

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

- С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов.** Об изоморфизме некоторых пространств типа Соболева дробного порядка.....243
- М.Ш.Шабозов, А.С.Курайши.** О совместном приближении функций и ее производных в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита .....249
- А.Г.Айдармамадов, Н.У.Кадамшоев.** О приближении аналитических функций в весовом пространстве Бергмана .....262
- А.А.Шабозова, Г.Фарзом.** Наилучшие совместные приближения некоторых классов периодических функций, определяемых модулями непрерывности  $m$ -го порядка в  $L_2$ .....269
- А.Захурбеков.** Верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных “треугольными” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам.....275
- Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов.** О некоторых случаях решения двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями .....283

## АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Кохирова, Ф.Дж.Рахматуллаева, С.А.Борисенко.** Результаты наблюдений кометы P/2019 LD2 в обсерватории Санглох .....291

## ФИЗИКА

- Д.Рашидов, Т.Х.Салихов, С.Х.Табаров, А.Мирзо, Д.М.Шарифов, Ф.Х.Содиков.** Температуропроводность фуллереннаполненного полиэтилена .....303

## НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Н.С.Бекназарова, Дж.О.Шоалифов.** Комплексообразование в системе Hg(II) – 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тион – 0.1 моль/л HNO<sub>3</sub> – 298 К.....308

## ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- А.С.Курбонов, М.М.Тагоев, Р.Акрамзода, А.П.Тагаев, У.М.Мирсаидов.** Сравнительная оценка термодинамических характеристик разложения боросиликатных руд минеральными кислотами и уксусной кислотой.....314

## ПЕТРОХИМИЯ

- М.М.Мамадвафоев, Д.А.Давлатшоев.** К петрохимии базальтоидов и щелочных базальтоидов Кафандарского рудного поля (Восточный Гиссар) .....318

**БОТАНИКА**

**Н.С.Саидов, Д.С.Саттаров.** Итоги интродукции голосеменных растений на Североамериканском участке центрального ботанического сада Таджикистана за 85 лет .....**326**

**ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ**

**М.Б.Ниязмухамедова.** Содержание азота и белка в зелёной биомассе и в зерне тритикале.....**335**

**БИОХИМИЯ РАСТЕНИЙ**

**К.Алиев, Н.С.Диловарова, Н.Х.Норкулов, М.Х.Шукурова, З.Х.Норкулова.** Органоспецифичность про- и антиоксидантной системы в условиях *in vitro* и *ex vitro* у картофеля .....**341**

## CONTENTS

## MATHEMATICS

- S.A.Iskhokov, B.A.Rakhmonov.** About isomorphism of some fractional order Sobolev type spaces .....243
- M.Sh.Shabozov, A.S.Quraishi.** On the joint approximation of functions and its derivatives in the average on the real axis by algebraic polynomials with the weight of Chebyshev-Hermit .....249
- A.G.Aydarmamadov, N.U.Qadamshoev.** On approximation of analytic functions in weight Bergman's space.....262
- A.A.Shabozova, G.Farzom.** The best joint approximation of some classes of periodic functions determined by the module of continuity of the  $m$ -th order in  $L_2$  .....269
- A.Zahurbekov.** Upper bounds of the best mean-square approximation of function of many variables by "triangular" Fourier sums over arbitrary orthogonal systems .....275
- L.N.Rajabova, F.M.Akhmadov.** On some cases of two-dimensional integral equations of Volterra type with boundary singular and strongly-singular lines .....283

## ASTRONOMY

- G.I.Kokhirova, F.Dzh.Rakhmatullaeva, S.A.Borysenko.** Results of observations of comet P/2019 LD2 in the Sanglokh observatory .....291

## PHYSICS

- D.Rashidov, T.Kh.Salikhov, S.Kh.Tabarov, A.Mirzo, D.M.Sharifov, F.Kh.Sodikov.** Thermal diffusivity of fullerene-filled polyethylene .....303

## INORGANIC CHEMISTRY

- N.S.Beknazarova, J.O.Shoyalifov.** Complex formation in the system Hg (II) - 1-phenyl-2,3-dimethylpyrazoline-5-thione - 0.1 mol / l HNO<sub>3</sub> - 298 K.....308

## PHYSICAL CHEMISTRY

- A.S.Kurbonov, M.M.Tagoev, R.Akramzoda, A.P.Tagayev, U.M.Mirsaidov.** Comparative assessment of thermodynamic characteristics of borosilicate ore decomposition with mineral acids and acetic acid.....314

## PETROCHEMISTRY

- M.M.Mamadvafoev, D.A.Davlatshoev.** To the petrochemistry of basaltoids and alkaline basaltoids of the Kafandara ore field (Eastern Gissar).....318

**BOTANY**

**N.S.Saidov, D.S.Sattarov.** Results of the introduction of hoseed plants in the North American area the Central Botanical Garden of Tajikistan for 85 years .....321

**PLANT PHYSIOLOGY**

**M.B.Niyazmukhamedova.** The content of nitrogen and protein in green biomass and in grain tritikale ....335

**PLANT BIOCHEMISTRY**

**K.Aliev, N.S.Dilovarova, N.Kh.Norkulov, M.Kh.Shukurova, Z.Kh.Norkulova.** Organ specificity of pro- and antioxidant system of potato *in vitro* and *ex vitro* .....341

УДК 517.957

Член-корреспондент НАН Таджикистана С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов

## ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА СОБОЛЕВА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

*Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана*

В работе сначала изучаются интерполяционные свойства одного типа нормированных пространств дифференцируемых функций во всем евклидовом пространстве со степенным весом, а затем с помощью эллиптического оператора с вырождением строится изоморфизм некоторой шкалы таких пространств.

**Ключевые слова:** пространство типа Соболева дробного порядка, интерполяция функциональных пространств, эллиптический оператор, степенное вырождение, изоморфизм функциональных пространств.

1. Символом  $\mathbb{R}^n$  обозначим  $n$ -мерное евклидово пространство точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Пусть  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  – мультииндекс,  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  – длина мультииндекса  $k$ . Обозначим через  $u^{(k)}(x)$  обобщенную в смысле С.Л.Соболева производную функции  $u(x)$  мультииндекса  $k$ . При натуральном  $r$  и вещественном  $\alpha$  вводим пространство  $V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$  функций  $u(x)$ , определенных во всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ , имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные порядка  $r$  с конечной нормой

$$\|u; V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int d^{2\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^2 dx + \int d^{2(\alpha+r)}(x) |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где  $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$ . Здесь и далее во всех интегралах по всему пространству  $\mathbb{R}^n$  мы опускаем символ  $\mathbb{R}^n$ . По аналогии к случаю ограниченных областей, рассмотренному в [1, глава 3], можно определить пространство  $V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$  для не целых значений параметра  $r$ . Если  $r$  – не целое положительное число и  $\{r\} \neq 0$  – его дробная часть, то пространство  $V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$  определяется с помощью следующей нормы

$$\|u; V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)\| = \left[ \iint \sum_{|k|=r} \frac{|d^\alpha(x)u^{(k)}(x) - d^\alpha(y)u^{(k)}(y)|^2}{|x-y|^{n+2\{r\}}} dx dy + \int d^{2(\alpha+r)}(x) |u(x)|^2 dx \right]^{1/2}, \quad (2)$$

**Адрес для корреспонденции:** Исхоков Сулаймон Абунасович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: sulaimon@mail.ru

где  $[r] = r - \{r\}$  – целая часть числа  $r$ .

Для описании правых частей вырождающихся эллиптических уравнений в процессе исследования разрешимости вариационных задач используются пространства  $V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$  с отрицательным значением параметра  $r$ . Чтобы определить пространство  $V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$  при  $r < 0$  в силу (1), (2) заметим, что пространство  $V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$  вложено в  $L_{2,\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$  при всех  $r \geq 0, \alpha \in (-\infty, +\infty)$ . Поэтому можно определить пространство  $V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$  при  $r < 0$  как пополнение пространства  $L_{2,-\alpha-r}(\mathbb{R}^n)$  по норме

$$\|f; V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)\| = \sup \frac{|(f, v)_{\alpha+r}|}{\|v; V_{2,-\alpha}^{-r}(\mathbb{R}^n)\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям  $v(x) \in V_{2,-\alpha}^{-r}(\mathbb{R}^n)$ . При этом элементы пространства  $V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$  отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над  $V_{2,-\alpha}^{-r}(\mathbb{R}^n)$ .

Далее мы изучим интерполяционные свойства пространств  $V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$ . Применим  $K$ -метод интерполяции банаховых пространств, который разработан Питре [4, 5] и сейчас широко применяется (см., например, [1, глава 3]; [2,3]). Этот метод также называется методом действительной интерполяции по Питре.

Напомним основную схему  $K$ -метода. Пусть  $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1$  – банаховы пространства с нормами  $\|\cdot; \mathbb{A}_0\|, \|\cdot; \mathbb{A}_1\|$  соответственно, непрерывно вложенными в отделимое линейное топологическое пространство  $\mathcal{A}$ . Через  $\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_1$  обозначим совокупность элементов  $u \in \mathcal{A}$ , представимых в виде

$$u = u_0 + u_1, \quad u_0 \in \mathbb{A}_0, \quad u_1 \in \mathbb{A}_1. \tag{3}$$

В линейном пространстве  $\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_1$  вводим норму следующим образом

$$\|u; \mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_1\| = \inf_{u=u_0+u_1} (\|u_0; \mathbb{A}_0\| + \|u_1; \mathbb{A}_1\|), \tag{4}$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям вида (3). Пространство  $\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_1$  с нормой (4) становится банаховым пространством.

Рассмотрим на  $\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_1$  функционал

$$K(t, u, \{\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1\}) = \inf_{u=u_0+u_1, u_j \in \mathbb{A}_j} (\|u_0; \mathbb{A}_0\| + t \|u_1; \mathbb{A}_1\|).$$

Совокупность элементов  $u \in (\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_1)$  с конечной нормой

$$\|u; (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1)_{\theta, q}\| = \left( \int_0^{+\infty} \left[ t^{-\theta} K(t, u, \{\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1\}) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \quad \theta \in (0, 1), \quad 1 \leq q < \infty$$

становится банаховым пространством и обозначается символом  $(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1)_{\theta, q}$ .

Пространства  $(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1)_{\theta, q}$  будут интерполяционными между  $\mathbb{A}_0$  и  $\mathbb{A}_1$ . Это означает, что (см., например, [1, глава 1]) если какой-нибудь оператор  $\mathbb{L}$  действует ограниченно из  $\mathbb{A}_0$  в  $\mathbb{A}'_0$  и  $\mathbb{A}_1$  в  $\mathbb{A}'_1$ , то  $\mathbb{L}$  действует также ограниченно из  $(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1)_{\theta, q}$  в  $(\mathbb{A}'_0, \mathbb{A}'_1)_{\theta, q}$  при всех  $\theta \in (0, 1)$ ,  $1 \leq q < \infty$  и имеет место неравенство

$$\|\mathbb{L}; (\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1)_{\theta, q} \rightarrow (\mathbb{A}'_0, \mathbb{A}'_1)_{\theta, q}\| \leq C_{\theta, q} \|\mathbb{L}; \mathbb{A}_0 \rightarrow \mathbb{A}'_0\|^{1-\theta} \|\mathbb{L}; \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}'_1\|^\theta,$$

где  $C_{\theta, q}$  – некоторое положительное число. При этом, если  $\mathbb{L}$  – изоморфизм пространств  $\mathbb{A}_j$  на  $\mathbb{A}'_j$ ,  $j \in \{0, 1\}$ , то он также будет изоморфизмом пространств  $(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1)_{\theta, q}$  на  $(\mathbb{A}'_0, \mathbb{A}'_1)_{\theta, q}$  при всех  $\theta \in (0, 1)$ ,  $1 \leq q < \infty$ .

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha_j \in (-\infty, +\infty)$ ,  $r_j \geq 0$  для  $j \in \{1, 2\}$ . Тогда для всех  $\theta \in (0, 1)$  имеет место равенство

$$\left( V_{2; \alpha_1}^{r_1}(\mathbb{R}^n), V_{2; \alpha_2}^{r_2}(\mathbb{R}^n) \right)_{\theta, 2} = V_{2; \alpha}^r(\mathbb{R}^n),$$

где  $r = (1 - \theta)r_1 + \theta r_2$ ,  $\alpha = (1 - \theta)\alpha_1 + \theta\alpha_2$ .

Используя свойство интерполяции двойственных пространств с помощью этой теоремы доказывается следующая

**Теорема 2.** Пусть  $\alpha_j \in (-\infty, +\infty)$ ,  $r_j \leq 0$  для  $j \in \{1, 2\}$ . Тогда для всех  $\theta \in (0, 1)$  имеет место равенство

$$\left( V_{2; \alpha_1}^{r_1}(\mathbb{R}^n), V_{2; \alpha_2}^{r_2}(\mathbb{R}^n) \right)_{\theta, 2} = V_{2; \alpha}^r(\mathbb{R}^n),$$

где  $r = (1 - \theta)r_1 + \theta r_2$ ,  $\alpha = (1 - \theta)\alpha_1 + \theta\alpha_2$ .

**2.** На функциях  $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  рассмотрим интегродифференциальную полуторалинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int d^{2\alpha + 2r - |k| - |l|}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad (5)$$

коэффициенты  $a_{kl}(x)$  которой являются ограниченными комплекснозначными функциями. Учитывая плотность класса  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  в пространстве  $V_{2, \alpha}^r(\mathbb{R}^n)$  с помощью неравенства Коши-

Буняковского и теорем вложения для пространств  $V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$  доказывается, что полуторалинейная форма (5) по непрерывности определяется для всех  $u, v \in V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$ . Поэтому за область определения формы (5) будем принимать все пространства  $V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$ .

Для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  и любого набора комплексных чисел  $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \leq r} \subset \mathbb{C}$  вводим функцию

$$A(x, \zeta) = \sum_{|k|, |l| \leq r} a_{kl}(x) \zeta_k \bar{\zeta}_l$$

и предположим, что для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \leq r} \subset \mathbb{C}$  выполнены условия

$$|\arg A(x, \zeta)| < \varphi, \tag{6}$$

$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \leq M \operatorname{Re} \{ \gamma(x) A(x, \zeta) \}, \tag{7}$$

где  $\varphi$  – некоторое число из интервала  $(0, \pi)$  и отличная от нуля комплекснозначная функция  $\gamma(x)$  всюду непрерывна и для любого числа  $\nu > 0$  существует число  $R_\nu > 0$  такое, что  $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$  для всех  $x, y \in \mathbb{R}^n$  таких, что  $|x| > R_\nu$ ,  $|y| > R_\nu$ . Здесь и далее считается, что функция  $\arg z$  принимает значения на отрезке  $(-\pi, \pi]$ .

**Задача  $D_\lambda$ .** Для заданного функционала  $F \in V_{2,-\alpha}^{-r}(\mathbb{R}^n)$  требуется найти решение  $u(x)$  уравнения

$$B[u, v] + \lambda \int d^{2(\alpha+r)}(x) u(x) \overline{v(x)} dx = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

принадлежащее пространству  $V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$ .

Задача  $D_\lambda$  является частным случаем вариационной задачи Дирихле, изученной в работе [9]. Подобные задачи также рассматривались в работах авторов [7, 8].

Сформулируем результаты относительно разрешимости и гладкости решения задача  $D_\lambda$ , которые являются следствием результатов работы [9] и используются при доказательстве основного результата нашей работы.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (6), (7). Тогда существует сектор  $S \subset \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi - \varphi\} \cup \{0\}$  с вершиной в нуле и положительное число  $\sigma_0$  такое, что если  $\lambda \in S$  и  $|\lambda| \geq \sigma_0$ , то для любого заданного функционала  $F \in V_{2,-\alpha}^{-r}(\mathbb{R}^n)$  задача  $D_\lambda$  имеет единственное решение и при этом справедлива оценка

$$\|u; V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)\| \leq M \|F; V_{2,-\alpha}^{-r}(\mathbb{R}^n)\|,$$

где число  $M > 0$  не зависит от  $\lambda \in S$  и функционала  $F$ .



**Теорема 4.** Пусть выполнены все условия теоремы 3 и существует натуральное число  $m \leq r$  такое, что

$$|a_{kl}^{(s)}(x)| \leq M d^{|s|}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

для любого мультииндекса  $s: |s| \leq m$ . Тогда существует сектор  $S \subset \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi - \varphi\} \cup \{0\}$  с вершиной в нуле и положительное число  $\sigma_0$  такое, что если  $\lambda \in S$  и  $|\lambda| \geq \sigma_0$ , то для любого заданного элемента  $F \in V_{2;-\alpha-m}^{-r+m}(\mathbb{R}^n)$  существует единственное решение  $u(x) \in V_{2;\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$  задачи  $D_\lambda$ . Это решение принадлежит пространству  $V_{2;\alpha-m}^{r+m}(\mathbb{R}^n)$  и справедлива следующая оценка

$$\|u; V_{2;\alpha-m}^{r+m}(\mathbb{R}^n)\| \leq M \|F; V_{2;-\alpha-m}^{-r+m}(\mathbb{R}^n)\|,$$

где число  $M > 0$  не зависит от  $\lambda \in S$  и функционала  $F$ .

Теперь сформулируем результат об изоморфизме пространств типа  $V_{2;\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$ , который доказывается с помощью теорем 1-4.

**Теорема 5.** Пусть выполнены все условия теоремы 4 и сектор  $S$  и число  $\sigma_0$  такие же, как в этой теореме. Пусть  $\lambda$  – произвольное число из сектора  $S$  такое, что  $|\lambda| > \sigma_0$ . Тогда для любого числа  $\beta$  из отрезка  $[0, m]$  оператор  $L_\lambda$  задачи  $D_\lambda$  осуществляет изоморфизм (алгебраический и топологический) пространства  $V_{2;\alpha-\beta}^{r+\beta}(\mathbb{R}^n)$  на  $V_{2;\alpha-\beta}^{-r+\beta}(\mathbb{R}^n)$ .

**Замечание.** Результат, сформулированный в теореме 5, в случае целого значения параметра  $\beta$  доказывается без привлечения  $K$ -метода интерполяции и ранее был опубликован в работе авторов [9].

Поступило 01.02.2021 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980.
2. Никольский С.М., Лирозкин П.И., Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. – Известия вузов. Математика, 1988, №8, с.4-30.
3. Лизоркин П.И. Интерполяция пространств  $L_p$  с весом. – Тр. МИАН СССР, 1976, т. 140, с.201-211.
4. Peetre J. A theory of interpolation of normed spaces. – Notes Universidade de Brasilia 1963 [Notas de matematica, v. 39 (1968)].
5. Peetre J. Interpolation i abstracta rum. – Lecture Notes, Lund, 1966.
6. Исхоков С.А., Рахмонов Б.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле во всем пространстве, связанной с некоэрцитивной формой. – Уфимский математический журнал. 2020, т.12, №1, с.13-29.

7. Исмоков С.А., Рахмонов Б.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве. – ДАН РТ, 2018, т.61, №3, с.224-230.
8. Исмоков С.А., Рахмонов Б.А. Вариационная задача Дирихле, связанная с некоэрцитивной формой во всем пространстве. – Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н., 2018, №2, с.17-25.
9. Исмоков С.А., Рахмонов Б.А. Об изоморфизме некоторых нормированных пространств дифференцируемых функций во всем пространстве. – Мат-лы междун. конф. ”Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений”, – Душанбе, 25-26 декабря 2020 г., с.147-150.

С.А.Исмоков, Б.А.Рахмонов

## ОИД БА ИЗОМОРФИЗМИ БАЪЗЕ ФАЗОҶОИ НАВЪИ СОБОЛЕВИИ ТАРТИБИ КАСРӢ

*Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола аввал хосиятҳои интерполясионии як навъи фазоҳои нормиронидашудаи функцияҳои дифференсиронидашаванда дар тамоми фазои евклидӣ бо вазни дараҷагӣ омӯхта шуда, сипас бо ёрии оператори эллиптикӣ бо таназзулӣ дараҷагӣ изоморфизми як микёси чунин фазоҳо сохта шудаанд.

**Калимаҳои калидӣ:** фазои навъи Соболеви тартиби касрӣ, интерполятсияи фазоҳои функционали, оператори эллиптикӣ, таназзулӣ дараҷатӣ, изоморфизми фазоҳои функционалӣ.

S.A.Iskhokov, B.A.Rakhmonov

## ABOUT ISOMORPHISM OF SOME FRACTIONAL ORDER SOBOLEV TYPE SPACES

*Institute of Mathematics named after A.D.Dzhuraev,  
National Academy of Sciences of Tajikistan*

In the paper, we first study the interpolation properties of one type of normed spaces of differentiable functions in the entire Euclidean space with a power-law weight, and then, using an elliptic operator with degeneration, an isomorphism of some scale of such spaces is constructed.

**Key words:** Sobolev-type space of fractional order, interpolation of functional spaces, elliptic operator, power degeneration, an isomorphism of functional spaces.

УДК 517.5

Академик НАН Таджикистана М.Ш.Шабозов, А.С.Курайши

## О СОВМЕСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ В СРЕДНЕМ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ С ВЕСОМ ЧЕБЫШЕВА-ЭРМИТА

*Таджикский национальный университет*

Получены точные неравенства типа Джексона-Стечкина на множествах  $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ , в которых величины наилучших совместных полиномиальных приближений оцениваются сверху обобщенным модулем непрерывности  $m$ -го порядка.

**Ключевые слова:** совместное приближение, неравенства типа Джексона-Стечкина, верхняя грань, обобщенный модуль непрерывности,  $\mathcal{H}$ -функционал.

**1. Предварительные результаты.** Пусть  $L_2(\mathbb{R})$  — пространство измеримых вещественных функций, суммируемых с квадратом модуля на всей оси  $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ . Символом  $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ , где  $\rho(x) = e^{-x^2}$ , обозначим множество функций  $f$  таких, для которых

$$\|f\|_{2,\rho} := \|f\|_{L_{2,\rho}(\mathbb{R})} = \left( \int_{\mathbb{R}} \rho(x) |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

В работах [1, 2] решены некоторые экстремальные задачи теории приближения функций алгебраическими полиномами в среднем на всей оси с весом Чебышева-Эрмита  $\rho$ . В [2] для некоторых классов функций, определенных модулями непрерывности  $m$ -го порядка и  $\mathcal{H}$ -функционалами  $r$ -х производных, вычислены значения различных  $n$ -поперечников, а также приведен обстоятельный обзор литературы по данной тематике. В этой статье мы продолжим указанную тематику в пространстве  $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$  и докажем ряд точных неравенств типа Джексона-Стечкина для наилучших совместных приближений функций и ее промежуточных производных  $f^{(\nu)}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, r-1$ .

Введем необходимые понятия и определения, нужные нам в дальнейшем. Пусть  $\mathcal{P}_n$  — подпространство алгебраических полиномов степени, не более  $n$ . Равенством

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} := \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\rho} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

определим величину наилучшего полиномиального приближения функции  $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$  элементами подпространства  $\mathcal{P}_{n-1}$ .

*Адрес для корреспонденции:* Шабозов Мирганд Шабозович.734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: shabozov@mail.ru

Пусть  $\{H_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — ортонормированная на вещественной оси  $\mathbb{R}$  с весом  $\rho$  система многочленов Эрмита [3, стр. 170]

$$H_n(x) := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!2^n \sqrt{\pi}}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Хорошо известно [3, стр. 193-194], что любую функцию  $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$  можно разложить в ряд Фурье по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) H_k(x), \tag{1}$$

где

$$c_k(f) = \int_{\mathbb{R}} \rho(t) f(t) H_k(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \tag{2}$$

— коэффициенты Фурье-Эрмита функции  $f$ , а знак равенства в (1) понимается в смысле сходимости в пространстве  $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ . Пусть

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) H_k(x).$$

Тогда, как известно [1, стр. 25-26],

$$E_{n-1}(f) := \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Обозначим через  $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$  ( $r \in \mathbb{N}$ ,  $L_{2,\rho}^{(0)}(\mathbb{R}) \equiv L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ ) — множество функций  $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ , у которых производные  $(r-1)$ -го порядка  $f^{(r-1)}$  абсолютно непрерывны на любом конечном интервале, а производные  $r$ -го порядка принадлежат пространству  $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ .

В дальнейшем отношение  $0/0$  считаем равным 0 и полагаем

$$\alpha_{n,r} := n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) = n! / (n-r)!, \quad n \geq r, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+.$$

Так как для произвольной функции  $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$  при любом  $s = 0, 1, \dots, r$  имеет место разложение  $s$ -й производной в ряд Фурье-Эрмита [4]

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=s}^{\infty} \sqrt{2^s \alpha_{k,s}} c_k(f) H_{k-s}(x), \tag{4}$$

то, исходя из формул (3) и (4), для произвольного натурального  $n > r \geq s$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$  значение величины наилучшего приближения функции  $f^{(s)} \in L_{2,\rho}^{(s)}(\mathbb{R})$  элементами подпространство  $\mathcal{P}_{n-s-1}$  имеем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} 2^s \alpha_{n,s} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

Имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq s$ . Тогда справедливо неравенство

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \leq \left( \frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \right)^{1/2} E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}. \quad (6)$$

Существует функция  $f_0 \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ , для которой в неравенстве (6) имеет место знак равенства.

**Доказательство.** Пользуясь равенством (5), для любой функции  $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$  при любых  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq s$  имеем:

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_{2,\rho} &= \sum_{k=n}^{\infty} 2^s \alpha_{k,s} c_k^2(f) = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2^s \alpha_{k,s}}{2^r \alpha_{k,r}} \cdot 2^r \alpha_{k,r} c_k^2(f) \leq \frac{1}{2^{r-s}} \min_{k \geq n} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \sum_{k=n}^{\infty} 2^r \alpha_{k,r} c_k^2(f) = \\ &= \frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\rho}, \end{aligned} \quad (7)$$

откуда и следует неравенство (6). Покажем точность неравенства (6) для функции  $f_0 \in H_n(x) \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ . В силу (5) при любом  $s = 0, 1, \dots, r$  имеем

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho} = \sqrt{2^s \alpha_{n,s}}, \quad (8)$$

а потому, пользуясь (8), запишем

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho} &= \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \sqrt{2^r \alpha_{n,r}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot E_{n-r-1}(f_0^{(r)})_{2,\rho}, \end{aligned} \quad (9)$$

и тем самым теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает

**Следствие 1.** В условиях теоремы 1 имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}} = \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}. \tag{10}$$

**Доказательство.** В самом деле, с одной стороны, из неравенства (6) сразу вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (10)

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}} \leq \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}, \tag{11}$$

а с другой стороны, для получения оценки снизу указанной величины, учитывая равенство (9), имеем

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}} \geq \frac{E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho}}{E_{n-r-1}(f_0^{(r)})_{2,\rho}} = \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}. \tag{12}$$

Требуемое равенство (10) следует из сравнения неравенств (11) и (12). Следствие 1 доказано.

Пусть  $\mathfrak{M}^{(r)}$  ( $r \in \mathbb{Z}_+$ ) — некоторый класс функций  $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ . Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathfrak{M}^{(r)})_{2,\rho} := \sup\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\}. \tag{13}$$

Через  $W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$  обозначим класс функций  $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ , у которых  $\|f^{(r)}\|_{2,\rho} \leq 1$ . Справедлива следующая

**Теорема 2.** Пусть  $n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, n > r \geq s$ . Тогда

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})) = \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}. \tag{14}$$

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что для произвольной функции  $f \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ , согласно определению класса  $W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ , имеем:

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho} \leq \|f^{(r)}\|_{2,\rho} \leq 1. \tag{15}$$

Учитывая соотношение (15) из неравенства (6) для любой функции  $f \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$  получаем:

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \leq \left(\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\right)^{1/2} E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho} \leq \left(\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\right)^{1/2},$$

откуда сразу следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (14)

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})) \leq \left(\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\right)^{1/2}. \tag{16}$$

С другой стороны, для функции

$$g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} H_n(x) \tag{17}$$

при любом  $s = 0, 1, \dots, r$  имеем

$$g_0^{(s)}(x) = \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot H_{n-s}(x), \tag{18}$$

из которого также следует, что

$$g_0^{(r)}(x) = H_{n-r}(x), \quad \|g_0^{(r)}\|_{2,\rho} = 1.$$

Последнее равенство означает, что  $g_0 \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ , и так как в силу (18)

$$E_{n-s-1}(g_0^{(s)})_{2,\rho} = \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}, \tag{19}$$

то имеет место оценка снизу

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})) \geq E_{n-s-1}(g_0^{(s)}) = \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}. \tag{20}$$

Из сопоставления неравенств (16) и (20) получаем требуемое равенство (14), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

**Теорема 3.** При любых  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq s$  имеет место равенство

$$\sup \left\{ \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{(E_{n-1}(f)_{2,\rho})^{1-s/r}} : f \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \right\} = \left( \frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}} \right)^{1/2}. \tag{21}$$

**Доказательство.** В [2] для произвольной функции  $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$  доказано неравенство типа Колмогорова (см., неравенство (69) в [2, с. 682]), которое в наших обозначениях имеет следующий вид:

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \leq \left( \frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}} \right)^{1/2} \{E_{n-1}(f)_{2,\rho}\}^{1-s/r} \{E_{n-r-1}(f^{(r)})\}^{s/r}. \tag{22}$$

Если в неравенстве (22) предполагать, что функция  $f \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ , то получаем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \leq \left( \frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}} \right)^{1/2} \cdot (E_{n-1}(f)_{2,\rho})^{1-s/r},$$

откуда сразу следует оценка сверху экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (21):

$$\sup \left\{ \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{(E_{n-1}(f)_{2,\rho})^{1-s/r}} : f \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \right\} \leq \left( \frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}} \right)^{1/2}. \tag{23}$$

Соответствующая оценка снизу достигается для функции  $g_0 \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ , определенной равенством (17) и для которой при всех  $s = 0, 1, \dots, r$  имеет место равенство (19), причем

$$E_{n-1}(g_0)_{2,\rho} = \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}}. \text{ Пользуясь указанными равенствами, запишем оценку снизу}$$

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{(E_{n-1}(f)_{2,\rho})^{1-s/r}} : f \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \right\} &\geq \frac{E_{n-s-1}(g_0^{(s)})_{2,\rho}}{(E_{n-1}(g_0)_{2,\rho})^{1-s/r}} = \\ &= \left( \frac{\alpha_{n,s}}{2^{r-s} \alpha_{n,r}} \right)^{1/2} \cdot (2^r \cdot \alpha_{n,r})^{(1-s/r)/2} = \left( \frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Равенство (21) следует из сравнения оценок сверху (23) и снизу (24). Теорема 3 доказана.

**2. Неравенство типа Джексона-Стечкина.** Хорошо известно, что в экстремальных задачах аппроксимации  $2\pi$ -периодических функций тригонометрическими полиномами ведущую роль играет обычный оператор сдвига  $\tau_h f(x) = f(x+h)$  и определяемые с его помощью классические модули непрерывности различных порядков. В аналогичных задачах, связанных с аппроксимацией непериодических функций, основную роль играют операторы обобщенного сдвига и порождающиеся ими обобщенные модули непрерывности. В данной статье операторы обобщенного сдвига применяются в экстремальных задачах приближений функций суммами Фурье-Эрмита в пространстве Эрмита  $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ , в частности, устанавливается точное неравенство типа Джексона-Стечкина между наилучшим совместным приближением функций и их промежуточными производными  $E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}$  и обобщенным модулем непрерывности  $\tilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho}$ .

В пространстве  $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$  введем в рассмотрение оператор [4]:

$$F_h f(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x\sqrt{1-h^2} + ht) dt \quad (0 < h < 1), \tag{25}$$

который называется оператором обобщенного сдвига. Оператор  $F_h : L_2 \rightarrow L_2$  обладает следующими свойствами (см., [5, с. 557]):

1.  $F_h(\lambda f + \mu g) = \lambda F_h(f) + \mu F_h(g)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $f, g \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ ;
2.  $F_0 f(x) = f(x)$ ; 3.  $\|F_h f\| \leq \|f\|$ ; 4.  $\|F_h f - f\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0+$ ;
5.  $F_h H_n(x) = (1-h^2)^{n/2} H_n(x)$ .

Учитывая функцию (25), введем аналоги конечных разностей первого и высших порядков равенствами



$$\Delta_h^1 f(x) := F_h f(x) - f(x) = (F_h - \mathbb{I})f(x), \quad (26)$$

$$\Delta_h^m f(x) := \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (F_h - \mathbb{I})^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ ,  $F_h^k := F_h^1(F_h^{k-1})$ ,  $F_h^1 = F_h$ ,  $F_h^0 := \mathbb{I}$ ,  $\mathbb{I}$  – единичный оператор в пространстве  $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ .

Для оператора (25) в [4] доказано следующее разложение

$$F_h f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) (1-h^2)^{k/2} H_k(x), \quad (27)$$

где знак равенства понимается в ранее указанном смысле. Пользуясь равенством (27) с учетом формул (1) и (26) в смысле сходимости в  $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$  запишем

$$\Delta_h^1 f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) ((1-t^2)^{k/2} - 1) H_k(x).$$

Далее, учитывая последнее равенство, методом математической индукции для любого  $m \in \mathbb{N}$  получаем

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) ((1-h^2)^{k/2} - 1)^m H_k(x),$$

из которого применением равенства Парсеваля имеем

$$\|\Delta_h^m f\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f) (1 - (1-h^2)^{k/2})^{2m}. \quad (28)$$

Равенством

$$\tilde{\omega}_m(f, t)_{2,\rho} := \sup \{ \|\Delta_h^m f\|_{2,\rho} : |h| \leq t \}, \quad (29)$$

где  $0 < t \leq 1$ , определим обобщенный модуль непрерывности  $m$ -го ( $m \in \mathbb{N}$ ) порядка функции  $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ . Очевидно, что с учетом (28) характеристику гладкости (29) можно записать в явном виде

$$\tilde{\omega}_m^2(f, t)_{2,\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f) (1 - (1-t^2)^{k/2})^{2m}. \quad (30)$$

Так как, в силу (4), для произвольной функции  $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$

$$c_k(f^{(r)}) = \sqrt{2^r} \alpha_{k,r} c_k(f), \quad k = r, r+1, \dots,$$

то из (30) получаем

$$\tilde{\omega}_m^2(f^{(r)}, t)_{2,\rho} = \sum_{k=r}^{\infty} 2^r \alpha_{k,r} c_k^2(f) (1 - (1-t^2)^{k/2})^{2m}. \tag{31}$$

Имеет место следующее утверждение

**Теорема 4.** Пусть  $n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, n > r \geq s$ . Тогда имеет место неравенство

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \leq \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot (1 - (1-t^2)^{(n-r)/2})^{-m} \tilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho}. \tag{32}$$

Неравенство (32) точное в том смысле, что существует функция  $f_0 \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ , для которой оно обращается в равенство.

**Доказательство.** В [2] для произвольной функции  $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$  при любых  $m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, n > r$  доказано неравенство

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho} \leq (1 - (1-t^2)^{(n-r)/2})^{-m} \tilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho}. \tag{33}$$

Пользуясь неравенством (6) и учитывая (33), при любом  $s = 0, 1, 2, \dots, r$  получаем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \leq \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot (1 - (1-t^2)^{(n-r)/2})^{-m} \tilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho}$$

и неравенство (32) доказано. Точность неравенства (32) проверяется на ранее рассмотренной нами функции  $f_0(x) = H_n(x) \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ , для которой, кроме равенства (8), в силу (31) также верно соотношение

$$\tilde{\omega}_m(f_0^{(r)}, t)_{2,\rho} \equiv \sqrt{2^r \alpha_{n,r}} \cdot (1 - (1-t^2)^{(n-r)/2})^m. \tag{34}$$

Теперь, пользуясь равенством (8) и учитывая (34), имеем

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho} &= \sqrt{2^s \alpha_{n,s}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot (1 - (1-t^2)^{(n-r)/2})^{-m} \sqrt{2^r \alpha_{n,r}} (1 - (1-t^2)^{(n-r)/2})^m = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot (1 - (1-t^2)^{(n-r)/2})^{-m} \omega_m(f_0^{(r)}, t)_{2,\rho}, \quad 0 < t \leq 1. \end{aligned}$$

Этим точность неравенства (32) установлена и тем самым теорема 4 доказана.

**Следствие 2.** В условиях теоремы 4 справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\tilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho}} = \frac{1}{(1 - (1-t^2)^{(n-r)/2})^m}. \tag{35}$$

В частности, полагая в (35)  $t = \sqrt{2/(n-r)}$ ,  $n > r$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ , получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in \mathbb{N} \\ n > r}} \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\tilde{\omega}_m(f^{(r)}, \sqrt{2/(n-r)})_{2,\rho}} = \\ & = \sup_{\substack{f \in \mathbb{N} \\ n > r}} \left( 1 - \left( 1 - \frac{2}{n-r} \right)^{(n-r)/2} \right)^{-m} = (1 - e^{-1})^{-m}. \end{aligned}$$

Условимся под весовой функцией  $\varphi$  на отрезке  $[0, h]$  понимать неотрицательную суммируемую функцию, не эквивалентную нулю на этом же отрезке.

**Теорема 5.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq s$ ,  $0 < p \leq \infty$ ,  $h \in (0, 1]$ ,  $\varphi$  – весовая на отрезке  $[0, h]$  функция. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left( \int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \\ & = \left( \int_0^h \left( 1 - (1-t^2)^{(n-r)/2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \tag{36}$$

**Доказательство.** В самом деле, из неравенства (32) для любой функции  $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$  получаем

$$\tilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \geq \sqrt{2^{r-s} \alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \left( 1 - (1-t^2)^{(n-r)/2} \right)^m. \tag{37}$$

Возведем обе части неравенства (37) в степень  $p$  ( $0 < p \leq \infty$ ), умножим на весовую функцию  $\varphi$  и проинтегрируем по  $t$  от  $t = 0$  до  $t = h$ , затем возведем снова обе части полученного соотношения в степень  $1/p$  ( $0 < p \leq \infty$ ), в итоге получим

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \geq \\ & \geq \sqrt{2^{r-s} \alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \left( \int_0^h \left( 1 - (1-t^2)^{(n-r)/2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Так как полученное неравенство верно для любой функции  $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ , то из него получаем оценку сверху для экстремальной характеристики, стоящей в левой части неравенства (15):

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left( \int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} &\leq \\ &\leq \left( \int_0^h (1 - (1-t^2)^{(n-r)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \tag{38}$$

С другой стороны, для рассмотренной нами в конце доказательства теоремы 2 функции  $f_0(x) = H_n(x) \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ , для которой справедливы равенства (8) и (34), получаем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left( \int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} &\geq \\ &\geq \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho}}{\left( \int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f_0^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \\ &= \left( \int_0^h (1 - (1-t^2)^{(n-r)/2})^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \tag{39}$$

Очевидно, что требуемое равенство (36) следует из сопоставления соотношений (38) и (39), чем и завершается доказательство теоремы 5.

**Следствие 3.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq s$ ,  $n - r \geq 2$ ,  $\varphi(t) := (n - r)t(1 - t^2)^{(n-r)/2-1}$ ,  $0 \leq t \leq h$ ,  $h \in (0, 1]$ . Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left( (n-r) \int_0^h \tilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} t(1-t^2)^{(n-r)/2-1} dt \right)^{1/p}} &= \\ &= \frac{(mp + 1)^{1/p}}{(1 - (1-h^2)^{(n-r)/2})^{m+1/p}}. \end{aligned} \tag{40}$$

В частности, полагая в (40)  $h = \sqrt{2/(n-r)}$  и переходя к верхней грани по всем  $n \in \mathbb{N}$  ( $n > r$ ), в обеих частях получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in \mathbb{N} \\ n > r}} \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left( (n-r) \int_0^{\sqrt{2/(n-r)}} \tilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} t(1-t^2)^{(n-r)/2-1} dt \right)^{1/p}} = \\ & = \sup_{\substack{f \in \mathbb{N} \\ n > r}} \frac{(mp+1)^{1/p}}{\left( 1 - \left( 1 - \frac{2}{n-r} \right)^{(n-r)/2} \right)^{m+1/p}} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \end{aligned} \tag{41}$$

В свою очередь, полагая в (41)  $p = 1/m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , имеем

$$\sup_{\substack{f \in \mathbb{N} \\ n > r}} \frac{\sqrt{2^{r-s} \alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left( (n-r) \int_0^{\sqrt{2/(n-r)}} \tilde{\omega}_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_{2,\rho} t(1-t^2)^{(n-r)/2-1} dt \right)^m} = \frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

Пусть  $H \in (0,1]$ ;  $p \in (0,+\infty]$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq s$ ,  $\varphi$  – весовая на отрезке  $[0, h]$  функция. Обозначим через  $HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)$  класс, состоящий из функций  $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ , у которых производные  $r$ -го порядка  $f^{(r)}$  удовлетворяют условию

$$\int_0^H \tilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt \leq 1.$$

В следующей теореме приводим решение экстремальной задачи (13) в случае, когда  $\mathfrak{M}^{(r)} = HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)$ .

**Теорема 6.** *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-s-1}(HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)) & := \sup \left\{ E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} : f \in HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi) \right\} = \\ & = \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left\{ \int_0^H \left( 1 - (1-t^2)^{(n-r)/2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned} \tag{42}$$

**Доказательство.** Для получения оценки сверху экстремальной величины, стоящей в левой части равенства (42), заметим, что из неравенства (38) для произвольной функции  $f \in HW_{2,\rho}^{r,p}(\omega_m, \varphi)$  получаем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \leq \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left\{ \int_0^H \left( 1 - (1-t^2)^{(n-r)/2} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p},$$

откуда сразу следует, что

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{n-s-1}(HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)) \leq \\ & \leq \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left\{ \int_0^H \left(1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned} \tag{43}$$

Чтобы получить оценку снизу указанной выше величины, записанной в левой части неравенства (43), введем в рассмотрение функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2^r} \alpha_{n,r}} \cdot \frac{H_n(x)}{\left( \int_0^H \left(1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}.$$

Для этой функции в силу равенств (4), (5) и (31) имеем

$$\begin{aligned} f_1^{(s)}(x) &= \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \frac{H_{n-s}(x)}{\left( \int_0^H \left(1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}, \quad s = 0, 1, \dots, r; \\ E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} &= \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left\{ \int_0^H \left(1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}; \end{aligned} \tag{44}$$

$$\tilde{\omega}_m(f_1^{(r)}, t)_{2,\rho} = \frac{\left(1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^m}{\left( \int_0^H \left(1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}};$$

$$\int_0^H \tilde{\omega}_m^p(f_1^{(r)}, t)_{2,\rho} \varphi(t) dt = 1.$$

Последнее равенство означает, что функция  $f_1 \in HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)$ , а потому, учитывая равенство (44), запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{n-s-1}(HW_{2,\rho}^{r,p}(\tilde{\omega}_m, \varphi)) \geq \\ & \geq \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left\{ \int_0^H \left(1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned} \tag{45}$$

Очевидно, что из сопоставления оценки сверху (43) с оценкой снизу (45) следует равенство (42) и таким образом теорема 6 доказана.

Поступило 17.03.2021 г.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абилов В.А. Оценка поперечника одного класса функций в пространстве  $L_2$ . – Матем. заметки, 1992, т.52, №1, с.3-8.
2. Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита и поперечники функциональных классов. – Матем. заметки, 2014, т.95, №5, с.666-684.
3. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979, 416 с.
4. Рафальсон С.З. О приближении функций в среднем Фурье-Эрмита. – Изв. вузов. Математика, 1968, №7, с.78-84.
5. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп. – М.: Наука, 1965, 588 с.

М.Ш.Шабозов, А.С.Курайши

**ДАР БОРАИ НАЗДИККУНИИ МИЁНАКВАДРАТИИ ЯКЧОЯИ ФУНКСИЯҲО  
ВА ҲОСИЛАҲОИ ОНҲО ДАР ТАМОМИ ТИРИ АДАДӢ БА ВОСИТАИ  
БИСӢРАЪЗОГИҲОИ АЛГЕБРАВӢ БО ВАЗНИ ЧЕБЫШЕВ-ЭРМИТ**

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола нобаробарии аниқи намуди Чексон-Стечкин барои бузургии наздиккунии якҷояи беҳтарини полиномиалии маҷмӯи  $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ , ки аз боло ба воситаи модули бефосилагии умумкардашудаи тартиби  $m$ -ум баҳо дода шудааст, ба даст оварда шудаанд.

**Калимаҳои калидӣ:** наздиккунии ҷамҷоя, нобаробарии намуди Чексон-Стечкин, сарҳади болоӣ, модули бефосилагии умумикардашуда,  $\mathcal{H}$ -функционал.

M.Sh.Shabozov, A.S.Quraishi

**ON THE JOINT APPROXIMATION OF FUNCTIONS AND ITS DERIVATIVES IN  
THE AVERAGE ON THE REAL AXIS BY ALGEBRAIC POLYNOMA WITH THE  
WEIGHT OF CHEBYSHEV-HERMIT**

*Tajik National University*

Sharp Jackson-Stechkin-type inequalities are obtained on the sets  $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ , in which the values of the best joint polynomial approximations are estimated from above by the generalized modulus of continuity of the  $m$ -th order.

**Key words:** joint approximation, Jackson-Stechkin type inequalities, upper bound, generic module continuity,  $\mathcal{H}$ -functional.

УДК 517.5

А.Г.Айдармамадов, Н.У.Кадамшоев

## О ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

*Технологический университет Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 15.08.2020 г.)*

В весовом пространстве Бергмана  $B_{2,\gamma}$  для классов аналитических в единичном круге функций, определяемых обобщёнными модулями непрерывности высшего порядка  $r$ -х производных, по аргументу доказаны некоторые неравенства между наилучшими приближениями и усреднёнными значениями модулей непрерывности высшего порядка.

**Ключевые слова:** аналитическая функция, обобщенный модуль непрерывности, наилучшее приближение, весовое пространство Бергмана, комплексный алгебраический полином,  $n$ -поперечники.

В настоящей работе изучаются аппроксимативные свойства аналитических в единичном круге функций

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, z = \rho e^{it}, 0 \leq \rho < 1$$

в весовом пространстве  $B_{q,\gamma}$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  с конечной нормой [1]

$$\|f\|_{q,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \gamma(\rho) |f(\rho e^{it})|^q d\rho dt \right)^{1/q},$$

где  $\gamma(|z|)$  – неотрицательная суммируемая неэквивалентная нулю на  $[0,1]$  функция, а интеграл понимается в смысле Лебега.

Всюду далее совокупность комплексных алгебраических полиномов степени  $\leq n$  обозначим

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, a_k \in \mathbb{C} \right\},$$

а символом

$$E_n(f)_{q,\gamma} = \inf \left\{ \|f - p_n\|_{q,\gamma} : p_n \in \mathcal{P}_n \right\}$$

обозначим величину наилучшего приближения функции  $f \in B_{q,\gamma}$  множеством  $\mathcal{P}_n$ . Равенством

**Адрес для корреспонденции:** Айдармамадов Алишер Гуломалиевич, Кадамшоев Ноибшо Улфатшоевич. 734061, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Н.Карабаева, 63/3, Технологический университет Таджикистана. E-mail: alisher1805@mail.ru; nnoyob-77@mail.ru



$$\begin{aligned} \omega_m(f, t)_{q,\gamma} &:= \sup \left\{ \left\| \Delta_h^m(f, \cdot, \cdot) \right\|_{q,\gamma} : |h| \leq t \right\} = \\ &= \sup \left\{ \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \gamma(\rho) \left| \Delta_h^m(f; \rho, u) \right|^q d\rho du \right)^{1/q} : |h| \leq t \right\}, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\Delta_h^m(f; \rho, u) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f(\rho e^{i(u+kh)})$$

– разность  $m$ -го порядка функции  $f(\rho e^{it})$  по аргументу  $t$  с шагом  $h$ , определим модуль непрерывности  $m$ -го порядка в пространстве  $B_{q,\gamma}$ .

Экстремальные задачи полиномиального приближения функции  $f \in B_{q,\gamma}$ , структурные свойства которой характеризуются модулем непрерывности (1), рассматривались, например, в работах [2-4]. При решении ряда задач аппроксимации аналитических функций часто используют различные модификации модулей гладкости (1). Например, иногда удобнее использовать следующую усредненную характеристику гладкости

$$\left| \Delta_m(f; \rho, \tau, u) \right|^q = \frac{1}{\tau^m} \int_0^\tau \cdots \int_0^\tau \left\| \Delta_{\bar{h}}^m f(\rho e^{iu}) \right\|^q dh_1 \cdots dh_m,$$

где

$$\bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_m), \Delta_{\bar{h}}^m := \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1,$$

$$\Delta_{h_j}^1 f(\rho e^{iu}) = f(\rho e^{i(u+h_j)}) - f(\rho e^{iu}),$$

используя которую, полагаем

$$\Omega_m(f, t)_{q,\gamma} = \sup \left\{ \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \gamma(\rho) \left| \Delta_m(f; \rho, \tau, u) \right|^q d\rho d\tau \right)^{1/q} : |u| \leq t \right\}. \tag{2}$$

Легко доказать, что для всех  $1 \leq q \leq \infty$  выполняется отношение слабой эквивалентности

$$\Omega_m(f, t)_{q,\gamma} \asymp \omega_m(f, t)_{q,\gamma}, 1 \leq q \leq \infty.$$

Для целых неотрицательных  $r$  производную  $r$ -го порядка функции  $f(z)$  по аргументу  $z = \rho e^{it}$  обозначим символом  $f_a^{(r)}(z)$ . При этом

$$f_a'(z) = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = f'(z) \cdot zi, f_a^{(r)}(z) = \{f_a^{(r-1)}(z)\}'_a, r \geq 2.$$

Далее, через  $B_{q,\gamma,a}^{(r)}$  обозначим множество функций  $f(z) \in B_{q,\gamma}$ , у которых  $\|f_a^{(r)}\|_{q,\gamma} < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ .

Среди актуальных задач теории полиномиальных приближений аналитических в круге функций в пространстве Бергмана  $B_{q,\gamma}, 1 \leq q \leq \infty$  экстремальная задача отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона  $E_{n-1}(f)_{q,\gamma} \leq \chi n^{-r} U_n(f_a^{(r)}, \tau/n)_{q,\gamma}, \tau \geq 0$  является наиболее важной, где  $U_m$  – некоторая характеристика гладкости функции  $f \in B_{q,\gamma}$ , например модули непрерывности  $m$ -го порядка  $\omega_m$  или  $\Omega_m$ ,  $\chi$  – некоторая константа, зависящая только от значений  $r$  и  $m$ .

Введем в рассмотрение следующую экстремальную характеристику

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi, h) := \sup_{\substack{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)} \\ f_a^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} \cdot n^r \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left( \int_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} \cdot \varphi(t) dt \right)^{1/p}},$$

где  $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, p, h \in \mathbb{R}_+, \varphi$  – неотрицательная суммируемая на отрезке  $[0, h]$  функция.

Имеет место следующее утверждение

**Теорема 1.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, 0 < p \leq \infty, 0 < h \leq \pi/n, \varphi$  – неотрицательная суммируемая на отрезке  $[0, h]$  не эквивалентная нулю функция. Тогда справедливо равенство

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi, h) = \{b_{n,m,r,p}(\varphi, h)\}^{-1},$$

где

$$b_{n,m,r,p}(\varphi, h) = \left( \int_0^h \left( 1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp/2} \cdot \varphi(t) dt \right)^{1/p}.$$

Из теоремы 1 вытекают следующие следствия.

**Следствие 1.** Пусть  $\varphi(t) \equiv 1, m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, 0 < p \leq \infty$  и  $0 < h \leq 3\pi/(4n)$ . Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)} \\ f_a^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^{r-1/p} E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left( \int_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \right)^{1/p}} = \left( \int_0^{nh} \left( 1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{mp/2} dt \right)^{-1/p}. \tag{3}$$

В частности, при  $p = 2/m, m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, r \geq m/2$  из (3) следует, что

$$\sup_{\substack{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)} \\ f_a^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} \cdot n^{r-\frac{m}{2}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left( \int_0^h \Omega_m^{2/m}(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \right)^{m/2}} = \frac{1}{(nh - Si(nh))^{m/2}},$$

где  $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$  – интегральный синус.

**Следствие 2.** Пусть  $\varphi(t) \equiv t$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $p = 2/m$ ,  $r \geq m/2$   $0 < h \leq \pi/n$ . Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)} \\ f_a^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{n^{\frac{r-m}{2}} E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left( \int_0^h t \Omega_m^{2/m}(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \right)^{m/2}} = \{(nh)^2 - 2(1 - \cos nh)\}^{-m/2}.$$

Заметим, что для произвольной функции  $f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$  все её последовательные производные  $f_a^{(s)}$  ( $s = \overline{0, r}$ ;  $r \in \mathbb{N}$ ) принадлежат также множеству  $B_{2,\gamma,a}^{(r)}$ . Поэтому имеет смысл ввести в рассмотрение следующую экстремальную характеристику

$$\chi_{n,m,r,p,s}(\varphi; h) := \sup_{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}} \frac{2^{m/2} \cdot n^{r-s} \cdot E_{n-1}(f_a^{(s)})_{2,\gamma}}{\left( \int_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} \cdot \varphi(t) dt \right)^{1/p}}, \tag{4}$$

где равенством

$$E_{n-1}(f^{(s)})_{2,\gamma} := \inf \left\{ \|f_a^{(s)} - p_{n-1}\|_{2,\gamma} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\}$$

определим величину наилучшего совместного приближения функции  $f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$  и её последовательных производных  $f_a^{(s)} \in B_{2,\gamma}^{(r)}$  комплексными алгебраическими полиномами  $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ . В работе [5] доказано, что

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} := \|f - T_{n-1}(f)\|_{B_{2,\gamma}} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right\}^{1/2}, \tag{5}$$

где  $T_{n-1}(f) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f) z^k$  – частная сумма порядка  $n-1$  ряда Тейлора разложения функции  $f(z)$  в единичном круге  $|z| < 1$ . Заметим, что для функции  $f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$  коэффициент

$$|c_k(f_a^{(s)})|^2 = k^{2s} |c_k(f)|^2.$$

Из равенства (5) при любом  $s \in [0, r]$  получаем

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_{2,\gamma} = \|f^{(s)} - T_{n-1}(f^{(s)})\|_{B_{2,\gamma}} =$$

$$= \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right\}^{1/2}. \tag{6}$$

**Теорема 2.** Пусть  $m, n, r \in \mathbb{N}$ ;  $s \in \mathbb{Z}_+$ ;  $s \leq r$ ;  $0 < h \leq 3\pi / (4n)$ ,  $\varphi \geq 0$  – суммируемая не эквивалентная нулю функция на отрезке  $[0, h]$ . Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \chi_{n,m,r,p,s}(\varphi; h) &= \chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) = \\ &= b_{n,m,r,p}(\varphi; h) = \left( \int_0^h \left( 1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp/2} \cdot \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \tag{7}$$

**Доказательство.** В правой части равенства (4), полагая  $f_a^{(s)} = g$ , получаем  $f_a^{(r)} = g_a^{(r-s)}$ . Последнее равенство означает, что из того, что  $f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$ , то  $g \in B_{2,\gamma,a}^{(r-s)}$ , а потому, пользуясь результатом теоремы 1, получаем

$$\begin{aligned} \chi_{n,m,r,p,s}(\varphi; h) &= \sup_{\substack{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} \cdot n^{r-s} \cdot E_{n-1}(f_a^{(s)})_{2,\gamma}}{\left( \int_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} \cdot \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \\ &= \sup_{\substack{g \in B_{2,\gamma,a}^{(r-s)} \\ g^{(r-s)} \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} \cdot n^{r-s} \cdot E_{n-1}(g)_{2,\gamma}}{\left( \int_0^h \Omega_m^p(g_a^{(r-s)}, t)_{2,\gamma} \cdot \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \chi_{n,m,r-s,p}(\varphi; h) = \\ &= \left( \int_0^h \left( 1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp/2} \cdot \varphi(t) dt \right)^{-1/p} = \chi_{n,m,r,p}(\varphi; h), \end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Выше мы отметили, что если  $f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$ , то и производные  $f^{(s)} \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$  ( $s = \overline{0, r}$ ;  $r \in \mathbb{N}$ ), а потому интерес представляет следующая задача совместного приближения: пусть  $\mathfrak{M}^{(r)}$  – некоторое подмножество функций из множества  $B_{2,\gamma,a}^{(r)}$ .

Требуется найти значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M}^{(r)})_{2,\gamma} = \sup\{E_{n-1}(f_a^{(s)})_{B_{2,\gamma}} : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\}.$$

Пусть  $\Phi(h)$ ,  $h \in \mathbb{R}_+$  – непрерывная неубывающая функция такая, что  $\Phi(0) = 0$ . Символом  $W_{p,m,a}^{(r)}(\Phi; \varphi)_2 := W_{p,a}^{(r)}(\Omega_m; \Phi, \varphi)_2$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $0 < p \leq \infty$ ,  $\varphi$  – весовая на  $[0, h]$  функция, обозначен класс функций  $f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$ , для которых при любом  $h \in (0, 3\pi / (4n)]$  имеет место неравенство

$$\int_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} \varphi(t) dt \leq \Phi^p(h).$$

Имеет место следующая

**Теорема 3.** Пусть  $n, m, r \in \mathbb{N}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq s$ ,  $0 < p \leq \infty$ ,  $h \in [0, 3\pi / (4n)]$ . Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{p,m}^{(r)}(\Phi; \varphi))_2 &:= \sup\{E_{n-1}(f^{(s)})_{2,\gamma} : f \in W_{p,m}^{(r)}(\Phi; \varphi)\} = \\ &= \frac{1}{2^{m/2} \cdot n^{r-s}} \cdot \left( \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi(h). \end{aligned} \quad (8)$$

**Доказательство.** Из равенства (7) для произвольной функции  $f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$  при любых  $m, n, r \in \mathbb{N}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq s$ ,  $0 < p \leq \infty$  вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{2^{m/2} \cdot n^{r-s}} \cdot \frac{\left( \int_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}{\left( \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}.$$

Отсюда для произвольной функции  $f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$  получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)})_{2,\gamma} \leq \frac{1}{2^{m/2} \cdot n^{r-s}} \left( \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi(h). \quad (9)$$

Для получения аналогичной оценки снизу введём в рассмотрение функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{2^{m/2} \cdot n^r} \left( \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi(h) \cdot z^n.$$

Для этой функции легко вычислить, что

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f_1^{(s)})_{2,\gamma} &= \frac{1}{2^{m/2} \cdot n^{r-s}} \left( \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi(h), \\ \left( \int_0^h \Omega_m^p(f_1^{(s)}, t)_{2,\gamma} \varphi(t) dt \right)^{1/p} &= \Phi(h). \end{aligned} \quad (10)$$

Последнее равенство означает, что функция  $f_1 \in W_{p,m}^{(r)}(\varphi, \Phi)$ , а потому, учитывая неравенство (9), запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{p,m}^{(r)}(\varphi, \Phi))_{2,\gamma} &\geq E_{n-1}(f_1^{(s)})_{2,\gamma} = \\ &= \frac{1}{2^{m/2} \cdot n^{r-s}} \cdot \left( \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi(h). \end{aligned} \quad (11)$$

Равенство (8) получаем в результате сопоставления оценки сверху (9) и снизу (11), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Поступило 15.08.2020 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана. – ДАН России, 2007, т. 412, №4, с. 466-469.
2. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге. – Матем. сборник, 2010, т. 201, №8, с. 3-22.
3. Лангаршоев М.Р. Неравенства типа А.А.Лигуна для весового пространства Бергмана  $B_{2,\gamma}$  и некоторые его приложения. – ДАН РТ, 2010, т. 53, №12, с. 897-901.
4. Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана. – ДАН России, 2013, т. 450, №5, с. 518-521.
5. Саидусайнов М.С. Некоторые вопросы теории приближения в весовых пространствах Бергмана. – Диссертация к.ф.-м.н., Душанбе, 2011.

А.Г.Айдармамадов, Н.У.Кадамшоев

### ОИД БА НАЗДИККУНИИ ФУНКСИЯИ АНАЛИТИКӢ ДАР ФАЗОИ ВАЗНДОРИ БЕРГМАН

*Донишгоҳи технологии Тоҷикистон*

Дар фазои вазндори Бергман  $B_{2,\gamma}$  барои синфи функцияҳои дар доираи воҳидӣ аналитикӣ, ки модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби олии ҳосилаи тартиби  $r$ -ум, аз рӯи аргументашон якчанд нобаробариҳои байни наздиккунии беҳтарин ва қимати миёнаи модули бефосилагии тартиби олий исбот карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** *функсияи аналитикӣ, модули бефосилагии умумикардашуда, наздиккунии беҳтарин, фазои вазндори Бергман, бисёраъзогии алгебравии комплексӣ,  $n$ -қутрҳо.*

A.G.Aydarmamadov, N.U.Qadamshoev

### ON APPROXIMATION OF ANALYTIC FUNCTIONS IN WEIGHT BERGMAN'S SPACE

*Technological University of Tajikistan*

In the weighted Bergman  $B_{2,\gamma}$  space for classes of analytic in the unit circle function defined by generalized modulus continuity of higher order  $r$ -th derivatives on argument some inequalities between best approximation and medium meaning of modulus continuity high order are proved.

**Key words:** *analytical function, the generalized modulus of continuity of  $m$ -th order, best approximation, weight Bergman's space, complex algebraic polynomial,  $n$ -widths.*

УДК 517.5

А.А.Шабозова, Г.Фарзом

## НАИЛУЧШИЕ СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ МОДУЛЯМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ $m$ -ГО ПОРЯДКА В $L_2$

*Таджикский национальный университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 01.02.2021 г.)*

В работе рассматривается одна экстремальная задача наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных для класса функций, задаваемых усреднённым значением модуля непрерывности  $m$ -го порядка старшей производной  $r$ -го порядка  $f^{(r)} \in L_2$  и сверху ограниченной заданной мажорантой.

**Ключевые слова:** комплекснозначный полином, модуль непрерывности, совместное приближение, верхние грани, наилучшее совместное полиномиальное приближение.

Всюду далее  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_+ := (0, +\infty), \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$  — соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, положительных, целых и всех действительных чисел;  $L_2 := L_2[-\pi, \pi]$  — пространство суммируемых с квадратом по Лебегу  $2\pi$ -периодических комплекснозначных функций с нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[-\pi, \pi]} = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty. \quad (1)$$

$\mathcal{P}_n$  — множество периодических комплекснозначных полиномов вида

$$p_n(z) = \sum_{|k| \leq n} a_k e^{ikx}, \quad a_k \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Далее предполагается, что любая  $2\pi$ -периодическая комплекснозначная функция  $f(x)$ , норма которой удовлетворяет условию (1), имеет комплекснозначное разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}, \quad (3)$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (4)$$

**Адрес для корреспонденции:** Шабозова Адолат Аъзамовна. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: adolat@mail.ru

— коэффициенты Фурье в комплексном виде.

Экстремальная задача нахождения точного значения среднеквадратического наилучшего полиномиального приближения функции  $f \in L_2$  тригонометрическими полиномами

$$T_{2n-1} := \left\{ T_{n-1} : T_{n-1}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right\}$$

уже была рассмотрена (см., например, [1-7] и приведенную там литературу).

Равенством

$$E_n(f)_2 := E_n(f)_{L_2} = E(f, \mathcal{P}_n)_{L_2} = \inf \{ \|f - p_n\|_2 : p_n \in \mathcal{P}_n \} \tag{5}$$

определим величину наилучшего приближения комплекснозначной функции  $f \in L_2$  элементами множества комплекснозначных полиномов  $\mathcal{P}_n$ .

Хорошо известно следующее утверждение

**Лемма 1.** Среди всех комплекснозначных полиномов вида (2) наилучшее среднеквадратическое полиномиальное приближение функции  $f \in L_2$  доставляет частная сумма  $n$ -го порядка

$$S_n(f, x) = \sum_{|k| \leq n} c_k(f) e^{ikx} \tag{6}$$

ряда Фурье. При этом

$$E_n(f)_2 = \|f - S_n\|_2 = \left\{ 2 \sum_{|k| \geq n+1} |c_k(f)|^2 \right\}^{1/2}. \tag{7}$$

Очевидно, что

$$E_n^2(f)_2 = 2 \sum_{|k| \geq n+1} |c_k(f)|^2 = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \{ |c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2 \} := \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_k^2(f). \tag{8}$$

Через  $L_2^{(r)}$  ( $r \in \mathbb{N}, L_2^{(0)} \equiv L_2$ ) обозначим множество комплекснозначных функций  $f(x)$ , у которых производная  $f^{(r-1)}(x)$  абсолютно непрерывна, а производная  $r$ -го порядка  $f^{(r)}(x) \in L_2$ . Пусть  $s \in [0, r], r \in \mathbb{N}$ . Дифференцируя  $s$  ( $s \in \mathbb{N}, r \geq s$ ) раз ряд Фурье (3), будем иметь

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^s c_k(f) e^{ikx}. \tag{9}$$

Применяя к соотношению (9) равенство Парсеваля, запишем

$$\|f^{(s)}\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{2s} |c_k(f)|^2. \tag{10}$$

При  $s = r$  из (10) для любого  $f \in L_2^{(r)}$  получаем



$$\|f^{(r)}\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{2r} |c_k(f)|^2 < \infty. \quad (11)$$

В теории аппроксимации функции  $f \in L_2$  весьма важной является задача наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации в метрике  $L_2$ , когда требуется найти точное значение следующей величины

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 := \inf \{ \|f^{(s)} - p_{n-1}^{(s)}\|_2 : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \} \quad (12)$$

на классе  $L_2^{(r)}$  или на некотором подклассе  $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ . Легко доказать, что

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 = \left\{ 2 \sum_{|k| \geq n} |k|^{2s} |c_k(f)|^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (13)$$

Условимся всюду далее в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям  $f \in L_2^{(r)}$  предполагать, что  $f \neq const$ .

**Лемма 2.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq s$ . Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-1}(f^{(r)})_2} = \frac{1}{n^{r-s}}. \quad (14)$$

Положим  $W^{(r)}L_2 := \{f \in L_2^{(r)} : \|f^{(r)}\|_2 \leq 1\}$ .

**Лемма 3.** Пусть  $n, r \in \mathbb{N}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq s$ . Тогда

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}L_2) = \sup \{ E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in W^{(r)}L_2 \} = \frac{1}{n^{r-s}}.$$

Для произвольной комплекснозначной функции  $f \in L_2$  с рядом Фурье (3) разность первого и второго порядка в точке  $x$  с шагом  $h$  определим равенствами

$$\Delta_h^1(f, x) = f(x+h) - f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} (e^{ikh} - 1),$$

$$\Delta_h^2(f, x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} (e^{ikh} - 1)^2.$$

Методом математической индукции разность  $m$ -го порядка функции  $f \in L_2$  для любого  $m \in \mathbb{N}$  определим равенством

$$\Delta_h^m(f, x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f(x+(m-k)h) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} (e^{ikh} - 1)^m. \quad (15)$$

Применяя к соотношению (15) равенство Парсеваля, будем иметь

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^m(f)\|_2^2 &= 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 |e^{ikh} - 1|^{2m} = \\ &= 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) (1 - \cos kh)^m. \end{aligned} \tag{16}$$

Определим модуль непрерывности  $m$ -го порядка функции  $f \in L_2$  равенством

$$\begin{aligned} \omega_m(f, t) &= \sup\{\|\Delta_h^m(f, \cdot)\| : 0 < h \leq t\} = \\ &= \sup\{2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) (1 - \cos kh)^m : 0 < h \leq t\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Если функция  $f \in L_2^{(r)}$ , то из (17) следует, что

$$\omega_m(f^{(r)}, t) = \sup\{2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) (1 - \cos kh)^m : 0 < h \leq t\}. \tag{18}$$

Сформулируем основные результаты данной статьи.

**Теорема 1.** Для произвольных  $m, n, r \in \mathbb{N}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r > s$ ,  $1/r < p \leq 2$ ,  $0 < h \leq \pi/2$  справедливы равенства

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^m n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left\{ \int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t) dt \right\}^{1/p}} = \left\{ \int_0^h \left( \sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right\}^{-1/p}. \tag{19}$$

В частности, при  $p = 2/m$  из (19) следует, что

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left\{ \int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \right\}^{m/2}} = \left\{ \frac{n}{2(nh - \sin nh)} \right\}^{m/2}, \tag{20}$$

где  $0 < nh \leq \pi/2$ .

Отметим, что при  $s = 0$  из равенств (19) и (20) соответственно вытекают результаты М.Ш.Шабозова [6] и С.Б.Вакарчука [7].

Пусть  $\Phi(t)$  — произвольная непрерывная возрастающая при  $t \geq 0$  функция такая, что  $\Phi(0) = 0$ . Через  $W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$  обозначим класс функций  $f \in L_2^{(r)}$ , которые для любых  $m, n, r \in \mathbb{N}$ ,  $1/r < p \leq 2$  и  $h \in (0, \pi/2]$  удовлетворяют условию

$$\left( \int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/p} \leq \Phi(h).$$

**Теорема 2.** Если для всех  $\mu > 0, r, m \in \mathbb{N}, 0 < u \leq \pi, 1/r < p \leq 2$  функция  $\Phi$  удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\Phi(u)}{\Phi(\mu u)}\right)^p \leq \int_0^\pi \left(\sin \frac{t}{2}\right)^{mp} dt \cdot \left\{ \int_0^{\mu\pi} \left(\sin \frac{t}{2}\right)_*^{mp} dt \right\}^{-1}, \tag{21}$$

где  $(\sin u)_* := \{\sin u, \text{ если } u \in (0, \pi/2]; 1, \text{ если } u > \pi/2\}$ , то при любых  $n, r \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+ (r \geq s)$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_2^{(r)}(\Phi)) &= \sup\{E_{n-1}(f^{(s)}): f \in W_2^{(r)}(\Phi)\} = \\ &= 2^{-(m+1/p)} \cdot n^{-(r-s)+1/p} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{mp} t dt\right)^{-1/p} \cdot \Phi(\pi/n). \end{aligned} \tag{22}$$

Очевидно, что, вычисляя интеграл в правой части (22), имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_2^{(r)}(\Phi)) = \frac{1}{2^m} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{mp}{2} + 1\right)}{\Gamma(mp + 1)} \right\}^{1/p} \cdot n^{-(r-s)+1/p},$$

где  $\Gamma(a)$  — гамма-функция Эйлера.

Поступило 08.02.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в  $L_2$ . – Матем. заметки, 1967, т.2, №5, с.513-522.
2. Черных Н.И. О неравенстве Джексона в  $L_2$ . – Труды МИАН СССР, 1967, т.88, с.71-74.
3. Черных Н.И. Неравенства Джексона в  $L_2(0,2\pi)(1 \leq p < 2)$  с точной константой. – Труды МИРАН, 1992, т.198, с.232-241.
4. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в  $L_2$  некоторых классов  $2\pi$ -периодических функций и точные значения их поперечников. – Матем. заметки, 2011, т.90, №5, с.764-775.
5. Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства  $L_2$ . – Матем. заметки, 1977, т.22, №4, с.535-542.
6. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве  $L_2[0,2\pi]$ . – Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
7. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в  $L_2$ . – Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.

А.А.Шабозова, Г.Фарзом

**НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ЯКЧОЯИ БАЪЗЕ СИНФИ ФУНКСИЯҲОИ  
ДАВРӢ, КИ БО МОДУЛИ БЕФОСИЛАГИИ ТАРТИБИ  $m$ -УМ ДАР ФАЗОИ  $L_2$   
МУАЙЯН ШУДААҢД**

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола масъалаи экстремалии наздиккунии беҳтарини якҷояи функсия ва ҳосилаҳои пай дар пайи он барои синфи функсияҳое, ки қимати миёнаи модули бефосилагии ҳосилаи тартиби  $n$ -уми он ба фазои  $L_2$  таалуқ дошта, аз боло бо мажорантаи дода шуда маҳдуд аст, дида баромада шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** *полиноми комплексқимата, модули бефосилагӣ, наздиккунии якҷоя, сарҳади болоӣ, наздиккунии беҳтарини якҷояи полиномиалӣ.*

A.A.Shabozova, G.Farzom

**THE BEST JOINT APPROXIMATION OF SOME CLASSES OF PERIODIC  
FUNCTIONS DETERMINED BY THE MODULE OF CONTINUITY OF THE  $m$ -TH  
ORDER IN  $L_2$**

*Tajik National University*

In this paper, one extremal problem the best approximation of a function and their sequential derivatives for a class of functions given by the averaged value of the modulus of of continuity of the  $m$ -th order of the highest derivative of the  $r$ -th order  $f^{(r)} \in L_2$  and bounded from above by a given majorant are considered.

**Key words:** *complex-valued polynomial, modulus of continuity, joint approximation, upper bounds, best joint polynomial approximation.*

УДК 517.5

А.Захурбеков

## ВЕРХНИЕ ГРАНИ НАИЛУЧШИХ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ “ТРЕУГОЛЬНЫМИ” СУММАМИ ФУРЬЕ ПО ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ

*Таджикский национальный университет*

*(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 20.10.2020 г.)*

*В статье найдены точные верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных частичными суммами Фурье по произвольным ортогональным системам функций на некоторых классах функций многих переменных, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности, порождённым оператором обобщённого сдвига.*

**Ключевые слова:** ряд Фурье, ортогональная система, оператор сдвига, обобщённый модуль непрерывности, “треугольные суммы”.

В ряде работ [1-3] изучается вопрос нахождения точных оценок скорости сходимости рядов Фурье по различным ортогональным системам функций одной переменной. Для функций многих переменных аналогичные вопросы менее изучены. Как правило, в отличие от одномерного случая, для двойных рядов нет естественного способа построения частичных сумм, а потому вводят в рассмотрение различные методы приближения - “треугольные”, “гиперболические”, “сферические” и другие частичные суммы, которые позволяют найти точные оценки скорости сходимости наилучших приближений на соответствующих классах функций. При этом существенную роль играют операторы обобщенного сдвига и порожденный ими обобщенный модуль непрерывности, которым определяются классы функций.

1. Пусть  $\mathbb{R}^k$  –  $k$ -мерное евклидово пространство. Его точки, как обычно, будем обозначать  $t := (t_1, t_2, \dots, t_k)$ . Обозначим через  $L_2 := L_2(G_t^k; h(t))$  – пространство суммируемых с квадратом функций  $f : G_t^k \rightarrow \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$  с неотрицательным суммируемым на  $G_t^k$  весом  $h(t) := h(t_1, t_2, \dots, t_k)$  и конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2(G_t)} = \left( \int_{G_t} h(t) f^2(t) dt \right)^{1/2},$$

$$(t := (t_1, t_2, \dots, t_k) \in G_t^k \subset \mathbb{R}^k, k \geq 1, k \in \mathbb{N}).$$

**Адрес для корреспонденции:** Захурбеков Алишер. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: zahurbekov\_a94@mail.ru

Будем предполагать, что весовая функция  $h(t)$  и область  $G_t^k \subset \mathbb{R}^k$  таковы, что в пространстве  $L_2(G_t^k; h(t))$  существует полная ортонормированная система функций. Пусть

$$\{u_i(x)\}_{i=0}^\infty := \{u_i(x_1, x_2, \dots, x_m)\}_{i=0}^\infty, \quad \{v_j(y)\}_{j=0}^\infty := \{v_j(y_1, y_2, \dots, y_n)\}_{j=0}^\infty$$

– две полные ортонормированные системы функций соответственно в пространствах  $L_2(G_x^m; p(x))$  и  $L_2(G_y^n; q(y))$ , а  $L_2 := L_2(G_{xy}^{m+n}; p(x)q(y))$  – пространство суммируемых с квадратом функций  $f(x, y) := f(x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_n) : G_{xy}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$  с весом  $p(x)q(y) := p(x_1, x_2, \dots, x_m)q(y_1, y_2, \dots, y_n)$  и конечной нормой

$$\|f\| = \left( \int_{G_{xy}^{m+n}} p(x)q(y)f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2},$$

где

$$G_{xy}^{m+n} = G_x^m \times G_y^n := \{(x, y) : x \in G_x^m; y \in G_y^n; x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)\}.$$

Хорошо известно, что система функций

$$\{u_i(x)v_j(y)\}_{i,j=0}^\infty := \{u_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot v_j(y_1, y_2, \dots, y_n)\}_{i,j=0}^\infty$$

будет полной ортонормированной системой в пространстве  $L_2$ . Для функции  $f \in L_2$  ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty c_{ij}(f) u_i(x) v_j(y), \tag{1}$$

где

$$c_{ij}(f) = \int_{G_{xy}^{m+n}} p(x)q(y) f(x, y) u_i(x) v_j(y) dx dy \tag{2}$$

– коэффициенты Фурье функции  $f \in L_2$ .

В (1) знак равенства понимается в смысле сходимости в норме пространства  $L_2$ . Через

$$S_{N-1}(f; x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq N-1} c_{ij}(f) u_i(x) v_j(y)$$

обозначим “треугольные” частичные суммы ряда Фурье (1). Подпространство обобщенных полиномов вида

$$P_{N-1}(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq N-1} a_{ij} u_i(x) v_j(y)$$

обозначим  $\mathcal{P}_{N-1}$ , а через

$$E_{N-1}(f) := \inf \{ \| f - P_{N-1} \| : P_{N-1} \in \mathcal{P}_{N-1} \} \tag{3}$$

обозначим наилучшее приближение функции  $f \in L_2$  элементами подпространства  $\mathcal{P}_{N-1}$ . Несложные вычисления с учетом ортогональности системы функций  $\{u_i(x)v_j(y)\}_{i,j}^\infty$  в области  $G_{xy}^{m+n}$  приводят нас к равенству

$$E_{n-1}(f) = \left\{ \sum_{i+j \geq N} c_{ij}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$T(x, \xi; y, \eta; h) = \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty u_i(x) u_i(\xi) v_j(y) v_j(\eta) h^{i+j}, \tag{5}$$

где  $h \in (0,1), (x, \xi) \in G_x^m \times G_\xi^m, (y, \eta) \in G_y^n \times G_\eta^n$  и равенство здесь понимается в смысле сходимости в евклидовой топологии, то есть, в топологии пространства

$$L_2 \left( (G_x^m \times G_\xi^m) \times (G_y^n \times G_\eta^n); p(x)p(\xi)q(y)q(\eta) \right).$$

В пространстве  $L_2 = L_2 \left( G_{xy}^{m+n}; p(x)q(y) \right)$  рассмотрим следующий оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h f(x, y) &= \int_{G_{\xi\eta}^{m+n}} p(\xi)q(\eta) f(\xi, \eta) T(x, \xi; y, \eta; h; 1-h) d\xi d\eta = \\ &= \int_{G_\xi^m} \int_{G_\eta^n} p(\xi)q(\eta) f(\xi, \eta) T(x, \xi; y, \eta; h; 1-h) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

который будем называть оператором обобщенного сдвига.

Указанный оператор обладает следующими простыми свойствами:

- 1)  $\mathcal{F}_h(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}_h f + \mu \mathcal{F}_h g, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L_2;$
- 2)  $\| \mathcal{F}_h \| \leq \| f \|;$       3)  $\mathcal{F}_h(u_i(x)v_j(y)) = (1-h)^{i+j} u_i(x)v_j(y);$
- 4)  $\| \mathcal{F}_h - f \| \rightarrow 0, h \rightarrow 0+.$

Пусть  $f \in L_2$ . Определим конечные разности первого и высших порядков функции  $f$  равенствами

$$\Delta_h f(x, y) = \mathcal{F}_h f(x, y) - f(x, y) = (\mathcal{F}_h - E) f(x, y),$$

$$\Delta_h^k f(x, y) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(x, y)) = (\mathcal{F}_h - E)^k f(x, y) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} \mathcal{F}_h^l f(x, y),$$

где  $\mathcal{F}_h^0 f(x, y) = Ef(x, y)$ ,  $\mathcal{F}_h^i f(x, y) = \mathcal{F}_h(\mathcal{F}_h^{i-1} f(x, y))$ ,  $i = \overline{1, k}$ ;  $E$  – единичный оператор в пространстве  $L_2$ . Величину

$$\Omega_k(f, \delta)_2 = \sup\{\|\Delta_h^k f(x, y)\|; 0 < h \leq \delta\} \tag{6}$$

будем называть обобщенным модулем непрерывности  $k$ -го порядка функции  $f \in L_2$ .

Пользуясь равенством (5) и ортогональностью систем функций  $\{u_i(x)\}_{i=0}^\infty$  и  $\{v_j(y)\}_{j=0}^\infty$  соответственно в областях  $G_x^m$  и  $G_y^n$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h f(x, y) &= \int \int_{G_\xi^m G_\eta^n} p(\xi)q(\eta)f(\xi, \eta) \times \\ &\times \left\{ \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty u_i(x)u_i(\xi)v_j(y) \cdot v_j(\eta) \cdot d\xi d\eta \right\} \cdot (1-h)^{i+j} = \\ &= \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty \left\{ \int \int_{G_\xi^m G_\eta^n} p(\xi)q(\eta)f(\xi, \eta)u_i(\xi)v_j(\eta)d\xi d\eta \right\} \times \\ &\times u_i(x)v_j(y)(1-h)^{i+j} = \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty c_{ij}(f)u_i(x)v_j(y) \cdot (1-h)^{i+j}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая равенство (1), имеем

$$\begin{aligned} \Delta_h f(x, y) &= F_h f(x, y) - f(x, y) = \\ &= \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty c_{ij}(f) \cdot [(1-h)^{i+j} - 1]u_i(x)v_j(y) \end{aligned}$$

и, применяя метод математической индукции для любого  $k \in \mathbb{N}$ , будем иметь

$$\Delta_h^k f(x, y) = \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty c_{ij}(f) \cdot [(1-h)^{i+j} - 1]^k u_i(x)v_j(y).$$

Применяя тождество Парсеваля к полученному равенству, приходим к соотношению

$$\|\Delta_h^k f(x, y)\|^2 = \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty [1 - (1-h)^{i+j}]^{2k} c_{ij}^2(f), \tag{7}$$

пользуясь которым для величины (6) запишем явный вид:



$$\begin{aligned} \Omega_k(f, \delta)_2 &= \sup\{\|\Delta_h^k f(x, y)\|; 0 < h \leq \delta\} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} [1 - (1 - \delta)^{i+j}]^{2k} c_{ij}^2(f). \end{aligned} \tag{8}$$

Имеет место следующее утверждение

**Теорема.** Пусть  $N \in \mathbb{N}$ ,  $0 < q \leq \infty$ ,  $0 < h < 1$ ,  $\varphi(t) \geq 0$  – суммируемая не эквивалентная нулю на отрезка  $[0, h]$  функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{N-1}(f)}{\left( \int_0^h \Omega_k^q(f, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}} = \left( \int_0^h [1 - (1-t)^N]^{kq} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}. \tag{9}$$

Существует функция  $f_0 \in L_2$ , для которой реализуется верхняя грань в (9).

**Доказательство.** В работе [1] доказано, что для любой функции  $f \in L_2(G_{xy}^{m+n}; p(x)q(y))$  при любом  $h \in (0, f)$  справедлива оценка

$$E_{N-1}(f) \leq [1 - (1-h)^N]^{-k} \Omega_k(f, h),$$

из которой для  $t \in (0, 1)$  запишем неравенство

$$\Omega_k(f, t) \geq [1 - (1-t)^N]^k \cdot E_{N-1}(f). \tag{10}$$

Обе части неравенства (10) возведем в степень  $q$  ( $0 < q \leq \infty$ ), умножим на вес  $\varphi(t)$  и проинтегрируем по отрезку  $[0, h]$ ,  $0 < h < 1$ . В результате приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \int_0^h \Omega_k^q(f, t) \varphi(t) dt &\geq \\ &\geq E_{N-1}^q(f) \cdot \int_0^h [1 - (1-t)^N]^{kq} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

или, что то же,

$$\left( \int_0^h \Omega_k^q(f, t) \varphi(t) dt \right)^{1/q} \geq E_{N-1}^q(f) \left( \int_0^h [1 - (1-t)^N]^{kq} \varphi(t) dt \right)^{1/q}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части (9):

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{N-1}(f)}{\left( \int_0^h \Omega_k^q(f, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}} \leq \left( \int_0^h [1 - (1-t)^N]^{kq} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}. \tag{11}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу заметим, что для функции

$$f_0(x, y) = u_m(x)v_n(y) := u_m(x_1, x_2, \dots, x_m)v_n(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

очевидно принадлежащей пространству  $L_2(G_{x,y}^{m+n})$ , где  $m+n = N \in \mathbb{N}$ , в силу равенств (4) и (8) имеем:

$$E_{N-1}(f_0) = 1, \Omega_k(f_0, t) = [1 - (1-t)^N]^k, \tag{12}$$

а потому, учитывая равенство (12) запишем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2} \frac{E_{N-1}(f)}{\left( \int_0^h \Omega_k^q(f, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}} &\geq \frac{E_{N-1}(f_0)}{\left( \int_0^h \Omega_k^q(f_0, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}} = \\ &= \frac{1}{\left( \int_0^h [1 - (1-t)^N]^{kq} \varphi(t) dt \right)^{1/q}} = \left( \int_0^h [1 - (1-t)^N]^{kq} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}. \end{aligned} \tag{13}$$

Сопоставив оценку сверху (11) с аналогичной оценкой снизу (13), получаем требуемое равенство (9), чем и завершаем доказательство теоремы.

Из доказанной теоремы вытекает ряд следствий

**Следствие 1.** Пусть выполнены все условия теоремы. Положим  $\varphi(t) := \varphi_0(t) = N(1-t)^{N-1}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $0 < h < 1$ . Тогда

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{N-1}(f)}{\left( N \int_0^h \Omega_k^q(f, t)(1-t)^{N-1} dt \right)^{1/q}} = \frac{(kq+1)^{1/q}}{[1 - (1-h)^N]^{k+1/q}}. \tag{14}$$

В частности, полагая в (14)  $h = 1/N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $q = 1/k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , будем иметь

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{N-1}(f)}{\left( N \int_0^{1/N} \Omega_k^{1/k}(f, t)(1-t)^{N-1} dt \right)^{1/q}} = \frac{2^k}{(1 - (1-1/N)^N)^{2k}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2} \frac{E_N(f)}{\left( N \int_0^{1/N} \Omega_k^{1/k}(f, t)(1-t)^{N-1} dt \right)^{1/q}} &= \\ &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{2^k}{(1 - (1-1/N)^N)^{2k}} = \frac{2^k}{(1 - e^{-1})^{2k}}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Следствие 2.** Если в условиях теоремы положить  $q = 1/k, k \in \mathbb{N}, \varphi(t) \equiv 1$ , то получаем

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{N-1}(f)}{\left( \int_0^h \Omega_k^{1/k}(f, t) dt \right)^k} = \left( h - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1} (1-h)^{N+1} \right)^{-k}. \quad (15)$$

Полагая в (15)  $h = 1/(N+1)$  и переходя к верхней грани по всем  $N \in \mathbb{N}$ , приходим к равенству

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2} \frac{E_{N-1}(f)}{\left( (N+1) \int_0^{1/(N+1)} \Omega_k^{1/k}(f, t) dt \right)^k} = \sup_{N \in \mathbb{N}} \left( 1 - \frac{1}{N+1} \right)^{-k(N+1)} = e^k.$$

Отметим, что некоторые результаты в этом направлении анонсированы в [4].

Поступило 28.08.2020 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве  $L_2((a,b);p(x))$ . – Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, №6, с.966-980.
2. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона-Стечкина с обобщенными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций. – Труды ИМ и М УрО РАН, 2015, т.21, №4, с.292-308.
3. Вакарчук С.Б., Швачко А. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точные значения поперечников классов функций. – Укр. матем. журнал, 2015, т.65, №9, с.1013-1027.
4. Абилов М.В., Айгунов Г.А. Некоторые вопросы приближения функций многих переменных суммами Фурье в пространстве  $L_2((a,b)^n;p(x))$ . – Успехи матем. наук, 2004, т.59, №6, с.2001-2002.

А.Захурбеков

### САРҲАДИ БОЛОИИ НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ МИЁНАКВАДРАТИИ ФУНКСИЯ БИСЁРТАҒИРЁБАНДАИ СУММАҶОИ “СЕКУНЦАВИИ” ФУРҶЕ АЗ РҶИ СИСТЕМАИ ОРТОГОНАЛИИ ИХТИЁРӢ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола сарҳади аниқи болоии наздиккунии беҳтарини миёнаквадратии функцияҳои бисёртағйирёбанда бо ёрии суммаҳои хусусии Фурье аз рӯи системаи ортогоналии ихтиёрии функцияҳо дар баъзе синфи функцияҳои бисёртағйирёбанда, ки модули бефосилагии умумишударо тавсиф мекунад, ёфта шудааст.

*Калимаҳои калидӣ: қатори Фурье, системаи ортогоналӣ, оператори ғеҷиш, модули бефосилагии умумишуда, “суммаҳои секунҷавӣ”.*

**A.Zahurbekov**

**UPPER BOUNDS OF THE BEST MEAN-SQUARE APPROXIMATION OF  
FUNCTION OF MANY VARIABLES BY “TRIANGULAR” FOURIER SUMS OVER  
ARBITRARY ORTHOGONAL SYSTEMS**

*Tajik National University*

In this article, the exact upper bounds of the best mean-square approximations of functions of many variables by partial Fourier sums over arbitrary orthogonal systems of functions on some classes of functions of many variables, characterized by a generalized modulus of continuity generated by the generalized shift operator are found.

**Key words:** *Fourier series, orthogonal system, shift operator, generalized modulus of continuity, “triangular sums”.*

УДК 517.968.220

Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов

## О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ГРАНИЧНОЙ ОСОБОЙ И СИЛЬНО-ОСОБОЙ ЛИНИЯМИ

*Таджикский национальный университет*

*(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 04.01.2020 г.)*

В работе изучены некоторые случаи двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой линиями, где в зависимости от корней характеристического уравнения и знака параметров уравнения получены явные представления многообразия решений через произвольные функции.

**Ключевые слова:** двумерное интегральное уравнение, особая линия, сильно-особая линия, характеристическое уравнение.

Пусть  $D$  – прямоугольник  $D = \{(x, y) : a < x < a_1, b < y < b_1\}$  с границами  $\Gamma_1 = \{y = b, a < x < a_1\}$ ,  $\Gamma_2 = \{x = a, b < y < b_1\}$ . В области  $D$  рассмотрим двумерное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} u(x, y) + \int_a^x \left[ p + q \ln \left( \frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{u(t, y)}{t-a} dt + \int_b^y \left[ \lambda + \mu (\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)) \right] \frac{u(x, s)}{(s-b)^\beta} ds + \\ + \int_a^x \left[ p_1 + q_1 \ln \left( \frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{dt}{t-a} \int_b^y \left[ \lambda_1 + \mu_1 (\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)) \right] \frac{u(t, s)}{(s-b)^\beta} ds = f(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $p, q, \lambda, \mu, p_1, q_1, \lambda_1, \mu_1$  – заданные постоянные числа,  $f(x, y)$  – заданная функция,  $u(x, y)$  – искомая функция,

$$\omega_b^\beta(y) = \left[ (\beta - 1)(y - b)^{\beta-1} \right]^{-1}, \quad \beta > 1.$$

Ранее в работах Н.Раджабова [1-3] были исследованы одномерные интегральные уравнения типа Вольтерра с фиксированным левым и правым сингулярным или сверхсингулярным ядрами, модельное одномерное интегральное уравнение типа Вольтерра со сверхсингулярной точкой, также получено многообразие решений одномерного интегрального уравнения с сингулярной и логарифмической особенностью в ядре. В работах Н.Раджабова, Л.Н.Раджабовой и их учеников [4-6] изучены двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра второго рода с фиксированными особыми или

---

**Адрес для корреспонденции:** Раджабова Лутфия Нусратовна, Ахмадов Фарвариддин Муфазалович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: lutfyab2@mail.ru; farvardinahmadov@gmail.com

сильно-особыми линиями, также изучены некоторые случаи многомерных особых интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций  $u(x, y) \in C(\bar{D})$ ,

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} u(x, y) = 0$  с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon], \varepsilon > 0, \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$u(x, y) = o[(y - b)^\nu], \nu > 2\beta - 1, \text{ при } y \rightarrow b.$$

Если параметры уравнения (1) связаны между собой равенствами

$$p = p_1, \quad q = q_1, \quad \lambda = \lambda_1, \quad \mu = \mu_1, \tag{2}$$

его можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) + \int_a^x \left[ p + qln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) \right] \frac{u(t, y)}{t-a} dt + \\ + \int_b^y \left[ \lambda + (\mu\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)) \right] \left\{ u(x, s) + \int_a^x \left[ p + qln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) \right] \frac{u(t, s)}{t-a} dt \right\} \frac{ds}{(s-b)^\beta} = \\ = f(x, y). \end{aligned} \tag{3}$$

Интегральное уравнение (3) при помощи интегральных операторов представим в виде:

$$\Pi_{\lambda, \mu}^y (T_{p, q}^x (u)) = f(x, y), \tag{4}$$

где

$$T_{p, q}^x (u) = u(x, y) + \int_a^x \left[ p + qln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) \right] \frac{u(t, y)}{t-a} dt = \psi(x, y), \tag{5}$$

$$\Pi_{\lambda, \mu}^y (\psi) = \psi(x, y) + \int_b^y \left[ \lambda + \mu(\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)) \right] \frac{\psi(x, s)}{(s-b)^\beta} ds = f(x, y). \tag{6}$$

Используя схему нахождения решения одномерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой точкой [2], легко можно видеть, что если решение интегрального уравнения (6) при  $\lambda < 0$ ,  $\mu < 0$ ,  $\lambda^2 - 4\mu > 0$  существует, тогда оно представимо в виде:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = \varphi(x) e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} + f(x, y) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \int_b^y \left[ (\eta_2)^2 e^{\eta_2(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))} \right] \frac{f(x, s)}{(s-b)^\beta} ds. \end{aligned} \tag{7}$$

Соответственно, если решение интегрального уравнения (5) при  $p > 0$ ,  $q < 0$ ,  $p^2 - 4q > 0$  [3] существует, тогда оно имеет вид:

$$u(x, y) = \theta_1(y)(x - a)^{\gamma_1} + \psi(x, y) + \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \int_a^x \left[ (\gamma_2)^2 \left( \frac{t - a}{x - a} \right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2 \left( \frac{x - a}{t - a} \right)^{\gamma_1} \right] \frac{\psi(t, y)}{t - a} dt. \tag{8}$$

В равенстве (8) вместо функции  $\Psi(x, y)$  подставляя её значение из (7), получим решение интегрального уравнения (1) в виде:

$$u(x, y) = \theta_1(y)(x - a)^{\gamma_1} + e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \Phi(x) + Q_{p,q,\lambda,\mu} [f(x, y)] = N_{p,q,\lambda,\mu} [0, \varphi(x), \theta_1(y), 0, f(x, y)], \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \int_a^x \left[ (\gamma_2)^2 \left( \frac{t - a}{x - a} \right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2 \left( \frac{x - a}{t - a} \right)^{\gamma_1} \right] \frac{\varphi(t)}{t - a} dt, \\ Q_{p,q,\lambda,\mu} [f(x, y)] &= f(x, y) + \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \int_a^x \left[ (\gamma_2)^2 \left( \frac{t - a}{x - a} \right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2 \left( \frac{x - a}{t - a} \right)^{\gamma_1} \right] \frac{f(t, y)}{t - a} dt + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \int_b^y \left[ (\eta_2)^2 e^{\eta_2(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))} \right] \frac{f(x, s)}{(s - b)^\beta} ds + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \int_b^y \left[ (\eta_2)^2 e^{\eta_2(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))} \right] \frac{ds}{(s - b)^\beta} \times \\ &\times \int_a^x \left[ (\gamma_2)^2 \left( \frac{t - a}{x - a} \right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2 \left( \frac{x - a}{t - a} \right)^{\gamma_1} \right] \frac{f(t, s)}{t - a} dt. \end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение:

**Теорема 1.** Пусть в интегральном уравнении (1) параметры удовлетворяют условиям (2), также  $\lambda < 0, \mu < 0, \Delta_1 = \lambda^2 - 4\mu > 0, p > 0, q < 0, \Delta_2 = p^2 - 4q > 0$ . Кроме того, пусть  $f(x, y) \in C(\bar{D}), f(a, b) = 0$  на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с асимптотическим поведением:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= o[(x - a)^{\delta_1}], \delta_1 > \gamma_1 \text{ при } x \rightarrow a, \\ f(x, y) &= o[e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} (y - b)^{\nu_1}], \nu_1 > \beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b. \end{aligned}$$

Тогда двумерное интегральное уравнение вида (1) в классе функций  $u(x, y) \in C(\bar{D})$ , обращающихся в нуль при  $x \rightarrow a, y \rightarrow b$ , всегда разрешимо и его общее решение содержит две произвольные функции одной переменной и выражается равенством (9), где  $\varphi(x), \theta_1(y)$  – произвольные непрерывные функции, обращающиеся в нуль при  $x \rightarrow a, y \rightarrow b$ , поведение которых определяется из асимптотических формул:

$$\varphi(x) = o[(x - a)^{\delta_2}], \delta_2 > \gamma_1 \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$\theta_1(y) = o[(y-b)^{v_2}], v_2 > 2\beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b,$$

$$\gamma_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta_2}}{2} > 0, \eta_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0, (\eta_1 - \eta_2 > 0),$$

$$\gamma_2 = \frac{-p - \sqrt{\Delta_2}}{2} < 0, \eta_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta_1}}{2} < 0, (\gamma_1 - \gamma_2 > 0).$$

**Следствие 1.** При выполнении условий теоремы 1 любое решение уравнения (1) из класса  $C(\bar{D})$  обращается в нуль на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x-a)^{\delta_3}], \delta_3 > \gamma_1 \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$u(x, y) = o[(y-b)^{v_2}], v_2 > 2\beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b.$$

**Теорема 2.** Пусть в интегральном уравнении (1) параметры удовлетворяют условиям (2), также  $\lambda < 0, \mu < 0, \Delta_1 = \lambda^2 - 4\mu > 0, p < 0, q < 0, \Delta_2 = p^2 - 4q > 0$ . Кроме того, пусть  $f(x, y) \in C(\bar{D}), f(a, b) = 0$  на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с асимптотическим поведением:

$$f(x, y) = o[(x-a)^{\delta_4}], \delta_4 > \gamma_3 \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$f(x, y) = o[e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} (y-b)^{v_3}], v_3 > \beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b.$$

Тогда двумерное интегральное уравнение вида (1) в классе функций  $u(x, y) \in C(\bar{D})$ , обращающихся в нуль при  $x \rightarrow a, y \rightarrow b$ , всегда разрешимо и его общее решение содержит две произвольные функции одной переменной и выражается равенством:

$$u(x, y) = \theta_2(y)(x-a)^{\gamma_3} + e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \Phi(x) + Q_{p,q,\lambda,\mu}[f(x, y)] = N_{p,q,\lambda,\mu}[0, \varphi(x), \theta_2(y), 0, f(x, y)], \tag{10}$$

где  $\varphi(x), \theta_2(y)$  – произвольные непрерывные функции, обращающиеся в нуль при  $x \rightarrow a, y \rightarrow b$ , поведение которых определяется из асимптотических формул:

$$\varphi(x) = o[(x-a)^{\delta_5}], \delta_5 > \gamma_3 \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$\theta_2(y) = o[(y-b)^{v_4}], v_4 > 2\beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b,$$

$$\gamma_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta_2}}{2} = \gamma_3 > 0, \eta_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0, (\eta_1 - \eta_2 > 0),$$

$$\gamma_2 = \frac{-p - \sqrt{\Delta_2}}{2} = \gamma_4 < 0, \eta_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta_1}}{2} < 0, (\gamma_3 - \gamma_4 > 0).$$

**Следствие 2.** При выполнении условий теоремы 2 любое решение уравнения (1) из класса  $C(\bar{D})$  обращается в нуль на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с асимптотическим поведением:



$$u(x, y) = o[(x-a)^{\delta_6}], \delta_6 > \gamma_4 \text{ при } x \rightarrow a$$

$$u(x, y) = o[(y-b)^{\nu_2}], \nu_2 > 2\beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b.$$

**Теорема 3.** Пусть в интегральном уравнении (1) параметры удовлетворяют условиям (2), также  $\lambda < 0, \mu < 0, \Delta_1 = \lambda^2 - 4\mu > 0, p > 0, q > 0, \Delta_2 = p^2 - 4q > 0$ . Кроме того, пусть  $f(x, y) \in C(\bar{D}), f(a, b) = 0$  на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с асимптотическим поведением:

$$f(x, y) = o[(x-a)^\varepsilon], \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$f(x, y) = o[e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} (y-b)^{\nu_5}], \nu_5 > \beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b.$$

Тогда двумерное интегральное уравнение вида (1) в классе функций  $u(x, y) \in C(\bar{D})$ , обращающихся в нуль при  $x \rightarrow a, y \rightarrow b$ , всегда разрешимо и его общее решение содержит одну произвольную функцию одной переменной и выражается равенством:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \Phi(x) + Q_{p,q,\lambda,\mu} [f(x, y)] = \\ &= N_{p,q,\lambda,\mu} [0, \varphi(x), 0, 0, f(x, y)], \end{aligned} \tag{11}$$

где  $\varphi(x)$  – произвольная непрерывная функция, обращающаяся в нуль при  $x \rightarrow a$  и её поведение определяется из асимптотической формулы:

$$\varphi(x) = o[(x-a)^\varepsilon], \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$\gamma_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta_2}}{2} = \gamma_5 < 0, \eta_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0, (\eta_1 - \eta_2 > 0),$$

$$\gamma_2 = \frac{-p - \sqrt{\Delta_2}}{2} = \gamma_6 < 0, \eta_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta_1}}{2} < 0, (\gamma_5 - \gamma_6 > 0).$$

**Следствие 3.** При выполнении условий теоремы 3 любое решение уравнения (1) из класса  $C(\bar{D})$  обращается в нуль на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x-a)^\varepsilon], \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$u(x, y) = o[(y-b)^{\nu_2}], \nu_2 > 2\beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b.$$

**Теорема 4.** Пусть в интегральном уравнении (1) параметры удовлетворяют условиям (2), также  $\lambda > 0, \mu > 0, \Delta_1 = \lambda^2 - 4\mu > 0, p > 0, q < 0, \Delta_2 = p^2 - 4q > 0$ . Кроме того, пусть  $f(x, y) \in C(\bar{D}), f(a, b) = 0$  на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с асимптотическим поведением:

$$f(x, y) = o[(x-a)^{\delta_7}], \delta_7 > \gamma_7 \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$f(x, y) = o[(y-b)^{\nu_6}], \nu_6 > \beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b.$$

Тогда двумерное интегральное уравнение вида (1) в классе функций  $u(x, y) \in C(\bar{D})$ , обращающихся в нуль при  $x \rightarrow a, y \rightarrow b$ , всегда разрешимо и его общее решение содержит одну произвольную функцию одной переменной и выражается равенством:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \theta_3(y)(x-a)^{\gamma_7} + Q_{p,q,\lambda,\mu} [f(x, y)] = \\
 &= N_{p,q,\lambda,\mu} [0, 0, \theta_3(y), 0, f(x, y)],
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

где  $\theta_3(y)$  – произвольная непрерывная функция, обращающаяся в нуль при  $y \rightarrow b$  и её поведение определяется из асимптотической формулы:

$$\begin{aligned}
 \theta_3(y) &= o[(y-b)^{\nu_7}], \nu_7 > 2\beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b, \\
 \gamma_1 &= \frac{-p + \sqrt{\Delta_2}}{2} = \gamma_7 > 0, \quad \eta_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\Delta_1}}{2} = \eta_3 > 0, \quad (\eta_3 - \eta_4 > 0), \\
 \gamma_2 &= \frac{-p - \sqrt{\Delta_2}}{2} = \gamma_8 < 0, \quad \eta_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta_1}}{2} = \eta_4 > 0, \quad (\gamma_7 - \gamma_8 > 0).
 \end{aligned}$$

**Следствие 4.** При выполнении условий теоремы 4 любое решение уравнения (1) из класса  $C(\bar{D})$  обращается в нуль на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с асимптотическим поведением:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= o[(x-a)^{\delta_8}], \delta_8 > \gamma_7 \text{ при } x \rightarrow a, \\
 u(x, y) &= o[(y-b)^{\nu_8}], \nu_8 > 2\beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b.
 \end{aligned}$$

**Теорема 5.** Пусть в интегральном уравнении (1) параметры удовлетворяют условиям (2), также  $\lambda > 0, \mu > 0, \Delta_1 = \lambda^2 - 4\mu > 0, p < 0, q < 0, \Delta_2 = p^2 - 4q > 0$ . Кроме того, пусть  $f(x, y) \in C(\bar{D}), f(a, b) = 0$  на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с асимптотическим поведением:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= o[(x-a)^{\delta_9}], \delta_9 > \gamma_9 \text{ при } x \rightarrow a, \\
 f(x, y) &= o[(y-b)^{\nu_9}], \nu_9 > \beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b.
 \end{aligned}$$

Тогда двумерное интегральное уравнение вида (1) в классе функций  $u(x, y) \in C(\bar{D})$ , обращающихся в нуль при  $x \rightarrow a, y \rightarrow b$ , всегда разрешимо и его общее решение содержит одну произвольную функцию одной переменной и выражается равенством:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \theta_4(y)(x-a)^{\gamma_9} + Q_{p,q,\lambda,\mu} [f(x, y)] = \\
 &= N_{p,q,\lambda,\mu} [0, 0, \theta_4(y), 0, f(x, y)],
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

где  $\theta_4(y)$  – произвольная непрерывная функция, обращающаяся в нуль при  $y \rightarrow b$  и её поведение определяется из асимптотической формулы:

$$\begin{aligned}
 \theta_4(y) &= o[(y-b)^{\nu_{10}}], \nu_{10} > 2\beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b, \\
 \gamma_1 &= \frac{-p + \sqrt{\Delta_2}}{2} = \gamma_9 > 0, \quad \eta_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\Delta_1}}{2} = \eta_3 > 0, \quad (\eta_3 - \eta_4 > 0), \\
 \gamma_2 &= \frac{-p - \sqrt{\Delta_2}}{2} = \gamma_{10} < 0, \quad \eta_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta_1}}{2} = \eta_4 > 0, \quad (\gamma_9 - \gamma_{10} > 0).
 \end{aligned}$$

**Следствие 5.** При выполнении условий теоремы 5 любое решение уравнения (1) из класса  $C(\bar{D})$  обращается в нуль на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^{\delta_{10}}], \delta_{10} > \gamma_9 \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$u(x, y) = o[(y - b)^{\nu_{10}}], \nu_{10} > 2\beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b.$$

**Теорема 6.** Пусть в интегральном уравнении (1) параметры удовлетворяют условиям (2), также  $\lambda > 0, \mu > 0, \Delta_1 = \lambda^2 - 4\mu > 0, p > 0, q > 0, \Delta_2 = p^2 - 4q > 0$ . Кроме того, пусть  $f(x, y) \in C(\bar{D}), f(a, b) = 0$  на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с асимптотическим поведением:

$$f(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon], \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$f(x, y) = o[(y - b)^{\nu_{11}}], \nu_{11} > \beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b.$$

Тогда двумерное интегральное уравнение вида (1) в классе функций  $u(x, y) \in C(\bar{D})$ , обращающихся в нуль при  $x \rightarrow a, y \rightarrow b$ , имеет единственное решение, которое выражается равенством:

$$u(x, y) = Q_{p,q,\lambda,\mu} [f(x, y)] = N_{p,q,\lambda,\mu} [0, 0, 0, 0, f(x, y)], \tag{14}$$

$$\gamma_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta_2}}{2} = \gamma_{11} < 0, \eta_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\Delta_1}}{2} = \eta_3 > 0, (\eta_3 - \eta_4 > 0),$$

$$\gamma_2 = \frac{-p - \sqrt{\Delta_2}}{2} = \gamma_{12} < 0, \eta_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta_1}}{2} = \eta_4 > 0, (\gamma_{11} - \gamma_{12} > 0).$$

**Следствие 6.** При выполнении условий теоремы 6 любое решение уравнения (1) из класса  $C(\bar{D})$  обращается в нуль на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с асимптотическим поведением:

$$f(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon], \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$f(x, y) = o[(y - b)^{\nu_{12}}], \nu_{12} > 2\beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b.$$

Поступило 11.01.2020 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Раджабов Н. Интегральные уравнения типа Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе: Деваштич, 2007, 221с.
2. Раджабов Н. Об одном классе модельного сверхсингулярного интегрального уравнения, обобщающего одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сверхсингулярной точкой в ядре. – Мат-лы III междунар. конф. “Проблемы дифференциальных уравнений анализа и алгебры”. – Актобе, 2015, с.202-206.
3. Раджабов Н. Об одном классе модельного сингулярного интегрального уравнения, обобщающего одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сингулярной точкой в ядре. – Вестник ТНУ. – Серия естественных наук, 2012, №1, с.21-32.

4. Раджабов Н., Раджабова Л.Н., Зарипов С.Б. – Двумерные симметричные интегральные уравнения типа Вольтерра с сингулярными и сверхсингулярными линиями. – Saarbiicken: LAP LAMBERT, Academic Publishing, 2019, 108 p.
5. Раджабова Л.Н., Шукурова Г.Н. О некоторых случаях симметричных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре. – ДАН РТ, 2017, т. 60, №3-4, с. 231-240.
6. Раджабова Л.Н., Хушвахтов М.Б. О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе. – ДАН РТ, 2019, т. 62, №9-10, с. 533-540.

**Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов**

**ОИД БА ЯКЧАНД ҲОЛАТҲОИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРАЛИИ ДУЧЕНАКАИ  
НАМУДИ ВОЛТЕРРА БО ХАТҲОИ МАХСУС ВА ФАВҚУЛМАХСУСИ  
САРҲАДӢ**

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақолаи мазкур баъзе ҳолатҳои муодилаи интегралӣ дученакаи намуди Вольтерра бо хатҳои махсус ва фавқулмахсуси сарҳадӣ омӯхта шудаанд, ки дар онҳо вобаста ба решаҳои муодилаҳои характеристикӣ ва аломати параметрҳои муодила тасвири ошқори бисёршаклаи ҳалҳо ба воситаи функсияҳои ихтиёрӣ муайян карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** муодилаи интегралӣ дученака, хати махсус, хати фавқулмахсус, муодилаи характеристикӣ.

**L.N.Rajabova, F.M.Akhmadov**

**ON SOME CASES OF TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS  
OF VOLTERRA TYPE WITH BOUNDARY SINGULAR AND  
STRONGLY-SINGULAR LINES**

*Tajik National University*

Some cases of a two-dimensional integral equation of Volterra type with a singular and strongly – singular lines are studied, in which, depending on the roots of the characteristic equation and the sign of the parameters of the equation, explicit representations of the variety of solutions in terms of arbitrary functions are obtained.

**Key words:** two-dimensional integral equations, special line, strong-special line, characteristic equation.

УДК 523. 532

Член-корреспондент НАН Таджикистана Г.И.Кохирова, Ф.Дж.Рахматуллаева, С.А.Борисенко\*

## РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ КОМЕТЫ P/2019 LD2 В ОБСЕРВАТОРИИ САНГЛОХ

*Институт астрофизики НАН Таджикистана,**\*Главная астрономическая обсерватория НАН Украины, Киев, Украина*

*Короткопериодическая комета P/2019 LD2 (Атлас) открыта в июне 2019 г. Первоначально объект был классифицирован как троянский астероид, но позже был включен в группу комет семейства Юпитера. Происхождение объекта доподлинно не установлено и поэтому исследование кометы продолжает представлять особый научный интерес. В августе 2020 г. проведены оптические наблюдения кометы в Международной астрономической обсерватории Санглох (МАОС) Института астрофизики НАНТ. Определен видимый и абсолютный блеск кометы в фильтре R, оценены параметр пылепроизводительности и верхний предел радиуса ядра. Показано распределения яркости вдоль хвоста и выявлена структура пылевого хвоста. Фотометрические данные указывают, что в период мониторинга комета находилась в состоянии нормальной кометной активности, связанной главным образом, с недавним прохождением перигелия.*

**Ключевые слова:** комета, фотометрия, блеск, пылепроизводительность, радиус, изофота, диаграмма Финсона-Пробштейна.

### В в е д е н и е

Новая короткопериодическая комета была открыта 10 июня 2019 г. в рамках роботизированного астрономического обзора ATLAS, проводимого в двух обсерваториях под руководством Университета Института астрономии на Гавайях в США. После обработки первых снимков новый слабый астероидоподобный объект был классифицирован как троянский астероид Юпитера [1]. Так называют две крупные группы астероидов, движущихся вокруг Солнца в окрестностях двух особых точек Лагранжа орбиты Юпитера в орбитальном резонансе 1:1. Считается, что миллиарды лет назад троянские астероиды сгруппировались в этих областях вследствие гравитации Юпитера. Поэтому все запасы льда и летучих веществ, необходимые для образования комы и хвоста, являющихся отличительными признаками комет, должны были давно испариться с их поверхностей. Но последующие наблюдения показали, что у объекта имеются признаки кометной активности – слабая кома и хвост, вследствие этого, он был объявлен первым троянским астероидом Юпитера, проявившим кометную активность [1]. Позже более детальные наблюдения, охватывающие большую дугу орбиты объекта, и тщательная обработка качественных изображений показали, что 2019 LD2 не находится в орбитальном резонансе 1:1 с Юпитером, как положено троянскому астероиду [2]. Более того, эти наблюдения

---

**Адрес для корреспонденции:** Кохирова Гулчехра Исроиловна. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бухоро, 22, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: kokhirova2004@mail.ru.

подтвердили, что кометная активность стала заметнее и не прекратилась со временем. Исходя из этого сделано заключение, что на самом деле этот объект является кометой семейства Юпитера с хаотической орбитой, временно «захваченной» Юпитером из популяции кентавров и периодически сближающейся с газовым гигантом, а в работе [3] предположено, что P/2019 LD2 является «захваченной» межзвездной кометой. Итак, первоначально 2019 LD2 ошибочно был принят за «троянца», но в последующем отождествлен как комета семейства Юпитера, в этой связи Центр малых планет МАС присвоил объекту новое обозначение P/2019 LD2 (ATLAS) в соответствии с правилами «кометной» номенклатуры [2].

Орбита новой кометы находится сразу за орбитой Юпитера и ее активность напоминает активность кометы 29P/Швасмана-Вахмана 1, также принадлежащей группе кентавров. Отметим, что в [4] считают объект 29P прототипными «воротами» между Кентаврами и кометами семейства Юпитера. В этом контексте изучение P/2019 LD2 способствует лучшему пониманию особенностей перехода от кентавров к кометам семейства Юпитера. Если окажется, что P/2019 LD2 является межзвездной кометой, то появляется возможность изучения этого класса объектов. Этим объясняется актуальность наблюдений и исследования новой кометы.

Элементы орбиты P/2019 LD2 приведены в табл.1 [2], где  $a$  – большая полуось,  $e$  – эксцентриситет,  $q$ ,  $Q$  – перигелийное и афелийное расстояния соответственно,  $i$  – наклонение,  $\omega$  – аргумент перигелия,  $\Omega$  – долгота восходящего узла. Как видно, комета обращается вокруг Солнца на среднем расстоянии 5.28 а.е. каждые 12.12 лет. Орбита имеет эксцентриситет 0.132 и наклонение 11.6 градуса по отношению к эклиптике, параметр Тиссерана 2.94, что типично для орбит других комет семейства Юпитера. Номинальная орбита кометы предполагает, что она не находится в стабильном резонансе 1:1 с Юпитером, поскольку 17 февраля 2017 года она близко подошла к планете на расстоянии 0.092 а.е. (13.8 млн. км) и совершит такое же близкое сближение в 2028 году [5]. Комета прошла очередной перигелий своей орбиты 10 апреля 2020 г. [6].

Таблица 1

Элементы орбиты кометы P/2019 LD2 (Атлас) (J2000.0)

Эпоха	$a$ , а.е.	$e$	$q$ , а.е.	$Q$ , а.е.	$i$ , град.	$\omega$ , град.	$\Omega$ , град.
31.05.2020	5.295	0.135	4.578	6.013	11.552	123.448	179.746

Абсолютный блеск кометы  $H=12.1-12.2^m$  [6,5], диаметр оценен примерно в 14 км при предполагаемом альбедо для такого класса объектов 0.12 [7]. Период вращения и геометрическая фигура ядра нуждаются в уточнении.

**Наблюдения**

Нами проведены наблюдения кометы в Международной астрономической обсерватории Сангдох (МАОС) Института астрофизики НАНТ с помощью телескопа Цейсс-1000. Регистрация объекта выполнялась с помощью ПЗС-камеры FLI Proline PL16803 (4096×4096 пикселей, размер пикселя 9 микрон). Шум считывания камеры – 10 e<sup>-</sup> (электронов), рассчитанный коэффициент преобразования (усиление) – около 0.497 e<sup>-</sup>/ADU (аналого-цифровые единицы). Камера была установлена в каскадном фокусе телескопа (13 300 мм) и оснащена стандартными широкополосными фотометриче-

скими фильтрами системы Джонсона-Козинса, позволяющим выделить соответствующий диапазон спектра при наблюдениях. Для увеличения показателя сигнал/шум (S/N) изображений использовалось бинирование  $4 \times 4$ . В результате был получен масштаб снимков  $0.579''/\text{пиксель}$  при поле порядка  $10' \times 10'$ . Для уменьшения уровня шумов ПЗС камеры аппаратуру охлаждают до температуры  $-20^\circ\text{C}$ .

Первичная обработка (учет темновых токов, байеса и плоских полей) и сложение снимков проведено с использованием программного обеспечения Astroart 4.0 [8]. Для апертурной фотометрии кометы и опорных звезд использовалась утилита ATV под IDL для Windows [9].

Для отождествления опорных звезд использовался каталог APASS (DR9) [10]. Каталог включает в себя звезды примерно до 17-й звездной величины в фильтрах  $B$ ,  $V$ , а также специальных кометных фильтрах системы Слоан  $g'$ ,  $r'$ ,  $i'$ . Блеск каталожных звезд определен с точностью  $0.07^m$  для полосы  $B$ ,  $0.05^m$  для  $V$  и менее  $0.03^m$  для  $r'$  [10]. Для перехода от  $r'$  к  $Rc$  звездным величинам использовалась формула из [11]. Фотометрические стандарты 13-17 зв. величины в количестве 5-7 штук отбились для каждой ночи наблюдений при помощи онлайн сервиса Aladin [12].

### Результаты. Физические свойства

Сводка наблюдений в течение 5 ночей в августе 2020 г. и результаты их фотометрической обработки приведены в табл.2. Здесь указаны положение орбиты кометы во время мониторинга:  $r$  и  $\Delta$  расстояния кометы от Солнца и Земли,  $ph$  - фазовый угол, данные взяты из базы данных MPC [13], детали выполненных экспозиций:  $N$  и  $t$  – количество и время экспозиций, усредненные значения видимых  $m_R$  звездных величин на момент экспозиции и абсолютная  $m_R(1,1,0)$  звездная величина объекта, полученные в фильтре  $R$ , а также оценки параметра пылепроизводительности  $Afp$  и радиуса  $r_N$  ядра кометы по нашим измерениям. Измерения изображений выполнены апертурой радиусом  $\rho=4.05$  угловых секунд, проекция которого на небесную сферу соответствует  $10588$  км, последняя величина рассчитана по соотношению  $\rho=\Delta \cdot \text{tg}(\rho)$ . Изображение кометы во время наблюдений приведено на рис.1.

Таблица 2

Журнал наблюдений кометы P/2019 LD2 (Атлас) в 2020 г. и результаты фотометрических измерений

Дата, UT	$r$ , а.е.	$\Delta$ , а.е.	$ph$ , град.	$N \times t$ , сек.	$m_R$ , зв.вел.	$Afp$ , см	$\rho''$	$m_R(1,1,0)$ , зв.вел.	$r_N$ , км
06 августа 17:03:33	4.591	3.590	2.3	28 x 120	$17.53 \pm 0.03$	$272 \pm 7.5$	4.05	$11.41 \pm 0.03$	$7.4 \pm 0.14$
07 августа 17:31:26	4.591	3.590	2.3	41 x 120	$17.54 \pm 0.04$	$269 \pm 9.9$			
08 августа 16:59:45	4.592	3.590	2.2	23 x 120	$17.71 \pm 0.04$	$230 \pm 8.5$			
14 августа 21:43:15	4.593	3.597	2.6	24 x 120	$17.58 \pm 0.02$	$260 \pm 4.8$			
15 августа 20:36:11	4.593	3.599	2.7	53 x 120	$17.62 \pm 0.01$	$251 \pm 2.3$			

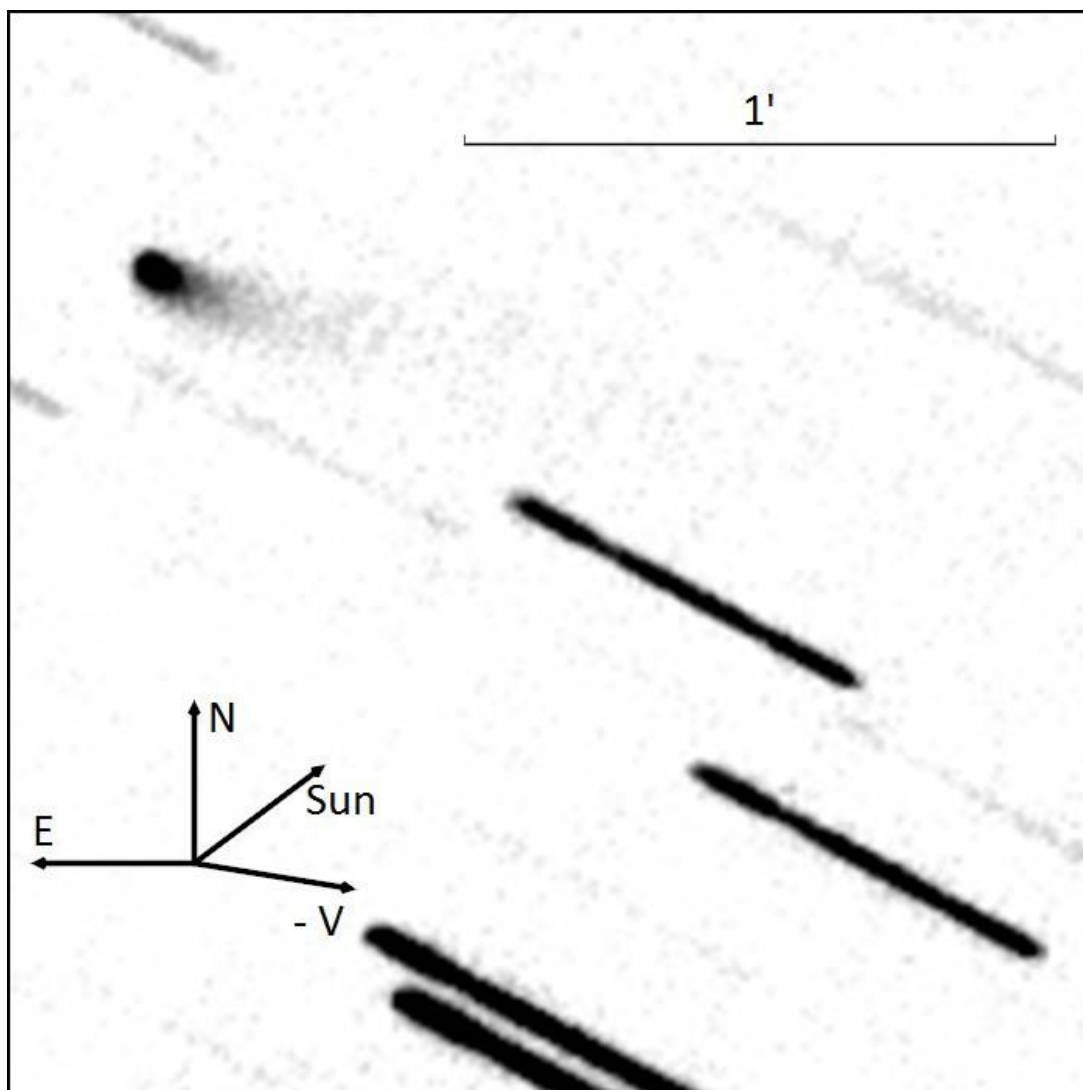


Рис. 1. Суммарное изображение кометы P/2019 LD2 в фильтре R, 15 августа 2020 г., телескоп Цейсс-1000 МАОС.

Как видно из табл.2, в период мониторинга видимый блеск кометы не подвергался значительным изменениям. Видимый блеск  $m_R$  конвертировался в абсолютную яркость ядра кометы  $m_R(1,1,0)$  с использованием следующего эмпирического уравнения [14]

$$m_R(1,1,0) = m_R - 5 \log(r\Delta) - \beta\alpha,$$

здесь  $m_R(1,1,0)$  – блеск гипотетической точки на единичном гелиоцентрическом и геоцентрическом расстояниях с фазовым углом  $ph=0$  град.,  $m_R$  – измеренный блеск,  $r$  и  $\Delta$  – гелио- и геоцентрическое расстояния кометы в а.е.,  $\alpha$  – фазовый угол ( $ph$ ) в градусах,  $\beta$  – фазовый коэффициент в звездных величинах на градус. Для фазового коэффициента использовано общепринятое значение  $\beta=0.035$  зв.вел./град. [15]. Абсолютный блеск кометы по нашим измерениям составил  $11.41^m$  (табл.2), его отличие от эфемеридной величины  $12.1-12.2^m$  указывает на нормальную кометную активность объекта в этот период.

Изофоты кометы, построенные при помощи SAO Image DS9 [16], представлены на рис.2 и наглядно демонстрируют распределение яркости вдоль хвоста кометы.



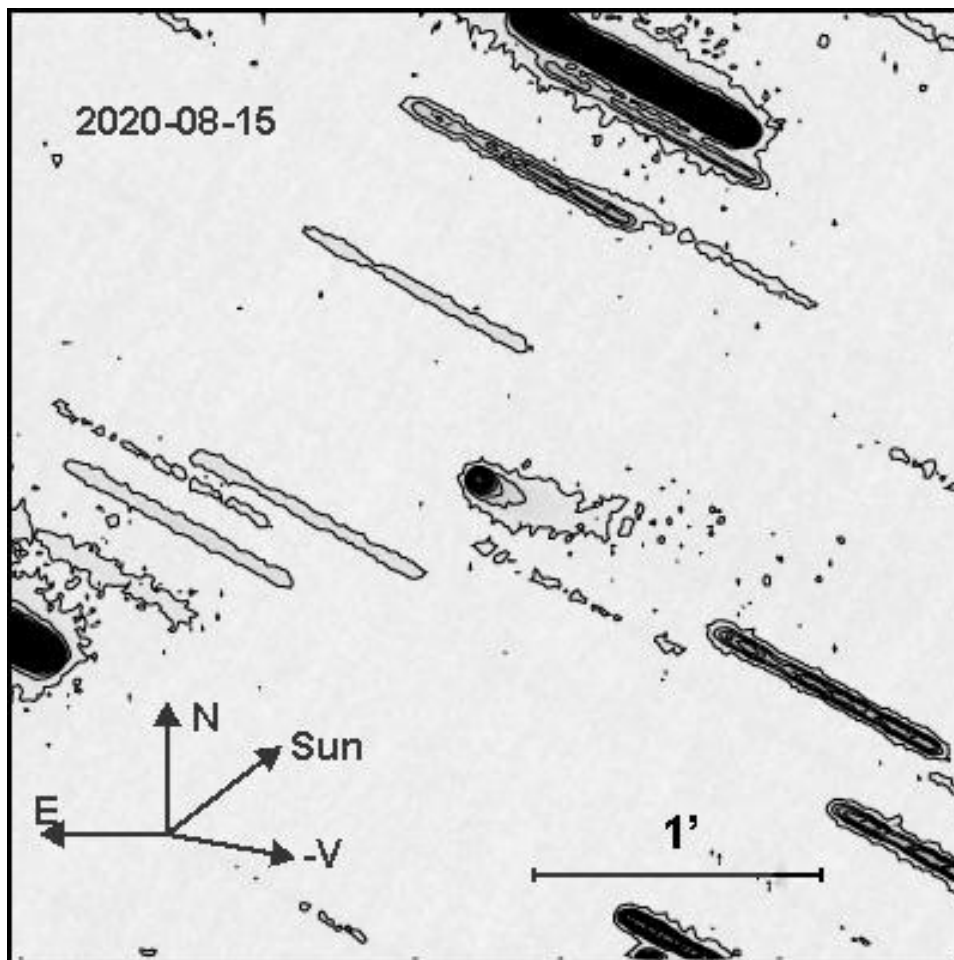


Рис. 2. Изображение хвоста кометы, полученное 15 августа 2020 г. Изофоты использовались для улучшения видимости хвоста.

Верхний предел радиуса кометного ядра на момент минимальной активности за период наблюдений оценивался с использованием следующего эмпирического соотношения между измеренным в фильтре  $R$  абсолютным блеском  $m_R(1,1,0)$  кометы и эффективным радиусом ядра кометы  $r_N$  в метрах [17]

$$A_R r_N^2 = 2.238 \cdot 10^{22} 10^{0.4(m_\odot - m_R(1,1,0))},$$

где  $A_R$  – геометрическое альbedo и  $m_\odot = -27.29$  зв.вел. – видимый блеск Солнца [18], причем обе величины в фильтре  $R$ . Оценка размера ядра, полученная с использованием величины альbedo  $A_R=0.12$  [7] и приведенная в табл.2, хорошо согласуется с диаметром 14 км, приведенного в различных базах данных.

### Пылепроизводительность объекта

Уровень активности кометы можно оценить количественно, используя параметр  $Af\rho$ , который теоретически независим от времени и места наблюдений [19]. Параметр  $Af\rho$  может быть определен с помощью звездной величины по следующему выражению [20]

$$Af\rho = \frac{4r^2\Delta^2 10^{0.4(m_\odot - m_a)}}{\rho},$$

где  $A$  – альbedo,  $f$  – коэффициент заполнения апертуры поля зрения,  $\rho$  – проекция радиуса фотометрической апертуры на небесную сферу в см,  $m_\odot$  и  $m_a$  – видимые звездные величины Солнца и кометы, соответственно, в определенном фильтре,  $r$  – гелиоцентрическое расстояние объекта в а.е. и  $\Delta$  – геоцентрическое расстояние в см. Для наблюдений, полученных на телескопе Цейсс-1000, параметр  $Af\rho$  вычислен с использованием изображений, полученных в фильтре  $R$ , и тем же радиусом проекции апертуры  $\rho=10588$  км (4.05 угл. сек). Полученные значения вместе с ошибками приведены в табл.2. Величины параметра пылепродуктивности наряду с величиной абсолютного блеска также подтверждают повышенную активность кометы, кроме того, в период наблюдений гелиоцентрическое расстояние постепенно увеличивалось, в этой связи наблюдается тенденция уменьшения параметра.

На рис.3 показано распределение параметра  $Af\rho$  в зависимости от радиуса апертуры измерений, найденное по нашим наблюдениям.

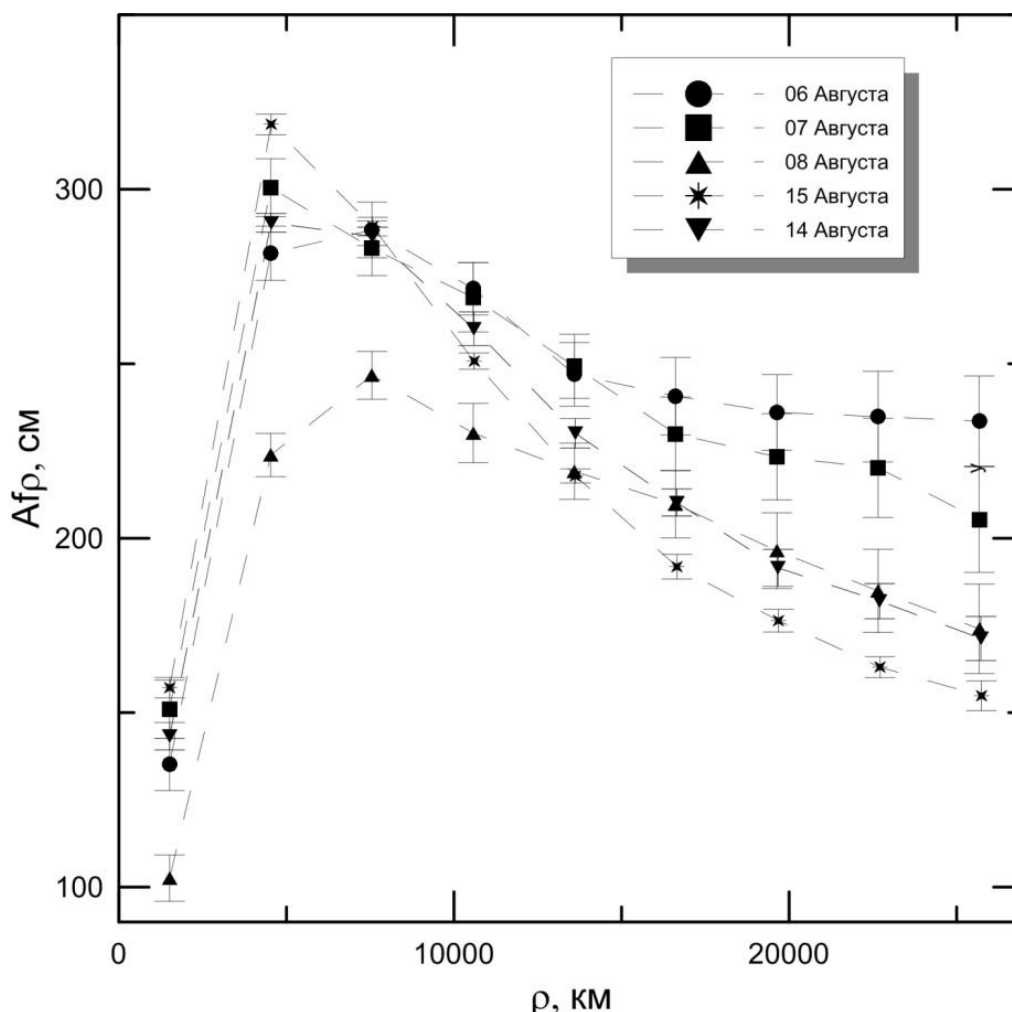


Рис. 3. Распределение параметра  $Af\rho$  в зависимости от радиуса фотометрической апертуры.

### Структура пылевого хвоста

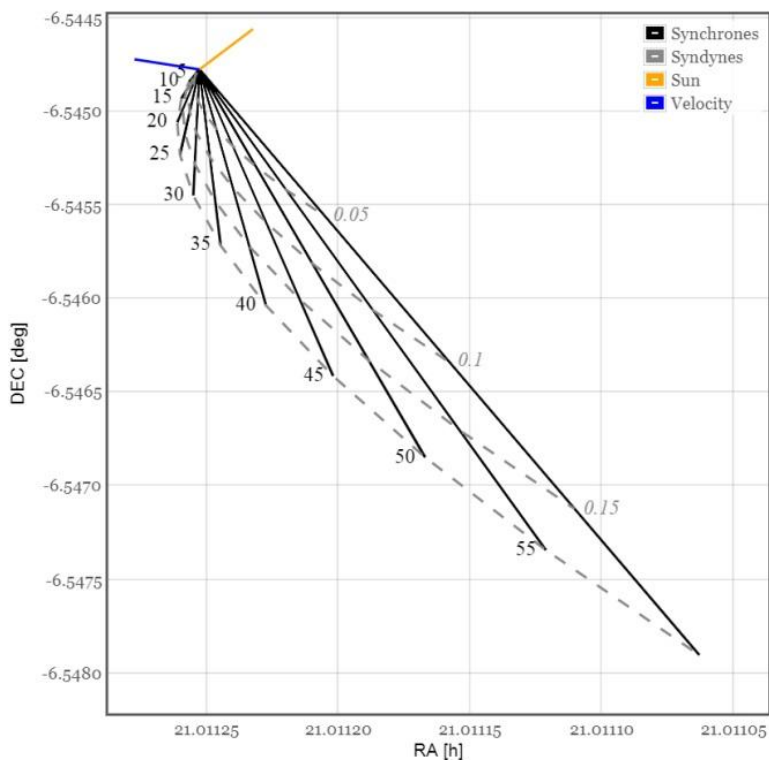
Движение пылевых частиц в коме – сложный процесс, точное описание траекторий частиц в кометной атмосфере требует усовершенствованных гидродинамических моделей, учитывающих взаимодействие между газом и пылью, высвобождаемой с поверхности. В кометном хвосте пыль и газ – разделены, и единственными значимыми силами, влияющими на траекторию частиц, является солнечная гравитация и давление излучения. Обе силы зависят от квадрата гелиоцентрического расстояния, но действуют в противоположных направлениях. Уравнение движение в таком случае можно рассматривать как редуцированную солнечную гравитацию:

$$m \times a = (1 - \gamma) \times g_{Sun}$$

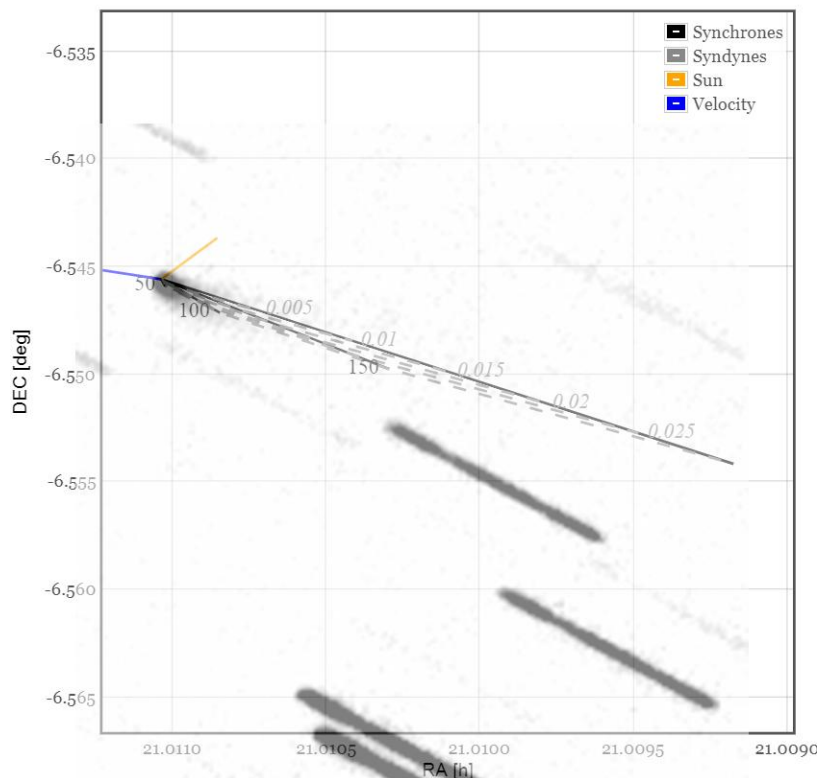
где  $m$  и  $a$  – масса и ускорение пылевой частицы соответственно,  $\gamma$  – это соотношение радиационного давления и солнечной гравитации ( $\gamma = P_{radiation}/g_{Sun}$ ), которое обратно пропорционально размеру для частиц размером более 1 микрона [20]. Исходя из этого соотношения, Финсон и Пробстейн [21] предложили модель, которая описывает полную геометрию хвоста с сеткой синхрон и синдинам – линий, представляющих соответственно местоположения частиц, выброшенных с поверхности ядра в одно и то же время или с одинаковым гамма-коэффициентом.

Модель Финсона-Пробстейна упрощенная, поскольку она рассматривает только частицы, выброшенные в плоскости орбиты кометы, и с нулевой начальной скоростью, но она обеспечивает очень хорошее приближение формы хвоста и успешно использовалась для изучения хвостов, как комет, так и некоторых активных астероидов [22].

Нами построена диаграмма Финсон-Пробстейна кометы с использованием интернет-сервиса [23] и элементов орбиты кометы по данным MPC [24] (рис.4а,б). На диаграмме по осям абсцисс и ординат отложены координаты кометы – прямое восхождение  $\alpha$  и склонение  $\delta$ , соответственно. На рис.4а показано распределение синхрон и синдинам во внутренней коме (размер области примерно  $13'' \times 13''$ ). Их распределение по всей видимой части комы показано на рис.4б (размер области примерно  $108'' \times 108''$ ). Учитывая, что  $\gamma = 0.57 Q_{pr}/\rho a$ , где  $\rho$  – плотность пылинки, выраженная в граммах на кубический сантиметр,  $a$  – радиус пылинки, в микрометрах,  $Q_{pr}$  – эффективность радиационного давления, которое зависит от размера, формы и оптических характеристик пылинки (для кометной пыли эффективность радиационного давления обычно порядка единицы), то, приняв плотность кометной пыли порядка  $0.1 \text{ г/см}^3$  [25], можно сказать, что во внутренних областях комы доминируют крупные частицы размером  $> 100 \text{ мкм}$ .



**Рис. 4а.** Диаграмма Финсон-Пробстейна для кометы P/2019 LD2 (ATLAS) (внутренняя кома), 15 августа 2020 г. Синдинами (пунктирные линии) показывают распределение значения параметра  $\gamma$  для частиц кометной пыли ( $\gamma = 0.05, 0.1, 0.15$ ), который обратно пропорциональный их размеру; синхроны (сплошные линии) показывают геометрическое место пылинок различного размера, которые высвободились из ядра определенное количество времени назад ( $d=5-60$  дней) от времени наблюдения. Направления к Солнцу и вектора скорости также указаны на диаграмме.



**Рис. 4б.** Диаграмма Финсон-Пробстейна для изображения кометы P/2019 LD2, наложенного на координатную сетку в реальном масштабе по состоянию на 15 августа 2020 г., здесь показано распределение синдинам и синхрон по всей видимой части комы.

Наличие короткого хвоста в направлении против движения кометы указывает на наличие крупнозернистой пыли в кометной атмосфере. На кометную пыль солнечный ветер почти не действует, её выталкивает из комы давление солнечного света. Поэтому формирование хвоста определяется начальной орбитальной скоростью движения и ускорением под действием давления света.

### З а к л ю ч е н и е

По данным фотометрических наблюдений кометы P/2019 LD2 (ATLAS) проведенных в течение 5 ночей в августе 2020 г. с помощью телескопа Цейсс-1000 обсерватории Санглюх с использованием широкополосного фильтра  $R$  получены физические характеристики кометы:

- 1) видимые звездные величины  $m_R$  по измерениям каждой ночи наблюдений;
- 2) абсолютная звездная величина  $m_R(1,1,0) = 11.42^m$ ;
- 3) параметр пылепроизводительности  $Afp$  порядка 250 см (при  $\rho = 4.05''$ );
- 4) верхний предел радиуса ядра кометы  $r_{max} = 7.82$  км при альбедо  $A = 0.12$ ;
- 5) построены изофоты кометы, демонстрирующие распределение яркости вдоль хвоста;
- 6) построены Финсон-Пробштейн диаграммы внутренней и всей видимой части комы кометы и выявлена структура пылевого хвоста: распределение пылевых частиц по размерам и по времени выброса с поверхности ядра, показано, что во внутренних областях комы доминируют крупные частицы размером свыше 100 мкм;
- 7) фотометрические данные указывают, что в период мониторинга комета находилась в состоянии несколько повышенной кометной активности, связанной, главным образом, с недавним прохождением перигелия. Во время наблюдений гелиоцентрическое расстояние кометы составляло 4.591-4.593 а.е., на таких расстояниях, меньших т.н. «снеговой линии», в некоторой степени все еще могут проявляться типичные механизмы, ответственные за нормальную кометную активность, а именно, солнечный нагрев поверхности, сублимация поверхностных замороженных летучих компонентов, выброс пыли и образование комы и хвоста. Эти данные подтверждают вывод [4], показавших, что область расположения транзитных объектов (от Кентавров к кометам семейства Юпитера), к которым наряду с кометой 29P относится и P/2019 LD2 (ATLAS), совпадает с гелиоцентрическим диапазоном расстояний, где активность наблюдаемых кометных тел значительно возрастает.
- 8) настоящая орбита кометы показывает, что комета находится в стадии перехода от Кентавров к кометам семейства Юпитера. Несколько повышенное значение  $Afp$  по сравнению с другими кометами семейства Юпитера [26,27] может указывать на предыдущее длительное пребывание кометы во внешних областях Солнечной системы.

*Поступило 03.05.2021 г.*

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. "UH ATLAS telescope discovers first-of-its-kind asteroid". Institute for Astronomy. University of Hawai'i. 20 May 2020. <http://www.ifa.hawaii.edu/info/press-releases/2019LD2/>, Retrieved 21 May 2020, дата обращения февраль 2021 г.

2. MPEC 2020-K134: COMET P/2019 LD2 (ATLAS). – Minor Planet Electronic Circular, Cambridge, Massachusetts: MPC, May 23, 2020, дата обращения февраль 2021 г.
3. Licandro J., Pinilla-Alonso N., de Leon J., Moreno F. et al. Observations of Comet P/2019 LD2 (ATLAS) with the 10-m Gran Telescopio Canarias (GTC). – AAS Division of Planetary Science meeting #52, id. 404.06. Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 52, No. 6 e-id 2020n6i404p06.
4. Sarid G., Volk K., Steckloff J. K. et al. 29P/Schwassmann-Wachmann 1, A Centaur in the Gateway to the Jupiter-family Comets. – The Astrophysical Journal Letters, 2019, Vol. 883, Issue 1, article id. L25, 7 pp.
5. "JPL Small-Body Database Browser: (P/2019 LD2)" (2020-05-19 last obs.). Jet Propulsion Laboratory, Retrieved 21 May 2020, дата обращения февраль 2021 г.
6. "P/2019 LD2". Minor Planet Center. International Astronomical Union, Retrived 21 May 2020, <https://www.minorplanetcenter.net/>, дата обращения февраль 2021 г.
7. Fernandez Y. R., Jewitt D., Ziffer J. E. Albedos of Small Jovian Trojans. – The Astronomical Journal, 2009, Vol. 138 (1), pp. 240–250.
8. <http://www.msb-astroart.com/>, 2021.
9. Barth A. In ASP Conf. Ser., Astronomical Data Analysis Software and Systems X, eds. F. R. Harnden, Jr., F. A. Primini, & H. E. Payne, 2001, Vol. 238, San Francisco: ASP, p. 385.
10. Henden, A. A., Templeton, M., Terrell, D., Smith, T. C., Levine, S., & Welch, D. (2016). VizieR online data catalog: AAVSO photometric all sky survey (APASS) DR9 (Henden+, 2016). – VizieR Online Data Catalog, II-336.
11. Munari U., Henden A., Frigo A., & Dallaporta S. APASS discovery and characterization of 180 variable stars in Aquarius. - The Journal of Astronomical Data, 2014, Vol. 20, p. 4.
12. Aladin Sky Atlas, <http://www.aladin.u-strasbg.fr>, 2021.
13. <https://www.minorplanetcenter.net/iau/MPEph/MPEph.html>, 2020.
14. Snodgrass C., Lowry S.C., Fitzsimmons A. Photometry of cometary nuclei: rotation rates, colours and a comparison with Kuiper Belt Objects. – Mon. Not. R. Astron. Soc., 2006, v. 373, p. 1590–1602.
15. Lamy P.L., Toth I., Fernandez Y.R., Weaver H.A. The sizes, shapes, albedos, and colors of cometary nuclei. – In: Comets II, M.C. Festou, H.U. Keller, and H.A. Weaver (eds.), 2004, University of Arizona Press, Tucson, p. 223-264.
16. <https://sites.google.com/cfa.harvard.edu/saoinmageds9>, 2021 г.
17. Russell H.N. On the albedo of the planets and their satellites. – Astrophys. J., 1916, Vol. 43, pp. 173-196.
18. Cox A.N., Pilachowski C.A. Allen's Astrophysical Quantities. – Physics today, 2000, v.53, p.77.
19. A'Hearn M.F., Schleicher D.G., Millis R.L., Feldman P.D., Thompson D.T. Comet Bowell 1980b. – Astron. J., 1984, v. 89, pp. 579-591.
20. Vincent J.-B. Comet-toolbox: Numerical simulations of cometary dust tails in your browser. – In: Asteroids, Comets, Meteors 2014. Proceedings of the conference held 30 June - 4 July, 2014 in Helsinki, Finland. Edited by K. Muinonen et al., 2014, p. 565V.
21. Finson M. L., Probstein R. F. A theory of dust comets. I. Model and equations. – Astron. J, 1968, Vol. 154, pp. 353-380.

22. Borysenko S., Baransky A., Kuehrt E., Hellmich S., Mottola S., Meech K. Study of the physical properties of selected active objects in the main belt and surrounding regions by broadband photometry.- *Astronomische Nachrichten*, 2020, Vol. 341, Issue 9, pp. 849-859.
23. <http://www.comet-toolbox.com/FP.html>, 2021 г.
24. MPEC 2020-UR0. – Minor Planet Electronic Circular, Cambridge, Massachusetts, <https://www.minorplanetcenter.net>, дата обращения февраль 2021 г.
25. Greenberg J. M., Li A. Morphological Structure and Chemical Composition of Cometary Nuclei and Dust. – *Space Sci. Reviews*, 1999, Vol. 90, pp. 149-161.
26. Borysenko S., Baransky A., Musiichuk E. Photometric observations of ecliptic comet 47P/Ashbrook-Jackson and selected quasi-Hilda and main-belt comets at Kyiv Comet Station (MPC code-585) in 2017. – *Icarus*, 2019, Vol. 317, pp. 44-47.
27. Borysenko S., Baransky A., Simon A., Vasylenko V. Broadband photometry of asteroid 6478 Gault: Activity and morphology. – *Astronomische Nachrichten*, 2020, Vol. 341, Issue 4, pp. 395-401.

**Г.И.Кохирова, Ф.Дж.Рахматуллоева, С.А.Борисенко\***

## **НАТИЧАҲОИ МУШОҲИДАҲОИ КОМЕТАИ P/2019 LD2**

### **ДАР РАСАДҲОНАИ САНГЛОҲ**

*Институти астрофизикаи АМИ Тоҷикистон,*

*\*Саррасадхонаи астрономии АМИ Украина, Киев, Украина*

Кометаи кӯтоҳдаври P/2019 LD2 (Атлас) моҳи июни соли 2019 кашф карда шудааст. Дар аввал ӯ ҳамчун ба таснифгари гурӯҳи астероиди троянӣ ба ҳисоб мерафт, аммо баъдан ба гурӯҳи кометаҳои оилаи Муштарӣ шомил гардид. Пайдоиши аслии комета то ҳол муқаррар нашудааст ва аз ин рӯ омӯзиши ӯ таваҷҷӯҳи хосаи илмиро ба худ ҷалб кардааст. Мушоҳидаҳои оптики комета моҳи августи соли 2020 дар Расадхонаи астрономии байналмилалӣ Санглоҳи Институти астрофизикаи АМИ Тоҷикистон сурат гирифтааст. Дар натиҷаи санҷиш ва таҳқиқ дурахши зоҳирӣ ва мутлақи комета дар филтри R муайян карда шуд, параметри истеҳсоли ҷанг ва ҳудуди болоии радиуси ҳаста ҳисоб карда мешавад. Тақсимои дурахшонӣ дар қад-қадӣ дум нишон дода шуда, сохтори думи ҷанг ошқор гардид. Маълумотҳои фотометрӣ нишон медиҳанд, ки дар давраи назорат комета дар ҳолати фаъолияти оддӣ афрӯзиш қарор дошт, ки ин асосан бо гузариши охирини перигелий алоқаманд аст.

**Калимаҳои калидӣ:** *комета, фотометрия, дурахш, истеҳсоли ҷанг, радиус, изофота, диаграммаи Финсон-Пробстейн.*

G.I.Kokhirova, F.Dzh.Rakhmatullaeva, S.A.Borysenko\*

**RESULTS OF OBSERVATIONS OF COMET P/2019 LD2  
IN THE SANGLOKH OBSERVATORY**

*Institute of Astrophysics of the National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*\*Main astronomical observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine,*

A short-period comet P/2019 LD2 (Atlas) was discovered in June 2019. The object was originally classified as a Trojan asteroid, but later included in the Jupiter family of comets. The origin of the object has not been established for certain and therefore the study of the comet continues to be of particular scientific interest. The optical observations of the comet were carried out in August 2020 at the Sanglokh International Astronomical Observatory (IAOS) of the Institute of Astrophysics of the National Academy of Sciences of Tajikistan. The apparent and absolute brightness of the comet in the R filter is determined, the dust production parameter and the upper limit of the radius of the nucleus are estimated. The distribution of brightness along the tail is shown and the structure of the dust tail is revealed. Photometric data indicate that during the monitoring period, the comet was in a state of normal cometary activity, associated mainly with the recent passage of perihelion.

**Key words:** comet, photometry, light, dust production, radius, isophote, Finson-Probstein diagram.



УДК 53+54(575.3)

Д.Рашидов, член-корреспондент НАН Таджикистана Т.Х.Салихов, С.Х.Табаров, А.Мирзо,

Д.М.Шарифов, Ф.Х.Содиков

**ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТЬ ФУЛЛЕРЕННАПОЛНЕННОГО  
ПОЛИЭТИЛЕНА***Таджикский национальный университет*

*Методами дилатометрии и термографии исследованы температурные изменения толщин, плотности и коэффициента тепловой усадки фуллереннаполненных образцов полиэтилена. Обнаружено, что коэффициенты температуропроводности композитных образцов с ростом концентрации фуллерена  $C_{60}$  и температуры линейно уменьшаются, что связано с уменьшением длины пробега фононов и ростом числа центров рассеяния на матрице и наночастицах фуллерена.*

**Ключевые слова:** полимер, нанокompозит, фуллерен, фононы, температуропроводность.

Имеющийся обширный литературный материал свидетельствует о том, что многие характеристики как эластомеров, так и жестких полимеров могут быть существенно, а иногда в разы, улучшены путем их модификации малыми добавками наночастиц [1,2]. Как показывает проведенный анализ, в этом направлении наиболее перспективным является создание полимерных нанокompозитов с добавлением таких нанокarбонов, как углеродные нанотрубки, фуллерены и графены [3].

Цель настоящей работы заключалась в экспериментальном исследовании влияния добавок фуллерена  $C_{60}$  на дилатометрические свойства и коэффициент температуропроводности плёночных образцов из полиэтилена низкой плотности (ПЭНП).

В качестве объекта исследования использовали композиты на основе ПЭНП (ГОСТ 16337-77), характеристики которого приведены в [2,4]. Наполнителем служил фуллерен  $C_{60}$  с химической чистотой 99.7%. Пленки композита с различным содержанием  $C_{60}$  получали из растворов ПЭНП и фуллерена в общем растворителе толуоле. Методика получения плёнок описана в [1,2]. Процессы тепловой усадки или расширения образцов в цикле нагревание-охлаждение изучали на дилатометре DIL 420C фирмы NETZSCH при скорости нагрева и охлаждения 5 град/мин. Образцы композитов имели форму квадрата с размерами 7x7 мм, 8x8 мм и толщиной 0.15-0.17 мм. Значение теплоемкости образцов  $C_p$  в цикле нагревание-охлаждение измеряли на калориметре DSC 204 F1 фирмы NETZSCH со скоростью нагрева 10 град/мин. Дилатометрические кривые характеризуют изменение тепловых коэффициентов расширения или усадки образцов в направлении, перпендикулярном плоскости пленки.

На рис. 1 приведены типичные дилатограммы образцов композитов ПЭНП- $C_{60}$ , характеризующие температурные зависимости величины деформации по толщине  $\varepsilon = dL/L_0$  (кривые 1-5) и коэффициентов тепловой усадки или расширения  $\alpha = d\varepsilon/dT$  (кривые 1'-5'), где  $L_0$  – начальная толщина образца,  $dL/L_0$  – ее относительное изменение. Из рисунка видно, что в цикле нагревание-охлаждение

*Адрес для корреспонденции:* Рашидов Джалил, 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр.Рудаки 17, Таджикский национальный университет. E-mail: rashidov.1943@mail.ru

в диапазоне температур  $T=30-102-50^{\circ}\text{C}$  с ростом концентрации  $C_{60}$  наблюдается усадка образцов (С) и его абсолютная величина составляет  $\sim 4\%$  для образца ПЭНП-1% $C_{60}$ , а затем постепенно увеличивается до 12% в интервале  $C=3-10\%$ . Также наблюдается постоянство величины  $\alpha(T)$  в интервале  $T=30-55^{\circ}\text{C}$ , её рост в интервале  $55-92^{\circ}\text{C}$  и дальнейшее её уменьшение в области  $92-102^{\circ}\text{C}$ . Далее идёт её резкий рост в области плавления и снижение при охлаждении в интервале  $T=102-92^{\circ}\text{C}$  и затем её постоянство в интервале  $T=92-50^{\circ}\text{C}$ .

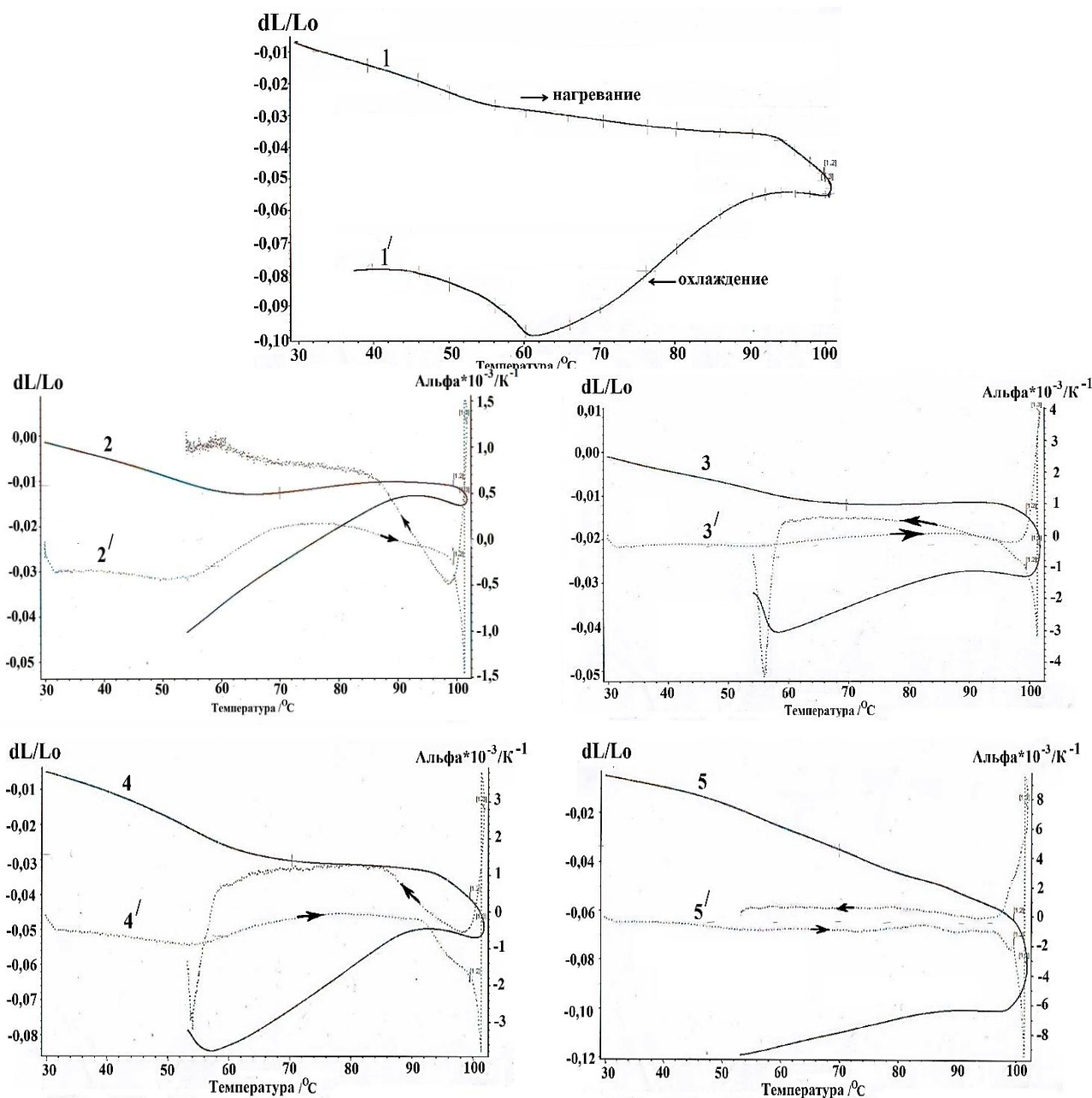


Рис. 1. Дилатогаммы нанокмпозитов ПЭНП- $C_{60}$ :

1 –  $C = 0$ ; 2 – 1; 3 – 3; 4 – 5; 5 – 10%  $C_{60}$ .

Отметим, что при охлаждении до  $T = 96^{\circ}\text{C}$  знак величины  $\alpha(T)$  меняется из отрицательного на положительный. Кроме того, из рисунка также следует, что с ростом концентрации фуллерена  $C_{60}$

наблюдается тепловая усадка образцов от 2 до 6% при нагреве и от 3 до 12% при охлаждении, что свидетельствует о происходящих при этом конформационных переходах цепных молекул типа вытянутая цепь-клубок или же спираль-клубок в аморфных областях полиэтилена [5].

Полученные результаты в сочетании с данными по коэффициенту теплопроводности  $\lambda$  этих образцов [6, 7] позволяют рассчитать температурную и концентрационную зависимости величин их температуропроводности по известному соотношению  $\chi = \lambda / (\rho C_p)$ . Нами по температурному изменению коэффициентов тепловой усадки или расширения  $\alpha$  (рис.1) [8] были рассчитаны температурные изменения плотности  $\rho(T)$  композитов ПЭНП-С<sub>60</sub> (см. табл.).

Таблица

Температурная и концентрационная зависимости плотности  $\rho(T)$  (г/см<sup>3</sup>) и удельной теплоемкости  $C_p$  (Дж/г·К) нанокompозитов ПЭНП-С<sub>60</sub>

Композит	Температура, °C											
	30		40		50		60		70		80	
	$\rho$	$C_p$	$\rho$	$C_p$	$\rho$	$C_p$	$\rho$	$C_p$	$\rho$	$C_p$	$\rho$	$C_p$
ПЭНП	0.8976	0.832	0.8926	0.961	0.903	1.086	0.8915	1.132	0.8600	1.242	0.8600	1.265
ПЭНП-1%С <sub>60</sub>	0.9096	0.8290	0.9187	0.9291	0.9180	1.068	0.9180	1.154	0.9289	1.260	0.900	1.311
ПЭНП-3%С <sub>60</sub>	0.9128	0.785	0.9101	0.949	0.9087	0.988	0.8894	1.060	0.9199	1.179	0.9060	1.356
ПЭНП-5%С <sub>60</sub>	0.9122	0.9362	0.8963	1.036	0.8704	1.304	0.8855	1.353	0.9073	1.380	0.9144	1.500
ПЭНП-10%С <sub>60</sub>	0.9092	0.952	0.9014	1.076	0.8872	1.281	0.8836	1.485	0.8616	1.798		

Расчётные значения температуропроводности образцов  $\chi$  в зависимости от температуры и концентрации фуллерена представлены на рис. 2 и 3 соответственно.

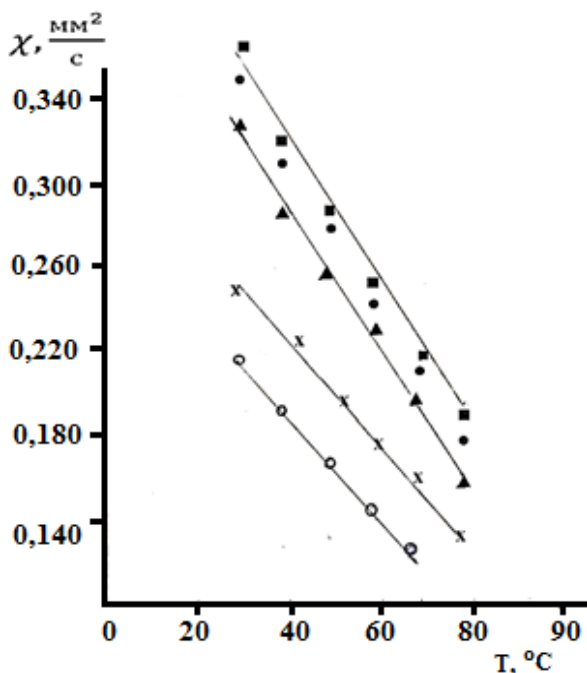


Рис. 2. Температурные зависимости коэффициента температуропроводности композитов ПЭНП- $C_{60}$  при: ■ –  $C=0$ ; ● – 1; ▲ – 3; x – 5; ○ – 10%  $C_{60}$ .

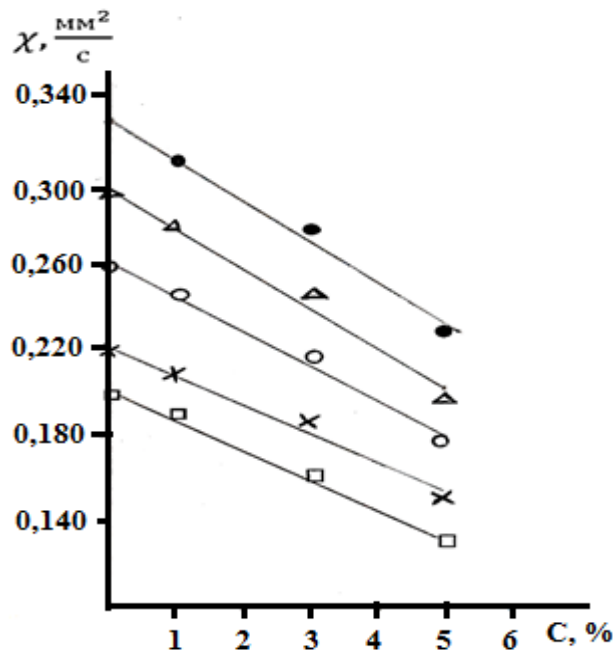


Рис. 3. Концентрационные зависимости температуропроводности композитов ПЭНП- $C_{60}$  при: ● – 40°C; ▲ – 50°C; ○ – 60°C; x – 70°C; □ – 80°C.

Из этих зависимостей видно, что общая картина температурной зависимости  $\chi$  для всех образцов сохраняется, при этом наблюдается линейный спад  $\chi$  с ростом температуры и концентрации фуллерена  $C_{60}$ . Эти данные хорошо согласуются с результатами измерений по коэффициенту температуропроводности чистых пленок ПММА, выполненных в [9], где было показано, что  $\chi$  почти линейно уменьшается от 0.140 до 0.105  $\text{mm}^2/\text{c}$  в интервале температур 40-80°C. Как видно, коэффициент температуропроводности композитов ПЭНП- $C_{60}$  при фиксированных температурах с повышением концентрации фуллерена уменьшается (рис. 3) и эта зависимость в ограниченном интервале концентраций является линейной. Такое поведение системы связано, скорее всего, с тем, что, во-первых, с повышением концентрации  $C_{60}$  происходит увеличение свободного объема в полимере и уменьшается межмолекулярное взаимодействие, что, в свою очередь, приводит к падению коэффициента температуропроводности. Во-вторых, внедрение малых количеств наночастиц  $C_{60}$  приводит увеличению числа центров рассеяния фононов и уменьшению их длины пробега и, в результате, уменьшается, как теплопроводность, так и температуропроводность.

Таким образом, полученные результаты показывают, что внедрение малых добавок фуллерена  $C_{60}$  приводит к линейному уменьшению температуропроводности нанокompозитов на основе полиэтилена низкой плотности.

Поступило 02.03.2021 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург Б.М., Туйчиев Ш., Рашидов Д. и др. Влияние фуллерена  $C_{60}$  на структуру и механические свойства полиэтилена. – Высокомолек. соедин., 2011, сер. А, т.53, №6, с.883-896.

2. Гинзбург Б.М., Туйчиев Ш., Рашидов Д., Табаров С.Х. и др. Влияние фуллерена  $C_{60}$  на структуру и механические свойства тонких пленок из полиметилметакрилата и других карбоцепных полимеров винилового ряда: Технологический аспект. – Высокомолек. соедин., 2012, сер.А, т.54, №8, с.1283-1296.
3. Nihar R. Pradhan. Thermal conductivity of nanowires, nanotubes and polymer-nanotube composites. PhD Thesis, Worcester Polytechnic Institute Department of Physics, 2010, 223 p.
4. Рашидов Д., Шоимов У., Туйчиев Ш. и др. Влияние фуллерена  $C_{60}$  на структуру и физические свойства полиэтилена. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн.н., 2007, №4, с.68-72.
5. Манделькern Л. Кристаллизация полимеров. – Л.:Химия, 1967, 336 с.
6. Салихов Т.Х., Табаров С.Х., Рашидов Д., Туйчиев Ш., Хуссейн А. Влияние добавок фуллерена  $C_{60}$  на теплопроводность плёнок из полиэтилена низкой плотности. – Журнал технической физики, 2011, т.81, вып. 4, с.141-143.
7. Салихов Т.Х., Табаров С.Х., Рашидов Д., Туйчиев Ш., Хуссейн А. Влияние добавок фуллерена  $C_{60}$  на теплопроводность пленок из полиметилметакрилата. – Письма в ЖТФ, 2009, т.35, вып. 21, с.75-78.
8. Туйчиев Ш., Шарифов Д.М., Рашидов Д., Табаров С., Акназарова Ш., Туйчиев Л., Шерматов Д. О релаксационных свойствах фуллеренсодержащих полимеров. – ДАН РТ, 2013, т.56, №2, с.124-129.
9. Rudtsch S., Hammerschmidt U. Intercomparison of Measurements of the Thermophysical Properties of Polymethyl Methacrylate. – International Journal of Thermophysics, 2004, v.25, №5, pp.1475-1482.

**Д.Рашидов, Т.Х.Салихов, С.Х.Табаров, Д.М.Шарифов, Ф.Х.Содиков**

## **ҲАРОРАТГУЗАРОНИИ ПОЛИЭТИЛЕНИ ФУЛЛЕРЕНДОР**

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Тағйирёбии ҳароратии ғафсӣ, зичӣ ва коэффитсиенти васеъшавии ҳароратии намунаҳои композитӣ бар асоси полиэтиленӣ зичиаш паст ва фуллерени  $C_{60}$  бо усулҳои дилатометрия ва термография омӯхта шудааст. Нишон дода шудааст, ки коэффитсиенти ҳароратгузаронии намунаҳои ПЭНП- $C_{60}$  бо афзоиши консентратсияи  $C_{60}$  хаттӣ кам мешавад, ки бо коҳиши дарозии дав ва афзоиши интенсивияти пароканиши фононҳо аз кристаллитҳо ва нанозарраҳои фуллеренӣ алоқаманд аст.

**Калимаҳои калидӣ:** полимер, нанокомпозит, фуллерен, фононҳо, ҳароратгузаронӣ.

**D.Rashidov, T.Kh.Salikhov, S.Kh.Tabarov, A.Mirzo, D.M.Sharifov, F.Kh.Sodikov**

## **THERMALDIFFUSIVITY OF FULLERENE-FILLED POLYETHYLENE**

Temperature changes in thickness, density, and coefficients of thermal shrinkage or thermal expansion of fullerene-containing samples of low density polyethylene- $C_{60}$  has been studied by dilatometers and thermography methods. It is shown that the coefficient of thermal diffusivity of the composite samples of LDPE- $C_{60}$  decreases with increasing concentration of  $C_{60}$ , which is associated with an increase in phonon scattering on crystallites and the nanoparticles of fullerene  $C_{60}$ .

**Key words:** polymer, nanocomposite, fullerene, phonons, thermal diffusivity.

УДК 541.4:(454.76.2+548.736)

Н.С.Бекназарова, Дж.О.Шоалифов

## КОМПЛЕКСООБРАЗОВАНИЕ В СИСТЕМЕ

**Hg(II) – 1-ФЕНИЛ-2,3-ДИМЕТИЛПИРАЗОЛИН-5-ТИОН – 0.1 МОЛЬ/Л HNO<sub>3</sub> – 298 К***Таджикский национальный университет**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана А.Бадаловым 06.03.2021 г.)*

Методом потенциометрии с использованием окислительно-восстановительного электрода на основе 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тиона и его окисленной формы исследован процесс комплексообразования ионов ртути (II) в среде 0.1 моль/л HNO<sub>3</sub> при температуре 298 К. Показано, что при титровании системы Hg(II) – 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тион – 0.1 моль/л HNO<sub>3</sub> – 298 К происходит закономерное увеличение потенциала индикаторного электрода. Установлено, что процесс комплексообразования протекает ступенчато с образованием четырех комплексных форм составов: [HgL(H<sub>2</sub>O)<sub>3</sub>]<sup>2+</sup>, [HgL<sub>2</sub>(H<sub>2</sub>O)<sub>2</sub>]<sup>2+</sup>, [HgL<sub>3</sub>(H<sub>2</sub>O)]<sup>2+</sup> и [HgL<sub>4</sub>]<sup>2+</sup>, где L – 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тион. Для каждой комплексной частицы методом Бьеррума определены их константы устойчивости.

**Ключевые слова:** комплексообразование, 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тион, ртуть (II), окислительно-восстановительный электрод, константа устойчивости, равновесная концентрация.

Многие органические соединения, содержащие в своем составе сульфгидрильную или тионную группу с ионами металлов, образуют координационные соединения, которые нашли широкое практическое применение в аналитической химии. Среди серосодержащих органических соединений, которые обладают способностью вступать в реакции комплексообразования с ионами ряда металлов, важное место занимают производные пиразола, являющиеся аналитическими реагентами на халькофильные элементы. Автором [1] методом потенциометрического титрования изучен процесс окисления тиопирина (1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тион) в среде 6 моль/л HCl. Показано, что молекула этого органического соединения окисляется до соответствующего дисульфида с потерей одного электрона. Установлена обратимость процесса окисления тиопирина в интервале 273-338 К, который был использован для определения ступенчатых констант образований комплексов рения (V) в среде 6 моль/л HCl. В работах [2,3] изучен процесс комплексообразования рения (V) с тиопирином в среде 6 моль/л Hg, где Г-Cl, Вг. Показано, что рений (V) реагирует с тиопирином ступенчато. Определены ступенчатые константы образования комплексов в интервале 273-338 К. Установлено, что с возрастанием температуры устойчивость комплексов уменьшается. Результаты потенциометрических исследований комплексообразования Cu(II), Fe(III) Hg(II) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом в

**Адрес для корреспонденции:** Бекназарова Назира Соибназаровна, Шоалифов Джасур Олимшоевич. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: nazira64@inbox.ru ; jasur.shoalifov@mail.ru

кислых средах приведены в работах [4-6]. Анализ литературы показал, что сведения относительно комплексообразования Hg(II) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом отсутствуют.

В связи с вышеизложенным нами были проведены целенаправленные исследования по изучению процесса комплексообразования ртути (II) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом в среде 0.1 моль/л HNO<sub>3</sub> при 298 К.

#### Материалы и методы исследований

В качестве исходных реагентов использовали Hg(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub>·2H<sub>2</sub>O марки «х.ч.», 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тион марки «х.ч.» синтезирован по методике [7]. Потенциометрическое титрование проводили с использованием компаратора напряжения Р-3003. Температуру в ячейке поддерживали с точностью ±0.1°С. В качестве окислительно-восстановительного электрода для изучения процесса комплексообразования Hg(II) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом использовали окислительно-восстановительную систему, состоящую из 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тиона и его окисленной формы. В работе были использованы платиновый (индикаторный) и хлорсеребряные (сравнение) электроды. Различную концентрацию окисленной и восстановленной форм 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тиона создавали окислением части исходного 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тиона 0.1N раствором I<sub>2</sub> в среде 0.1 моль/л HNO<sub>3</sub>.

Все расчёты по определению функции образования, равновесной концентрации лиганда, уточнение констант устойчивости и мольных долей проводились на компьютере.

#### Результаты и их обсуждение

При потенциометрическом титровании окислительно-восстановительной системы, состоящей из 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тиона и его окисленной формы, раствором Hg(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub>·2H<sub>2</sub>O наблюдается возрастание равновесного потенциала, что свидетельствует об участии в реакции комплексообразования Hg(II) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом, а не его окисленной формы. В каждой точке титрования равновесие устанавливалось в течение 10-15 минут. Определив значения ΔE в каждой точке титрования, вычисляли значения равновесной концентрации органического лиганда. С использованием найденных значений [L] и с учетом аналитических концентраций Hg(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub> и 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тиона вычисляли функцию образования Бьеррума [8].

В табл. 1 представлены экспериментальные данные образования нитрато-1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионных комплексов ртути (II) в изученных условиях.

Таблица 1

Результаты потенциометрического титрования процесса образования 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионных комплексов ртути (II) в среде 0.1 моль/л HNO<sub>3</sub> при 298 К

$C_L \cdot 10^3$ , моль/л	$C_{Hg} \cdot 10^3$ , моль/л	ΔE, мВ	$\bar{n}$	-lg[L]
8.69	1.57	41.0	3.86	2.58
8.52	1.78	46.0	3.58	2.67
8.35	1.98	52.0	3.36	2.77
8.18	2.18	61.0	3.22	2.93
8.03	2.37	71.0	3.06	3.10
7.88	2.55	80.0	2.88	3.26
7.73	2.72	90.0	2.71	3.43
7.59	2.89	95.0	2.53	3.52

Продолжение таблицы 1

$C_L \cdot 10^3$ , моль/л	$C_{Hg} \cdot 10^3$ , моль/л	$\Delta E$ , мВ	$\bar{p}$	$-\lg[L]$
7.46	3.05	100.0	2.37	3.61
7.33	3.20	109.0	2.23	3.77
7.20	3.36	114.0	2.11	3.85
7.08	3.50	122.0	1.99	3.99
6.97	3.64	126.0	1.89	4.06
6.78	3.87	135.0	1.74	4.22
6.60	4.08	144.0	1.61	4.38
6.43	4.28	155.0	1.50	4.57
6.27	4.47	165.0	1.40	4.75
6.12	4.65	171.0	1.31	4.85
5.98	4.83	180.0	1.24	5.01
5.84	4.99	188.0	1.17	5.15
5.71	5.15	194.0	1.11	5.26
5.58	5.30	199.0	1.05	5.35
5.34	5.59	208.0	0.96	5.51
5.13	5.85	214.0	0.88	5.62
4.93	6.09	225.0	0.81	5.81
4.74	6.31	234.0	0.75	5.97
4.57	6.52	245.0	0.70	6.17
4.41	6.71	255.0	0.66	6.34
4.26	6.89	257.0	0.62	6.39
3.99	7.21	264.0	0.55	6.52
3.75	7.49	272.0	0.50	6.67
3.54	7.75	280.0	0.46	6.81
3.36	7.97	284.0	0.42	6.89
3.15	8.22	285.0	0.38	6.92

Построенная на основании данных потенциметрического титрования кривая образования 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионных комплексов ртути (II) в среде 0.1 моль/л  $HNO_3$  при 298 К представлена на рис. 1.

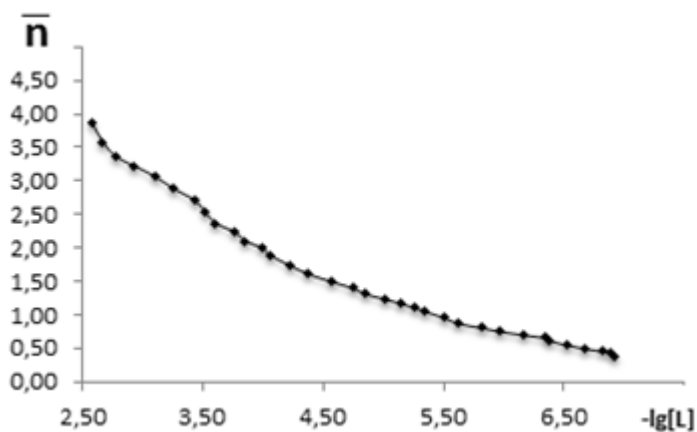


Рис. 1. Кривая образования 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионных комплексов ртути (II) в среде 0.1 моль/л  $HNO_3$  при 298 К.

Из кривой образования видно, что процесс комплексообразования ртути (II) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом в среде 0.1 моль/л  $HNO_3$  при 298 К протекает ступенчато с образованием четырёх комплексных форм. Величины  $\lg K_i$  оценивались из кривой образования при полуцелых значениях  $\bar{p}$ . Оцененные методом Бьеррума значения  $\lg K_i$  для 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-



тионных комплексов ртути (II) в данной среде оказались следующими:  $\lg K_1 = 6.67$ ,  $\lg K_2 = 4.56$ ,  $\lg K_3 = 3.54$ ,  $\lg K_4 = 2.70$ . Из найденных значений ступенчатых констант образований видно, что в зависимости от количества координированных молекул органического лиганда во внутренней сфере устойчивость комплексов ртути (II) закономерно уменьшается.

Графический метод, предложенный Бьеррумом для определения ступенчатых констант образований комплексов, дает только приближенные значения. Для уточнения экспериментальных значений констант устойчивости была проведена обработка полученных данных путем решения уравнения:

$$\bar{n} = \frac{\beta_1[L] + 2\beta_2[L]^2 + 3\beta_3[L]^3 + 4\beta_4[L]^4}{1 + \beta_1[L] + 2\beta_2[L]^2 + 3\beta_3[L]^3 + 4\beta_4[L]^4},$$

где  $\beta$  – общая константа устойчивости;  $[L]$  – равновесная концентрация лиганда.

Для решения этого уравнения разработана программа на языке программирования «Borland Delphi-7». Решение уравнения  $P_{dy}=0$  осуществляли по методу половинного деления. Равновесные концентрации лиганда находили для всех значений  $\bar{n}$  от 0.1 до 3.9 с шагом 0.1.

Уточнения констант устойчивости 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионных комплексов ртути (II) в среде 0.1 моль/л  $\text{HNO}_3$  при 298 К оказались следующими:  $\lg K_1^* = 6.67 \pm 0.03$ ,  $\lg K_2^* = 4.64 \pm 0.07$ ,  $\lg K_3^* = 3.57 \pm 0.01$ ,  $\lg K_4^* = 2.58 \pm 0.01$ . Сравнение значений констант образования в системе  $\text{Hg(II)} - 1\text{-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тион} - 0.1 \text{ моль/л } \text{HNO}_3 - 298 \text{ К}$  до и после уточнения показало, что после уточнения ступенчатые константы устойчивости изменяются по-разному. Однако тенденция уменьшения константы с увеличением числа молекул координированного лиганда сохраняется и после их уточнения.

На основании уточненных значений ступенчатых констант образования координационных соединений рассчитаны кривые распределения всех комплексных форм, образующихся в данной системе (рис.2).

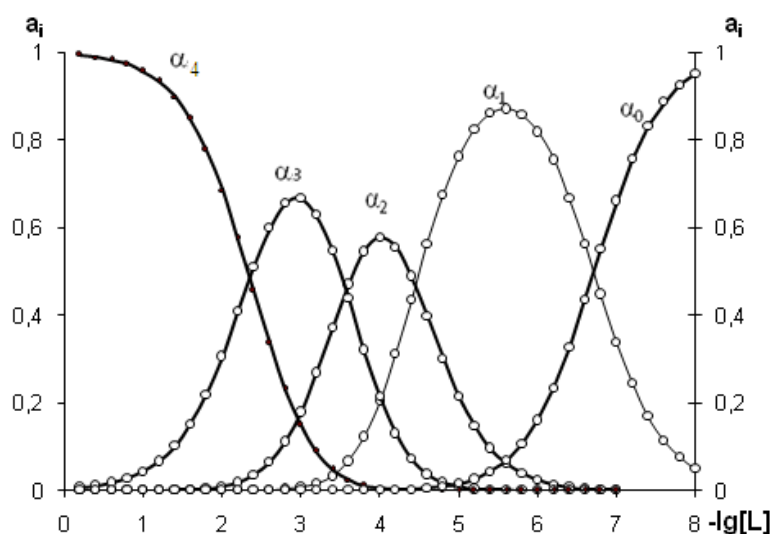


Рис. 2. Кривые распределения системы  $\text{Hg(II)} - 1\text{-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тион} - 0.1 \text{ моль/л } \text{HNO}_3 - 298 \text{ К}$ , где  $\alpha_0 - \text{Hg(NO}_3)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ ,  $\alpha_1 - [\text{HgL(H}_2\text{O)}_3]^{2+}$ ,  $\alpha_2 - [\text{HgL}_2(\text{H}_2\text{O)}_2]^{2+}$ ,  $\alpha_3 - [\text{HgL}_3(\text{H}_2\text{O)}]^{2+}$ ,  $\alpha_4 - [\text{HgL}_4]^{2+}$ .

Найденные по кривым распределения максимумы степеней накопления ( $\alpha_i^{\max}$ ) комплексных форм приведены в табл.2.

Таблица 2

Максимальная степень накопления комплексных форм в системе Hg(II) – 1- фенил -2,3-диметилпиразолин-5-тион – 0.1 моль/л HNO<sub>3</sub> – 298 К

Комплексные соединения	( $\alpha_i^{\max}$ )	-lg[L]
[HgL(H <sub>2</sub> O) <sub>3</sub> ] <sup>2+</sup>	0.85	5.8
[HgL <sub>2</sub> (H <sub>2</sub> O) <sub>2</sub> ] <sup>2+</sup>	0.58	4.0
[HgL <sub>3</sub> (H <sub>2</sub> O)] <sup>2+</sup>	0.67	3.0
[HgL <sub>4</sub> ] <sup>2+</sup>	0.57	2.2

Полученные результаты показывают, что максимальной степенью накопления в зависимости от концентрации органического лиганда обладает комплекс состава [HgL(H<sub>2</sub>O)<sub>3</sub>]<sup>2+</sup> (85%).

Поступило 10.03.2020 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Аминджанов А.А., Сафармамадов С.М., Бекназарова Н.С. Исследование процесса окисления тиопирина в среде 6 моль/л HCl при различных температурах. – Координационные соединения и аспекты их применения. – Душанбе, 2007, с. 26-30.
2. Аминджанов А.А., Бекназарова Н.С. Комплексообразование рения (V) с тиопирином. – Вестник Пермского университета, Серия: Химия, 2016, №1 (21), с. 44-50.
3. Аминджанов А.А., Рафиев Р.С., Бекназарова Н.С. Исследования процесса комплексообразования рения (V) с тиопирином в среде 6 моль/л HBr при 288 К. – ДАН РТ, 2009, т.52, №7, с. 522-525.
4. Хасанов Ф.Н. Координационные соединения меди (II) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом. – Вестник ТНУ, Душанбе, 2017, №1/3 (134), с. 97-102.
5. Рахматуллоев Б.К., Сафармамадов С.М. Комплексообразование железа (III) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом в среде 6 моль/л HCl. – Вестник ТНУ, 2016, №1/3 (200), с.172-176.
6. Шоалифов Дж.О., Аминджанов А.А., Бекназарова Н.С. Комплексообразование в системе HNO<sub>3</sub>·2H<sub>2</sub>O -тиопирин – 0.1 моль/л HNO<sub>3</sub> при 273 К. – ДАН РТ, 2015, т. 58, №7, с. 602-607.
7. Долгорев А.В., Лысак Я.Г., Зибарова Ю.Ф. Тиопирин и дитиопирилметан — новые аналитические реагенты. Синтез и свойства. Применение производных пиразолона в аналитической химии. – Межвуз. сб. науч. трудов. – Пермь, 1977, с.8-15.
8. Бьеррум Я. Образование аминов металлов в водном растворе. – М., 1961, 303 с.

Н.С.Бекназарова, Х.О.Шоалифов

### КОМПЛЕКСОҶОСИЛКУНИ ДАР СИСТЕМАИ Hg(II) – 1-ФЕНИЛ-2,3-ДИМЕТИЛПИРАЗОЛИН-5-ТИОН – 0.1 МОЛ/Л HNO<sub>3</sub> – 298 К

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Бо усули потенциометрӣ бо истифода аз электроди оксиду-барқароршавӣ дар асоси 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тион ва шакли оксидшудаи он раванди комплексҷосилкунии иони симоби

(II) дар муҳити 0.1 мол/л  $\text{HNO}_3$  дар ҳарорати 298 К таҳқиқ карда шуд. Нишон дода шудааст, ки ҳангоми титркунӣ дар системаи  $\text{Hg(II)}$  – 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тион – 0,1 мол/л  $\text{HNO}_3$  – 298 К потенциали электроди индикаторӣ мунтазам зиёд мешавад. Муайян карда шудааст, ки раванди комплексҳосилкунӣ зинагӣ гузашта, чорто заррачаи комплекси таркибашон  $[\text{HgL}(\text{H}_2\text{O})_3]^{2+}$ ,  $[\text{HgL}_2(\text{H}_2\text{O})_2]^{2+}$ ,  $[\text{HgL}_3(\text{H}_2\text{O})]^{2+}$  ва  $[\text{HgL}_4]^{2+}$  ҳосил мешаванд. Барои ҳар як заррачаи комплексӣ бо усули Бьеррум собитаи устуворӣ ҳисоб карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** комплексҳосилкунӣ, 1-фенил-2,3-диметил-пиразолин-5-тион, симоби (II), электроди оксиду барқароршавӣ, собитаи устуворӣ, консентратсияи мувозинатӣ.

N.S.Beknazarova, J.O.Shoalifov

## COMPLEX FORMATION IN THE SYSTEM Hg (II) - 1-PHENYL-2,3-DIMETHYLPYRAZOLINE-5-THION – 0.1 MOL / L $\text{HNO}_3$ – 298 K

*Tajik National University*

The process of complexation of mercury (II) ions in a medium of 0.1 mol / L  $\text{HNO}_3$  at a temperature of 298 K was studied by potentiometry using a redox electrode based on 1-phenyl-2,3-dimethylpyrazoline-5-thione and its oxidized form. It is shown that titration of the Hg (II)-1-phenyl-2,3-dimethylpyrazoline-5-thione – 0.1 mol /L  $\text{HNO}_3$  – 298 K system leads to a regular increase in the potential of the indicator electrode. It was found that the process of complexation proceeds stepwise with the formation of four complex forms of compositions:  $[\text{HgL}(\text{H}_2\text{O})_3]^{2+}$ ,  $[\text{HgL}_2(\text{H}_2\text{O})_2]^{2+}$ ,  $[\text{HgL}_3(\text{H}_2\text{O})]^{2+}$  and  $[\text{HgL}_4]^{2+}$  For each complex particle, their stability constants are determined by the Bjerrum method.

**Key words:** complexation, 1-phenyl-2,3-dimethylpyrazoline-5-thione, mercury(II), redox electrode, stability constant, equilibrium concentration.

УДК 546.273:521.633

А.С.Курбонов, М.М.Тагоев, Р.Акрамзода, А.П.Тагаев,

академик НАН Таджикистана У.М.Мирсаидов

**СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
РАЗЛОЖЕНИЯ БОРОСИЛИКАТНЫХ РУД МИНЕРАЛЬНЫМИ КИСЛОТАМИ  
И УКСУСНОЙ КИСЛОТОЙ***Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана*

*В работе приведён сравнительный термодинамический анализ возможности протекания ряда химических реакций при обработке боросиликатных руд Таджикистана азотной, серной, соляной, ортофосфорной и уксусной кислотами. Показано, что наиболее перспективным реагентом для разложения минералов боросиликатных руд азотная кислота является более предпочтительной по сравнению с другими кислотами.*

**Ключевые слова:** боросиликатные руды, разложение, термодинамический анализ, минеральные кислоты, уксусная кислота.

Как известно, самопроизвольное протекание изобарно-изотермического процесса определяется двумя факторами: энтальпийным, связанным с уменьшением энтальпии системы ( $\Delta H$ ), и энтропийным ( $T\Delta S$ ), обусловленным увеличением беспорядка в системе вследствие роста её энтропии. Разность этих термодинамических факторов является функцией состояния системы, называемой изобарно-изотермическим потенциалом или свободной энергией Гиббса ( $G$ , кДж).

Изменения энергии Гиббса позволяют решить, не прибегая к опыту, многие задачи, встречающиеся в химических реакциях.

Ранее в работах [1-5] был изучен процесс разложения боросиликатных руд с различными кислотами, в частности азотной, соляной, ортофосфорной и уксусной кислотами. Используя справочные данные [6,7], были рассчитаны термодинамические характеристики протекающих реакций при разложении боросиликатной руды с указанными кислотами.

В данной работе с целью выбора наиболее подходящей кислоты для переработки боросиликатного сырья, а также условий проведения процесса проведена сравнительная термодинамическая оценка протекающих реакций при разложении боросиликатной руды с вышеуказанными кислотами.

Как было отмечено выше, важной термодинамической характеристикой реакций, непосредственно связанной с направлением их протекания и величиной константы равновесия, является изменение энергии Гиббса ( $\Delta G$ ) для реакций, протекающих при постоянном давлении и температуре.

В таблицы приведены рассчитанные значения изменения энергии Гиббса при разложении каждого минерала боросиликатного сырья с различными кислотами при стандартных условиях и температуре 368°C.

---

**Адрес для корреспонденции:** Курбанов Амиршо Сохибназарович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: amirsho\_77@mail.ru

Из табл. видно, что значения энергии Гиббса при разложении боросиликатной руды указанными кислотами для всех реакций отрицательны, кроме соляной кислоты. Судя по значениям энергии Гиббса, имеются вероятности протекания всех реакций при разложении боросиликатной руды почти со всеми кислотами, кроме соляной. При разложении борной руды с HCl реакции протекают, хотя значения ( $\Delta G$ ) являются положительными. В случае с HCl на разложение, возможно, влияют другие параметры процесса разложения.

На рис. 1 и 2 приведены значения энергии Гиббса разложения каждого минерала боросиликатной руды с различными кислотами при стандартных условиях и максимальной температуре (368°C) по отдельности.

Таблица

Значения изменения энергии Гиббса при разложении каждого минерала боросиликатного сырья с различными кислотами

	Минеральные кислоты									
	H <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>		HCl		HNO <sub>3</sub>		H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>		CH <sub>3</sub> COOH	
	$\Delta G$ при 298°C	$\Delta G$ при 368°C	$\Delta G$ при 298°C	$\Delta G$ при 368°C	$\Delta G$ при 298°C	$\Delta G$ при 368°C	$\Delta G$ при 298°C	$\Delta G$ при 368°C	$\Delta G$ при 298°C	$\Delta G$ при 368°C
Борная руда										
Данбурит	-88.3	-88.8	1254.1	1256.1	-100.4	-94.3	-71.1	-45.2	-61.6	-55.5
Датолит	-186.8	-194.8	331.1	326.7	-88.8	-82.5	-76.4	-54.2	-66.6	-64.2
Гранат	-229.0	-179.7	2734.5	2727.6	-94.7	-58.5	-144.2	-95.8	-174.3	-133.8
Пироксены	15.1	77.2	1219.4	1215.3	-248.1	-236.8	-236.8	-77.5	-125.5	-116.6
Кальцит	-82.75	-97.76	-83.89	-93.41	-95.2	-104.6	-239.5	-253.9	-55.9	-65.39
Монтмориллонит	-	-	-	-	-352.1	-311.4	-65.9	-55.6	-155.6	-115.1

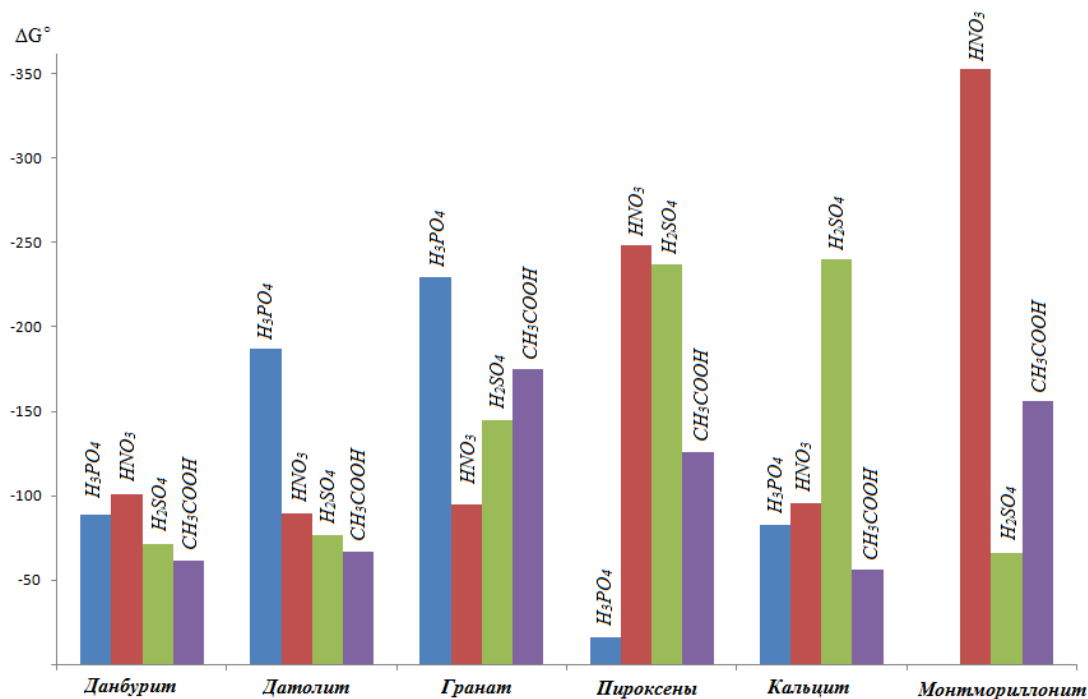


Рис. 1. Термодинамический анализ разложения минералов боросиликатной руды при стандартных условиях.

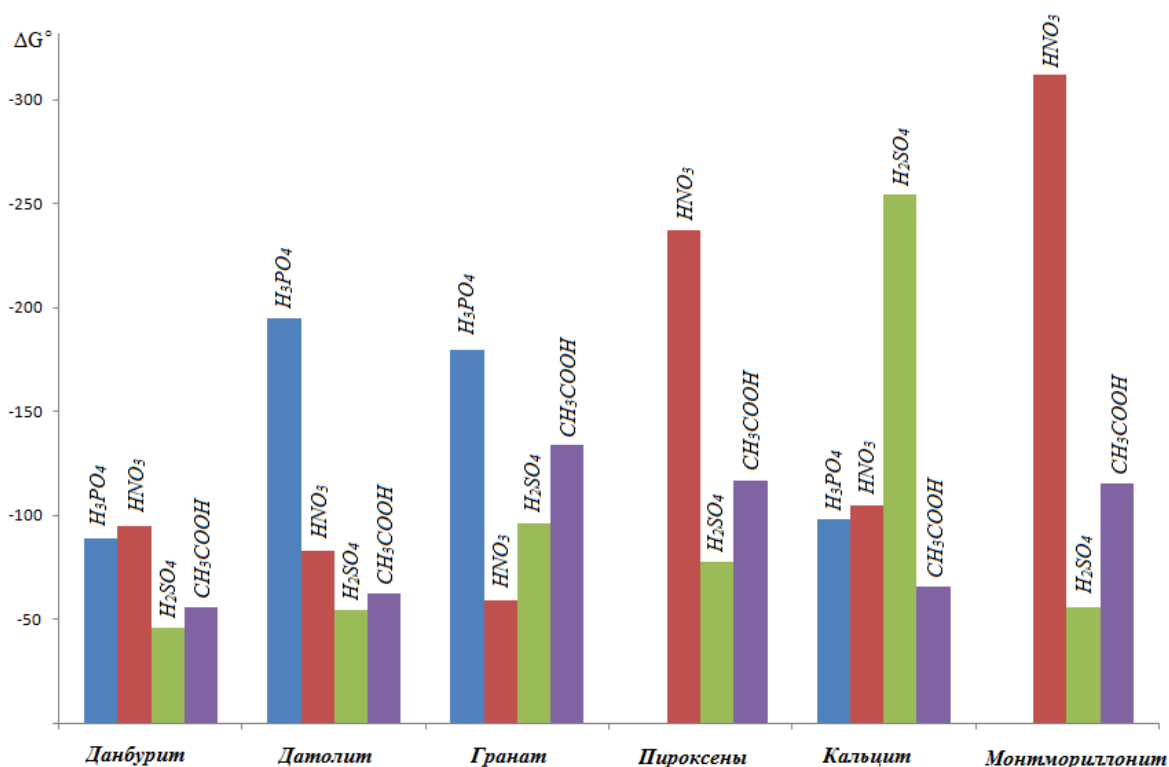


Рис. 2. Термодинамический анализ разложения минералов боросиликатной руды при температуре 368°C.

Как видно из рис. 1 и 2, наиболее предпочтительной для разложения является азотная кислота, где значения  $\Delta G$  являются более отрицательными. Минералы гранат, пироксены, кальцит также имеют большие отрицательные значения  $\Delta G$ . При более высоких температурах (368°C) при разложении ортофосфорной кислотой борной руды также отмечены наибольшие отрицательные значения  $\Delta G$ . Таким образом, для данбурита, пироксенов и монтмориллонита более подходящей является азотная кислота.

Применение других кислот, например уксусной кислоты, также имеет свои преимущества, когда необходимо получение ацетатных солей.

Таким образом, сравнительный термодинамический анализ разложения борной руды с кислотами показывает вероятность протекания реакций с минералами сырья Ак-Архарского месторождения Таджикистана. Наиболее перспективным реагентом для разложения является азотная кислота, а при более высоких температурах – ортофосфорная кислота.

Поступило 05.02.2021 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мирсаидов У.М., Маматов Э.Д. Комплексная переработка бор- и алюмосиликатного сырья Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2013, 115 с.
2. Мирсаидов У.М., Курбонов А.С., Маматов Э.Д. Кислотное разложение боросиликатных руд. – Душанбе: Дониш, 2015, 97 с.

3. Ашуоров Н.А., Маматов Э.Д., Курбонов А.С., Ятимов П.М., Мирсаидов У.М. Сернокислотное разложение данбурита месторождения Ак-Архар с последующим обжигом. – ДАН РТ, 2008, т.51, №9, с.672-676.
4. Курбонов А.С., Баротов А.М., Якубов З.Т., Маматов Э.Д., Мирсаидов У.М. Уксуснокислотное разложение обожжённого данбуритового концентрата. – ДАН РТ, 2010, т.58, №5, с.395-398.
5. Джураев Дж.Х., Курбонов А.С., Тагоев М.М., Ньматов А.М., Мирсаидов У.М. Переработка боросиликатной руды ортофосфорной кислотой. – ДАН РТ, 2019, т.62, №11-12, с.688-691.
6. Рябин В.А., Остроумов Т.Ф. Термодинамические свойства веществ: Справочник. – Л.: Химия, 1977, 390 с.
7. Равдель А.А., Пономарева А.М. Краткий справочник физико-химических величин. – Л.: Химия, 1983, 232 с.

А.С.Курбонов, М.М.Тагоев, Р.Акрамзода, А.П.Тагаев, У.М.Мирсаидов  
**АРЗЁБИИИ МУҚОИСАВИИ ХУСУСИЯТҲОИ ТЕРМОДИНАМИКИИ  
ТАҶЗИИ МАЪДАНҲОИ БОРОСИЛИКАТӢ БО КИСЛОТАҲОИ МАЪДАНИ  
ВА СИРКО**

*Институти кимиёи ба номи В.И.Никитини*

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола таҳлили муқоисавии термодинамикии имконпазирии гузариши як қатор таомулҳои кимиёвӣ ҳангоми коркарди маъданҳои боросиликати Тоҷикистон бо кислотаҳои азот, сулфат, гидрохлорид, ортофосфор ва сирко оварда шудааст. Таҳлил нишон дод, ки эҳтимолияти гузариши таомулҳои маъданҳои боросиликатӣ бо кислотаи азот нисбат ба дигар кислотаҳо бартарӣ доранд.

**Калимаҳои калидӣ:** маъданҳои боросиликатӣ, таҷзия, таҳлили термодинамикӣ, кислотаҳои маъданӣ, кислотаи сирко.

A.S.Kurbonov, M.M.Tagoev, R.Akramzoda, A.P.Tagayev, U.M.Mirsaidov  
**COMPARATIVE ASSESSMENT OF THERMODYNAMIC CHARACTERISTICS  
OF BOROSILICATE ORE DECOMPOSITION WITH MINERAL ACIDS AND  
ACETIC ACID**

*V.I.Nikitin Institute of Chemistry of National Academy of Sciences of Tajikistan*

In the paper a comparative thermodynamic analysis of the possibility of a number of chemical reactions during the processing of Tajikistan borosilicate ores with nitric, sulfuric, hydrochloric, orthophosphoric and acetic acids are presents. The analysis showed that the probabilities of the occurring reactions of minerals of borosilicate ores with nitric acid are more preferable in comparison with other acids.

**Key words:** borosilicate ores, decomposition, thermodynamic analysis, mineral acids, acetic acid.

УДК 552.11 (575.3)

М.М.Мамадвафоев, Д.А.Давлатшоев

**К ПЕТРОХИМИИ БАЗАЛЬТОИДОВ И ЩЕЛОЧНЫХ БАЗАЛЬТОИДОВ  
КАФАНДАРСКОГО РУДНОГО ПОЛЯ (ВОСТОЧНЫЙ ГИССАР)****УП «Геологическая поисково-съёмочная экспедиция» Главного управления геологии  
при Правительстве Республики Таджикистан***(Представлено членом-корреспондентом НАН Республики Таджикистан А.Р.Файзиевым 24.04.2021 г.)*

*В статье приводятся наиболее полные данные по петрохимии базальтоидных и щелочно-базальтоидных субвулканических даек, представляющих продукты позднепермского, финального, тафрогенного, магматизма Кафандарского рудного поля и Южного Тянь-Шаня в целом.*

**Ключевые слова:** *петрохимия, позднепермские, финальные, тафрогенные, субвулканические, базальтоидные и щелочно-базальтоидные дайки, Кафандарское рудное поле, Восточный Гиссар, Южный Тянь-Шань.*

В работе детально рассматриваются петрохимические особенности позднепермских [1] субвулканических даек лимбургитов, мончикитов, камптонитов, эссекситовых габбро, эссекситовых порфиринов, трахиандезитов, банакитов, шошонитов, диабазов и анальцимовых базальтоидов, представляющих продукты финального, тафрогенного, магматизма Кафандарского рудного поля Южного Тянь-Шаня. Геолого-петрологическая характеристика рассматриваемых горных пород разрознена в работах [2-6]. Исходные их химические составы даны в табл.1, а в табл.2 они пересчитаны на числовые характеристики по А.Н.Заварицкому [7]. Последние для получения дополнительной петрохимической информации, а также наглядности, отражены на векторной диаграмме (см. рис.). Идентификация горных пород по их числовым характеристикам осуществлена сравнением последних с таковыми для средних типов горных пород по Р.Дэли [8]. Ниже последовательно излагается петрохимия выше-названных горных пород, имеющая не только петрологическое значение, но и геохимическое и металлогеническое [7].

**Лимбургиты** представляются породой, ненасыщенной кремнием ( $Q = -22.6$ ), бедной щелочами ( $a:c=1.5$ ), меланократовой ( $b=36.0$ ), с преобладанием Mg над Fe ( $m': f '=2.0$ ) и Na в сумме Na и K ( $n=74.4$ ). По количеству свободного кремния, несвязанного в силикаты и алюмосиликаты ( $Q$ ), и отношению щелочей к плагиоклазовому кальцию наиболее близки к горнблендиту, по Р.Дэли ( $Q= -20.2$  и  $a:c=1.35$ ). От среднего лимбургита, по Р.Дэли, отличается некоторым преобладанием величины  $s$ , плагиоклазового Ca ( $c$ ), Mg ( $m'$ ) в цветной составной части, и подчинённом количестве щелочей ( $a$ ), компонентов параметра  $b$ , доли  $Fe_{\text{общ}}$  и  $Fe^{3+}$  в цветной составной части, Na в сумме щелочей и Ti в величине  $s$ . Доля Ca ( $c'$ ) в цветной составной части породы такая же, что и в среднем лимбургите. На плоскости  $asb$  петрохимической диаграммы (см.рис.) фигуративный знак рассматриваемых лимбур-

**Адрес для корреспонденции:** Мамадвафоев Мабатишо Мамадвафоевич. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Мирзо Турсунзаде, 25, УП «Геологическая поисково-съёмочная экспедиция» Главного управления геологии при Правительстве РТ. Тел.908 88 91 43. E-mail: m.mamadvafoev@gmail.com



гитов, вдоль оси  $S_6$ , по железомagneзиальности, среди других пород Кафандарского рудного поля занимает крайне нижнюю позицию, и почти равную с диабазами по валовой щёлочнометалльности. На плоскости  $csb$  указанной диаграммы, по количеству плагиоклазового кальция, рассматриваемые лимбургиты занимают почти аналогичную с мончикитами позицию.

Таблица 1

Химические составы пород (вес. %) интрузивных комплексов Кафандарского рудного поля

Породы и число анализов - n	Оксиды, % масс.					
	SiO <sub>2</sub>	TiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	FeO	MnO
Лимбургиты, n=5	39.46	1.30	13.62	3.13	5.55	0.14
Мончикиты, n=6	34.58	1.26	16.06	2.82	4.59	0.09
Камптониты, n=26	34.31	1.06	15.88	2.24	5.02	0.27
Эссекситовые габбро, n=2	46.33	0.63	12.02	2.36	6.16	0.20
Эссекситовые порфирыты, n=3	41.51	1.85	13.83	3.71	5.98	0.16
Трахиандезиты, n=1	56.85	0.34	19.66	10.75	4.35	0.05
Банакиты, n=1	49.08	1.30	12.53	2.06	5.40	0.11
Шошониты, n=1	54.76	1.20	14.28	1.86	5.63	0.11
Диабазы, n=1	50.94	0.50	13.97	2.99	4.97	0.14
Анальцимовые диабазы, n=1	41.40	1.43	14.80	2.63	6.88	0.17

Продолжение таблицы 1

Породы, их возраст и кол-во анализов (n)	Оксиды					
	MgO	CaO	Na <sub>2</sub> O	K <sub>2</sub> O	H <sub>2</sub> O	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>
Лимбургиты, n=5	9.63	11.35	2.63	1.37	0.09	0.73
Мончикиты, n=6	7.27	9.32	3.96	2.04	0.01	0.48
Камптониты, n=26	8.65	11.97	2.88	1.86	0.05	0.46
Эссекситовые габбро, n=2	11.01	9.18	3.51	1.26	0.21	0.65
Эссекситовые порфирыты, n=3	8.19	12.16	2.69	1.89	0.04	0.56
Трахиандезиты, n=1	3.10	2.66	5.00	4.80	0.04	0.56
Банакиты, n=1	8.90	7.99	4.00	2.50	0.20	0.60
Шошониты, n=1	4.60	6.80	2.60	3.20	0.20	0.53
Диабазы, n=1	7.26	7.66	2.30	2.23	0.16	0.19
Анальцимовые диабазы, n=1	5.27	11.56	0.82	2.40	0.12	0.26

Таблица 2

Числовые характеристики химических составов пород интрузивных комплексов  
Кафандарского рудного поля

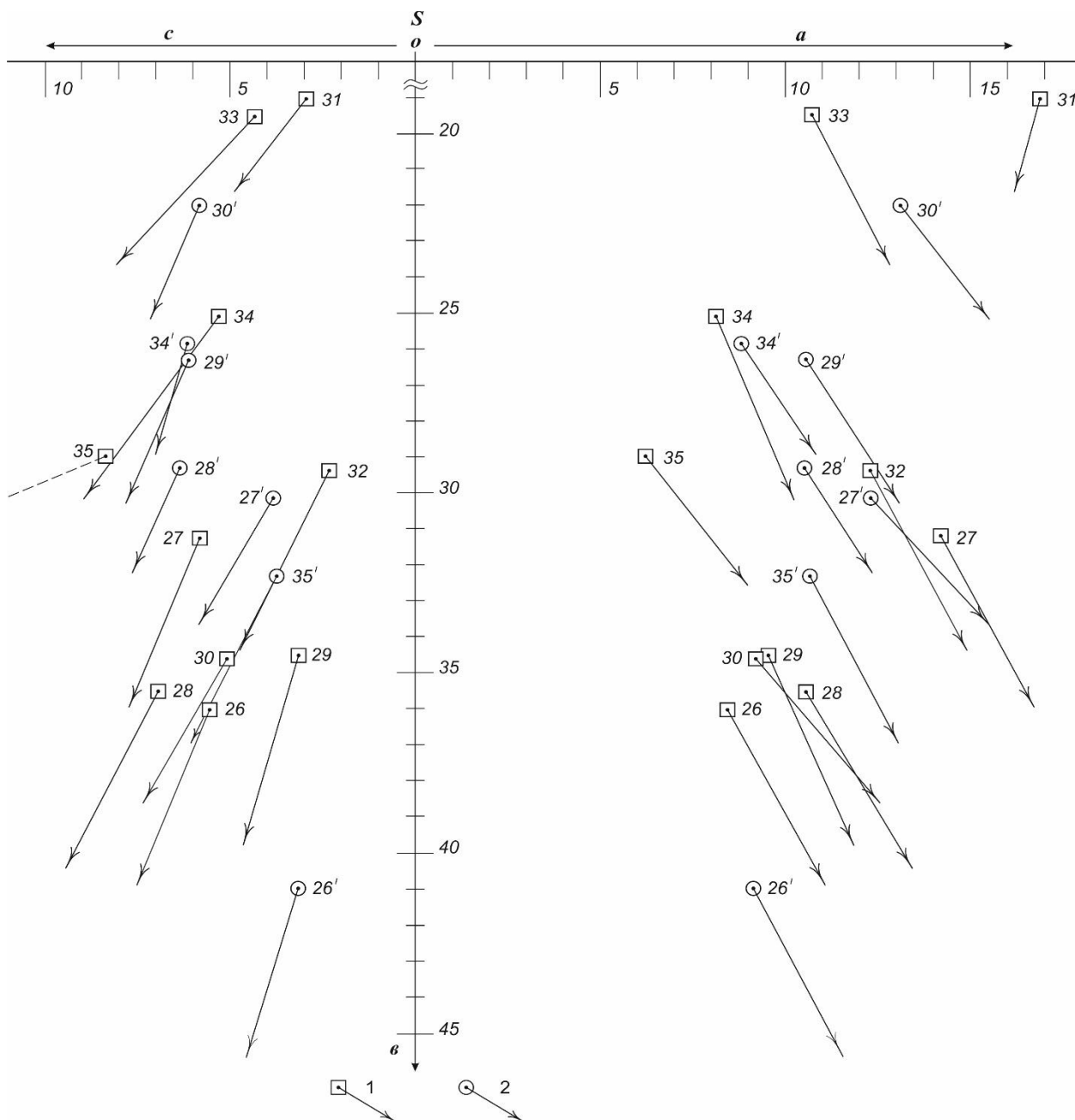
Числовые характеристики по А.Н.Заварицкому (1950)													
№№ пород на рисунке	s	a	c	b	Q	a:c	c'	a'	m'	f'	n	φ	t
Лимбургиты, n = 5													
26	49.9	8.4	5.6	36.0	-22.6	1.5	26.2	-	49.5	24.3	74.4	8.0	2.4
Мончикиты, n = 6													
27	48.9	14.1	5.8	31.2	-36.3	2.4	25.4	-	48.1	26.5	74.6	9.3	2.7
Камптониты, n = 3													
28	46.8	10.6	7.0	35.5	-34.6	1.5	28.4	-	48.8	22.9	70.1	6.3	2.3
Эссекситовые габбро, n = 2													
29	52.8	9.5	3.2	34.5	-16.5	3.0	22.9	-	54.0	23.1	80.9	5.8	1.0
Эссекситовые порфирыты, n = 3													
30	51.2	9.1	5.1	34.6	-20.8	1.8	30.3	-	42.4	27.3	68.3	9.6	3.2
Трахиандезиты, n = 1													
31	61.0	16.9	3.0	19.0	-14.7	5.5	-	7.9	26.2	66.0	61.2	45.3	0.4

Продолжение таблицы 2

№№ пород на рисунке	s	a	c	b	Q	a:c	c'	a'	m'	f'	n	φ	t
Банакиты, n = 1													
32	56.2	12.3	2.1	29.4	-14.2	6.0	25.7	-	50.9	23.4	70.8	5.9	1.9
Шошониты, n = 1													
33	65.4	10.7	4.4	19.5	4.9	2.4	21.2	-	41.6	37.2	55.2	8.4	1.6
Диабазы, n = 1													
34	60.9	8.7	5.3	25.1	-0.8	1.6	17.6	-	51.6	30.8	61.0	10.6	0.7
Анальцимовые диабазы, n = 1													
35	56.4	6.2	8.4	29.0	-7.9	0.7	27.9	-	36.2	35.9	34.1	9.0	2.5

**Мончикиты** относятся к породам, ненасыщенным кремнием ( $Q = -36.3$ ), щелочным ( $a:c=2.4$ ), меланократовым ( $b = 31.2$ ), с преобладанием Mg над Fe ( $m':f'=1.8$ ) и Na в сумме Na и K ( $n=74.6$ ). По количеству свободного кремния (Q) наибольшую близость обнаруживает к нефелиновому базальту ( $Q = -34.4$ ), при меньшем отношении алюмосиликатных щелочей к плагиоклазовому Ca по Р.Дэли ( $a:c = 3.2$ ). От среднего состава мончикита, по Р.Дэли, исследуемая порода отличается некоторым преобладанием общей щёлочности (a), плагиоклазового Ca (c), цветных составных частей (b), доли в последних Mg, а Na в сумме щелочей, при меньшем количестве кремния валового (s) и свободного (Q), отношения щелочей к плагиоклазовому Ca (a:c), доли Ca (c'),  $Fe_{\text{общ}}$  и  $Fe^{3+}$  в цветном индексе (b), Ti в величине s. На плоскости asb петрохимической диаграммы (см.рис.) видно, что фигуративный знак и вектор рассматриваемых мончикитов наиболее близко находится к мончикитам, по Р.Дэли. То же самое наблюдается на плоскости csb указанной диаграммы, что подтверждает принадлежность рассматриваемой породы к мончикитам.

**Камптониты** так же, как и вышеохарактеризованные мончикиты и лимбургиты, относятся к породам, ненасыщенным кремнием ( $Q=-34.6$ ), бедным щелочами ( $a:c=1.5$ ), меланократовым ( $b = 35.5$ ), с преобладанием Mg над Fe ( $m':f'=1.6$ ) и Na в сумме Na и K ( $n=70.1$ ). По петрохимическим характеристикам Q, a:c и b рассматриваемая порода ближе всего находится к камптониту по Р.Дэли. Некоторое провинциальное отличие заключается в преобладании в рассматриваемых камптонитах рудного поля Mg над Fe, плагиоклазового Ca (c), цветных компонентов (b), доли Ca (c'), Mg (m'), Fe (f') в цветной составной части, при подчинённости количества кремния (как s, так и Q), отношения щелочей к плагиоклазовому Ca, Na в сумме щелочей (n), доли  $Fe^{3+}$  в цветной составной части и Ti – в величине s. Суммарное количество щелочей в них практически одинаково (10.6 против 10.5 по Р.Дэли). На плоскости asb петрохимической диаграммы (см.рис.) рассматриваемые камптониты совместно с лимбургитами, эссекситовыми габбро и эссекситовыми порфиритами образуют компактный рой фигуративных знаков и векторов, что подчёркивает их тесное петрохимическое и, очевидно, генетическое родство. Изложенное находит подтверждение аналогичным положением фигуративных знаков и векторов названных пород на плоскости csb указанной диаграммы.



**Рисунок.** Диаграмма химических составов базальтоидов и щелочных базальтоидов Кафандарского рудного поля. Условные обозначения: 1 – породы рудного поля, 2 – средние типы пород по Р.Дэли. Номера пород на рисунке даны по таблице 2: 26 – лимбургиты, 27 – мончикиты, 28 – камптониты, 29 – эссекситовые габбро, 30 – эссекситовые порфириды, 31 – трахиандезиты, 32 – банакиты, 33 – шошониты, 34 – диабазы, 35 – анальцимовые диабазы. Однозначные цифры с штрихами характеризуют средний состав пород по Р.Дэли.

**Эссекситовые габбро** представляют породу, ненасыщенную кремнием ( $Q = -16.5$ ), щелочную ( $a:c=3.0$ ), меланократовую ( $b=34.5$ ), с преобладанием Mg над Fe ( $m': f'=2.3$ ) и Na в сумме Na и K ( $n=80.9$ ). По важнейшим классификационным числовым петрохимическим характеристикам – Q и a:c, рассматриваемая порода наиболее близка к лейцитовому абсарокиту, по Р.Дэли, с  $Q = -18.6$  и  $a:c=3.1$ . От среднего же состава однотипной породы, по Р.Дэли, она отличается некоторым преобладанием цветных компонентов ( $b=34.5$  против 26.3 по Р.Дэли), отношения щелочей к плагиоклазовому Ca ( $a:c=3.0$  против 1.7), доли Mg в цветной составной части ( $m'=54.0$  против 38.6) и Na – среди щелочей ( $n=80.9$  против 73.7), при подчинённости кремния (как s, так и Q), щелочей (a), кальция плагиоклазо-

вого (с) и в цветной составной части (с'), доли  $\Sigma\text{Fe}$  (f' и  $\text{Fe}^{3+}$  (φ) в цветной составной части и Ti (t) в величине s. На петрохимической диаграмме (см.рис.), как отмечалось выше, рассматриваемая порода обнаруживает большую близость химического состава с лимбургитами, камптонитами и эссекситовыми порфиритами, что, очевидно, может свидетельствовать о близких условиях их формирования.

**Эссекситовые порфириты** не насыщены кремнием ( $Q = -20.8$ ), бедны щелочами ( $a:c=1.8$ ), меланократовые ( $b=34.6$ ), с преобладанием Mg над Fe ( $m': f'=1.5$ ) и Na в сумме Na и K ( $n=68.3$ ). По параметрам Q и a:c, данная порода наиболее близка к камптонитам, по Р.Дэли, с  $Q = -19.8$  и  $a:c=1.7$ . От среднего же состава эссексита, по Р.Дэли, отличается некоторым преобладанием цветных составных частей (b), доли Ca (с') и Mg (m') среди последних и Ti – в величине s, при подчинённости количества кремния (s, Q), щелочей, плагиоклазового Ca, отношения щелочей к плагиоклазовому Ca, доли  $\text{Fe}_{\text{общ.}}$  (f') и  $\text{Fe}^{3+}$ (φ) – в цветной составной части, и Na – в сумме Na и K (n). На петрохимической диаграмме (см.рис.) фигуративные знаки и векторы составов рассматриваемой породы находятся в поле составов лимбургита, камптонита и эссекситового габбро, что, несомненно, свидетельствует о близости их генетических условий.

**Трахиандезиты** представляются породами, слабо пересыщенными алюминием ( $a'=7.9$ ), слегка недосыщенными кремнием ( $Q = -14.7$ ), умеренно богатыми щелочами ( $a:c=5.5$ ), лейкократовыми ( $b = 19.0$ ), с преобладанием Fe над Mg ( $f': m'=2.5$ ), Na в сумме Na и K ( $n=61.2$ ) и, по совокупности указанных характеристик, наиболее близки к банакитам, по Р.Дэли ( $Q = -11.9$  и  $a:c=4.4$ ). Преобладание в составе трахиандезитов Fe над Mg ( $f': m'=2.5$ ), составляет главное их различие от щелочных базальтоидов Кафандарского рудного поля. От среднего состава трахиандезита, по Р.Дэли, рассматриваемые трахиандезиты отличаются некоторым преобладанием плагиоклазового Ca (с), цветной составной части (b) и доли Mg,  $\text{Fe}_{\text{общ.}}$  и  $\text{Fe}^{3+}$  в последней, при подчинённости Si (в виде как s, так и Q), суммы Na и K (a), отношения Na+K к плагиоклазовому Ca (a:c), Na в сумме Na и K и доли Ti в величине s. На плоскости asb диаграммы химических составов базальтоидов и щелочных базальтоидов (см.рис.) фигуративный знак состава трахиандезитов Кафандарского рудного поля находится в крайней правой - верхней части поля, примерно на одном уровне по кремнекислотности (s) и «железо-магнезиальной» основности (b) с шошонитами при различной щёлочности (a). Аналогичная особенность выражена на «известковой» (csb) плоскости диаграммы, что несомненно подтверждает петрохимическое родство трахиандезитов и шошонитов названного рудного поля.

**Банакиты** принадлежат породам, слегка недосыщенным кремнием ( $Q = -14.2$ ), умеренно богатыми щелочами ( $a:c=6.0$ ), меланократовым ( $b=29.4$ ), с преобладанием Mg над Fe ( $m': f'=2.2$ ) и Na в сумме Na и K ( $n=70.8$ ). По числовым характеристикам Q и a:c, рассматриваемая порода наиболее близка к банакиту, по Р.Дэли, отличаясь от его химического состава некоторым преобладанием цветных («железо-магнезиальных») компонентов (b), отношения алюмосиликатных щелочей к плагиоклазовому Ca (a:c), доли Ca (с') и Mg (m') в цветной составной части (b), Na – в сумме щелочей, и Ti – в величине b, при подчинённости кремния (как s, так и Q), щелочей (a), плагиоклазового Ca (с), доли  $\Sigma\text{Fe}$  (f') и  $\text{Fe}^{3+}$  (φ) в цветной составной части. На плоскости asb петрохимической диаграммы (см.рис.) фигуративный знак рассматриваемых банакитов рудного поля образует единый рой совместно с мончикитами и камптонитами, по Р.Дэли (№№ 27', 28'), аналогичная картина наблюдается и на плос-

кости  $csb$  указанной диаграммы, что очевидно свидетельствует о сходных условиях формирования химизма данных пород.

**Шошониты** представляются породами, насыщенными кремнием ( $Q = 4.9$ ), умеренно богатыми, ближе бедными, щелочами ( $a:c=2.4$ ), лейкократовыми ( $b=19.5$ ), с небольшим преобладанием Mg над Fe ( $m':f'=1.1$ ) и Na в сумме Na и K ( $n=55.2$ ). По важнейшим петрохимическим характеристикам –  $Q$ , и  $a:c$ , они наиболее близки к однотипной породе, по Р.Дэли ( $Q = -3.7$ ,  $a:c=2.4$ ). От последней отличается некоторым преобладанием Si (как в виде  $s$ , так и  $Q$ ), «железо-магнезиальных» компонентов ( $b=19.5$  против 16.0 по Р.Дэли), доли Ca ( $c'=21.2$  против 15.6) и Mg ( $m'=41.6$  против 40.2) в цветной составной части, Na в сумме щелочей ( $n=55.2$  против 50.8), Ti ( $t$ ) – в величине  $s$  ( $t=1.6$  против 1.1), при подчинённости количества щелочей ( $a=10.7$  против 13.6), плагиоклазового Ca ( $c=4.4$  против 5.7), доли  $Fe_{общ.}$  и  $Fe^{3+}$  в цветной составной части ( $b$ ). Отношение щелочей к плагиоклазовому Ca в сравниваемых однотипных породах практически одинаково ( $a=2.4$  против 2.4 по Р.Дэли).

На диаграмме химических составов базальтоидов и щелочных базальтоидов (см. рис.), рассматриваемые шошониты по кремнекислотности ( $s$ ) и железо-магнезиальности ( $b$ ) обособлены с трахиандезитами; их фигуративные знаки и векторы отделены от базальтоидов и щелочных базальтоидов, очевидно, свидетельствуя о их принадлежности к средним горным породам повышенной щёлочности.

**Диабазы** относятся к горным породам, насыщенным кремнием ( $Q = -0.80$ ), бедным щелочами ( $a:c=1.6$ ), меланократовым ( $b=25.1$ ), с явным преобладанием Mg над Fe ( $m':f'=1.7$ ) и Na в сумме щелочей ( $n=61$ ). По параметрам  $Q$  и  $a:c$  они тяготеют к однотипной породе, по Р.Дэли ( $Q = -3.6$ ,  $a:c=1.3$ ), что отчётливо выражено на петрохимической диаграмме (см. рис.). От среднего состава диабазы, по Р.Дэли, рассматриваемая горная порода несколько отличается преобладанием кремния (как  $s$ , так и  $Q$ ), отношения Na+K к плагиоклазовому Ca ( $a:c=1.6$  против 1.34 по Р.Дэли) и доли Mg в цветной составной части ( $m'=51.6$  против 38.8), при подчинённости плагиоклазового Ca ( $c=5.3$  против 6.2), «железо-магнезиальных» оснований ( $b=25.1$  против 25.9), доли Ca ( $c'=17.6$  против 18.7),  $Fe_{общ.}$  (30.8 против 42.5),  $Fe^{3+}$  ( $\varphi=10.6$  против 12.8) в цветной составной части ( $b$ ), Na в сумме щелочей ( $n$ ) и Ti ( $t$ ) в величине  $s$ , что составляет провинциальные петрохимические особенности рассматриваемой породы.

**Анальцимовые диабазы** характеризуются небольшой недосыщенностью кремнием ( $Q = -7.9$ ), бедностью щелочами ( $a:c=0.7$ ), меланократовостью ( $b=29.0$ ). В их химическом составе количества Mg ( $m'=36.2$ ) и Fe ( $f'=35.9$ ) практически равны, а в сумме Na и K, как ни парадоксально, Na резко уступает калию ( $n=34.1$ ). По важнейшим петрохимическим числовым характеристикам –  $Q$ , и  $a:c$ , рассматриваемая горная порода среди магматических образований, по таблице Р.Дэли, не имеет аналога, хотя в некоторой степени тяготеет к среднему составу «всех базальтов», с  $Q = -8.7$  и  $a:c=1.5$ . От среднего состава анальцимового базальта рассматриваемая горная порода несколько отличается преобладанием кремния (как  $s$ , так и  $Q$ ), плагиоклазового Ca ( $c=6.2$  против 10.7 по Р.Дэли), доли Ca ( $c'=27.9$  против 22.3) и Fe ( $f'=35.9$  против 30.5), при подчинённости щелочей ( $a=6.2$  против 10.7), «железо-магнезиальных» оснований ( $b=29.0$  против 32.3), отношения щелочей к плагиоклазовому Ca ( $a:c=0.7$  против 2.7), доли Mg ( $m'=36.2$  против 47.2) и  $Fe^{3+}$  ( $\varphi=9.0$  против 10.5) в составной части, и Ti

( $t=2.5$  против 4.1) в величине  $s$ . Изложенные особенности рассматриваемой породы отражены на петрохимической диаграмме (см. рис.).

В заключение надлежит отметить общие особенности химизма базальтоидов и щелочных базальтоидов, состоящие в преобладании в их химическом составе Mg над Fe и Na над K, что вполне согласуется с закономерностями кристаллизационной дифференциации магматического расплава при их формировании.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мамадвафоев М.М. Геохимические особенности и рудоносность пермских магматических комплексов Южного Гиссара (Центральный Таджикистан). – Душанбе: Ирфон, 2016, 208 с.
2. Калайтан М.Г. – Изв. Тадж. филиала АН СССР, 1944, № 4, с. 51 – 77.
3. Мамадвафоев М.М. Петролого-геохимические особенности интрузивных комплексов некоторых рудных полей Зеравшано-Гиссарской металлогенической зоны и связанное с ними оруденение (Центральный Таджикистан). – Душанбе: Ирфон, 2017, 237 с.
4. Мамадвафоев М.М., Бахтдавлатов Р.Д., Давлатшоев Д.А. – Труды Института геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Республики Таджикистан, вып. 2. – Душанбе: Дониш, 2019, с.53 – 67.
5. Мамадвафоев М.М., Рахмонов И.У. – Проблемы петрологии и минерагии Центральной Азии. – Душанбе: Дониш, 2015, с. 30 – 46.
6. Мамадвафоев М.М., Рахмонов И.У. – Изв. АН РТ. Отд. физ-мат. хим., геол. и техн. н., 2016, № 1, с.105-111.
7. Заварицкий А.Н. Введение в петрохимию изверженных горных пород. – М.-Л.: АН СССР, 1950, 400 с.
8. Четвериков С.Д. Руководство к петрохимическим пересчётам. – М.: Госгеолтехиздат, 1956, 246 с.

**М.М.Мамадвафоев, Д.А.Давлатшоев**

### **ОИД БА ПЕТРОХИМИЯИ БАЗАЛЬТОИДҶО ВА БАЗАЛЬТОИДҶОИ ИШҚОРИИ МАЙДОНИ МАЪДАННОКИ КАФАНДАР (ҲИСОРИ ШАРҚӢ)**

*КВ «Экспедитсияи ҷустуҷӯию аксбардории геологи»-и  
Саридораи геологии назди Ҳукумати Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мақола далелҳои пурратарин оид ба петрохимияи базалтоидҳо ва базалтоидҳои ишқорӣ дайқаҳои субвулканик, ки маҳсулотии магматизми охиринаи тафрөгении майдони маъданноки Кафандар ва Тён-Шони Чанубиро дар маҷмӯъ муаррифӣ менамоянд, оварда шудаанд.

**Калимаҳои калидӣ:** петрохимия, дайқаҳои, тафрөгении, субвулканик, базалтоидӣ ва базалтоидии ишқорӣ, майдони маъданноки Кафандар, Ҳисори Шарқӣ, Тён-Шони Чанубӣ.

M.M.Mamadvafoev, D.A.Davlatshoev

**TO THE PETROCHEMISTRY OF BASALTOIDS AND ALKALINE BASALTOIDS  
OF THE KAFANDARA ORE FIELD (EASTERN GISSAR)**

*UE "Geological prospecting and survey expedition"*

*of the Main Department of Geology under the Government of the Republic of Tajikistan*

The article contains the most complete data on the petrochemistry of basaltoid and alkaline-basaltoid subvolcanic dikes, which are products of the final taphrogenic magmatism of the Kafandara ore field and the southern Tien Shan.

**Key words:** *petrochemistry, taphrogenic, subvolcanic, basaltoid and alkaline-basaltoid dikes, Kafandar ore field, East Gissar, South Tien Shan.*

УДК 58.006:581.522.4

Н.С.Саидов, Д.С.Саттаров

## ИТОГИ ИНТРОДУКЦИИ ГОЛОСЕМЕННЫХ РАСТЕНИЙ НА СЕВЕРОАМЕРИКАНСКОМ УЧАСТКЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО БОТАНИЧЕСКОГО САДА ТАДЖИКИСТАНА ЗА 85 ЛЕТ

*Центр инновационной биологии и медицины Национальной академии наук Таджикистана*

*(Представлено академиком НАН Таджикистана Х.Х.Хисориевым 12.03.2021 г.)*

*В статье приведены итоги интродукции хвойных пород на Североамериканском участке Центрального ботанического сада Таджикистана за прошедшие 85 лет. Установлено, что за последние 30 лет биоразнообразие участка сократилось на 16 видов, которые относятся к 1 семейству и 2 родам, и на данный период на территории участка сохранилось более 40 таксонов. Из этого количества преобладают представители семейства кипарисовых – Cupressaceae Bartl., которое представлено 5 родами и 28 видами.*

**Ключевые слова:** *интродукция, сад, Североамериканский участок, хвойные породы, семейство, род.*

Душанбинский ботанический сад (Душанбинский БС) организован осенью 1933 г. под руководством Б.А.Федченко, который в дальнейшем был переименован в Центральный ботанический сад АН Таджикской ССР (ЦБС). Сад расположен на высокой левобережной террасе реки Душанбинки, площадью около 40 га. Изначально отведённая площадь составляла 5 га (за счёт земель колхоза им. Сталина).

Первые интродукционные работы проводились уже весной 1934 г. под руководством первого директора А.К.Редлиха. Подробная история деятельности сада со дня его основания приводится в работе [1], которая дополняется данными М.И.Исмаилова [2]. Интродукционная деятельность того периода отражена в рукописях М.К.Кузьмина (1938-1940), Т.И.Рябовой и А.Г.Лепешкиной (1941-1947), которая получила высокую оценку А.С.Королевой при подытоживании 25-летней деятельности сада. Последняя является настольной книгой многих сотрудников сада, занимающихся интродукцией древесных и кустарниковых пород.

Следует отметить квалифицированных специалистов разных лет, много сделавших для обогащения разнообразия коллекционного фонда дендрария в саде, а именно: Я.Г.Темберга, Е.П.Токареву, Е.И.Вознисенскую, Х.Х.Алиматову, Ф.А.Волошук, З.Р.Зеляеву, А.Ф.Сапожникову, В.В.Вилисову и А.Холова. Особенно хотелось бы отметить колоссальный вклад З.Р.Зеляевой в период 1990-1995 гг., которой пришлось подытоживать работу всех кураторов ботанико-географических участков, покинувших пределы страны в те годы. Намного позже на основе этой рукописи издавались статьи М.И.Исмаилова, и в частности итоги интродукции сада за 65 лет [3]. К сожалению, отчет,

**Адрес для корреспонденции:** Саидов Нурали Содикович, Саттаров Джамшед Саидович. 734017, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Каримова, 27, Центр инновационной биологии и медицины НАНТ. E-mail: markaz.11@mail.ru, jamshed.hvilya@mail.ru



по которому можно было судить о разнообразии и состоянии таксонов по ботанико-географическим участкам, не сохранился в ЦБС.

Исследования по интродукции и определению видового состава парков отражены в научных работах ряда отечественных исследователей, в том числе оценка видового состава и состояния древесных пород городских парков отражены в трудах [4-7].

#### Методы исследований

Обследование наличия хвойных пород Североамериканского участка проведено в 2020 г. При проведении обследования использовали отчёт за 1980-1985 гг., выполненный под руководством Вилисовой В.В. (итоги 50-летней деятельности которые, к сожалению, не были опубликованы). При определении и сверке видового состава деревьев использовали источники [8, 9], а соответствие наименований таксонов на латыни согласно [10].

#### Результаты и обсуждение

Динамика интродукции хвойных пород в различные периоды на территории Душанбинского ЦБС приводится в табл. 1.

Таблица 1

Сравнительный анализ динамики интродукции голосеменных пород  
Северной Америки в Душанбинском ЦБС

№ п.п.	Количество						Автор, год	Итоги интродукции, лет
	таксонов	семейств	родов	видов	разновидностей	форм		
1	13	3	9	13	-	-	Королева, 1962	25
2	50	5	16	50	-	-	Исмоилов, 1999	65
3	39	4	12	28	7	4	Саидов, Саттаров и Заирова, 2021	85

Из табл. 1 видно, что интродукция голосеменных пород на Североамериканском ботанико-географическом участке в разные периоды имеет различия, а в частности она начиналась в послевоенные годы с 13 видов, хотя, следует отметить, что часть молодых растений питомника не была включена в итоги интродукционной деятельности сада за 25 лет.

В последующие годы с размещением интродуцированных пород, выращенных в питомнике сада, их количество увеличилось почти в 4 раза и составило до 50 видов. Пик интродукции пород приходится на 80-е годы, с максимальным числом семейств 5 и родов 16. Однако, следует отметить, что за 40 лет деятельности количество родов не увеличилось, а увеличение интродуцентов происходило за счёт разнообразия видов внутри родов, и если учитывать разнообразие отдельных видов, их разновидности и формы, по непонятным причинам не включенных в итоги интродукции за 65 лет, то количество таксонов превышает в 5 раз по сравнению с 60-ми годами XX века.

Анализ показателей табл. 1 свидетельствует о том, что беспокойные годы в республике оставили негативный отпечаток в интродукционной деятельности сада, из-за чего биоразнообразие участка сократилось на 3 таксона, 1 семейство, 2 рода и 16 видов. Данная ситуация обусловлена отсутствием профессионалов, нехваткой квалифицированных технических работников, реорганизацией на-

правления деятельности, результатом чего стало практическое отсутствие научной деятельности сада, несмотря на то, что в структуре сада имеется отдел науки.

В результате было установлено, что количество сохранившихся видов хвойных пород на Североамериканском ботанико-географическом участке составляет  $\frac{1}{4}$  часть от общего коллекционного фонда ЦБС.

Краткие сведения по проведенной инвентаризации и о состоянии сохранившихся голосеменных древесно-кустарниковых пород Североамериканского ботанико-географического участка за 85 лет приведено в табл. 2.

Таблица 2

Сведения о голосеменных древесно-кустарниковых породах  
Североамериканского ботанико-географического участка ЦБС

№ п. п.	Наименование вида	Год интродукции/способ	Высота, м	Высота на родине, м	Примечание
Сем. Taxaceae (Lindl.) S.F. Gray					
1.	Торрея большая – <i>Torreya grandis</i> (Fort.) Fortune ex Lindl.	1961/ из семян	до 8	до 25	Не цветёт
2.	*Т. большая, разновидность (низкорослая) – <i>T. grandis</i> (Fort.) Fortune ex Lindl. var. <i>nana</i> Opicul.	1964/ из семян	до 8		Три деревца, состояние хорошее
Сем. Pinaceae (Lindl.) Lindley					
3.	Пихта одноцветная – <i>Abies concolor</i> (Gordon & Gland. Gord & Engelm.) Lindl. ex Hindebr.	1955	4.2	до 40	Не цветет, состояние удовлетворительное.
4.	Ель Энгельмана – <i>Picea engelmannii</i> Engelm.	1965	до 4	до 50	Не цветет, растет медленно, для озеленения
5.	Ель колючая – <i>P. pungens</i> Engelm.	1955	> 7	до 30 (50)	Семена не имеют всхожести. Устойчивая, высокодекоративная. Страдает от низкой влажности и высокой температуры воздуха. В озеленении города встречается редко, с незначительными повреждениями и ростом не более 2 м в возрасте более 40 лет (бывший музей им. К.Бехзод). Не перспективный вид, хотя в последние годы завозят очень много из-за рубежа. Прекрасно себя чувствует в условиях ГБАО (г. Хорог, у здания университета). Прекрасные экземпляры превышающие по высоте здание университета.
6.	Ель колючая, форма серебристая – <i>P. pungens</i> Engelm., f. <i>argentea</i> Beissn.	1955	> 7	до 30 (50)	Семена не имеют всхожести. Устойчивая, высокодекоративная. Как и основной вид, страдает от низкой влажности и высокой температуры воздуха.
7.	Ель красная – <i>P. rubra</i> ((Do Roi) Sarg.) Link.	1959	> 2	до 50	Два деревца. Устойчивые. Расположены в окружение кипарисовика и имеют боковую притенённость от дуба каштанолистного во второй

№ п. п.	Наименование вида	Год интродукции/способ	Высота, м	Высота на родине, м	Примечание
					половине дня, что создаёт более благоприятные условия для роста и развития.
8.	*Лжетсуга Мензиса – <i>Pseudotsuga menziesii</i> (Mirb.) Franco.	1955	8	до 50	Не цветет, устойчивая и высокодекоративная.
9.	Л. Мензиса разнovidность (сизая) – <i>P. menziesii</i> (Mirb.) Franco var. <i>glauca</i> (Mayr) Franco.	1956	5	до 50	Не цветет, устойчивая.
10.	Сосна жесткая – <i>Pinus rigida</i> Mill.	1962	14	до 31	Плодоносит, устойчивая, растет быстро
11.	*С. желтая – <i>P. ponderosa</i> Douglas ex Loudon.	1962	16	до 50 (75)	Цветет, плодоносит, устойчивая. В озеленение города не встречается. Перспективный вид, заслуживает внедрения в озеленение города.
12.	С. желтая горная – <i>P. scopulorum</i> (Engelm.) Lemmon.	1959	12	до 50	Плодоносит, устойчивая, заслуживает широкого внедрения в лесные культуры выше 1200-1300 м над ур. м., где наблюдается выпадение большого слоя снега (особенно в Варзобском и Рамитском ущельях).
13.	С. Веймутова – <i>Pinus strobus</i> L.	1954	15	до 30 (50)	Цветёт, но цветки не оплодотворяются, устойчивая
Сем. Taxodiaceae Warming					
14.	*Секвойдендрон гигантский – <i>Sequoiadendron giganteum</i> (Lindl.) J. Buchholz.	1936	до 30	до 100	Растёт до 4000 лет. Самому старому экземпляру 85 лет. Он находится в ювенильном периоде своего развития. Размножается черенками. В условиях in vitro приживаемость черенков составляет 28-35%. В последние годы разработана новая система стерилизации черенков хвойных пород для микроклонального размножения [11].
15.	*Секвоя вечнозеленая – <i>Sequoia sempervirens</i> Endl.	1936	> 25	до 100	Живет 2000 лет. В фазу генерации вступает в возрасте 26 лет. Высокодекоративное растение. Теплолюбивое. Размножается семенами и черенками. Отличительная особенность этого хвойного, является давать обильные поросли. Заслуживает более широкого внедрения в озеленение. Размещать следует в приёмах композиции солитерно, и в малых группах, в более защищённых местах от холодных ветров на небольших расстояниях.
16.	*Болотный кипарис обыкновенный – <i>Taxodium distichum</i> (L.) Rich.	1934	> 20	до 50	Хвоя опадает ежегодно. Плодоносит. Перспективное для размножения на увлажненных и заболоченных почвах.
17.	Б.К.Мексиканский – <i>T. mucronatum</i> Ten.	1954	20	до 50	Хвоя опадает ежегодно. Цветет, у семян всхожесть не наблюдается.
Сем. Cupressaceae Bartl.					
18.	*Кипарис арizonский – <i>Cupressus arizonica</i> Greene.	1934	> 20	до 25	Семяношение обильное. Дает самосев. Самый выносливый, быстрорастущий, высокодекоративный кипарис. Много садовых форм, как по форме кроны, так и по окраске хвои. Перспективный вид, в озеленении города встречается часто. Широко внедрялся 90 годы XX в. в озеленение республики благодаря

№ п. п.	Наименование вида	Год интродукции/способ	Высота, м	Высота на родине, м	Примечание
					усилиям академика Максумова Н.А. (бывшего директора Института ботаники), пр. Сомони, киноконцертный комплекс “Кохи Борбад”. Необходимо отметить, что размещение в зеленой зоне вдоль проезжей части особо не рекомендуется из-за сильного разрастания кроны и снеговала, из-за сильного загрязнения автотранспортом, в зимний период окраска хвои в нижней части кроны превращается в черный цвет, а смолистость хвои не смывается, что снижает декоративность такого перспективного вида. Прекрасно чувствует себя в лесных культурах в условиях богары (территория Камчинского лесхоза).
19.	К. арizonский subsp. невадский – <i>C. nevadensis</i> Abrams.	1983	до 8	до 15	Плодоносит. Сохранился в единственном экземпляре. Не представляет практического интереса.
20.	*К. арizonский, ф. сизая – <i>C. arizonica</i> Greene. <i>var. glauca</i>	1934	до 12	до 25	Плодоношение и формирование семян обильное. Самая декоративная форма. Заслуживает широкого применения в озеленение города.
21.	К. арizonский, форма стелющаяся – <i>C. arizonica</i> Greene.		до 3		Стелющееся кустообразное растение. Цветет. Плодоношение отсутствует. Декоративна.
22.	К. Говена – <i>C. goveniana</i> Gordon.	1956	до 15	до 20	Плодоношение и формирование семян нормальные. Не выдерживает низкие температуры. Не перспективный.
23.	К. гваделупский – <i>C. guadalupensis</i> S. Watson.	1956	до 12	до 15	Плодоношение и формирование семян нормальные. В суровые зимы побеги текущего года подмерзают.
24.	К. Макнаба – <i>C. macnabiana</i> A. Murray.	1960	до 14	до 20	Плодоносит. В суровые зимы подмерзают молодые побеги. Не совсем декоративный.
25.	К. крупноплодный – <i>C. macrocarpa</i> Hartw. ex. Gordon	1955	до 10	до 25	Плодоносит. В суровые зимы часть кроны с заветренной стороны подмерзает. Особого интереса не представляет.
26.	К. лужитанский – <i>C. lusitanica</i> Mill.	1947	15	до 20	Плодоносит. В суровые зимы молодые побеги подмерзают, малодекоративен.
27.	К. нутканский – <i>C. nootkatensis</i> (D. Don) Spach.	1964	до 9	до 20	Сохранился один экземпляр, плодоносит, малодекоративен.
28.	*Кипарисовик Лавсона – <i>Chamaecyparis lawsoniana</i> (A. Murray) Parl.	1948	> 15	до 60	Плодоношение и формирование семян обильные. Устойчивый. Имеются различные декоративные формы. Заслуживает широкого применения в озеленении, особенно в парках и скверах. В последние годы завозят в большом количестве. Любит более увлажненные почвы. Хорошо черенкуется. Не переносит низкую влажность почвы.
29.	К. Лавсона ф. желтая (желтокон-чиковая) – <i>Ch. lawsoniana</i> (A. Murray) Parl.	1988	до 3	до 12	Формирование семян не наблюдается. Устойчивый, черенкуется хорошо, очень декоративен. Заслуживает широкого применения в озеленении. В озеленении встречается близкая форма бело-пестрая.

№ п. п.	Наименование вида	Год интродукции/способ	Высота, м	Высота на родине, м	Примечание
30.	*К. Лавсона разновидность сизая – <i>Ch. lawsoniana</i> (A. Murray) Parl. var. <i>glauca</i>	1974	> 12	до 40	Плодоношение и формирование семян обильное. Перспективная порода. До последних лет в озеленении не встречался [4]. Черенкуется хорошо.
31.	Разновидности кипарисовика Лавсона (ф. курчавая) – <i>Ch. lawsoniana</i> var. <i>fraseri</i> ; <i>Ch. Lawsoniana</i> var. <i>squarosa</i> ; <i>Ch. lawsoniana</i> var. <i>stewartii</i> ; <i>Ch. lawsoniana</i> .				Малодекоративные. Практического применения не имеют.
32.	К. Лавсона, форма пирамидальная – <i>Ch. lawsoniana</i> , f. <i>pyramidalis</i> Pillar.	1984	до 8	до 40	Плодоношение и формирование семян обильные. Перспективный вид. Заслуживает широкого применения в озеленение, черенкуется.
33.	К. туявидная – <i>Ch. thyoides</i> (L.) Britton, Sterns & Poggenb.	1978	до 7	до 25	Плодоносит. Достаточно декоративна.
34.	*Туя западная – <i>Thujaoccidentalis</i> L.	1949	7	до 20	Плодоношение и формирование семян обильные. Хорошо черенкуется. Устойчивая. Многие формы размножаются черенками. Имеет ограниченное применение в озеленении. На заднем дворе Аграрного университета растет колонovidная форма туи <i>Th. occidentalis</i> var. <i>fastigiata</i> H.Jaeger [5]. Любит влажную почву. В открытых местах часто искривляется. Декоративная и перспективная порода.
35.	Т. западная ф. вересковая – <i>Th. occidentalis</i> f. <i>ericoides</i> Hoopes.		до 2		Кустовидное дерево, формирование семян не наблюдается. Размножается черенками. В озеленение распространения не получило.
36.	*Т. Складчатая – <i>Th. plicata</i> Donn ex D. Don.	1934	до 18	до 60	Плодоносит, устойчивая, прекрасно черенкуется. В озеленении встречается редко. Заслуживает широкого внедрения в озеленение. Не переносит низкую влажность в почве.
37.	*Речной кедр – <i>Calocedrus decurrens</i> (Torr.) Florin.	1956	>16	до 60	Плодоносит. Лучшие условия для произрастания – южные склоны Гиссарского хребта, Варзобская горно-ботаническая станция (1200 м. над ур. м.) [1], дает самосев. Черенкуется. Декоративный и перспективный вид.
38.	Можжевельник западный – <i>Juniperus occidentalis</i> Hook.	1965	до 6	до 20	Плодоносит, но семена не имеют всхожести, хорошо черенкуется. Устойчив.
39.	*Можжевельник виргинский – <i>J. virginiana</i> L.	1950	до 15	до 30	Ежегодно обильно плодоносит. Дает много самосева. Легко размножается семенами. Самый быстрорастущий, устойчивый, высокорослый можжевельник. В озеленении встречается часто. В последние годы внедряется в лесные культуры на территории Камчинского лесхоза. Достаточно засухоустойчивый. Очень перспективный вид.

Примечание: \* – помечаны виды, встречающиеся в озеленении и составляющие основу ассортимента хвойных пород.

Из общего количества 47 таксонов, приведённых в отчёте ЦБС за 1981-85 гг., по которой проведена инвентаризация коллекции, согласно нашей выверке осталось 39 таксонов, так как

некоторые из них являются синонимами, за исключением видов, которые нуждаются в систематической сверке.

В табл. 3 приведены преобладающие семейства, роды и виды интродуцентов хвойных пород.

Таблица 3

## Преобладающие семейства интродуцентов хвойных пород

№ п.п.	Семейство	Количество родов	Количество видов, шт.	Количество разновидностей, шт	Количество форм
1	Cupressaceae	5	28	6	5
2	Pinaceae	4	14	2	-

Из табл. 3 видно, что наиболее преобладающим семейством среди хвойных интродуцентов является семейство кипарисовых – Cupressaceae, которое в 2 раза больше, нежели представители семейства сосновых – Pinaceae.

**В ы в о д ы**

Из общего количества хвойных пород, встречающихся в озеленении г. Душанбе (более 20 таксонов) [6],  $\frac{1}{3}$  составляют выходцы Североамериканского ботанико-географического участка. Используемый ассортимент в основном состоит из мамонтового дерева, ели колючей, кипариса аризонского, кипарисовика Лавсона, речного кедра, можжевельника виргинского и др.

Достаточно большой резерв составляют неиспользованные виды, так называемые перспективные виды, с которыми необходимо возобновлять работу на уровне репродукции, в том числе: секвойя вечнозеленая, болотный кипарис обыкновенный, сосна скальная, кипарис лейланди и другие с дальнейшим внедрением их в производство.

На данный период общим итогом многолетней интродукционной работы в Центральном ботаническом саду Таджикистана по хвойным породам Североамериканского участка является сохранение более 40 таксонов из большого количества разнообразия. Чтобы сохранить и преумножить данное богатство, необходимо срочно возобновить интродукционную деятельность в саду с привлечением специалистов отрасли и одновременно подготовку молодых дендрологов с практическими навыками. Однако при этом следует использовать делектусы ботанических садов с различных высотных зон, которые отличаются своим биоразнообразием. Своевременное решение данной проблемы позволит не только сохранить существующие коллекционные фонды ботанических садов, но и содействовать расширению их биоразнообразия.

*Поступило 05.02.2021 г.*

**Л И Т Е Р А Т У Р А**

1. Королёва А.С. Труды Бот. института АН ТаджССР, т.18. – Душанбе: Изд-во АН ТаджССР, 1962, с.5-140.
2. Исмаилов М.И. О генофонде дендрофлоры и принципах создания арборетума Центрального бот. сада АН РТ. – ДАН РТ, 1999, т. XLII, № 5-6, с.12-17.
3. Исмаилов М.И. Краткие итоги интродукции шишконосных в Таджикистане за 65 лет. – Изв. АН РТ. Отд. биол. и мед. н., 1998, №1-2 (137), с.5-12.

4. Ergasheva G.N., Saidov N.S., Drauschke W. Dendrological analysis of the parks of Dusnanbe. – J. Agriculture and Rural Development in the Tropiks and Subtropics, 2004, v.105, №, pp. 83-93.
5. Саидов Н.С., Саттаров Д.С. Оценка видового состава древесных пород дендропарка Таджикского аграрного университета. – Инновации и продовольственная безопасность, 2014, №3 (5), с.82-88.
6. Саттаров Д.С., Саидов Н.С. Оценка видового состава древесно-кустарниковых пород парка Айни города Душанбе. – Изв. АН РТ. Отд. биол. и мед. н., 2020, №2 (209), с.13-21.
7. Саидов Н.С., Саттаров Д.С., Заирова Ф. Видовой состав древесных пород на Североамериканском участке Центрального ботанического сада Таджикистана. – Мат-лы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 100-летию Национального гербария (TASH), 80-летию Института ботаники Академии наук Республики Узбекистан и 70-летию Ботанического сада имени акад. Ф.Н.Русанова. – Ташкент 28-29 апреля, 2021, С. 65-76.
8. Rehder A., Subdivision J. Gymnospermae – Manual of cultivated Trees and shrubs hardy in North America. The mac Millan company of Canada. Second editon. Nev York, 1949, pp. 1-68.
9. Интернет-ресурс: Global Biodiversity Information Facility (GBIF). Режим доступа: <https://www.gbif.org/search>
10. Международный индекс названий растений (IPNI) [Электронный ресурс] Режим доступа: <https://www.ipni.org/>.
11. Султонова М.С. Особенности микрклонального размножения и органогенез некоторых представителей хвойных пород (*Sequoidendron giganteum* Lindl. и *Biota orientalis* L.) Автореферат дисс. на соискание уч. степ. с/х наук, Санкт-Петербург, 2016, с. 2.

Н.С.Саидов, Д.С.Саттаров

## ЧАМЪБАСТИ МУХТАСАРИ ИНТРОДУКСИЯИ РАСТАНИҲОИ ЛУЧТУХМ ДАР ҚИТЪАИ АМЕРИКОИ ШИМОЛӢ БОҒИ БОТАНИКИИ МАРКАЗИИ ТОҶИКИСТОН ДАР ТӢЛИ 85 СОЛ

*Маркази инноватсионии биология ва тибби Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақолаи мазкур чамъбасти интродуксияи дарахту буттаҳои сӯзанбарг дар қитъаи Америкои Шимоли боғи ботаникии марказии Тоҷикистон дар тӯли 85 соли сипаригашта пешниҳод гардидааст. Муайян карда шудааст, ки дар тӯли 30 соли охирон гуногунии биологии қитъа ба 16 намуде, ки ба ҳайати 1 оила ва 2 авлод шомил ҳастанд, кам шудааст ва дар он зиёда аз 40 таксон боқӣ мондааст. Аз ин миқдор намояндаҳои оилаи сарвҳо – Cupressaceae Bartl. бартарӣ доранд, ки аз 5 авлод ва 28 намуд иборат мебошанд.

**Калимаҳои калидӣ:** интродуксия, боғ, қитъаи Америкои Шимолӣ, сӯзанбаргон, оила, авлод.

N.S.Saidov, D.S.Sattarov

**RESULTS OF THE INTRODUCTION OF HOSEED PLANTS IN THE NORTH AMERICAN AREA THE CENTRAL BOTANICAL GARDEN OF TAJIKISTAN FOR 85 YEARS**

*Center for Innovative Biology and Medicine of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

In this article the results of the introduction of conifers in the North American section of the Central Botanical Garden of Tajikistan over the past 85 years of activity are presents. It has been ascertained that over the past 30 years, the biodiversity of this site has decreased by 16 species, which belong to 1 family and 2 genera, and for this period more than 40 taxa have been preserved on the site. This number is dominated by representatives of the cypress family - Cupressaceae Bartl., which is represented by 5 genera and 28 species.

**Key words:** *introduction, garden, North American site, conifers, family, genus.*



УДК 581.132.633.11

М.Б.Ниязмухамедова

## СОДЕРЖАНИЕ АЗОТА И БЕЛКА В ЗЕЛЁНОЙ БИОМАССЕ И В ЗЕРНЕ ТРИТИКАЛЕ

*Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана*

*(Представлено членом-корреспондентом АН Таджикистана Х.А.Абдуллаевым 12.10.2019 г.)*

*В статье приводятся результаты определения содержания азота и белка в листьях, стебле, колосе, а также в зрелом зерне у сортообразцов тритикале. Анализ содержания азота и белка в вегетативных органах в процессе вегетации растений тритикале показал чёткую зависимость между повышением концентрации азота в листостебельной массе у генотипов Д-83, Т-25 и сорта Восе-3 и увеличением содержания белка в зерне.*

**Ключевые слова:** *тритикале, пшеница, рожь, лист, стебель, колос, азот, белок.*

Тритикале характеризуется биологической ценностью как по содержанию белков, так и по сбалансированности аминокислотного состава [1-4]. Количество белка в зерне злаковых зависит от многих факторов, очень важным из которых является содержание азотистых веществ в растении в процессе вегетации. Поэтому изучение особенностей синтеза, накопления и распределения азота в листьях, стеблях и колосе даёт возможность выяснить зависимость между содержанием азота в этих органах и накоплением белка в зерне [5-6].

В условиях Таджикистана не проводились исследования по содержанию азота и накоплению белка в вегетативной массе растений тритикале. Анализ содержания азота и белка в разных органах и зерне злаковых очень важен с точки зрения понимания донорно-акцепторных отношений, а также накопления белка в зерне разных генотипов зерновых культур. Этот показатель представляет особую важность в селекционных работах.

В связи с этим целью нашей работы было изучение содержания азота и накопления белка в различных органах тритикале в разные фазы онтогенеза этой культуры.

### **Объекты и методы исследования**

В качестве объектов исследования были использованы высокопродуктивные формы тритикале Восе-1, Немига-2, Восе-3, Д-83, Т-21, Т-25, НИВ (Николай Иванович Вавилов), в качестве стандарта – пшеница Сетте-Церрос-66 и рожь Вахшская-116 из коллекции Института ботаники, физиологии и генетики растений АН Республики Таджикистан.

Первичный генетический материал был получен из лаборатории генетики и продуктивности ВИР им.Н.И.Вавилова, любезно предоставленный нам академиком Н.И.Турбиным.

---

*Адрес для корреспонденции:* Ниязмухамедова Мукадам Бабаджановна. 734017, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Каримова, 27, Институт ботаники, физиологии и генетики растений АН РТ. E-mail: [mikadam.44@mail.ru](mailto:mikadam.44@mail.ru)

В качестве стандарта использовались районированные сорта пшеницы Сетте-Церрос-66 и рожь Вахшская-116, выведенная Н.С.Паришкурой в Вахшском филиале НПО «Земледелие» Таджикской академии сельскохозяйственных наук.

Семена этих культур высевали в оптимальные сроки в конце октября из расчёта 100-120 кг/га. Применяли общепринятые в Республике Таджикистан агротехнологии выращивания пшеницы [7,8]. Применяли ленточный посев, расстояние между рядками – 45 см. Размер делянок 2х2м<sup>2</sup>. Азотные и фосфорные удобрения вносили три раза: в фазах трубкования, колошения, цветения и молочной спелости из расчёта N – 60 кг/га, P – 80 кг/га.

Содержание азота определяли по методу Кьельдаля [9]. Содержание сырого протеина в зерне и в вегетативных органах определяли биуретовым методом [10], который рассчитывали по общему азоту.

Статистическую обработку результатов исследований проводили с использованием программы *Excel Windows 2010*, по Б.А.Доспехову [11].

### Результаты и их обсуждение

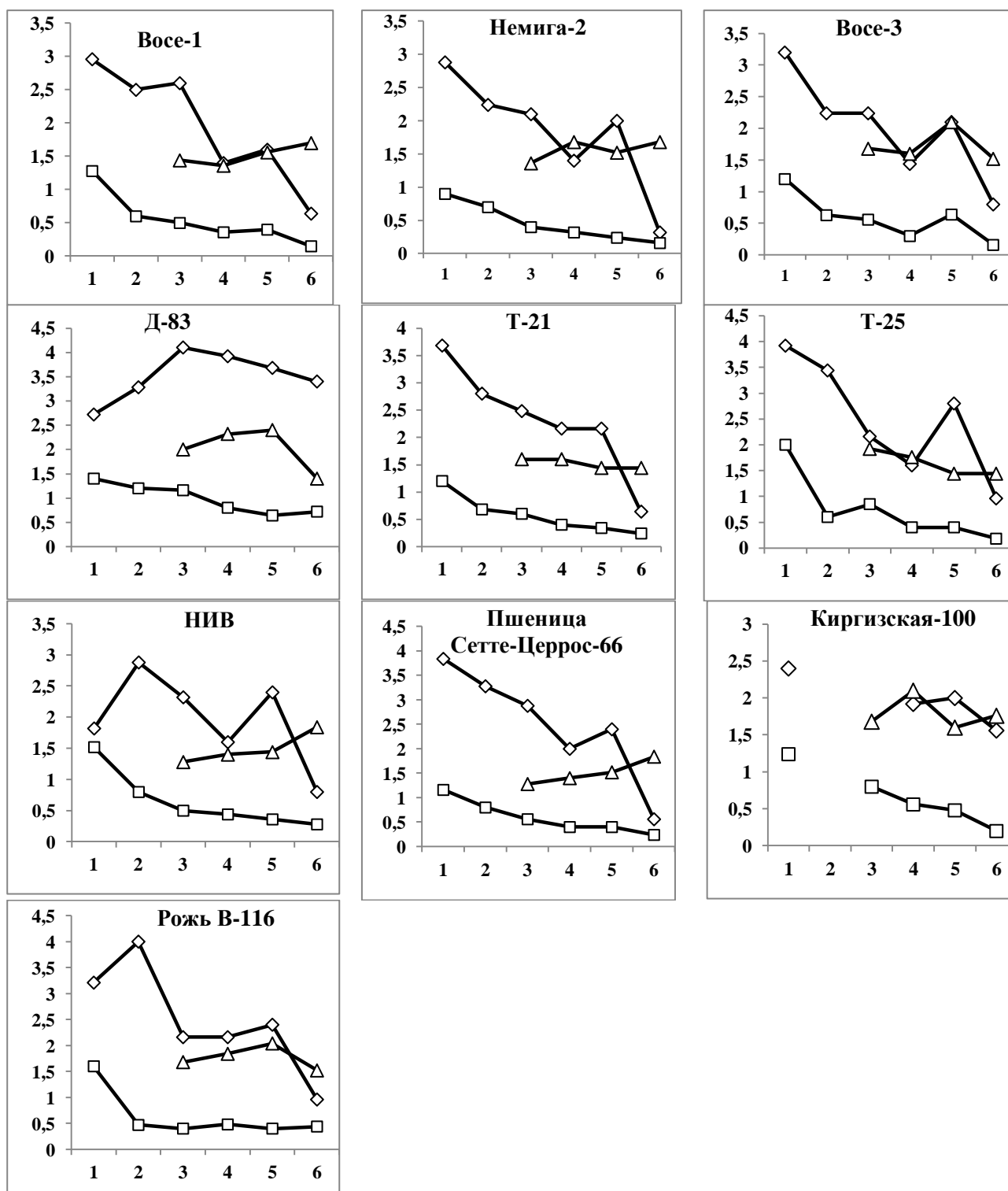
На рис. 1 представлены результаты анализа содержания общего азота в листьях, стебле и колосе у высокопродуктивных сортообразцов тритикале в основные фазы развития. Характер распределения общего азота был таковым: содержание азота больше всего было в листьях, затем в колосе, а в стеблях его содержание намного ниже.

Содержание азота в листьях тритикале сортообразцов Восе-1, Немига-2, Восе-3, Т-21 и пшеницы Сетте-Церрос-66 в фазе кущения имеет максимальное значение, затем в последующие фазы развития растений содержание азота снижается вследствие усиления оттока азотистых веществ из листьев. Листья тритикале Д-83 только в фазе колошения накапливают большое количество азота, затем наблюдается равномерное понижение содержания азотистых веществ и белка до конца вегетации.

У сортообразца тритикале НИВ и ржи Вахшская-116 в листьях отмечено высокое содержание азота в фазах трубкования и молочной спелости и значительно больше по сравнению с другими органами (стебель, колос).

В стебле почти у всех сортообразцов тритикале и у пшеницы Сетте-Церрос- 66 большое количество азота отмечено в фазу кущения и до конца вегетации наблюдается равномерное его уменьшение. По-видимому, это связано с тем, что происходит активный отток азотистых веществ из стебля в зерно для образования белка. Только у сортов Восе-3 и Д-83 в фазе молочной спелости продолжает несколько интенсивнее накапливаться азот в стебле.

Таким образом, снижение содержания азота в вегетативных органах происходит вследствие использования его на синтез белка при формировании зерновок. Стебель и колос проявляют себя как органы-фонды (доноры) реутилизации синтезированных в процессе фотосинтеза пластических веществ, которые через стебель и колосковые органы (чешуя, ости) используются при формировании зерновки.



**Рис. 1.** Содержание общего азота в листьях и стеблях (в % на сухую биомассу) у некоторых зерновых культур. Примечание. Здесь и на рис. 2. 1 – кущение (21.03); 2 – трубкование (26.04); 3 – колошение (11.05); 4 – цветение (20.05); 5 – молочная спелость (25.05); 6 – восковая спелость (7.06).

Обозначения: **◆** — ЛИСТ; **■** — СТЕБЕЛЬ; **▲** — КОЛОС.

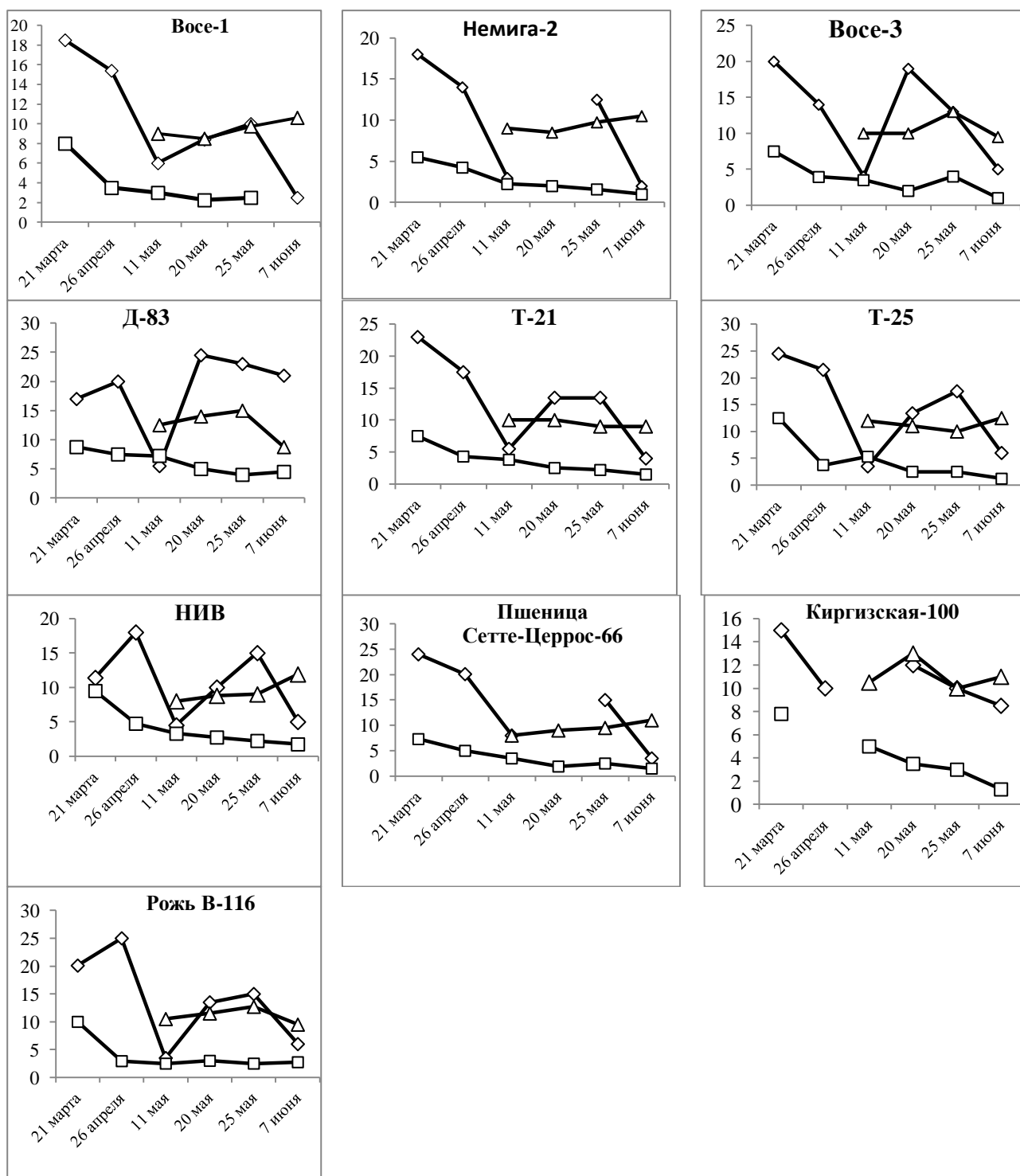


Рис. 2. Содержание общего белка в сортообразцах зерновых культур (в % на сухую биомассу).

В колосе общий белок накапливается интенсивнее, чем в стебле, и его содержание удерживается на довольно высоком уровне. У большинства сортообразцов максимальное накопление азота происходит в фазе колошения, в фазах цветения и молочной спелости наблюдается его спад, а в фазе восковой спелости содержание азота несколько повышается. Только в элементах колоса (чешуя, ости) у тритикале Т-21 содержание азота высокое, и до конца вегетации наблюдается его уменьшение, отток азота активен.

При анализе содержания общего азота в целом растении было выявлено, что в фазе цветения у изученных генотипов тритикале (рис.1) содержание азота варьирует от 32.66 мг/г сухой массы у Немига-2 до 99.49 мг/г сухой биомассы у Д-83. У пшеницы сорта Сетте-Церрос-66 содержание азота было ниже 29.7 мг/г сухой массы, у ржи – 45.84 мг/г сухой массы, а у остальных генотипов тритикале содержание азота имеет промежуточное значение. Выявлено, что у сортообразцов тритикале Д-83, Т-25 и ржи Вахшская-116 в эту же фазу развития содержание общего азота высокое в целом растении, а белка в зерне.

В фазе молочной спелости выделяются сортообразцы с повышенной концентрацией азота в целом растении Восе-3, Д-83, Т-25 и рожь Вахшская-116 и, соответственно, в их зерне синтезируется и накапливается большое количество белка.

В завершающей фазе формирования зерновки общий азот в целом растении особенно интенсивно накапливается у формы Т-25 (до 98 мг/г сухой массы). У Д-83, у Восе-1, Восе-3 и у ржи В-116 содержание азота находится на одном уровне и имеет значение от 41.9 до 49.6 мг/г сухой массы. Самое низкое содержание азота в эту фазу обнаружено у сорта Немига-2 (23.32 мг/г сухой массы).

В наших опытах установлено, что высокопродуктивные сортообразцы тритикале (с большим содержанием белка в зерне) более активны в поглощении азота, в его накоплении и перераспределении. Колос притягивает к себе и ассимиляты, и азот, накопившийся в вегетативных органах. Донорно-акцепторные отношения характеризуются сложным взаимодействием между ассимилирующими органами (листья, стебель, колос) и потребляющими (зерновки) – весь процесс направлен в основном на образование белка, на накопление запасных веществ, в зависимости от условий и от генотипа.

Таким образом, изучение накопления и перераспределения общего азота и белка по органам у изученных нами сортообразцов тритикале выявило эффективное использование ассимилятов на формирование зерновки и образование запасного белка за счёт оттока из листьев, стебля и элементов колоса.

*Поступило 29.10.2019 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Турбин Н.В. Тритикале. Создание и перспективы использования. – М.: Наука, 1986, с.5-21.
2. Сечняк Л.К., Сулима Ю.Г. Тритикале. – М.: Колос, 1984, с. 278-291.
3. Покровская Н.Ф. Содержание белка и лизина в зерне амфидиплоидов пшеницы. - Труды по прикл. бот., ген. и селек. – М., 1976, т.56, вып.3, с. 78-85.
4. Тертычная Т.П., Бессонова Л., Манжесов В., Гончаров С., Яковлева Н. Мука тритикалевая хлебопекарная. – Хлебопродукты. – Воронеж: ВГАУ, 2003, №5, 25 с..
5. Павлов А.Н. Физиологические причины, определяющие уровень накопления белка в зерне различных генотипов пшеницы. – Физиология растений. – М.: 1982, т.28, вып. 4, с.767-779.
6. Сайфуллин А.Г. Распределение азота в органах высоко- и низкobelковых сортов яровой пшеницы. – Сб. научн. тр. по генетике, физиологии и селекции зерновых культур на Юго-Востоке. – Саратов, 1987, с.14-24.
7. Научная система ведения сельского хозяйства Таджикистана. – Душанбе: Матбуот, 2009, 764 с.

8. Научно обоснованная система земледелия Таджикской ССР. – Душанбе: Ирфон, 1984, 498 с.
9. Ермаков А.И., Арасимович В.В., Ярош Н.П., Перуанский Ю.В., Луковникова Г.А., Иконникова М.И. Методы биохимического исследования растений. – Определение азота по Кьельдалю. – Л.: Агропромиздат, 1987, с. 234 – 237.
10. Пыльнева Л.Н. Использование биуретового метода определения зеина для оценки селекционного материала. – Биохимические методы исследования селекционного материала. Сб. научн. Тр. – Одесса, 1979, в.15, с. 25-26.
11. Доспехов Б.А. Методика полевого опыта. – М.: Колос, 1985, 352 с.

**М.Б.Ниезмухамедова**

## **МИҚДОРИ НИТРОГЕН ВА САФЕДА ДАР БИОМАССАИ САБЗ ВА ДОНИ ТРИТИКАЛЕ**

*Институти ботаника, физиология ва генетикаи растаниҳои  
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаҳои таҳлили нитроген ва сафеда дар баргҳо, тана, хӯша ва инчунин дар дони пухтарасидаи навҳои тритикале дар марҳилаҳои барвақтии нашъунамои рушд, гирд оварда шудаанд. Омӯзиши миқдори нитроген ва сафеда дар узвҳои вегетативӣ дар раванди нашъунамои растании тритикале нишон дод, ки вобастагии возеҳи зиёдшавии консентратсияи нитроген дар баргу танаи Д-83, Т-25 ва Восе-3 ба зиёд шудани миқдори сафеда дар дон мусоидат мекунад.

**Калимаҳои калидӣ:** *тритикал, гандум, ҷавдор, барг, поя, хӯша, таркиби нитроген, сафеда.*

**M.B.Niyazmukhamedova**

## **THE CONTENT OF NITROGEN AND PROTEIN IN GREEN BIOMASS AND IN GRAIN TRITIKALE**

*Institute of Botany, Physiology and Plant Genetics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

In this article the results of the analysis of the content of nitrogen and protein in the leaves, stem, spike, as well as in the mature grain of the triticale samples in different phases of development are presents. The study of nitrogen and protein in vegetative organs in the process of vegetation of triticale plants revealed a clear relationship – the increased nitrogen concentration in the leaf stem mass in D-83, T-25 and Vose-3 contributes to an increased protein content in the grain.

**Key words:** *triticale, wheat, rye, leaf, stem, spike, nitrogen content, protein.*

УДК 581.19:631.522/524

Член-корреспондент НАН Таджикистана К.Алиев,

Н.С.Диловарова, Н.Х.Норкулов, М.Х.Шукурова, З.Х.Норкулова

**ОРГАНОСПЕЦИФИЧНОСТЬ ПРО- И АНТИОКСИДАНТНОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ *IN VITRO* И *EX VITRO* У КАРТОФЕЛЯ***Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана*

*Установлена органоспецифичность систем антиоксидантной защиты растений в условиях ex vitro. Активность изученных ферментов в корнях выше, чем в листьях. Основным механизмом устойчивости растений к стрессовому воздействию определяется главным образом сосредоточением антиоксидантов в корневой системе растений, предполагая, что корневая система обладает высоким потенциалом устойчивости в отличие от листьев.*

**Ключевые слова:** *картофель, активные формы кислорода, перекисное окисление липидов, ферменты, перекись водорода.*

Накопление активных форм кислорода (АФК) является одной из ответных реакций растения на повреждающие факторы [1-3]. Окислительный стресс в данном случае можно идентифицировать как нарушение оптимальных условий баланса между прооксидантными и антиоксидантными компонентами клетки. Главным представителем прооксидантов является избыточная внутриклеточная генерация АФК, которая представлена в виде супероксид-радикала ( $O_2^{\cdot-}$ ), пероксида водорода ( $H_2O_2$ ) и гидроксил-радикала (ОН). Они участвуют в реакции окисления многих клеточных структур, и, в итоге нарушают прохождение нормальных метаболических процессов в клетке [2-5]. В нормальных условиях роста и развития растений постоянно присутствует АФК как фактор, осуществляющий гомеостатический контроль уровня свободных радикалов [6]. Функционирование АФК системы клетки, очевидно, имеет существенное значение при адаптации растений к стрессорным воздействиям. В пользу этой точки зрения в настоящее время имеются данные, согласно которым устойчивые генотипы имеют более высокий уровень активности антиоксидантных ферментов [7,8].

Для решения этого вопроса был использован клон-гибрид №26. Ранее нами было показано, что данный генотип интенсивнее реагирует на действие водного стресса, и характеризуется достаточно высокой устойчивостью к действию данного фактора [9]. Вместе с тем, эти данные полностью не раскрывают специфичность функции антиоксидантных ферментов в органах растения, и не раскрывают активность конкретных АФК-окисляющих антиоксидантных ферментов в листьях и корнях растений.

---

**Адрес для корреспонденции:** Диловарова Нигина Сифатшоевна. 7340017, Республика Таджикистан, Душанбе, ул. Каримова 27, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана. E-mail: nigin.sima@mail.ru

Целью наших исследований явилось анализ активности антиоксидантного фермента пероксидазы как главного компонента антиокислительной системы в условиях *in vitro* и *ex vitro* в корнях и листьях картофеля.

### Материал и методы исследования

Объектом исследований служил клон-гибрид №26, из коллекции лаборатории молекулярной биологии и биотехнологии растений Института ботаники, физиологии и генетики растений Национальной академии наук Таджикистана.

Активность каталазы определяли по методу [10], по скорости разложения  $H_2O_2$  при длине волны  $E_{240}$  нм в течение 1 минуты. Активность каталазы выражали в мкмоль  $H_2O_2$ /г сырой массы.

Активность гваяколпероксидазы (ГвПО) определяли спектрофотометрическим методом, используя в качестве субстрата гваякол [11] и выражали в мкмоль гваякол/г сырой массы. Оптическую плотность пробы измеряли при  $E_{532}$  нм и  $E_{600}$  нм на спектрофотометре Ultraspec II (Швеция).

Эксперимент проводили в трёх повторностях. Результаты представлены в виде средней арифметической величины со стандартной ошибкой. Использовали параметрический кривой Стьюдента, уровня значимости ( $P < 0,05$ ).

### Результаты исследования и их обсуждение

pH реакционной среды влияет на уровень ионизации функциональных группировок активных центров ферментов. Как видно из рис. 1 зависимость активности ферментов каталазы и гваяколпероксидазы от pH-среды существенно отличалась. Оптимальное значение активности фермента каталазы соответствует pH=5.6, а гваяколпероксидазы pH=7.6, что было использовано нами в дальнейшей работе для определения активности антиоксидантных ферментов.

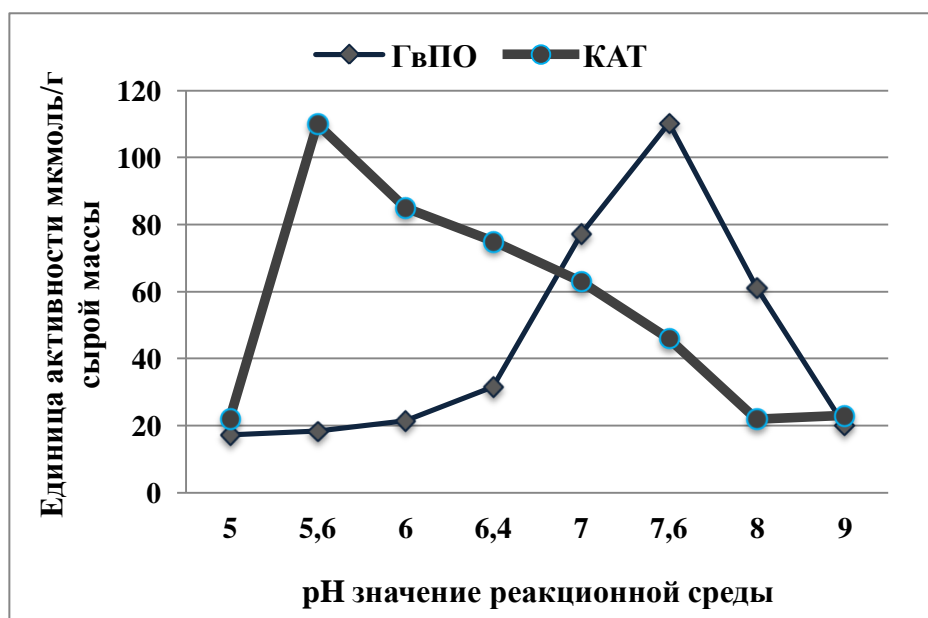


Рис. 1. Зависимость активности ферментов гваяколпероксидазы (ГвПО) и каталазы (КАТ) от pH-реакционной среды

Из рис. 2 и 3 видно, что в условиях *in vitro* активность гваяколпероксидазы и каталазы была значительно ниже, чем в условиях *ex vitro*. При переводе растений-регенерантов в условия *ex vitro*



резко повысилась активность как гваяколпероксидазы, так и каталазы с последующим переходом на стационарный уровень.

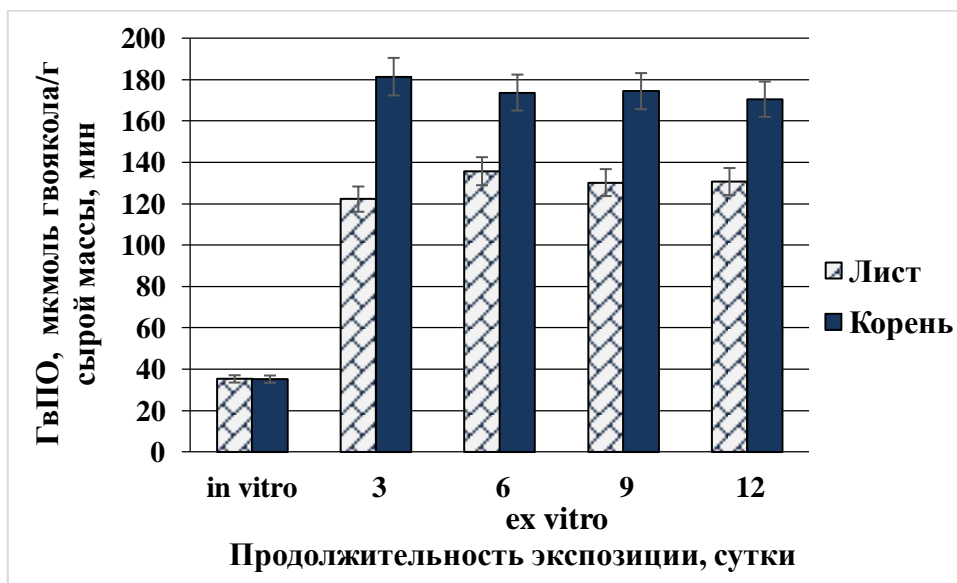


Рис. 2. Активность гваяколпероксидазы в листьях и корнях растения картофеля в условиях *in vitro* и *ex vitro*.

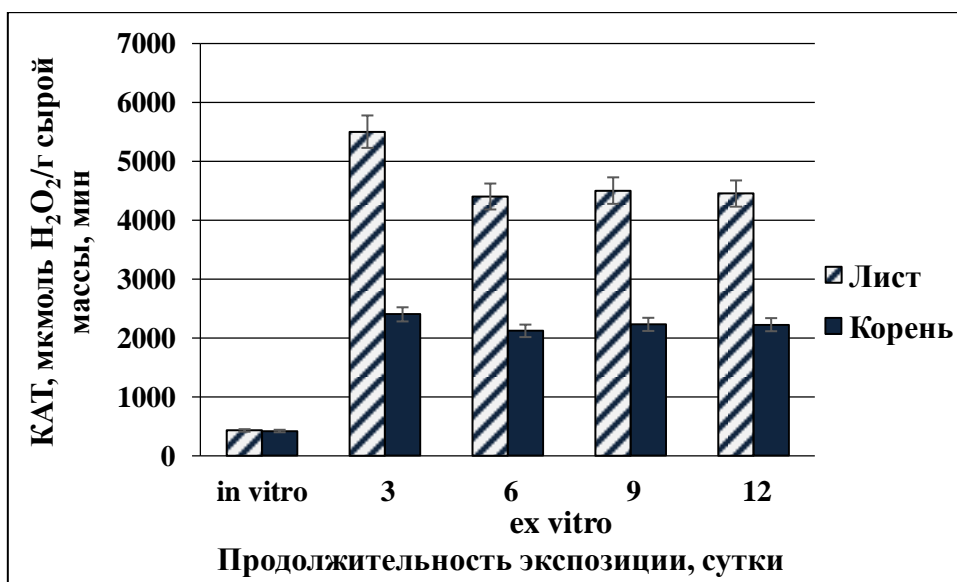


Рис. 3. Активность каталазы в листьях и корнях растения картофеля в условиях *in vitro* и *ex vitro*.

Характер проявления активности ферментов (гваяколпероксидазы, каталазы) при продолжительном выдерживании растений в условии *ex vitro* существенно отличался, как в листьях, так и в корнях, т.е. активность гваяколпероксидазы в корнях в течение всего эксперимента менялась неоднозначно и была ниже, чем в листьях. Активность каталазы как в листьях, так и в корнях в течение всего эксперимента менялась значительно больше, чем активность фермента гваяколпероксидазы.

На основании полученных данных можно сделать следующие выводы: во-первых, системы антиоксидантной защиты у растений органоспецифичны; во-вторых, активность изученных ферментов в корнях выше, чем в листьях, это дает возможность высказывать мысль о том, что основной механизм устойчивости растений к стрессорному воздействию определяется, главным образом, сосредоточением антиоксидантов в корневой системе растений. Высокая активность гваяколпероксидазы в

корнях связана с процессом лигнификации и суберинизации [12]. В-третьих, полученные результаты показали, что при продолжительном выращивании растений-регенерантов в условиях *ex vitro* активность каталазы в листьях была значительно выше, чем в корнях.

Таким образом, полученные в данной работе результаты позволяют заключить, что корневая система растений картофеля обладает высоким потенциалом устойчивости в отличие от листьев. Это связано с высоким уровнем активности антиоксидантных ферментов, особенно гваякол-пероксидазы.

Поступило 31.05.2021

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мерзляк М.Н. Активированный кислород и окислительные процессы в мембранах растительной клетки. – Итоги науки и техники. Сер. Физиология растений, 1989, т. 6, 167 с.
2. Лукаткин А.С. Холодовое повреждение теплолюбивых растений и окислительный стресс. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2002, 208 с.
3. Гарифзянов А.Р., Жуков Н.Н., Иванищев В.В. Образование и физиологические реакции активных форм кислорода в клетках растений. – Современные проблемы науки и образования, 2011, № 2, с. 1-21.
4. Zhang J.L., Shi H. Physiological and molecular mechanisms of plant salt tolerance. – *Photosynth. Res.*, 2013, v. 115, pp. 1-22.
5. Норкулов Н.Х., Давлятназарова З.Б., Азимов М.Л., Алиев У.К., Файзиева С.А., Киёмова З., Алиев К. Роль антиоксидантных ферментов в развитии устойчивости растений к стрессорному воздействию. – Вестник Таджикского национального университета. Сер. естеств. наук. 2014, № 12 (130), с. 167-173.
6. Киёмова З.С., Давлятназарова З.Б., Шукурова М.Х., Ашуров С.Х., Алиев К.А. Активность супероксиддисмутазы у разнотолерантных растений-регенерантов картофеля в условиях солевого стресса. – Изв. АН РТ. Отд. биол. и мед. н., 2013, №1 (182), с. 40-46.
7. Колупаев Ю.Е., Кокорев А.И. Антиоксидантная система и устойчивость растений к недостатку влаги. – Физиология растений и генетика, 2019, т. 51 (1), с. 28–54.
8. Ефимова М.В., Коломейчук Л.В., Бойко Е.В., Малофий М.К., Видершпан А.Н., Плюснин И.Н., Головацкая И.Ф., Мурган О.К., Кузнецов Вл.В. Физиологические механизмы устойчивости растений *Solanum tuberosum* L. к хлоридному засолению. – Физ. раст., 2018, т. 65, № 3, с. 196-206.
9. Диловарова Н.С., Норкулов Н.Х., Давлятназарова З.Б., Каспарова И.С., Садриддинов М., Алиев К. Индукция антиоксидантной системы растений картофеля *Solanum tuberosum* L. в условиях засухи. – Изв. АН РТ. Отд. биол. и мед. н., 2020, № 2 (209), с. 38-45.
10. Aebi H. Catalase in vitro. – *Methods Enzymol.*, 1984, v. 105, pp. 121-126.
11. Шевякова Н.И., Стеценко Л.А., Мещеряков А.Б. Изменение активности пероксидазной системы в процессе стресс-индуцированного формирования САМ. – Физ. раст., 2002, т. 49, № 5, с. 670-677.
12. Синькевич М.С., Нарайкина Н.В., Трунова Т.И. Процессы, препятствующие повышению интенсивности перекисного окисления липидов у холодостойких растений при гипотермии. – Физ. раст., 2011, т. 58, с. 1020-1026.

К.Алиев, Н.С.Диловарова, Н.Х.Норкулов, М.Х.Шукурова, З.Х.Норкулова

**УЗВВОБАСТАГИИ СИСТЕМАИ ПРО- ВА ANТИОКСИДАНТИИ КАРТОШКА  
ДАР ШАРОИТИ *IN VITRO* ВА *EX VITRO***

*Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани*

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Узввобастагии системаҳои муҳофизатии антиоксидантҳои растанӣ дар шароити *ex vitro* муқаррар карда шудааст. Фаъолиятҳои ферментҳои омӯхташуда дар реша нисбат ба барг баландтар аст. Механизми асосии тобоварии растаниҳо асосан аз ҳисоби миқдори антиоксидантҳо дар системаи решаи растанӣ муайян карда мешавад, ки дар системаи реша дар муқоиса бо баргҳо иқтидори баланди тобовари доранд.

**Калимаҳои калидӣ:** картошка, шаклҳои фаъоли оксиген, оксидиавии пероксидии чарбҳо, фермент, пероксиди гидроген.

K.Aliev, N.S.Dilovarova, N.Kh.Norkulov, M.Kh.Shukurova, Z.Kh.Norkulova

**ORGAN SPECIFICITY OF PRO- AND ANTIOXIDANT SYSTEM OF POTATO  
*IN VITRO* AND *EX VITRO***

*Institute of Botany, Plant Physiology and Genetics of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

In this article the organ-specificity of the antioxidant defense system of potato plants *ex vitro* has been established. The main mechanism of the plant resistance against to upcoming stress mainly by the concentration of antioxidants in the root system is determined. It is supposed that the root system has a high resistance potential in contrast to leaves. Moreover, the activity of the studied enzymes was higher in roots than in leaves.

**Key words:** potato, reactive oxygen species, lipid peroxidation, enzyme, hydrogen peroxide.