана с помощью телескопов Цейсс-1000 и АЗТ-8 соответственно. Регистрация объекта выполнялась в Цефеид обсерватории с помощью ПЗС-камеры Sony ICX825 414 (6.45 мк × 6.45 мк); фокусное расстояние телескопа (фокус Кассегрена) составляет $F=1584$ мм. Размер и поле зрения матрицы составляют 1391×1039 пикселей (или 8.9 мм × 6.7 мм). Регистрация кометы в МАОС и ГисАО выполнялась с помощью ПЗС-камер FLI (ProLine) 16803 и 9000 соответственно. Их параметры, а также характеристики телескопов МАОС и ГисАО приведены в работах [19,20]. Для увеличения показателя сигнал/шум (S/N) изображения сохранялись с учетом значения биннинга 4x4, поэтому рабочий масштаб изображений в Индии составляет 0.17 угловых сек. на пиксель, в Таджикистане - 0.16 угловых сек. на пиксель. Многоцветные наблюдения проведены с использованием стандартных широкополосных фотометрических фильтров системы Джонсона-Козинса – VRI, позволяющих выделить соответствующий диапазон спектра при наблюдениях. Для уменьшения уровня шумов ПЗС-камеры аппаратуру в Цефеид обсерватории охлаждают до температуры -10°C , в МАОС и ГисАО – до -20°C . Для учета темного сигнала в первичной обработке кадров используются кадры «Dark», для выравнивания полей изображений - кадры «Flat», для учета ошибок матрицы ПЗС-камеры снимаются кадры «Bias». Эти кадры снимаются также в период наблюдений.

Положение орбиты кометы во время мониторинга и детали выполненных экспозиций приведены в табл.2, где r и Δ расстояния кометы от Солнца и Земли, ph - фазовый угол, N и t – количество и время экспозиций. Изображение кометы во время наблюдений приведено на рис.1.

Таблица 2

Журнал наблюдений кометы C2019Y4 Atlas в 2020 г.

Дата, UT	$r, a.e.$	$\Delta, a.e.$	$ph, град.$	$t, сек.$	N			Телескоп
					V	R	I	
Цефеид обсерватория								
Март, 28,59	1.547	1.060	39.8	60	5	5	-	0.28 м телескоп Шмидта-Кассегрена
Март, 29.62	1.530	1.057	40.5	90	10	10	-	
Апрель, 05.66	1.402	1.033	45.5	120	-	47	-	
Апрель, 12.63	1.269	1.010	50.6	120	-	42	-	
Гиссарская обсерватория								
Апрель, 19,65	1.130	0.983	56.4	60	45	45	45	АЗТ-8
Апрель, 22.68	1.069	0.970	59.1	60	14	14	14	
Апрель, 23.72	1.049	0.965	60.0	60	10	10	10	
Обсерватория Санглох								
Апрель, 22,87	1.069	0.970	58.8	60	30	30	30	Цейсс-1000
Апрель, 23.84	1.049	0.965	59.7	60	30	25	25	

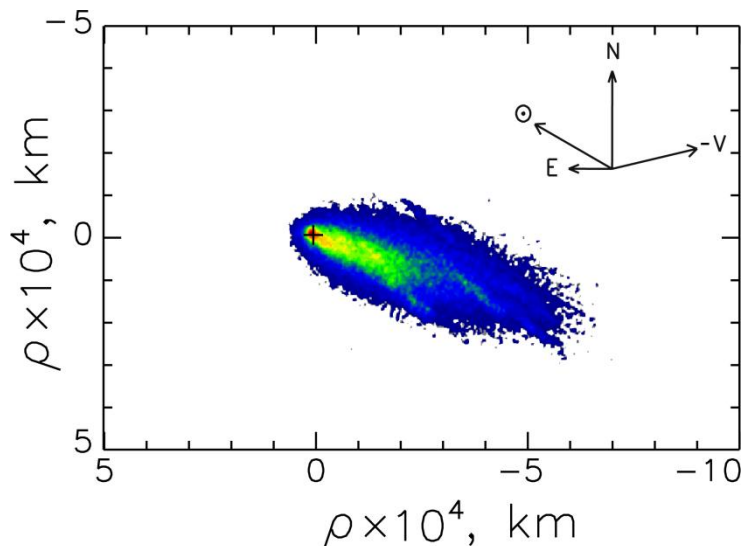


Рис. 1. Суммарное изображение кометы Атлас в фильтре R, 23 апреля 2020 г., телескоп Цейсс-1000 МАОС.

Фотометрическая обработка выполнена по стандартной процедуре с помощью программного пакета IDL. Для определения видимого блеска кометы использовались изображения обсерваторий Цефеид и Санглох и звезды сравнения из каталога APASS, для которых блеск определен с точностью 0.03-0.12^m [21]. Кривые блеска кометы представлены на рис.2, где по оси ординат отложены видимые звездные величины m в фильтрах и по оси абсцисс - даты наблюдений в юлианских днях. Средние значения видимых звездных величин объекта, полученные в разных фильтрах, для каждой ночи наблюдений даны в табл. 3. Здесь также даны радиус апертуры измерений изображений ρ в угловых секундах и в [км], последние величины рассчитаны по соотношению $\rho = \Delta \cdot \text{tg}(\rho)$. Как видно, в период мониторинга видимый блеск кометы постепенно ослабевал, что, как уже известно, обусловлено фрагментацией ядра кометы.

Отметим, что видимый блеск определен без учета данных стандартной фотометрической системы. Это связано с тем, что пока не выполнена калибровка системы телескоп - камера - фильтры, и, следовательно, нет привязки к фотометрическим стандартам.

Таблица 3

Видимый блеск m (зв. вел.*) кометы C/2019 Y4 (ATLAS) по наблюдениям в Цефеид обсерватории и МАОС в 2020 г.

Дата	V	R	I	ρ , [']	ρ , [km]
ЦО Индия					
28.03.	12.97±0.04	12.77±0.01	-	13 – 17	9984.80 – 13057.10
29.03.	13.03±0.02	12.81±0.01	-		9947.09 – 13007.70
05.04.	-	13.07±0.08	-		9730.23 – 12724.20
12.04.	-	13.16±0.06	-		9513.38 – 12440.60
МАОС					
22.04.	13.51±0.01	13.01±0.01	14.25±0.01		9145.67 – 11959.70
23.04.	13.70±0.01	13.35±0.01	15.06±0.02		9098.52 – 11898.10

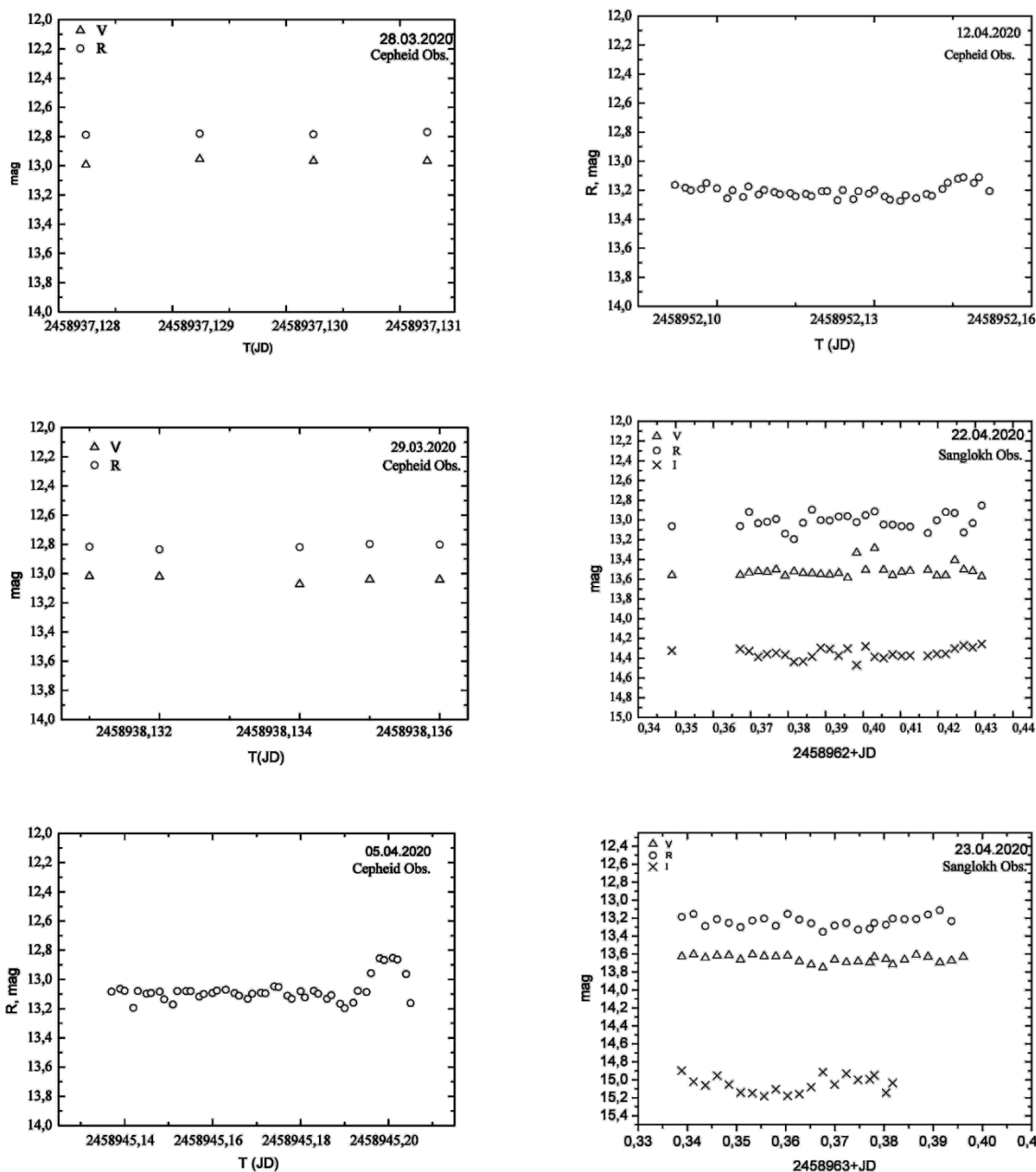


Рис. 2. Видимые звездные величины кометы C/2019 Y4 (ATLAS) по наблюдениям в Цефеид обсерватории и МАОС с 28 марта по 23 апреля 2020 г.

Видимый блеск m_a конвертировался в абсолютную яркость ядра кометы $m_a(1,1,0)$ с использованием следующего эмпирического уравнения [22]

$$m_a(1,1,0) = m_a - 5 \log(r\Delta) - \beta\alpha, \tag{1}$$

здесь $m_a(1,1,0)$ (или H) – блеск гипотетической точки на единичном гелиоцентрическом и геоцентрическом расстояниях с фазовым углом $ph=0$ град., m_a – измеренный блеск, r и Δ – гелио- и геоцентрическое расстояния кометы в а.е., α – фазовый угол (ph) в градусах, β – фазовый коэффициент в звездных величинах на градус; индекс a означает какой-либо фильтр. Для фазового коэффициента использовано общепринятое значение $\beta=0.035$ зв.вел./град. [23]. Абсолютный блеск кометы в фильтрах VRI (средние значения за три ночи), найденный по формуле (1), приведен в табл.4, зависимость абсолютной яркости кометы, обозначенная на графике H , от даты наблюдений (в юлианских днях) в Цефеид обсерватории и МАОС приведена на рис. 3. Как видно, в период мониторинга абсолютный блеск кометы, как и видимый блеск, постепенно убывал, что, как уже было отмечено, связано с делением ядра кометы.

Таблица 4

Абсолютный блеск $m_a(1,1,0)$ кометы C/2019 Y4 (ATLAS) по наблюдениям в Цефеид обсерватории и МАОС

Дата	ЦО Индии		
	V	R	I
28.03. 2020	10.50±0.03	10.31±0.01	-
29.03. 2020	10.57±0.01	10.35±0.01	-
05.04. 2020	-	10.68±0.08	-
12.04. 2020	-	10.85±0.06	-
МАОС			
22.04. 2020	11.39±0.01	10.90±0.01	12.29±0.01
23.04. 2020	11.60±0.01	11.25±0.01	12.96±0.02

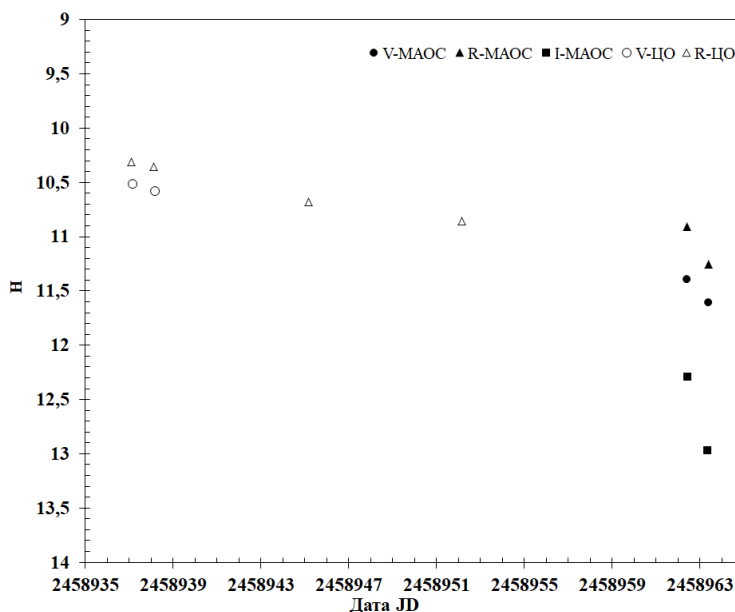


Рис. 3. Абсолютные звездные величины H (средние значения) кометы C/2019 Y4 (ATLAS) по наблюдениям в Цефеид обсерватории и МАОС в период 28.03-23.04 2020 г.

Наши наблюдения пришлось на пик активности кометы, когда провести точные измерения блеска объекта чрезвычайно трудно. Более того, оценка размера ядра кометы после его дезинтеграции довольно трудоемкая задача. По этой причине мы не определили показатели цвета кометы и не оценили размер ее ядра. Отметим, что, согласно предварительным оценкам, размер ядра кометы до фрагментации превышал 120 м [15]. Космический телескоп Хаббл отчетливо показал наличие порядка тридцати обломков ядра, из которых минимум пять фрагментов значительных размеров, и трудно утверждать, какой именно фрагмент был измерен для получения имеющейся оценки. По снимкам, полученным в конце марта 2020 г., найдено, что кома кометы имела диаметр около 20 угловых минут. Зная это и расстояние от Земли до кометы 1.5 а.е., можно вычислить физический размер кометы. Ее протяженность составляет порядка миллиона километров. Учитывая масштабность явления, имеющаяся оценка размера ядра кажется сомнительной, необходимы новые наблюдения для уточнения размера.

Астрометрическая обработка кадров проведена с помощью программного пакета АПЕКС II [24]. Экваториальные координаты кометы, найденные в результате астрометрической обработки наблюдений в МАОС и ГисАО, а также по другим наблюдениям из базы данных MPC [16] приведены в виде графика на рис. 4, где по оси абсцисс даны прямое восхождение α и по оси ординат – склонение δ . В табл.5 представлены средние значения отклонений измеренных экваториальных координат (O) от каталожных данных (C), обозначенные как $(O-C)_\alpha$ и $(O-C)_\delta$ для координат α и δ , соответственно, а также их средние квадратичные ошибки σ_α и σ_δ в угловых секундах по наблюдениям в МАОС и ГисАО. Как видно из табл.5, средняя по всем кадрам ошибка астрометрической редукции не превышает 0.1" для прямого восхождения α и склонения δ .

На основе найденных из наблюдений координат с помощью программы ЭПОС-9 [25] вычислена орбита кометы. Результаты представлены в табл.6, где для сравнения также дана орбита, найденная по наблюдениям, собранным в Международном центре малых планет (MPC) [16]. В табл.6 наряду с обычными элементами также даны T – время прохождения перигелия в юлианских днях (JD), эпоха, на которую орбита вычислена, n – среднее движение кометы, P – период обращения, σ – среднеквадратичная ошибка в угловых секундах. Как видно, по наблюдениям в МАОС и ГисАО получена орбита кометы, соответствующая орбите MPC.

Таблица 5

Средние разности (O-C) и их стандартные отклонения для кометы C/2019 Y4 (ATLAS)

Дата	$(O-C)_\alpha$	σ_α	$(O-C)_\delta$	σ_δ
ГисАО				
18.04. 2020	0.218	0.009	-0.517	0.057
19.04. 2020	0.542	0.097	-0.192	0.085
21.04. 2020	0.412	0.049	-0.328	0.027
22.04. 2020	0.394	0.043	-0.241	0.037
23.04. 2020	0.418	0.019	-0.317	0.097
МАОС				
22.04. 2020	0.210	0.013	-0.451	0.087
23.04. 2020	0.541	0.052	-0.322	0.097

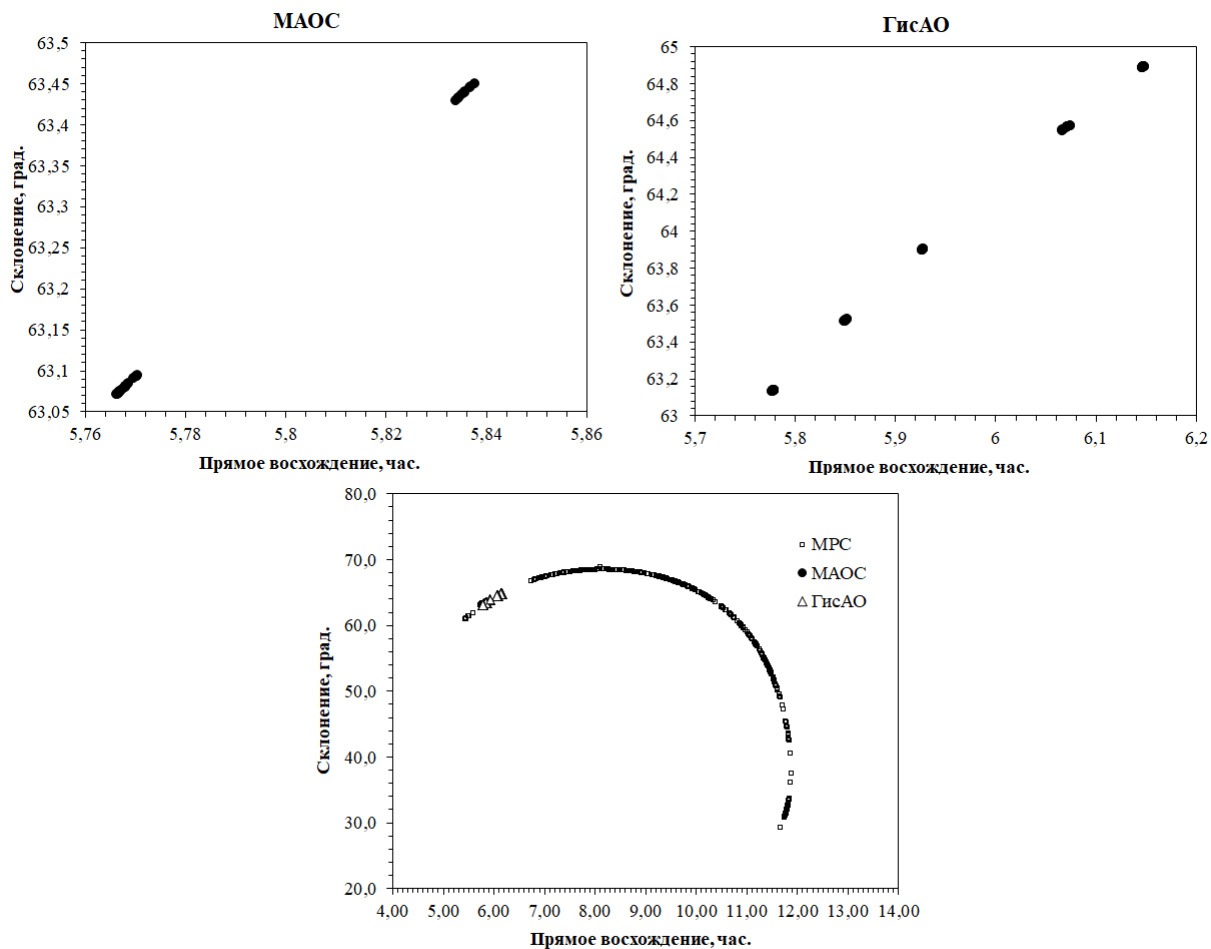


Рис. 4. Видимая траектория кометы C/2019 Y4 (ATLAS) по наблюдениям МАОС, ГисАО и MPC в 2020 г.

Таблица 6

Сравнение первоначальной орбиты кометы C/2019 Y4 (ATLAS), полученной по наблюдениям обсерватории МАОС, ГисАО и орбиты MPC (J2000.0)

Элементы орбиты	МАОС [данная работа]	ГисАО [данная работа]	MPEC 2020-G65 [16]
Кол-во положений, использованное для вычисления орбиты	150	260	1606
<i>T</i>	JD 2459000.48	JD 2459000.49	JD 2459000.5
Эпоха	JD 2458950.5	JDT 2458950.5	JD 2459000.5
<i>e</i>	0.997819 ± 0.0196	0.997809 ± 0.0116	0.9992432
<i>a</i> , а.е.	311.378276 ± 0.013	311.378275 ± 0.082	311.3783044
<i>q</i> , а.е.	0.252863 ± 0.034	0.252886 ± 0.093	0.2528310
<i>i</i> , град.	45.378491 ± 0.031	45.378470 ± 0.030	45.38141
Ω , град.	120.24641 ± 0.088	120.246480 ± 0.028	120.56970
ω , град.	177.69786 ± 0.087	177.697760 ± 0.016	177.41009
<i>n</i> , град./сут.	0.0008374 ± 0.064	0.0008374 ± 0.062	0.0007499
σ	0".381	0".540	0".500

Анализ результатов астрометрии показывает достаточно хорошую точность определения координат из наблюдений в МАОС и ГисАО, отличающихся от данных мирового мониторинга в пределах ошибок измерений, об этом свидетельствуют и элементы орбиты, вычисленные по найденным координатам.

З а к л ю ч е н и е

В результате фотометрической обработки наблюдений в Таджикистане и Индии в период март-апрель 2020 г. найден видимый и абсолютный блеск кометы в фильтрах *VRI* и построены кривые блеска. Выявлено ослабление видимого и абсолютного блеска кометы в течение наблюдений, что подтверждает распад ядра, произошедшего в этот период. С учетом имеющейся оценки скорости разлета фрагментов, составляющей порядка нескольких м/с, дезинтеграция ядра может быть обусловлена разрушением механической связи между конгломератами ядра кометы. Определены координаты кометы, вычислена орбита и показано, что распад ядра не повлиял на стабильность орбиты основного компонента ядра кометы.

Авторы выражают благодарность снс Института астрофизики НАНТ Хамроеву У.Х. за участие в наблюдениях.

Поступило 30.01.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Dickinson D. Comet C/2019 Y4 Atlas in Outburst: First good comet for 2020? – Universe Today, retrieved February 29, 2020; universetoday.com/145036.
2. <https://ssd.jpl.nasa.gov>, 2020.
3. MPEC 2020-A112: Comet C/2019 Y4 (Atlas). – Minor Planet Electronic Circular, Cambridge, Massachusetts: MPC, January 10, 2020, retrieved March 24, 2020.
4. Green D.W.E. CBET 4712: Comet C/2019 Y4 (Atlas), mail.spaceobs.com, (Mailing list), retrieved March 25, 2020.
5. MPEC 2020-A112: Comet C/2019 Y4 (Atlas), minorplanetcenter.net, Minor Planet Electronic Circular, Cambridge, Massachusetts: MPC, January 10, 2020, retrieved March 24, 2020.
6. Ling A. Comet Atlas may soon be visible to the naked eye, Astronomy, Kalmbach Media, March 25, 2020, retrieved March 27, 2020.
7. Yirka B. Comet Atlas may put on quite a show, Phys.org., Science X Network, March 23, 2020, retrieved March 27, 2020.
8. Ye Q., Zhang Q. Atel#13620: Possible disintegration of Comet C/2019 Y4 (Atlas).- The Astronomer's Telegram, April 6, 2020, retrieved April 6, 2020.
9. Steele I.A., Smith R.J., Marchantn J. Atel# 13622: C/2019 Y4 (Atlas) – confirmation of nucleus change. – The Astronomer's Telegram, April 6, 2020, retrieved April 7, 2020.
10. Lin Z.-Y. et al. Atel#13629: The fragmentation of comet C/2019 Y4 (Atlas) observed at Lulin observatory. – The Astronomer's Telegram, April 13, 2020, retrieved April 13, 2020.
11. Ye Q., Hui M.-T. (April 21, 2020), Atel#13651: Continuing fragmentation of C/2019 Y4 (Atlas). – The Astronomer's Telegram, retrieved April 22, 2020.
12. Ghosh T. Comet observation database (COBS), retrieved April 9, 2020, (2019Y4 Chart).

13. Andreoli C., Villard R., Jewitt D., Ye Q. Hubble Watches Comet Atlas Disintegrate into more than two dozen pieces, www.nasa.gov, April 28, 2020, retrieved April 28, 2020.
14. Green D.W.E. CBET 4712: Comet C/2019 Y4 (Atlas), mail.spaceobs.com, (Mailing list), January 11, 2020, retrieved March 25, 2020.
15. Hui M.-T., Ye Q. Observations of disintegrating long-period comet C/2019 Y4 (Atlas) – A sibling of C/1844 Y1 (Great comet), 2020, arXiv: 2004.10990, [astro-ph.EP].
16. MPEC 2020-G65: Observations and orbits of comets and A/objects, 6 April, 2020, <https://www.minorplanetcenter.net/mpec/K20/K20G65.html>, дата обращения 21 января, 2021 г.
17. Boehnhardt H., Comets II, M.C.Festou, H.U. Keller & H.A. Weaver (eds.), 2004, Univer. Of Arizona Press, Tucson, p. 301.
18. Oort J. The structure of the cloud of comets surrounding the Solar System and a hypothesis concerning its origin. – BAI Netherl., 1950, v. 11, p. 91-110.
19. Кохилова Г.И., Иванова А.В., Рахматуллаева Ф.Дж., Хамроев У.Х., Буриев А.М., Абдуллоев С.Х. Результаты комплексных наблюдений астероида (596) Шейла в Международной астрономической обсерватории Санглох. – Астрономический вестник, 2018, т. 52, №6, с.511-520.
20. Кохилова Г.И., Буриев А.М., Хамроев У.Х., Баканас Е.С., Мулло-Абдолов А.Ш., Абдуллоев С.Х. Наблюдения кометы 41P/Туттля-Джакобини-Кресака в период ее сближения с Землей в астрономических обсерваториях Таджикистана. – ДАН РТ, 2018, т.61, № 7-8, с.620-630.
21. Henden A. A., Templeton M., Terrell D., Smith T. C., Levine S. & Welch D. (2016). VizieR online data catalog: AAVSO photometric all sky survey (APASS) DR9 (Henden+, 2016). – VizieR Online Data Catalog, II-336.
22. Snodgrass C., Lowry S.C., Fitzsimmons A. Photometry of cometary nuclei: rotation rates, colours and a comparison with Kuiper Belt Objects. – Mon. Not. R. Astron. Soc., 2006, v. 373, pp. 1590-1602.
23. Lamy P.L., Toth I., Fernandez Y.R., Weaver H.A. The sizes, shapes, albedos, and colors of cometary nuclei. – In: Comets II, M.C. Festou, H.U. Keller, and H.A. Weaver (eds.), 2004, University of Arizona Press, Tucson, pp. 223-264.
24. Девяткин А.В., Горшанов Д.Л., Куприянов В.В., Верещагина И.А. Программные пакеты «АПЕКС-I» и «АПЕКС-II» для обработки астрономических ПЗС наблюдений. – Астроном. Вестн., 2010, № 1, с. 74-87.
25. Львов В.Н., Цекмейстер С.Д. Использование ПП ЭПОС для исследования объектов Солнечной системы. – Астрон. Вест., 2012, т. 46, № 2, с. 190-192.

Г.И.Қохирова, А.В.Иванова^{*,**,**}, Ф.Қ.Раҳматуллоева, С.Борисенко^{**}, А.М.Буриев,
В.К.Агнихотрий^{****}

ПОРА-ПОРА ШУДАНИ КОМЕТАИ АТЛАС АЗ РӯИ МУШОҲИДАҲОИ ТОҶИКИСТОН ВА ҲИНДУСТОН

Институти астрофизикаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

**Институти астрономияи Академияи илмҳои Словакия,*

***Саррасадхонаи астрономии Академияи илмҳои миллии Украина,*

****Расадхонаи астрономии ба номи Т.Шевченко Донишгоҳи миллии Киев,*

*****Расадхонаи Сефеид, Равабҳата, Виа Кота, Раҷ, Ҳиндустон*

Кометаи дароздаври C/2019Y4 (Atlas) дар охири соли 2019 кашф шудааст. 31 майи соли 2020 ӯ аз перигелии мадори худ гузашт. Дар охири моҳи март соли 2020 дар натиҷаи мушоҳидаи телескопи кайҳонии Ҳабл пора-пора шудани кометаро ба якҷанд қисм ба қайд гирифт. Барои тадқиқоти чунин ҳодиса дар Расадхонаи Сафеиди Ҳиндустон, Расадхонаи астрономии байналмилалии Санглох (РАБС) ва Расадхонаи астрономии Ҳисори Институти астрофизикаи АМИТ дар моҳҳои март ва апрели соли 2020 мушоҳидаҳои муштаракӣ кометаи Атлас гузаронида шуданд. Дар филтрҳои VRI паст гардидани қудри мутлақ ва зохирии комета ба назар мерасад, ки аз пора-пора гардидани ҳастаи комета дар ҳамин давра далолат медиҳад. Баҳодиҳии суръати парокандагии пораҳо якҷанд м/с мебошад, дар чунин суръатҳо ба пора-пора табдил ёфтани ҳастаи комета метавонад бо партови пурқуввати газҳо ба амал ояд, ки ин ба вайроншавии пайвандҳои механикӣ конгломератҳои ҳастаи комета оварда расонд. Координатаҳои комета муайян карда, мадор ҳисоб карда шуд ва нишон дода шуд, ки пора-пора шудани комета ба устувории мадори ҷузъи асосии ҳастаи комета таъсир нарасонидааст.

Калимаҳои калидӣ: комета, фотометрия, дурахионӣ, хати қачи, астрометрия, координатаҳо, мадор.

G.I.Kokhirova, O.V.Ivanova^{*,**,**}, F.Dzh.Rakhmatullaeva, S.Borysenko^{**}, V.K.Agnihotri^{****},
A.M.Buriev

THE DISINTEGRATIONS OF COMET ATLAS BY OBSERVATIONS IN TAJIKISTAN AND INDIA

Institute of Astrophysics of the National Academy of Sciences of Tajikistan,

**Astronomical Institute of the Slovak Academy of Sciences, Bratislava, Slovak,*

***Main astronomical observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine,*

****Astronomical Observatory named after T. Shevchenko, Kyiv National University, Kyiv, Ukraine,*

*****Cepheid Observatory, Rawabhata Via Kota, Raj, India*

Long-period comet C/2019Y4 (Atlas) was discovered in the end of 2019, it has passed the orbit's perihelion in 31 May 2010. Observations of the Hubble space telescope have registered a break-up of the comet nucleus into several fragments in the end of March 2020. To investigate the event observations of comet Atlas were carried out in the Cepheid observatory of India, International astronomical observatory

Sanglokh and Hissar astronomical observatory of the Institute of astrophysics, NAST, during March-April 2020. The decreasing of the apparent and absolute brightness of comet in VRI bands is shown that confirms the nucleus disintegration occurred at this period. The estimate of the speed of the fragments scattering is several m/s, at such speeds the disintegration of the nucleus can be caused by a powerful ejection of gases, which led to the destruction of the mechanical bonds of the conglomerates of the cometary nucleus. The coordinates of comet were determined, the orbit was calculated, and it is shown that the nucleus break-up did not affect the stability of the orbit of the main component of the cometary nucleus.

Key words: *comet, photometry, light curve, astrometry, nucleus, coordinates, orbit*

УДК 538.955:530.146

Академик НАН Таджикистана Фарход Рахими, Б.Г.Пиров
**МАГНЕТИКИ ГЕЙЗЕНБЕРГА СО СПИНОМ $S=3/2$
В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана

Статья посвящена наиболее общим вопросам в исследовании ферромагнетиков со спином $S=3/2$. При полуклассическом подходе к системе полученные результаты дают полное описание магнетиков, а также вносят вклад в изучение динамических, кинетических и термодинамических свойств магнитных систем и получение их нелинейных локализованных решений.

Ключевые слова: квант, ферромагнетики, когерентные состояния.

Как известно, одним из хорошо развивающихся направлений в теории конденсированных сред в последние годы можно назвать исследования нелинейных возбуждений в магнитных средах [1].

Примером служат различные аспекты теории солитонов в многомерных магнетиках [1-3], где рассматриваются решения феноменологических уравнений динамики намагниченности в магнитоупорядоченных средах, зависимость их структуры от размерности пространства, вида магнетика, типа магнитной анизотропии и направления внешнего магнитного поля.

С другой стороны, неоднократно приходится обращаться к квантовому микроскопическому рассмотрению соответствующих магнетиков и трактовать некоторые результаты на квантовом и полуквантовом языке.

Поскольку решением квантовой задачи является решение векторного операторного уравнения $\hat{H}\Psi=E\Psi$, то есть диагонализация квантового гамильтониана и нахождение собственных функций и собственных значений, а решение классической задачи есть решение нелинейных уравнений, то есть некоторая функция, то встает вопрос об адекватном переходе к классическому описанию квантовой задачи с сохранением ее свойств. В этой связи появляется проблема выявления и изучения точек соприкосновения классического и квантового подходов для описания нелинейных свойств магнетиков.

Обычно такой переход осуществляется формальной заменой спинового оператора \hat{S} в узле кристаллической решетки классической величины, описывающего магнитный момент. Такая процедура справедлива для случая $S \rightarrow \infty$ и приводит к уравнениям Ландау-Лифшица, sin-Гордона и др.

Наиболее обоснованным является использование метода пробных функций [4], причем многое зависит от того, насколько удачно выбран базис пробных функций.

Возможным видом процедуры сведения квантовой модели к классической может быть усреднение гамильтониана по некоторым пробным функциям. Наиболее естественным оказывается выбор

в качестве таких пробных функций когерентных состояний, поскольку такие состояния наиболее близки к классическим, то есть минимизируют соотношение неопределенностей.

Более обоснованным представляется использование когерентных состояний, построенных на операторах группы $SU(2)$, симметрия которых соответствует симметрии гамильтониана [3].

Показано, что в случае $S \geq I$ может происходить сокращение длины классического вектора спина – факт, который невозможно объяснить в рамках классического подхода так же, как невозможно свести вклад различных взаимодействий в поведении к эффективным полям функций одного лишь вектора намагниченности (спина).

Полученные результаты допускают две возможности для объяснения сокращений спина: первая – возбуждение квадрупольных, октупольных и выше степеней свободы спиновой динамики; вторая – развитие спинового хаоса вблизи $SU(2)$ аттрактора.

Построим обобщенные когерентные состояния (ОКС) на группе $SU(2S+1)$, действующие в пространстве SP^{2S} . Для этого достаточно выбрать в качестве референтного вектора (вакуума) вектор наименьшего веса $|0\rangle$ в фундаментальном представлении группы $SU(2S+1)$

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

и найти его максимальную группу изотропии $SU(2S+1)$. Легко проверить, что в терминах верхнетреугольных операторов это будут матрицы вида

$$\widehat{T}^+ = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \sum_j \alpha_j \widehat{T}_j^+, \tag{2}$$

поскольку $\widehat{T}^\pm |0\rangle = 0$, а

$$\exp\{\widehat{T}_j^+ - \widehat{T}_j^-\} |0\rangle = 1. \tag{3}$$

Зануляя, в соответствии с вышеуказанным и коэффициентами α_j , мы получим, что искомые ОКС определяются оставшимися недиагональными генераторами с единицами в последнем столбце для \widehat{T}^+ и в последней строке \widehat{T}^- .

Коэффициенты перед $(2S+1)$ диагональными операторами также можно положить равными нулю, поскольку они относятся к подгруппе изотропии $SU(2S)$. Оставшийся диагональный генератор соответствует $U(1)$ и также не дает вклада при построении ОКС.

Наконец, не вдаваясь в подробности, имеем:

$$|\Psi\rangle = \exp\left\{\sum_{i=1}^{2j} (\xi_i T^+ - \xi_i T^-)\right\} |0\rangle = \cos|\xi| (|0\rangle + \Psi_1 |1\rangle + \dots + \Psi_{2j} |2j\rangle), \quad (4)$$

где

$$|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{2j} |\xi_i|^2, \quad |\xi| < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_i = \frac{\xi_i}{|\xi|} \tan|\xi|, \quad (5)$$

или, вводя обозначение

$$|\Psi|^2 = \sum_{i=1}^{2j} |\Psi_i|^2, \quad (6)$$

получим $\cos|\xi| = (1 + |\Psi|^2)^{-\frac{1}{2}}$

и окончательно находим когерентное состояние в виде [3]

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1, \dots, \Psi_{2j}\rangle = (1 + |\Psi|^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ |0\rangle + \sum_{i=1}^{2j} \Psi_i |i\rangle \right\}. \quad (7)$$

Здесь $|0\rangle$ определяется из (1), а $|i\rangle$ есть орт с единицей на $(i+1)$ -й строке снизу.

Следует отметить, что система ОКС (4) была построена с помощью генераторов \hat{T}^\pm фундаментального представления $SU(2S+1)$ и является первой точкой в последовательности систем ОКС, определяемой более высокими представлениями.

В работах авторов [5,6] особое внимание уделялось теоретическому исследованию магнитных систем со спином $S=1$. В таких системах ионы, расположенные в узлах кристаллической решетки, обладают тремя квантовыми состояниями. Переходы между $(2S+1)$ квантовыми спиновыми состояниями ионов в каждом узле кристаллической решетки описываются поляризованными операторами группы $SU(2S+1)$.

Следует отметить, что для систем с полуцелым спином S отсутствуют ограничения, которые в случае целых спинов допускают существование магнитоупорядоченного состояния только в определенном интервале параметров одноионной анизотропии. Наибольший интерес здесь вызывает исследование магнетиков, для которых одноионная анизотропия превышает обменную – ситуация, обратная той, которая позволяет описывать сильноанизотропные системы классическими методами [7]. Анализ задачи о поведении магнетиков со спином $S = \frac{3}{2}$ позволяет, с одной стороны, исследовать особенности, специфичные для магнетиков с полуцелым спином, а с другой, подчеркнуть механизмы и тенденции, общие для всех анизотропных систем.

Квантовая система магнетиков со спином $S=3/2$ находится в шестимерном пространстве состояний. Рассмотрим ферромагнетик со спином $S=3/2$, который описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = -J \sum_j \left(\hat{S}_j^x \hat{S}_{j+1}^x + \delta \cdot \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+n}^z \right) \quad (8)$$

по $SU(4)$ обобщенным когерентным состоянием (ОКС), как в комплексной, так и вещественной параметризации [8].

Квантовомеханические спиновые операторы имеют вид:

$$\hat{S}_j^+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{S}_j^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{S}_j^z = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

где они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{S}^+, \hat{S}^-] = 2\hat{S}^z, \quad [\hat{S}^z, \hat{S}^\pm] = \pm\hat{S}^\pm.$$

Для усреднения спиновых операторов используем когерентное состояние [6-8] в пространстве $SU(2S+1)/SU(2S) \cdot U(1)$ в виде (4).

Что касается получения динамических уравнений в комплексных параметризациях (см.[3]), то построен лагранжиан в более общем виде. Для произвольного значения лагранжиана имеем:

$$L = i\hbar \frac{\sum_{j=1}^{2S} (\dot{\Psi}_{jk} \bar{\Psi}_j - \Psi_j \dot{\bar{\Psi}}_{jk})}{1 + \sum_{j=1}^{2S} |\Psi_j|^2} - H(\Psi_j, \bar{\Psi}_j). \tag{9}$$

Проварьировав настоящий лагранжиан (9), можно получить следующие системы уравнений движения в пространстве $SU(2S+1)$

$$i\dot{\Psi}_{kt} = \left(1 + \sum_{j=1}^{2S} |\Psi_j|^2 \right) \left[\left(1 + |\Psi_k|^2 \right) \frac{\delta H}{\delta \Psi_k} + \sum_{j=1}^{2S} \Psi_k \bar{\Psi}_j \frac{\delta H}{\delta \bar{\Psi}_j} \alpha_{jk} \right], \tag{10}$$

где $\alpha_{jk} = \begin{cases} 0, & k = j \\ 1, & k \neq j \end{cases}$.

Не вдаваясь в подробности, можно вычислить среднее значение спиновых операторов (6) по обобщенным когерентным состояниям (4), в результате получим

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}^+ \rangle &= \frac{\sqrt{3}\Psi_2\bar{\Psi}_3 + 2\Psi_1\bar{\Psi}_2 + \sqrt{3}\bar{\Psi}_1}{1 + |\bar{\Psi}_1|^2 + |\bar{\Psi}_2|^2 + |\bar{\Psi}_3|^2}, \\ \langle \hat{S}^- \rangle &= \frac{\sqrt{3}\bar{\Psi}_2\Psi_3 + 2\bar{\Psi}_1\Psi_2 + \sqrt{3}\Psi_1}{1 + |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2}, \\ \langle \hat{S}^z \rangle &= \frac{1}{2} \frac{3|\Psi_3|^2 + |\Psi_2|^2 - |\Psi_1|^2 - 3}{1 + |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Предложенная параметризация $SU(4)$ когерентного состояния в комплексных переменных, хотя и достаточно удобна для исследования легкоосных магнетиков, однако для случая легкой плоскости, а также при учете сильной нелинейности оказывается не совсем удачной.

Поэтому обобщенное когерентное состояние на операторах группы в $SU(4)$ является более удобной и физически осмысленной вещественной параметризацией, а также соответствующие им гамильтоновы уравнения движения позволяют получить полуклассическое описание волн намагниченности в магнетиках $S=2/3$ с учетом октупольной и квадрупольной динамики спинового момента.

Построим обобщенное когерентное состояние на операторах группы $SU(2S+1)$ в наглядной физической параметризации вещественных функций и учитывающее возбуждение с октупольных магнитных полей в магнетиках с произвольным значением спина.

Для этого выберем пробную функцию

$$|\Psi\rangle = U(\theta, \varphi, \gamma) \exp(2ig\hat{Q}^{xy}) \exp(-i\beta\hat{S}^z) \exp(ik\hat{F}^{xyz}) |0\rangle \quad (12)$$

и усредним спиновые операторы по функции (11), где $|0\rangle$ – референтное состояние, в котором

$$U(\theta, \varphi, \gamma) = \exp(-i\varphi\hat{S}^x) \exp(-i\theta\hat{S}^y) \exp(-i\gamma\hat{S}^z) \quad (13)$$

– оператор Вигнера, характеризующий вращение спинового момента (θ, φ)

$$\hat{Q}^{xy} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ - квадрупольный момент,}$$

$$\hat{F}^{xyz} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ - октупольный момент.}$$

Отметим, что унитарный оператор (11) обеспечивает переход в собственную подвижную систему координат, где параметры θ и φ характеризуют ориентационную динамику классического спина. Параметры γ и β описывают вращение квадрупольного и октупольного моментов вокруг вектора спина, а g и k характеризуют изменение длины классического спина квадрупольного и октупольного моментов.

Не вдаваясь в подробности алгебраических вычислений, заметим, что обобщенное когерентное состояние (7) с точностью до определенной фазы сводится к ОКС в комплексной параметризации:

$$|\Psi\rangle = \Psi_0 |0\rangle + \Psi_1 |1\rangle + \Psi_2 |2\rangle + \Psi_3 |3\rangle. \quad (14)$$

Вводимые функции в соотношении (13) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= A_1 e^{\frac{3}{2}i(\varphi-\gamma-\beta)} - A_2 e^{\frac{i}{2}(3\varphi+\gamma-3\beta)} + B_1 e^{\frac{i}{2}(3\varphi-\gamma+3\beta)} + B_2 e^{\frac{3}{2}i(\varphi+\gamma+\beta)}, \\ \Psi_1 &= A_3 e^{\frac{3}{2}i(\varphi-\gamma+\beta)} - A_4 e^{\frac{i}{2}(\varphi+\gamma-3\beta)} + B_3 e^{\frac{i}{2}(\varphi-\gamma+3\beta)} + B_4 e^{\frac{3}{2}i(\varphi+3\gamma+3\beta)}, \\ \Psi_2 &= B'_4 e^{\frac{i}{2}(\varphi+3\gamma+3\beta)} - B'_2 e^{\frac{i}{2}(\varphi-\gamma+3\beta)} + A'_4 e^{\frac{i}{2}(\varphi+\gamma-3\beta)} - A'_2 e^{\frac{i}{2}(\varphi-3\gamma-3\beta)}, \\ \Psi_4 &= B'_1 e^{-\frac{3}{2}i(\varphi+\gamma+\beta)} - B'_2 e^{-\frac{i}{2}(3\varphi-\gamma+3\beta)} + A'_1 e^{-\frac{3}{2}i(\varphi-\gamma-\beta)} + A'_2 e^{\frac{i}{2}(3\varphi-\gamma-3\beta)}, \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_i \sin k, & B_1 &= b_i \cos k, \\ A'_1 &= a_i \cos k, & B'_1 &= b_i \sin k_1, \\ a_1 &= \sin^3 \frac{\vartheta}{2} \cos g, & a_2 &= \sqrt{3} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \sin g, \\ a_3 &= \sqrt{3} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 g, & a_4 &= \cos \vartheta \left(1 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \sin g, \\ b_1 &= \sqrt{3} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \sin g, & b_2 &= \cos^3 \frac{\vartheta}{2} \cos g, \\ b_3 &= 2 \sin \vartheta \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \sin g, & b_4 &= \sqrt{3} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos g, \end{aligned}$$

$|i\rangle$ – вектор столбец с единицей на $i+1$ -й строке (см.(1)).

Усредняя спиновые операторы (6) по обобщенным когерентным состояниям (11), получим проекции вектора классического спина в действительной параметризации

$$\langle \hat{S}^+ \rangle = \frac{3}{2} e^{i\varphi} (1 - 4 \cos^2 g) \cos 2k \sin \vartheta, \tag{15a}$$

$$\langle \hat{S}^- \rangle = \frac{3}{2} e^{-i\varphi} (1 - 4 \cos^2 g) \cos 2k \sin \vartheta, \tag{15б}$$

$$\langle \hat{S}^z \rangle = \frac{3}{2} (1 - 4 \cos^2 g) \cos 2k \cos \vartheta. \tag{15в}$$

При сравнении соотношений (15) с аналогичными для $SU(3)$ ОКС, полученными в работах [10,11], заметим, что сокращение спина за счет октупольного взаимодействия в нашем случае носит такой же характер, как и сокращение спина за счет квадрупольного поля в случае модели со спином $S=1$ и определяется фактором $\cos 2k$, а сокращение вектора классического спина за счет возбуждения квадрупольного взаимодействия, определяемого фактором $(1 - \cos^2 2g)$, имеет характер, отличный от $S=1$.

Представление в виде континуального интеграла по траекториям для квантового гамильтониана \widehat{H} позволило получить следующий лагранжиан полуклассической модели

$$L = \frac{3}{4} \hbar \cos 2k \cos^2 g \left(3 \cos^2 g \cdot \beta_t + \cos \mathcal{G} \cdot \varphi_t + \gamma_t \right) - H, \quad (16)$$

где $H = \langle \widehat{H} \rangle$ – полуклассический аналог соответствующего квантового гамильтониана.

Так как октупольное взаимодействие проявляет себя в магнетиках при более высокой температуре, чем квадрупольное, для простоты представляется целесообразным и физически обоснованным исследовать магнетик со спином $S = \frac{3}{2}$ в пренебрежении октупольным моментом, то есть если положить $\beta = k = 0$ в (11) и (15), то они переходят соответственно.

$$\langle \widehat{S}^+ \rangle = \frac{3}{2} e^{i\varphi} (1 - 4 \cos^2 g) \sin \mathcal{G}, \quad (17a)$$

$$\langle \widehat{S}^- \rangle = \frac{3}{2} e^{-i\varphi} (1 - 4 \cos^2 g) \sin \mathcal{G}, \quad (17б)$$

$$\langle \widehat{S}^z \rangle = \frac{3}{2} (1 - 4 \cos^2 g) \cos \mathcal{G}. \quad (17в).$$

Лагранжиан модели определяется как обычно из исходного лагранжиана (16):

$$L = \frac{3}{4} \hbar \cos^2 g (\cos \mathcal{G} \cdot \varphi_t + \gamma_t) - H. \quad (18).$$

Этот выбранный нами лагранжиан (18) порождает следующие уравнения движения спиновой динамики

$$\varphi_t = \frac{1}{\cos^2 g \sin \mathcal{G}} \cdot \frac{\delta H}{\delta \theta}, \quad (19a)$$

$$g_t = \frac{1}{2 \sin 2g} \cdot \frac{\delta H}{\delta \gamma}, \quad (19б)$$

$$\theta_t = \frac{1}{\sin 2g} \cdot \frac{\delta H}{\delta \varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta \cos^2 g} \cdot \frac{\delta H}{\delta \gamma}, \quad (19в)$$

$$\gamma_t = \frac{1}{\sin 2g} \cdot \frac{\delta H}{\delta g} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta \cos^2 g} \cdot \frac{\delta H}{\delta g}. \quad (19г)$$

Усредняя исходный гамильтониан (8) с одноионной анизотропией и переходя к квазиклассическому описанию, получим:

$$H = \frac{J}{\alpha_0} \int \left\{ \frac{\alpha_0^2}{2} \left(\langle \widehat{S} \rangle_x \right)^2 - \langle \widehat{S} \rangle^2 - \delta \langle \widehat{S}^z \widehat{S}^z \rangle \right\} dx, \quad (20)$$

где $\langle \widehat{S} \rangle^2 = \frac{9}{4}(1 - \cos^2 g)^2$,

$$\langle \widehat{S}^z \widehat{S}^z \rangle = 3(3 - 2\sin^2 \theta),$$

$$\left(\widehat{S}_x \right) = \frac{9}{4} \left[(4\sin^2 \vartheta - 3)\sin^2 2g \cdot g_x^2 - \sin^2 \vartheta \cos^2 2g \cdot \varphi_x^2 + \cos^2 \vartheta \cos^2 2g - \sin^2 \vartheta \cos 4g \cdot \vartheta_x g_x \right].$$

Использование явного вида гамильтониана (20), с учетом гамильтоновых уравнений движения (19), приводит к следующей системе уравнений

$$\varphi_t = \frac{1}{\cos 2g \sin \vartheta \alpha_0} J \left[\frac{9}{4} \cos^2 2g \sin \vartheta + 6\delta \sin 2\vartheta - \frac{9}{4} \frac{\alpha_0^2}{2} (4\sin 2\vartheta \sin^2 2g \times \right. \tag{21a}$$

$$\left. \times g_x^2 - (\varphi_x^2 - \vartheta_x^2) \sin 2\vartheta \cos^2 2g - 2\cos 2\vartheta \cdot \cos 4g \cdot \vartheta_x \varphi_x + \cos^2 \vartheta \cos^2 2g \cdot g_{xx} \right],$$

$$\vartheta_t = \frac{9}{4} J \alpha_0 \sin \vartheta \cos 2g \cdot \varphi_{xx}, \tag{21б}$$

$$g_t = 0, \tag{21в}$$

$$\gamma_t = \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta \cos 2g} \left[\frac{J}{\alpha_0} \left(\frac{9}{4} \cos^2 2g \sin 2\vartheta + 6\delta \sin 2\vartheta - \frac{9}{4} \frac{\alpha_0^2}{2} (4\sin 2\vartheta \sin^2 2g \cdot g_x^2 - 2\cos 2\vartheta \times \right. \right. \tag{21г}$$

$$\left. \left. \times \cos 4g \times \vartheta_x g_x + \cos^2 \vartheta \cos^2 2g \cdot \vartheta_{xx} - (\varphi_x^2 - \vartheta_x^2) \sin^2 2\vartheta \cos^2 2g \right) \right] - \frac{1}{\sin 2g} \left[\frac{9}{4} (4\sin^2 \vartheta - 3) \times \right.$$

$$\left. \times (\sin 4g \cdot g_x^2 + \sin^2 \vartheta \cdot g_{xx}) + \frac{9}{4} \left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} + 1 \right) \sin 4g \right] - \frac{9}{4} \frac{\alpha_0^2}{2} \left[(4\sin^2 \vartheta - 3) \sin 4g \cdot g_{xx} - \sin^2 \vartheta \times \right.$$

$$\left. \times \cos 4g \cdot \varphi_x^2 - \cos^2 \vartheta \cos 4g \cdot \vartheta_x^2 + 4\delta \sin 2\vartheta \sin 4g \cdot \vartheta_{xx} \right].$$

Полученная система уравнений (21) дает полное описание полуклассического описания магнетика со спином $S = \frac{3}{2}$ с одноионной анизотропией.

Как видно из третьего уравнения системы (21в) длина спина остается постоянной для настоящего вида анизотропии.

Аналогичным образом были изучены также и модели следующего вида:

$$\widehat{H} = -J \sum_j \left(\vec{\widehat{S}}_j \vec{\widehat{S}}_{j+1} + \delta \widehat{S}_j^z \widehat{S}_j^z \right),$$

$$\widehat{H} = -J \sum_j \left(\vec{\widehat{S}}_j \vec{\widehat{S}}_{j+1} + \delta \widehat{S}_j^z \widehat{S}_{j+1}^z \right). \tag{22}$$

Для этих моделей получены уравнения движения, которые практически совпадают с системой (18), но с некоторыми незначительными, в отчетности, отличиями: уравнения для θ_t и g_t остаются прежними, как в (19).

Отметим, что в данном случае уравнение (18) отличается от уравнения Ландау-Лифшица, что является следствием квадрупольного взаимодействия.

В заключение следует отметить, что новизна подхода, развиваемого в данной статье, заключается в том, что исходной моделью являются обычные и привычные переменные, дающие адекватное классическое описание данной системы. При этом, с одной стороны, в классике динамика носит в основном спиновый характер и можно проследить, в какой мере она соотносится с описанием в рамках уравнения Ландау-Лифшица и как влияют на нее остальные поля (квадрупольное, октапольное и др.). С другой стороны, поскольку при таком подходе сохраняется полное необходимое число динамических переменных, спиновая динамика сопровождается интересной квадрупольной динамикой и сокращением спина. При таком подходе возможно проследить, как меняется спиновая динамика с ростом спина и как происходит переход к настоящему пределу – к бесконечному S спину. Можно также выяснить, что представляют собой все остальные мультипольные добавки, отличающие квантовую систему от ее описания в рамках УЛЛ. Всё вышеизложенное позволяет сделать вывод, что полученные в [11-13] системы уравнений описывают все возможные взаимодействия магнитных систем с различными типами анизотропии и значений спина. Это касается в первую очередь изучения динамических, кинетических и термодинамических свойств магнитных систем и их нелинейных локализованных решений.

Поступило 02.12.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С.. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. – Киев: Наукова думка, 1983, 190 с.
2. Косевич А.М., Ковалев А.М.. Нелинейная физическая механика. – Киев: Наукова думка, 1988, 180 с.
3. Абдуллоев Х.О., Маханьков А.В., Хахимов Ф.Х.. Классические нелинейные модели в теории конденсированных сред. – Душанбе: Дониш 1989, 179 с.
4. Иванов Б.А., Оксюк Г.К., Слозунский А.Л.. Современные проблемы теории магнетизма. – Киев: Наукова думка, 1986, 111 с.
5. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Маханьков А.В., Муминов Х.Х.. Нелинейная динамика анизотропного легкоплоскостного магнетика со спином $S=1$. – Препринт ОИЯИ, Дубна, 1990, Р-90, с.258.
6. Абдуллоев Х.О., Муминов Х.Х.. Описание магнетики Гейзенберга при пространственном повороте для спина $S=1$. – ДАН РТ, 1990, т.33, №9, с.593-595.
7. Островский В.С.. О нелинейной динамике сильноанизотропных магнетиков со спином $S=1$. – ЖЭТФ, 1986, т.91, №5, с.1690-1701.
8. Abdulloev Kh.O., Makhankov A.V., Agüero M.. Quasiclassical description of easy-plane Heisenberg model and dynamics of wave packets. – W.W.Singapore, 1990, pp.387-397.
9. Fedyanin V.K., Makhankov V.G. – Physica Scripta, 1983, v.28, pp.221-228.

10. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х.. Полуклассическое описание анизотропных магнетиков, находящихся под воздействием внешних магнитных полей. – ФТТ, 1994, т.34, №1, с.150-154.
11. Абдуллоев Х.О., Муминов Х.Х., Рахимов Ф.К. Когерентные состояния группы SU(4) в действительной параметризации и гамильтоновы уравнения движения. – ДАН РТ, 1993, т.46, № 8-9, с.20-24.
12. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т.. Исследование магнетиков с обменной анизотропией в действительной параметризации.– Мат-лы конф. «Физика конденс. сред». – Душанбе, 2015, с.136-139.

Фарход Рахимӣ, Б.Г.Пиров

МАГНЕТИКИ ГЕЙЗЕНБЕРГИ ДОРОИ СПИНИ $S=3/2$ ДАР ФАЗОИ БИСЁРЧЕНАКА

Институти физикаю техникаи ба номи С.Умарови Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Мақолаи мазкур ба омӯзиши масъалаҳои умумии ферромагнетикҳои дорои спина $S=3/2$ бахшида шудааст. Ҳангоми таҳқиқи шибҳи классикӣ ба система натиҷаҳои бадастовардашуда навишти пурраи магнетикҳоро таъмин менамояд, инчунин имкон медиҳад, ки хосияти динамикӣ, кинетикӣ ва термодинамикӣ системаҳои магнитӣ омӯхта шуда, ҳалҳои локалии муодилаҳои ғайрихаттии марбут ба ин системаҳо дарёфт карда шаванд.

Калимаҳои калидӣ: *квант, ферромагнетик, ҳолати когерентӣ.*

Farhod Rahimi, B.G.Pirov

HEISENBERG MAGNETS WITH SPIN $S=3/2$ IN MULTIDIMENSIONAL SPACE

S.U.Umarov Physical-Technical Institute National Academy of Sciences of Tajikistan

This work presents a common problem in the study of ferromagnets with spin $S = 3/2$. In the semiclassical approach to the system the results obtained has given a complete description of magnetic materials and contribute to the study of the dynamic, kinetic and thermodynamic properties of magnetic systems and obtain their nonlinear localized solutions.

Key words: *quantum, ferromagnets, coherent states.*

УДК 537.611.2

Член-корреспондент НАН Таджикистана Х.О.Абдуллоев, Д.К.Солихов, С.С.Рахмонов

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В РАМКАХ ЛЕГКООСНОЙ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА И ПОВЕДЕНИЕ ПАКЕТОВ СПИНОВЫХ ВОЛН

Таджикский национальный университет

В работе исследуется квазиклассическое поведение начальных пакетов спиновых волн более общего вида и найдены условия, при которых в зависимости от начального состояния пакеты либо коллапсируют, либо раздуваются.

Ключевые слова: спиновые волны, легкоосная модель, самолокализация, волновые пакеты.

В последние годы большой интерес представляет исследование новых решений нелинейного уравнения Шредингера. Как известно, широкий класс нелинейных явлений физики конденсированного состояния, плазмы, нелинейной оптики описывается этим уравнением [1].

Рассмотрим квазиклассическое поведение начальных пакетов спиновых волн в рамках легкоосной модели Гейзенберга. Динамику таких пакетов можно описать с помощью нелинейного уравнения Шредингера [2,3]

$$i\psi_t + \psi_{rr} + \frac{D-1}{r}\psi_r + |\psi|^2\psi = 0. \quad (1)$$

Это уравнение имеет следующие интегралы движения, характеризующие энергию и число частиц

$$E = \pi 2^{D-1} \int \left\{ |\psi_r|^2 - \frac{1}{2} |\psi|^4 \right\} r^{D-1} dr,$$

$$N = \pi 2^{D-1} \int |\psi|^2 r^{D-1} dr.$$

Рассмотрим поведение во времени величины

$$B(t) = N \langle r^2 \rangle = \pi 2^{D-1} \int |\psi|^2 r^{D+1} dr \geq 0, \quad (2)$$

пропорциональной среднеквадратичному радиусу пакета, достаточно хорошо локализованного в пространстве. Продифференцировав (2) дважды по времени и используя (1), будем иметь

$$\ddot{B}(t) = 8E - \left[2(D-2) \int |\psi|^4 r^{D-1} dr \right] \pi 2^{D-1}, \quad (3)$$

где

Адрес для корреспонденции: Солихов Давлат Кувватович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: davlat56@mail.ru

$$\ddot{B}(t) \equiv \frac{d^2B}{dt^2}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, следующие из (3).

1) $D=2$. Знак $B(t)$ определяется знаком E , причем

$$B(t) = 4Et^2 + C_1t + C_2.$$

При $E < 0$ за конечное время $t_{cr} = (\sqrt{C_1^2 + 16C_2|E|} - C_1)/8E$ величина $B(t)$ обращается в нуль, то есть пакет спиновых волн коллапсирует. При $t < t_{cr}$, $B(t)$ становится меньше нуля, что невозможно по определению (3), то есть поле $\psi(r, t)$ становится сингулярным, а интеграл в (3) теряет смысл. При $E < 0$, $B(t)$ монотонно возрастает и, в силу сохранения числа частиц N , пакет неограниченно расширяется.

2) $D=3$, где $B < 8E$. Поведение пакета аналогично предыдущему случаю с той лишь разницей, что теперь для его коллапса требуется $E < E_{cr}$, $E_{cr} > 0$, и происходит локализация пакета, в этом случае условие $E > 0$ является достаточным, но не необходимым. При $E > E_{cr}$ пакет будет расширяться. Величина E_{cr} зависит, вообще говоря, от начальной конфигурации пакета.

3) $D=1$, тогда $B > 8E$. В этом случае (3) позволяет судить лишь о начальной стадии сжатия или расширения, причем $E_{cr} < 0$. Легко проверить, что на односолитонном (стационарном) решении [4]

$$\psi_s = ae^{i\omega t} \text{Sech} \frac{ax}{\sqrt{2}},$$

имеем, как и следовало ожидать, $B\{\psi_s\} = 0$.

Исследуем теперь квазиклассическое поведение начальных пакетов спиновых волн в рамках нелинейного уравнения Шредингера более общего вида:

$$i\psi_t + \psi_{rr} + \frac{D-1}{r}\psi_r - \frac{dU(\Phi)}{d\Phi}\psi = 0, \quad \Phi = |\psi|^2. \tag{4}$$

Это уравнение имеет интегралы

$$E = \pi 2^{D-1} \int \{|\psi_r|^2 + U\} r^{D-1} dr, \tag{5}$$

$$N = \pi 2^{D-1} \int |\psi|^2 r^{D-1} dr, \tag{6}$$

характеризующие энергию и число частиц соответственно. Здесь $U(\Phi)$ есть достаточно гладкая от Φ функция.

Займемся изучением поведения во времени величины

$$B(t) = \pi 2^{D-1} \int |\psi|^2 r^{D+1} dr = \langle r^2 \rangle N \geq 0. \quad (7)$$

Продифференцировав (7) дважды по времени и используя (4), будем иметь (наличие центральной симметрии для получения (7) не обязательно)

$$\ddot{B}(t) = 8E - \left[4(D+2) \int U r^{D-1} dr - 4D \int \frac{dU}{d\Phi} |\psi|^2 r^{D-1} dr \right] \pi 2^{D-1}, \quad (8)$$

где D – размерность пространства, или

$$\ddot{B}(t) = \pi 2^{D-1} \left\{ 8 \int |\psi_r|^2 dr + 4D \left[\int \left(\frac{dU}{d\Phi} \Phi - U \right) dr \right] \right\}. \quad (9)$$

Из (8) следует общий вывод:

- 1) $U(\Phi) \geq 0$ – делокализация пакетов спиновых волн имеет место при условии $dU/d\Phi - U \geq 0$,
- 2) $U(\Phi) \leq 0$ – возможна их самолокализация. Проиллюстрируем второй случай на ряде примеров.

Пусть $U(\Phi) = -\frac{1}{n} \Phi^n$, тогда формула (8) приобретет вид

$$\ddot{B}(t) = 8E - \frac{4}{n} \{D(n-1) - 2\} 2^{D-1} \pi \int \Phi^n r^{D-1} dr \equiv 8E + T. \quad (10)$$

Стационарная точка $B(t) = 0$ является устойчивой, если $E < 0$, а $T > 0$.

Чтобы показать это, сделаем следующую оценку. Используя интеграл (8), имеем

$$\int \Phi^n r^{D-1} dr \approx \tilde{\Phi}^{n-1} N \approx \frac{N^n}{V^{n-1}} \equiv 8E + T. \quad (11)$$

Пусть $T = 0$, то есть $(D(n-1) - 2) = 0$.

Тогда $B(t) = 4Et^2 + C_1 t + C_2$, где $C_2 = N \langle r_0^2 \rangle$, $C_1 = N \frac{1}{4} \langle r_0^2 \rangle$. Положим $C_1 = 0$ (C_1 – определяется начальными характеристиками пакета). Таким образом,

$$B(t) = 4Et^2 + C_2, \quad (12)$$

$E = 0$ – стационарная точка.

$E < 0$ – коллапс за время $t_{cr} = \sqrt{\frac{C_2}{4|E|}}$.

$E > 0$ – неограниченное расширение пакета.

Таким образом, стационарная точка $E = 0$ неустойчива при $T = 0$.

Пусть $T < 0$. Стационарная точка $\ddot{B}(t) = 0$ есть

$$8E = a \frac{N^n}{V^{n-1}(t)},$$

где

$$a = \frac{4\pi}{n}(2 - D(n-1)), \quad E < 0.$$

Если в начальный момент $t = 0$, $\ddot{B}(0) > 0$ ($\ddot{B}(0) < 0$), то в процессе эволюции пакета это неравенство сохраняется в силу того, что $\frac{d\Gamma}{dt} < 0$ при $\ddot{B}(0) > 0$ ($\frac{d\Gamma}{dt} > 0$ при $\ddot{B}(0) < 0$).

Итак, при $\ddot{B}(0) > 0$ происходит неограниченное расширение, а при $\ddot{B}(0) < 0$ – неограниченное сжатие, то есть неустойчивость.

Пусть $T > 0$ – стационарная точка $\ddot{B}(t) = 0$ есть

$$8E = a \frac{N^n}{V^{n-1}(t)},$$

где

$$a = \frac{4\pi}{n}(D(n-1) - 2), \quad E < 0.$$

Если $8|E| > T$, то начинается локализация, но не коллапс, это связано с тем, что при локализации T растет и в некоторый момент времени t_1 , $\ddot{B}(t) = 0$, после чего \ddot{B} станет положительным $8|E| > T$. То есть в точке t_1 «ускорение» меняет знак, поэтому в некоторый момент t_2 сжатие пакета сменится расширением.

Это означает, что эта стационарная точка $8|E| > T$ является устойчивой. Вернемся к уравнению (11), в силу только что доказанного предположения, устойчивые стационарные пакеты существуют, если $T > 0$ или

$$2 - D(n-1) > 0, \quad 1 < n < 1 + \frac{2}{D}. \tag{13}$$

Это условие в точности совпадает с условием Q – устойчивости стационарных солитонов [5,6]. Из него также следует, что устойчивыми стационарными пакетами обладает модель (10) при $D = 1$, $n = 2$. В остальных моделях этого класса в зависимости от начального состояния пакеты либо коллапсируют, либо раздуваются.

Поступило 19.11.2020 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абдуллоев Х.О., Рахмонов С.С. Уравнение, описывающее эволюцию оптического излучения в нелинейной среде. – Вестник ТНУ, 2019, №3, с.72-77.
2. Абдуллоев Х.О. Маханьков А.В., Хакимов Ф.Х. Локализация спиновых волн в легкоплоскостной модели Гейзенберга. – Изв. АН ТаджССР. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 1990, №3 (100), с.180-183.
3. Абдуллоев Х.О., Рахмонов С.С., Девонакулов Ш.А., Хомидов Ф., Ниёзов Б.О. Исследования поведения квантовых и классических моделей методом преобразований Холштейна-Примакова и спиновых когерентных состояний. – Вестник ТНУ, 2019, №4, с.73-77.
4. Абдуллоев Х.О., Маханьков В.Г., Рахимов Ф.К. Введение в теорию солитонов. – Душанбе, 1998, 146 с.
5. Маханьков В.Г. Солитоны и численный эксперимент. – ЭЧАЯ, 1983, т.14, в.1, с.123-180.
6. Glassey R.T. On the blowing of solutions to the Cochy problem for nonlinear Schrodinger equations. - J.Math.Phys., 1977, v.18, n.9, pp.1794-1797.

Х.О.Абдуллоев, Д.К.Солихов, С.С.Рахмонов

**ҲАЛЛИ МУОДИЛАИ ҒАЙРИХАТИИ ШРЕДИНГЕР ДАР ДОИРАИ МОДЕЛИ
МЕҲВАРИ САБУКИ ГЕЙЗЕНБЕРГ ВА РАФТОРИ ДАСТАҶОИ МАВҶҶОИ
СПИНИ**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар қор рафтори квазиклассикии бастаҳои ибтидоии мавҷҳои спинии намудашон умумитар таҳқиқ шудан, шартҳои ёфт шуданд, ки дар онҳо вобаста аз ҳолати ибтидоӣ ё вайрон мешаванд ё афзоиш меёбанд.

Калимаҳои калидӣ: мавҷҳои спинӣ, модели меҳвари сабук, худлокализонидашуда, дастаҳои мавҷӣ.

Kh.O.Abdulloev, D.K.Solihov, S.S.Rakhmonov

**SOLUTION OF THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITHIN
THE EASY-AXIS HEISENBERG MODEL AND THE BEHAVIOR OF SPIN WAVE
PACKETS**

Tajik National University

In this work, the semi classical behavior of initial packets of spin waves of a more general form is investigated and conditions are found under which, depending on the initial state, packets either collapse or inflate.

Key words: spin waves, easy-axis, self-localization, wave packets.

УДК 541.64:539.2

Член-корреспондент НАН Таджикистана Ш.Туйчиев, Д.Рашидов, С.Х.Табаров, Ф.Х.Содиков

ВЛИЯНИЕ НАНОГРАФЕНОВ НА СТРУКТУРУ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИМЕРОВ*Таджикский национальный университет*

Методами рентгенографии, механическими и тепловыми испытаниями исследовано влияние нанографенов на структуру, механические и тепловые свойства композитов из ПЭНП и ПММА. Показано, что внедрение наночастиц в полимеры приводит к уменьшению подвижности цепных молекул матрицы и соответственно к изменению физического состояния аморфных областей, переходу их из высокоэластического состояния в стеклообразное.

Ключевые слова: полимер, нанографен, композит, структура, свойства.

Для получения полимерных композитов с хорошими эксплуатационными свойствами предлагают использовать нанокремниевые наполнители – нанографены и нанографиты [1]. Однако сведения о влиянии нанокремниевых наполнителей на структуру и свойства полимерных нанокомпозитов в доступной нам литературе отсутствуют.

В качестве объектов исследования использовали кристаллический полимер ПЭНП с молекулярной массой $M=6 \cdot 10^4$, аморфный ПММА с $M=8 \cdot 10^4$, растворитель бромбензол (БрБ) марки «ХЧ», наполнителем служили нанографены, которые были получены облучением гамма-лучами многослойных углеродных нанотрубок диаметром 40 нм на установке РХМ-гамма-20, доза облучения составляла $D=10000$ Мрад. При облучении в воздушной среде, возникающие фрагменты нанотрубок, по видимому, являются окисленными и представляют собой графеноксиды. Вначале готовили маточные растворы ПЭНП, ПММА и суспензии нанокремниевых частиц (НУЧ) в среде БрБ при 80-90°C. Для достижения равномерного распределения наночастиц смесь растворов полимера с суспензией НУЧ были озвучены ультразвуком в течение 20 мин на установке УЗ-0.25 с частотой 250 кГц при 80°; затем при этой же температуре производили отливку раствора в стеклянную кювету, где выдерживали его до полного испарения растворителя, и формовали пленки толщиной 15-30 мкм, концентрацию наночастиц меняли в пределах $C=0.1-3\%$.

Структуру образцов изучали на дифрактометрах ДРОН-2 и КРМ-1 с использованием медного излучения, фильтрованного никелем. Состояние поверхности образцов и распределение наночастиц наполнителей исследовали на микроскопе МИН-8; термограммы композитов получали на установке DSC 204F1 фирмы Netzsch при скорости нагрева и охлаждения 10 град/ мин. Механические испытания образцов проводили на стандартной разрывной машине РМ-1 при движении нижнего зажима 12мм/мин. Состояние образцов во всех исследованиях было неориентированное.

Адрес для корреспонденции: Рашидов Джалил. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр.Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: rashidov.1943@mail.ru

Поскольку структура и свойства ПЭНП и ПММА при внедрении в них наночастиц изменялись по-разному, поэтому результаты допирования полимеров рассмотрим отдельно.

Исходные пленки ПЭНП были чистыми и прозрачными. Визуальные и микроскопические наблюдения показали, что при малых концентрациях $C=0.1-1.0\%$ в композитах не наблюдаются следы наночастиц и их агрегатов, а при $C \geq 1-3\%$ на пленках композитов доминирует серый цвет, происходит образование точечных агломератов или кластеров наночастиц с размерами ~ 10 мкм, распределенные равномерно по всему объему и поверхности.

Исходный ПЭНП и композитные пленки на его основе характеризуются сферолитной структурой с размером ~ 5 мкм [2]. Как показали структурные исследования на большеугловых рентгенограммах (БР) исходных и композитных образцов наблюдаются основные характеристические рефлексы 110 и 200, следы наночастиц – нанографенов (нанографеноксидов), их агломератов или кластеров отсутствуют. С увеличением содержания наночастиц интенсивность рефлексов I_k , их положения 2θ и радиальные полуширины $\Delta 2\theta$ не изменяются. Следовательно, наночастицы не входят в кристаллическую решетку матрицы и не взаимодействуют с цепными молекулами. На малоугловых рентгенограммах (МР) исходных образцов наблюдается слабое дискретное рассеяние с тангенциальной периодичностью ~ 30 нм, с ростом концентрации наночастиц происходит увеличение интенсивности диффузного рассеяния, которое поглощает дискретное рассеяние. Это свидетельствует о появлении микронеоднородностей типа пор и трещин в композитах и повышении их концентрации [2]. По аналогии с исследованиями наноуглеродсодержащих (фуллереновая сажа, фуллерены C_{60} и C_{70} , нанотрубок, наноалмазов) образцов [2], по-видимому, частицы нанографенов в основном располагаются как в межлучевых, так и межсферолитных аморфных областях сферолитов; они способствуют изменению их физического состояния и переходу из высокоэластического состояния в стеклообразное.

Результаты механических испытаний исходных и композитных образцов ПЭНП+графен приведены в табл. 1.

Таблица 1

Тепловые и механические свойства композита ПЭНП+графен

	σ_p , МПа	ϵ_p , %	$T_{пл}$, °C	T_k , °C
ПЭНП (исх)	19.7	550	107	95
ПЭНП+0.5%графен	10	310	107	95
ПЭНП+1%графен	13	200	107	95
ПЭНП+3%графен	10	110	107	95

Из табл. 1 видно, что с увеличением концентрации наночастиц наблюдается сначала падение, а затем сохранение разрывной прочности σ_p при резком снижении величины разрывной деформации ϵ_p (ϵ_p уменьшается с 500 до 100%). Если для других наноуглеродсодержащих образцов ПЭНП при концентрациях наполнителей $C \geq 3\%$ происходит уменьшение σ_p и резкое падение ϵ_p , то в композитах ПЭНП+нанографен это снижение выражено относительно слабо, то есть наблюдается достаточно большое сохранение ресурса механических свойств.

Термографические исследования композитных образцов ПЭНП+ нанографен (см. табл. 1) оказались аналогичными с другими наноуглеродсодержащими композитами ПЭНП [2]. На термограммах при нагреве наблюдается единственный острый пик при температуре 107° , а при охлажде-

нии появляется пик кристаллизации при 95° , увеличение концентрации наночастиц не сопровождается изменениями в температурах плавления и кристаллизации, то есть структура композита становится относительно стабильной.

Теперь рассмотрим изменения в структуре и свойствах аморфных композитов ПММА. Как показали исследования, исходные чистые образцы ПММА и композитов ПММА+графен при малых содержаниях $C=0-1\%$ были светлыми и прозрачными, без каких-либо дефектов на поверхности и в объеме. С ростом концентрации наночастиц в интервале $C \geq 1-3\%$ цвет образцов изменяется от светлого до светло-серого, на поверхности и в объеме композитов наблюдается возникновение точечных кластеров и их равномерное распределение.

Результаты механических испытаний нанокомпозитов приведены в табл. 2. Как видно, с ростом содержания наночастиц в интервале $C=0-3\%$ в композитах происходит постепенное увеличение разрывной прочности σ_p на 20-25% при резком уменьшении деформируемости с $\varepsilon_p = 6\%$ до $\varepsilon_p = 1.5\%$.

Результаты термографических исследований приведены в табл. 2. На термограмме исходного ПММА наблюдаются пики - изломы при температурах $T_1=80^\circ$, $T_2=120-122^\circ$ и $T_3=180-200^\circ$: T_1 – соответствует температуре стеклования или размягчения, T_2 – температуре перехода в высокоэластическое состояние, T_3 – температуре начала разложения ПММА. С ростом концентрации наполнителя в интервале $C=0-3\%$ проявляется тенденция некоторого возрастания T_1 на 2° , температуры перехода T_2 на 7° и постепенное исчезновение T_3 (см. табл.2).

Таблица 2

Тепловые и механические свойства композита ПММА+графен

	σ_p , МПа	ε_p , %	T_1 , $^\circ\text{C}$	T_2 , $^\circ\text{C}$	T_3 , $^\circ\text{C}$
ПММА (исх)	39.8	6.5	80	120	180
ПММА+0.5%графен	42.5	4.5	82	122	200
ПММА+1%графен	45	2.0	82	122.5	-
ПММА+3%графен	50	1.5	82	127	-

Изменения T_1 и T_2 свидетельствуют об уменьшении подвижности цепных молекул матрицы, а также об изменениях физического состояния аморфных областей, а T_3 - показывает смещение температуры начала разложения композита в сторону более высоких температур. В этом, по-видимому, проявляется стабилизирующая роль наполнителя в композите.

Рентгенографические исследования на больших углах рассеяния показали, что с ростом концентрации наночастиц наблюдается довольно слабое и широкое отражения в области углов рассеяния $2\theta=6-40^\circ$, на их фоне рефлексы от наночастиц не появляются; на малоугловых рентгенограммах наблюдается довольно слабый рост диффузного рассеяния, которое свидетельствует о незначительном увеличении микрогетерогенности в структуре. Необходимо отметить, что внедрение нанографенов в полимеры ПЭНП и ПММА приводит к неоднотипным изменениям в их структуре и физических свойствах, как в случае нанокарбонсодержащих полимеров [2].

Таким образом, внедрение наночастиц - нанографенов (нанографеноксидов) в полимеры сопровождается изменениями в их структуре, механических и тепловых свойствах.

Поступило 08.10.2019 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Губин С.П., Ткачев С.В. Графен и материалы на его основе. Радиоэлектроника, наносистемы, информационные технологии, 2010, т.2, №1-1, с.99-137.
2. Туйчиев Ш., Рашидов Д. Структура и свойства полимерных нанокомпозитов. – Душанбе: Эр-Граф, 2018, 212 с.

Ш.Туйчиев, Д.Рашидов, С.Х.Табаров, Ф.Х.Содиков

**ТАЪСИРИ НАНОГРАФЕНҲО БА СОҲТОР ВА БАЪЗЕ ХОСИЯТҲОИ
ПОЛИМЕРҲО**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Бо истифодаи усулҳои рентгенографӣ, механикӣ ва гармофизикӣ таъсири нанографенҳо ба сохтор, хосиятҳои механикӣ ва гармии нанокомпозитҳои ПЭЗП ва ПММА тадқиқ шуданд. Нишон дода шудааст, ки вориди нанозарраҳо ба полимерҳо боиси камшавии ҳаракатнокии молекулаҳои занҷирӣ ва мувофиқан тағйири ҳолати физикии соҳаҳои аморфӣ мегарданд.

Калимаҳои калидӣ: полимер, нанографен, композит, сохтор, хосиятҳо.

Sh.Tuichiev, D.Rashidov, S.Kh.Tabarov, F.Kh.Sodikov

**INFLUENCE OF NANOGRAFENES ON STRUCTURE AND SOME
PROPERTIES OF POLYMERS**

Tajik National University

The influence of nanografens on the structure, mechanical and thermal properties of LDPE and PMMA composites was studied by X-ray diffraction, mechanical and thermal tests. It is shown that the introduction of nanoparticles into polymers leads to a decrease in the mobility of the chain molecules of the matrix and, accordingly, to the change in the physical state of the amorphous regions and their transition from the highly elastic state to the glassy state.

Key words: polymer, nanographene, composite, structure, properties.

УДК 535.373.4:547.992.2

Н.У.Муллоев, Н.А.Маджидов, Н.Л.Лаврик*

КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ СТРУКТУРЫ ДИМЕРОВ ИМИДАЗОЛА*Таджикский национальный университет,***Институт химической кинетики и горения им. В.В.Воеводского, СО РАН**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Т.Х.Салиховым 04.11.2020 г.)*

Работа посвящена актуальной теме – выявлению механизмов сложных органических реакций в лекарственных растениях с помощью квантово-химических расчетов. Данный метод широко используется при толковании аналитических и экспериментальных результатов исследования свойств биоорганических соединений. Выполнен расчет молекулярной структуры водородно-связанного комплекса (димера) имидазола методом квантово-химического расчета с помощью функционала электронной плотности B3LYP/6–31G с использованием комплекса программ Gaussian. Обнаружены амфотерные свойства имидазола, проявляющиеся в том, что это соединение может служить как донором, так и акцептором протона при образовании водородных связей. Результаты выполненного расчета могут быть весьма полезным в интерпретации ИК-спектров гетероциклических соединений азольного ряда и при расчете колебательных спектров этих соединений.

Ключевые слова: *квантово-химический расчет, имидазол, лекарственные соединения, димер, молекулярная структура, гетероциклические соединения, амфотерные свойства.*

Гетероциклические соединения широко распространены в природе и составляют основу многих природных биологически активных веществ и лекарственных средств [1]. Будучи самой распространенной группой соединений, гетероциклическим соединениям характерно то, что они составляют основу многих природных веществ, например алкалоидов, пенициллинов, витаминов, нуклеиновых кислот, хлорофилла и т.д. Многие современные лекарственные соединения содержат гетероциклические соединения. Гетероциклические соединения классифицируются в зависимости от размера и числа циклов, составных элементов, количества, входящих в цикл гетероатомов, уровня насыщенности, взаимного расположения и природы гетероатомов.

Расширение области практического использования и повышение эффективности применения гетероциклических соединений требует предварительного исследования их физико-химических свойств и зависимости этих свойств от физических условий и структуры соединений.

Среди гетероциклических соединений особый интерес представляют азотосодержащие пятичленные гетероциклические соединения производных имидазола, которые входят в состав нескольких природных соединений, таких как гистамин, биотин, алкалоиды и нуклеиновая кислота и являются очень важным классом среди лекарственных соединений [2].

Адрес для корреспонденции: Муллоев Нурулло Урунбойевич, Маджидов Насимджон Асрорович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: voruch@eml.ru; E-mail: nasimboy@mail.ru

В последнее время для установления механизмов сложных органических реакций применяются квантово-химические расчеты. Квантово-химическое исследование колебательных спектров и межмолекулярного взаимодействия (ММВ) позволяет рассчитывать многие характерные параметры органических соединений и широко используется при анализе и интерпретации экспериментальных результатов.

В настоящей работе квантово-химическим методом произведён расчёт молекулярной структуры водородно-связанного комплекса (димера) имидазола. Квантово-химические расчеты произведены методом функционала электронной плотности B3LYP/6-31G с использованием комплекса программ Gaussian [3-5].

На рис. 1 приведена расчётная молекулярная структура и заряды на атомах молекулы имидазола

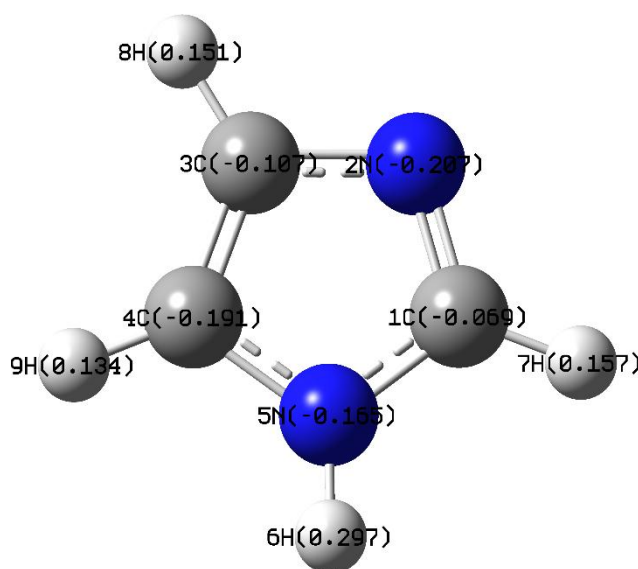


Рис. 1. Молекулярная структура и электронная плотность на атомах молекулы имидазола.

Для электронной структуры имидазола характерны две особенности: первая – это относительно свободная электронная пара у одного атома азота (N2), которая определяет *акцепторную способность имидазола*, вторая – неподеленная пара электронов другого атома азота (N5) участвует в образовании ароматической π -системы и этот атом определяет *протонодонорные свойства (ПАС) имидазола*.

Таким образом, имидазол представляет собой как донора, так и акцептора протона при возможном образовании водородных связей, то есть имидазол обладает амфотерными свойствами.

Одним из факторов эффективности донорно-акцепторного взаимодействия молекул является их способность образовывать межмолекулярные Н-связи, что, в конечном счёте, обуславливает их реакционную способность. Амфотерные свойства имидазола могут проявляться, прежде всего, при самоассоциации молекул посредством межмолекулярных Н-связей в конденсированном состоянии [6, 7].

На рис. 2 показана расчётная оптимальная молекулярная структура и заряды на атомах димера-имидазола.

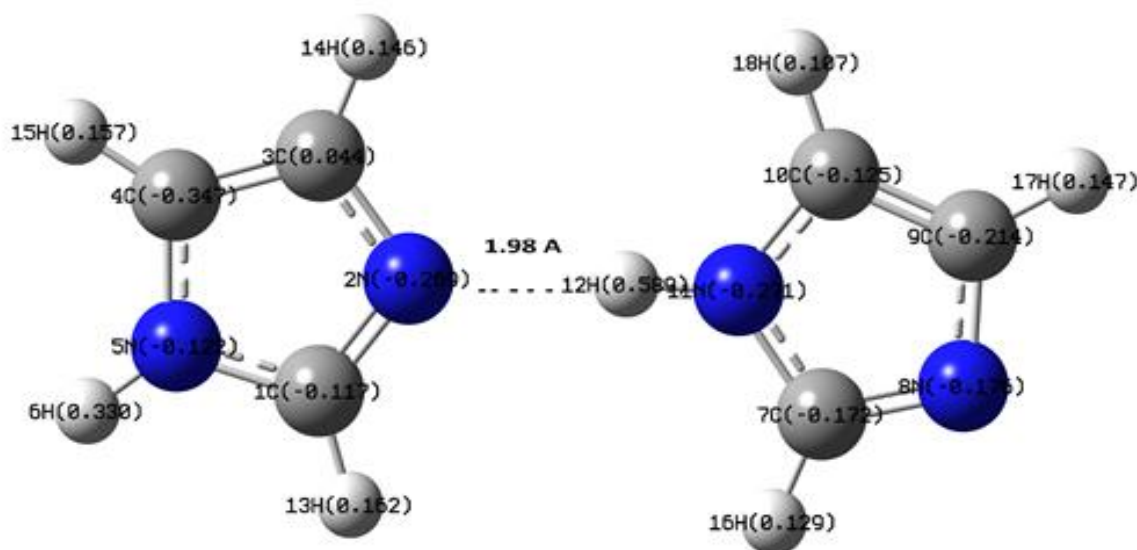


Рис. 2. Молекулярная структура и электронная плотность на атомах водородно-связанного комплекса имидазола.

Видно, что наибольший положительный заряд локализован на атомах водорода группы N(11)-H (0.589), а наибольшая электронная плотность – на атоме N(2) (-0.269) соседней молекулы. Кроме того, расстояние между этими атомами является наименьшим и составляет $R = 1.98 \text{ \AA}$. Поэтому электростатическое взаимодействие между этими атомами сильнее, чем взаимодействие между другими атомами. В связи с этим, по-видимому, образуются Н-связи типа $=N-H \dots N=$ между водородом (12)-H и атомом азота N (2) соседней молекулы имидазола. Такая связь является более прочной и наиболее вероятной по сравнению со связью $N-H \dots N$ с гетероатомом пиррольной группы, поскольку протон-акцепторная способность более открытого атома N положения 2 больше, чем ПАС атома N в положении 5 [8].

Таким образом, вышеприведенные расчеты позволяют интерпретировать ИК-спектры гетероциклических соединений азольного ряда, а силовое поле и электрооптические параметры димера имидазола будут полезны при расчете колебательных спектров этих соединений.

Поступило 11.11.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимощенко Л.В. Сарычева Т.А. Гетероциклические соединения. – Изд. Томского политехнического университета, 2013, с.90-95.90с
2. Пожарский А.Ф. Гетероциклические соединения в биологии и медицине. – Соросовский образовательный журнал, 1996, №6, с.25-32.
3. Foresman J.B., Frisch J.M. Exploring Chemistry with Electronic Structure Methods: A Guide to Using Gaussian – Pittsburgh: Gaussian Inc, 1993, 250 p.
4. Helgaker T. Molecular electronic – structure theory. – J. Olsen. -New-York: Jonh Wiley & Sons. LTD, 2000, 890p.

5. Frisch V., Trucks G.W., Schlegel H.B. et al. Gaussian 03. Revision B.03. – Pittsburgh: Gaussian Inc, 2003, 20 p.
6. Муллоев Н.У., Файзиёва М., Исломов З.З., Юсупова Дж. Протоноакцепторные способности гетероциклических соединений по полосам валентных колебаний групп N–H ассоциированных молекул. – Журнал структурной химии, 2016, т.57, №5, с. 1075-1077.
7. Hushvaktov H.A., Jumabaev A., Tashkenbaev U.N., Absanov A.A., Sharifov G.Sh., Hundayberdiev B.G. About proton-acceptor and proton-donor properties of pyrrole molecules. quantum-chemical calculations. – International Conference "Physics of liquid matter: modern problems" (PLMMP-2016). 27-30, 2016, Kiev, Ukrainian.
8. Муллоев Н.У., Ходиев М.Х., Исломов З.З., Лаврик Н.Л. Влияние структуры молекул производных триазола на эффективность образования межмолекулярной Н-связи. – Журнал структурной химии, 2020, т.61, №2, с.246-251.

Н.У.Муллоев, Н.А.Маджидов, Н.Л.Лаврик*

ҲИСОБИ КВАНТӢ-КИМИЁВИИ СОҲТОРИ ДИМЕРҲОИ ИМИДАЗОЛ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,

**Институти кинетика ва сӯзиши химиявии ба номи В.В.Воеводский*

Шуъбаи Сибири Академияи илмҳои Россия

Мақолаи мазкур ба мавзӯи мубрами муайян кардани механизмҳои реаксияҳои мураккаби органикӣ бо ёрии ҳисобҳои квантӣ-химиявӣ бахшида шудааст, ки имкон медиҳанд, ки аксари андозаҳои ҳоси пайвастагиҳои дорувориро ҳисоб кунанд. Чуноне ки муаллифон тасдиқ мекунанд, ин усул дар тафсири натиҷаҳои бадастомадаи таҳлилий ва таҷрибавии бадастомада васеъ истифода мешавад. Муаллифон сохтори комплекси пайвастаи водородии (димери) имидазолро бо усули ҳисобкунии квантӣ-химиявӣ бо истифодаи функционали зичии электронии B3LYP / 6-31G бо истифодаи комплекси барномаҳои Gaussian ҳисоб кардаанд. Дар қор ҳосиятҳои амфотерии имидазол ошқор карда шудааст, зеро имидазол ба шартӣ бавучудоии имконпазири пайвастаҳои водород, ҳам донор ва ҳам аксептори протон мебошад. Ҳисобҳои, ки муаллифон анҷом додаанд, метавонанд дар шарҳи ИК-спектрҳои пайвастагиҳои гетеросиклии қатори азолӣ ва зимни ҳисоб кардани спектрҳои лаппиши ин пайвастагиҳо кумак расонанд.

Калимаҳои калидӣ: ҳисобҳои квантӣ-химиявӣ, имидазол, пайвастагиҳои доруворӣ, димерҳо, сохтори молекулавӣ, пайвастагиҳои гетеросиклӣ, ҳосиятҳои амфотерикӣ.

N.U.Mulloyev, N.A.Majidov, N.L.Lavrik*

QUANTUM-CHEMICAL CALCULATION OF THE STRUCTURE OF IMIDAZOLE DIMERS*Tajik National University,***Institute of Chemical Kinetics and Combustion named after V.V.Voevodsky,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences*

This article is devoted to the topical issue of identifying the mechanisms of complex organic reactions using quantum-chemical calculations, which make it possible to calculate most of the characteristic parameters of medicinal compounds. According to the authors, this method is widely used in the interpretation of the obtained analytical and experimental results. The authors calculated the molecular structure of the hydrogen-bonded complex (dimer) of imidazole by the method of quantum-chemical calculation using the electron density functional B3LYP / 6-31G using the Gaussian software package. The work revealed the amphoteric properties of imidazole, since imidazole is both a donor and an acceptor of a proton with the possible formation of hydrogen bonds. The calculations performed by the authors can help in the interpretation of the IR spectra of heterocyclic azole compounds and in the calculation of the vibrational spectra of these compounds.

Key words: *quantum-chemical calculations, imidazole, medicinal compounds, dimers, molecular structure, heterocyclic compounds, amphoteric properties.*

УДК 624.042

Член-корреспондент НАН Таджикистана Д.Н.Низомов

**ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ***Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии
Национальной академии наук Таджикистана*

В статье излагаются вопросы, связанные с математическим моделированием трехмерных задач теории упругости методом граничных интегральных уравнений. На основе теоремы о взаимности работ получено уравнение, которое при предельном переходе к границе области позволяет получить граничные интегральные уравнения внешних и внутренних задач механики деформируемого твердого тела.

Ключевые слова: *граничные уравнения, теорема взаимности, внешняя задача, внутренняя задача, дополнительное состояние, начальное состояние, правило Эйнштейна, тензор напряжений, тензор 2-го ранга.*

В настоящее время в механике сплошной среды и строительной механике широко применяется метод граничных элементов, основой которого являются граничные интегральные уравнения. Отличительная особенность метода заключается в том, что он позволяет на единицу сокращать размерность задачи, а также решать задачи, связанные с бесконечной областью [1-7]. Эти положительные особенности, по сравнению с другими известными методами, позволяют моделировать задачу взаимодействия сооружения с полубесконечным основанием, что является актуальным в теории сейсмостойкости зданий и сооружений.

Рассматривается трехмерное упругое тело, ограниченное извне (внутренняя задача), и бесконечная среда, снабженная полостью или полостями (внешняя задача). Граничные условия определяются заданием перемещений точек поверхности (первая краевая задача) или задаются поверхностные силы (вторая краевая задача). Возможна и третья краевая задача – смешанная, где на одной части поверхности задается кинематическое, а на другой ее части – статическое краевое условие. Например, плотина соответствует смешанной краевой задаче, а подземные сооружения ГЭС, расположенные в горном массиве, соответствуют второй краевой задаче.

Определение 1. В неограниченном теле Ω^* с поверхностью S^* , расположенной в бесконечности, от действия единичной силы, приложенной в точке ξ и действующей по направлению ξ_i , в точке x по направлению x_j возникают перемещения и напряжения, которые обозначаются соответственно $u_{ij}^*(\xi, x)$ и $p_{ij}^*(\xi, x)$.

Определение 2. Ортогональные преобразования системы координат – это преобразования, при которых прямоугольная система координат остается прямоугольной, вращаясь вокруг начала координат.

Внутренняя задача. Решение трехмерных задач теории упругости в напряжениях для тела с внутренней областью Ω и поверхностью S сводится к интегрированию дифференциальных уравнений равновесия, которые в индексных обозначениях [8,9] записываются в виде

$$\sigma_{ji,i} + \gamma_j = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где σ_{ij}, γ_j – компоненты тензора напряжений (рис.1а) и объемных сил; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ – нормальные напряжения; $\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$, обозначаемые так же, как $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ – касательные напряжения, где первый индекс указывает номер координатной поверхности, а второй – направление, в котором действует напряжение. Девять компонент напряжений σ_{ij} в совокупности представляют величину, которая называется тензором напряжений. В уравнении (1) производные по пространственным координатам обозначены «запятой», а по повторяющимся индексам производится суммирование (правило А.Эйнштейна). Решение (1) должно удовлетворять статическим граничным условиям, которые представляются в виде

$$p_i = \sigma_{ji} n_j, \tag{2}$$

где p_j – компоненты напряжения, параллельные координатным осям и действующие на наклонной плоскости ABC (рис.1,б), σ_{ji} – компоненты тензора напряжений, причем σ_{jj} – нормальные к координатным площадкам напряжения, $\sigma_{ji} (j \neq i)$ – касательные напряжения, $n_j = \cos(n, x_j)$ – направляющие косинусы. Условия равновесия (2) бесконечно малого тетраэдра (рис.1,б), когда поверхность ABC совпадает с поверхностью тела, дают связь между тензором напряжений и внешними силами. Компоненты напряжений в изотропном теле должны удовлетворять, дополнительно к уравнениям равновесия (1) и граничным условиям (2), шести условиям совместности [8].

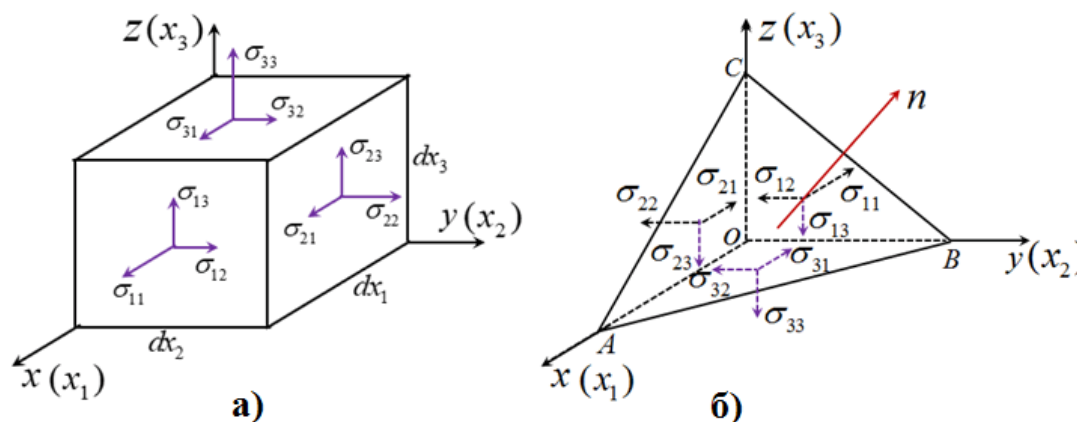


Рис. 1. Напряженное состояние элемента внутри тела (а) и на его поверхности (б).

При этом тензоры деформаций Коши и обобщенного закона Гука представляются в виде

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (4)$$

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$\mu = G, \quad \lambda = 2\nu\mu_1, \quad \mu_1 = G/(1-2\nu), \quad G = E/2(1+\nu),$$

где λ, μ – постоянные Ламе, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, G – модуль сдвига, δ_{ij} – символ Кронекера, C_{ijkl} – изотропный симметричный тензор упругих постоянных четвертого порядка (ранга). Формула (4) выражает обобщенный закон Гука для изотропного тела и определяет 6 компонентов тензора напряжений. Если (3) подставить в (4), а затем результат подставить в (1), то в итоге получим три уравнения второго порядка относительно трех компонент перемещения

$$\mu u_{j,ii} + \mu_1 u_{i,ij} + \gamma_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Уравнение (5) выражает условие равновесия тела через перемещения и нет необходимости в уравнениях совместности деформаций. Перемещения, найденные из решения (5), должны удовлетворять граничным условиям. После того как найдены компоненты перемещений u_j , из выражения (3) определяются деформации, а затем с использованием (4) вычисляются напряжения.

Наряду с (5) рассмотрим уравнение

$$\mu u_{j,ii}^* + \mu_1 u_{i,ij}^* + \gamma_j^* = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

которое описывает равновесное состояние неограниченного изотропного тела с внутренней областью Ω^* и поверхность S^* от действия единичных сил

$$\gamma_j^* = \delta(\xi, x)e_j,$$

где $\delta(\xi, x)$ – дельта-функция Дирака, e_j – единичный вектор. Решение (6), которое называется фундаментальным решением Кельвина [9-11], представляется в виде

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu r} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right], \quad (7)$$

а составляющие компоненты тензора напряжений на наклонной поверхности будут равны:

$$p_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3\frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j - \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right) \right\}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \partial r / \partial x_i &= \cos \beta_i = m_i, \quad n_i = \cos \alpha_i, \\ \frac{\partial r}{\partial n} &= \frac{\partial r}{\partial x_j} n_j = \frac{\partial r}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial r}{\partial x_3} n_3 = \\ &= \cos \beta_1 \cos \alpha_1 + \cos \beta_2 \cos \alpha_2 + \cos \beta_3 \cos \alpha_3 = \cos \omega, \\ \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j - \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i &= m_i n_j - m_j n_i. \end{aligned}$$

Здесь: $|r| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ – расстояние между точкой ξ , к которой прикладывается единичная сосредоточенная сила, и точкой x пространства; n_i – направляющие косинусы углов соответственно радиус-вектора r и нормали n с осями x_i ; β_i – углы наклона радиус-вектора r к осям x_i в точке ξ ; ω – угол наклона между радиус-вектором r и нормалью n в точке поверхности $x(x_1, x_2, x_3)$.

Погружая конечную область Ω с поверхностью S в пространство Ω^* , исходя из теоремы о взаимности работ, можно написать

$$\begin{aligned} \int_S p_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) ds(x) + \int_{\Omega} \gamma_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega(x) &= \\ = \int_S p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) ds(x) + \int_{\Omega} \delta(\xi, x) e_j u_j(x) d\Omega(x), \end{aligned}$$

откуда, с учетом свойства дельта-функция Дирака

$$\int_{\Omega} \delta(\xi, x) e_j u_j(x) d\Omega(x) = u_j(\xi), \quad \xi \in \Omega,$$

получим следующую формулу для определения компонентов перемещения

$$u_j(\xi) = \int_S p_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) ds(x) - \int_S u_j(x) p_{ij}^*(\xi, x) ds(x) + \int_{\Omega} \gamma_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega(x). \tag{9}$$

Формула (9), известная также, как тождество Кельвина-Сомильяна [11-14], позволяет определить перемещение $u_j(\xi)$ в точке $\xi \in \Omega$ при известных значениях перемещения $u_j(x)$, нагрузки $p_j(x)$ на S и объемных сил γ_j на Ω .

При предельном переходе, когда точка ξ устремится к границе S , из (9) можно получить граничные интегральные уравнения. При перемещении точки ξ к границе (рис.2,а), интегралы по поверхности могут быть представлены в виде

$$\int_{S_0} p_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) dS(x) = \int_{S-S_0} p_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) dS(x) + \int_{S_0^*} p_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) dS(x), \tag{10}$$

$$\int_{S_o} u_j(x) p_{ij}^*(\xi, x) dS(x) = \int_{S-S_\varepsilon} u_j(x) p_{ij}^*(\xi, x) dS(x) + \int_{S_\varepsilon^*} u_j(x) p_{ij}^*(\xi, x) dS(x), \quad (11)$$

$$S_o = S - S_\varepsilon + S_\varepsilon^*.$$

Если для точки ξ использовать сферическую систему координат (рис.2,б), то связь с декартовыми координатами описывается формулами

$$x_1 = \varepsilon \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = \varepsilon \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = \varepsilon \cos \theta,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi / 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

где θ – угол между радиус-вектором r точки ξ и осью x_3 , φ – угол между проекцией радиус-вектора на плоскость x_1x_2 и осью x_1 , тогда элемент $dS(x)$ на сферической поверхности S_ε^* (рис.2,б) определяется по формуле

$$dS(x) = \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (12)$$

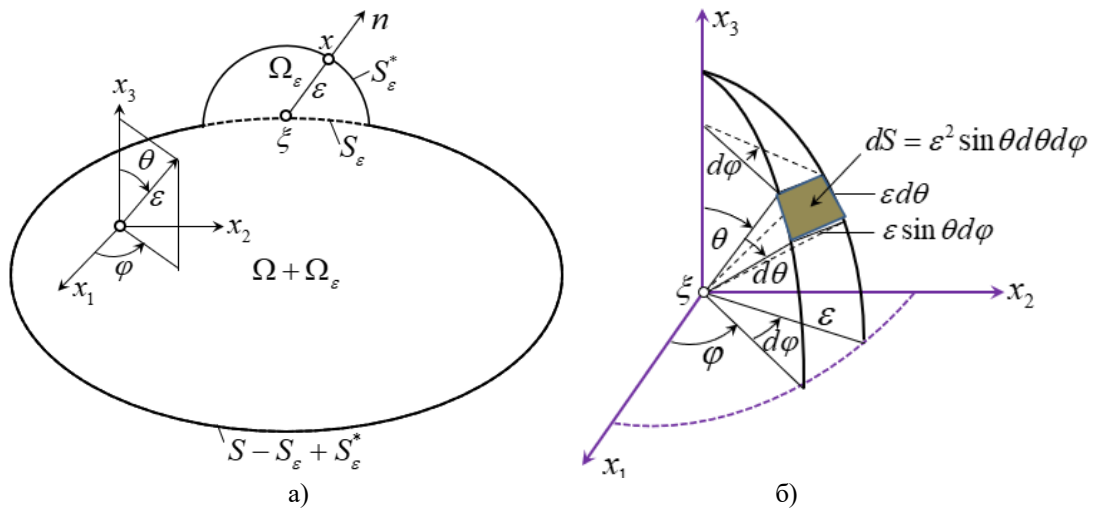


Рис. 2. Особая точка и сферическая поверхность.

Интегралы в правой части (10) при $\varepsilon \rightarrow 0$, с учетом (7) и (12), соответственно будут равны

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^*} p_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_o} p_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) dS(x) = \int_S p_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) dS(x).$$

Следовательно, в обычном смысле понимается первый интеграл в правой части (9).

Прежде чем приступить к рассмотрению второго интеграла в правой части (9), который представлен в виде (11), опишем геометрические параметры сферической поверхности особой точки:

$$m_1 = \cos \beta_1 = x_1 / r = r \sin \theta \cos \varphi / r = \sin \theta \cos \varphi = \cos \alpha_1 = n_1,$$

$$m_2 = \cos \beta_2 = x_2 / r = r \sin \theta \sin \varphi / r = \sin \theta \sin \varphi = \cos \alpha_2 = n_2,$$

$$m_3 = \cos \beta_3 = x_3 / r = r \cos \theta / r = \cos \theta = \cos \alpha_3 = n_3,$$
(13)

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j - \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i = m_i n_j - m_j n_i = 0.$$

$$\cos \omega = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Второй интеграл в правой части (11) для гладкой поверхности при $\varepsilon \rightarrow 0$ с учетом (8) и (13) представляется в виде

$$I_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^*} u_j(x) p_{ij}^*(\xi, x) dS(x) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u_j(x)}{8\pi(1-\nu)} \int_{S_\varepsilon^*} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3m_i m_j] \frac{1}{\varepsilon^2} \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= -u_j(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} b(c \delta_{ij} + 3m_i m_j) \sin \theta d\theta,$$
(14)

$$b = 1/8\pi(1-\nu), c = (1-2\nu).$$

Например, при $i, j = 1$ интегралы в (14) будут равны

$$\int_0^{\pi/2} b(c + 3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \sin \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} bc \sin \theta d\theta + 3b \cos^2 \varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta =$$

$$= -bc \cdot \cos \theta \Big|_0^{\pi/2} + b \cos^2 \varphi \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = bc + 2b \cos^2 \varphi,$$

$$\int_0^{2\pi} b(c + 2 \cos^2 \varphi) d\varphi = b \left(c\varphi + \frac{2\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2bc\pi + 2b\pi = \frac{2(1-2\nu)\pi}{8\pi(1-\nu)} + \frac{2\pi}{8\pi(1-\nu)} = \frac{4(1-\nu)}{8(1-\nu)} = \frac{1}{2}.$$

Откуда следует, что второй интеграл в правой части (11) при $i, j = 1$ приводит к следующему результату

$$I_{11} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^*} u_1(x) p_{11}^*(\xi, x) \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -0.5u_1.$$

Аналогичный результат мы получаем при $i, j = 2$ и $i, j = 3$

$$I_{22} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^*} u_2(x) p_{22}^*(\xi, x) \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -0.5u_2,$$

$$I_{33} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^*} u_3(x) p_{33}^*(\xi, x) \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -0.5u_3.$$

При $i \neq j$ интеграл (14) для гладкой поверхности приводит к результату, равному нулю. Это можно показать на примере, когда $i = 1, j = 2$, где

$$p_{12}^*(\xi, x) = 3b \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta / \varepsilon^2, \quad \cos \omega = 1,$$

и интеграл (14) приобретает вид

$$\begin{aligned} I_{12} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^*} u_1(x) p_{12}^*(\xi, x) dS(x) = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_1(x) \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} 3b \sin^3 \theta d\theta = -2bu_1 \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при расположении точки ξ на поверхности S , второй интеграл в правой части (11) понимается в смысле главного значения по Коши. Таким образом, интегралы в правой части (11) с учетом изложенного представляются в виде

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S-S_\varepsilon} u_j(x) p_{ij}^*(\xi, x) dS(x) &= \int_S u_j(x) p_{ij}^*(\xi, x) dS(x), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^*} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) dS(x) &= -0.5\delta_{ij} u_j(\xi), \end{aligned}$$

и уравнение (9) преобразуется в граничное интегральное уравнение

$$c_{ij} u_j(\xi) + \int_S u_j(x) p_{ij}^*(\xi, x) ds(x) = \int_S p_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) ds(x) + \int_\Omega \gamma_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega(x). \quad (15)$$

$$c_{ij} = (1-0.5)\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

В случае внутренней смешанной задачи искомыми функциями в (15) являются $u_j(x)$ и $p_j(x)$. Уравнение (15), записанное в тензорных компонентах, можно представить в матричной форме

$$\mathbf{C}\mathbf{U} + \int_S \mathbf{P}^* \mathbf{U} dS = \int_S \mathbf{U}^* \mathbf{P} dS + \int_\Omega \mathbf{U}^* \mathbf{\Gamma} d\Omega, \quad (16)$$

$$\mathbf{U} = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T, \quad \mathbf{P} = (p_1 \ p_2 \ p_3)^T, \quad \mathbf{\Gamma} = (\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3)^T$$

$$\mathbf{U}^* = [u_{ij}^*], \quad \mathbf{P}^* = [p_{ij}^*], \quad \mathbf{C} = \text{diag}(0.5 \ 0.5 \ 0.5),$$

U, P, Γ – векторы-столбцы перемещений, поверхностных напряжений и объемных сил соответственно, U^*, P^* – квадратные матрицы 3-го порядка фундаментальных перемещений и напряжений.

Внешняя задача. Пусть бесконечная область находится в начальном напряженном состоянии. Начальное напряженное состояние нарушается, после того как мы удаляем из бесконечной области тело Ω с контуром S . В результате такой операции в бесконечной области с полостью возникают дополнительные перемещения и напряжения. Если бесконечная область Ω_∞ находится в начальном напряженном состоянии, где заданы компоненты тензора напряжений σ_{ij}^0 , соответствующие усилия в произвольной плоскости определяются выражением

$$p_i^0 = \sigma_{ij}^0 n_j, \tag{17}$$

где n_j – направляющие косинусы нормали n к наклонной плоскости (рис.1,б). Направление нормали n на S считается положительным, если она направлена во внутрь полости. При удалении из бесконечной области Ω_∞ конечную область Ω с поверхностью S (рис.3), в бесконечной среде возникают дополнительные перемещения и напряжения.

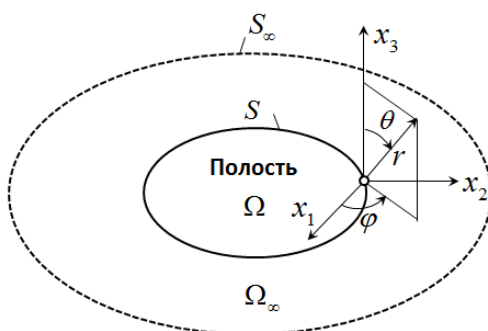


Рис. 3. К выводу граничных уравнений внешней задачи.

Окончательные значения напряжений и перемещений в произвольной точке поверхности определяется суммированием начального и дополнительного состояний

$$q_i = p_i^0 + \bar{p}_i, u_i = u_i^0 + \bar{u}_i, \tag{18}$$

где \bar{p}_i, \bar{u}_i – компоненты дополнительных напряжений и перемещений. Из (18) следует, что компоненты напряжений и перемещений в дополнительном состоянии будут равны

$$\bar{p}_i = q_i - \sigma_{ij}^0 n_j, \bar{u}_i = u_i - u_i^0. \tag{19}$$

В частности, если контур полости остается свободным от внешнего воздействия, где $q_i = 0$, то дополнительные напряжения записываются в виде

$$\bar{p}_i = -\sigma_{ij}^0 n_j. \tag{20}$$

При этом полагается, что начальные перемещения равны нулю и $\bar{u}_i = u_i$. Таким образом, анализ напряженно-деформированного состояния второй внешней краевой задачи (бесконечная область с полостью) сводится к расчету на действие дополнительных напряжений (20), приложенных на внутренней поверхности S полости. Окончательный результат получим суммированием результатов начальных и дополнительных состояний

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^0, \quad u_i = \bar{u}_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Для внешней задачи, где задана бесконечная область Ω_∞ с поверхностью S_∞ и из неё удалена конечная область Ω с поверхностью S (рис.3), при выполнении условия регулярности на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_\infty} (\mathbf{U}^* \mathbf{P} - \mathbf{P}^* \mathbf{U}) dS = \mathbf{0}, \quad (21)$$

уравнения (16) преобразуются в интегральное уравнение, которое записывается в виде [1-3, 7]

$$\mathbf{C}^* \mathbf{U} + \int_S \mathbf{P}^* \mathbf{U} dS = \int_S \mathbf{U}^* \mathbf{P} dS, \quad (22)$$

$$\mathbf{C}^* = -diag(0.5 \ 0.5 \ 0.5).$$

Из условия (21) следует, что для обращения в нуль каждого интеграла по поверхности необходимо выполнение условий $\mathbf{U} = O(1/r)$ и $\mathbf{P} = O(1/r^2)$ при $r \rightarrow \infty$. Если полагать, что компоненты перемещений и напряжений поведут себя как фундаментальные решения (7) и (8), то при $r \rightarrow \infty$ оба слагаемые в (21) стремятся к нулю независимо друг от друга. Следует отметить, что при использовании (22) обход контура выполняется против часовой стрелки, также как для решения внутренней задачи на основе (16). Уравнение (22) с учетом (19) представляется в виде

$$\mathbf{C}^* \mathbf{U} + \int_S \mathbf{P}^* \mathbf{U} dS = \int_S \mathbf{U}^* \mathbf{q} dS - \boldsymbol{\sigma}^0 \int_S \mathbf{U}^* \mathbf{n} dS, \quad (23)$$

где \mathbf{q} – вектор нагрузки, заданной на контуре полости, $\boldsymbol{\sigma}^0$ – матрица тензора заданных начальных напряжений, \mathbf{n} – вектор направляющих косинусов нормали, направленная во внутрь области.

Напряженное состояние. Из решения уравнений (16) и (23) определяются граничные параметры, соответствующие внутренней и внешней задачам. На следующем этапе по формуле (9) определяются перемещения, а затем с использованием (3) и (4) вычисляются компоненты тензора деформации и напряжений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \varepsilon_{kk} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right),$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij}. \tag{24}$$

Следует отметить, что при ортогональном преобразовании системы координат (рис.4,а), где $a_{ij} = \cos(x_i^* \wedge x_j)$ – косинус угла между осями i и j в новой и старой системах координат соответственно, тензор напряжений представляется в виде

$$\sigma_{ij}^* = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}, \quad (i, j, l, k = 1, 2, 3), \tag{25}$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование. Например, нормальное напряжение σ_{22} в новой системе координат (рис.4,б) записывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^* &= a_{2k} a_{2l} \sigma_{kl} = a_{21} a_{21} \sigma_{11} + a_{21} a_{22} \sigma_{12} + a_{21} a_{23} \sigma_{13} + \\ &+ a_{22} a_{21} \sigma_{21} + a_{22} a_{22} \sigma_{22} + a_{22} a_{23} \sigma_{23} + \\ &+ a_{23} a_{21} \sigma_{31} + a_{23} a_{22} \sigma_{32} + a_{23} a_{23} \sigma_{33}, \end{aligned}$$

где компоненты σ_{ij} в правой части считаются известными (24) или заданными.

Формула (25) в матричной форме

$$\sigma^* = \mathbf{A} \sigma \mathbf{A}^T,$$

где \mathbf{A} – матрица направляющих косинусов (3×3),

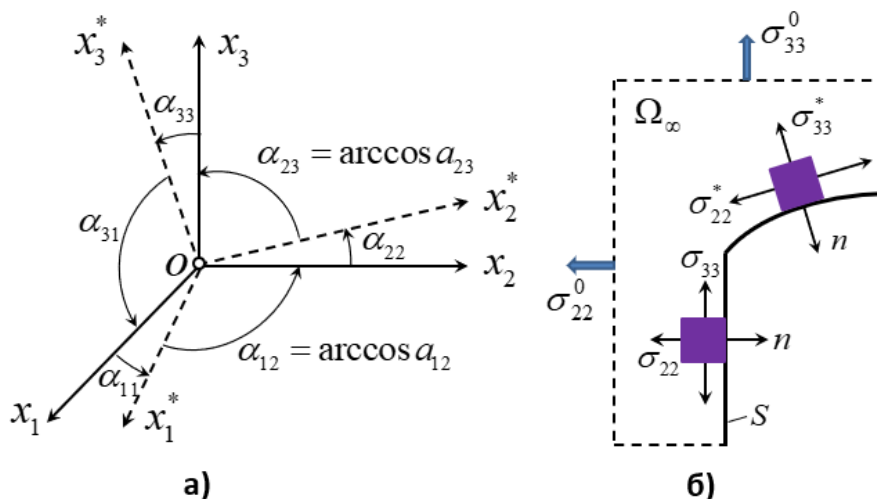


Рис. 4. Ортогональное преобразование системы координат-а) и напряженное состояние на контуре полости в бесконечном пространстве-б).

Выводы

Полученные граничные интегральные уравнения (16) и (23), соответственно для внутренних и внешних задач, позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние различных трехмерных систем в виде надземных и подземных сооружений. Особенность этих уравнений заключается в том, что искомыми функциями в них являются компоненты перемещений или напряжений, в зави-

симости от постановки задачи, на контуре рассматриваемой области. Для решения этих уравнений можно использовать методы численного интегрирования.

Поступило 16.02.2021

ЛИТЕРАТУРА

1. Низомов Д.Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. – М.: Изд-во АСВ, 2000, 282 с.
2. Низомов Д.Н. Решение пространственных задач теории упругости методом граничных уравнений. – Тр. межд. конф. «Развитие горных регионов Центральной Азии в XXI веке». – Хорог, 2001, с. 211-212.
3. Низомов Д.Н. Параметрическое представление поверхностей для решения пространственных задач теории упругости методом граничных уравнений. – Вестник Хорогского университета, 2002, серия 1, №5, с.133-139.
4. Nizomov J.N. Stress Buildup in the Subsurface Structures of the Rogun Hydroelectric Power Plant. – Dushanbe, 2005, 114 p.
5. Низомов Д.Н. Численное моделирование задачи взаимодействия сооружения с основанием. – ДАН РТ, 2012, т.55, №9, с. 733-741.
6. Низомов Д.Н., Ходжибоев О.А., Ходжибоев А.А. Граничные уравнения взаимодействия сооружения с упругим полупространством. – ДАН РТ, 2016, т.59, №5 – 6, с. 229-235.
7. Низомов Д.Н., Ходжибоев О.А., Ходжибоев А.А. Метод граничных уравнений в решении двумерных задач теории упругости. – М.; Изд-во АСВ, 2020. – 414 с.
8. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975, 575 с.
9. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987, 524 с.
10. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТ Издательство НКТБ СССР, 1935, 674 с.
11. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 492 с.
12. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975, 872 с.
13. Низомов Д.Н. Методы граничных уравнений и сплайн-аппроксимаций в решении статических и динамических задач строительной механики: Автореф. дисс. д.т.н. – М.: МГСУ, 1999, 40 с.
14. Hartmann F. Computing the C-matrix in non-smooth boundary points, in New Developments in Boundary Element Methods (C.A.Brebbia, Ed.), London, Butterworths, 1983, pp.367-379.

Д.Н.Низомов

МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРАЛИИ КАНОРИИ МАСЪАЛАҲОИ СЕЧЕНАКАИ НАЗАРИЯИ ЭЛАСТИКӢ

Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи АМИТ

Дар мақола масъалаҳои моделкунонии математикии масъалаҳои сеченакаи назарияи эластикӣ бо истифода аз методи муодилаҳои интегралӣ канорӣ мақсади муҳокима қарор гирифта шудааст. Дар асоси теоремаи дутарафагии корҳо муодила пайдо карда шудааст, ки дар натиҷаи гузариши ҳаддӣ

имкон медиҳад муодилаҳои интегралӣ канорӣ масъалаҳои дохилӣ ва берунӣ механикаи ҷисмҳои деформатсияшаванда ҳосил карда шавад.

Калимаҳои калидӣ: муодилаҳои канорӣ, теоремаи мутақобилӣ, масъалаи берунӣ, масъалаи дохилӣ, ҳолати иловагӣ, ҳолати аввала, қоидаи Эйнштейн, тензори шиддат, тензори дараҷаи дуюм.

J.N.Nizomov

BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

*Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology,
National Academy of Sciences of Tajikistan*

The article presents issues related to the mathematical modeling of three-dimensional problems of the theory of elasticity by the method of boundary integral equations. On the basis of the theorem on the reciprocity of works, an equation is obtained, which, upon passing to the limit to the boundary of the domain, allows one to obtain boundary integral equations of external and internal problems of mechanics of a deformable solid.

Key words: boundary equations, reciprocity theorem, external problem, internal problem, additional state, initial state, Einstein's rule, stress tensor, 2nd rank tensor.

УДК 621.039-661.879.1

Академик НАН Таджикистана У.М.Мирсаидов, Б.Б.Баротов, К.О.Бобоев,

И.Мирсаидзода (И.У.Мирсаидов), Дж.Н.Эшов

ВЫДЕЛЕНИЕ УРАНОВЫХ КОНЦЕНТРАТОВ ИЗ РАССОЛОВ, ДРЕНАЖНЫХ И ТЕХНИЧЕСКИХ ВОД*Агентство по ядерной и радиационной безопасности НАН Таджикистана*

В статье приведены физико-химические основы выделения урановых концентратов из рассола озера Сасык-Куль, из технических и дренажных вод Таджикистана. Предложена принципиальная технологическая схема выделения урана из урансодержащих вод.

Ключевые слова: *рассол, урансодержащие воды, урановый концентрат, дренажные и шахтные воды.*

Урановые месторождения Таджикистана сыграли необычайно важную роль в практическом решении возникшей в послевоенные годы в СССР проблемы радиоактивного сырья. В Согдийской области за 1945-1991 гг. накопилось более 55 млн. т урановых отходов. Суммарная активность отходов по разным оценкам составляет примерно 240-285 ТБк. Общее количество отходов в отвалах и хвостохранилищах, которые расположены в окрестностях гидromеталлургических заводов и местах кучного выщелачивания, оценивается более чем в 170 млн. т.

В разные годы намечался фронт исследовательских работ по разработке методов извлечения урана из хвостохранилищ. Изучение возможности и экономической целесообразности переработки отходов прошлых лет требуют всесторонней проработки, что связано не только с извлечением урана, но и безопасной добычей урана из отвалов хвостохранилищ и из урансодержащих технических и дренажных вод.

Современные радиологические и экологические проблемы в Таджикистане являются наследием интенсивно развиваемых ранее отраслей промышленности по добыче и переработке урана бывшего СССР. После распада Советского Союза разработки большинства месторождений урансодержащих руд в Таджикистане были завершены.

Представляет интерес выделение урана из шахтных и технических вод месторождения Киик-Тал и г. Истиклол Республики Таджикистан. Важное значение имеет выделение урана из рапы озера Сасык-Куль, где среднее содержание урана составляет 40 мг/л.

Шахтные воды Киик-Тала содержат 25 мг/л урана и безвозвратно дренируются в землю, загрязняя почву. При эффективной технологии сорбции урана из этих вод можно получить 1-2 т/год закиси-оксида урана [1, 2].

Технические воды г. Истиклола содержат от 10 до 70 мг/л урана, которые близки к промышленной добыче урана.

Адрес для корреспонденции: Мирсаидов Улмас Мирсаидович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по ядерной и радиационной безопасности НАНТ. E-mail: ulmas2005@mail.ru

Это обстоятельство актуализирует проблему гармонизации программы мониторинга окружающей среды, а также необходимость разработки эффективной технологии переработки отходов и технических вод, содержащих уран.

В целом в г. Истиклоле накоплено уникальное урановое наследие Советского Союза, которое дает возможность постановки ряда научно-исследовательских работ.

Разнообразие уранового наследия г. Истиклола: хвостохранилищ, забалансовых руд, отвалов, отходов после кучного выщелачивания («Фабрика бедных руд» – ФБР), шахтных и дренажных вод вынуждает принять экстренные меры по решению экологических проблем города.

Цель настоящей работы – выделение урановых концентратов из шахтных, технических вод и рассолов рапы озера Сасык-Куль.

Химический анализ урансодержащих вод проводили различными методами, в том числе методом абсорбции гамма-излучения, весовым и титриметрическим методами, разработанными в Агентстве по ядерной и радиационной безопасности НАН Таджикистана.

Рентгенофазовый анализ (РФА) использовали для определения фаз после выпаривания рассола озера Сасык-Куль. Для ДТА использовали аппарат ДРОН-3 с программным обеспечением.

Извлечение урана из рассола озера Сасык-Куль. В рассоле озера Сасык-Куль содержится 40 мг/л урана, рН-9.2 (рассол был представлен сотрудниками Главного геологического управления при Президенте Республики Таджикистан).

Методика выделения урана из рассола разработана в работе [3].

На рис.1 приведены спектры остатка соли после выпаривания.

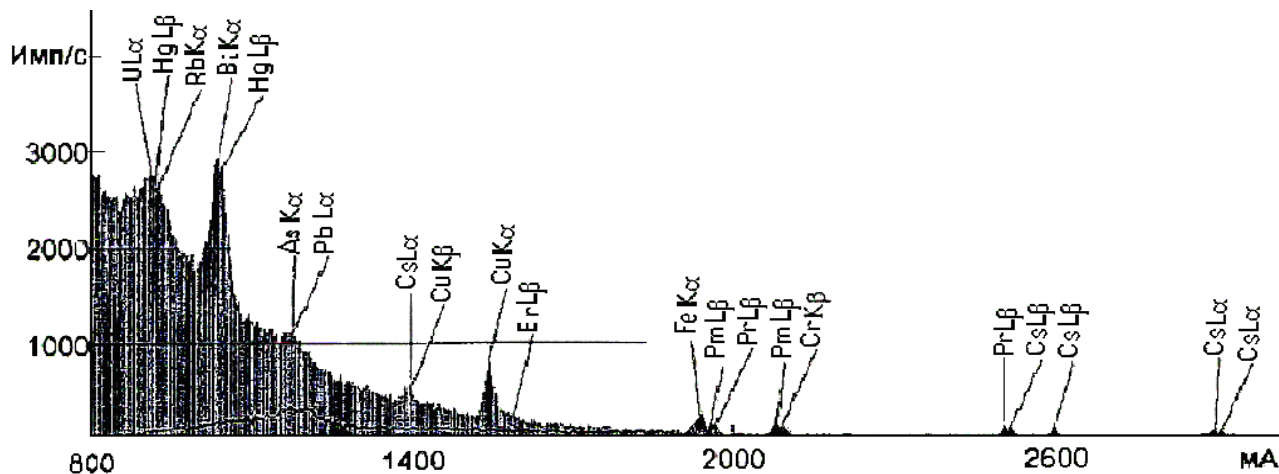


Рис. 1. Спектр остатка соли после выпаривания.

Разработана принципиальная технологическая схема выделения урана из рассола озера Сасык-Куль (рис.2).

Обобщая данные работ [4-6] по извлечению урановых концентратов из технических, шахтных и дренажных вод, составлена таблица, где видно, что максимальные количества урана содержатся в рапе озера Сасык-Куль и в дренажных водах Киик-Тал, которые являются перспективными для промышленного выделения урана.

На рис.3 представлена гистограмма степени извлечения урана из различных дренажных вод.

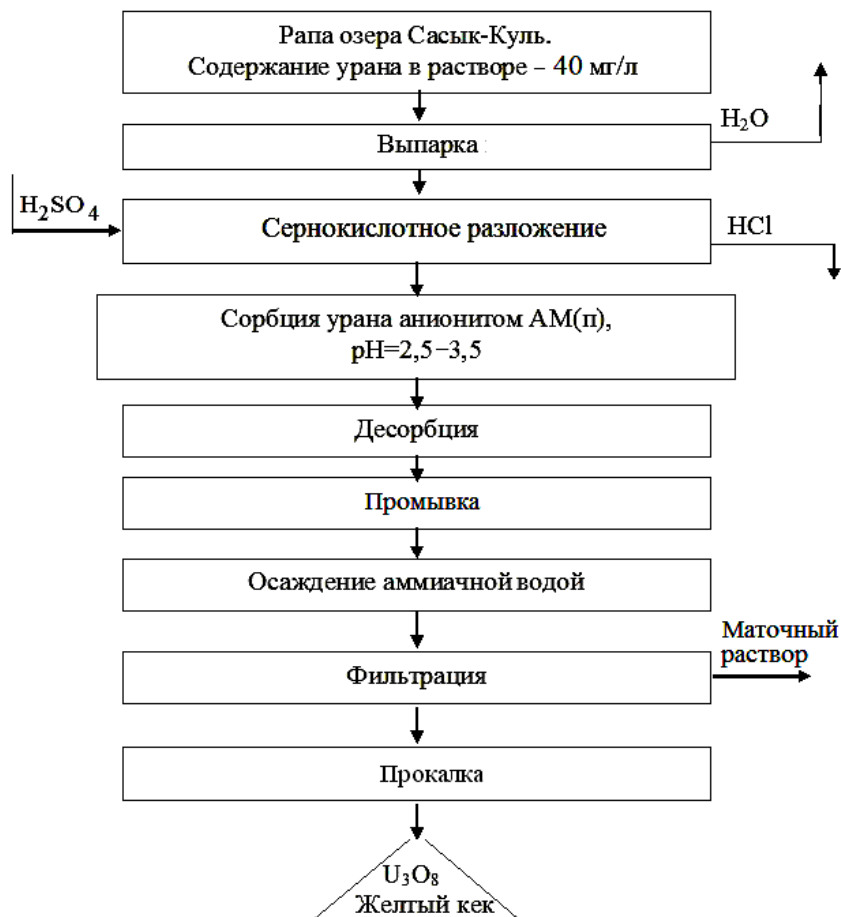


Рис. 2. Принципиальная технологическая схема выделения уранового концентрата из рапы озера Сасык-Куль.

Таблица

Характеристика урансодержащих вод и сорбция урана

№	Тип технических вод	Содержание урана, мг/л	Сорбент	Степень извлечения урана, %
1	Озеро Сасык-Куль	40	АМ(п)	85
2	Табошар (Хвостохранилище 1-2)	10	АМ(п), гематит и пиролюзит	90
3	Табошар (Штольня №6)	2	АМ(п)	98.2
4	Киик-Тал	25	Скорлупа урюка	87
5	Киик-Тал	25	АМ(п)	96

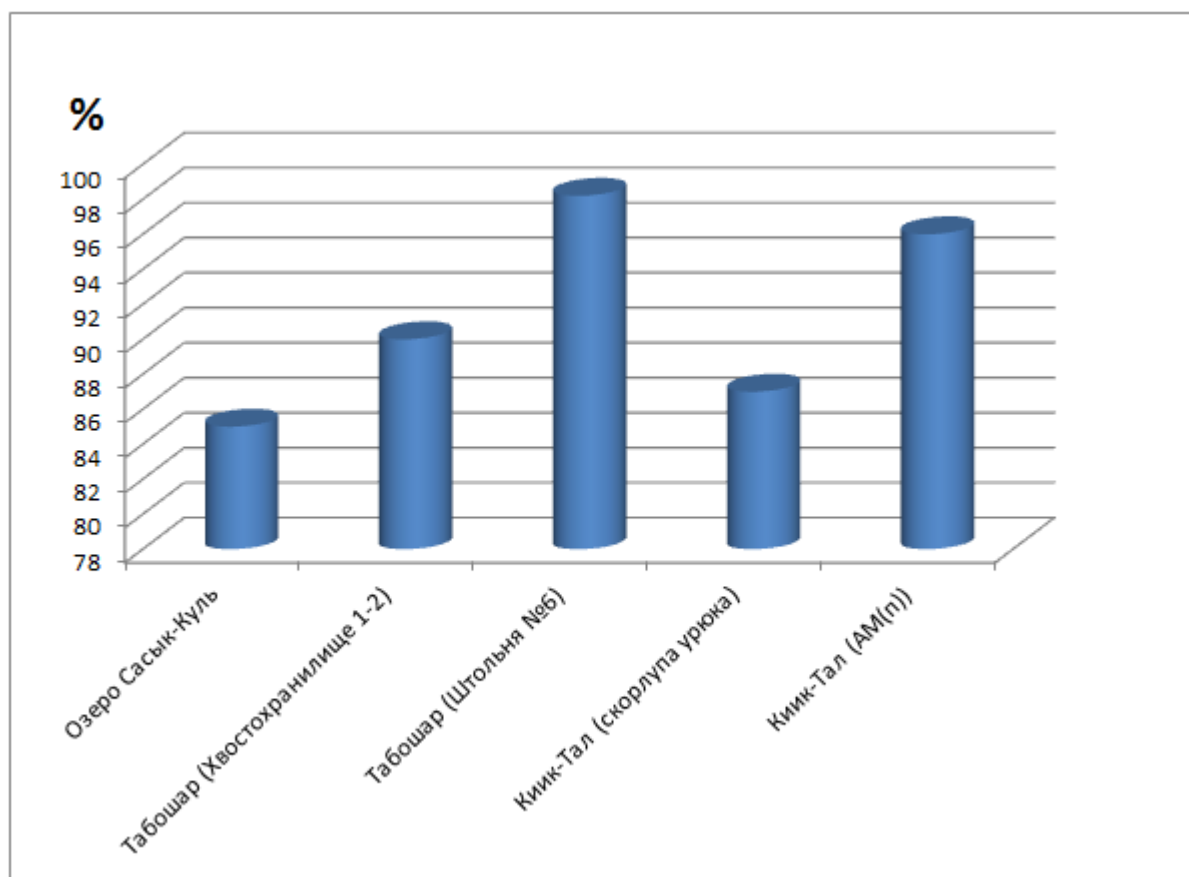


Рис. 3. Степени извлечения урана из различных урансодержащих вод Таджикистана.

В ы в о д ы

Физико-химическими методами определён химический состав урансодержащих вод и показана перспективность переработки уранового рассола озера Сасык-Куль с выделением уранового концентрата. Найдены оптимальные параметры сорбции урана из шахтных и дренажных урансодержащих вод с использованием сорбента из местных сырьевых материалов.

Поступило 23.01.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Хакимов Н., Назаров Х.М., Мирсаидов И.У. Физико-химические и технологические основы получения урановых концентратов из отходов гидрометаллургических заводов и технических вод. – Душанбе, 2012, 120 с.
2. Khakimov N., Nazarov Kh.M., Mirsaidov I.U. Physico-Chemical and Manufacturing Basis for Uranium Concentrates Production from Wastes of Hydrometallurgical Plants and Technical waters. – Dushanbe, 2012, 120 p.
3. Мирсаидов И.У. Физико-химические основы получения урановых концентратов из отходов и сырьевых материалов. – Душанбе, 2012, 120 с.
4. Хакимов Н., Мирсаидов И.У., Ахмедов М.З. Очистка шахтных и дренажных вод от урана. – Республ. науч.-практ. конф. «Современные проблемы химии, химической технологии и металлургии». – Душанбе, 2009, с.238-239.

5. Мирсаидов У., Хакимов Н. О возможности добычи урана из хвостохранилищ и шахтных вод месторождения Киик-Тал в Таджикистане. – ДАН РТ, 2005, т.48, №1, с.44-46.
6. Мирсаидов У.М., Назаров Х.М., Ходжаев С.К., Рахматов Н.Н. Особенности выделения урановых концентратов из руд и урансодержащих вод Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2019, 191 с.

У.М.Мирсаидов, Б.Б.Баротов, К.О.Бобоев, И.Мирсаидзода, Ч.Н.Эшов

ЧУДОКУНИИ КОНСЕНТРАТҲОИ УРАН АЗ ОБҲОИ НАМАҚДОР, ДРЕНАЖӢ ВА ТЕХНИКӢ

Агентии амнияти ядрои ва радиатсионии АМИТ

Дар мақола асосҳои физикӣ-кимиёвӣ ҷудокунии концентратҳои уран аз обҳои намақдори кӯли Сасиқ-Кӯл ва аз обҳои техникӣ ва дренажии Тоҷикистон оварда шудаанд. Нақшаи асосии технологияи ҷудо кардани уран аз обҳои урандор пешниҳод карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: оби намақдор, обҳои урандор, концентрати уран, обҳои дренажӣ.

U.M.Mirsaidov, B.B.Barotov, K.O.Boboev, I.Mirsaidzoda, J.N.Eshov

URANIUM CONCENTRATES SEPARATION FROM BRINE, DRAINAGE AND PROCESS WATERS

Nuclear and radiation safety agency NAST

The article presents the physicochemical bases of uranium concentrates separation from the Sasyk-Kul lake brine and from the Tajikistan technical and drainage waters. The basic technological scheme for uranium separation from uranium-containing waters has been proposed.

Key words: brine, uranium-containing waters, uranium concentrate, drainage and mine waters.

УДК 691.32

А.Шарифов, З.Х.Гайбуллаева*, Д.С.Неъматзода, З.А.Гозиев

**КОРРОЗИЯ ГИДРОТЕХНИЧЕСКОГО БЕТОНА И ПРИЧИНЫ ЕЕ
ПРОТЕКАНИЯ***Дангаринский государственный университет,***Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими**(Представлено академиком НАНТ И.Н. Ганиевым 23.11.2020 г.)*

Статья посвящена процессам коррозии гидротехнического бетона с выяснением причин их протекания. Дано понятие коррозии бетона и указаны её разновидности. Анализирован состав цементов на предмет стойкости минералов клинкера в агрессивных средах. Указано, что наиболее легко растворяемым в воде продуктом гидратации минералов цемента является гидрат оксида кальция $\text{Ca}(\text{OH})_2$ и от его содержания зависит коррозионностойкость гидросиликатов и других соединений состава цементного камня бетона в агрессивной среде. Проанализирован процесс порообразования и формирования структуры цементного камня, контракции минералов клинкера при гидратации. Приведена зависимость коэффициента фильтрации воды через структуру бетона от параметров его водопоглощения. Указаны характеристики агрессивных сред для гидротехнического бетона.

Ключевые слова: гидротехнический бетон, коррозия бетона, агрессивная среда, структура цементного камня, контракция минералов, коэффициент фильтрации воды, прочность, стойкость.

В Таджикистане с каждым годом расширяется строительство автомобильных дорог и мостов, тоннелей, каналов и ирригационных сооружений, проводятся берегоукрепительные мероприятия, сравнительно быстрыми темпами возводятся сооружения Рогунской ГЭС и малые ГЭС во многих регионах республики. Во всех этих сооружениях одним из основных применяемых материалов является гидротехнический бетон. Гидротехнический бетон по составу, техническим характеристикам и предъявляемым к ним требованиям отличается от обычного тяжелого бетона, поскольку он применяется в сооружениях, которые эксплуатируются в очень сложных условиях, на них действуют не только силовой напор воды, но и различные растворённые в ней вещества, которые являются отчасти агрессивными по отношению к продуктам твердения минералов цемента в структуре бетона. Под напором вода может проникать в структуру бетона, если она проницаема и в сочетаниях с растворёнными в ней вещества вступать в реакцию с продуктами цементного камня с образованием малопрочных соединений, ослабляющих структуру бетона, что приводит к потере его прочности и преждевременному разрушению строительного сооружения.

Разрушение цементного камня под влиянием воды и растворённых в ней веществ обобщённо называется коррозией бетона, и она ежегодно приносит огромный экономический ущерб экономике любой страны. Предотвращение коррозии бетона в гидротехнических сооружениях – это прежде все-

Адрес для корреспонденции: Гайбуллаева Зумрат Хабибовна. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. акад. Раджабовых, 10, Таджикский технический университет. E-mail: zumratihabib@rambler.ru

го повышение их надёжности эксплуатации и увеличения долговечности сроков службы при одновременной экономии материальных ценностей, энергии и времени для их ремонта и восстановления до работоспособного состояния.

Процессам коррозии бетона посвящены многочисленные исследования, результаты некоторых из них обобщены в известных монографиях и учебниках [1-6] и в ряде научных публикаций [7-10]. Ведутся также широкие исследования по разработке методов и способов предотвращения коррозии бетона в строительных конструкциях и сооружениях, результаты некоторых исследований изложены в работах [11-16].

Данная статья посвящена причинам возникновения коррозии бетона и характеристики факторов, отрицательно влияющих на стойкость бетона в агрессивных средах, с целью разработки эффективных способов их предотвращения для обеспечения долговечности гидротехнических сооружений в строительном комплексе республики.

Коррозия бетона и её определение

Коррозия бетона — это отрицательный процесс воздействия среды на компоненты цементного камня, приводящий к их разрушению. Его обычно подразделяют на физические составляющие (когда вода или другая агрессивная среда, смывая поверхность бетона, проникает в его поры и фильтруется через толщину изделия) и химические составляющие (когда проникающая в поры вода и растворённые в ней вещества вступают в химические реакции с веществами, образовавшимися при гидратации и твердении минералов цемента, уносят их с собой при фильтрации через толщину изделия или создают крупнообъёмные соединения, такие как гипс $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, этрингит $3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{CaSO}_4 \cdot 32\text{H}_2\text{O}$, таумазит $\text{CaSiO}_3 \cdot \text{CaCO}_3 \cdot \text{CaSO}_4 \cdot 32\text{H}_2\text{O}$ и другие кристаллогидраты, которые накапливаются в порах цементного камня и создают внутренние напряжения). В обоих случаях результатом является разрушение структуры бетона и потери его прочности.

Физические процессы коррозии бетона зависят в первую очередь от интенсивности и продолжительности воздействия агрессивной среды на бетонные изделия и конструкции, от строения структуры бетона, его пористости, характера распределения пор и других факторов. В то же время протекание химических процессов коррозии бетона происходит при непосредственном контакте агрессивной среды с продуктами твердения цементного камня и, следовательно, их протекание во многом определяется состоянием и структурой бетона, а также характером течения жидкости в порах бетона и других физических факторов. Кроме того, на протекание химических процессов коррозии бетона существенное влияние оказывают вещественные составы продуктов цементного камня и агрессивной среды. Коррозия бетона возможна, если агрессивная среда растворяет продукты цементного камня или взаимодействует с ними с образованием веществ, ослабляющих структуру бетона.

Разработана обобщённая классификация видов коррозии бетона [4], согласно которой различают:

- коррозия I вида – выщелачивание $\text{Ca}(\text{OH})_2$ и легкорастворимых веществ состава цементного камня в воде и их вымывания из структуры бетона;
- коррозия II вида – обменные реакции между некоторыми компонентами цементного камня и агрессивными веществами жидкой среды с образованием растворимых соединений или продуктов

аморфного типа, не обладающих вяжущими свойствами и достаточной прочностью для обеспечения устойчивости структуры бетона;

- коррозия III вида характеризуется образованием и накоплением в порах бетона малорастворимых солей, кристаллизующихся с увеличением объёма при переходе в твердую фазу и вызывающих внутренние напряжения и разрушения.

В естественных условиях эксплуатации гидротехнических сооружений будут присутствовать все виды коррозии, но преобладающий из них вид в основном определяет характер разрушения бетона в агрессивной среде.

Вещества, участвующие в процессах коррозии бетона

Основными веществами, участвующими в процессах коррозии бетона, являются вода, растворенные или поглощённые в ней вещества и компоненты состава цементного камня. Влияние воды проявляется как в зависимости от величины её напора на гидротехнический бетон, так и от её качественного состава и количества содержащихся веществ. Как известно, вода является хорошим растворителем многих газообразных и твердых веществ, которые изменяют её свойства, в первую очередь, изменяется её водородный показатель pH, значение которого варьирует в пределах от 0 до 14. Для бетона, вне зависимости от силы напора воды на него, вредной является нейтральная и кислая вода. Нейтральной воды, то есть дистиллированной, обычно в природе не существует, однако она способна растворять $\text{Ca}(\text{OH})_2$ с большей растворяющей способностью, чем обычная. Хотя природная речная вода по содержанию растворённых веществ является более мягкой, чем жесткая грунтовая вода, но сильный напор и высокая растворяющая способность могут быть причиной возникновения первого вида коррозии, особенно в бетонных опорах мостов, покрытий каналов, плотин водохранилищ и т.п.

Для бетона наиболее агрессивной является кислая вода, которая способна вступать в реакции взаимодействия с продуктами цементного камня. В то же время вода, создающая слабощелочную и щелочную среду для бетона, является благоприятной для эксплуатации бетонных сооружений, если не имеет сильного напора, вызывающего её фильтрацию через толщину строительного изделия.

Цементы, применяемые в гидротехническом бетоне, состоят из клинкерных минералов $3\text{CaO}\cdot\text{SiO}_2$ (C_3S), $2\text{CaO}\cdot\text{SiO}_2$ (C_2S), $3\text{CaO}\cdot\text{Al}_2\text{O}_3$ (C_3A), $4\text{CaO}\cdot\text{Al}_2\text{O}_3\cdot\text{Fe}_2\text{O}_3$ (C_4AF) и природного гипса $\text{CaSO}_4\cdot 2\text{H}_2\text{O}$. В зависимости от содержания указанных веществ цементы могут проявлять разные свойства и обеспечить разную степень стойкости бетона в агрессивных средах.

При гидратации и твердении цемента образуются кристаллические гидратные соединения: гидросиликаты, гидроалюминаты, гидроферриты, гидросульфалюминаты и гидроксид кальция $\text{Ca}(\text{OH})_2$. В обычных цементах, в том числе и в сульфатостойких, применяемых для гидротехнического бетона, силикатные минералы клинкера C_3S и C_2S составляют основное их содержание, где основными продуктами гидратации этих цементов являются гидросиликаты кальция и $\text{Ca}(\text{OH})_2$, причём при гидратации C_2S в среднем в три раза меньше образуется $\text{Ca}(\text{OH})_2$, чем при гидратации C_3S .

Гидросиликаты кальция по составу разделяются на высокоосновные и низкоосновные с общими формулами $\text{CSH}(\text{A})$ и $\text{CSH}(\text{B})$ соответственно. Гидросиликаты кальция типа $\text{CSH}(\text{B})$ являются более прочными и стойкими в агрессивной среде, чем гидросиликаты кальция типа $\text{CSH}(\text{A})$. Их образование и количественное содержание в цементном камне зависит от количественного соотношения

$\text{CaO}:\text{SiO}_2$ в составе цемента. Это положение подтверждает, что минералогический состав цемента является одним из основных факторов, обеспечивающих формирование строительно-технических свойств бетона.

Из продуктов гидратации цемента $\text{Ca}(\text{OH})_2$ является водорастворимым веществом в обычных условиях, при действии фильтрующей воды на гидротехнический бетон $\text{Ca}(\text{OH})_2$ частично выносятся из внутренней структуры на поверхность, что можно заметить по образованию белого слоя CaCO_3 на поверхности бетона некоторых существующих объектов, который происходит в результате карбонизации $\text{Ca}(\text{OH})_2$ углекислотой воздуха. При уменьшении содержания $\text{Ca}(\text{OH})_2$ в поровой жидкости цементного камня ниже 1,1 г/л начинается гидролиз гидросиликатов и гидроалюминатов кальция с выделением $\text{Ca}(\text{OH})_2$ [4]. Поэтому, чтобы сохранить стойкость бетона, следует связать $\text{Ca}(\text{OH})_2$ в виде водонерастворимых веществ для повышения устойчивости продуктов цементного камня к воздействиям воды и растворенных в ней веществ.

Структура бетона и её роль в коррозии цементного камня

Бетон является каменным материалом с капиллярно-пористой структурой. Структура бетона образуется неоднородной из-за различных размеров частиц компонентов его состава. Так, при размере частиц цемента меньше 0,08 мм, размеры каменных заполнителей варьируются в пределах от 5 до 20-40 мм и более. Смесь заполнителей создаёт определённую межзерновую пористую структуру, которая заполняется цементным тестом с некоторой раздвижкой каменных частиц. Теоретическое определение оптимального размера раздвижки частиц заполнителей, который одновременно соответствует толщине слоя цементного теста на поверхностях заполнителей, и практическое соблюдение его в производственных условиях, в общем не возможны, поэтому степень раздвижки зерен заполнителя в структуре бетона обычно оценивается на основе экспериментальных данных при определении расхода цемента на 1 м^3 бетонной смеси. Однако толщина цементного теста на поверхностях заполнителя играет важную роль в обеспечении прочности цементного камня и его сцепления с поверхностью каменного заполнителя и в формировании структуры бетона в целом.

На образование общей структуры бетона определённую роль играет и процесс формирования структуры цементного камня. При взаимодействии цемента с водой протекают реакции гидратации и гидролиза клинкерных минералов, при дальнейшем их твердении и формировании структуры цементного камня происходит явление контракции минералов клинкера, то есть уменьшение их объёма после гидратации по сравнению с исходным объёмом, в результате образуются поры цементного геля в структуре цементного камня, и она становится пористой. Явление контракции присуще всем клинкерным минералам, однако при гидратации алюминатных минералов C_3A и C_4AF оно выражается больше, чем при гидратации силикатных минералов C_3S и C_2S . По степени контракции минералы клинкера расположены в ряд $\text{C}_3\text{A} \rightarrow \text{C}_4\text{AF} \rightarrow \text{C}_3\text{S} \rightarrow \text{C}_2\text{S}$ [17]. Через 30 сут твердения цементного камня объём образования контракционных пор при гидратации минерала C_3A будет в 1,2 раза больше, чем для C_4AF , в 2,4 раза больше, чем для C_3S и в 3,63 раза больше, чем для C_2S при одинаковых их количествах. Поэтому при гидратации обычных цементов, где в их составах сравнительно больше содержится алюминатных минералов, чем в составах сульфатостойкого и пуцолланового цементов или портландцемента со шлаками, больше образуются поры цементного геля. Разумеется, что повы-

шение объёма пор цементного геля приводит к увеличению общего объёма пор в структуре бетона. По размерам различают поры цементного камня: 1) ультрамикropоры с радиусом $<0.005\text{мкм}$; 2) микropоры ($0.005-0.01\text{мкм}$) и 3) макropоры с радиусом $>0.1\text{мкм}$ [4]. Снижение пористости цементного камня можно достичь регулированием минералогического состава цемента, что будет показано ниже.

Структура бетона характеризуется сложностью форм пор и широким диапазоном их размеров от указанных до десятых долей миллиметра. Чаще все крупные поры сообщаются друг с другом капиллярными каналами, которые являются основными проводниками воды по толщине изделия и играют ведущую роль в протекании процессов коррозии бетона.

Общая пористость бетона, кроме пористости цементного камня, ещё зависит от таких факторов, как значение водоцементного отношения (В/Ц), качества заполнителей и межзерновой пустоты их смеси, подвижности и жесткости бетонной смеси, способов формовки бетонного изделия и режимов твердения цементного камня и других технологических параметров. Поры структуры бетона, образующиеся в зависимости от указанных факторов, можно условно назвать технологическими.

Проницаемость бетона и её количественная оценка

Проницаемость бетона определяется объёмом эффективной пористости, которую образуют сквозные поры и капилляры, микротрещины и каверны различного происхождения, другие дефекты структуры, способные пропускать через себя воду. Обычно проницаемость бетона оценивают по величине коэффициента фильтрации воды [6], вычисляемого по формуле

$$K_{\phi} = (\bar{G} \cdot \eta \cdot \rho) / (s \cdot t \cdot \Delta P), \quad (1)$$

где: K_{ϕ} – коэффициент фильтрации воды, измеряемый количеством воды, прошедшей через 1 см^2 поверхности образца на 1 см толщины бетона при градиенте давления воды ΔP в течение одного часа, $\text{см}^3/\text{с}$; \bar{G} – количество воды, г; η – коэффициент, учитывающий вязкость воды при различной температуре; ρ – плотность воды, $\text{г}/\text{см}^3$; s – площадь поверхности бетона, через которую фильтруется вода, см^2 ; t – время, с; ΔP – градиент давления воды, Па.

Согласно [18], для технической оценки водонепроницаемости бетона используют марки $w 2 - w 20$, которые соответствуют давлению воды в $0.2-2.0\text{ МПа}$ или $2-20\text{ кг}/\text{см}^2$. В таблице показана взаимосвязь между маркою бетона по водонепроницаемости и коэффициентом фильтрации воды.

Таблица

Характеристики водонепроницаемости бетона

$w, \text{кг}/\text{см}^2$	2	4	6	8	10-14	16-20
$K_{\phi} \cdot 10^9, \text{см}/\text{с}$	7-20	2-7	0,6-2	0,1-0,6	0,05-0,1	$< 0,05$

Чем меньше значение коэффициента фильтрации воды в бетоне, тем выше его марка по водонепроницаемости. Чтобы увеличить водонепроницаемость бетона от $w 2$ до $w 16 - w 20$, необходимо уменьшить его проницаемость до 400 разов. Это достигается уплотнением структуры бетона и повышением его прочности, в первую очередь снижением объёма и размера пор цементного камня в бетоне, положительно влияющие также и на коррозионностойкости бетона.

Агрессивные среды для бетона

Любая среда, где бетонные изделия разрушаются интенсивнее, чем при обычном процессе старения материалов, может считаться агрессивной для бетона. Агрессивность среды и степень её воздействия на бетон определяется природой вещественного состава и параметрами, характеризующими состав и свойства агрессивного вещества, способов влияния и продолжительности воздействия, количественного соотношения агрессивного вещества и материалов состава бетона, в частности цемента и его минералогического состава, параметров атмосферы, таких как влажность, температура, давление и т.п.

По степени воздействия на строительные конструкции среды подразделяются на: 1) неагрессивные; 2) слабоагрессивные; 3) среднеагрессивные; 4) сильноагрессивные. Среда считается неагрессивной для бетона, если при её воздействии в течение года не наблюдается признаков коррозии и прочность бетона не снижается; слабоагрессивной, если при этом потери прочности составляет до 5% и происходит слабое поверхностное разрушение бетона; среднеагрессивной, когда потери прочности составляет 15-25% и происходит повреждение углов или образование волосных трещин; сильноагрессивной, когда потери прочности составляют более 20% и наблюдается явно выраженное разрушение бетона.

Для гидротехнического бетона наиболее распространёнными агрессивными средами являются природные минерализованные воды. Обычно их классифицируют на: 1) сильнокислотные с $\text{pH} < 3$, содержащие сернистые и хлористые вещества; 2) кислые и слабокислые с $\text{pH} = 3 \dots 6.5$, содержащие органические кислоты и CO_2 ; 3) нейтральные и слабощелочные воды с $\text{pH} = 6.5 \dots 8.5$, содержащие $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$; 4) сильнощелочные воды с $\text{pH} > 8.5$, содержащие Na_2CO_3 . Однако могут быть грунтовые воды с содержанием всех названных веществ, поэтому перед строительством гидротехнического объекта обязательным должно быть определение составов этих вод с тем, чтобы принять соответствующие меры по обеспечению стойкости бетона под их влиянием.

З а к л ю ч е н и е

Анализ процессов коррозии гидротехнического бетона и составов, участвующих в них веществ, позволяет разработать эффективные способы повышения коррозионностойкости строительных сооружений в условиях влияния на них агрессивных веществ.

Поступило 25.11.2020 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кинд В.В. Коррозия цемента и бетона в гидротехнических сооружениях. – М.Л.: Госэнергоиздат, 1955, 320 с.
2. Бабушкин В.И. Физико-химические процессы коррозии бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1968, 187 с.
3. Вербицкий Г.П. Прочность и долговечность бетона в водной среде. – М.: Стройиздат, 1976, 128 с.
4. Москвин В.М., Иванов Ф.М., Алексеев, С.Н. и др. Коррозия бетона и железобетона, методы их защиты. – М.: Стройиздат, 1980, 536 с.

5. Бабушкин В.И. Защита строительных конструкций от коррозии, старения и износа. – Харьков: Выща школа, 1989, 168 с.
6. Шарифов А. Цементно-воластонитовые вяжущие и химические добавки для повышения стойкости бетона в агрессивных средах. – Душанбе: Дониш, 1994, 284 с.
7. Яковлев В.В. Прогнозирование коррозионной стойкости бетона и железобетона в агрессивных жидких и газовых средах: Дисс...д.т.н. – Уфа, 2000, 411 с.
8. Розенталь Н. Коррозионная стойкость цементных бетонов низкой и особо низкой проницаемости. Дисс. ...д.т.н.: – М., 2004, 435 с.
9. Базанов С.М., Федосов С.В. О некоторых проблемах сульфатной коррозии бетона. Изв. вузов: Строительство. – Новосибирский ГАСУ, 2004, №11(551), с. 27-30.
10. Хахалева Е.Н. Коррозия мелкозернистого бетона в агрессивных средах сложного состава: Дисс...к.т.н., – Томск, 2005, 142 с.
11. Селяев В.П., Седова А.А., Купряшкина Л.И., Осипов А.К. Изучение процесса повреждения цементного камня растворами серной кислоты различной концентрации. – Изв. вузов: Поволжский регион. Естественные науки, 2015, №3(11), с. 61-66.
12. Никоненко Н.И. Повышение прочности материала на основе портландцемента введением высокодисперсных минеральных добавок: Дисс...к.т.н. – Томск, 2014, 122 с.
13. Чикин А.В. Технология повышения долговечности бетона современными добавками. – Строительство и архитектура, 2015, №3, с. 8-13.
14. Тольпина Н.М. Физико-химические основы повышения коррозионной стойкости цементных систем оптимизацией вещественного состава. Дисс... д.т.н. – Белгород, 2016, 393 с.
15. Добщиц Л.М. Пути повышения долговечности бетона. – Строительные материалы, 2017, №10, с. 4-8.
16. Колотушкин А.В. Повышение прочности и химического сопротивления наполненных цементных композитов: Дисс...к.т.н. – Саранск, 2019, с. 221-223.
17. Волженский А.В., Буров Ю.С., Колокольников В.С. Минеральные вяжущие вещества. 3-е изд., пер. и доп. – М.: Стройиздат, 1979, 476 с.
18. ГОСТ 12730.5-2018. Бетоны. Методы определения водонепроницаемости.

А.Шарифов, З.Ҳ.Ғайбуллоева*, Д.С.Неъматзода, З.А.Ғозиев
КОРРОЗИЯШАВИИ БЕТОНИ ГИДРОТЕХНИКӢ
ВА САБАБҲОИ ГУЗАРИШИ ОН

Донишгоҳи Давлатии Дангара,

**Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи акад. М.С.Осимӣ*

Мақола ба таҳлили равандҳои коррозияшавии бетони гидротехникӣ ва сабабҳои гузариши он бахшида шудааст. Фаҳмиши коррозияи бетон ва намудҳои он маънидод карда шудааст. Таҳлили таркиби семент нисбати устувории минералҳои клинкер дар муҳити зараровар оварда шудааст. Нишон дода шудааст, ки гидратоксидаи калтсий $\text{Ca}(\text{OH})_2$, ки дар раванди дароб ҳалшавии семент ҳосил мешавад, маводи дароб тез ҳалшаванда мебошад ва аз микдори он ба коррозияи устувории гидросиликатҳо ва дигар пайвастагиҳои таркиби санги сементӣ дар муҳити зараровар вобаста

мебошад. Раванди ҳосилшавии сохтори санги сементӣ бо пайдошавии ковокиҳо ва камшавии ҳаҷми минералҳо дар реактсияҳои дар об ҳалшавии онҳо таҳлил карда шудааст. Мувофиқати коэффисиенти гузариши об аз қабати санги сементӣ бо нишондиҳандаҳои обкашии он нишон дода шудааст. Нишондиҳандаҳои муҳити зараровар барои бетони гидротехникӣ оварда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: бетони гидротехникӣ, коррозияшавии бетон, муҳити зараровар, сохтори санги сементӣ, хурдшавии ҳаҷми минералҳо, коэффисиенти гузариши об, мустаҳкамӣ, устуворӣ.

A.Sharifov, Z.H.Gaibullaeva*, D.S.Nematzoda, Z.A.Goziyev

CORROSION OF HYDRAULIC CONCRETE AND CAUSES OF ITS FLOW

Dangarin State University,

**M.S.Osimi, Tajik Technical University*

The article is devoted to the corrosion processes of hydraulic concrete with clarifying the reasons for their flow. The concept of corrosion of concrete is given and its varieties are indicated. The composition of cements for the resistance of clinker minerals in aggressive environments was analyzed. It is indicated that the hydration of cement minerals hydrates is the most easily soluble in water, the Ca (OH)₂ calcium hydration and on its content depends on the corrosion resistance of the hydrosilicates and other compounds of the concrete cement stone in the aggressive medium. The process of pore formation and formation of a structure of cement stone, contracting of clinker minerals during hydration was analyzed. The dependence of the coefficient of filtration of water through the structure of concrete from the parameters of its water absorption is given. The characteristics of aggressive medium for hydrotechnical concrete are indicated.

Key words: hydraulic concrete, concrete corrosion, aggressive medium, cement stone structure, mineral contracting, water filtration coefficient, strength, durability.

УДК 548.549.0(575.3)

Ф.А.Файзиев, С.Б.Ягимов*, член-корреспондент НАН Таджикистана А.Р.Файзиев*

О ГЕНЕЗИСЕ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ ЮГО-ЗАПАДНОГО КАРАМАЗАРА (НА ПРИМЕРЕ КАНСАЙСКОЙ И ТАКЕЛИЙСКОЙ ГРУППЫ МЕСТОРОЖДЕНИЙ)

*Таджикский национальный университет,***Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана*

В статье рассматриваются генетические особенности полиметаллических месторождений Юго-Западного Кармазара. Несмотря на то, что минерализация находится в скарнах, она имеет гидротермальное происхождение.

Ключевые слова: *генезис, полиметаллические месторождения, Кансайское рудное поле, Такелийское рудное поле, гидротермальный процесс, минерализация, порода.*

Проблема генезиса эндогенных рудных месторождений, в частности серебросодержащих полиметаллических объектов Юго-Западного Кармазара, дискуссионна. По вопросу о генезисе этих месторождений среди исследователей существует две точки зрения. Одни исследователи [1-3 и др.] считают, что рудная минерализация была многоэтапной и связывают герцинские послемагматические процессы с основными этапами интрузивной деятельности. Другая группа ученых [4, 5 и др.] придерживается мнения о том, что вся гипогенная минерализация проявилась после того, как сформировались верхнепалеозойские магматические образования. Все они связывают время образования оруденения, в том числе и полиметаллического, с позднегерцинским этапом тектоно-магматической активизации консолидированных палеозойских структур.

Большинство полиметаллических месторождений этого региона относятся к скарновым образованиям. Однако многие исследователи указывают на наложенный характер свинцово-цинкового оруденения в них [6-8]. Согласно их данным, сначала происходило образование скарнов, затем их перекристаллизация, становление шеелитового, магнетитового и меднорудного оруденения, а в заключительных стадиях – свинцово-цинковая минерализация.

Ф.И.Вольфсон [4] считает, что полиметаллические месторождения Такели связаны с фазой малых интрузий и образованы в герцинскую эпоху складчатости. Здесь дайки диабазовых порфиритов и рудные жилы секут 700-метровую толщу аркозовых конгломератов, которые включают гальку гранитоидов. Это с достаточной полнотой доказывает, что рудные месторождения и дайки основных пород не связаны с интрузией батолита гранитоидов.

По Х.М.Абдуллаеву и Т.М.Мацокиной [3] в Чаткало-Кураминском районе в развитии герцинского тектоно-магматического цикла следует выделять четыре этапа: добатолитовый, батолитовый, малых интрузий и дайковый; каждый из них сопровождался своеобразной металлогенией.

Адрес для корреспонденции: Файзиев Абдулхак Раджабович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии АН Республики Таджикистан, E-mail: faiziev38@mail.ru

Добатолитовый этап в разбираемом нами районе не имеет проявлений. Металлогения батолитового этапа, проявившаяся в четырех формациях (пегматитовой, скарново-магнетитовой, скарново-редкометальной и грейзеново-рудной), представлена только скарново-магнетитовой формацией, к которой относятся скарново-магнетитовые тела Пиязлы и Акташ, приуроченные к контакту с интрузивом батолитового этапа. Эти скарны являются существенно-гранатовыми и образованы в результате процесса нормального биметасоматоза.

Металлогения этапа малых интрузий и даек (послебатолитовая) многообразна и исключительно продуктивна. В это время образуются крупнейшие полиметаллические, флюоритовые и медные месторождения, а также золоторудная, молибденовая и некоторая редкометальная минерализация. Преобладают скарново-рудная (полиметаллическая) минерализация и различные гидротермальные жильные, преимущественно средне- и низкотемпературные образования.

В пространственном размещении скарново-полиметаллических месторождений наиболее важными факторами являются: наличие малых интрузий и карбонатных пород. Скарны с полиметаллами приурочены к контактам малых интрузий различного состава (сиенит-порфиоров и гранодиорит-порфиоров для Кансайского поля). Стратиграфическое положение месторождений ограничивается, в основном, интервалом D_3-C_1 (преимущественно верхний девон – нижний карбон). Очень часто свинцово-цинковая минерализация ассоциирует с участками вторичного доломита.

В комплексе минералов скарново-полиметаллической формации широко развит диопсид-геденбергит. Более железистые пироксены приурочены обычно к трубчатым скарновым телам в известняках. Встречаются шиффериты, бустамит, родонит, цинкосодеждающий пироксен (джефферсонит), гранаты (преимущественно аномальные гроссуляр-андрадиты), менее распространены, чем в скарнах с магнетитом. Редко встречаются также такие минералы, как волластонит, везувиан.

К послебатолитовому этапу относятся, кроме скарново-полиметаллической, еще и формации кварцево-полиметаллической и кварцево-баритово-флюоритовой. Все эти типы минерализации есть результат проявления различных стадий развития единого магматического очага.

Размеры минерализованных зон разнообразны. Наиболее крупные зоны имеют мощность до 100-200 метров и протяженность более километра. Простирается преобладает грубо широтное, падение кругое. Внутри этих зон по простиранию и по падению минерализация распределена чрезвычайно неравномерно. Зоны включают, как в разной степени измененные вмещающие породы, так и сплошные новообразования, где не сохранилось остатков вмещающих пород. Наибольшей интенсивности гидротермальное минералообразование, как обычно, достигает при пересечении разломов, контактов с дайками или других структурно благоприятных случаев.

Зоны пересекают как известняки, так и изверженные породы и контактово-метасоматические скарны. В каждом из этих случаев характер рудных минералов весьма близок, а среди сопровождающих минералов наблюдаются свои комплексы. В известняках, как правило, оруденение связано со своеобразными высокомарганцовистыми скарнами, состоящими в основном из марганцовистого моноклинного пироксена (шефферита или манганогеденбергита), зонального и потому оптически аномального гроссуляр-андрадита, иногда манганокальцита. Очень редко можно видеть оруденение в известняках без скарновой минерализации. В изверженных породах отложения рудных минералов

сопровождается хлоритизацией (хлорит-делессит), ортоклазизацией, окварцеванием, эпидотизацией, реже серицитизацией. В тех случаях, когда оруденелые разломы пересекают гранатово-пироксеновые скарны контактово-метасоматического происхождения, в них появляются актинолит, эпидот, рудные минералы, шеелит (Акташ), серпентин, хлорит и др. Этот тип переработанных скарнов чаще всего встречается на Кансайском, Акташском и Шевчуковском месторождениях.

В целом, в минерализованных зонах рассматриваемой площади встречено очень много минералов, которые относятся к ассоциациям разных температур, часто налегающих друг на друга. Изучение ассоциаций показало, что все минералы можно разделить на следующие комплексы, соответствующие нескольким последовательным этапам гидротермального образования, а именно комплекс, являющийся переходным от высокотемпературных к среднетемпературным образованиям (скарново-полиметаллическим), среднетемпературный гидротермальный комплекс (хлоритово-серицитово-полиметаллический), к низкотемпературным образованиям (кварцево-баритово-кальцитово-полиметаллический комплекс).

В локализации свинцово-цинкового оруденения обоих рудных полей структурный фактор играет ведущую роль. Месторождения Такелийского и Кансайского рудных полей приурочены к тектоническим нарушениям, иначе говоря, оруденение размещено в разрывах, трещинах, зонах дробления. Оруденения контролируются разломами разного направления – северо-западного, северо-восточного и широтного простирания. Например, практически все свинцово-цинковые руды Кансая связаны с Окурдаванским разломом. Несколько иначе обстоят дела в Такелийском рудном поле. Основная часть рудных тел здесь размещены вдоль трещин северо-восточного простирания (Гайнаккан, Сассыксай, Кафтархона, Учочак). В других месторождениях рудного поля (Западное и Среднее Такели) оруденения размещаются в трещинах от северо-западного до широтного простирания, развитых в висячем блоке Гайпакского разлома.

Объекты Такелийского и Кансайского рудных полей размещены в различных по составу горных породах. Руды месторождения Такели и проявление Навигари локализованы в известняках, доломитизированных известняках, Гайнаккан в гранитоидах, и частично в аркозовых конгломератах, Сассыксай на контакте известняков с диабазовыми и лабрадоровыми порфиритами, Южная и Западная Кафтархона преимущественно развиты в аркозовых конгломератах, частично на контакте с диоритовыми порфиритами, Восточная Кафтархона на контакте известняков с диоритовыми порфиритами, Учочак в известняково-аркозовых песчаниках и конгломератах. Тогда как месторождения Кансайского рудного поля в большинстве случаев локализованы в карбонатных породах, в основном известняках. Однако есть и исключения. Например, рудные тела в некоторых месторождениях Кансайского рудного поля - Окурдаван, Кызылкан, Бешкан размещены в интрузивных породах в некотором пространственном обособлении от скарнов [9].

Влияние состава вмещающих пород на размещение оруденения в пределах полиметаллических месторождений Юго-Западного Карамазара выявляется особенно четко. П.А.Шехтман с соавторами [10] отмечают, что в Кансайском рудном поле силикатные породы благоприятны для отложения пирита, магнетитовые руды находятся в межформационных скарнах, а полиметаллические оруденения приурочены к известнякам калькаратусового горизонта. На Такелийском рудном поле для разных

пород характерны свои особенности минерального состава [11]. Например, арсенопирит и пирит образуют наиболее высокие концентрации в алюмосиликатных породах - гранитоидах (Гайнаккан), аркозовых конгломератах (Южная Кафтархона), дацитовых порфирах (Западная Кафтархона). Сфалерит тяготеет к карбонатной среде. Он отлагается как в карбонатных, так и на контактах их с алюмосиликатными породами (Западная и Восточная Кафтархона). Благоприятная среда для отложения галенита оказывается смешанная карбонатно-алюмосиликатная среда (Учочак, Западная Кафтархона). Литологический состав пород в Такелийском рудном поле является основным показателем рудоформирующего влияния. Так, при примерно равном соотношении карбонатной и алюмосиликатной составных частей (40-60%) появляются оптимальные условия для рудоотложения [11].

Форма, строение и условия залегания свинцово-цинковых залежей зависит от физико-механических свойств и состава горных пород. В Кансайском рудном поле развиты как секущие, так и согласные и контактовые рудные тела. Здесь П.А.Шехтман и др. [10] выделяют восемь типов рудных тел: 1) в сопряжениях трещин, 2) в искривлениях трещин, 3) в пересечениях трещин, 4) в отслоениях и согласных трещинах, 5) в согласных контактах интрузивов, 6) в секущих контактах штоков и даек, 7) в согласных контактах даек, 8) внутри даек. Преобладают в рудном поле рудные тела в сопряжениях трещин. Полиметаллические руды имеют форму жил, прожилков, линз, вкрапленников и др.

В Такелийских месторождениях рудные тела имеют форму жил, линз, столбообразных, трубчатых и неправильных залежей.

Определение температур образования жильных минералов, сопровождающих оруденения (кварц, кальцит, барит, флюорит), а также основного рудного минерала – сфалерита, показывает, что оруденение в отмеченных рудных полях образовалось в широком диапазоне температур – 450-90°С [12]. Образование продуктивного свинцово-цинкового оруденения происходило в более узком интервале 350-200°С. Геотермический градиент во время рудообразования колебалось от 8 до 14°С на 100 м глубины. Минералообразующие растворы были бикарбонатно-хлоридно-сульфатными.

Еще С.С.Смирнов [13] касаясь вопроса времени образования гидротермальных месторождений Восточного Забайкалья указывал на значительный разрыв во времени между остыванием батолитов и формированием гидротермального оруденения, в течение которого произошло внедрение разнообразных даек. Это имеет место и в полиметаллических месторождениях Юго-Западного Карамазара. Например, взаимоотношение гранитоидов с жильными породами (полевошпатовыми порфиритами, гранодиорит-порфирами, кварцевыми порфирами), обнажающимися в виде штоков в пределах месторождений Такели, Кансай, Куруксай и др., так же, как и рудные месторождения, значительно моложе батолита гранитоидов [4]. Все геологические исследования и данные абсолютного возраста пород и минералов подтверждают именно эти представления. По данным Н.П.Лаверова и др. [14] возраст батолита гранитоидов Карамазара составляет 320-315 млн. лет, а малых интрузий – 270-260 млн. лет. Изучение абсолютного возраста вмещающих оруденение пород и руд на месторождение Школьное также говорит о пермском их возрасте [15].

Генезис полиметаллических месторождений Такелийского и Кансайского рудных полей мы связываем с магмой, одним из дифференциатов которой и являются малые интрузии. Считаем, что

свинцово-цинковые месторождения этих площадей и малые интрузии являются дериватами одной родоначальной магмы и время их образования относится к концу верхнего палеозоя. Иначе говоря, полиметаллическое оруденение сформировалось после внедрения наиболее молодых послекызылнуринских даек диабазовых порфиритов [4].

Данные изотопного состава свинца и серы в галенитах месторождений Центральный Кансай, Шевчуковское, Дагани Дарбаза приводятся в работах В.И. Рабиновича и др. [16], В.И. Виноградова и др. [17]. Соотношение Pb^{206}/Pb^{204} составляет от 18.23 до 18.35, а Pb^{207} / Pb^{204} колеблется от 15.70 до 15.84. Они допускают, что осадочный свинец мобилизовался из девонских отложений [16]. Изотопный состав серы галенита из Центрального Кансай составляет $S^{34} - +5.3$, а соотношение $S^{32}/S^{34} - 22,10$ [17]. На этом основании они приходят к выводу, что сера галенитов, сфалеритов, пиритов образовалась за счет восстановления осадочных сульфатов гидротермальными растворами.

Исследования показывают, что в Кансайском и Такелийском рудных полях оруденение происходило главным образом путём выполнения открытых трещин и пустот. Подчинённое значение имеют метасоматические процессы. В наиболее ранних стадиях сульфидного, карбонатного и сульфидно-кремнезёмного парагенетических минеральных ассоциаций развиты серицитизация, окварцевание, хлоритизация, карбонатизация и другие околорудные изменения вмещающих пород. В заключительной карбонат-флюорит-баритовой стадии сколько-нибудь заметных околорудных изменений не происходило. Все это свидетельствуют о средне- низкотемпературном гидротермальном процессе минералообразования.

Для Кансайского и Такелийского рудных полей характерны различные текстуры и структуры руд [18]. Наиболее распространены вкрапленные или полосчато-вкрапленные, плейчатые и прожилковые текстуры. Встречаются также массивные и брекчиевые текстуры. Реже встречаются и радиально-лучистые текстуры руд. Структуры их крупно-, средне-, мелко- и неравномернозернистые.

Таким образом, резюмируя вышеизложенное следует отметить, что вещественный состав, термобарогеохимические параметры образования минералов, структурно-текстурные особенности, околорудные изменения вмещающих пород и другие особенности рудообразования говорят о гидротермальном условии образования полиметаллических руд, как Такелийского, так и Кансайского рудных полей. Основными минералами в обоих рудных полях являются галенит и сфалерит. В пределах Такелийских месторождений также развит арсенопирит.

Поступило 23.01.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Наследов Б.Н. Кармазар. Труды Тадж.-Памирск. экспедиции, вып. 19. – Л.: Изд-во ТПЭ, 1935, 401 с.
2. Карпова Е.Д. Новые данные по геологии и рудоносности скарнов Западного Кармазара. – Тр. Тадж. Фан СССР, т.16, 1944, 80с.
3. Абдуллаев Х.М., Аделунг А.С., Воронич В.А. и др. Основные черты магматизма и металлогении Чаткало-Кураминских гор. – Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1958, 285 с.

4. Вольфсон Ф.И. Структура и генезис свинцово-цинковых месторождений Юго-Западного Карамазара. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. 184 с.
5. Королев А.В. Избранные труды. – Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1965, 500 с.
6. Жариков В.А. Геология и метасоматические явления скарного-полиметаллических месторождений Западного Карамазара. – Тр. ИГЕМ АН СССР. – М.: Изд-во. АН СССР, 1959, Вып. 14, 370 с.
7. Протодьяконова З.М., Попов В.С. – Минералогия месторождений. – В кн.: Геология и минеральные комплексы Западного Карамазара. – М.: Недра, 1972, с. 147-192.
8. Файзиев А.Р., Дзайнуков А.Б., Таджибаев Г.Т. Об идентичности скарново-полиметаллической и гидротермально-полиметаллической минерализации в месторождениях Карамазара (Срединный Тянь-Шань). – ДАН СССР, т. 318, №5, 1991, с. 1199-1202.
9. Вольфсон Ф.И., Титов В.Н. Основные особенности геологического строения Кансайского рудного поля. – Геология свинцово-цинковых месторождений Кансайского рудного поля. – М.: Наука, 1965, с. 21-29.
10. Шехтман П.А., Поваров А.В. Уразаев И.М. Основные особенности геологического строения. – Геология и минеральные комплексы Западного Карамазара. – М.: Недра, 1972, с. 130-147.
11. Шихин Ю.С. Состав горных пород как фактор контроля гидротермального оруденения (на примере Карамазара). – Геол. рудн. мест.-й, 1992, №3, с. 31-46.
12. Файзиев А.Р., Файзиев Ф.А., Ятимов С.Б., Усмонов Н.К. Стадийность и физико-химические условия становления полиметаллических месторождений Юго-Западного Карамазара (Северный Таджикистан). – Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. естеств. науки, 2020, т. 162, кн. 4, с. 274-289. – doi: 10.26907/2542-064X.2020.2.274-289.
13. Смирнов С.С. Зона окисления сульфидных месторождений. – М.: Изд-во АН СССР, 1955, 332 с.
14. Лаверов Н.П., Беликов Б.П., Иванов Н.Б. Об абсолютном возрасте интрузивных пород и верхней границе магматизма в юго-западных отрогах Северного Тянь-Шаня. – Изв. АН СССР. Сер. геол. 1964, №10, с. 103-113.
15. Moralev G.V., Shatagin K.N. Rb-Sr study of Au-Ag Shkolnoe deposit (Kurama Mountains, north Tajikistan): age of mineralization and time scale of hydrothermal processes. – Mineralum Deposita, 1999, v. 34, № 4, pp. 405-413.
16. Рабинович А.В., Голубчина М.Н., Муртазина Т.М. Изотопный состав свинца галенитов некоторых месторождений Средней Азии. – Геохимия, 1964, №4.
17. Виноградов В.И., Бадалов С.Т., Туресебеков А. О возможной роли осадочных сульфатов в эндогенном рудообразовании Карамазара. – Геол. рудн. мест.-й, 1969, т. 11, №1, с. 67-76.
18. Файзиев Ф.А., Ятимов С.Б., Файзиев А.Р. О сереброносности скарново-полиметаллических месторождений Западного Карамазара (Северный Таджикистан). – Изв. АН РТ, 2018, №1 (170), с. 97-106.

Ф.А.Файзиев, С.Б.Ятимов*, А.Р.Файзиев*

**ОИД БА ПАЙДОИШИ КОНҲОИ ПОЛИМЕТАЛЛИИ
ҚАРАМАЗОРИ ЧАНУБӢ-ҒАРБӢ
(ДАР МИСОЛИ ГУРӮҲИ КОНҲОИ КОНСОӢ ВА ТАКЕЛИ)**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,

**Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи АМИТ*

Дар мақола хусусиятҳои генетикии конҳои полиметаллии Қарамазори Чанубӣ-Ғарбӣ дида ба-
ромада шудааст. Новобаста аз он, ки минерализатсия дар дохили скарн ҷойгир шудааст, вай дар
шароитҳои гидротермалӣ пайдо шудааст.

*Калимаҳои калидӣ: генезис, конҳои полиметаллӣ, майдони маъдани Консой, майдони маъдани
Такели, раванди гидротермалӣ, минерализатсия, ҷинси кӯҳӣ.*

F.A.Fayziev, S.B.Yatimov*, A.R.Fayziev*

**ON THE FORMATION OF POLYMETAL DEPOSITS OF SOUTH-WESTERN
KARAMAZAR (ON THE EXAMPLE OF KONSOY AND TAKELI GROUPS)**

Tajik National University,

**Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology NAST*

The article discusses the genetic features of polymetallic deposits of South-West Karamazor. Re-
gardless of whether the mineralization is located in the skarn, it is found under hydrothermal conditions.

*Key words: genesis, polymetallic deposits, Konsoy field, Takeli field, hydrothermal process, mineralization,
rock.*