

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- У.Чариев.** Обобщённая задача для сумм мультипликативных функций в арифметической прогрессии351
- М.Ш.Шабозов, А.Мухлис.** Неравенства типа Джексона-Стечкина и поперечники некоторых классов функций в L_2356
- А.Захурбеков.** Верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в $L_2(Q)$ 368
- О.А.Джурахонов.** Скорость сходимости "гиперболических" частных сумм двойного ряда Фурье по ортогональным многочленам Фурье-Эрмита378
- Н.У.Кадамшоев.** Точные неравенства между наилучшими приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана B_2385
- С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров.** Вариационная задача Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида.....393

АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, С.Н.Сафаров.** Определение физических свойств потенциально опасного астероида 2003 SD220 по наблюдениям в Гиссарской астрономической обсерватории401

ФИЗИКА

- Б.И.Махсудов, Н.У.Муллоев, Н.Зайдулло.** Влияние малых потоков тепловых нейтронов на ИК-спектр бактерий *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ* и *Bacillus megaterium var. phosphaticum*.....406
- С.Ф.Одинаев.** Определение обогащения урановых образцов с помощью запаздывающих нейтронов413
- М.Ш.Имом.** Цифровой метод анализа скоростей счёта временных совпадений импульсов γ - γ и n - n ^{252}Cf 421

ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ

- С.Ф.Абдуллаев, В.А.Маслов.** О связи таяния ледника Медвежий с пылевыми вторжениями428

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Н.М.Джамолов, Д.Х.Мирзоев, М.М.Тагоев, С.М.Гаффорзода, У.М.Мирсаидов.** Кинетические аспекты разложения алюмосиликатных руд Таджикистана минеральными кислотами438

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- А.С.Джафаров, К.Б.Нуров.** Исследование двойных систем с особых температурных точек442

- М.С.Холиков.** Термические характеристики процесса парообразования трансмиссионного масла марки «LUMIX transmission oil: SAE 80W-90; API GL-5» **449**
- У.Р.Джобиров, И.Н.Ганиев, М.Ч.Ширинов, З.Р.Обидов.** Анодное поведение цинкового сплава Zn_{0.5}Al, легированного эрбием в кислой среде..... **456**

МЕТАЛЛУРГИЯ

- А.А.Кодиров, Х.Ш.Рахимов, А.Бадалов.** Механическая активация сульфидно-сурьмяных концентратов..... **460**

МИНЕРАЛОГИЯ

- Н.К.Усмонов, Ф.А.Файзиев, А.Р.Файзиев.** Геолого-минералогическая характеристика золото-сульфидного месторождения Тутлы-Кудук (Юго-Западный Карамазар)..... **466**

БИОХИМИЯ

- М.О.Убайдулло, Г.К.Мироджов, М.М.Якубова, М.К.Курбонов.** Противовирусное и гепатопротекторное действие настойки лагенарии обыкновенной – *Lagenaria siceraria* (Molina) Standl. при экспериментальном вирусном гепатите «В»..... **475**

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- Х.А.Абдуллаев, Б.А.Солиева, Н.Х.Ойзода, М.М.Саиднабиев.** Репаративная регенерация листьев у растений хлопчатника после дефолиации **480**

CONTENTS

MATHEMATICS

- U.Chariev.** Generalised problem for amounts multiplicative function in arithmetical progression351
- M.Sh.Shabozov, A.Mukhlis.** Jackson-Stechkin inequalities and the widths of some classes of function in L_2356
- A.Zahurbekov.** Upper bounds of best approximation of some classes of periodic functions of two variables by “circular” Fourier sums in $L_2(Q)$368
- O.A.Jurakhonov.** A speed of convergence of "hyperbolic" partial sums of the double Fourier series on the Fourier–Hermite orthogonal polynomials378
- N.U.Qadamshoev.** Sharp inequalities between best approximations and some characteristics of smoothness in the Bergman’s space385
- S.A.Iskhokov, K.E.Khakhazarov.** Variational Dirichlet problem with homogeneous boundary conditions for non-divergent form degenerate elliptic operators.....393

ASTRONOMY

- G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, S.N.Safarov.** Determination of the physical properties of a potentially hazardous asteroid 2003 SD220 from observations in the Gissar Astronomical Observatory401

PHYSICS

- B.I.Mahsudov, N.U.Mulloev, N.Zaydullo.** Effect of low flows of thermal neutrons on the IR spectrum of *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ* and *Bacillus megaterium var. phosphaticum* bacteria406
- S.F.Odinaev.** Determination of enrichment of uranium samples using delayed neutrons413
- M.Sh.Imom.** Digital method for analysis of the counting rate of time coincidence of γ - γ and n-n ^{252}Cf pulses421

ATMOSPHERE PHYSICS

- S.F.Abdullaev, V.A.Maslov.** On the relationship of the degradation of Medvezhy glacier with dust injuries428

INORGANIC CHEMISTRY

- N.M.Jamolov, D.Kh.Mirzoev, M.M.Tagoev, S.M.Gaforzoda, U.M.Mirsaidov.** Kinetic aspects of decomposition of aluminosilicate ore in Tajikistan by mineral acids438

PHYSICAL CHEMISTRY

- A.S.Jafarov, K.B.Nurov.** Research of binary systems with special temperature points442
- M.S.Kholikov.** Thermal characteristics of the process of steam formation of transmission oil brand "LUMIX transmission oil: SAE 80W-90; API GL-5"449

U.R.Jobirov, I.N.Ganiev, M.Ch.Shirinov, Z.R.Obidov. Anode behaviour of Zn_{0.5}Al zinc alloy, doped with erbium, in the sour environment.....456

METALLURGY

Kh.Sh.Rakhimov, A.A.Kodirov, A.B.Badalov. Mechanical activations of the sulfide-antimony concentrates.....460

MINERALOGY

N.K.Usmonov, F.A.Fayziev, A.R.Fayziev. Geological and mineralogical characteristics Tutli-Kuduk gold-sulfide deposit (South-Western Karamazar)466

BIOCHEMISTRY

M.O.Ubaydullo, G.K.Mirojov, M.M.Yakubova, M.K.Kurbonov. Antiviral and hepatoprotective effect of tincture *Lagenaria siceraria* (Molina) Stendl in experimental viral hepatitis "B"475

PLANT PHYSIOLOGY

Kh.A.Abdullaev, B.A.Solieva, N.Kh.Oyzoda, M.M.Saidnabiev. Reperative regeneration of cotton leaves after defoliation.....480

УДК 511.174

У.Чариев

ОБОБЩЁННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СУММ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни

(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 03.09.2021 г.)

В работе найдена асимптотическая формула для сумм мультипликативных функций в арифметической прогрессии, по числам простые делители которых лежат в заданных интервалах.

Ключевые слова: *сумма мультипликативных функций, асимптотическая формула, характер Дирихле, обобщенная функция Мангольдта.*

В работе [1] для суммы $m_f(X, \chi)$ при

$$f_1(n_1) = \varepsilon(n_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } n_1 = 1, \\ 0, & \text{если } n_1 > 1 \end{cases}$$

была найдена асимптотическая формула

$$m_f(X, \chi) = \sum_{\substack{n=n_1 \cdots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v, (v=1, \overline{k})}} \frac{\chi(n) f_1(n_1) \cdots f_k(n_k)}{n_1 \cdots n_k} =$$

$$= 1 + O\left(\frac{\ln^A\left(\frac{X}{Y_1} + 2\right)}{e^{a(\ln Y_1)^a}}\right), \quad (1)$$

где $f(n) = f_1(n_1) \cdots f_k(n_k)$, $1 = Y_0 < Y_1 < \cdots < Y_{k-1} < Y_k = X$, χ – неглавный характер Дирихле по модулю $D \leq (\ln \min(X, Y_1))^B \cdot f_v(n), (v = \overline{1, k})$ – мультипликативные функции, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{\substack{p^r \leq X \\ p \leq Y}} \frac{\Lambda_{f_v}(p^r)}{p^r} = \tau_v \ln \min(X, Y) + B_v + h_v(X, Y), \quad (2)$$

$$\prod_{Y < p \leq X} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f_v(p^r)|}{p^r} \right) = O \left(\left(\frac{\ln X}{\ln Y} \right)^{A_v} \right), \tag{3}$$

$$\sum_{\substack{p^r \leq X \\ p \leq Y}} \frac{\chi(p^r) \Lambda_{f_v}(p^r)}{p^r} = B_v(\chi) + h_v(\chi, X, Y), \tag{4}$$

$$h_v(X, Y) = O \left(e^{-a(\ln \min(X, Y))^\alpha} \right), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{5}$$

$$h_v(\chi, X, Y) = O \left(e^{-a(\ln \min(X, Y))^\alpha} \right), \tag{6}$$

B_v, B, A_v, τ_v, a – комплексные числа. $\wedge_{f_v}(n)$ – обобщенная функция Мангольдта, определяемая соотношением

$$f_v(n) \ln n = \sum_{d|n} \wedge_{f_v} \left(\frac{n}{d} \right) f_v(d).$$

В этой работе при $f_1(n_1) \neq \varepsilon(n_1)$ для $m_f(X, \chi)$ получена асимптотическая формула.

Теорема. Пусть $f_v(n), (v = \overline{1, k})$ – мультипликативные функции, удовлетворяющие условиям (2-6), χ – неглавный характер Дирихле по модулю D . Тогда

$$\begin{aligned} m_f(X, \chi) &= \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v, (v=\overline{1, k})}} \frac{\chi(n) f_1(n_1) \dots f_k(n_k)}{n_1 \dots n_k} = \\ &= c(\chi) + O \left(e^{-a(\ln Y_1)^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{\ln^{A_1} Y_1}{\ln X} + \frac{1}{\ln^N X} + \frac{\ln^{2A} X}{e^{a(\ln Y_1)^\alpha}} \right), \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$c(\chi) = \sum_{\substack{n=1 \\ p|n \Rightarrow p \leq Y_1}}^{\infty} \frac{\chi(n) f_1(n)}{n},$$

$A_1 > 0, A > 0, 0 < \alpha < 1, a > 0, N > 0$ фиксированное число.

Доказательство. Воспользовавшись работой [2], определим $\hat{f}_1(n)$ соотношениями

$$\sum_{d|n} \hat{f}_v(d) f_v \left(\frac{n}{d} \right) = f_1(n), (v = \overline{1, k}).$$

Очевидно, что $\hat{f}_v(n)$ – мультипликативные функции. Кроме того, $\hat{f}_1(n) = 0$, если $n > 1$. Легко проверяется, что совокупность функций $\hat{f}_v(n), (v = \overline{1, k})$ удовлетворяют условиям (2-6), с другими значениями параметров B_v, A_v, B, τ_v, a . Из определения $\hat{f}_1(n)$ следует, что $\hat{f}_1(n) = \varepsilon(n)$, тогда согласно формуле (1) следует, что

$$\sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v, (v=\overline{1, k})}} \frac{\chi(n) \varepsilon(n_1) \hat{f}_2(n_2) \dots \hat{f}_k(n_k)}{n_1 \dots n_k} = 1 + O\left(\frac{\ln^A\left(\frac{X}{Y_1} + 2\right)}{e^{a(\ln Y_1)^\alpha}}\right). \tag{8}$$

Имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v, (v=\overline{1, k})}} \frac{\chi(n) f_1(n)}{n} = \\ & = \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v, (v=\overline{1, k})}} \frac{\chi(n) f_1(n_1) \dots f_k(n_k)}{n_1 \dots n_k} \cdot \\ & \cdot \sum_{\substack{m_1 \dots m_k \leq \frac{X}{n_1 \dots n_k} \\ p|m_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v, (v=\overline{1, k})}} \frac{\chi(m) \varepsilon(m_1) \hat{f}_2(m_2) \dots \hat{f}_k(m_k)}{m \dots m_k}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (8) и, так как $\hat{f}_1(m_1) = \varepsilon(m_1)$, находим:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v}} \frac{\chi(n) f_1(n)}{n} &= \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v}} \frac{\chi(n) f_1(n_1) \dots f_k(n_k)}{n_1 \dots n_k} \cdot \\ & \cdot \left(1 + O\left(\frac{\ln^A\left(\frac{X}{nY_1} + 2\right)}{e^{a(\ln Y_1)^\alpha}}\right) \right) = \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v}} \frac{\chi(n) f_1(n_1) \dots f_k(n_k)}{n_1 \dots n_k} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +O\left(\sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v}} \frac{|\chi(n)| \cdot |f(n)|}{n} \cdot \frac{\ln^A\left(\frac{X}{nY_1} + 2\right)}{e^{a(\ln Y_1)^\alpha}}\right) = \\
 & = \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v}} \frac{\chi(n) f_1(n_1) \dots f_k(n_k)}{n_1 \dots n_k} + \\
 & +O\left(\frac{1}{e^{a(\ln Y_1)^\alpha}} \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v}} \frac{|f(n)|}{n} \cdot \ln^A\left(\frac{x}{n} + 2\right)\right) = \\
 & = \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v}} \frac{\chi(n) f_1(n_1) \dots f_k(n_k)}{n_1 \dots n_k} + \\
 & +O\left(\frac{\ln^A X}{e^{a(\ln Y_1)^\alpha}} \cdot \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v}} \frac{|f(n)|}{n}\right) = \\
 & = \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v}} \frac{\chi(n) f_1(n_1) \dots f_k(n_k)}{n_1 \dots n_k} + O\left(\frac{\ln^A X \cdot \ln^A X}{e^{a(\ln Y_1)^\alpha}}\right).
 \end{aligned}$$

Отсюда и воспользовавшись асимптотической формулой, найденной в работе [3], то есть

$$\begin{aligned}
 m_{f_1}(X, \chi) & = \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n \Rightarrow p \leq Y_1}} \frac{\chi(n) f_1(n)}{n} = c(\chi) + \\
 & +O\left(e^{-a(\ln Y_1)^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{(\ln Y_1)^{A_1}}{\ln X} + \frac{1}{\ln^N X}\right),
 \end{aligned}$$

находим:

$$\begin{aligned}
 m_f(X, \chi) & = \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_k \leq X \\ p|n_v \Rightarrow Y_{v-1} < p \leq Y_v, (v=1, k)}} \frac{\chi(n) f_1(n_1) \dots f_k(n_k)}{n_1 \dots n_k} = \\
 & = \sum_{\substack{n \leq X \\ p|n \Rightarrow p \leq Y_1}} \frac{\chi(n) f_1(n)}{n} + O\left(\frac{\ln^{2A} X}{e^{a(\ln Y_1)^\alpha}}\right) =
 \end{aligned}$$

$$= c(\chi) + O\left(e^{-a(\ln Y_1)^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{\ln^A Y_1}{\ln X} + \frac{1}{\ln^N X} + \frac{\ln^{2A} X}{e^{a(\ln Y_1)^{\alpha}}}\right),$$

где $c(\chi) = \sum_{\substack{n=1 \\ p|n \Rightarrow p \leq Y_1}}^{\infty} \frac{\chi(n) f_1(n)}{n}$, $A_1 > 0$, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, $a > 0$, $N > 0$ – натуральное число.

Поступило 03.03.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чариев У. Суммирование мультипликативных функций в арифметической прогрессии с большими простыми делителями. – Мат-лы Междунар. науч. конф. «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посв. 70-летию акад. К.Х.Бойматова. – Душанбе, 2020, с.284-287.
2. Левин Б.В., Файнлейб А.С. Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел. – УМН, 1967, т.22, вып.3(135), с.119–199.
3. Чариев У. Асимптотическая формула для сумм мультипликативных функций в арифметической прогрессии. – Вестник педагогического университета, 2021, № 1(10-11), с. 135-140.

У.Чариев

МАСЪАЛАИ УМУМИКАРДАШУДА БАРОИ СУММАИ ФУНКСИЯҲОИ МУЛТИПЛИКАТИВИ ДАР ПРОГРЕССИЯИ АРИФМЕТИКӢ

Донишгоҳи давлатии омӯзгорӣ Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Дар кори мазкур дар прогрессияи арифметикӣ ва формулаи асимптотикӣ барои суммаи функсияҳои мултипликативӣ бо ададҳои, ки тақсимкунандаи содаашон дар интервалҳои додашуда ҷойгир мешаванд, ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *суммаи функсияҳои мултипликативӣ, формулаи асимптотикӣ, характери Дирихле, функсияи умумикардашудаи Манголдт.*

U.Chariev

GENERALISED PROBLEM FOR AMOUNTS MULTIPLICATIVE FUNCTION IN ARITHMETICAL PROGRESSION

S.Ayni Tajik State Pedagogical University

Asymptotic formulation is put on in work for amounts multiplicative function in arithmetical progression, on number to simple divisors which lies in given interval.

Key words: *amount multiplicative function, asymptotic formulation, nature Dirichlet, generalised function Mangolidta.*

УДК 517.5

Академик НАН Таджикистана М.Ш.Шабозов, А.Мухлис

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА-СТЕЧКИНА И ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В L_2

Таджикский национальный университет

В работе получено точное значение экстремальной характеристики специального вида, которая связывает наилучшее полиномиальное приближение функций $f \in L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) с выражением, содержащим усреднённое значение модуля непрерывности m -го порядка производной r -го порядка $f^{(r)} \in L_2$. Вычислены точные значения n -поперечников некоторых классов функций в пространстве L_2 .

Ключевые слова: наилучшие приближения, экстремальная характеристика, модуль непрерывности, неравенства типа Джексона-Стечкина, n -поперечники.

1. Обозначим через $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ — пространство измеримых по Лебегу 2π -периодических функций, у которых норма

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0, 2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть \mathcal{T}_{2n-1} — множество всевозможных тригонометрических полиномов $T_{n-1}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ порядка $n-1$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

величина её наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством \mathcal{T}_{2n-1} равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &:= \inf \{ \|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $S_{n-1}(f, x)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f , а $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $a_k(f)$ и $b_k(f)$ косинус- и синус-коэффициенты функции f .

Адрес для корреспонденции: Шабозов Мирганд Шабозович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: shabozov@mail.ru

Модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$ определим равенством

$$\omega_m(f, t) := \sup \left\{ \|\Delta_h^m f(\cdot)\|_2 : |h| \leq t \right\},$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x + (m-k)h)$$

– разность m -го порядка функции f в точке x с шагом h . Под $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} = L_2$) будем понимать множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2 .

При решении ряда экстремальных задач в L_2 , связанных с отысканием точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \chi n^{-r} \omega_m \left(f^{(r)}, \frac{t}{n} \right)_2, \quad 0 < t \leq 2\pi,$$

где $f \in L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$), рассматривались различные экстремальные характеристики, приводящие к уточнению оценок сверху постоянных χ . Для компактного изложения полученных ранее результатов введем в рассмотрение следующее обозначение:

$$\chi_{n,m,r,p}(q, h) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 q(t) dt \right)^{1/p}}, \quad (2)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \in (0, \infty)$, $0 < h \leq \pi/n$, функция $q \geq 0$ – измеримая суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентна нулю (весовая функция). Величина (2) изучалась во многих работах (см., например [1-16] и приведенную там литературу). Наиболее общий результат получен в работе М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [12], где доказана следующая двусторонняя оценка для величины (2):

$$\left\{ \mathcal{A}_{n,p}^{r,m}(q, h) \right\}^{-1} \leq \chi_{n,m,r,p}(q, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{A}_{k,p}^{r,m}(q, h) \right\}^{-1},$$

где $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$ и

$$\mathcal{A}_{k,p}^{r,m}(q, h) := 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} q(t) dt \right)^{1/p}.$$

Условимся далее при вычислении верхней грани по всем функциям $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) в соотношениях общего характера писать $f \in L_2^{(r)}$, подразумевая, что $f \neq const$.

В некоторых работах с целью уточнения констант χ рассматривались другие экстремальные характеристики. Так, например, С.Б.Вакарчук [10] рассматривал следующую экстремальную характеристику

$$\mathcal{L}_{n,m,r}(h) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r+m)} h^{2m} E_{n-1}^2(f)}{\left\{ \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h) + n^2 \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau) d\tau \right\}^m}, \tag{3}$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h > 0$.

Величина (3), в отличие от экстремальной характеристики (2), содержит модуль непрерывности m -го порядка не только под знаком определённого интеграла, но и как слагаемое ещё и вне интеграла. Изучение величины (3) позволило обобщить асимптотически точные неравенства Л.В.Тайкова [2], полученные для модулей непрерывности первого порядка на случай модулей произвольного m -го порядка, а именно в [10] доказано, что для любых чисел $0 < h \leq \pi/n$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{(nt)^m} \leq \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\omega_m(f^{(r)}, t)_2} \leq \left(\frac{1}{(nt)^2} + \frac{1}{2} \right)^{m/2}. \tag{4}$$

2. В данном сообщении рассматривается экстремальная характеристика следующего вида

$$\mathcal{M}_{m,n,r}(h) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left\{ \int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 dt + n^2 \int_0^h \left(\int_0^t (t-\tau) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau)_2 dt \right) dt \right\}^{m/2}}. \tag{5}$$

Целью данного сообщения является нахождение точной оценки величины (5) и доказательство двустороннего неравенства типа (4) для константы Джексона-Стечкина на множестве функций $f \in L_2^{(r)}$.

Теорема 1. Пусть $0 < h \leq \pi/n$. Тогда для любых чисел $n, m \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\mathcal{M}_{n,m,r}(h) = \frac{1}{n^{r+m}} \cdot \frac{3^{m/2}}{h^{3m/2}}. \tag{6}$$

В этих же предположениях справедливы неравенства

$$\frac{1}{(nh)^m} \leq \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\omega_m(f^{(r)}, h)_2} \leq (\sqrt{3})^m \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{(nh)^2} \right)^{m/2}. \tag{7}$$

Доказательство. В работе [10] для любой функции $f \in L_2^{(r)}$ доказано неравенство

$$t^2 E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2}{n^{2+2r/m}} \cdot \left\{ \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 + n^2 \int_0^t (t-\tau) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \right\}.$$

Отсюда получим

$$t^2 E_{n-1}^{2/m}(f)_2 \leq \frac{1}{n^{2+2r/m}} \cdot \left\{ \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 + n^2 \int_0^t (t-\tau) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \right\}.$$

Интегрируя обе части полученного неравенства по переменному t от 0 до h и поделив на $h^3 / 3$, приходим к соотношению

$$E_{n-1}^{2/m}(f)_2 \leq \frac{1}{n^{2+2r/m}} \cdot \frac{3}{h^3} \left\{ \int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 dt + n^2 \int_0^h \left(\int_0^t (t-\tau) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \right) dt \right\}.$$

Отсюда, возведя обе части данного неравенства в степень $m/2$, имеем

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{n^{r+m}} \cdot \frac{3^{m/2}}{h^{3m/2}} \left\{ \int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 dt + n^2 \int_0^h \left(\int_0^t (t-\tau) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \right) dt \right\}^{m/2}. \tag{8}$$

Из неравенства (7) находим

$$\frac{E_{n-1}(f)_2}{\left\{ \int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 dt + n^2 \int_0^h \left(\int_0^t (t-\tau) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \right) dt \right\}^{m/2}} \leq \frac{3^{m/2}}{h^{3m/2}} \cdot \frac{1}{n^{r+m}},$$

откуда сразу следует оценка сверху величины (5):

$$\mathcal{M}_{m,n,r}(h) \leq \frac{3^{m/2}}{h^{3m/2}} \cdot \frac{1}{n^{r+m}}. \tag{9}$$

Для получения аналогичной оценки снизу введём в рассмотрение функцию $f_0(x) = \sin nx \in L_2^{(r)}$, для которой в силу формулы (2) и явного вида модуля непрерывности m -го порядка [10, 11]

$$\omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 = 2^m \sup_{|\tau| \leq t} \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) (1 - \cos k\tau)^m,$$

получаем

$$E_{n-1}(f_0)_2 = 1, \quad \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t)_2 = 2n^{2r/m}(1 - \cos nt), \quad 0 < t \leq \pi/n. \tag{10}$$

Пользуясь вторым из равенств (10), после некоторых простых вычислений находим

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^h \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t)_2 dt + n^2 \int_0^h \left(\int_0^t (t-\tau) \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, \tau) d\tau \right) dt \right\}^{m/2} = \\ & = \left\{ 2n^{2r/m} \int_0^h (1 - \cos nt) dt + 2n^{2+2r/m} \int_0^h \left(\int_0^t (t-\tau)(1 - \cos n\tau) d\tau \right) dt \right\}^{m/2} = \\ & = \left\{ 2n^{2r/m} \left(h - \frac{\sin nh}{n} \right) + 2n^{2+2r/m} \left[\frac{h^3}{6} - \frac{1}{n^2} \left(h - \frac{\sin nh}{n} \right) \right] \right\}^{m/2} = \\ & = \left(\frac{n^{2+r/m} \cdot h^3}{3} \right)^{m/2} = \frac{n^{r+m} \cdot h^{3m/2}}{3^{m/2}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Учитывая равенство (11), запишем оценку снизу указанной величины

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{n,m,r}(h) \geq \\ & \geq \frac{E_{n-1}(f_0)_2}{\left\{ \int_0^h \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t)_2 dt + n^2 \int_0^h \left(\int_0^t (t-\tau) \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, \tau) d\tau \right) dt \right\}^{m/2}} = \\ & = \frac{3^{m/2}}{n^{r+m} \cdot h^{3m/2}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Сопоставляя оценки сверху (9) и снизу (12), получим требуемое равенство (6). Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, в силу монотонного возрастания модуля непрерывности $\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)$ на отрезке $[0, h]$, из неравенства (8) получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 & \leq \frac{1}{n^{r+m}} \cdot \frac{3^{m/2}}{h^{3m/2}} \cdot \omega_m(f^{(r)}, h)_2 \cdot \left(h + n^2 \frac{h^3}{6} \right)^{m/2} = \\ & = \frac{1}{n^{r+m}} \cdot \frac{3^{m/2}}{h^m} \cdot \omega_m(f^{(r)}, h)_2 \cdot \left(1 + \frac{(nh)^2}{6} \right)^{m/2} = \\ & = \frac{3^{m/2}}{n^r} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{(nh)^2} \right)^{m/2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\omega_m(f^{(r)}, h)_2} \leq (\sqrt{3})^m \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{(nh)^2} \right)^{m/2} \quad (13)$$

и оценка сверху в двойном неравенстве (7) получена. Для рассмотренной нами функции $f_0(x) = \sin nx \in L_{(r)}$ при $0 < nh \leq \pi$ в силу (10) имеем

$$\omega_m(f_0^{(r)}, h) = 2^m n^r \left(\sin \frac{nh}{2} \right)^m \leq n^r (nh)^m,$$

а потому запишем оценку снизу

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\omega_m(f^{(r)}, h)_2} \geq \frac{n^r E_{n-1}(f_0)_2}{\omega_m(f_0^{(r)}, h)_2} \geq \frac{1}{(nh)^m}. \quad (14)$$

Двойное неравенство (7) получаем из сопоставления неравенств (13) и (14), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 для константы Джексона-Стечкина справедливо неравенство

$$\frac{1}{\pi^m} \leq \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\omega_m(f^{(r)}, \pi/n)_2} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right)^{m/2}. \quad (15)$$

Доказательство. Полагая в неравенстве (8) $h = \pi/n$, получаем двустороннюю оценку константы Джексона-Стечкина

$$\frac{1}{\pi^m} \leq \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\omega_m(f^{(r)}, \pi/n)_2} \leq (\sqrt{3})^m \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2} \right)^{m/2}.$$

Но так как

$$(\sqrt{3})^m \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2} \right)^{m/2} \leq (\sqrt{3})^m \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3\pi} \right)^{m/2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right)^{m/2},$$

то неравенство (15) имеет место.

3. Прежде чем сформулировать другие результаты, напомним необходимые понятия и определения. Пусть S – единичный шар в L_2 ; \mathfrak{N} – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 ; $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n ; $\mathcal{L}: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_n ; $\Lambda^\perp: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования в L_2 на подпространство Λ_n . Величины

$$b_n(\mathfrak{N}; L_2) = \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{N} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \right\},$$

$$d_n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \|f - \varphi\| : \varphi \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{N} \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\| : f \in \mathfrak{N} \} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$d^n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf \left\{ \sup \{ \|f\| : f \in \mathfrak{N} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{N}; L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\| : f \in \mathfrak{N} \} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным n -поперечниками*. Поскольку L_2 является гильбертовым пространством, справедливы следующие соотношения между вышеперечисленными n -поперечниками ([17], [18]):

$$b_n(\mathfrak{N}; L_2) \leq d^n(\mathfrak{N}; L_2) \leq d_n(\mathfrak{N}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{N}; L_2) = \Pi(\mathfrak{N}; L_2). \tag{16}$$

Введём класс функций, для которого вычислим значения n -поперечников в L_2 . Символом $W_m^{(r)}(h)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h > 0$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{h} \int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 dt + \frac{\pi^2}{h^3} \int_0^h \left(\int_0^t (t-\tau) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \right) dt \leq 1.$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 2. При любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < h \leq \pi/n$ справедливы равенства

$$\gamma_{2n}(W_m^{(r)}(h)) = \gamma_{2n-1}(W_m^{(r)}(h)) = E_{n-1}(W_m^{(r)}(h)) = \frac{(\sqrt{3})^m}{(nh)^m} \cdot \frac{1}{n^r}, \tag{17}$$

где

$$E_{n-1}(W_m^{(r)}(h))_2 := \sup \{ E_{n-1}(f)_2 : f \in W_m^{(r)}(h) \},$$

$\gamma_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n -поперечников.

Доказательство. Для $h \in (0, \pi/n]$ неравенство (8) запишем в виде

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{nt} \right)^m \cdot \frac{1}{n^r} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 dt + \frac{n^2}{h} \int_0^h \left(\int_0^t (t-h) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \right) dt \right\}^{m/2}.$$

Отсюда, для произвольной функции $f \in W_m^{(r)}(h)$ запишем

$$E_{n-1}(f) \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m \cdot \frac{1}{n^r}. \tag{18}$$

Используя соотношения между n -поперечниками (16) и неравенство (18), получим оценки сверху для всех n -поперечников

$$\begin{aligned} \gamma_{2n}(W_m^{(r)}(h), L_2) &\leq \gamma_{2n-1}(W_m^{(r)}(h), L_2) \leq \\ &\leq d_{2n-1}(W_m^{(r)}(h), L_2) \leq E_{n-1}(W_m^{(r)}(h))_2 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m \cdot \frac{1}{n^r}. \end{aligned} \tag{19}$$

Для получения оценок снизу перечисленных выше n -поперечников рассмотрим в множестве $\mathcal{T}_{2n+1} \cap L_2$ шар

$$S_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \cdot \frac{1}{n^r} \right\},$$

и покажем, что $S_{2n+1} \subset W_m^{(r)}(h)$. Для этого нам понадобится неравенство, доказанное Л.В.Тайковым в работе [3]

$$\omega_m^2(T_n^{(r)}, h)_2 \leq 2^m n^{2r} (1 - \cos nh)_*^m \cdot \|T_n\|^2, \quad h > 0, \tag{20}$$

где

$$(1 - \cos u)_* := \left\{ 1 - \cos u, \text{ если } 0 \leq u \leq \pi; 2, \text{ если } u \geq \pi \right\},$$

а T_n — произвольный полином из множества \mathcal{T}_{2n+1} . Пусть $0 < t \leq \pi/n$. Используя определение класса $W_m^{(r)}(h)$ и неравенство (20), для произвольного полинома $T_n \in S_{2n+1}$ получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \int_0^h \omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, t) dt + \frac{n^2}{h} \int_0^h \left(\int_0^t (t - \tau) \omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, \tau) d\tau \right) dt \leq \\ &\leq 2n^{2r/m} \|T_n\|^{2/m} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h (1 - \cos nt) dt + \frac{n^2}{h} \int_0^h \left(\int_0^t (t - \tau) (1 - \cos n\tau) d\tau \right) dt \right\} = \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^2 \cdot \left\{ \left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right) + \frac{n^2}{h} \left[\frac{h^3}{6} - \frac{1}{n^2} \left(h - \frac{\sin nh}{n}\right) \right] \right\} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^2 \cdot \left(\frac{nh}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1, \end{aligned}$$

откуда и следует включение $S_{n+1} \in W_m^{(r)}(h)$. Используя соотношение (16) и определение бернштейновского n -поперечника, будем иметь

$$\gamma_{2n}(W_m^{(r)}(h), L_2) \geq b_{2n}(W_m^{(r)}(h), L_2) \geq b_{2n}(S_{n+1}, L_2) \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \cdot \frac{1}{n^r}. \tag{21}$$

Равенство (17) получаем из сравнении неравенств (19) и (21). Теорема 2 доказана.

В теории аппроксимации периодических дифференцируемых функций возникает задача нахождения точного значения верхней грани модулей коэффициентов Фурье на заданных классах функций (см., например, [10], [13], [15] и приведенную там литературу). Приводим решение сформулированной задачи для класса $W_m^{(r)}(h)$.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы 2, то имеет место равенство*

$$\sup\{|a_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(h)\} = \sup\{|b_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(h)\} = \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \cdot \frac{1}{n^r}. \tag{22}$$

Доказательство. Так как коэффициент $b_n(f)$ представим в виде

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n\left(t + \frac{\pi}{2n}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(t - \frac{\pi}{2n}\right) \cos ntdt, \end{aligned}$$

и сдвиг по аргументу периодической функции не выводит функцию f из класса $W_m^{(r)}(h)$, то очевидно

$$\sup\{|a_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(h)\} = \sup\{|b_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(h)\}, \tag{23}$$

а потому достаточно равенство (22) доказать для коэффициент $a_n(f)$. Представим $a_n(f)$ в виде

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(t) - S_{n-1}(f, t)) \cos ntdt, \tag{24}$$

где $S_{n-1}(f)$ – частная сумма $(n-1)$ -го порядка функции $f \in W_m^{(r)}(h)$. Применяя неравенство Коши-Буняковского, с учетом равенства (1) из (24) будем иметь

$$|a_n(f)| \leq \|f - S_{n-1}(f)\| \cdot \|\cos n\cdot\| = \|f - S_{n-1}(f)\|.$$

Переходя в обеих частях полученного неравенства к верхним граням по всем функциям рассматриваемого класса и учитывая соотношение (19), получаем

$$\sup \{ |a_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(h) \} \leq E_{n-1} (W_m^{(r)}(h))_2 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{nh} \right)^m \cdot \frac{1}{n^r}. \quad (25)$$

Для получения оценки снизу воспользуемся функцией

$$f_1(x) := \left(\frac{\sqrt{3}}{nh} \right)^m \cdot \frac{1}{n^r} \cos nx.$$

Из доказательства теоремы 2 следует, что функция f_1 принадлежит шару S_{2n+1} , а потому является элементом класса $W_m^{(r)}(h)$. Но тогда имеем

$$\sup \{ |a_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(h) \} \geq |a_n(f_1)| = \left(\frac{\sqrt{3}}{nh} \right)^m \cdot \frac{1}{n^r}. \quad (26)$$

Сравнивая оценки сверху (25) и снизу (26), получаем

$$\sup \{ |a_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(h) \} = \left(\frac{\sqrt{3}}{nh} \right)^m \cdot \frac{1}{n^r},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Поступило

ЛИТЕРАТУРА

1. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 . – Матем. заметки, 1967, т.2, №5, с.513–522.
2. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшее приближения и модуль непрерывности функций из L_2 . – Матем. заметки, 1976, т.20, №3, с.433–438.
3. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 . – Матем. заметки, 1979, т.25, №2, с.217–223.
4. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 . – Матем. заметки, 1978, т.24, №6, с.785–792.
5. Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 . Применение функционального анализа в теории приближений. – Калининский гос. ун-т, Калинин, 1988, с.100–114.
6. Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков. – Укр. матем. журнал, 1991, т.43, №1, с.125–129.
7. Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона. – Матем. заметки, 1999, т.65, №6, с.816–820.

8. Васильев С.Н. Точные неравенства Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами. – Докл. РАН, 2002, т.54, №1, с.106–124.
9. Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций. – Укр. матем. журнал, 2004, т.56, №11, с.1458–1466.
10. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 . – Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11–19.
11. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$. – Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616–623.
12. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников. – Матем. заметки, 2011, т.90, №5, с.764–775.
13. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 . – Analysis Mathematics, 2012, v.38, №2, pp.154–163.
14. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 – Journal of Approx. Theory, 2012, v.164, Issue 1, pp.869–878.
15. Shabozov M.Sh., Palavonov K.K. Exact values of widths of certain classes of periodic differentiable functions in the space $L_2[0,2\pi]$ – Analysis Mathematics, 2015, v.41, №1, pp.103–115.
16. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A., Temurbekova S.D. n -widths of certain function classes defined by the modulus of continuity. – Journal of Approx. Theory, 2017, v.215, pp.145–162.
17. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – МГУ, М., 1976.
18. Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory, Springer, Berlin, 1985, 292 p.

М.Ш.Шабозов, А.Мухлис

НОБАРОБАРИИ НАМУДИ ЧЕКСОН-СТЕЧКИН ВА ҚУТРҲОИ БАЪЗЕ СИНФИ ФУНКСИЯҲО ДАР L_2

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола қимати аниқи як шакли хоси характеристикаи экстремалӣ дошта, ки наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) бо ифодае, ки дорои миёнаи модули бефосилагии тартиби m -и ҳосилаи тартиби r -уми функсияи $f^{(r)} \in L_2^{(r)}$ -ро алоқаманд менамояд, ба даст оварда шудааст. Қимати аниқи n -қутрҳои баъзе синфи функсияҳо дар фазои L_2 ҳисоб карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин, характеристикаи экстремалӣ, модули бефосилагӣ, нобаробарии намуди Чексон-Стечкин, n -қутр.

M.Sh.Shabozov, A.Mukhlis

**JACKSON-STECHKIN INEQUALITIES AND THE WIDTHS OF SOME CLASSES
OF FUNCTION IN L_2**

Tajik National University

In this work the exact value of an extremal characteristic of a special form, which connects the best polynomial approximation of functions $f \in L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) with an expression containing the averaged value of the modulus of continuity of the m -th order of the derivative of the r -th order $f^{(r)} \in L_2$ is obtained. The exact values of the m -widths of some class of functions in the space L_2 are calculated.

Key words: *best approximation, extremal characteristic, Jackson-Stechkin type inequality, n -widths.*

УДК 517.5

А. Захурбеков

ВЕРХНИЕ ГРАНИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ “КРУГОВЫМИ” СУММАМИ ФУРЬЕ В $L_2(Q)$

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 31.03.2021 г.)

В статье найдены точные верхние грани наилучших приближений некоторых классов двух переменных “круговыми” суммами Фурье, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности в гильбертовом пространстве L_2 . Также найдены точные константы в неравенстве типа Джексона-Стечкина между наилучшими приближениями и обобщенным модулем непрерывности в L_2 .

Ключевые слова: *комплексный ряд Фурье, обобщенный модуль непрерывности, оператор Лапласа, “круговые” суммы.*

1. Введение. При изучении прикладных задач математической физики важную роль играют вопросы нахождения точных значений верхних граней наилучших приближений некоторых классов функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье по различным ортогональным системам. Эти вопросы для функции одного переменного достаточно хорошо изучены (см., например, [1] и приведенную там литературу). Аналогичные вопросы для функции двух переменных менее изучены.

В данной работе изучается вопрос нахождения точной оценки верхней грани наилучших приближений периодических классов функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$. Напомним, что $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ двух переменных, 2π -периодических по каждой переменной с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

Пусть функция $f \in L_2$ имеет формальное разложение в двумерный комплексный ряд Фурье

$$f(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} c_{kl}(f) e^{i(kx+ly)}, \quad (1)$$

где коэффициенты $c_{kl}(f)$ определены равенством

Адрес для корреспонденции: Захурбеков Алишер. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: zahurbekov_a94@mail.ru

$$c_{kl}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, что

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_{k,l}(f)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \rho_{k,l}^2(f),$$

где

$$\rho_{k,l}^2(f) = |c_{k,l}(f)|^2 + |c_{-k,l}(f)|^2 + |c_{k,-l}(f)|^2 + |c_{-k,-l}(f)|^2. \tag{2}$$

Для произвольной $R \in \mathbb{N}$ через

$$S_R(f; x, y) = \sum_{0 \leq k^2 + l^2 < R^2} c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)} \tag{3}$$

обозначим “круговые” частичные суммы функции $f \in L_2$. Если через $\mathcal{P}_R, R \in \mathbb{N}$ обозначить множество комплекснозначных полиномов вида

$$p_R(x, y) = \sum_{0 \leq k^2 + l^2 < R^2} a_{k,l} e^{i(kx+ly)},$$

то хорошо известно [2, 3], что наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in L_2$ элементами $p_R \in \mathcal{P}_R$ реализует “круговая” частичная сумма (3). При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_R(f) &:= \inf \{ \|f - p_R\| : p_R \in \mathcal{P}_R \} = \\ &= \|f - S_R(f)\| = \left\{ \sum_{k^2 + l^2 \geq R^2} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $\mathcal{D} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа второго порядка. Определим

$\mathcal{D}^r := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}), r \in \mathbb{N}, \mathcal{D}^0 := E$. Через $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых существуют частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dots$$

и для которых $\mathcal{D}^r f \in L_2$, то есть $\|\mathcal{D}^r f\| < \infty$. Применив оператор $\mathcal{D}^r, r \in \mathbb{N}$ к ряду (1) в силу линейности этого оператора, находим

$$\mathcal{D}^r f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{kl}(f) (ik + il)^r e^{i(kx+ly)},$$

а отсюда в силу равенства Парсеваля и соотношения (2) запишем

$$\| \mathcal{D}^r f \|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_{kl}(f)|^2 (k^2 + l^2)^{2r} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f). \tag{5}$$

Из формул (4) и (5) следует, что

$$\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^r f) = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{6}$$

Заметим, что при любом $s = 0, 1, \dots, r; r \in \mathbb{Z}_+$ из (6) следует формула

$$\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f) = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} (k^2 + l^2)^{2s} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{7}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s, R \in \mathbb{R}_+$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^r f)} = \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \tag{8}$$

Доказательство. Пользуясь равенством (7) и учитывая формулу (6), для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_R^2(\mathcal{D}^s f) &= \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} (k^2 + l^2)^{2s} \rho_{k,l}^2(f) = \\ &= \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} (k^2 + l^2)^{-2(r-s)} \cdot (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) \leq \\ &\leq R^{-4(r-s)} \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) = R^{-4(r-s)} \mathcal{E}_R^2(\mathcal{D}^r f). \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (8):

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^r f)} \leq \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \tag{9}$$

Для получения аналогичной оценки снизу введем в рассмотрение комплекснозначную функцию $f_0(x, y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r)}$, для которой $m^2 + n^2 = R^2$, и при любой $s = 0, 1, \dots, r, r \in \mathbb{N}$ в силу равенства (7) имеем

$$\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f_0) = R^{2s}. \tag{10}$$

Пользуясь равенством (10), запишем оценку снизу указанной величины

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(D)} \frac{\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^r f)} \geq \frac{\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f_0)}{\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^r f_0)} = \frac{R^{2s}}{R^{2r}} = \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \quad (11)$$

Из сопоставления оценки сверху (9) и оценки снизу (11) получаем требуемое равенство (8), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Теорема 2. Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любых $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ справедливо неравенство типа Колмогорова

$$\mathcal{E}_R^2(\mathcal{D}^s f) \leq (\mathcal{E}_R^2(f))^{1-s/r} \cdot (\mathcal{E}_R^2(\mathcal{D}^r f))^{s/r}. \quad (12)$$

Неравенство точно в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Доказательство. В самом деле, применяя неравенство Гельдера для рядов, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_R^2(\mathcal{D}^s f) &= \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} (k^2+l^2)^{2s} \rho_{k,l}^2(f) = \\ &= \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} (\rho_{k,l}^2(f))^{1-s/r} \cdot \{\rho_{k,l}^2(f)(k^2+l^2)^{2r}\}^{s/r} \leq \\ &\leq \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1-s/r} \cdot \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} \rho_{k,l}^2(f)(k^2+l^2)^r \right\}^{s/r} = \\ &= (\mathcal{E}_R^2(f))^{1-s/r} \cdot (\mathcal{E}_R^2(\mathcal{D}^r f))^{s/r}, \end{aligned}$$

откуда и вытекает неравенство (12).

Докажем, что неравенство (12) неулучшаемо. Для этого рассмотрим функцию $f_0(x, y) = e^{i(mx+ny)}$, введенную нами в конце теоремы 1 и для которой при всех $s = 0, 1, 2, \dots, r$ верно равенство (10). Имеем:

$$\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f_0) = R^{2s} = (1^2)^{(1-s/r)} \cdot (R^{2r})^{s/r} = (\mathcal{E}_R(f_0))^{1-s/r} \cdot (\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^r f_0))^{s/r},$$

откуда и следует точность неравенства (12).

Пусть теперь $W^{(r)}L_2$ – класс функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых $\|\mathcal{D}^r f\| \leq 1$.

Теорема 3. При всех $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in W^{(r)}L_2} \frac{\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{(\mathcal{E}_R(f))^{1-s/r}} = 1. \quad (13)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in W^{(r)}L_2$, имеем $\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^r f) \leq \|\mathcal{D}^r f\| \leq 1$, а потому из (12) следует, что

$$\mathcal{E}_R^2(\mathcal{D}^s f) \leq (\mathcal{E}_R^2(f))^{1-s/r} \cdot (\mathcal{E}_R^2(\mathcal{D}^r f))^{s/r} \leq (\mathcal{E}_R^2(f))^{1-s/r},$$

откуда получаем

$$\sup_{f \in W^{(r)}L_2} \frac{\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{(\mathcal{E}_R(f))^{1-s/r}} \leq 1. \tag{14}$$

Чтобы получить аналогичную оценку снизу, введем в рассмотрение функцию $g_0(x, y) = R^{-2r} e^{i(mx+ny)}$, для которой при всех $s = 0, 1, \dots, r$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^s g_0(x, y) &= R^{-2r} (im + in)^{2s} e^{i(mx+ny)}, \\ \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s g_0) &= R^{-2(r-s)}, \quad \mathcal{E}_R(g_0) = R^{-2r}. \end{aligned} \tag{15}$$

Используя равенства (15), запишем

$$\sup_{f \in W^{(r)}L_2} \frac{\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{(\mathcal{E}_R(f))^{1-s/r}} \geq \frac{\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s g_0)}{(\mathcal{E}_R(g_0))^{1-s/r}} = \frac{R^{-2(r-s)}}{R^{-2(r-s)}} = 1. \tag{16}$$

Из неравенств (14) и (16) следует требуемое равенство (13). Теорема 3 доказана. Имеет место также следующее утверждение

Теорема 4. Пусть $r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_R^{(s)}(W^{(r)}L_2) = \sup \{ \mathcal{E}_R(f^{(s)}) : f \in W^{(r)}L_2 \} = \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \tag{17}$$

Доказательство. Из равенства (8) для произвольной функции $f \in W^{(r)}L_2$ получаем

$$\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f) \leq R^{-2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^r f) \leq R^{-2(r-s)}. \tag{18}$$

Для функции $g_0(x, y) = R^{-2r} e^{i(mx+ny)} \in W^{(r)}L_2$, для которой $\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s g_0) = R^{-2(r-s)}$, получаем оценку снизу

$$\mathcal{E}_R(W^{(r)}L_2) \geq \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s g_0) = R^{-2(r-s)}, \tag{19}$$

сравнивая которую с оценкой сверху (18), получаем требуемое равенство (17), чем и завершаем доказательство теоремы 4.

2. В этом пункте приведем некоторые результаты, связанные с оптимизацией неравенства типа Джексона-Стечкина между величиной наилучшего “сферического” приближения функций $f \in L_2$ и усредненными значениями обобщенного модуля непрерывности, пораженного конкретным оператором обобщенного сдвига. Следуя работе [3], вводим в рассмотрение функцию

$$T(x, u; y, v; h) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-u)} e^{il(y-v)} h^{k^2+l^2}, \tag{20}$$

где $h \in (0,1)$ и сходимость двойного ряда справа понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2(Q \times Q)$. Пользуясь функцией (20), определим оператор $\mathcal{F}_h : L_2 \rightarrow L_2$ по следующей формуле

$$\mathcal{F}_h(f) := \mathcal{F}_h f(x, y) = \iint_{(Q)} f(u, v) T(x, u; y, v; 1-h) dudv, \tag{21}$$

которую назовем оператором обобщенного сдвига. Оператор (21) обладает следующими свойствами:

1. $\mathcal{F}_h(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}_h(f) + \mu \mathcal{F}_h(g)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in L_2$;
2. $\|\mathcal{F}_h(f)\| \leq \|f\|$; 3. $\|\mathcal{F}_h(f) - f\| \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0+$,
4. $\mathcal{F}_h(e^{i(mx+ny)}) = (1-h)^{n^2+m^2} \cdot e^{i(mx+ny)}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Определим теперь разности первого и высших порядков, как и в классическом случае, следующим образом:

$$\Delta_h f = \mathcal{F}_h f - f = (\mathcal{F}_h - E)f,$$

$$\Delta_h^v f := \Delta_h(\Delta_h^{v-1} f) = (\mathcal{F}_h - E)^v f = \sum_{j=0}^v (-1)^{v-j} \binom{v}{j} \mathcal{F}_h^j(f),$$

где

$$\mathcal{F}_h^0 f = Ef = f, \quad \mathcal{F}_h^j f := \mathcal{F}_h(\mathcal{F}_h^{j-1} f), \quad j = \overline{1, v}; \quad v \in \mathbb{N};$$

E – единичный оператор в пространстве L_2 . Равенством

$$\Omega_v(f, t) := \sup \{ \|\Delta_h^v f\| : 0 < h \leq t \}, \quad t \in (0,1)$$

определим обобщенный модуль непрерывности функции $f \in L_2$.

Очевидно, что оператор (21) в силу свойств 4 представим в виде

$$\mathcal{F}_h f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{kl}(f) (1-h)^{k^2+l^2} e^{i(kx+ly)}.$$

Пользуясь полученным представлением и равенством (1), запишем

$$\Delta_h f = (\mathcal{F}_h - E)f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left((1-h)^{k^2+l^2} - 1 \right) c_{kl}(f) e^{i(kx+ly)}.$$

Применяя метод математической индукции, с учетом последнего равенства для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$\Delta_h^m f = (\mathcal{F}_h - E)^m f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left((1-h)^{k^2+l^2} - 1 \right)^m c_{kl}(f) e^{i(kx+ly)}.$$

Применяя равенство Парсеваля, отсюда имеем

$$\|\Delta_h^v f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(1 - (1-h)^{k^2+l^2} \right)^{2v} c_{kl}^2(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(1 - (1-h)^{k^2+l^2} \right)^2 \rho_{kl}^2(f).$$

Пользуясь этим равенством, найдем явный вид обобщенного модуля в L_2 :

$$\Omega_v^2(f, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(1 - (1-t)^{k^2+l^2}\right)^v \rho_{kl}^2(f). \tag{22}$$

Теперь заметим, что, как следует из равенств (7) и (4), коэффициенты $\rho_{kl}(\mathcal{D}^r f)$ и $\rho_{kl}(f)$ связаны равенством

$$\rho_{kl}^2(\mathcal{D}^r f) = (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{kl}^2(f).$$

Учитывая это равенство для модуля непрерывности (22), запишем

$$\Omega_v(\mathcal{D}^r f, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(1 - (1-t)^{k^2+l^2}\right)^v (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{kl}^2(f). \tag{23}$$

Теорема 5. При любых $v, R \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0,1)$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f)}{\Omega_v(\mathcal{D}^r f; h)} = \frac{1}{\left(1 - (1-h)^{R^2}\right)^v}. \tag{24}$$

Доказательство. В [3] доказано, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, для которых $m^2 + n^2 \geq R^2$, $R \in \mathbb{N}$ и $h \in (0,1)$, имеет место неравенство

$$\mathcal{E}_R(f) \leq R^{-2r} \left(1 - (1-h)^{R^2}\right)^{-v} \Omega_v(\mathcal{D}^r f; h). \tag{25}$$

Отсюда следует оценка сверху экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (24):

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f)}{\Omega_v(\mathcal{D}^r f, h)} \leq \frac{1}{\left(1 - (1-h)^{R^2}\right)^v}. \tag{26}$$

Для функции $f_0(x) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r)}$, $m^2 + n^2 = R^2$, введенной нами в конце теоремы 1, $\mathcal{E}_R(f_0) = 1$ и в силу (23) имеем

$$\Omega_v(\mathcal{D}^r f_0, h) = (m^2 + n^2)^r \left(1 - (1-h)^{R^2}\right)^v = R^{2r} \left(1 - (1-h)^{R^2}\right)^v. \tag{27}$$

Отсюда

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f)}{\Omega_v(\mathcal{D}^r f, h)} \geq \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f_0)}{\Omega_v(\mathcal{D}^r f_0, h)} = \frac{1}{\left(1 - (1-h)^{R^2}\right)^v}. \tag{28}$$

Сопоставляя неравенства (26) и (28), получаем (24). Теорема 5 доказана.

Следствие 1. Полагая в условиях теоремы 5, $h = 1/R^2, R \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{R \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f, 1/R^2)} = \sup_{R \in \mathbb{N}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^{R^2} \right)^\nu = (1 - e^{-1})^\nu.$$

Всюду далее под весовой функцией $\mu(x)$ на отрезке $[a, b]$ понимаем неотрицательную суммируемую не эквивалентную нулю на этом же отрезке функцию.

Теорема 6. Пусть $R, \nu \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq q \leq \infty, h \in (0, 1), \mu(x)$ — весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(Q)} \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f)}{\left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} = \left(\int_0^h \left[1 - (1-t)^{R^2} \right]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}. \tag{29}$$

Доказательство. Из неравенства (25), верного для любых $n, m \in \mathbb{N}$, для которых $n^2 + m^2 \geq R^2, R, \nu \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, t \in (0, 1)$ и любой функции $f \in L_2^{(r)}(Q)$, получаем

$$\left(1 - (1-t)^{R^2} \right)^\nu \cdot R^{2r} \mathcal{E}_R(f) \leq \Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; t).$$

Возведем обе части полученного неравенства в степень q ($1 \leq q \leq \infty$), умножив на весовую функцию μ и интегрируя по отрезку $[0, h]$, где $h \in (0, 1)$ и возведя таким образом полученное неравенство в степень q ($1 \leq q \leq \infty$), получаем соотношение

$$\begin{aligned} R^{2r} \mathcal{E}_R(f) \cdot \left(\int_0^h \left[1 - (1-t)^{R^2} \right]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{1/q} &\leq \\ &\leq \left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}. \end{aligned} \tag{30}$$

Из неравенства (30) сразу получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (29)

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(Q)} \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f)}{\left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} \leq \left(\int_0^h \left[1 - (1-t)^{R^2} \right]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}. \tag{31}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу, используем ранее рассмотренную нами функцию $f_0(x) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r)}, m^2 + n^2 = R^2, m, n, R \in \mathbb{N}$, для которой $\mathcal{E}_R(f_0) = 1$ и справедливо равенство (27), пользуясь которыми запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{Q})} \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f)}{\left(\int_0^h \Omega_v^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} &\geq \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f_0)}{\left(\int_0^h \Omega_v^q(\mathcal{D}^r f_0; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} = \\ &= \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^{vq} \mu(t) dt \right)^{-1/q}. \end{aligned} \tag{32}$$

Сравнивая оценку сверху (31) с оценкой снизу (32), получаем требуемое равенство (29) и тем самым теорема 6 доказана.

Следствие 2. В условиях теоремы 6 при $\mu(t) := R^2(1-t)^{R^2-1}$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{Q})} \frac{R^{2(r-1/q)} \mathcal{E}_R(f)}{\left(\int_0^h \Omega_v^q(\mathcal{D}^r f; t) (1-t)^{R^2-1} dt \right)^{1/q}} = \left\{ \frac{vq+1}{[1 - (1-h)^{R^2}]^{vq+1}} \right\}^{1/q}.$$

В частности, полагая здесь $h = 1/R^2$ и переходя к верхней грани по всем $R \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{R \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{Q})} \frac{R^{2(r-1/q)} \mathcal{E}_R(f)}{\left(\int_0^{1/R^2} \Omega_v^q(\mathcal{D}^r f; t) (1-t)^{R^2-1} dt \right)^{1/q}} = \frac{(vq+1)^{1/q}}{(1-e^{-1})^{v+1/q}};$$

Поступило 01.04.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Керимов М.К., Селимханов Э.В. О точных оценках скорости сходимости рядов Фурье для функций одной переменной в пространстве L_2 . – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2016, т.56, №5, с.730-741.
2. Абилов В.А., Абилов М.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, т.55, №7, с.1109-1117.
3. Абилова Ф.В., Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье двух переменных и их приложения. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2018, т.58, №10, с.1596-1603.
4. Shabozov M.Sh., Dzhurakhonov O.A. Upper bounds for approximation of some classes of bivariate functions by triangular Fourier–Hermite sums in the space. – Analysis Mathematica, 2019, v.45, №4, pp.823-840.

А.Захурбеков

САРҲАДИ БОЛОИИ НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ
ФУНКСИЯҲОИ ДАВРИИ ДУ ТАҒЙИРЁБАНДА БА ВОСИТАИ СУММАИ
“ДОИРАВИИ” ФУРЙЕ ДАР $L_2(Q)$

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола сарҳади саҳеҳи болоии наздиккунии беҳтарини баъзе синфҳои функсияҳои даврии дутағйирёбанда тавассути суммаҳои “доиравии” Фурье дар фазои гилбертии L_2 , ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардасуда тавсиф шудаанд, ёфта шудааст. Инчунин, доимии аниқ дар нобаробарии Чексон-Стечкин байни бузургии наздиккунии беҳтарин ва модули бефосилагии умумикардасуда ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: қатори комплексии Фурье, модули бефосилагии умумишуда, оператори Лаплас, суммаи “доиравӣ”.

A.Zahurbekov

UPPER BOUNDS OF BEST APPROXIMATION OF SOME CLASSES
OF PERIODIC FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY “CIRCULAR” FOURIER
SUMS IN $L_2(Q)$

Tajik National University

In the article the exact upper bounds of the best approximation some classes of two variables by “circular” Fourier sums characterized by a generalized modulus of continuity in the Hilbert space L_2 are found. Sharp constants in the Jackson-Stechkin type inequality between the best approximations and the generalized modulus of continuity in L_2 are also found.

Key words: complex Fourier series, generalized modulus of continuity, Laplace operator, “circular” sums.

УДК 517.5

О.А.Джурахонов

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ "ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ" ЧАСТНЫХ СУММ ДВОЙНОГО РЯДА ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ ФУРЬЕ-ЭРМИТА

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 24.06.2021 г.)

В работе вычислены точные верхние грани приближения функций двух переменных "гиперболическими" частичными суммами двойного ряда Фурье по ортогональным многочленам Фурье-Эрмита на классах функций $L_2^{(\rho)}(D)$.

Ключевые слова: наилучшие приближения, "гиперболические" суммы, модуль непрерывности, неравенство, ортогональные многочлены.

Введем необходимые понятия и определения, нужные нам в дальнейшем. Пусть \mathbb{R}_+ – множество положительных, \mathbb{Z}_+ – множество целых неотрицательных, \mathbb{N} – множество натуральных чисел. Обозначим через $L_{2,\rho} := L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, где $\rho(x, y) := \exp\{-(x^2 + y^2)\}$, множество вещественных суммируемых с квадратом функций двух переменных в плоскости $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) := -\infty \leq x, y \leq +\infty\}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\rho} := \|f\|_{L_{2,\rho}} := \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y) f^2(x, y) dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\{H_k(x)H_l(y)\}_{k,l \in \mathbb{Z}_+}$ – ортонормированная на всей плоскости \mathbb{R}^2 с весом $\rho(x, y)$ система многочленов Эрмита (см. напр. [1, с.170]).

Для функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ запишем ее разложение в двойной ряд Фурье-Эрмита

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}(f) H_k(x) H_l(y), \quad (1)$$

где

$$c_{kl}(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y) f(x, y) H_k(x) H_l(y) dx dy \quad (2)$$

Адрес для корреспонденции: Джурахонов Олимджон Акмалович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: olim1974@mail.ru

– коэффициенты Фурье-Эрмита функции f , а равенство в (1) понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. Обозначим через

$$S_1(f; x, y) = c_{00}(f)P_0(x)Q_0(y),$$

$$S_{N-1}(f; x, y) := \sum_{0 < \bar{k} \bar{l} \leq N-1} c_{kl}(f)P_k(x)Q_l(y),$$

$$N = 3, 4, \dots; \bar{v} = \max(1, v), v = 0, 1, \dots,$$

– его "гиперболические" частичные суммы. Если \mathcal{P}_n – совокупность полиномов двух переменных степени не более $(N-1)$ вида

$$P_{N-1} = \sum_{0 \leq \bar{k} \bar{l} \leq N-1} a_{kl} x^{\bar{k}} y^{\bar{l}},$$

$$P_1(x, y) = \text{const},$$

то, как известно [2],

$$E_{N-1}(f)_2 := \inf \{ \|f - P_{N-1}\|_2 : P_{N-1} \in \mathcal{P}_{N-1} \} =$$

$$= \|f - S_{N-1}\|_2 = \left\{ \sum_{\bar{k} \bar{l} \geq N} c_{kl}^2(f) \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

В пространстве L_2 рассмотрим обобщенный оператор сдвига [2]

$$F_h f(x, y) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2-v^2} f\left(xe^{-h} + u\sqrt{1-e^{-2h}}, ye^{-h} + v\sqrt{1-e^{-2h}}\right) dudv,$$

где $h \in \mathbb{R}_+$. Известно, что (см. [3, 4],[5, с.18]) $F_h : L_{2,\rho} \rightarrow L_{2,\rho}$ является линейным оператором, а также [3]

$$F_h H_n(x)H_m(y) = e^{-(n+m)h} H_n(x)H_m(y).$$

Следуя работе [2], как и в классическом случае, определим конечные разности первого и высших порядков следующими равенствами

$$\Delta_h^1(f; x, y) := F_h f(x, y) - f(x, y) = (F_h - E)f(x, y), \tag{4}$$

$$\Delta_h^m(f; x, y) = \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f; \cdot, \cdot); x, y) =$$

$$= (F_h - E)^m f(x, y) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} F_h^i f(x, y), m = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$F_h^0 f(x, y) = f(x, y), F_h^i f(x, y) = F_h \left(F_h^{i-1} f(x, y) \right), (i = 1, 2, \dots, m; m \in \mathbb{N}),$$

а E – единичный оператор в пространстве L_2 .

Введем оператор Эрмита второго порядка:

$$\mathcal{D} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Если полагать, как обычно, $\mathcal{D}^0 f = f, \mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f), r \in \mathbb{N}$, то через $L_{2,\rho}^{(r)} := L_{2,\rho}(\mathcal{D}^r) (r \in \mathbb{Z}_+, L_{2,\rho}^{(0)} \equiv L_{2,\rho})$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\rho}$, имеющих обобщенные частные производные

$$\frac{\partial^s f}{\partial x^i \partial y^j}, i + j = s, s = 1, 2, \dots, 2r, r \in \mathbb{N}$$

в смысле Леви [6] такие, что все они принадлежат пространству $L_{2,\rho}$ и для которых $\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\rho} < \infty$. В работе [2] доказано, что в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\rho}$ имеет место равенство

$$\|\Delta_h^m \mathcal{D}^r(f; x, y)\|_{L_{2,\rho}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - e^{-(k+l)h})^{2m} (k+l)^r c_{kl}^2(f), h \in \mathbb{R}_+,$$

в силу которого определим обобщенный модуль непрерывности m -го порядка:

$$\begin{aligned} \Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)_{L_{2,\rho}} &= \sup \left\{ \|\Delta_h^m(f; \cdot, \cdot)\|_{2,\rho} : 0 < h < t \right\} = \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - e^{-(k+l)t})^{2m} (k+l)^r c_{kl}^2(f) \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Условимся, что далее в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ мы всегда будем подразумевать, что $\mathcal{D}^r f \neq \mathcal{P}_{N-1}$. Отметим, что, исследуя вопрос о скорости сходимости "гиперболических" сумм Фурье к функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$, В.А.Абилов, Ф.В.Абилова и М.В.Абилов в [2] доказали следующее утверждение

Теорема 1.[2] Для любой функции $L_{2,\rho}^{(r)}$ при любом $h \in (0,1)$ справедлива оценка

$$E_{N-1}(f) \leq (2\sqrt{N})^{-r} (1 - e^{-2\sqrt{N}h})^{-m} \Omega_m(\mathcal{D}^r f; h), \tag{6}$$

где $N = 4, 5, \dots; m \in \mathbb{N}$, причем при каждом фиксированном $N = 4, 9, 16, \dots$ константа в правой части неравенства (6) уменьшена быть не может.

В данной работе мы обобщим теорему 1 для усредненных значений модуля непрерывности Ω_m . Условимся, что всюду далее под весовой функцией $g(t)$ на отрезке $[0, h]$ будем понимать

всякую неотрицательную измеримую суммируемую неэквивалентную нулю на $[0, h]$ функцию. При этих условиях имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $m, N \in \mathbb{N}, 0 < p \leq \infty, h \in (0, 1), g(t)$ – весовая на отрезке $(0, 1)$ функция. Тогда при любых $N = 4, 5, 6, \dots$ справедливо неравенство

$$\sup_{f \in L_{2,p}} \frac{(2\sqrt{N})^r E_{N-1}(f)_{2,p}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,p} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} \leq \left\{ \int_0^h (1 - e^{-2\sqrt{N}t})^{mp} g(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}}, \quad (7)$$

причем при каждом фиксированном $N = 4, 9, 16, \dots$ неравенство (7) обращается в равенство.

Доказательство. Неравенство (6) перепишем в следующем виде

$$\Omega_m(D^r f; t)_{2,p} \geq (2\sqrt{N})^r (1 - e^{-2\sqrt{N}t})^m \cdot E_{N-1}(f)_{2,p}. \quad (8)$$

Обе части неравенства (8) возведем в степень p ($0 < p \leq \infty$) и умножим на весовую функцию $g(t)$. Вновь полученное неравенство интегрируем по отрезку $[0, h]$ ($0 < h < 1$) и возведем в степень $1/p$ ($0 < p \leq \infty$). В результате получаем

$$\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,p} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}} \geq (2\sqrt{N})^r \left\{ \int_0^h (1 - e^{-2\sqrt{N}t})^{mp} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot E_{N-1}(f)_{2,p}.$$

Так как последнее неравенство справедливо для любой функции $f \in L_{2,p}^{(r)}$, то из него вытекает оценка сверху для экстремальной характеристики, стоящей в левой части неравенства (7):

$$\sup_{f \in L_{2,p}} \frac{(2\sqrt{N})^r E_{N-1}(f)_{2,p}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,p} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} \leq \left\{ \int_0^h (1 - e^{-2\sqrt{N}t})^{mp} g(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}}. \quad (9)$$

С другой стороны, нетрудно проверить, что функция $f_0(x, y) := P_n(x)Q_n(y)$, $n^2 = 4, 9, 16, \dots$, принадлежит пространству $L_{2,p}$, причем в силу равенств (3) и (5) имеем

$$E_{N-1}(f_0)_{2,p} = 1, \Omega_m(D^r f_0, t)_{2,p} = (2\sqrt{N})^r [1 - e^{-2\sqrt{N}t}]^m. \quad (10)$$

Пользуясь вторым из равенств (10), получаем

$$\sup_{f \in L_{2,p}} \frac{(2\sqrt{N})^r E_{N-1}(f)_{2,p}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,p} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{(2\sqrt{N})^r E_{N-1}(f_0)_{2,p}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f_0, t)_{2,p} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} =$$

$$= \left\{ \int_0^h \left(1 - e^{-2\sqrt{N}t}\right)^{pm} g(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}}. \tag{11}$$

Требуемый знак равенства в неравенстве (7) получаем из сопоставления неравенства (9) и (11), при $N = 4, 9, 16, \dots$, чем завершаем доказательство теоремы 2.

Следствие 1. В условиях теоремы 2 при $N = 4, 5, 6, \dots, g(t) := g^*(t) = 2\sqrt{N}e^{-2\sqrt{N}t}, h = 1/2\sqrt{N}$ имеет место неравенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{(2\sqrt{N})^{r-1/p} E_{N-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^{1/2\sqrt{N}} \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\rho} e^{-2\sqrt{N}t} dt \right\}^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{(pm+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \tag{12}$$

В частности, при $p = 1/m, m \in \mathbb{N}, r \geq m, N = 4, 9, 16, \dots$ из (12) получаем

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{(2\sqrt{N})^{r-m} E_{N-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^{1/2\sqrt{N}} \Omega_m^{1/m}(D^r f, t)_{2,\rho} e^{-2\sqrt{N}t} dt \right\}^{\frac{1}{p}}} = \frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

Следствие 2. В условиях теоремы 2 при $g(t) := g^*(t) = (1 - e^{-2\sqrt{N}t})^{-pm}, p = 1/m$ имеет место неравенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}} \frac{E_{N-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^{1/m}(f, t)_{2,\rho} (1 - e^{-2\sqrt{N}t})^{-1} dt \right\}^m} \leq (2\sqrt{N})^{-r} h^{-m}. \tag{13}$$

Отсюда при $h = 1/2\sqrt{N}$ получаем:

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}} \frac{E_{N-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^{1/2\sqrt{N}} \Omega_m^{1/m}(f, t)_{2,\rho} (1 - e^{-2\sqrt{N}t})^{-1} dt \right\}^m} \leq \frac{1}{(2\sqrt{N})^{r-m}}.$$

Неравенство (13) при $N = 4, 9, 16, \dots$ обращается в равенство.

В завершении статьи отметим, что некоторые результаты для "треугольных" и "круговых" сумм Фурье получены соответственно в работах [7] и [8].

Поступило 28.06.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сегё Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962.
2. Abilov V.A., Abilova F.V., Abilov M.V., Some problems of the approximation of functions by "hyperbolic" Fourier-Hermite sums in the space $L_2(\mathbb{R}^2, e^{-x^2-y^2})$. – Analysis Mathematica, 2013, v.39, №1, pp.247-257.
3. Абилов В.А., Абилова Ф.М. Некоторые вопросы сходимости кратных рядов Фурье–Эрмита. – ЖВМ и МФ, 2001, т. 41, №11, с. 1637-1657.
4. Алексеев Д.В. Приближение полиномами функций одной переменной в метрике Чебышева–Эрмита. Вестник МГУ, Мех. Матем., 6 (1997), 68-71.
5. Богачев В. И. Гауссовские меры. – М.:Наука, 1997.
6. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.:Наука, 1977.
7. Shabozov M.Sh., Dzhurakhonov O.A. Upper bounds for approximation of some classes of bivariate functions by triangular Fourier-Hermite sums in the space $L_{2,p}(\mathbb{R}^2)$. – Analysis Mathematica, 2019, v.45, №4, pp.823-840.
8. Джурахонов О. Приближение функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье–Чебышева. – Владикавказский математический журнал, 2020, т.22, вып. 2, с.5-17.

О.А.Чўрахонов

**БАҲОДИҲИИ СУРАТИ НАЗДИКШАВИИИ СУММАҲОИ "ГИПЕРБОЛИИ"
ХУСУСИИ ҚАТОРИ ФУРЬЕ БО ПОЛИНОМҲОИ ОРТОГОНАЛИИ
ФУРЬЕ-ЭРМИТ**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини функцияи дугағйирёбанда бо ёрии суммаҳои гиперболии қатори Фурье бо полиномҳои ортогоналии Фурье-Эрмит барои синфҳои функцияҳои $L_2^{(r)}(D)$ муайян карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин, суммаҳои гиперболикӣ, модули бефосилагӣ, бисёраъзогиҳои ортогоналӣ, нобаробариҳо.

O.A.Jurakhonov

**A SPEED OF CONVERGENCE OF "HYPERBOLIC" PARTIAL SUMS OF THE
DOUBLE FOURIER SERIES ON THE FOURIER–HERMITE ORTHOGONAL
POLYNOMIALS**

Tajik National University

In work exact upper bounds approximations for bivariate functions by "hyperbolic" partial sums of the double Fourier series on the orthogonal polynomials Fourier–Hermite on classes $L_2^{(r)}(D)$ of functions are calculated.

Key words: *best approximation, "hyperbolic" sums, modulus of continuity, orthogonal polynomials, inequalities.*

УДК 517.5

Н.У.Кадамшоев

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ И НЕКОТОРЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ГЛАДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА B_2

Технологический университет Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 09.10.2020 г.)

В статье найдены точные константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина для характеристики гладкости $\Lambda_m(f)$, $m \in \mathbb{N}$, определённых при помощи усреднения конечных разностей m -го порядка функций f , принадлежащих пространству Бергмана. Для классов функций, определённых при помощи характеристик гладкости $\Lambda_m(f)$, решена экстремальная задача одновременного приближения функций f и её последовательных производных.

Ключевые слова: точные неравенства, наилучшее приближение, характеристики гладкости, модуль непрерывности.

1. Введём нужные нам для дальнейшего обозначения.

$U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости \mathbb{C} ; $A(U)$ – множество функций f , аналитических в U ; $B_2 := B_2(U)$ – множество функций $f \in A(U)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_2} := \|f\|_{B_2(U)} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ – элемент площади. Подпространство комплексных алгебраических полиномов степени $\leq n$ обозначим \mathcal{P}_n . Любую функцию $f \in A(U)$ разлагаем в степенной ряд Маклорена

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k. \quad (2)$$

Пусть

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

– частичная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда (2). Хорошо известно, что (см., например, [1, с.269])

$$E_{n-1}(f)_{B_2} := \inf \left\{ \|f - P_{n-1}\|_{B_2} : P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} =$$

$$\|f - S_{n-1}\|_{B_2} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Равенством

$$\Delta_h^m(f; \rho, u) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(\rho e^{i(u+kh)}) \tag{4}$$

определим разность m -го порядка функции $f(\rho e^{it})$ по аргументу t в точке u с шагом h .

Для $r \in \mathbb{N}$, исходя из равенства (2) производную r -го порядка функции $f \in A(U)$ определим равенством

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

где $\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1)$, $k \geq r$, $k, r \in \mathbb{N}$. Положим

$$B_2^{(r)} := B_2^{(r)}(U) = \left\{ f \in A(U) : \|f^{(r)}\|_{B_2} < \infty \right\}.$$

Пользуясь равенством (4), простыми вычислениями с учётом равенства Парсеваля получаем

$$\|\Delta_h^m(f^{(r)})\|_{B_2}^2 = 2^m \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} (1 - \cos(k-r)h)^m. \tag{5}$$

Исходя из [2], под усреднёнными характеристиками гладкости функции $f \in B_2$ будем понимать величину

$$\Lambda_m(f, t)_{B_2} := \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^m(f)\|_{B_2}^2 dh \right\}^{1/2}. \tag{6}$$

Модуль непрерывности порядка m функции $f \in B_2$ определим, как обычно, равенством

$$\omega_m(f; t)_{B_2} := \sup \left\{ \|\Delta_h^m(f)\|_{B_2} : |h| \leq t \right\}. \tag{7}$$

Из равенств (6) и (7) следует, что для любого $t > 0$ имеет место соотношение

$$\Lambda_m(f, t)_{B_2} \leq \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \omega_m(f, t)_{B_2} dh \right\}^{1/2} \leq \omega_m(f, t)_{B_2}.$$

Положим

$$j_{k-r,m}(\tau) := \left\{ \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (1 - \cos(k-r)h)^m dh \right\}^{1/2}, \tag{8}$$

где $k, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $\tau > 0$. Легко заметить, что

$$j_{k-r,m}(\tau) = j_{1,m}((k-r)h). \tag{9}$$

Учитывая равенства (8) и (9), для величины (6), пользуясь равенством (5), получаем

$$\begin{aligned} \Lambda_m^2(f, t)_{B_2} &:= \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \Delta_h^m(f) \right\|_{B_2}^2 dh = \\ &= 2^m \sum_{k=r}^\infty \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos(k-r)h)^m dh = \\ &= 2^m \sum_{k=r}^\infty \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \cdot j_{1,m}((k-r)h). \end{aligned} \tag{10}$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $t \in (0, 2\pi / (n-r)]$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin P_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot \sqrt{(n+1) / (n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Lambda_m(f^{(r)}, t)_{B_2}} = \frac{1}{2^{m/2} j_{1,m}((n-r)t)}. \tag{11}$$

Доказательство. В самом деле, для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при любом $k \geq n > r$ получаем

$$\begin{aligned} \Lambda_m^2(f^{(r)}; t)_{B_2} &\geq 2^m \cdot \sum_{k=n}^\infty \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \cdot j_{1,m}^2((k-r)t) \geq \\ &\geq 2^m \cdot \inf_{n \leq k < \infty} \left(\alpha_{k,r}^2 j_{1,m}^2((k-r)t) \right) \cdot \sum_{k=n}^\infty \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k-r+1} \geq \\ &\geq 2^m \cdot \frac{n+1}{n-r+1} \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} \left(\alpha_{k,r}^2 j_{1,m}^2((k-r)t) \right) \right\} \cdot E_{n-1}^2(f)_{B_2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию числового аргумента k при фиксированных $r \in \mathbb{Z}_+$ и $t \in (0, 2\pi]$:

$$u_i(k) = \alpha_{k,r}^2 \cdot j_{1,m}^2((k-r)t) = \frac{\alpha_{k,r}^2}{(k-r)t} \cdot \int_0^{(k-r)t} (1 - \cos h)^m dh =$$

$$= [k(k-1)\cdots(k-r+1)]^2 \cdot \frac{1}{(k-r)t} \cdot \int_0^{(k-r)t} (1-\cos h)^m dh. \tag{13}$$

Обычными средствами анализа легко убедиться, что функция $u_t(k)$ при произвольном фиксированном $r \in \mathbb{Z}_+$ и значении $t > 0$ является строго возрастающей функцией при $k \geq n > r, k \in \mathbb{N}$, а потому

$$\inf \{u_t(k) : n \leq k < \infty\} = u_t(n) = \alpha_{n,r}^2 j_{1,m}^2((n-r)t). \tag{14}$$

Пользуясь равенством (14), продолжим (12):

$$\Lambda_m^2(f^{(r)}; t)_{B_2} \geq 2^m \cdot \frac{n+1}{n-r+1} \cdot \alpha_{k,r}^2 j_{1,m}^2((n-r)t) \cdot E_{n-1}^2(f)_{B_2}. \tag{15}$$

Из (15) следует оценка сверху для величины, стоящей в левой части равенства (11):

$$\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Lambda_m(f^{(r)}, t)_{B_2}} \leq \frac{1}{2^{m/2} j_{1,m}((n-r)t)}. \tag{16}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу той же величины, вводим в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, для которой в силу формул (3) и (10) находим

$$E_{n-1}(f_0)_{B_2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \Lambda_m(f_0^{(r)}, t)_{B_2} = 2^{m/2} \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}} \cdot j_{1,m}((n-r)t).$$

Пользуясь этими равенствами, запишем оценку снизу указанной величины

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Lambda_m(f^{(r)}, t)_{B_2}} \geq \\ & \geq \frac{\alpha_{n,r} \cdot \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f_0)_{B_2}}{\Lambda_m(f_0^{(r)}, t)_{B_2}} = \\ & = \frac{\alpha_{n,r} \cdot \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f_0)_{B_2}}{2^{m/2} \cdot \alpha_{n,r} \cdot 1/\sqrt{n-r+1} \cdot j_{1,m}((n-r)t)} = \\ & = \frac{1}{2^{m/2} j_{1,m}((n-r)t)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Требуемое равенство (11) получаем из сопоставления неравенств (16) и (17). Теорема 1 доказана. Из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1. В условиях теоремы 1 при $t = 1$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin P_r}} \frac{\alpha_{n,r} \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Lambda_1(f^{(r)}, t / (n-r))_{B_2}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\sin ct)}}, \tag{18}$$

где

$$\sin cu := \begin{cases} \frac{\sin u}{u}, & \text{если } u \neq 0; \\ 1, & \text{если } u = 0 \end{cases}.$$

Доказательство. В самом деле, при $m = 1$, вычисляя функцию $j_{1,1}((n-r)t)$ по формулам (8) и (9), будем иметь

$$\begin{aligned} j_{1,1}((n-r)t) &= \left\{ \frac{1}{(n-r)t} \int_0^{(n-r)t} (1-\cos h) dh \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \left(1 - \frac{\sin(n-r)t}{(n-r)t} \right) \right\}^{1/2} = (1 - \sin c(n-r)t)^{1/2}, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение следствия 1.

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и $0 < t \leq 2\pi$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin P_r}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}) \sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f^{(s)})_{B_2}}{\Lambda_m(f^{(r)}, t / (n-r))_{B_2}} = \frac{1}{2^{m/2} j_{1,m}(t)}. \tag{19}$$

Доказательство. Поступая так же, как при доказательстве теоремы 1, имеем:

$$\begin{aligned} \Lambda_m^2(f^{(r)}, t)_{B_2} &\geq 2^m \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \cdot j_{1,m}^2((k-r)t) \geq \\ &\geq 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2} \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1} \cdot j_{1,m}^2((k-r)t) \cdot \frac{\alpha_{k,s}^2}{k-s+1} \cdot |c_k(f)|^2 \geq \\ &\geq 2^m \inf_{n \leq k < \infty} \left\{ \frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2} \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1} \cdot j_{1,m}^2((k-r)t) \right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,s}^2}{k-s+1} \cdot |c_k(f)|^2 = \\ &= 2^m \inf_{n \leq k < \infty} \left\{ \frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2} \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1} \cdot j_{1,m}^2((k-r)t) \right\} \cdot E_{n-1}^2(f^{(s)})_{B_2}. \end{aligned} \tag{20}$$

Легко проверить, что при сделанных в теореме предположениях

$$\inf_{n \leq k < \infty} \left\{ \frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2} \cdot \frac{k-s+1}{k-r+1} \cdot j_{1,m}^2((k-r)t) \right\} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,r}^2}{\alpha_{n,s}^2} \cdot \frac{n-s+1}{n-r+1} \cdot j_{1,m}^2((n-r)t). \tag{21}$$

Продолжая неравенство (20), с учётом (21) получаем

$$\Lambda_m^2(f^{(r)}, t)_{B_2} \geq 2^m \cdot \frac{\alpha_{n,r}^2}{\alpha_{n,s}^2} \cdot \frac{n-s+1}{n-r+1} \cdot j_{1,m}^2((n-r)t) \cdot E_{n-1}^2(f^{(s)})_{B_2},$$

откуда сразу следует оценка

$$\sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin P_r}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}) \sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f^{(s)})_{B_2}}{\Lambda_m(f^{(r)}, t / (n-r))_{B_2}} \leq \frac{1}{2^{m/2} j_{1,m}(t)}. \tag{22}$$

Так как для введённой при доказательстве теоремы 1 функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $f_0^{(r)}(z) = \alpha_{n,s} z^{n-s}$

$$E_{n-1}(f_0^{(s)}) = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n-s+1}},$$

$$\Lambda_m(f_0^{(r)}, t)_{B_2} = 2^{m/2} \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}} \cdot j_{1,m}((n-r)t),$$

то, пользуясь этими равенствами, запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin P_r}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}) \sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f^{(s)})_{B_2}}{\Lambda_m(f^{(r)}, t / (n-r))_{B_2}} \geq \\ & \geq \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}) \sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f_0^{(s)})_{B_2}}{\Lambda_m(f_0^{(r)}, t / (n-r))_{B_2}} = \frac{1}{2^{m/2} \cdot j_{1,m}(t)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Равенство (19) вытекает из сопоставления неравенств (22) и (23), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Из доказанной теоремы 2 вытекает

Следствие 2. В условиях теоремы 2 имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}) \sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{B_2}}{\Lambda_m(f^{(r)}, \pi / (n-r))_{B_2}} = \\ & = \frac{1}{2^{m/2} \cdot j_{1,m}(\pi)} = \left\{ \frac{m!}{2^m \cdot (2m-1)!!} \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

В самом деле, вычислив значение функции $j_{1,m}(t)$, в точке $t = \pi$ в силу формул (8) и (9), имеем

$$j_{1,m}^2(\pi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos u)^m du = \frac{2^{m+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} t dt =$$

$$= \frac{2^m}{\pi} \cdot \frac{(2m-1)!!}{2^m \cdot m!} \cdot \pi = \frac{(2m-1)!!}{m!},$$

откуда и следует утверждение следствия 2.

Используя определение характеристики гладкости (6), рассмотрим следующий класс функций. Пусть $\Phi(t)$, где $0 \leq t < 2\pi$, есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Эту функцию назовём мажорантой. Символом $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ обозначим класс функций $f \in L_2$, для которых при любом $0 \leq t \leq 2\pi$ имеет место неравенство

$$\Lambda_m(f^{(r)}, t)_{B_2} \leq \Phi(t).$$

Так как, наряду с $f \in B_2^{(r)}$, все промежуточные производные $f^{(s)} \in B_2^{(r)}$, $s = \overline{0, r}$, то представляет интерес изучение поведения величины $E_{n-s-1}(f^{(s)})_{B_2}$ на некотором классе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset B_2^{(r)}$ или на самом классе $B_2^{(r)}$, то есть требуется найти величину

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup \{ E_{n-s-1}(f^{(s)})_{B_2} : f \in B_2^{(r)} \}. \tag{24}$$

Имеет место следующая

Теорема 3. При всех $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и $0 \leq t < 2\pi$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi))_{B_2} =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\Phi(t)}{j_{1,m}((n-r)t)}. \tag{25}$$

В частности, при $t = \pi / (n-r)$, $n > r$ из (25) следует, что

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi))_{B_2} =$$

$$\sqrt{\frac{m!}{(2m-1)!!}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right).$$

Отметим, что вопросы полиномиальной аппроксимации функции $f \in B_2$ рассмотрены в работах [3,4].

Поступило 09.10.2020 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.-Л.: Наука, 1964, 440 с.
2. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций. – Матем.заметки, 2016, т. 99, № 2, с.215-238.
3. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значение n -поперечников. – Матем.заметки, 2018, т. 103, вып. 4, с. 617-631.
4. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратичное приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам. – Труды Института математики и механики УрО РАН, 2019, т. 25, № 2, с.258-270.

Н.У.Кадамшоев

НОБАРОБАРИИ САҶЕҲ БАЙНИ НАЗДИКУНИҶОИ БЕҲТАРИН ВА БАЪЗЕ ХАРАКТЕРИСТИКАҶОИ СУФТАГӢ ДАР ФАЗОИ БЕРГМАН B_2

Донишгоҳи технологии Тоҷикистон

Дар мақола доимии саҷеҳ дар нобаробарии намуди Чексон-Стечкин барои характеристикаи суфтагии $\Lambda_m(f)$, $m \in \mathbb{N}$, ки ба миёнакунии фарқиятҳои охири тартиби m -ум барои функцияҳои f аз фазои Бергман муайян карда шудааст. Барои синфҳои функцияҳо, ки бо истифода аз характеристикаи суфтагии $\Lambda_m(f)$ муайян карда шудаанд, масъалаи экстремалии наздикшавии якбораи функцияҳои f ва ҳосилаҳои пайдарпаи он ҳал карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: нобаробарии саҷеҳ, наздиккунии беҳтарин, характеристикаи суфтагӣ, модули бефосилагӣ.

N.U.Qadamshoev

SHARP INEQUALITIES BETWEEN BEST APPROXIMATIONS AND SOME CHARACTERISTICS OF SMOOTHNESS IN THE BERGMAN'S SPACE

Technological University of Tajikistan

In the article exact constant in Jackson-Stechkin type for the characteristic of smoothness $\Lambda_m(f)$, $m \in \mathbb{N}$, determined by averaging the finite differences of the m -th order of function f to the Bergman space are found. For the classes of functions defined using the smoothness characteristics $\Lambda_m(f)$, the extremal problem of the simultaneous approximation of the function f and its successive derivatives is solved.

Key words: sharp inequalities, best approximations, smoothness characteristics, modulus of continuity.

УДК 517.957

Член-корреспондент НАН Таджикистана С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ С ОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана

В работе изучается вариационная задача Дирихле с однородными граничными условиями для одного класса эллиптических операторов недивергентного вида в ограниченной области n -мерного евклидова пространства, вырождающихся вдоль всей границы области. В отличие от ранее опубликованных работ, исследуемые операторы могут иметь ненулевые промежуточные коэффициенты.

Ключевые слова: *неравенство Гординга, вариационная задача Дирихле, эллиптический оператор недивергентного вида, степенное вырождение, ограниченная область.*

1. Разрешимость вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области хорошо изучена в случае, когда исследуемый оператор изначально задается в дивергентной форме (см. [1]–[4] и имеющуюся в них библиографию). Случай, когда исследуемый оператор имеет недивергентный вид рассматривался лишь в отдельных работах (см. [5, 6]). Здесь продолжается исследование авторов, приведенное ранее в работе [5], где рассматривались операторы только с ненулевыми старшими коэффициентами.

2. Пусть \mathbb{R}^n – n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n с замкнутой $(n-1)$ -мерной границей $\partial\Omega$, удовлетворяющая условию конуса. Пусть $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ – длина мультииндекса k и пусть $u^{(k)}(x)$ – обобщенная в смысле С.Л.Соболева производная функции $u(x)$ мультииндекса k . Тогда (см., например, [7, стр. 203]) существует бесконечно-дифференцируемая положительная функция $\rho(x), x \in \Omega$, такая, что

$$\rho(x) \leq \frac{1}{2} \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq C\rho(x), \quad |\rho^{(k)}(x)| \leq C_k \rho^{1-|k|}(x)$$

для всех $x \in \Omega$ и любого мультииндекса k . Здесь C, C_k – постоянные числа.

Пусть r – натуральное, α – вещественное числа. Символом $V_{2,\alpha}^r(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$, имеющих в области Ω все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные порядка r , с конечной нормой

Адрес для корреспонденции: Исхоков Сулаймон Абунасарович, Хакназаров Кобил Эражзода. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАН Таджикистана. E-mail: sulaimon@mail.ru

$$\|u; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\| = \left\{ \|u; L_{2,\alpha}^r(\Omega)\|^2 + \|u; L_{2,\alpha-r}(\Omega)\|^2 \right\}^{1/2}, \tag{1}$$

где

$$\|u; L_{2,\alpha}^r(\Omega)\| = \left(\sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\|u; L_{2,\alpha-r}(\Omega)\| = \left(\int_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x) |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Свойства пространств $V_{2,\alpha}^r(\Omega)$ изучены многими математиками (см., например, [1] и приведенную там литературу). Для удобства чтения, сформулируем эти свойства в виде следующей теоремы.

Теорема 1. 1) Для любого натурального числа r и вещественного числа α множество бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω плотно в пространстве $V_{2,\alpha}^r(\Omega)$.

2) Пусть целое число $s \in [0, r]$. Тогда справедливо вложение

$$V_{2,\alpha}^r(\Omega) \rightarrow V_{2,\alpha-s}^{r-s}(\Omega).$$

3) Норма (1) пространства $V_{2,\alpha}^r(\Omega)$ эквивалентна следующей норме

$$\|u; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\|_* = \left\{ \sum_{|k| \leq r} \int_{\Omega} \left(\rho^{\alpha-r+|k|}(x) |u^{(k)}(x)| \right)^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Ниже нам также понадобится следующая лемма, которая является частным случаем леммы 2.2 работы [3]

Лемма 1. Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется число $K(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left(\sum_{|q| \leq r-1} \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r+|q|)}(x) |v^{(q)}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \varepsilon \|v; L_{2,\alpha}^r(\Omega)\| + K(\varepsilon) \|v; L_{2,\alpha-r}(\Omega)\|$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Пространство $L_{2,\alpha-r}(\Omega)$ является гильбертовым и скалярное произведение в нем определяется равенством

$$(u, v)_{\alpha-r} = \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Вводим также пространство $(V_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ – пополнение пространства $L_{2,\alpha-r}(\Omega)$ по норме

$$\left\| f; (V_{2,\alpha}^r(\Omega))' \right\| = \sup \frac{|(f, v)_{\alpha-r}|}{\|u; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым $v \in V_{2,\alpha}^r(\Omega)$. Элементы из пространства $(V_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ отождествляются с соответствующими антилинейными функционалами над $V_{2,\alpha}^r(\Omega)$. Далее обозначим через $\langle f, v \rangle$ значение функционала $f \in (V_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ на функцию $v \in V_{2,\alpha}^r(\Omega)$.

3. Пусть J – некоторое подмножество множества $\{0, 1, 2, \dots, r\}$, причем $r \in J$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u](x) = \sum_{j \in J} \rho^{2\alpha_j}(x) \sum_{|k|=2j} a_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2}$$

и предположим, что его коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

I) существует положительное число \varkappa такое, что

$$\operatorname{Re} \sum_{|\mu|=|\eta|=r} (-1)^r a_{\mu+\eta}(x) \zeta_\mu \overline{\zeta_\eta} \geq \varkappa \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2 \tag{3}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r}$;

II) при всех $j \in J$ коэффициенты $a_k(x), |k|=2j$ имеют производные до порядка j включительно и найдется число $M > 0$ такое, что

$$|a_k^{(p)}(x)| \leq M \rho^{-|p|}(x) \tag{4}$$

для всех $x \in \Omega$, всех мультииндексов k длиной $2j$ и всех мультииндексов p , по длине не превосходящих j .

Дифференциальные операторы вида (2), которые рассматриваются в этой работе, имеют согласованное вырождение коэффициентов вдоль всей границы области. Поэтому при определении основного функционального пространства решений рассматриваемых ниже задач учитывается только вырождение старших коэффициентов. В связи с этим, далее в тексте число α_r обозначим через α и предположим, что числа $\alpha_j, j \in J$ удовлетворяют условиям

$$\alpha_j = \alpha - r + j, \quad j \in J. \tag{5}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия I), II) и (5). Тогда существуют положительные числа c^*, M^* такие, что

$$\operatorname{Re}(L[u], u)_0 \geq c^* \|u; L_{2,\alpha}^r(\Omega)\|^2 - M^* \|u; L_{2,\alpha-r}(\Omega)\|^2 \tag{6}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Наметим схему доказательства теоремы 2. Вводим вспомогательные дифференциальные операторы

$$L_j[u](x) = \sum_{|k|=2j} \rho^{2\alpha_j}(x) a_k(x) u^{(k)}(x), \quad j \in J, \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Действуя так же, как при выводе основного неравенства теоремы 1 работы [5], можно доказать, что

$$\operatorname{Re}(L_r[u], u)_0 \geq c \|u; L_{2,\alpha}^r(\Omega)\|^2 - M \|u; L_{2,\alpha-r}(\Omega)\|^2 \tag{7}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Здесь c, M – некоторые положительные числа. Согласно нашим предположениям $r \in J$. Поэтому, вводя обозначение $J' = J \setminus \{r\}$, получим

$$L[u](x) = L_r[u](x) + \sum_{j \in J'} L_j[u](x). \tag{8}$$

Учитывая это равенство и применяя неравенств (7), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(L[u], u)_0 &\geq c \|u; L_{2,\alpha}^r(\Omega)\|^2 - \sum_{j \in J'} |(L_j[u], u)_0| - \\ &- M \sum_{j \in J} \|u; L_{2,\alpha-r}(\Omega)\|^2, \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned} \tag{9}$$

Далее, чтобы сверху оценить величину $|(L_j[u], u)_0|$, интегрируя по частям для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем представление

$$\begin{aligned} (L_j[u], v)_0 &= \sum_{|k|=2j} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha_j}(x) a_k(x) u^{(k)}(x) \overline{v(x)} dx = \\ &= \sum_{|l|=|u|=j} (-1)^j \int_{\Omega} u^{(l)}(x) \overline{\left(\rho^{2\alpha_j}(x) a_{l+\mu}(x) v(x) \right)^{(\mu)}} dx = \\ &= \sum_{|l|=j} (-1)^j \sum_{|p+q|=j} C_{p,q} \int_{\Omega} u^{(l)}(x) \overline{\left(\rho^{2\alpha_j}(x) a_{l+p+q}(x) \right)^{(p)}} \overline{v(x)}^{(q)} dx, \end{aligned} \tag{10}$$

где $C_{p,q}$ – некоторые положительные числа. Согласно свойству функции $\rho(x)$ и условию (4) выполняется неравенство

$$\left| \left(\rho^{2\alpha_j}(x) a_{l+p+q}(x) \right)^{(p)} \right| \leq M_1 \rho^{2\alpha_j - |p|}(x), \quad x \in \Omega,$$

где M_1 – некоторое положительное число. Поэтому из (10) следует

$$|(L_j[u], v)_0| \leq M_2 \sum_{|l|=|q+p|=j} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha_j - |p|}(x) |u^{(l)}(x)| |v^{(q)}(x)|. \tag{11}$$

Так как (см. (5)) $2\alpha_j - |p| = 2\alpha - 2r + 2j - |p| = 2\alpha - 2r + j + |q|$, то, применяя неравенство Коши-Буняковского, из (11) получим

$$\begin{aligned}
 |(L_j[u], v)_0| &\leq M_3 \sum_{|l|=j, |q|\leq j} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r+j+|q|}(x) |u^{(l)}(x)| |v^{(q)}(x)| \leq \\
 &\leq M_4 \sum_{|l|=j, |q|\leq j} \left\{ \int_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r+2j}(x) |u^{(l)}(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \cdot \\
 &\quad \cdot \left\{ \int_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r+2|q|}(x) |v^{(q)}(x)|^2 dx \right\}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{12}$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Следовательно,

$$|(L_j[u], u)_0| \leq M_4 \sum_{|q|\leq j} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r+2|q|}(x) |u^{(q)}(x)|^2 dx.$$

Так как $j \in J'$ и j строго меньше r , то, применяя лемму 1, получим

$$|(L_j[u], u)_0| \leq \varepsilon \|u; L_{2,\alpha}^r(\Omega)\|^2 + K(\varepsilon) \|u; L_{2,\alpha-r}(\Omega)\|^2.$$

Теперь, подбирая число $\varepsilon > 0$ в этом неравенстве достаточно малым, из (9) можно легко вывести неравенство (6).

Теорема 2 доказана.

4. Вводим полуторалинейную форму

$$P_\lambda[u, v] = (L[u], v)_0 + \lambda(u, v)_{\alpha-r}, \quad u, v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$:

1) существует линейный оператор Λ , осуществляющий гомеоморфизм пространства $V_{2,\alpha}^r(\Omega)$ и $(V_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ и такой, что

$$\langle \Lambda u, v \rangle = P_\lambda[u, v] \quad \forall u, v \in V_{2,\alpha}^r(\Omega);$$

2) всякий антилинейный непрерывный функционал $l(v)$ из $(V_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ допускает представление

$$l(v) = P_\lambda[u_0, v] = \langle \Lambda u_0, v \rangle,$$

причем такое представление единственно.

Доказательство. Применяя теорему вложения для пространств $V_{2,\alpha}^r(\Omega)$ (см. выше теорему 1) из неравенства (12) при всех $j \in J'$, получим

$$|(L_j[u], v)_0| \leq M_5 \|u; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\| \cdot \|v; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\|,$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Аналогично доказывается такое же неравенство при $j = r$. Из полученных неравенств ввиду равенства (8) следует, что

$$|(L[u], v)_0| \leq M_6 \|u; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\| \cdot \|v; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\|.$$

Следовательно,

$$|P_\lambda[u, v]| \leq (M_6 + |\lambda|) \|u; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\| \cdot \|v; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\| \tag{13}$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Далее заметим, что если $\text{Re} \lambda \geq M^* + c^*$, то из неравенства (6) следует

$$\text{Re} P_\lambda[u, u] \geq c^* \|u; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{14}$$

На основе полученных неравенств (13), (14) и плотности класса $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $V_{2,\alpha}^r(\Omega)$ доказательство теоремы 3 завершается применением обобщенной теоремы Лакса-Мильграмма (см. [1, Теорема 2.0.1]).

5. Далее с помощью теоремы 3 изучим разрешимость следующей задачи.

Вариационная задача Дирихле. Для заданного элемента f из $(V_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ найти функцию $u \in V_{2,\alpha}^r(\Omega)$, для которой выполняется равенство

$$P_\lambda[u, v] = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{15}$$

Решение этой задачи называется обобщенным решением следующего дифференциального уравнения

$$\sum_{j \in J} \rho^{2\alpha_j}(x) \sum_{|k|=2j} a_k(x) u^{(k)}(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Теорема 4. Пусть выполнены все условия теоремы 3 и число λ_0 – такое же, как в этой теореме. Тогда при $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного элемента $f \in (V_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ вариационная задача Дирихле (15) имеет единственное решение $u_0 \in V_{2,\alpha}^r(\Omega)$ и при этом имеет место неравенство

$$\|u_0; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\| \leq M \|f; (V_{2,\alpha}^r(\Omega))'\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от f и λ .

Доказательство проводится по стандартной схеме применением теоремы 3.

Замечание (см. [1]). Если число α такое, что $-1/2 < \alpha < r - 1/2$, $\alpha + 1/2 \notin \{1, \dots, r\}$ и граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу $C^{s_0+1+\varepsilon}$, где целое число s_0 такое, что

$r - \alpha - 1/2 \leq s_0 < r - \alpha + 1/2$, то решение $V_{2,\alpha}^r(\Omega)$ задачи (15) удовлетворяет следующим однородным граничным условиям

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial n^s} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали. Поэтому граничные условия в задаче (15) в общем случае также формально считаются однородными.

Поступило 10.03.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М., Лирозкин П.И., Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. – Известия вузов. Математика, 1988, №8, с. 4-30.
2. Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными формами. – Доклады Академии наук (Россия), 2003, т. 392, №5, с. 606-609.
3. Исхоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением. – Математические заметки, 2010, т. 87, №2, с. 201-216.
4. Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Константинова Т.П. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными формами. – Доклады Российской академии наук, 2015, т. 462, №1, с. 7-10.
5. Исхоков С.А., Хакназаров К.Э. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида в ограниченной области. – ДАН РТ, 2020, т.63, №5-6, 308-314.
6. Хакназаров К.Э. О фредгольмовой разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида. – ДАН РТ, 2020, т.63, №9-10, с. 586-590.
7. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Наука, 1973, с. 342.

С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров

МАСЪАЛАИ ВАРИАЦИОНИИ ДИРИХЛЕ БО ШАРТҲОИ САРҲАДИИ ЯКЧИНСА БАРОИ ОПЕРАТОРҲОИ ТАНАЗЗУЛЁБАНДАИ ЭЛЛИПТИКИИ ШАКЛИ ҒАЙРИ ДИВЕРГЕНТӢ

Институти математикаи ба номи А.Чураеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола масъалаи вариационии Дирихле бо шартҳои сарҳадии якчинса барои як синфи операторҳои эллиптикии шакли ғайри дивергентӣ дар соҳаи маҳдуди фазои евклидии n -ченака, ки дар

тамоми сарҳади соҳа таназзул меёбанд, омӯхта шудааст. Ба фарқ аз қорҳои пештар рӯи чоп омада, операторҳои таҳқиқшаванда метавонанд коэффитсиентҳои мобайнии ғайринулӣ дошта бошанд.

Калимаҳои калидӣ: масъалаи вариатсионии Дирихле, оператори эллиптикии шакли ғайри дивергентӣ, таназзулҳои дараҷагӣ, соҳаи маҳдуд.

S.A.Iskhokov, K.E.Khakhnazarov

**VARIATIONAL DIRICHLET PROBLEM WITH HOMOGENEOUS BOUNDARY
CONDITIONS FOR NON-DIVERGENT FORM DEGENERATE ELLIPTIC
OPERATORS**

*Institute of Mathematics named after A.D.Dzhuraev,
National Academy of Sciences of Tajikistan*

We study the variational Dirichlet problem with homogeneous boundary conditions for a class of non-divergent form elliptic operators in a bounded domain of the n -dimension euclidian space with degeneracy along the entire boundary of the domain. In contrast to published papers, the operators under investigation may have non-zero middle coefficients.

Key words: variational Dirichlet problem, non-divergent form elliptic operator, power degeneration, bounded domain.

УДК 523.6

Член-корреспондент Национальной академии наук Таджикистана Г.И.Кохирова,

А.М.Буриев, С.Н.Сафаров

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОТЕНЦИАЛЬНО ОПАСНОГО
АСТЕРОИДА 2003 SD220 ПО НАБЛЮДЕНИЯМ В ГИССАРСКОЙ
АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ***Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана*

Представлены результаты фотометрической обработки многоцветных наблюдений потенциально опасного астероида 2003 SD220, проведенных на телескопе АЗТ-8 Гиссарской астрономической обсерватории в период его сближения с Землей в декабре 2018 г. Получены видимый и абсолютный блеск астероида в четырех фильтрах. Построены кривые блеска и показано, что блеск объекта в период наблюдений практически не изменялся, абсолютное значение блеска соответствует эфемеридной величине. Показатели цвета соответствуют астероидам S-типа. Оценки диаметра астероида по нашим наблюдениям хорошо согласуются с имеющимися данными. Сближение астероида с Землей не привело к существенным изменениям его физических свойств.

Ключевые слова: астероид, наблюдения, фотометрия, блеск, кривая блеска, показатель цвета, диаметр.

В декабре 2018 г. произошел очередной близкий подход потенциально опасного астероида (163899) 2003 SD220, далее 2003 SD220 к Земле. 22 декабря астероид пролетел мимо Земли на расстоянии менее 2.9 млн. км. [1]. Потенциально опасные астероиды имеют особую научную актуальность для исследователей, в связи с чем для получения новых данных для астероида 2003 SD220 была проведена кампания его квазисинхронных наблюдений в период сближения с Землей, координатором которой явилась Главная Пулковская астрономическая обсерватория РАН. В Таджикистане в наблюдениях приняли участие Международная астрономическая обсерватория Санглох (МАОС) и Гиссарская астрономическая обсерватория (ГисАО) Института астрофизики НАНТ. В данной работе мы представляем результаты фотометрической обработки наблюдений ГисАО, где мониторинг объекта проведен на телескопе АЗТ – 8 13-15 декабря 2018 г. Основные характеристики телескопа и ПЗС-камеры приведены в [2]. Напомним лишь, что использовались стандартные широкополосные фильтры BVRI системы Джонсона-Козинса, позволяющие выделить для наблюдений соответствующий диапазон спектра, и за весь период наблюдений получено 1140 кадров с изображениями астероида с экспозицией от 5 до 60 секунд.

Обработка наблюдений, результаты

Для определения некоторых физических параметров астероида 2003 SD220 выполнена фотометрическая обработка кадров, полученных в ГисАО 13-15 декабря 2018 г. Для обработки использо-

Адрес для корреспонденции: Кохирова Гулчехра Исроиловна и Буриев Анварджон Махмадалиевич. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бухоро, 22, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: Kokhirova2004@mail.ru, anvar10@mail.ru.

вался программный пакет АПЕКС-II [2]. Программа выполняет калибровку кадров, идентификацию изображений звёзд и объектов, и отождествляет звёзды на кадрах с заданными каталогами. Для определения видимого блеска астероида использовались звезды сравнения из каталога APASS, для которых блеск определен с точностью равной 0.03^m [3]. Таким методом были определены видимые звездные величины астероида 2003 SD220 в фильтрах *BVRI*, средние значения которых в разных фильтрах за каждую ночь наблюдений даны в табл. 1. Вариации блеска астероида в течение каждой ночи наблюдений в ГисАО показывают кривые блеска, представленные на рис. 1, где по оси ординат отложены видимые звездные величины *m* и по оси абсцисс - время наблюдений в юлианских днях. Кривые блеска демонстрируют отсутствие значительных амплитуд изменения блеска, но из табл. 1 видно, что видимый блеск постепенно возрастал. Это связано с тем, в период наблюдений астероид приближался и к Солнцу, и к Земле.

Таблица 1

Средние видимые звездные величины астероида 2003 SD220 по наблюдениям в ГисАО в декабре 2018 г. (UT)

Дата, 2018	B	V	R	I
13.9648	14.34±0.01	13.85±0.03	13.24±0.03	12.74±0.02
14.9789	14.26±0.03	13.75±0.02	13.15±0.03	12.64±0.02
15.0130	14.24±0.02	13.74±0.03	13.14±0.03	12.63±0.03

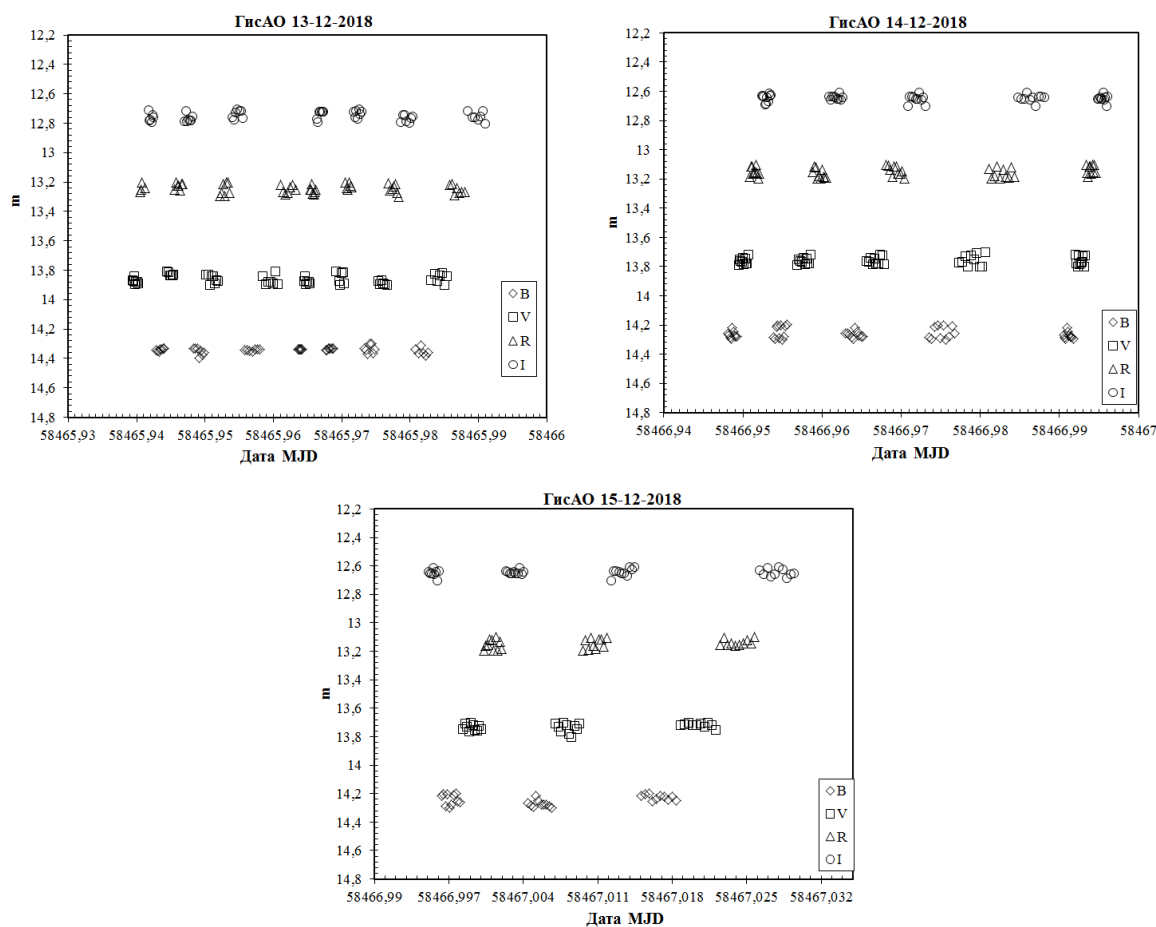


Рис. 1. Кривые блеска в четырех фильтрах астероида 2003 SD220 по наблюдениям в ГисАО 13-15 декабря 2018 г.

Видимые звездные величины m конвертируются в абсолютные величины H по следующей полуэмпирической формуле, позволяющей более точно описать изменение блеска астероида в диапазоне фазовых углов от 0 до 120 град. [4]:

$$H = m - 5 \log(r\Delta) + 2.5 \log[(1-G)\Phi_1 + G\Phi_2],$$

$$\Phi_i = \exp\left[-A_i \left\{ \operatorname{tg}(\beta/2) \right\}^{B_i}\right], i = 1, 2,$$

где β – фазовый угол (ph) объекта, G – параметр наклона, для которого принято значение $G=0.15$; Φ_1 , Φ_2 – функции угла фазы, $A_1=3.33$, $A_2=1.87$, $B_1=0.63$ и $B_2=1.22$ – коэффициенты, значения которых приведены в работе [5].

Абсолютные звездные величины астероида 2003 SD220 в четырех фильтрах (средние значения за ночь), найденные по вышеприведенной формуле, приведены в табл. 2., где также даны величины показателей цвета $B-V$, $V-R$, $R-I$, $B-R$. Измеренные абсолютные звездные величины астероида в полосе V находятся в диапазоне 17.85 ± 0.03 - 17.92 ± 0.03 зв. вел., и этот блеск очень близок к эфемеридному значению $H=17.9^m$. Хотя видимые звездные величины за период наблюдений постепенно возрастали в связи с приближением астероида к Солнцу и к наблюдателю, абсолютные звездные величины с учетом ошибок измерений варьировали вблизи эфемеридного значения.

Таблица 2

Абсолютный блеск H и показатели цвета астероида 2003 SD220 по наблюдениям ГисАО в 2018 г.

Дата (UT)	B	V	R	I	B-V	V-R	R-I	B-R
дек. 13,9648	18.41 ± 0.01	17.92 ± 0.03	17.31 ± 0.03	16.82 ± 0.01	0.49	0.61	0.49	1.10
дек. 14,9789	18.37 ± 0.03	17.87 ± 0.03	17.26 ± 0.03	16.76 ± 0.02	0.50	0.61	0.50	1.11
дек. 15,0130	18.36 ± 0.03	17.85 ± 0.03	17.25 ± 0.03	16.75 ± 0.02	0.51	0.60	0.50	1.11

На основе показателей цвета в системе $BVRI$ можно выполнить таксономическую классификации астероидов, т.е. определить к какому спектральному классу они относятся и на этой основе сделать предположение о минеральном составе объектов. К настоящему моменту имеется несколько классификаторов, самыми распространенными являются таксономическая классификация Толена, Чапмена, Зелнера [6-7] и др. Согласно Чапмену и др. астероиды спектрального класса S-каменные (кремниевые) имеют величины геометрического альбедо $p_v \geq 0.09$ и показатель цвета $B-V \geq 0.60$. С учетом геометрического альбедо и полученным в настоящей работе показателем цвета $B-V$ можно сделать предположение о принадлежности астероида 2003 SD220 к классу S. Вещество астероидов S-типа содержит метал, оливин, пироксен.

Эффективный диаметр астероида D вычислен по следующему эмпирическому соотношению, принятому для оценки размеров астероидоподобных тел [8]:

$$D = \frac{1329}{\sqrt{p_v} \cdot 10^{0.2H}},$$

где $p_v=0.340$ – геометрическое альbedo астероида [9], H – абсолютный блеск в каком-либо фильтре. Оценки диаметра астероида по измерениям блеска в фильтре V приведены в табл.3. За три ночи наблюдений получено одно и тоже значение диаметра 600 м, согласующееся с оценками, имеющимися в литературе. По радионаблюдениям диаметр составляет почти 1 км, по наблюдениям космической миссии NEOWISE – 0.8 ± 0.2 км, база данных NASA – 0.791 км [10].

Таблица 3

Оценка диаметра астероида 2003 SD220 по наблюдениям ГисАО в 2018 г.

Дата (UT), 2018 г.	g , а.е.	Δ , а.е.	ph , град.	H_v , зв.вел..	D , км
дек. 13,9648	0.984	0.037	91.6	17.92 ± 0.03	0.60 ± 0.03
дек. 14,9789	0.981	0.032	95.2	17.87 ± 0.03	0.60 ± 0.02
дек. 15,0130	0.979	0.029	98.9	17.85 ± 0.03	0.60 ± 0.09
дек. 13,9648	0.984	0.037	91.6	17.31 ± 0.03	0.78 ± 0.03
дек. 14,9789	0.981	0.032	95.2	17.26 ± 0.03	0.80 ± 0.02
дек. 15,0130	0.979	0.029	98.9	17.25 ± 0.03	0.80 ± 0.01

З а к л ю ч е н и е

По наблюдениям потенциально опасного астероида 2003 SD220, выполненных в Гиссарской астрономической обсерватории ИА НАНТ в период сближения с Землей в декабре 2018 г., найден видимый блеск астероида в фильтрах $BVRI$, построены кривые блеска по наблюдениям трёх ночей и подтверждено, что блеск слегка увеличивался из-за приближения астероида к Солнцу и Земле. Показано, что абсолютный блеск по нашим измерениям близок к эфемеридному значению и его величина в пределах ошибок измерений практически не изменялась. Это связано с тем, что период наблюдений пришелся на близкие величины фазового угла. Сделана оценка показателей цвета астероида 2003 SD220 в широкополосной системе $BVRI$. Оценка диаметра 600 м, полученная на основе измерений абсолютного блеска в фильтре V , согласуется с имеющимися данными по размеру астероида. Сближение с Землей в декабре 2018 г. не привело к изменению физических свойств астероида 2003 SD220.

Поступило 06.04.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. https://minorplanetcenter.net/db_search/show_by_orbit_type?orbit_type=2
2. Девяткин А.В., Горшанов Д.Л., Куприянов В.В., Верещагина И.А. Программные пакеты «АПЕКС-I» и «АПЕКС-II» для обработки астрономических ПЗС-наблюдений. – Астрон. вестник, 2010, № 1, с.74-87.
3. Henden A.A., Templeton M., Terrell D., Smith T.C., Levine S., Welch D., 2016. VizieR Online Data Catalog: AAVSO Photometric All Sky Survey (APASS) DR9 (Henden, 2016). – VizieR Online Data Catalog 2336
4. Bowell E., Hapke B., Domingue D. Application of photometric models to asteroids. – In: Asteroids. Ed. Binzel R.P., Gehrels T., Matthews M.S., Tucson: Univ. of Arizona Press, 1989, p. 524-556.
5. Penttila A., Shevchenko V.G., Wilkman O., Muinonen K.H. H, G1, G2 photometric phase function extended to low-accuracy data. – Planet. Space Sci., 2016, Vol. 123, p. 117-125.
6. Chapman C. R., Morrison D., Zellner B. Surface properties of asteroids: A synthesis of polarimetry, radiometry, and spectrophotometry – Icarus, 1975, Vol. 25, № 1, p. 104-130.

7. Zellner B. et al. The asteroid albedo scale. I-Laboratory polarimetry of meteorites. – Lunar and Planetary Science Conference Proceedings, 1977, Vol. 8, p. 1091-1110.
8. Девяткин А.В., Горшанов Д.Л., Петрова С.Н., Башакова Е.А., Львов В.Н., Цекмейстер С.Д., Русов С.А., Иванов А.В., Вершков А.Н., Мартюшева А.А., Барабанов С.И., Ерофеев Д.В., Кохирова Г.И., Хамроев У.Х., Буриев А.М. Базисные наблюдения потенциально опасных астероидов в 2017 году. – Экологический вестник научных центров ЧЭС, 2017, № 4, вып.3, с. 24-31.
9. Nugent C.R. et al. Neowise reactivation mission year two: asteroid diameters and albedos asteroids. – The Astron. Journal, 2016, Vol. 152, № 3, p. 63-75.
10. <http://jpl.nasa.gov/horizons.cgi#results>

Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, С.Н.Сафаров

МУАЙЯН КАРДАНИ ХУСУСИЯТИ ФИЗИКИИ АСТЕРОИДИ ЭҲТИМОЛАН ХАТАРНОКИ 2003 SD220 АЗ РЀИ МУШОҲИДАҲОИ РАСАДҲОНАИ АСТРОНОМИИ ҲИСОР

Институти астрофизикаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Натиҷаҳои коркарди фотометрии мушоҳидаҳои оптикӣ астероиди эҳтимолан хатарноки 2003 SD220, ки бо телескопи АЗТ-8 дар Расадхонаи астрономии Ҳисор ҳангоми наздик шудан ба Замин дар моҳи декабри соли 2018 гузаронида шудаанд, оварда шудааст. Дурахшонии дидашаванда ва ҳақиқии астероид дар чаҳор филтр ба даст оварда шудааст. Хати қачи дурахшонӣ сохта шуда нишон медиҳад, ки дар давраи мушоҳида дурахшонии чирм тақрибан тағйир наёфтааст ва бузургии ҳақиқии дурахшонӣ бо бузургии эфемеридӣ рост меояд. Нишондиҳандаи ранг ба астероидҳои навъи S мувофиқат мекунад. Баҳодихҳои диаметри астероид дар асоси мушоҳидаҳои мо бо маълумоти мавҷуда мувофиқати хуб доранд. Наздик шудани астероид ба Замин ба тағйироти ҷиддии хусусияти физикии он оварда нарасонд.

Калимаҳои калидӣ: астероид, мушоҳидаҳо, фотометрия, дурахшонӣ, хати қачи дурахшонӣ, нишондиҳандаи ранг, диаметр.

G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, S.N.Safarov

DETERMINATION OF THE PHYSICAL PROPERTIES OF A POTENTIALLY HAZARDOUS ASTEROID 2003 SD220 FROM OBSERVATIONS IN THE GISSAR ASTRONOMICAL OBSERVATORY

Institute of Astrophysics of the National Academy of Sciences of Tajikistan

In this paper the results of photometric processing of multicolor observations of the potentially hazardous asteroid 2003 SD220 carried out by the AZT-8 telescope of the Hissar Astronomical Observatory during its approach to Earth in December 2018 are presents. The apparent and absolute brightness of the asteroid in four filters is obtained, the brightness of the object practically did not change during the observation period, the absolute value of the brightness corresponds to the ephemeris value. Color indices correspond to S-type asteroids. The estimates of the asteroid's diameter based on our observations are in good agreement with the available data. The approach of the asteroid with the Earth did not change its physical properties.

Key words: asteroid, observations, photometry, brightness, light curve, color index, diameter.

УДК: 577.3, 539.12 ББК: 22.3830; 88

Б.И.Махсудов, Н.У.Муллоев, Н.Зайдулло

**ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ ПОТОКОВ ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНОВ НА ИК-СПЕКТР
БАКТЕРИЙ *RHIZOBIUM PHASEOLI IS TAAS-80TJ* И
*BACILLUS MEGATERIUM VAR. PHOSPHATICUM****Таджикский национальный университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана Ф.Рахими 29.06.2021 г.)*

Предметом исследований стали ИК-спектры бактерий *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ* и *Bacillus megaterium var. phosphaticum* и оценка влияния малого потока тепловых нейтронов на спектральные характеристики этих биобактерий предназначенных для применения в производстве микрорудобрений. Обнаружено, что в некоторых полосах ИК-спектра бактерий при их облучении малыми потоками тепловых нейтронов происходят увеличение оптической плотности. Наибольшее изменение наблюдается при потоках тепловых нейтронов $5.4 \cdot 10^6$ нейтрон/см², что коррелируется с уменьшением времени прорастания бактерий в 5-6 раз. Экспериментально показано, что одним из возможных механизмов влияния тепловых нейтронов на ИК-спектр бактерий *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ* и *Bacillus megaterium var. phosphaticum* является ядерная реакция радиационного захвата тепловых нейтронов ядрами атомов азота вида ${}^{14}_7\text{N}(n, p){}^{14}_6\text{C}$.

Ключевые слова: ИК-спектр биобактерий, тепловые нейтроны, ядерная реакция, радиационный захват, *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ*, *Bacillus megaterium var. phosphaticum*, гормезис.

Известно, что в отличие от ионизирующего излучения, при взаимодействии нейтронов с веществом происходит процесс радиационного захвата нейтронов ядром атомов, входящих в состав этого вещества [1]. Кроме этого, существуют различные процессы, связанные с упругими и неупругими рассеяниями нейтронов в ядре атомов. Поэтому, вероятность нейтронно-стимулированных структурных превращений в биологических объектах зависит от сечения захвата нейтронов различными ядрами атомов данного вещества. Ряд работ [2-4] были посвящены изучению влияния тепловых нейтронов на свойства биологических систем, но эта проблема изучена слабо. Между тем, различные биологические объекты постоянно подвергаются действию малых потоков тепловых нейтронов во время полётов в стратосфере и космическом пространстве. Облучение тепловыми нейтронами биологических объектов на поверхности Земли наблюдаются при взаимодействии космических лучей с атмосферой, в результате чего возникают, в том числе нейтроны (широкие атмосферные ливни). С этой точки зрения, изучение влияния тепловых нейтронов на свойства биологических систем является интересной научной задачей.

В работах [5-8] были изучены влияния малых потоков тепловых нейтронов на биологические свойства семян технических растений и структурную трансформацию макромолекул ДНК и выжи-

Адрес для корреспонденции: Нигораи Зайдулло, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: nzaydullo@mail.ru

ваемость бактерий *Escherichia coli* при комнатной температуре. Ввиду сложности этих биологических объектов физический механизм, приводящий к эффекту гормезиса остался открытым.

В связи с тем, что биобактерии имеют относительно простые молекулярные структуры, в работах [9,10], на примере изменения характеристик бактерии *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80 TJ* под действием тепловых нейтронов, был выявлен эффект улучшения биологической активности, а также увеличения показателя выживаемости бактерий при определённых потоках тепловых нейтронов (гормезис).

Эксперимент

Для выявления физических механизмов и возможных ядерных реакций, приводящих к эффекту гормезиса при взаимодействии малых потоков тепловых нейтронов с биобактериями в данной работе было проведено исследование ИК-спектров этих объектов. Целью работы является изучение влияния малых потоков тепловых нейтронов на спектральные особенности азота и фосфора фиксирующих бактерий *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ* и *Bacillus megaterium var. phosphaticum* предназначенных для применения в производстве микроудобрений.

Представители рода бактерий *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ* и *Bacillus megaterium var. phosphaticum* фиксируют молекулярный азот и фосфор из атмосферы, вступая в ассоциацию с растением. Для данного эксперимента важным является то, что имеется в наличии большое количество атомов азота и фосфора в бактерии.

Бактерии *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ* и *Bacillus megaterium var. phosphaticum* были выращены общеизвестным методом из клубеньков фасоли и кукурузного рыльца. Данные штаммы активно фиксируют атмосферный азот и фосфор, обладают высокой симбиотической способностью, стимулируют рост, развитие и могут обеспечить высокую урожайность растений.

В настоящее время одним из эффективных способов изучения физико-химических свойств биологических объектов является метод молекулярной спектроскопии, в частности инфракрасная (ИК) спектроскопия. Данный метод даёт возможность получить информацию об относительных положениях молекул, а также определить характер связи между ними, что является важным при изучении структурно-информационных свойств биообъектов.

Известно, что молекулярная структура и физико-химические свойства бактерии определяют их биологическую эффективность. В связи с этим в данной работе вначале методом ИК- спектроскопии, проводилась исследование молекулярной структуры бактерий. Измерения спектров проводились на инфракрасном спектрофотометре IRAffinity-1 с преобразованием Фурье в диапазоне частот 4000–400 см⁻¹ с использованием методики прессования образца с бромидом калия.

После выборки образцы облучались тепловыми нейтронами от Pu-Be- источника при различных потоках нейтронов (от $1.8 \cdot 10^6$ нейтрон/см² до $1.3 \cdot 10^8$ нейтрон/см²). Для получения тепловых нейтронов между источником и образцом размещали парафиновый слой толщиной 5 см. Малый поток тепловых нейтронов представляет собой разреженный нейтронный газ с низкой плотностью, который соответствует нейтронному потоку $\Phi_n \leq 5 \cdot 10^2$ н/см². Опыты были проведены в трехкратном повторении. Облучения бактерий тепловыми нейтронами проводились с длительностью 1-72

часов при температуре 28°C. После облучения образцы сушили в специальном термостате и измельчали.

Результаты и их обсуждение

В качестве примера на рис 1. приведена ИК-спектры *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ*.

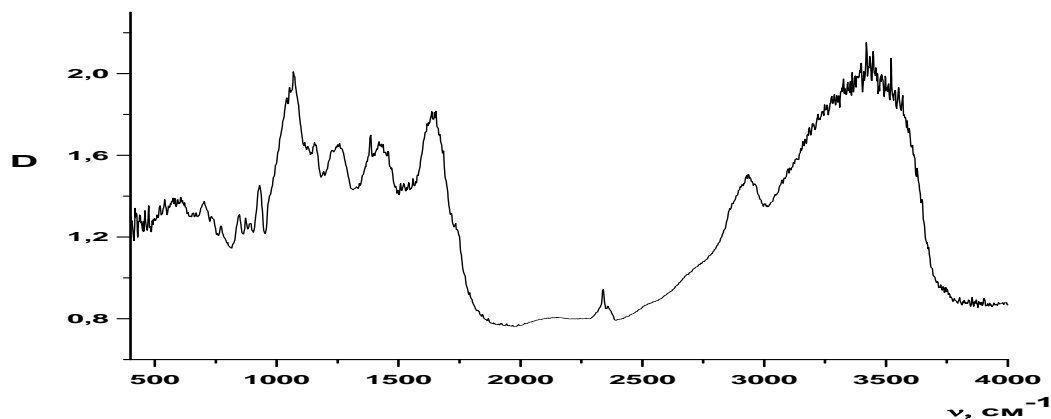


Рис. 1. ИК-спектр бактерии *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ*

Из рис. 1 видно, что в спектре в области 4000-400 см⁻¹ наблюдаются много полос различной формы и интенсивности, что свидетельствует о наличии разнообразных функциональных групп. В табл. 1 приведены наблюдаемые полосы поглощения в этих ИК-спектрах и их отнесение.

Таблица 1

Частота, см ⁻¹	Отнесение полос
3430	валентные колебания ОН групп, связанные водородными связями
2960	антисимметричные валентные колебания связи С-Н метильной группы ($\nu_{as} CH_3$)
2936	антисимметричные валентные колебания связи С-Н метиленовых групп (CH_2) ($\nu_{as} CH_2$)
2891	симметричные валентные колебания связи С-Н метильной группы ($\nu_s CH_3$)
2860	симметричные валентные колебания связи С-Н метиленовых групп (CH_2) ($\nu_s CH_2$)
1730	валентные колебания карбонильных групп ($\nu C=O$)
1645	скелетные колебания ароматических структур, валентные колебания сопряженных углеродных двойных связей $C=C$ и т.д.
1460	асимметричные деформационные колебания связи С-Н в метиленовых групп (CH_2) ($\delta_s CH_2$)
1425	асимметричные деформационные колебания связи С-Н в метиленовых групп (CH_2) ($\delta_s CH_2$)
1385	симметричные деформационные колебания связи С-Н в метильной группы ($\delta_s CH_3$)
1260	(ν_{C-O}), спиртов, сложных эфиров и (δ_{O-H}) связей спиртов и фенолов
1225	(ν_{C-O}), спиртов, сложных эфиров и (δ_{O-H}) связей спиртов и фенолов
1157	
1127	валентные колебания связей С-О углеродов, спиртов, циклических и алифатических эфиров
1065	
930	веерное колебание N-H
890	
870	
846	
771	маятниковые колебания (CH_2) n- фрагментов с $n \geq 4$
730	
702	валентным колебаниям, относящимся к связи С-S
605	валентные колебания S-S- связей

Для количественной оценки интенсивности полос поглощения в ИК-спектрах и относительный концентрации функциональных групп в высокомолекулярных соединениях используются относительные оптические плотности. Известно, что высокая интенсивность полос поглощения связана с большим содержанием функциональных групп в молекуле.

В данной работе относительная количественная оценка содержания функциональных групп по данным ИК-спектроскопии дана на основании отношений оптических плотностей полос поглощения (ОППП) кислородсодержащих функциональных групп (ν_{OH} 3400 cm^{-1} , $\nu_{C=O}$ 1720 cm^{-1} , ν_{C-O} , C-O-C 1225 cm^{-1} , ν_{C-O} 1035 cm^{-1}) к оптическим плотностям полос поглощения, соответствующим ароматическим (1610 cm^{-1}) и алифатическим (2920 cm^{-1}) фрагментам структуры. Полученные результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2

Отношение оптических полос поглощения ОППП (D)	
D_{3430}/D_{1635}	1.13
D_{1730}/D_{1645}	0.75
D_{1225}/D_{1645}	0.9
D_{1065}/D_{1645}	1.11
D_{2936}/D_{1645}	0.84
D_{3430}/D_{2936}	1.34
D_{1730}/D_{2936}	0.89
D_{1225}/D_{2936}	1.06
D_{1065}/D_{2936}	1.31
D_{1065}/D_{1730}	1.47
D_{1645}/D_{2936}	1.18

Следует отметить, что экспериментальные изучения ИК-спектров бактерий *Bacillus megaterium var. phosphaticum* привели к таким же результатам.

На рис. 2 и 3 представлены экспериментальные результаты зависимости оптической плотности полосы 1384 cm^{-1} , соответствующей деформационной группе δCH ИК –спектров *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ* (рис. 2) и *Bacillus megaterium var. phosphaticum* (рис. 3), от величины потока тепловых нейтронов.

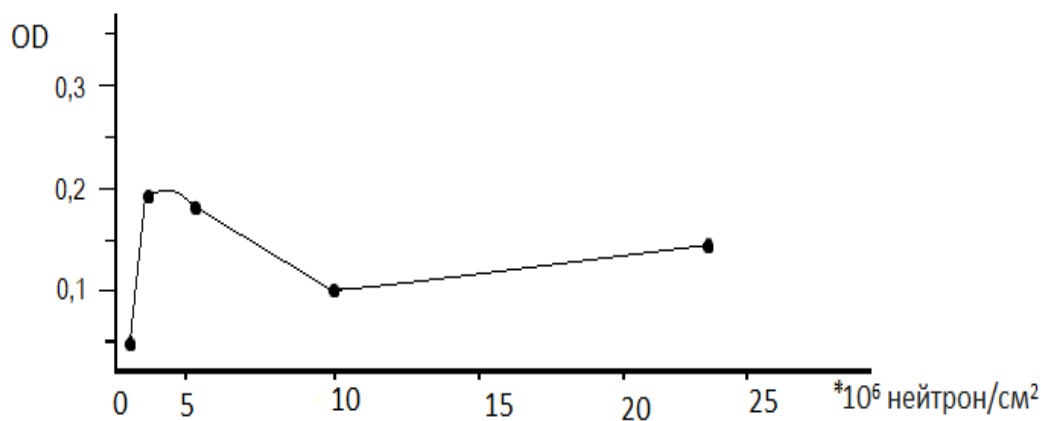


Рис. 2. Зависимость оптической плотности полосы поглощения 1384 cm^{-1} ИК-спектра *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ* от величины потока тепловых нейтронов.

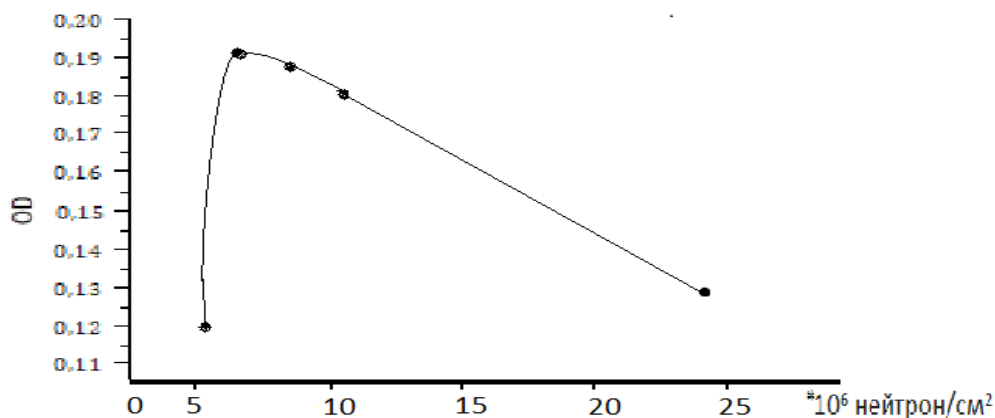


Рис. 3. Зависимость оптической плотности полосы поглощения 1384 см^{-1} ИК-спектра *Bacillus megaterium* var. *phosphaticum* от величины потока тепловых нейтронов.

Обсуждение

Из представленных результатов в табл. 2 видно, что ОППП алифатических фрагментов структуры к ароматическим ($D_{\text{алкил } 2936}/D_{\text{C=C } 1645}$) меньше единицы, что говорит о преобладании ароматической составляющей над алкильной. Наблюдается высокое содержание гидроксильных групп: $D_{\text{O-H } 3430}/D_{\text{C=C } 1645} > 1$. Содержание гидроксильных групп преобладает над алкильными фрагментами, поскольку $D_{\text{O-H } 3430}/D_{\text{C-алк } 2936} > 1$. Кроме того, наблюдается большее содержание алкильных заместителей, чем карбоксильных групп ($D_{\text{C=O } 1730}/D_{\text{C-алк } 2936} < 1$).

Из рис. 2 и 3 видно, что при определённом потоке тепловых нейтронов оптическая плотность данной полосы для обеих бактерий увеличивается, и эта зависимость имеет явный максимум. Следует отметить, что при этих значениях потока тепловых нейтронов биологическая активность бактерий увеличивается [10].

Выводы

Методом ИК-спектроскопии установлены основные характеристические максимумы полос поглощения биобактерии *Rhizobium phaseoli* IS TAAS-80TJ и *Bacillus megaterium* var. *phosphaticum*. Наблюдаемые характеристические пики подтверждает двучленность молекул биобактерии, состоящих из ароматической и алифатических цепей. Для данной бактерии наблюдается максимальное преобладание гидроксильных, карбонильных групп над ароматической и алифатической частью, а также максимальное преобладание ароматической части над алифатической.

По результатам данной работы можно заключить, что наблюдается корреляция между увеличением биологической активности и увеличением оптической плотности некоторых полос поглощения в ИК-спектре бактерий *Rhizobium phaseoli* IS TAAS-80TJ и *Bacillus megaterium* var. *phosphaticum* при облучении малым потоком тепловых нейтронов. Видимо, это связано с протеканием ядерной реакции радиационного захвата тепловых нейтронов вида ${}^{14}_7\text{N}(n, p){}^{14}_6\text{C}$, приводящей к увеличению концентрации ядер атома карбона [11]. Увеличение числа атомов карбона искусственным путём обеспечивает увеличению биологической активности исследованных биобактерий.

Поступило 17.03.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Махсудов Б.И., Нигораи З. Эффекты при взаимодействии малых потоков тепловых нейтронов с. – Вестник ТНУ, №1, 2020, с. 94-107.
2. Tanaka K., Kamada N., Hoshi M., Sawada S. Effects of 252Cf neutrons, transmitted through an iron block on human lymphocyte chromosome. – International journal of radiation biology, 1994, v. 66, pp. 391-397.
3. Zhang W., Endo S., Ishikawa M. et al. – J. Radiat. Res., 2002, v. 43, pp. 397-403.
4. Cebulska–Wasilewska A., Schneider K., Kim J.K. Relative biological efficiency for the induction of various gene mutations in normal and enriched with ¹⁰B Tradescantia cells by neutrons from 252Cf source. – Mutat. Res., 2001, v. 474. pp. 57-70.
5. Ходжаев Т.А., Муллоев Н.У., Махсудов Б.И. Изучение механизма влияния тепловых нейтронов на процесс прорастания и всхожесть семян кукурузы методом ИК спектроскопии. – Вестник ТНУ, 2015, № 1/5(188), с. 113-117.
6. Ходжаев Т.А., Муллоев Н.У., Махсудов Б.И. Способ повышения коэффициента действия азотных удобрений. – Патент РТ №Тj 487 от 10.06.2016 г.
7. Жижина Г.П., Липсон А.Г., Гагина И.А., Васильева С.В., Бородин М.К., Саунин Е.И., Цивадзе А.Ю. – ДАН РФ, 2010, т.431, №1, с. 123-128.
8. Липсон А.Г., Жижина Г.П., Бурлакова Е.Б. и др. – Биофизика, 2007, т.52, №5, с. 830-837.
9. Махсудов Б.И., Нигораи З. Влияние малых потоков тепловых нейтронов на ИК-спектр бактерий *Rhizobium phaseoli* IS TAAS-80TJ. Мат. респ. научно- практ. Конференции. – Душанбе, 19 февраля 2020, с. 215-218.
10. Махсудов Б.И., Салимов К.Х., Н.Зайдулло. Влияние малых потоков тепловых нейтронов на скорость роста бактерий *Rhizobium phaseoli* IS TAAS-80TJ. – ДАН РТ, 2020, т. 63, №11-12, с. 723-727.
11. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. – М.: Атомиздат, 1974, 366 с.

**З а я в л е н и е о с о б л ю д е н и и э т н и ч е с к и х н о р м и с т а н д а р т о в р а б о -
т ы с л ю д ь м и и ж и в о т н ы м и**

Работа выполнена в рамках программы исследований «Ядерное взаимодействие нейтронов с веществом», запланированных в Таджикском национальном университете.

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Б.И.Махсудов, Н.У.Муллоев, Н.Зайдулло

**ТАЪСИРИ ХУРДИ КАМИ НЕЙТРОНҲОИ ҲАРОРАТӢ БА СПЕКТРИ
ИНФРАСУРХИ БАКТЕРИЯҲОИ *RHIZOBIUM PHASEOLI* IS TAAS-80 TJ ВА
BACILLUS MEGATERIUM VAR. *PHOSPHATICUM***

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Спектри инфрасурхи бактерияҳои *Rhizobium phaseoli* IS TAAS-80TJ ва *Bacillus megaterium* var. *phosphaticum*, инчунин таъсири сели ками нейтронҳои ҳароратӣ ба ҳосиятҳои спектралӣ ин

биобактерияҳо омӯхта шудааст, ки барои истехсоли микронуриҳо истифода мешаванд. Дар баъзе рахҳои тайфи инфрасурхи бактерияҳо, ҳангоми таъсири сели ками нейтронҳои ҳароратӣ, зиёдшавии зичии оптикӣ ба қайд гирифта шудааст. Тағйироти бештар ҳангоми сели нейтронҳои ҳароратӣ ба $5.4 \cdot 10^6$ нейтрон/см² баробар будан ба даст оварда шудааст, ки дар ин маврид камшавии вақти афзоиши бактерияҳо то 5-6 маротиба мушоҳида карда шудааст. Таҷрибаҳо нишон доданд, ки яке аз механизмҳои таъсири сели ками нейтронҳои ҳароратӣ ба тайфи инфрасурхи бактерияҳои *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ* ва *Bacillus megaterium var. phosphaticum*, ин реаксияи рабӯи радиатсионии нейтронҳои ҳароратӣ аз чониби ҳастаи атоми азоти намуди ${}^{14}_7N(n, p){}^{14}_6C$ мебошад.

Калимаҳои калидӣ: тайфи инфрасурхи бактерияҳо, нейтронҳои ҳароратӣ, реаксияи ҳастаӣ, рабӯи радиатсионӣ, *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ*, *Bacillus megaterium var. phosphaticum*, гормезис.

B.I.Mahsudov, N.U.Mulloev, N.Zaydullo

EFFECT OF LOW FLOWS OF THERMAL NEUTRONS ON THE IR SPECTRUM OF RHIZOBIUM PHASEOLI IS TAAS-80TJ AND BACILLUS MEGATERIUM VAR. PHOSPHATICUM BACTERIA

Tajik National University

The IR spectra of bacteria *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ* and *Bacillus megaterium var. phosphaticum* and the effect of a low flux of thermal neutrons on the spectral characteristics of these biobacteria intended for use in the production of microfertilizers were studied. It was found that in some bands of the IR spectrum of bacteria, when they are irradiated with small fluxes of thermal neutrons, an increase in optical density occurs. The greatest change is observed at a thermal neutron flux of $5.4 \cdot 10$ neutron / cm², which correlates with a 5-6-fold decrease in the germination time of bacteria. It has been shown experimentally that one of the possible mechanisms of the effect of thermal neutrons on the IR spectrum of bacteria *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ* and *Bacillus megaterium var. phosphaticum* is the nuclear reaction of radiative capture of thermal neutrons by nuclei of nitrogen atoms of the form ${}^{14}_7N(n, p){}^{14}_6C$.

Key words: IR spectrum of biobacteria, thermal neutrons, nuclear reaction, radiation capture, *Rhizobium phaseoli IS TAAS-80TJ*, *Bacillus megaterium var. phosphaticum*, hormesis.

УДК 539.173.8

С.Ф.Одинаев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОГАЩЕНИЯ УРАНОВЫХ ОБРАЗЦОВ С ПОМОЩЬЮ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ НЕЙТРОНОВ

Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана Ф.Рахими 10.05.2021 г.)

В работе рассмотрено экспериментальное определение неизвестного обогащения урановых образцов с помощью запаздывающих нейтронов и моделирования процессов облучения урановых образцов разных обогащений с помощью запаздывающих нейтронов.

Ключевые слова: *термоядерная реакция, тепловыделяющая сборка, делящиеся материалы, импульсный нейтронный генератор, неразрушающий анализ.*

В процессе деления ядер U и Pu возникают мгновенные и запаздывающие нейтроны. Эти нейтроны отличаются по времени вылета после стадии процесса деления. Для мгновенных нейтронов время вылета составляет $\sim 10^{-20}$ с, то есть они возникают почти одновременно с делением ядра, а запаздывающие нейтроны появляются в результате радиоактивного распада ядер-эмиттеров через некоторое время $\sim (0.1-100)$ с после деления. Также отличие этих нейтронов друг от друга характеризуется числом нейтронов на один акт деления. Несмотря на то, что относительная доля запаздывающих нейтронов невелика, существенно меньше 1%, они играют большую роль в кинетике ядерных реакторов.

Запаздывающие нейтроны можно разделить на шесть групп с различными периодами полураспада. Деление ядер может быть вызвано тепловыми и быстрыми нейтронами. Нечетные нуклиды - ^{233}U , ^{235}U , ^{239}Pu , делятся тепловыми нейтронами, а другие четные нуклиды, например ^{232}Th , ^{238}U , делятся только высокоэнергетическими нейтронами. Можно заметить, что в табл. 1 полные выходы запаздывающих нейтронов разные для каждого изотопа урана и плутония.

Таблица 1

Групповой выход запаздывающих нейтронов на один акт деления

Номер группы	Период полураспада, с	Деление тепловыми нейтронами			Деление быстрыми нейтронами		$E_{\text{нейтр}}$, МэВ для ^{235}U
		^{233}U	^{235}U	^{239}Pu	^{232}Th	^{238}U	
1	54 – 56	0.0006	0.0005	0.0002	0.0017	0.0005	0.25
2	21 – 23	0.0020	0.0035	0.0018	0.0074	0.0056	0.56
3	5 – 6	0.0017	0.0031	0.0013	0.0077	0.0067	0.43
4	1.9 – 2.3	0.0018	0.0062	0.0020	0.0221	0.0160	0.62
5	0.5 – 0.6	0.0003	0.0018	0.0005	0.0085	0.0093	0.42
6	0.17 – 0.27	0.0002	0.0007	0.0003	0.0021	0.0031	–

Адрес для корреспонденции: *Одинаев Субхонджон Фатхуллоевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Физико-технический институт НАНТ. E-mail: subhon93@mail.ru*

Таблица 2

Полный выход запаздывающих нейтронов на один акт деления

Деление тепловыми нейтронами			Деление быстрыми нейтронами	
^{233}U	^{235}U	^{239}Pu	^{232}Th	^{238}U
0.0066	0.0158	0.0061	0.0495	0.0412

Таким образом, с помощью временных, количественных и спектральных характеристик запаздывающих нейтронов открываются возможности их использования в неразрушающемся контроле ядерных материалов и построения установок активного контроля. В работе экспериментально определяется обогащение урановых образцов с помощью запаздывающих нейтронов.

Метод определения содержания ^{235}U в образцах урана различного обогащения

Рассмотрим метод определения содержания ^{235}U в урановых образцах различного обогащения с помощью запаздывающих нейтронов, играющих большую роль в активных методах неразрушающего контроля, так как отклик запаздывающих нейтронов, благодаря своим временным характеристикам, легко делится с откликом мгновенных нейтронов источника [4]. В этом методе в качестве внешнего источника облучения используется импульсный нейтронный генератор и урановые образцы облучаются нейтронами источника, которые возникают в результате термоядерной реакции (DT). В импульсном нейтронном генераторе длительность нейтронного импульса равна примерно 1 мкс при частоте их повторения, равной 10 Гц.

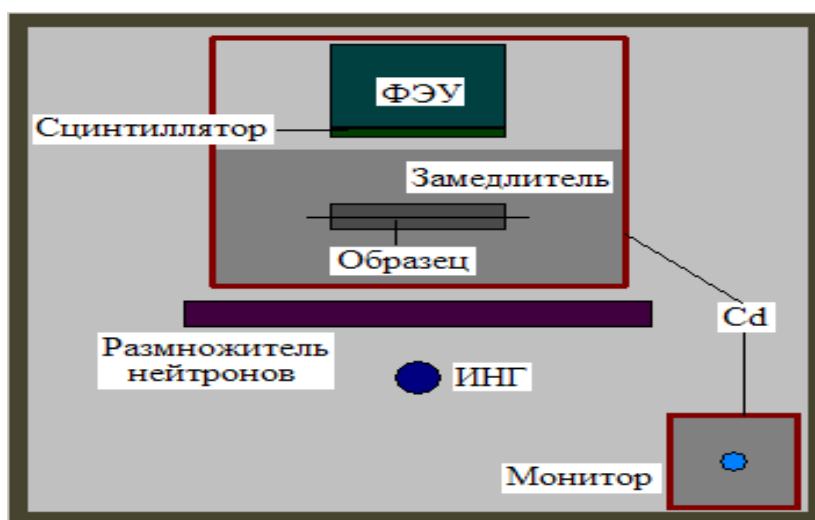


Рис. 1. Схема экспериментальной установки [1].

Из рис.1 видно, что установка также состоит из замедлителя в виде плексигласа, детектора запаздывающих нейтронов (сцинтиллятор на основе ^6Li , ФЭУ). Между замедлителем и импульсным нейтронным генератором расположен свинцовый размножитель нейтронов [5]. Далее нейтроны источника попадают в водородосодержащий замедлитель, и процесс замедления этих нейтронов длится примерно несколько микросекунд. За это время урановые образцы также будут облучаться этими замедлившимися нейтронами. Затем образцы будут облучаться тепловыми нейтронами. Таким образом, за весь период проведения эксперимента исследуемые урановые образцы будут облучаться ней-

тронами источника, замедлившимися нейтронами и тепловыми нейтронами. Это означает, что деление урана в исследуемом образце будет иметь две временные стадии.

Урановый образец состоит из смеси ^{235}U и ^{238}U . Известно, что ^{238}U имеет пороговый характер зависимости сечения от энергии и не может делиться нейтронами тепловой энергии, а значит, отклик от деления этого изотопа будет только на первой стадии облучения. Сечение деления ^{235}U большое в области низких энергий, поэтому этот нуклид делится в основном тепловыми нейтронами.

Соответственно число запаздывающих нейтронов будет определяться на первой стадии всеми изотопами, то есть общим количеством ^{235}U и ^{238}U . На второй стадии число запаздывающих нейтронов будет определяться только количеством ^{235}U . В экспериментальной установке имеется также монитор, в качестве которого используется замедлитель со счетчиком тепловых нейтронов. Монитор облучается нейтронами источника, но чтобы монитор не облучался нейтронами деления, он расположен отдельно от урановых образцов. Монитор позволяет нормировать число запаздывающих нейтронов, которые появились в урановом образце, на выход нейтронов импульсного нейтронного генератора.

В экспериментах используются образцы с обогащениями от 1 до 6% для построения зависимости информативных параметров от обогащения урановых образцов, где информативный параметр - отклик запаздывающих нейтронов, нормированный на выход нейтронов импульсного нейтронного генератора с помощью монитора [4,5].

В первой части измерения облучаются урановые образцы всех обогащений, когда в установке кадмиевые экраны отсутствуют. Тогда запаздывающие нейтроны будут определяться делением всех изотопов урана быстрыми и тепловыми нейтронами. В этом случае выражение для отклика запаздывающих нейтронов можно представить в виде:

$$N_{\text{зан}} = \varepsilon_{\text{зан.быстр}} \cdot \Phi_{\text{быстр}} \cdot (\sigma_f^{238} \cdot \beta_{238} \cdot \gamma_{238} + \sigma_f^{235} \cdot \beta_{235} \cdot \gamma_{235}) + \varepsilon_{\text{зан.тепл}} \cdot \Phi_{\text{тепл}} \cdot \sigma_f^{235} \cdot \beta_{235} \cdot \gamma_{235}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_{\text{зан}}$ – эффективность регистрации запаздывающих нейтронов сцинтиллятором на основе ${}^6\text{Li}$; $\Phi_{\text{быстр}}$, $\Phi_{\text{тепл}}$ – отклики плотности потока быстрых и тепловых нейтронов, нормированные на показания мониторного тракта; σ_f^{238} , β_{238} , γ_{238} , σ_f^{235} , β_{235} , γ_{235} – сечения деления, выходы запаздывающих нейтронов и количества ядер делимых нуклидов в одном см^3 «гомогенного» уранового образца. В этом выражении пренебрегаем количеством запаздывающих нейтронов, возникающих в результате деления ^{235}U быстрыми нейтронами. Тогда уравнение имеет вид:

$$N_{\text{зан}} \cong \varepsilon_{\text{зан.быстр}} \cdot \Phi_{\text{быстр}} \cdot \sigma_f^{238} \cdot \beta_{238} \cdot \gamma_{238} + \varepsilon_{\text{зан.тепл}} \cdot \Phi_{\text{тепл}} \cdot \sigma_f^{235} \cdot \beta_{235} \cdot \gamma_{235}. \quad (2)$$

Во второй части экспериментов облучаются все образцы, когда в установке присутствует кадмиевый экран. Так как кадмиевые экраны поглощают тепловые нейтроны и тепловые нейтроны уже не могут облучать исследуемые урановые образцы, поэтому деление урана в образцах происходит под действием высокоэнергетических нейтронов с энергией выше энергии кадмиевого резонанса. Тогда отклик запаздывающих нейтронов:

$$N_{\text{зан}} = \varepsilon_{\text{зан.быстр}} \cdot \Phi_{\text{быстр}} \cdot (\sigma_f^{238} \cdot \beta_{238} \cdot \gamma_{238} + \sigma_f^{235} \cdot \beta_{235} \cdot \gamma_{235}). \quad (3)$$

В этом выражении можно пренебречь количеством запаздывающих нейтронов, возникающих в результате деления ²³⁵U быстрыми нейтронами. Тогда уравнение (3) будет иметь вид:

$$N_{\text{зан}} \cong \varepsilon_{\text{зан.быстр}} \cdot \Phi_{\text{быстр}} \cdot \sigma_f^{238} \cdot \beta_{238} \cdot \gamma_{238}. \quad (4)$$

Таким образом, можно получить разность в откликах запаздывающих нейтронов в двух частях экспериментов (разность уравнений (2) и (4):

$$\Delta N_{\text{зан}} \cong \varepsilon_{\text{зан.мел}} \cdot \Phi_{\text{мел}} \cdot \sigma_f^{235} \cdot \beta_{235} \cdot \gamma_{235}. \quad (5)$$

Поэтому полученная разность ΔN определяется целиком тепловыми нейтронами и характеризуется количеством ²³⁵U в исследуемых образцах. Зная ΔN , можно получить соответствующую зависимость, и используя эти зависимости, как обратная задача, можно определить неизвестное обогащение уранового образца.

В данной работе используются следующие информативные параметры:

- P1=S1/H1 – величина пропорциональная отношению суммы запаздывающих нейтронов для уранового образца без кадмиевого экрана к количеству нейтронов, зарегистрированных монитором;
- P2=S2/H2 – величина пропорциональная отношению суммы запаздывающих нейтронов для уранового образца в кадмиевом экране к количеству нейтронов, зарегистрированных монитором;
- P3=S1/ H1 – S2 / H2 – разность указанных выше информативных параметров.

Для получения информативных параметров проводится серия «измерений» с образцами делящегося материала разного обогащения. При каждом обогащении «измерения» проводятся дважды – с образцом в кадмиевом экране и без экрана (табл. 3).

Таблица 3

Результаты обработки

Обогащение, %	S1	δS1, %	H1	δH1, %	S2	δS2, %	H2	δH2, %
1.00	3200	1.77	9110	1.05	526	4.36	8910	1.06
2.00	5050	1.41	9050	1.05	527	4.36	9020	1.05
3.00	6810	1.21	9100	1.05	552	4.26	9000	1.05
4.00	8180	1.11	8940	1.06	529	4.35	8970	1.06
5.00	9180	1.04	9170	1.04	566	4.20	8970	1.06
6.00	9860	1.01	8870	1.06	510	4.43	8990	1.05
X.XX	6650	1.23	8910	1.06	525	4.36	8990	1.05

Результаты «измерений» и их обработка

Выражение временной зависимости плотности потока нейтронов имеет вид [3]:

$$\Phi(t) = Ae^{-\alpha t} + \Phi_0, \quad (6)$$

где α – постоянная спада плотности потока тепловых нейтронов замедлителя установки, а Φ_0 – отклик запаздывающих нейтронов.

Используя полученные данные (табл. 1) и с помощью нижеприведенных формул были рассчитаны информативные параметры и их погрешности для всех обогащений образца. (табл. 4).

Формулы для вычисления информативных параметров и их погрешностей, где символом δ обозначается относительная погрешность, имеют следующий вид:

$$P1 = \frac{S1}{H1},$$

$$\delta P1 = \sqrt{(\delta S1)^2 + (\delta H1)^2},$$

$$P2 = \frac{S2}{H2},$$

$$\delta P2 = \sqrt{(\delta S2)^2 + (\delta H2)^2},$$

$$P3 = P1 - P2,$$

$$\delta P3 = \sqrt{(\delta P1 \cdot P1)^2 + (\delta P2 \cdot P2)^2} / P3,$$

где значения $\delta S1$, $\delta S2$, $\delta H1$, $\delta H2$ берутся из табл. 3.

Таблица 4

Информативные параметры

Обогащение, %	$P1$	$\delta P1$, %	$P2$	$\delta P2$, %	$P3$	$\delta P3$, %
1.00	0.351	2.05	0.059	4.48	0.292	2.63
2.00	0.558	1.76	0.058	4.48	0.5	2.03
3.00	0.748	1.60	0.061	4.38	0.687	1.79
4.00	0.915	1.53	0.058	4.47	0.856	1.66
5.00	1.00	1.48	0.063	4.33	0.938	1.6
6.00	1.11	1.46	0.056	4.55	1.054	1.56
X.XX	0.746	1.62	0.058	4.49	0.688	1.8

Используя найденные значения информативных параметров (табл. 4) и их погрешности, были построены графики информативных параметров в зависимости от обогащения. Используя информативные параметры для образца с неизвестным обогащением, графически определили это обогащение (рис. 2)

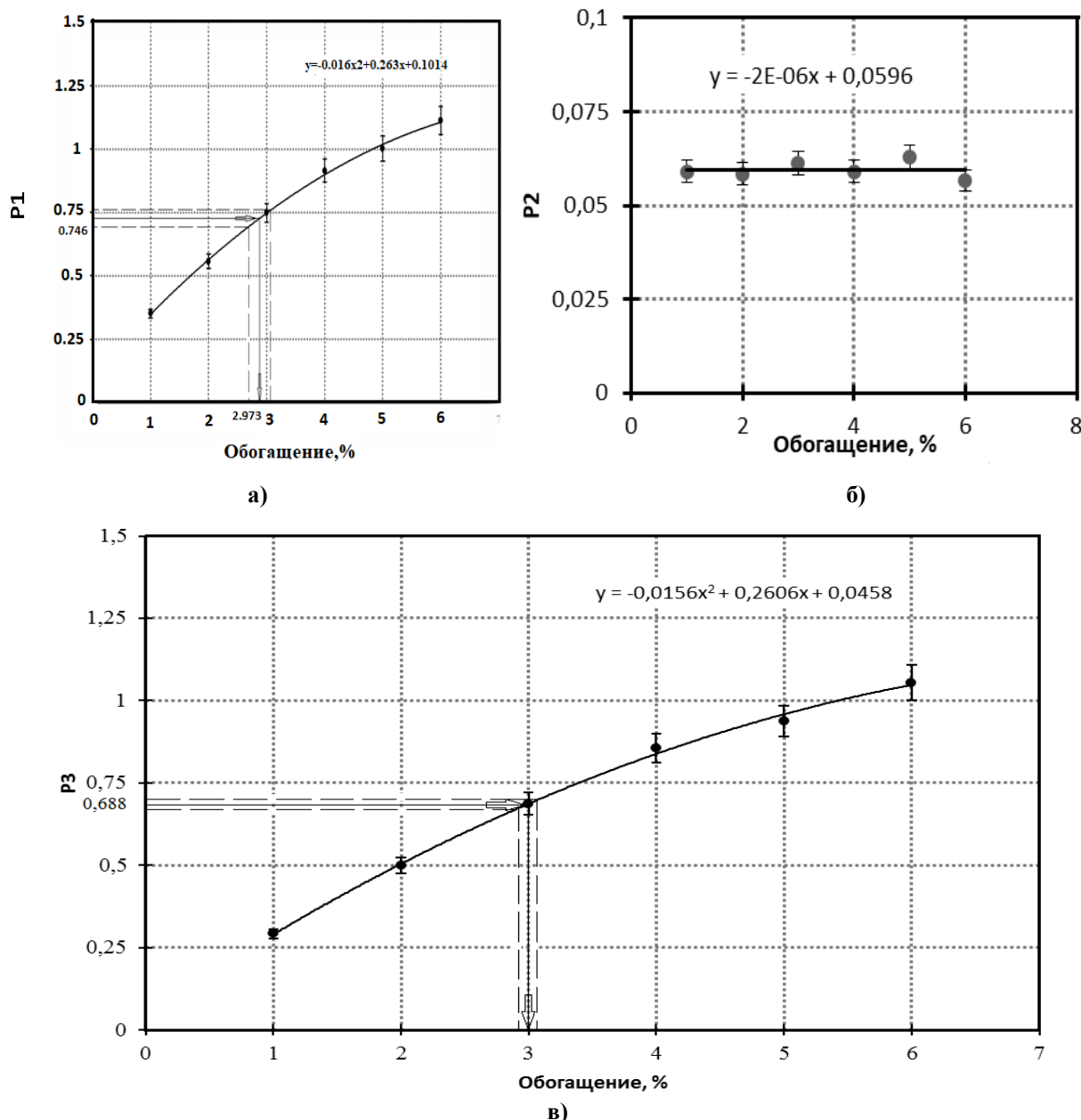


Рис. 2. Зависимость информативного параметра P1 от обогащения (а), зависимость информативного параметра P2 от обогащения образца (б), зависимость информативного параметра P3 от обогащения образца (в).

Величина $P1=S1/H1$ - пропорциональная отношению суммы запаздывающих нейтронов для уранового образца без кадмиевого экрана к количеству нейтронов, зарегистрированных монитором. Неизвестное обогащение $X = (2.97 \pm 0.15) \%$ при $P1 = (0.746 \pm 0.012)$.

Величина $P2=S2/H2$ – величина пропорциональная отношению суммы запаздывающих нейтронов для уранового образца в кадмиевом экране к количеству нейтронов, зарегистрированных монитором. Видно, что полученная зависимость не подходит для определения неизвестного обогащения.

Величина $P3=(S1/H1-S2/H2)$ – разность информативных параметров при наличии и отсутствии кадмиевого экрана. Неизвестное обогащение $X = (3.01 \pm 0.09) \%$ при $P3 = (0.688 \pm 0.012)$ $X_{теор} = 2.93 \%$.

В ы в о д ы

В работе изучен метод определения обогащения урановых образцов с помощью запаздывающих нейтронов. Измерения проводились на основе программы UDCM_012. В результате были получены временные спектры нейтронов для образцов различного обогащения и тем самым значения информативных параметров. Используя результаты обработки были построены графики зависимости информативных параметров от обогащения образцов. С помощью этих зависимостей графически было определено значение неизвестного обогащения исследуемого образца. С помощью зависимости информативного параметра $P2$ от обогащения невозможно определить неизвестное обогащение образца. Это означает, что когда в установке присутствует кадмиевый экран, все тепловые нейтроны поглощаются и остаются только быстрые нейтроны. Поэтому источником запаздывающих нейтронов является в основном деление ^{238}U быстрыми нейтронами, так как деление ^{235}U быстрыми нейтронами пренебрегаются из-за малого количества ядер ^{235}U .

Для $P1=(0.746\pm 0.012)$ графически определено значение неизвестного обогащения $X=(2.97\pm 0.15)\%$.

Для $P3=(0.688\pm 0.012)$ значение неизвестного обогащения $X=(3.01\pm 0.09)\%$.

Для неизвестного обогащения, заданной программой $X=2.93\%$.

Видно, что значения, полученные с помощью расчета, и заданные программой сходятся в пределах погрешности.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» А.Г.Белевиту, доктору физико-математических наук В.Л.Ромоданову за помощь в обработке данных эксперимента, а также академикам НАНТ Х.Х.Муминову и Ф.Рахими за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Поступило 10.05.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ромоданов В.Л. Лабораторные работы по активным методам неразрушающего контроля делящихся материалов. Учебное пособие. – М.:НИЯУ МИФИ, 2007, 48 с.
2. Ромоданов В.Л. Физические методы и установки активного контроля делящихся материалов. Учебное пособие. – М.:НИЯУ МИФИ, 2007, 196 с.
3. Ромоданов В.Л., Николаев В.Г. Определение содержания делящихся веществ в ТВС ядерных реакторов с использованием импульсного нейтронного источника. – Тр. Междунар. конф. по учету и контролю ядерных материалов. МРС&А-2000, Обнинск Россия, 2000, с. 3.129-3.137.
4. Одинаев С.Ф., Рахими Ф., Муминов Х.Х., Ромоданов В.Л., Имом М.Ш. Определение измеряемых информативных параметров содержания ^{235}U в установках контроля тепловыделяющих сборок ядерных реакторов. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геолог. и техн. наук, 2020, №4 (181), с. 78-83
5. Одинаев С.Ф., Рахими Ф., Муминов Х.Х., Ромоданов В.Л., Имом М.Ш. Оптимизация параметров установки для определения количества ^{235}U в тепловыделяющей сборке. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геолог. и техн.н., 2019, №1 (174), с. 132-137.

С.Ф.Одинаев

**МУАЙЯН НАМУДАНИ НАМУНАҲОИ УРАНИ ҒАНИГАРДОНИДАШУДА БО
ЁРИИ НЕЙТРОНҲОИ ТАЪХИРМОНДА***Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови**Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар кори мазкур таҷрибавӣ муайян кардани намунаҳои номуайяни афканишоти урани ғанигардонидашуда бо ёрии нейтронҳои таъхирмонда ва моделсозии равандҳои ҳаргуна намунаҳои урани ғанигардонидашуда бо ёрии нейтронҳои таъхирмонда дида шуд.

Калимаҳои калидӣ: *реакцияи термоядрои (DT), васлкунаки гармичудоқунанда, моддаҳои тақсимишаванда, генератори нейтрони импульсӣ, таҳлили мустаҳкам.*

S.F.Odinaev

**DETERMINATION OF ENRICHMENT OF URANIUM SAMPLES USING
DELAYED NEUTRONS***S.U.Umarov Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

In this work the experimental determination of unknown enrichment of uranium samples using delayed neutrons and modeling of irradiation processes of uranium samples of different enrichment using delayed neutrons are considered.

Key words: *DT-thermonuclear reaction, heat-extensive assembly, fissile materials, pulsed neutron generator, nondestructive analysis.*

УДК 539.173.8

М.Ш.Имом

ЦИФРОВОЙ МЕТОД АНАЛИЗА СКОРОСТЕЙ СЧЁТА ВРЕМЕННЫХ СОВПАДЕНИЙ ИМПУЛЬСОВ γ - γ И n - n ^{252}Cf

Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана Ф.Рахими 10.05.2021 г.)

В работе исследован цифровой метод анализа скоростей счета временных совпадений импульсов γ - γ и n - n источника калифорния. Требовалось провести измерение временных совпадений гамма-квантов и нейтронов различной кратности в установке с защитным слоем neutrostop и без защитного слоя, с целью определения содержания делящихся материалов.

Ключевые слова: *скорость счета временных совпадений, неразрушающий анализ (НРА), цифровой анализ, защитный слой, двойное совпадение, аналого-цифровой преобразователь (АЦП), ядерные делящиеся материалы, фотоэлектронные умножители (ФЭУ), наносекунда.*

Ядерные делящиеся материалы (ЯДМ) по своей природе имеют фотонные и нейтронные излучения и это дает возможность проводить анализ их обнаружений и контроля. Это связано с безопасностью эксплуатации ядерно-энергетических установок, системой учета ЯДМ и проблемой их нераспространения. Процесс производства ядерного топлива и его переработки решается в основном с помощью радиохимии, однако после того как изделие, содержащее ЯДМ переходит в стадию эксплуатации, процесс контроля его реального состава становится значительно более сложным, так как многие изделия имеют защитные покрытия и не подлежат разборке и разрушению.

Существует ряд методов по обнаружению и контролю ЯДМ. Все методы обнаружения подразделяются на 2 категории: пассивные и активные. В настоящее время наиболее распространенной является классификация неразрушающих методов контроля ядерных материалов, базирующаяся на способе получения ядерного излучения, используемого для анализа состава инспектируемого образца [1].

Метод счета временных совпадений импульсов нейтронов и гамма-квантов ЯДМ

Счет нейтронных совпадений является быстрой методикой НРА, которая извлекает значительную полезную и качественную информацию из нейтронов, испускаемых плутонием. Испускаемые при спонтанном делении совпадающие нейтроны обеспечивают мощную сигнатуру для плутония. В идеале, данная информация должна обеспечить уникальную сигнатуру для плутония, а также должна определить фактические граммы эффективной массы ^{240}Pu в пробе, где это количество определено как такая же масса ^{240}Pu , который бы дал тот же отклик двойных совпадений, что и полученный от всех четных изотопов в фактической пробе [2].

Адрес для корреспонденции: Имом Мирахмади Шарофиддин. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Физико-технический институт НАНТ. E-mail: emmirshar@gmail.com

Описание установки и программного обеспечения счета временных совпадений импульсов нейтронов и гамма-квантов Я Д М

Установка цифрового анализа откликов нейтронов и гамма-квантов состоит из: четырех сцинтилляторов, 4 фотоэлектронных умножителей, АЦП, защитного слоя neutrostop (поглотителя), также программного обеспечения для дальнейшей обработки полученных откликов [3].

Программа счета совпадений позволяет использовать уже обработанные ранее данные для подсчета временных совпадений различных кратностей. Если с задачей счета синглетов справляется программа первичной обработки, то для подсчета дуплетов и триплетов используется именно вышеуказанная программа. Представляется возможным просчитать скорости счета следующих дуплетов: n - n , γ - γ и γ - n , а также следующие комбинации триплетов: γ - γ - n , n - n - n , n - γ - n и γ - n - n .

Сначала программа определяет количество всех двойных совпадений. После производится подсчет дуплетов типа γ - γ и n - n . Затем программа предоставляет возможность выбора дуплетов γ - n .

Программа позволяет задавать различные параметры, при которых будет производиться обсчет совпадений, подключать или исключать из процесса обработки информацию, зарегистрированную тем или иным детектором.

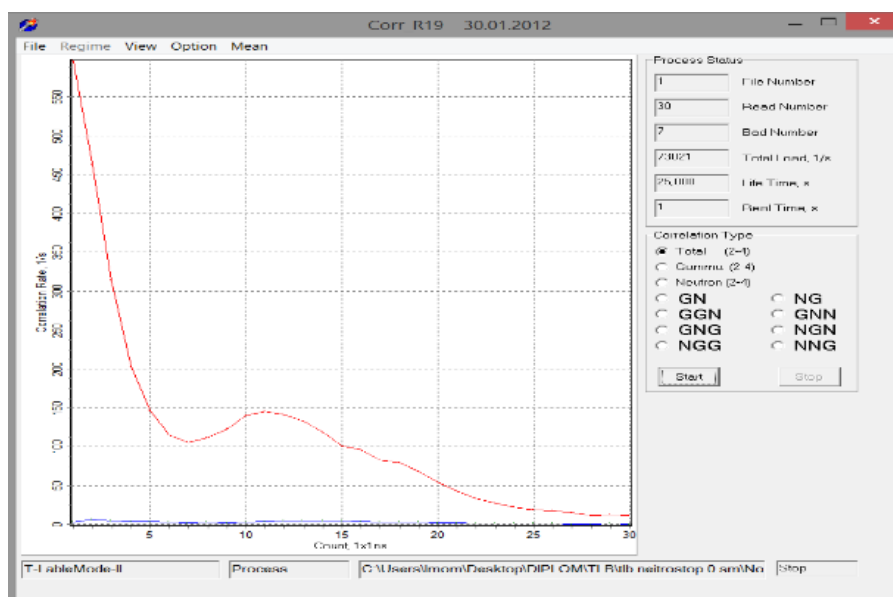


Рис. 1. Программное обеспечение откликов счета временных совпадений импульсов n и γ .

Программа счета временных совпадений нейтронов и гамма-квантов выполняет обработку оцифрованных амплитудно-временных распределений уровня сигнала от детекторов ионизационного излучения и вычисление скорости счета реальных совпадений откликов. С помощью данной программы можно вычислять следующие параметры:

- скорость счета зарегистрированных частиц в детектирующей системе;
- скорость счета временных совпадений различной кратности, а также их распределение по времени. Текущая версия программы позволяет строить временные распределения в интервалах 30 нс с шагом 1нс;
- скорость счета двойных совпадений между парами;

- статистическую погрешность для скорости счета совпадений различной кратности.

Проведенные эксперименты и полученные результаты

Были проведены эксперименты по определению счета временных совпадений двойной кратности нейтронов и гамма-квантов с использованием в качестве поглотителя защитного слоя neutrostop и без защитного слоя. С помощью программного обеспечения определялись счет γ - γ и n-n совпадений. Время измерения было до 30 нс. Результаты полученных значений временных счетов совпадений импульсов нейтронов и гамма-квантов можно увидеть в нижеприведенных таблицах и рис. 1-5.

Таблица 1

Скорость счета двойных совпадений γ - γ и n-n ^{252}Cf без защитного слоя, 1/с.

Время, нс	γ - γ	\pm	n-n	\pm
1	535.11	4.63	23.91	0.98
2	404.83	4.02	21.55	0.93
3	259.35	3.22	19.31	0.88
4	150.99	2.46	18.67	0.86
5	90.55	1.90	17.79	0.84
6	52.75	1.45	16.87	0.82
7	34.39	1.17	14.99	0.77
8	32.91	1.15	12.91	0.72
9	31.79	1.13	11.47	0.68
10	36.99	1.22	9.67	0.62
11	39.95	1.26	7.19	0.54
12	41.15	1.28	5.75	0.48
13	40.71	1.28	4.91	0.44
14	36.59	1.21	3.27	0.36
15	32.87	1.15	2.95	0.34
16	33.39	1.16	2.07	0.29
17	28.63	1.07	2.07	0.29
18	27.55	1.05	1.87	0.27
19	27.99	1.06	2.11	0.29
20	23.19	0.96	1.15	0.22
21	19.79	0.89	1.23	0.22
22	16.95	0.82	0.95	0.20
23	12.99	0.72	1.31	0.23
24	11.71	0.68	0.75	0.17
25	8.83	0.59	0.79	0.18
26	9.91	0.63	0.71	0.17
27	8.79	0.59	0.75	0.17
28	5.95	0.49	0.59	0.15
29	6.63	0.52	0.63	0.16
30	5.59	0.47	0.43	0.13
Итого	2068.82	40.23	208.62	13.4

Таблица 2

Скорость счета двойных совпадений γ - γ и n - n ^{252}Cf с защитным слоем, толщиной 40 мм (А)
и 80 мм (В), 1/с

А					В				
Время, нс	γ - γ	\pm	n - n	\pm	Время, нс	γ - γ	\pm	n - n	\pm
1	507.14	7.51	10.19	1.07	1	311.09	3.22	1.89	0.25
2	377.92	6.48	10.07	1.06	2	229.25	2.76	2.09	0.26
3	226.92	5.02	10.41	1.08	3	144.25	2.19	2.76	0.30
4	119.47	3.65	8.52	0.97	4	78.99	1.62	2.16	0.27
5	61.69	2.62	6.96	0.88	5	40.25	1.16	1.76	0.24
6	42.81	2.19	5.96	0.82	6	21.09	0.84	1.49	0.22
7	22.25	1.58	3.85	0.66	7	13.05	0.66	1.19	0.20
8	24.03	1.64	3.30	0.61	8	10.82	0.60	1.16	0.20
9	28.81	1.80	2.74	0.56	9	10.25	0.58	0.86	0.17
10	26.81	1.73	3.41	0.62	10	10.89	0.60	0.73	0.16
11	26.69	1.73	2.07	0.48	11	11.29	0.61	0.59	0.14
12	27.81	1.76	2.07	0.48	12	10.42	0.59	0.46	0.12
13	27.36	1.75	0.52	0.25	13	10.12	0.58	0.23	0.09
14	25.25	1.68	0.52	0.25	14	10.79	0.60	0.13	0.07
15	25.25	1.68	0.85	0.31	15	9.42	0.56	0.19	0.08
16	19.47	1.48	0.30	0.19	16	8.72	0.54	0.16	0.07
17	20.47	1.52	0.74	0.29	17	7.92	0.51	0.13	0.07
18	16.47	1.36	0.52	0.25	18	7.32	0.49	0.06	0.05
19	13.81	1.25	0.19	0.16	19	6.39	0.46	0.19	0.08
20	11.58	1.14	0.30	0.19	20	5.02	0.41	0.13	0.07
21	7.03	0.90	0.19	0.16	21	5.32	0.42	0.03	0.03
22	8.58	0.99	0.07	0.11	22	4.39	0.38	-0.01	0.00
23	5.47	0.79	0.07	0.11	23	3.92	0.36	0.09	0.06
24	6.47	0.86	0.19	0.16	24	2.72	0.30	0.06	0.05
25	3.58	0.65	0.30	0.19	25	2.39	0.28	0.03	0.03
26	4.69	0.74	-0.04	0.00	26	2.52	0.29	0.03	0.03
27	4.69	0.74	0.07	0.11	27	1.95	0.26	0.06	0.05
28	4.58	0.73	0.19	0.16	28	2.19	0.27	0.09	0.06
29	3.81	0.67	0.07	0.11	29	1.79	0.24	-0.01	0.00
30	2.81	0.58	0.19	0.16	30	1.79	0.24	-0.01	0.00
Итого	1703.72	57.32	74.79	12.45	Итого	986,32	22.62	18.72	3.42

В табл. 1 и 2 приведены результаты измерений скоростей счета γ - γ и n - n ^{252}Cf с защитным слоем neutrostop и без защитного слоя на время 30 нс.

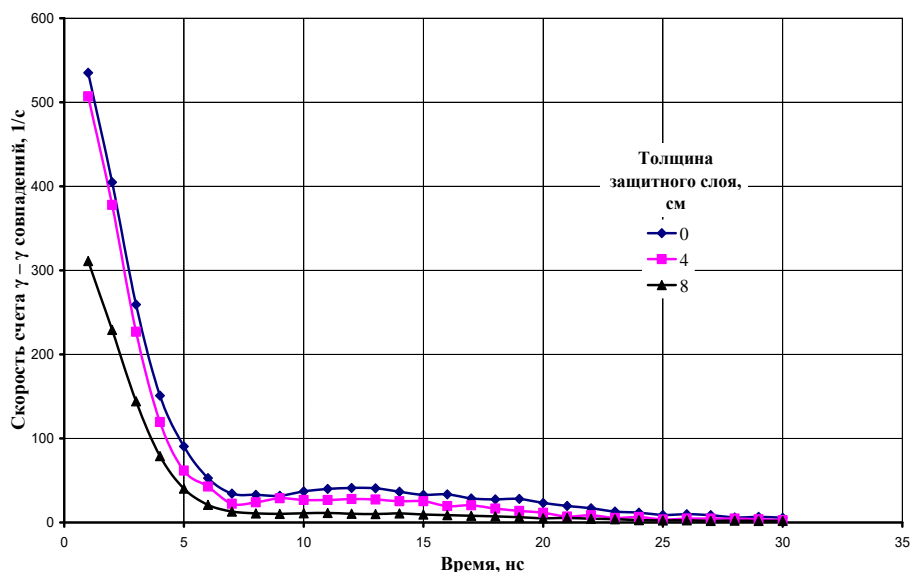


Рис. 2. Временное распределение скорости счета γ - γ совпадений.

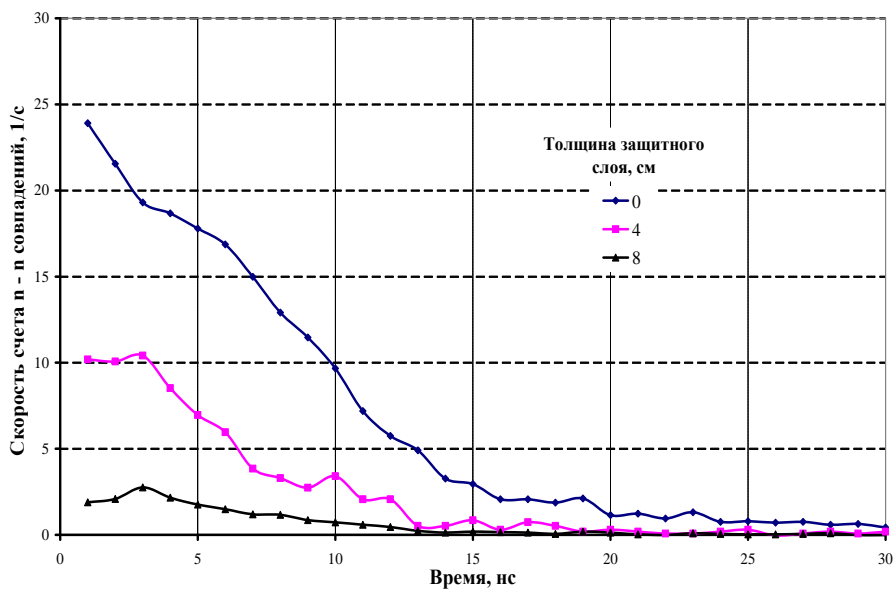


Рис. 3. Временное распределение скорости счета p-p совпадений.

Также приведены результаты отношения скоростей счета временных γ - γ и p-p совпадений источника от толщины защитного слоя.

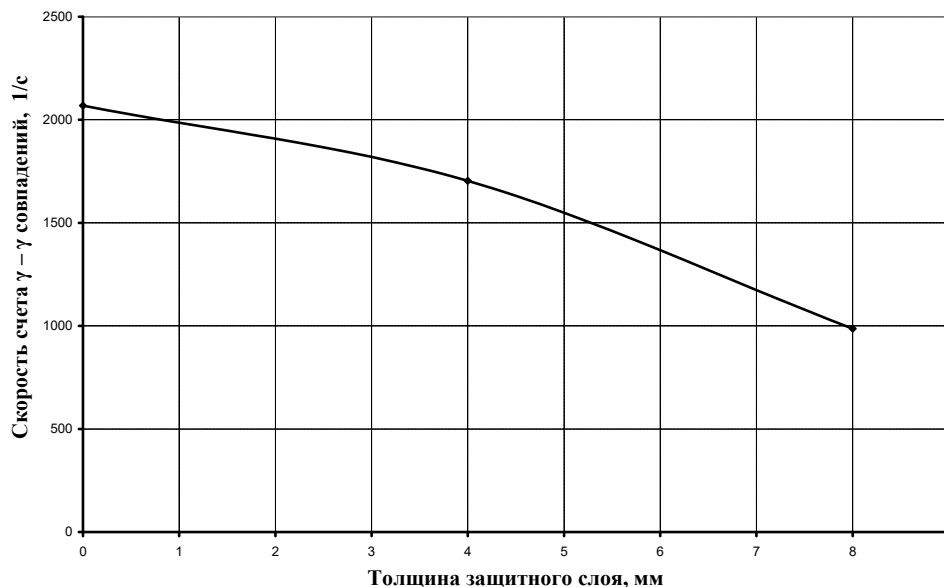


Рис. 4. Скорость счета γ - γ совпадений от толщины защитного слоя.

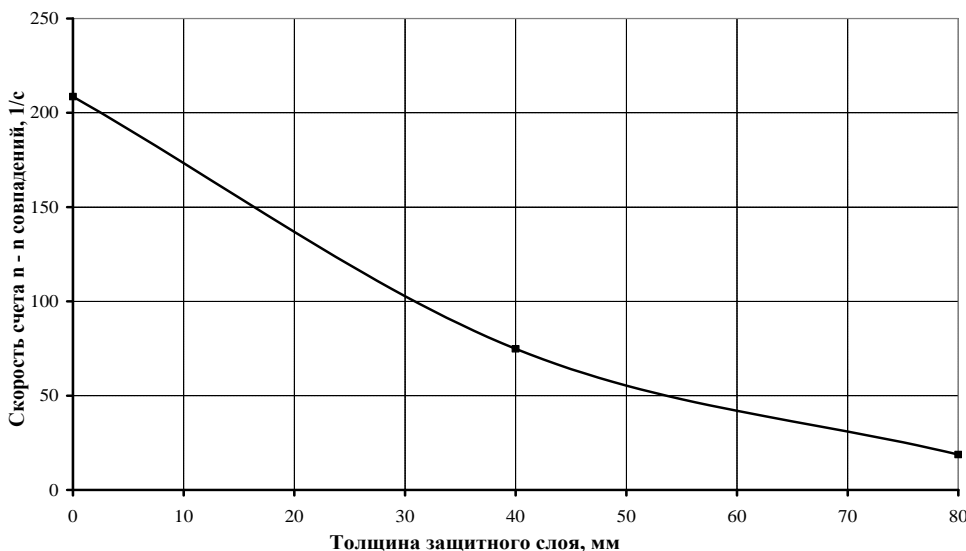


Рис. 5. Скорость счета n-n совпадений от толщины защитного слоя.

Результаты проведенных экспериментов установки цифрового анализа откликов нейтронов и гамма-квантов с сцинтиллятором EJ-309 и защитным слоем neutrostop в качестве поглотителя показывают, что установка в составе с программным обеспечением считает временные совпадения двойных типов гамма-квантов и нейтронов.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» А.Г.Белевитину, доктору физико-математических наук В.Л.Ромоданову за помощь в цифровой обработке данных эксперимента, а также академикам НАНТ Х.Х.Муминову и Ф.К.Рахими за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Поступило 01.03.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ромоданов В.Л. Физические методы и установки активного контроля делящихся материалов – М.:НИЯУ МИФИ, 2007.
2. Ensslin N., Harker W.C., Krick M.S., Langner D.G., Pickrell M.M., Stewart J.E. Счет множественности нейтронов. Руководство по эксплуатации. – Лос-Аламосская национальная лаборатория эксплуатируется Университетом Калифорнии для Министерства энергетики США по контракту W-7405-ENG-36. Los Alamos, New Mexico 87545, 118 с.
3. Ромоданов В.Л., Белевитин А.Г., Афанасьев В.В., Рябов Р.Ю. Комплекс цифровой технологии обработки данных в установках обнаружения радиоактивных и делящихся материалов. – М.:НИЯУ МИФИ, 2005, 240 с.

М.Ш.Имом

**УСУЛИ АДАДИИ ТАҲЛИЛИ СУРЪАТҲОИ ҲИСОБИ МУВОФИҚОИИ
ИМПУЛСҲОИ γ - γ ВА n-n ^{252}Cf**

*Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар кори мазкур таҳлили ададии суръатҳои ҳисоби вақтии импульсҳои γ - γ ва n-n-и манбаи калифорний гузаронида шуд. Барои муайян намудани таркиби моддаҳои тақсимшаванда санчиши мувофиқии вақтии гамма квантҳо ва нейтронҳои дорои қаратнокии гуногун дар дастгоҳи бо қабати хифзкунандаи neutrostop таҷҳизонидашуда ва бидуни қабати хифзкунанда зарур буд.

Калимаҳои калидӣ: суръатҳои ҳисоби вақтии мувофиқӣ, таҳлили вайроннашаванда, таҳлили ададӣ, қаҳати хифзкунанда, мувофиқии дутогӣ, табдилдиҳандаи аналогӣ-ададӣ, моддаҳои ядроии тақсимшаванда, афзояндаи фотоэлектронӣ, наносония.

M.Sh.Imom

**DIGITAL METHOD FOR ANALYSIS OF THE COUNTING RATE OF TIME
COINCIDENCE OF γ - γ AND n-n ^{252}Cf PULSES**

S.U.Umarov Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The paper investigates a digital method for analyzing the count rates of time coincidences of pulses γ - γ and n-n of a californium source. It was required to measure the time coincidences of gamma quanta and neutrons of various multiplicity in an installation with a neutrostop protective layer and without a protective layer in order to determine the content of fissile materials.

Key words: time coincidence count rate, non-destructive analysis, digital analyses, protective layer, double match, analog-digital converter, nuclear fissionable materials, photomultiplier tubes, nanosecond.

УДК 551.324.63, 551.556.4, 551.324.414

С.Ф.Абдуллаев, В.А.Маслов

О СВЯЗИ ТАЯНИЯ ЛЕДНИКА МЕДВЕЖИЙ С ПЫЛЕВЫМИ ВТОРЖЕНИЯМИ

*Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана З.В.Кобулиевым 25.06.2021 г.)*

Рассмотрены атмосферные факторы, влияющие на ускоренное таяние ледников Таджикистана, наблюдающееся уже несколько лет. На примере пульсирующего ледника Медвежий проведен анализ траекторий воздушных масс. Установлено, что при пылевых вторжениях в центральной части Таджикистана, пыль далее переносится воздушными потоками в сторону ледников, являющихся источниками воды для горных рек. По-видимому, осаждение пыли на поверхности ледника уменьшает альбедо поверхности, усиливая поглощение света, и приводит к ускорению таяния льда.

Ключевые слова: *ледники, обратные траектории, аэрозоль, перенос пыли.*

Водные ресурсы Таджикистана и всей Центральной Азии в целом существенно зависят от таяния ледников, так как трансрегиональные реки Амударья и Сырдарья питаются талой водой этих ледников [1]. Изменение скорости таяния ледников может быть связано с глобальными изменениями климата за последние 40 лет, с увеличением концентрации парниковых газов. Одной из возможных причин непредсказуемого изменения стока горных рек, происходящего из-за ускоренного таяния ледников, является воздействие пылевых частиц, осаждающихся на поверхность ледника после пылевых вторжений на территории Таджикистана.

Таджикистан расположен в регионе, где концентрация пылевых частиц в воздухе может изменяться при пылевых вторжениях в тысячи раз [1-3]. Пылевые вторжения (ПВ), начинающиеся в пустынях пылевого пояса, проникают на территорию Таджикистана через южные и западные границы каждый год с апреля по ноябрь. Запыленность атмосферы существенно влияет на устойчивость климата и на все природные процессы, связанные с изменением прозрачности атмосферы и изменением отражательной способности поверхности Земли. Особенно сильно эти факторы проявляются над поверхностью ледников.

От чистой поверхности покрытого снегом ледника (альбедо 0.9) почти всё солнечное излучение отражается в космос и не влияет на тепловой режим атмосферы. Осаждение пыли на поверхность льда приводит к уменьшению альбедо поверхности до 0.34-0.50. На рис.1 приведен годовой ход альбедо, построенный по данным спутниковых измерений [4].

Адрес для корреспонденции: *Абдуллаев Сабур Фузайлович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Физико-технический институт НАНТ. E-mail: sabur.f.abdullaev@gmail.com*

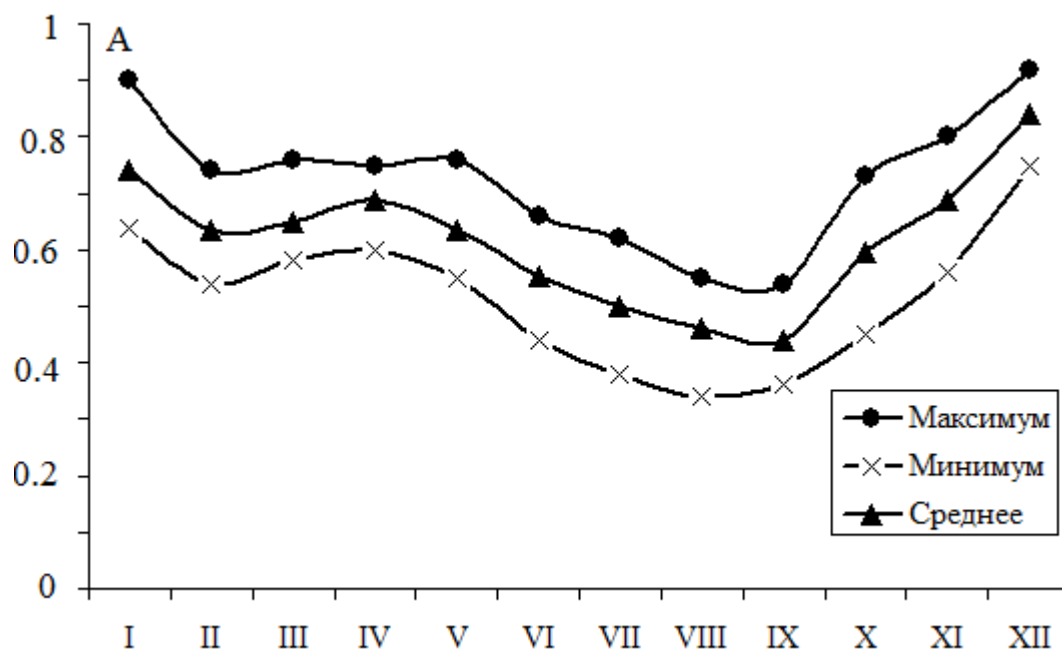


Рис.1. Средние, максимальные и минимальные альbedo поверхности ледника Медвежий, усредненные за период 2005-2016 гг.

Нагрев поверхности ледника из-за поглощения солнечного излучения пылевыми частицами усиливается. Тепловое излучение пыли, излучаемое в атмосферу, поглощается парниковыми газами в окнах прозрачности атмосферы и дополнительно нагревает воздух над ледником. Увеличение количества тепла, поглощенного поверхностью ледника, ускоряет его таяние, а также увеличивает пластичность льда и скорость его перетекания.

Наши исследования проведены для оценки аэрозольных факторов, в частности числа, мощности и продолжительности пылевых эпизодов, которые могут влиять на скорость таяния ледников на примере ледника Медвежий.

Долинный ледник Медвежий ($38^{\circ}39'00''$ с.ш.; $72^{\circ}11'00''$ в.д.), являющийся одним из тридцати пяти пульсирующих (т.е. способных иногда резко увеличивать скорость движения) ледников Таджикистана, расположен на высоте более 4500 м над уровнем моря, язык его располагается на высоте 3000 м. Длина ледника 15.8 км, площадь 25.3 км². Пульсации ледника происходили в 1963, 1973, 1989 и 2001 годах. При этом скорость движения ледника увеличивалась от 0.1-0.15 м/сутки до 50 м/сутки [5]. В 1963 году Медвежий увеличил свою длину на 1.7 км, площадь на 1.1 км².

При изучении воздействия пыли на таяние ледников использованы данные о состоянии атмосферы и метеорологические параметры. Поскольку регулярные атмосферные наблюдения в окрестностях ледника Медвежий не проводятся, то мы будем применять данные, полученные в г. Душанбе. Есть основания считать, что закономерности метеорологических явлений в атмосфере Таджикистана, включая перенос пыли, связаны с глобальными геофизическими процессами и имеют подобный характер. На это указывает сопоставление динамики температуры воздуха в г. Душанбе и над ледником Медвежий, полученной по спутниковым данным [6], построенной для осени 2019 года (рис. 2а). Оче-

видно, что эти две зависимости отличаются, в основном, уровнем температуры, что связано с различной высотой местности. Коэффициент корреляции этих величин составляет 0.9 (рис. 2б).

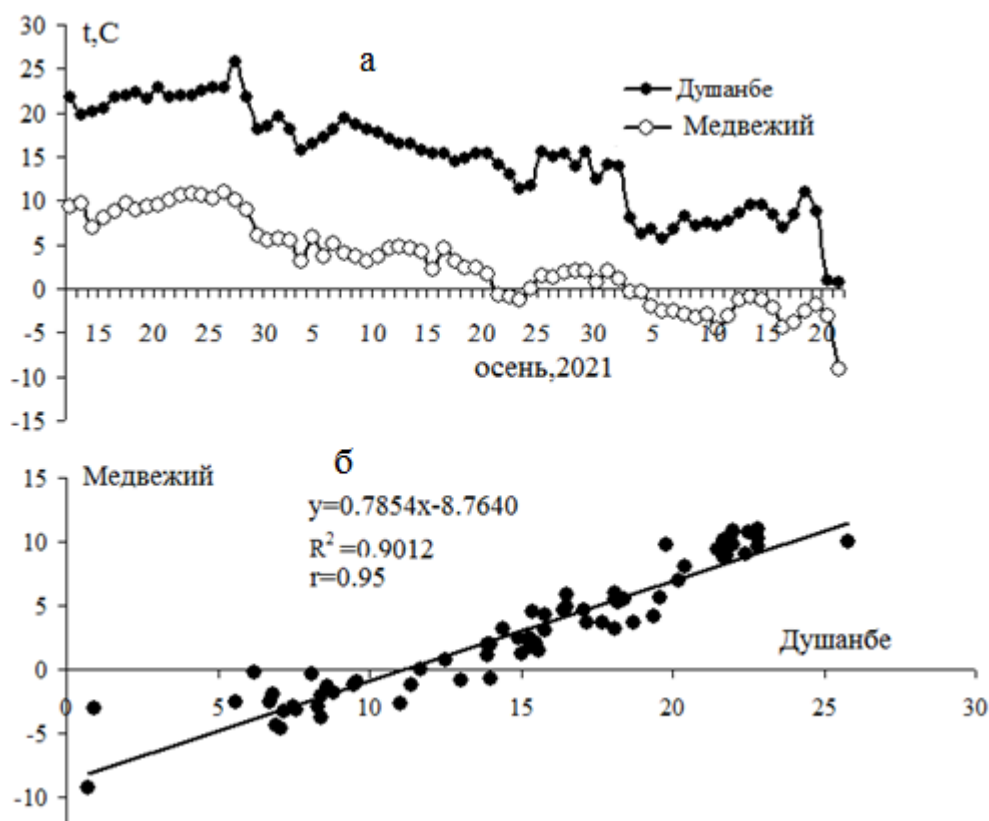


Рис. 2. Вариации температуры воздуха в г. Душанбе и над ледником Медвежий (а); корреляция температуры воздуха (б).

Чтобы проследить движение пыли в атмосфере, надо представлять её структуру и направления распространения. В основном, перенос пыли в атмосфере происходит на высоте ниже 3500 м от поверхности Земли. Выше этого уровня в атмосфере находится инверсионный температурный слой, препятствующий подъему пыли.

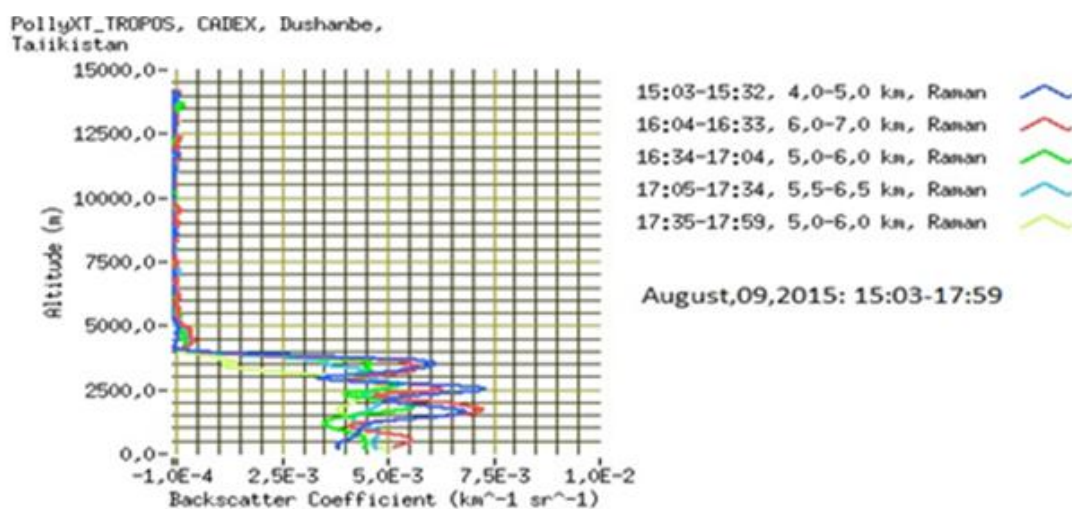


Рис. 3. Вертикальный профиль коэффициента обратного рассеяния, построенный в рамках проекта CADEX с помощью лидарного комплекса PollyXT TROPOS в период пылевой мглы 9 августа 2015 года.

Типичный для пылевых эпизодов вертикальный профиль коэффициента обратного рассеяния в Душанбе определен с помощью лидарного комплекса PollyXT - TROPOS [1] в период пылевой мглы 9 августа 2015 года в рамках проекта CADEX (рис.3). Этот профиль распределения коэффициента обратного рассеяния по высоте указывает на неравномерное распределение частиц аэрозоля по высоте с максимумами на высотах 500, 1500, 2500 и 3500 м над станцией.

NOAA HYSPLIT MODEL
 Backward trajectories ending at 1200 UTC 01 Jun 01
 CDC1 Meteorological Data

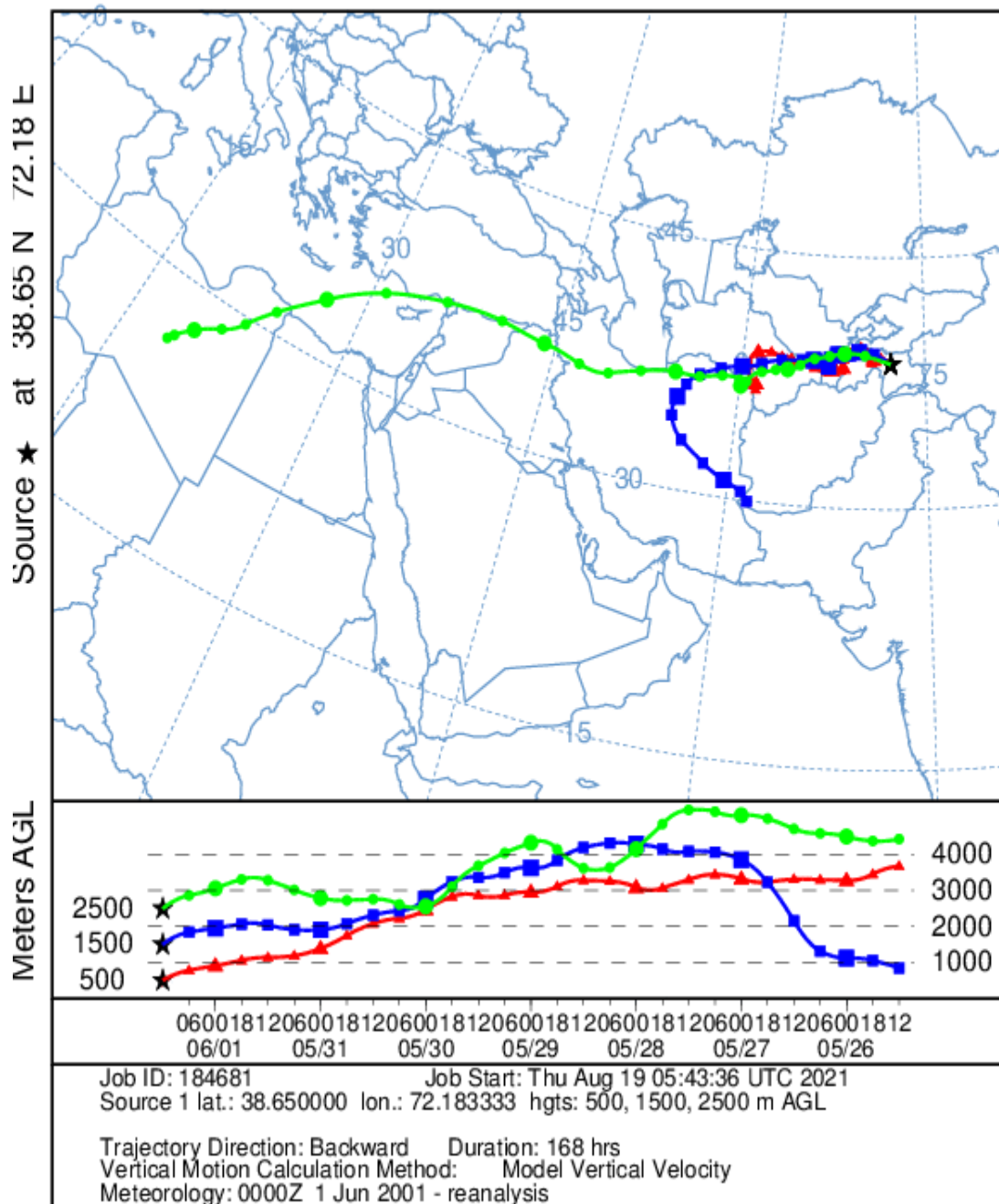


Рис. 4. Обратные траектории воздушных масс, пришедших на ледник Медвежий 01.06.2001, за 7 суток.

Чтобы проследить влияние пыли на таяние ледников, рассмотрим распространение пылевого аэрозоля во время мощных пылевых вторжений в Юго-Центральном Таджикистане. Обратные траектории движения воздушных масс, вычисленные по метеорологическим параметрам атмосферы на сайте HYSPLIT [7-10], позволяют проследить, откуда могла быть перенесена пыль. Для установления направления распространения пыли в атмосфере над ледником Медвежий на 01.06.2001, построены обратные траектории воздушных масс на высотах 500, 1500 и 2500 м от уровня земли за 7 суток. Для высоты 500 м эта траектория начинается в точке 36.90 с.ш., 60.61 в.д. (Мары, Туркменистан), для высоты 1500 м – в точке 29.97 с.ш., 61.57 в.д. (Захедан, Афганистан); для высоты 2500 м – в точке 26.27 с.ш., 18.36 в.д. (Ливия) (рис.4).

В этот день с высокой запыленностью воздуха (1 июня 2001 г.), перед пульсацией ледника Медвежий, запыленный воздух, пройдя над пустынями пылевого пояса, над Гиссарской долиной, где расположен город Душанбе, а затем и над ледником Медвежий, ушел затем на северо-запад.

Обратные траектории запыленных воздушных масс, проходивших над ледником Медвежий во время мощного пылевого вторжения (09.08.2015) начинались за 7 суток до этого: на высоте 500 м – в точке 25.22 с.ш., 23.99 в.д. (Ливия), на высоте 1500 м - 36.51 с.ш., 40.26 в.д. (Сирия); на высоте 2500 м - 36.98 с.ш., 21.37 в.д. (Греция) (рис.5). Эти траектории близки к построенным в день пульсации ледника (см. рис.4), особенности высотного распределения пыли описаны выше (рис.3).

Воздушные массы, прошедшие над пустынями Туркмении, принесли в Душанбе пыль, наблюдавшуюся в городе как пылевая мгла. Затем они распространяются дальше на восток, захватывая и территорию ледника Медвежий. Такое направление движения пылевых потоков в атмосфере характерно не только для Душанбе, но и практически для любой точки Гиссарской долины.

Пульсация ледника Медвежий в 1989 году (он удлинился на 1.2 км, его площадь увеличилась на 0.8 км² [5]) произошла, возможно, из-за влияния высокого аэрозольного загрязнения центральной части страны в течение 1988-1989 годов. В этот период было отмечено максимальное падение горизонтальной дальности видимости (рис.6), связанное с пылевыми вторжениями.

Свойства пылевого аэрозоля, видимо, близки к свойствам пыли, изучавшейся во время наиболее мощных за последние десятилетия пылевых эпизодов, произошедших 20.09.1989 и 20.10.1989 в юго-центральной части страны. Они продолжались от 3 до 5 часов, характерная скорость осаждения частиц для пылевого аэрозоля составила 100-120 мм/год, средний суммарный осадок при пылевых эпизодах 16.10.1989 (за 20 часов) и 20.10.1989 (за 13 часов) составил 0.38 мг/м³ и 4.8 мг/м³, соответственно. Почти 99% частиц имели размеры до 0.6 мкм [11]. После 90-х годов из-за процессов, связанных с изменением климата, наблюдаются пылевые вторжения малой интенсивности и высокой продолжительности.

На рис. 6 и рис. 7 можно видеть взаимосвязь пульсаций ледника Медвежий (стрелки) с частотой повторяемости пылевых вторжений и с температурой воздуха в Душанбе. В большинстве случаев пульсации происходили в тот же или следующий год, когда наблюдалось больше всего дней с наименьшей дальностью видимости. Еще более впечатляюще выглядит совпадение пульсаций с локальными максимумами среднегодовой температуры воздуха. Отклонение от тренда среднегодовой температуры (рис. 7) также сохраняет такую тенденцию. Исключение составляет 1963 год, когда пульса-

ция произошла при минимальной среднегодовой температуре. Скорее всего, одни и те же факторы вызывают и повышение температуры, и увеличение запыленности воздуха.

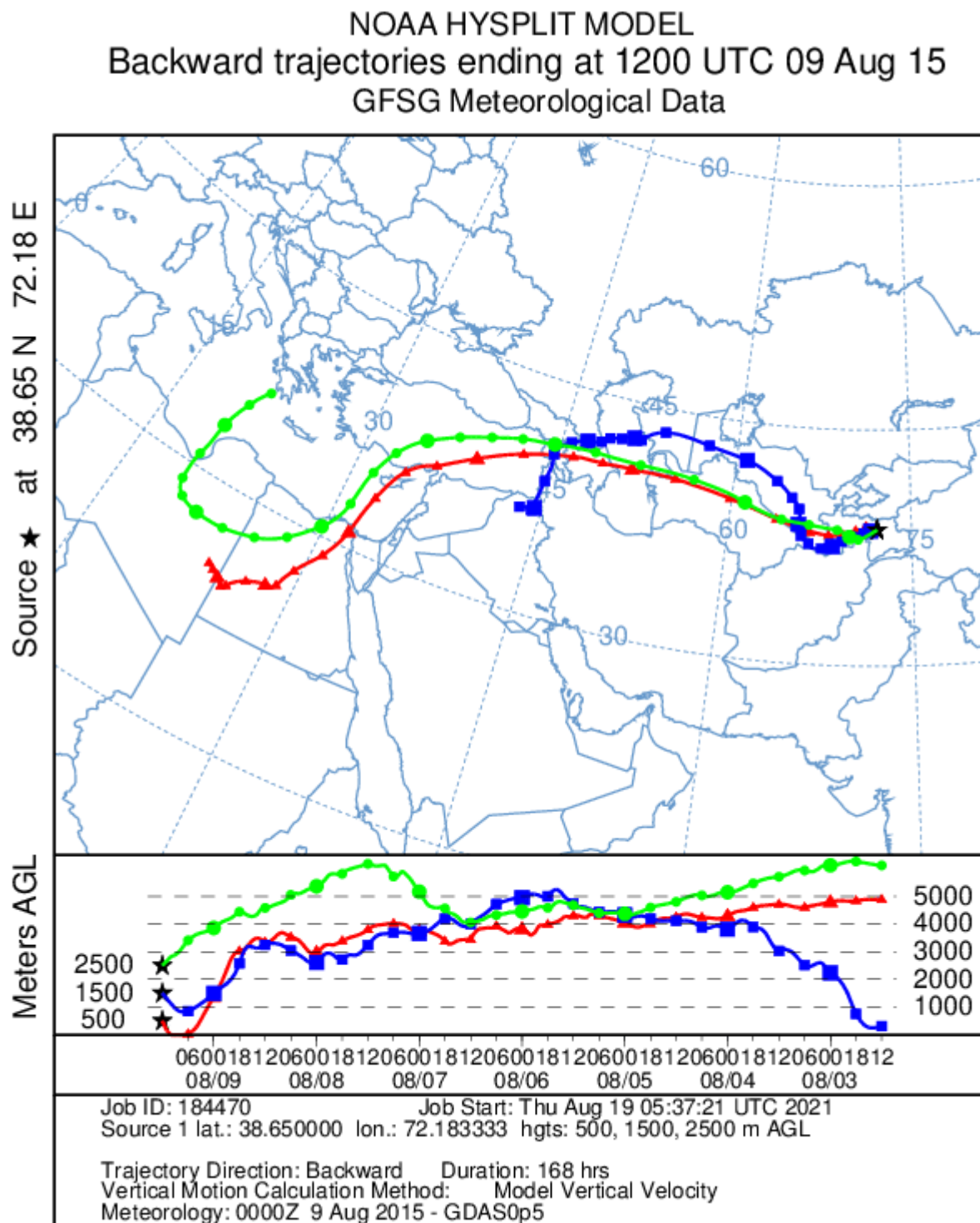


Рис. 5. Обратные траектории воздушных масс, пришедших на ледник Медвежий 09.08.2015, за 7 суток.

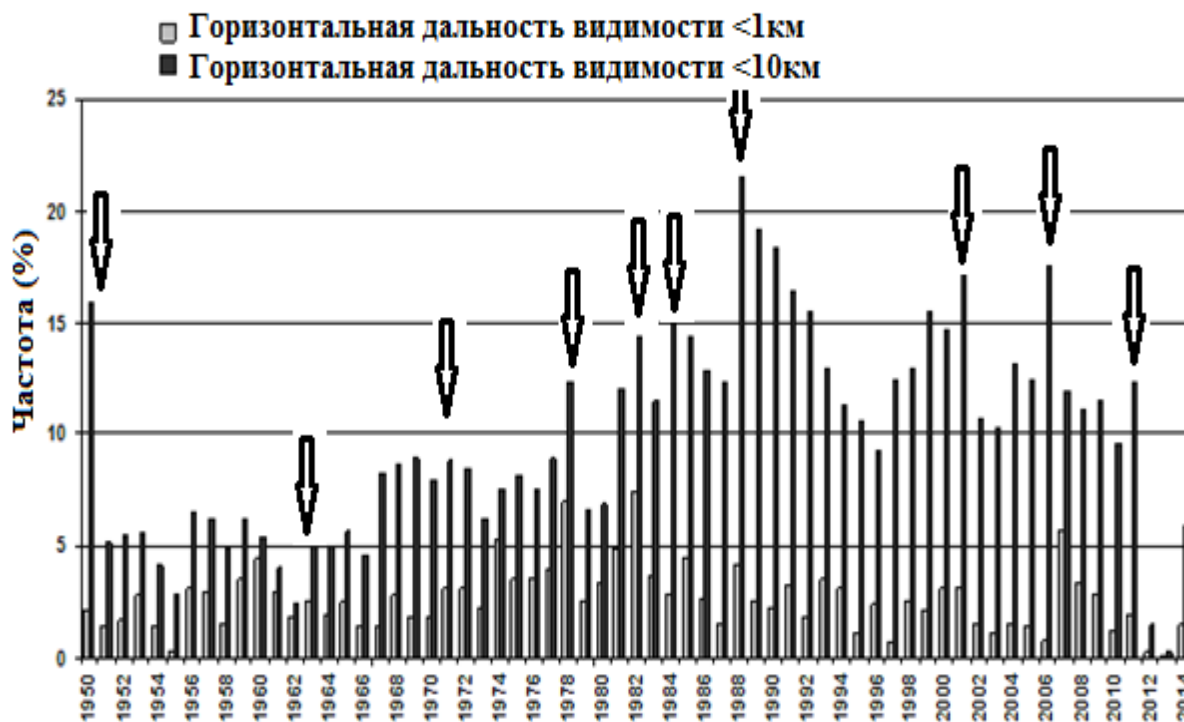


Рис. 6. Частота повторяемости горизонтальной дальности видимости в 1950-2014 гг.

Пульсация ледника Медвежий в 2001 г. [6] коррелирует с ростом числа и продолжительности пылевых вторжений (рис.7 и рис.8). Частота, количество и продолжительность пылевых эпизодов в 2000-2014 годах возрастали. В 2001 году в юго-центральной части Таджикистана отмечено рекордное число и общая продолжительности пылевых эпизодов (рис.8), в частности, только в летний период пылевая мгла длилась 29 дней. Высокая запыленность атмосферы наблюдалась в Таджикистане в 2007 и 2011 годах. Можно предположить, что в эти годы также происходила пульсация ледника, к сожалению, наблюдения за ледником в этот период не проводились.

Быстрое осаждение аэрозоля происходит по механизму двойной диффузии [3, 4, 8], если температура и концентрация пыли одновременно повышаются с возрастанием высоты. Необходимое условие для градиента концентрации обеспечивается неоднородным распределением аэрозоля по высоте (рис. 3). температура воздуха повышается с высотой в приземных температурных инверсиях. Естественными стоками для атмосферного аэрозоля являются, например, холодные горные реки, около которых обнаруживают редкие атмосферные изотопы, отсутствующие вдали от реки [9]. Мощные приземные инверсии над поверхностью заснеженных склонов гор и ледников обеспечивает высокую интенсивность осаждения пылевых частиц. При бидиффузионной конвекции осаждаются и мелкие частицы, которые обычно долго находятся в воздухе. Площадь, занимаемая мелкими частицами на поверхности выше, чем крупными, поэтому они сильнее снижают альбедо поверхности, что повышает скорость нагрева снега.

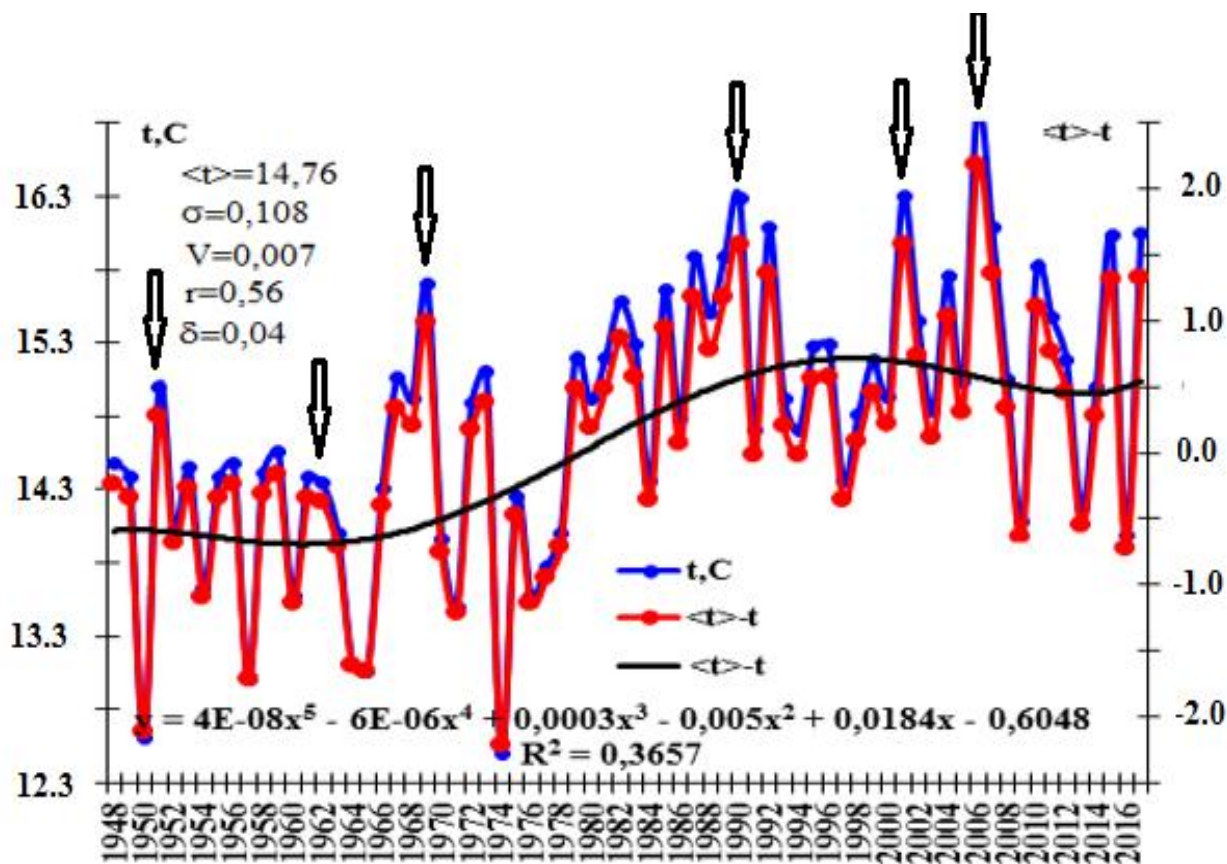


Рис. 7. Вариация среднегодовой температуры воздуха в 1948-2018 гг. в г. Душанбе.

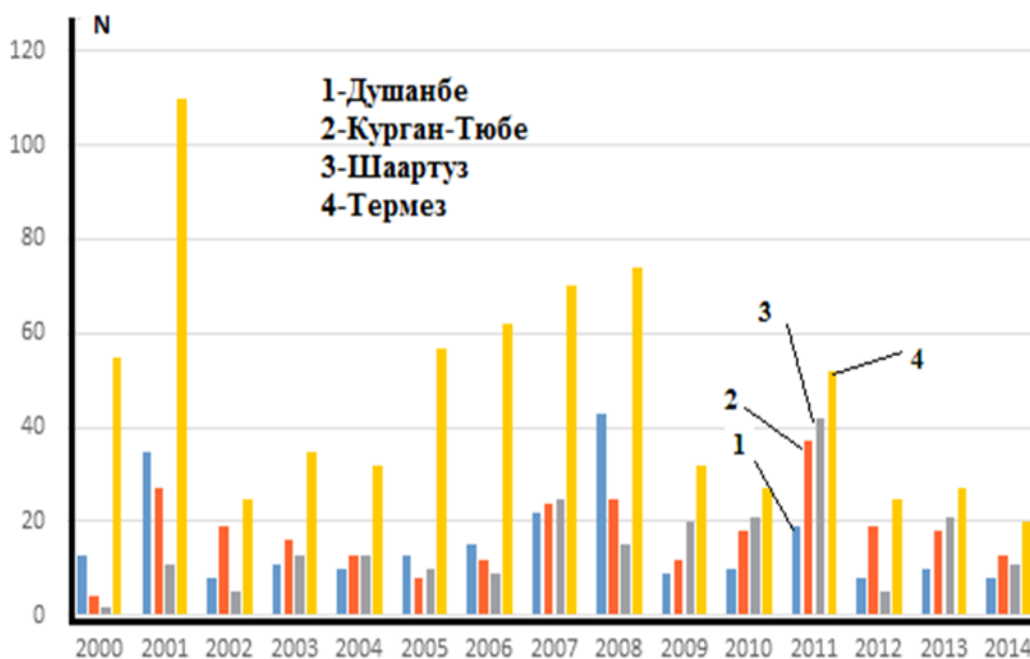


Рис. 8. Межгодовая частота эпизодов ПВ за период 2000-2014 гг.

Осаждение пыли на заснеженную поверхность ледника и склонов гор приводит к повышению температуры снега и возрастанию подвижности снеговых масс. Помимо обычных последствий дополнительного нагрева в виде снежных лавин, при определенных метеорологических условиях воздействие оказывается на окрестности ледника, являющегося естественным сборщиком снеговых масс

со всех окрестных гор. Таким образом, физические условия в районе ледника допускают возможность влияния аэрозольного фактора на ускоренное таяние ледников и их пульсации.

Климатические изменения, связанные с нарушением местных экосистем, заметно влияют на экологические условия в республике. Сложные природные явления, такие как водно-эрозионные процессы и ускоренное таяние ледников зависят от многих факторов. Изучение роли пылевого аэрозоля, влияющего на температуру приземного слоя атмосферы, позволяет понять природу этих явлений и найти пути им противостоять.

Поступило 07.07.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Hofer J., Althausen D., Abdullaev S.F., et al. Long-term profiling of mineral dust and pollution aerosol with multiwavelength polarization Raman lidar at the Central Asian site of Dushanbe, Tajikistan: case studies. – Atmos. Chem. Phys., 2017, N17, pp.14559-14577, [https://doi.org/ 10.5194/acp-17-14559-14577](https://doi.org/10.5194/acp-17-14559-14577) .
2. Маслов В.А., Абдуллаев С.Ф., Назаров Б.И. О природе быстрого осаждения аэрозоля в атмосфере. – ДАН РТ, 2017, т. 60, №10, с.515-521.
3. Маслов В.А., Абдуллаев С.Ф., Назаров Б.И. О возможном механизме быстрого осаждения аэрозоля в атмосфере. – ДАН РТ, 2018, т.50, №4, с.489-491.
4. https://re.jrc.ec.europa.eu/pvg_tools/en/ [дата обращение 02.07.2021].
5. Ледники Таджикистана. Главное управление по гидрометеорологии и наблюдениям за природной средой. – Душанбе, 2003, Интернет ресурс: http://www.cawater-info.net/library/rus/glaciers_tj.pdf.
6. Интернет ресурс: <http://windy.com> [дата обращение 09.07.2021].
7. Интернет ресурс: <https://ready.arl.noaa.gov/index.php> [дата обращение 16.07.2021].
8. Draxler R.R. Horizontal dispersion parameters for long-range transport modeling. – Journal of Applied Meteorology, 1982, pp.367-372.
9. Hurley P. PARTPUFF A Lagrangian particle-puff approach for plume dispersion modeling applications. – Journal of Applied Meteorology, 1994, pp.285- 294.
10. Moody J.L. The use of atmospheric transport pattern recognition techniques in understanding variation in precipitation chemistry. – Atmospheric Deposition. IAHS Publ., 1989, No. 179, pp.119-125.
11. Жиллет Д.А., Добровольский Дж.П. Исследования по осаждению пыли в районе Шаартуза. - В сб. Советско-американский эксперимент по изучению аридного аэрозоля. – СПб.: НПО Тайфун, 1992, с.39-49.
12. Maslov V., Abdullaev S., Nazarov B. Observation of rapid aerosol deposition according to AERONET data 03006 DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199903006>.
13. Джураев А.А., Абдушукуров Д.А., Давлатшоев Т., Джураев Ан.А., Пассель Х. Радиоэкологическое обследование бассейна реки Варзоб. Становление и развитие ядерно-физических исследований в Физико-техническом институте им. С.У. Умарова. – Душанбе, 2012, т.2, с.422-455.

С.Ф.Абдуллаев, В.А.Маслов

**АЛОҚАМАНДИИ ОБШАВИИ ПИРЯХИ ХИРСОН БО ВОРИДШАВИИ ЧАНГУ
ҒУБОР***Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Омилҳои атмосферие, ки ба обшавии босуръати пирахҳо дар Тоҷикистон, ки чандин солҳо идома доранд, баҳогузори шудааст. Таҳлили траекторияи баръакси сели ҳаво ва таркиби хок дар ҳаво ҳангоми ворид шудани чангу ғубор имкон дод, ки ҳангоми ворид шудани он аз биёбонҳо ба қисми марказии Тоҷикистон пас аз чараёни ҳаво дар самти пирахӣ ҳаракаткунанда (пирахӣ Хирсон), ки манбаи оби дарёҳои кӯҳистон мебошанд, шарҳ дода шавад. Тақшиншавии хок дар болои ях албедроӣ рӯи заминро коҳиш медиҳад, фурубарии нурро тақвият медиҳад ва обшавии пирахҳо метезонад.

Калимаҳои калидӣ: *пирахҳо, траекторияҳои бозгаиш, аэрозол, интиқоли хок.*

S.F.Abdullaev, V.A.Maslov

**ON THE RELATIONSHIP OF THE DEGRADATION OF MEDVEZHYY GLACIER
WITH DUST INJURIES***S.U.Umarov Physical Technical Institute National Academy of Sciences of Tajikistan*

The atmospheric factors affecting the accelerated melting of glaciers in Tajikistan, which has been observed for several years, are considered. On the example of the pulsating Medvezhy glacier, an analysis of the trajectories of air masses is carried out. It has been established that during dust intrusions in the central part of Tajikistan, dust is further carried by air currents towards glaciers, which are sources of water for mountain rivers. The deposition of dust on the ice surface reduces the surface albedo, enhancing light absorption, and accelerates glacier melting.

Key words: *glaciers, back trajectories, aerosol, dust transport.*

УДК 546.62+622.349.2

Н.М.Джамолов, Д.Х.Мирзоев, М.М.Тагоев, С.М.Гафорзода,

академик НАН Таджикистана У.М.Мирсаидов

**КИНЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗЛОЖЕНИЯ АЛЮМОСИЛИКАТНЫХ РУД
ТАДЖИКИСТАНА МИНЕРАЛЬНЫМИ КИСЛОТАМИ***Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана*

В статье изучены кинетические аспекты разложения аргиллитов и каолиновых глин минеральными кислотами. Изучена кинетика разложения аргиллитов месторождения Чашма-Санг соляной, серной, азотной и ортофосфорной кислотами, а также изучена кинетика разложения каолиновых и зелёных (каолиновых) глин азотной и соляной кислотами. Установлено, что при разложении аргиллитов азотной кислотой процесс протекает в кинетической области. В других случаях процесс протекает в диффузионной или смешанных областях.

Ключевые слова: кинетические аспекты, разложение, каолиновые глины, минеральные кислоты, алюмосиликатная руда.

Сырьевая база алюминиевой, химической и фарфорово-фаянсовой промышленности значительно расширилась бы благодаря другим видам глинозёмсодержащего сырья. К таким видам сырья относятся нефелины, глины, каолины, алуниты, аргиллиты, бентониты, низкокачественные бокситы, запасы которых имеются в достаточно больших количествах и месторождения их повсеместно распространены в Таджикистане.

Эти виды сырья, несмотря на пониженное содержание глинозёма, содержат в своём составе помимо алюминия другие полезные компоненты. Поэтому промышленная переработка этих руд является вполне целесообразной, если её проводить комплексным методом.

Получение глинозёма и различных солей из указанных руд требует принципиально новых технологических разработок, где одним из важных этапов процесса переработки является разложение сырья с извлечением полезных его составляющих.

В настоящее время известны способы переработки высококремнистых алюминиевых руд: щелочные, кислотные, хлорные, термические и комбинированные [1-5].

Наиболее перспективным методом переработки алюмосиликатных руд является кислотный метод, так как уже на первой стадии процесса происходит выделение полезных компонентов в раствор и, тем самым, сокращаются материальные потоки.

В настоящей работе изучена кинетика разложения аргиллитов месторождения Чашма-Санг минеральными кислотами, а также разложение каолиновых и зелёных глин азотной и соляной кислотами.

Адрес для корреспонденции: Мирзоев Давлатмурод Хайруллоевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: info@nrta.tj

Изучение кинетики гетерогенных реакций, происходящих на границах раздела, даёт возможность определять механизм протекания процесса и устанавливать, в какой области протекает реакция (диффузионной или кинетической).

Изучена кинетика разложения алюмосиликатных руд (аргиллитов, каолинов и зелёных глин) месторождения Чашма-Санг минеральными кислотами для выявления скорости извлечения Al_2O_3 и Fe_2O_3 .

Характер кинетических кривых разложения аргиллитов минеральными кислотами при извлечении в раствор оксида алюминия указывает на то, что разложение аргиллитов происходит быстро и в течение 1 часа достигает 80-90%.

Константы скорости разложения аргиллитов рассчитываем, используя кинетические уравнения первого порядка.

В табл. и на рис. представлены значения энергии активации процесса разложения алюмосиликатных руд минеральными кислотами. Как видно из табл. и рис., при разложении аргиллитов серной кислотой процесс протекает в смешанной и кинетической областях, при использовании азотной кислоты процесс разложения протекает в кинетической области. Для соляной кислоты наблюдается протекание процесса в диффузионной области.

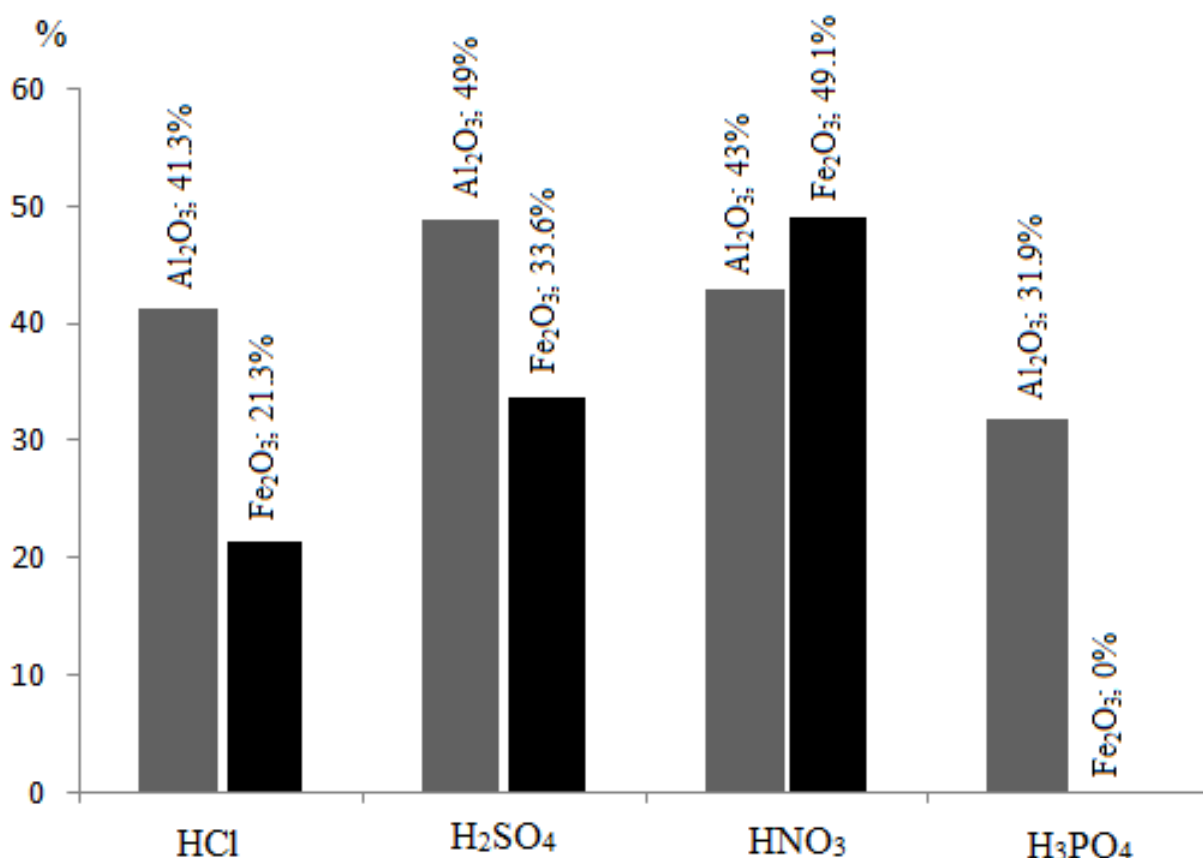


Рисунок. Зависимость энергии активации от процесса разложения аргиллитов минеральными кислотами.

Таблица

Величины энергии активации процесса разложения алюмосиликатных руд минеральными кислотами

	Кислота							
	HCl		H ₂ SO ₄		HNO ₃		H ₃ PO ₄	
Алюмосиликатная руда	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃
Аргиллиты	41.3	21.3	49.0	33.6	43.0	49.1	31.9	-
Каолиновые глины	44.5	39.6	-	-	45.4	50.5	34.5	-
Зелёные каолиновые глины	39.6	44.5	-	-	39.7	43.6	-	-

Поступило 23.09.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лайнер Ю.А. Комплексная переработка алюминийсодержащего сырья кислотными способами. – М.: Наука, 1982, 208 с.
2. Мирсаидов У.М., Сафиев Х.С. Комплексная переработка низкокачественного алюминийсодержащего сырья. – Душанбе: Дониш, 1998, 238 с.
3. Пономарев В.Д., Сажин В.С., Ни Л.П. Гидрохимический щелочной способ переработки алюмосиликатов. – М.: Металлургия, 1964, 112 с.
4. Сажин В.С. Новые гидрохимические способы комплексной переработки алюмосиликатных и высококремнистых руд. – М.: Металлургия, 1988, 213 с.
5. Ни Л.П., Райзман В.Л. Комбинированные способы переработки низкокачественного алюминиевого сырья. – Алма-Ата: Наука, 1988, 256 с.

Н.М.Чамолов, Д.Х.Мирзоев, М.М.Тағоев, С.М.Ғафорода, У.М.Мирсаидов

ҶАНБАҶОИ КИНЕТИКИИ ТАҶЗИЯИ МАЪДАНҶОИ

АЛЮМИНОСИЛИКАТИИ ТОҶИКИСТОН БО КИСЛОТАҶОИ МИНЕРАЛӢ

Институти кимиёи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон

Дар мақола ҷанбаҳои кинетикии таҷзияи гилхокҳои аргилий ва каолинӣ бо кислотаҳои минералӣ омӯхта шудааст. Кинетикаи таҷзияи аргилитҳои кони Чашма-Санг бо кислотаҳои сулфат, нитрат ва ортофосфат ва инчунин кинетикаи таҷзияи гилхокҳои каолинӣ ва гилхокҳои сабз бо кислотаҳои нитрат ва сулфат омӯхта шудаанд. Дақиқ карда шудааст, ки ҳангоми таҷзияи аргилитҳо кислотаи нитрат раванд дар ҳудудҳои кинетикӣ мегузарад. Дар дигар ҳолатҳо бошад, раванд дар ҳудудҳои диффузионӣ ё омехта мегузарад.

Калимаҳои калидӣ: ҷанбаҳои кинетикӣ, таҷзия, гилхокҳои каолинӣ, кислотаҳои минералӣ, маъдани алюмосиликатӣ.

N.M.Jamolov, D.Kh.Mirzoev, M.M.Tagoev, S.M.Gaforzoda, U.M.Mirsaidov

KINETIC ASPECTS OF DECOMPOSITION OF ALUMINOSILICATE ORE IN TAJKISTAN BY MINERAL ACIDS

V.I.Nikitin Institute of Chemistry National Academy of Sciences of Tajikistan

In this article the kinetic aspects of mudstones and kaolin clays decomposition by mineral acids are studied. The decomposition kinetics of mudstones of Chashma-Sang deposit by hydrochloric, sulfuric, nitric and orthophosphoric acids has been studied, and decomposition kinetics of kaolin and green (kaolin) clays by nitric and hydrochloric acids have been studied as well. It has been defined that during the decomposition of mudstones by nitric acid, the process flows in the kinetic region. In other cases, the process takes place in diffusion or mixed areas.

Key words: *kinetic aspects, decomposition, kaolin clays, mineral acid, aluminosilicate ore.*

УДК 620.181.544

А.С.Джафаров, К.Б.Нуров

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ С ОСОБЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ТОЧЕК

*Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни**(Представлено академиком НАН Таджикистан Ф.Рахими 17.03.2021 г.)*

В работе приводятся результаты определения координат критического распада в системе In-Se измерением скорости распространения ультразвука. Использованием ультразвукового метода исследована область расслаивания в системе In-Se. На основе экспериментальных данных построена линия моновариантного равновесия, ограничивающая указанную область. Установлены координаты критической точки (критическая температура и критический состав). Показано, что ультразвуковой метод может быть с успехом использован для надежного установления границы области расслаивания металлических и полупроводниковых жидкостей на фазовой диаграмме, а также для исследования самого процесса расслаивания.

Ключевые слова: *ультразвуковой метод, скорость распространения ультразвука, диаграмма состояния, расслаивание расплавов, металлические и полупроводниковые системы.*

Изучение расслаивания двойных металлических и полупроводниковых систем (с особых температурных точек – температура расслаивания, критическая температура, критический состав и др.) в жидком состоянии имеет важное значение для углубления знаний о природе фазовых переходов. Эта проблема применительно к непрозрачным электронным расплавам (расплавы металлов, полуметаллов и полупроводников) до последнего времени не была решена.

Очень большое число работ посвящено изучению вязкости, теплопроводности и электропроводности жидких металлов и полупроводников, а также изучению их рентгеновскими и нейтронно-графическими методами [1-4]. Полезную информацию о строении расплавов можно получить также из ультразвуковых данных – скорости распространения и поглощения ультразвука.

Для решения этой задачи в отношении указанного класса жидкостей нами было предложено использовать ультразвуковой метод исследования расслаивания в расплавах [5-8].

В данной работе приводятся результаты исследования области расслаивания в системе In-Se с использованием ультразвукового метода. Суть метода заключается в том, что исследуемый образец зондируется ультразвуковыми волнами и измеряется скорость их распространения на разных расстояниях от дна измерительной ячейки. Схема измерения скорости распространения ультразвука в расслаившейся жидкости показана на рис. 1.

Адрес для корреспонденции: Джафаров Амиро Сайобидович, Нуров Курбонали Бозорович. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет. E-mail: jafarov_as@mail.ru; nurov-58@mail.ru.

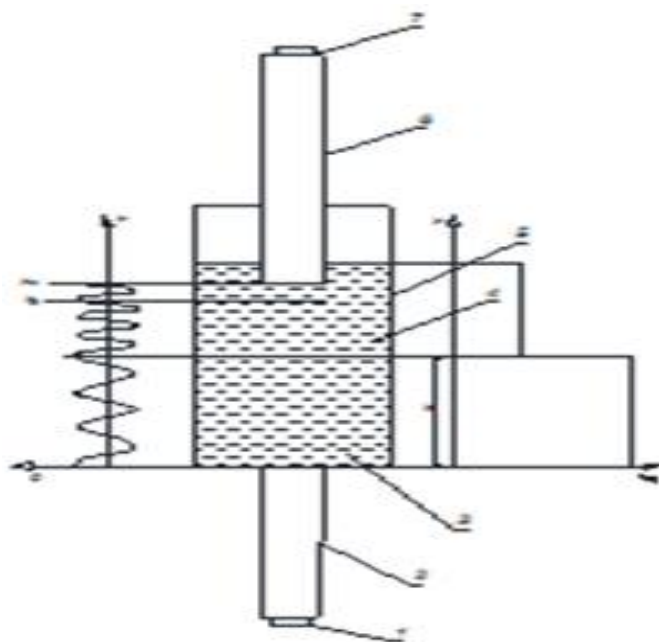


Рис. 1. Схема измерительной ячейки для определения скорости ультразвука в расплаивающихся расплавах (1-7 см. текст).

Ультразвуковая волна от излучателя 1 через нижний звукопровод 2 поступает в исследуемый расплав, помещенный в контейнере 3. Расплав разделяется на два слоя 4 и 5. После прохождения толщи исследуемого расплава ультразвуковая волна принимается верхним подвижным звукопроводом 6, соединенным с приемником 7.

Перемещая верхний подвижный звукопровод при помощи микрометрического винта на расстояние $\Delta h = n\lambda$, получаем возможность зафиксировать значение скорости распространения ультразвука на участке Δh .

Последовательно зондируя расплав путем перемещения верхнего звукопровода, можно установить изменение скорости распространения ультразвука по высоте исследуемого расплава и обнаружить скачок ее при переходе через фазовую границу между слоями 4 и 5. На рис. 1, слева, схематически показано, как в расплаве от нижнего до верхнего звукопроводов распространяется синусоидальная плоская волна, длина которой в нижнем слое больше, чем в верхнем. Пространственное распределение фаз волны имеет стационарный характер, то есть в любой момент времени, кратный периоду колебания в плоскости, расположенной на произвольном расстоянии от дна контейнера, реализуется одна и та же фаза волны.

При перемещении верхнего звукопровода вниз на расстояние $n\lambda$ на экране осциллографа с дифференциальным блоком усиления, на второй вход которого подается когерентный синусоидальный сигнал от того же генератора, что вырабатывает и зондирующее расплав напряжение, наблюдается n погасаний суммарного сигнала. Регистрируя общее перемещение $\Delta h = n\lambda$ и задавая частоту f , скорость ультразвука находим по соотношению $v_s = f \frac{\Delta h}{n}$, которое тождественно очевидной формуле $v_s = f \lambda$. Поскольку длина волны, определяемая как $\lambda = \frac{\Delta h}{n}$, есть составляющая толщи расплава Δh , то и скорость v_s относится именно к этому объему расплава.

Зондируя расплав в области расслаивания при различных температурах, можно обнаружить исчезновение или появление границы между слоями, то есть зафиксировать температуру начала расслаивания, а также, используя значения скорости распространения ультразвука в первом и во втором слоях при каждой данной температуре, можно построить зависимость ϑ_s вдоль линии моновариантного равновесия жидкость – жидкость, которая является основой для построения купола расслаивания на диаграмме фазовых равновесий. Для решения этой последней задачи необходимо исследовать температурную зависимость ϑ_s выше области расслаивания у сплавов определенного состава и экстраполировать ее до пересечения с кривой зависимости ϑ_s вдоль купола расслаивания. Точки пересечения соответствуют температурам начала расслаивания сплавов определенных составов. В результате получаем всю необходимую информацию о координатах фигуративных точек, образующих кривую моновариантного равновесия жидкость – жидкость на $T - x$ диаграмме состояния.

Описанную выше последовательность операций реализовали при исследовании области расслаивания в системе индий – селен.

В качестве исходных материалов для приготовления сплавов использовали индий (Ин-000) и селен – ос.ч. Образцы сплавляли в откачанных до 10^{-4} Па и запаянных кварцевых ампулах. При температурах плавления индия и селена образцы выдерживали в течение 2 часов, основное сплавление проводили при 950 К в течение 3 часов при интенсивном механическом перемешивании и, наконец, охлаждали на воздухе при одновременном встряхивании ампул до затвердевания образцов. Методика измерения скорости распространения ультразвука и соответствующая аппаратура описаны в [9]. Измерения проводили в атмосфере высокочистого аргона в интервале частот 1-3 МГц. Основные особенности методики исследования расслаивающихся расплавов металлов и полупроводников ультразвуковым методом описаны в [10].

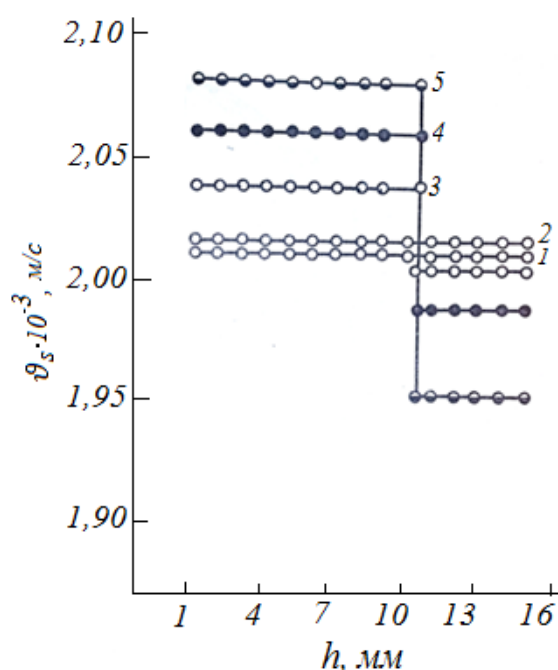


Рис. 2. Изменение скорости распространения ультразвука по высоте столба жидкости в расплаве исходного состава $In_{0,83}Se_{0,17}$ 1-5 соответствуют температурам 930, 917, 910, 903, 893 К.

На рис. 2 представлены результаты экспериментального исследования скорости распространения ультразвука ϑ_s в зависимости от высоты h столба жидкости образца исходного состава $\text{In}_{0,83}\text{Se}_{0,17}$ при различных температурах. Видно, что при 930 и 917 К (соответственно линии 1 и 2) $\vartheta_s - h$ - характеристики представляют собой прямые, параллельные оси h , то есть скорость распространения ультразвука не зависит от высоты, что свидетельствует об однородности расплава. Но при 910 К на $\vartheta_s - h$ - характеристике (линия 3) наблюдается скачок скорости ультразвука. Ступенька однозначно устанавливает факт расслаивания расплава на две жидкие фазы, различающиеся по величине скорости распространения ультразвука. Далее при 903 и 893 К величина ступеньки $\Delta\vartheta_s$ последовательно растет (рис. 2, линии 4 и 5), что говорит об увеличении концентрационного разрыва в сосуществующих слоях с понижением температуры.

Как видно на рис. 2, ступеньки $\vartheta_s - h$ - характеристик 3-5 фиксируются с большой точностью на одной и той же высоте. Тот факт, что граница между слоями при изменении температуры удерживается в одном положении, свидетельствует лишь о перераспределении атомов компонентов без изменения объема фаз. Поэтому можно предложить, что данный состав является критическим. Поскольку температура расслаивания фиксируется достаточно точно, то температуру $\vartheta_s - h$ - характеристики 3 (910 К) можно считать близкой к критической.

Данные, представленные на рис. 2, позволяют построить зависимость скорости распространения ультразвука вдоль линии моновариантного равновесия жидкость – жидкость. Для этого необходимо значения, отвечающие верхней и нижней ветвям $\vartheta_s - h$ - характеристик на рис. 2, представить в зависимости от температуры. В результате получаем общую кривую, отвечающую зависимости скорости распространения ультразвука вдоль купола расслаивания (см. рис. 3).

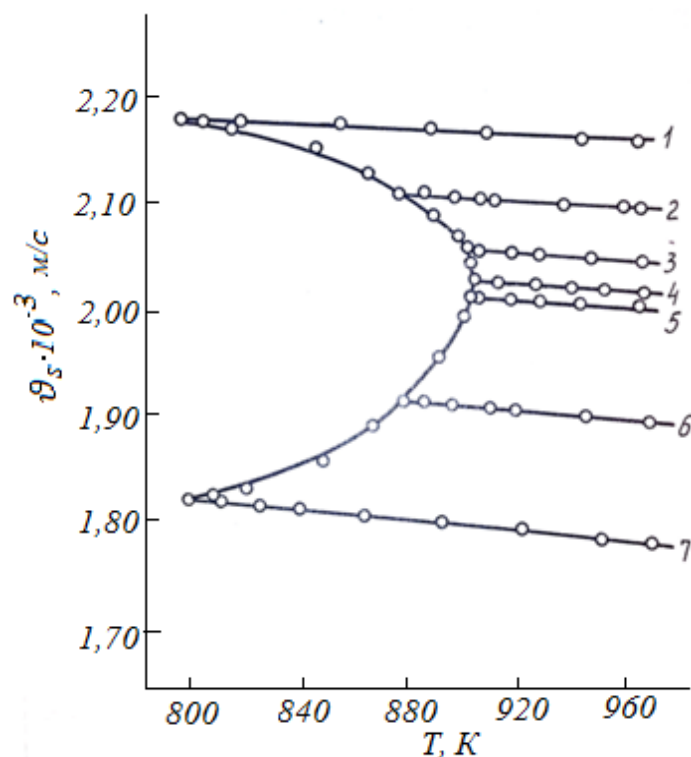


Рис. 3. Температурно-концентрационная зависимость скорости распространения ультразвука в расплавах системы In-Se. Политермы 1-7 соответствуют образцам, содержащим 4, 10, 15, 17, 20, 25 и 30 ат. % селена.

Этот результат в свою очередь позволяет построить линию моновариантного равновесия жидкость – жидкость на диаграмме состояния системы In-Se. Для этого нужно установить зависимость скорости распространения ультразвука от температуры для расплавов различного состава при температурах выше области расслаивания и проэкстраполировать эту зависимость до пересечения с кривой, характеризующей зависимость ϑ_s вдоль купола расслаивания. Точки пересечения и определяют координаты фигуративных точек линии моновариантного равновесия жидкость – жидкость.

Исходя из этого, исследовали температурную зависимость скорости распространения ультразвука ϑ_s 7 составов (см. рис. 3). Из рисунка видно, что температурные зависимости скорости распространения ультразвука выше температуры расслаивания (рис. 3, политермы 1-7 соответственно) носят линейный характер, что позволяет надежно экстраполировать их до пересечения с кривой зависимости скорости распространения ультразвука вдоль купола расслаивания.

Из рис. 3 видно, что при $T > T_{кр}$ все политермы имеют отрицательный наклон к оси температур. Такое изменение скорости распространения ультразвука при $T > T_{кр}$ вполне объяснимо, так как выше $T_{кр}$ имеется однородный раствор. Как видно по рисунку, никаких аномалий на политермах не обнаружено. Они линейно спадают с температурой, начиная от температур расслаивания. В соответствии с выводами в работах [11] этот факт говорит о том, что нет выраженного развития крупномасштабных флуктуаций концентрации в расплавах данной системы. Построенная по данным представленным, на рис. 3 кривая моновариантного равновесия жидкость – жидкость в системе In-Se приведена на рис. 4 в виде фрагмента диаграммы фазовых равновесий.

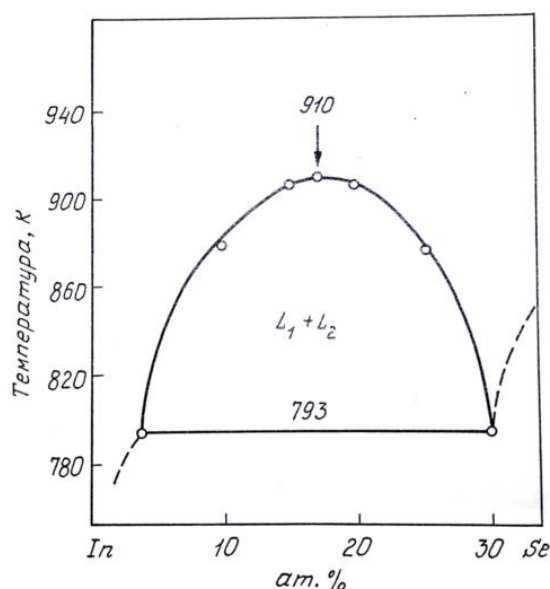


Рис. 4. Фрагмент диаграммы состояния системы In-Se в области расслаивания расплавов.

Видно, что кривая моновариантного равновесия жидкость – жидкость в системе индий – селен характеризуется симметричной бинодалью. В данной системе установлены координаты критической точки: температура- 910 К, состав -17 ат. % Se.

Таким образом, методом исследования скорости распространения ультразвука по высоте расслаивающихся расплавов системы индий – селен построена кривая, ограничивающая область расслаивания на два жидких раствора. Показано, что эта кривая имеет характер симметричной бинодали.

Поступило 17.03.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Славнова Г.К., Елисеев А.А. Рентгенографическое исследование сплавов индий – селен. – Журнал неорганической химии, 1963, т. 8, № 7, с. 1654-1660.
2. Славнова Г.К., Лужная Н.П., Медведева З.С. Новые данные по диаграмме состояния системы индий – селен. – Журнал неорганической химии, 1963, т. 8, № 5, с. 1199-1203.
3. Кононенко В.И., Яценко С.П. Некоторые физические свойства металлических расслаивающихся расплавов. – Известия АН СССР. Металлы, 1970, № 3, с. 205-208.
4. Wobst M. Oberflächenspannung und Dichte schmelzflussiger Legierungen von binaren Tellur – und Selensystemen mit gleichzeitig vorliegenden Mischungslücken und Verbindungen, – Wiss. Z.d.Tehn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt, 1970, v. 12, № 4, pp. 393-414.
5. Глазов В.М., Ким С.Г. Исследование расслаивания расплавов акустическим методом, – Доклады АН СССР, 1985, т. 282, № 5, с. 1170-1173.
6. Глазов В.М., Ким С.Г. Акустические исследования расслаивания и закритических явлений в электронных расплавах, – Доклады АН СССР, 1986, т. 290, № 4, с. 873-876.
7. Глазов В.М., Ким С.Г., Нуров К.Б. Исследование расслаивания расплавов в системе Sb-Se акустическим методом, – Известия АН СССР, 1990, т. 26, № 3, с. 526-529.
8. Глазов В.М., Ким С.Г., Тимошенко В.И., Нуров К.Б. Исследование расслаивания расплавов в системах галлий– кадмий и висмут – цинк. – Журнал физической химии, 1988, т. 62, № 9, с. 2510-2513.
9. Глазов В.М., Тимошенко В.И., Ким С.Г. Аппаратура и методика для исследования акустических свойств электронных расплавов. – Заводская лаборатория, 1985, т. 51, № 3, с. 22-26.
10. Нуров К.Б. Основные особенности методики исследования расслаивающихся расплавов металлов и полупроводников. – Вестник национального университета, 2015, № 1/4 (168), с. 127-130.
11. Регель А.Р., Глазов В.М., Ким С.Г. Акустические исследования структурных изменений при нагреве расплавов полупроводников и полуметаллов. – Физика и техника полупроводников, 1986, т. 20, № 8, с. 1353-1376.

А.С.Джафаров, К.Б.Нуров

ТАДҚИҚОТИ СИСТЕМАҲОИ ДУҚАБАТА БО НУҚТАҲОИ ҲАРОРАТИИ МАХСУС

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Дар мақолаи мазкур натиҷаҳои муайян кардани координатҳои ҳолатҳои бухронии ба қабатҳо ҷудошавӣ дар системаи In-Se тавассути чен кардани суръати паҳншавии ултрасадо оварда шудааст. Бо истифода аз усули ултрасадо ҳудудҳои ба қабатҳо ҷудошавӣ дар системаи In-Se тадқиқ карда шудааст.

Дар асоси маълумотҳои дар таҷриба ба дастовардашуда, ҳатгӣ мувозинати моновариантии сохта шудааст, ки ҳудудӣ нишондодашударо маҳдуд мекунад. Координатҳои нуктаҳои бухронӣ муайян карда шудааст.

Нишон дода шудааст, ки усули ултрасадогиро метавон барои муайян намудани ҳудудҳои ба қабатҳо ҷудошавии моеъҳои металлӣ ва нимноқилӣ дар диаграммаи фазагӣ ва инчунин барои омӯзиши раванди ба қабатҳо ҷудошавӣ истифода бурд.

Калимаҳои калидӣ: *методи ултрасадо, суръати паҳншавии ултрасадо, диаграммаи ҳолат, ба қабатҳо ҷудошавии ғудохтаҳо, системаҳои нимноқилӣ ва металлӣ.*

A.S.Jafarov, K.B.Nurov

RESEARCH OF BINARY SYSTEMS WITH SPECIAL TEMPERATURE POINTS

S. Ainy Tajik State Pedagogical University

In this paper the results of determining the coordinates of the critical decay in the In-Se system by measuring the propagation velocity of ultrasound are presents. The ultrasonic method was used to investigate the delamination region in the In-Se system. On the basis of the experimental data, a line of monovariant equilibrium was constructed, which bounds the indicated region. The coordinates of the critical point (critical temperature and critical composition) have been determined.

It is shown that the ultrasonic method can be successfully used to reliably establish the boundary of the separation region of metallic and semiconducting liquids in the phase diagram, as well as to study the separation process itself.

Key words: *ultrasonic method, ultrasound propagation velocity, phase diagram, melt separation, metal and semiconductor systems.*

УДК 536.544.2.665.76(575.3)

М.С.Холиков

**ТЕРМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА ПАРООБРАЗОВАНИЯ
ТРАНСМИССИОННОГО МАСЛА МАРКИ
«LUMIX TRANSMISSION OIL: SAE 80W-90; API GL-5»**

Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими

(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана А.Бадаловым 02.06.2021г.)

Процесс парообразования трансмиссионного масла марки «LUMIX transmission oil: SAE 80W-90; API GL-5» изучен методом тензиметрии с мембранным нуль-манометром. Исследования, проведённые в температурном интервале 300-500 К при изохорических и равновесных условиях, показали, что процесс парообразования объекта состоит из трёх ступеней, определены их термические характеристики.

Ключевые слова: *смазочные масла, технико-экономические показатели, процесс парообразования, ступенчатость, термические характеристики.*

В современных горнотранспортных машинах (ГТМ), эксплуатируемые в сложных горногеологических и климатических условиях, одним из важных элементов узлов и агрегатов являются смазочные масла (СМ), испытывающие высокие нагрузки и предельные скорости скольжения, обеспечивающие в свою очередь: защиту высоконагруженных узлов и агрегатов, механизмов, например трансмиссию, двигателя внутреннего сгорания (ДВС), гидросистемы (ГС), а в итоге бесперебойную работу высокоэффективной современной техники, с учетом достижения прогнозируемых технико-экономических показателей (ТЭП).

Анализ мировой истории развития производства, применения и реформулирования СМ, в том числе трансмиссионных масел (ТМ), показывает [1,2], что важнейшими проблемами повышения ТЭП карьерной техники, в том числе ГТМ, являются вопросы совершенствования конструкции самих трансмиссий на стадии их проектирования [3, 4], исследования, совершенствования свойств СМ, применяемых в различных видах трансмиссий; регенерации СМ, включая эколого-экономические аспекты [5], с учетом их термических характеристик и свойств (ТХС) существующих СМ (например, установления более рациональных диапазонов термической стойкости процесса парообразования СМ) и вновь разрабатываемых масел, используемых не только как СМ, но и в качестве рабочих тел, жидкостей и одним из основных элементов в различных трансмиссиях, ГС, эксплуатируемой и проектируемой техники [6,7].

Долговечность и надежность работы всех видов трансмиссий весьма ощутимо влияют на коэффициент готовности K_r (характеризующий часть времени, в течение которого техника сохраняет работоспособность по отношению к суммарному отрезку времени ее работы и ремонта –

Адрес для корреспонденции: Холиков Муслихиддин Салохиддинович. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. академиков Раджабовых, 10, Таджикский технический университет.
E-mail: muslihiddin.holi@mail.ru

$K_r = T_p / (T_p + T_v)$, где: T_p , T_v – соответственно время работы техники, восстановления техники после отказа, (час); K_r не отражает потери рабочего времени по организационным, другим причинам, и коэффициент технического использования ($K_{m.u} = T_p / (T_p + T_v + K_{m.o})$), который учитывает еще время, затраченное на техническое обслуживание - $K_{m.o}$ [8], и в целом на ТЭП ГТМ.

Значения K_r и $K_{m.u}$ во многом определяются условиями эксплуатации трансмиссий ГТМ, испытывающих высокие нагрузки в тяжелых условиях эксплуатации (повышенная внешняя температура, разреженность и запыленность воздуха, крутые подъемы и спуски, частое использование режима «старт-стоп», ударные нагрузки, подобные многим объектам Республики Таджикистан), обуславливающие: большие перепады ТХС, особенно температуры и давления; ускорению ухудшение процессов окисления и химической стойкости состава ТМ; генерацию высоких температур в рабочей среде ТМ, достигающих более 210°C, а на стадиях кипения и процесса парообразования (ПП) температура ТМ достигает более 250°C, из-за чего уже на верхнем пределе допустимой температуры вязкость ТМ понижается, в связи с чем происходит снижение качества смазывания деталей узлов и предельной толщины масляной пленки, доходя до разрыва.

Температура застывания также является весьма важной характеристикой ТМ, поскольку при такой температуре происходит: застывание ТМ, теряется его тягучесть и подвижность; вязкость резко увеличивается, начинается процесс кристаллизации парафина (из-за выделения углеводородных компонентов ТМ); ухудшение пусковых характеристик ДВС, трансмиссий и значения K_r , $K_{m.u}$ ГТМ, что в итоге отрицательно влияет и на ТЭП не только ГТМ, но и предприятия в целом, поскольку себестоимость единицы выполняемых горных работ становится не конкурентоспособной.

Стандартные требования к ТМ, с учетом стандартизованных терминов, определения показателей надежности, безотказности, долговечности, ремонтпригодности и другие показатели, соответственно регулируются Межгосударственными стандартами: ГОСТ 23652-79; ГОСТ 17479.2-2015; ГОСТ 20799-88; ГОСТ 981-75; ГОСТ 1461-75; ГОСТ 5985-79; Каталог технических регламентов и стандартов Республики Таджикистан (по состоянию на 1 января 2017 года). Душанбе 2017.

Вышеизложенное весьма критично обуславливает выбор ТМ, поэтому необходимо особенно обращать внимание на ТХС, с учетом рациональных диапазонов рабочих температур и стандартных требований безопасности.

Таким образом, вопросы исследования ТХС трансмиссионных масел, в том числе определение характера и термических характеристик ПП ТМ для современных трансмиссий и других гидрофицированных агрегатов и узлов горной техники, в том числе ГТМ, приобретает фундаментальную значимость.

По вопросам установления рациональных диапазонов термической устойчивости и техники измерения ТХС СМ, а также утилизации отработанных масел посвящены работы [9-11], которые способствуют: научно обоснованному подбору СМ в зависимости от степени тяжести условий их работы; обеспечению надежности работы трансмиссий и ДВС ГТМ; сокращению затрат на единицу выполняемых работ. Таким образом, изучение ПП ТМ с целью уточнения диапазонов рабочих температур ТМ и уточнения ТХС, а также проблема обеспечения улучшения вышеупомянутых показателей остается приоритетной, о чем свидетельствуют итоги работ [12,13].

Для целей исследования нами выбрано ТМ марки «LUMIX transmission oil: SAE 80W-90; API GL-5» (далее – объект) являющееся одним из широко продаваемых за последние 5 лет СМ на рынках Республики Таджикистан, имеющий следующие физико-химические характеристики (согласно данным производителя – ООО «Нефтесинтез», г. Екатеринбург, РФ): плотность при 20°C, кг/м³-898; индекс вязкости-102; кинематическая вязкость при 100°C, мм²/с-18.24; кинематическая вязкость при 50°C, мм²/с-116; температура вспышки в открытом тигле 246°C; температура застывания -25°C; трибологические характеристики при температуре ±20°C: индекс задира (И_з) Н (кгс)-572; нагрузка сваривания (Р_с), Н (кгс) - 3693; показатель износа (Д_и) при осевой нагрузке 392 Н, 1 час, мм - 0.3.

Применение объекта согласно рекомендации и характеристике производителя – ООО «Нефтесинтез», РФ [14]: предназначено для смазывания: агрегатов трансмиссий, гипоидных передач легковых, грузовых автомобилей и другой мобильной техники производства России и зарубежной техники, работающей в сложных температурных условиях, при высоких нагрузках и скоростях скольжения; характеризуется высокой термоокислительной стабильностью, обеспечивающей длительный срок службы масла и эффективную работу оборудования; имеет отличные противоизносные свойства, надежно защищает от коррозии; препятствует пенообразованию, гарантируя прочность смазывающей масляной пленки; сохраняет рабочие характеристики при длительной эксплуатации.

С использованием метода тензиметрии с мембранным нуль манометром [3] в изохорических и равновесных условиях проведено исследование процесса парообразования ТХС нашего объекта. Обеспечение равновесной системы на кривой зависимости давления пара от температуры – то есть на барограмме, каждая изотермическая точка выдерживалась в течение 20–24 ч до достижения неизменности давления в течение 2-х часов. Процесс исследования проведен

а) без предварительной откачки объекта и б) с предварительной откачкой объекта, то есть в двух режимах. При комнатной температуре откачка объекта из мембранной камеры производилась в течение 2-х часов.

Результаты и их обсуждение

Результаты экспериментальных данных, полученные в температурном диапазоне 300-500 К и в графической интерпретации, приведены соответственно в табл.1 и на рис.1, показывающих сложную схему ПП объекта и 3-ступенчатость названного процесса в искомом диапазоне температур.

Таблица 1

Экспериментальные данные ПП объекта – трансмиссионного масла марки «LUMIX transmission oil: SAE 80W-90; API GL-5»

Т, К (Т,°С)	Р _{общ.} , мм.рт.ст.	Р, кПа	Т, К (Т,°С)	Р _{общ.} , мм.рт.ст.	Р, кПа
312 (39)	38	5.06	385 (112)	283	37.73
320 (47)	65	8.66	397 (124)	298	39.73
322 (49)	76	10.13	402 (129)	310	41.32
328 (55)	104	13.86	415 (142)	326	43.46
332 (59)	120	15.99	421 (148)	338	45.06
348 (75)	196	26.13	438 (165)	400	53.32
350 (77)	200	26.66	441 (168)	574	76.52
354 (81)	203	27.06	452 (179)	701	93.45
362 (89)	221	29.46	454 (181)	726	96.79
367 (94)	259	34.53	464 (191)	745	99.32
371 (98)	272	36.26			

В изученном температурном диапазоне барограмма ПП объекта имеет многоступенчатый характер (табл.1 и рис.1): первая ступень протекает в диапазоне температур: 312-350 К вторая 362-371 К и третья 421-454 К.

Анализ данных барограммы ПП исследуемого объекта, полученных на основе прямого (нагревания) и обратного (охлаждения) хода, не совпадают при многократном увеличении времени выдержки (более 70 ч), что является фактом, свидетельствующим о необратимости характера процесса термической деструкции исследуемого объекта.

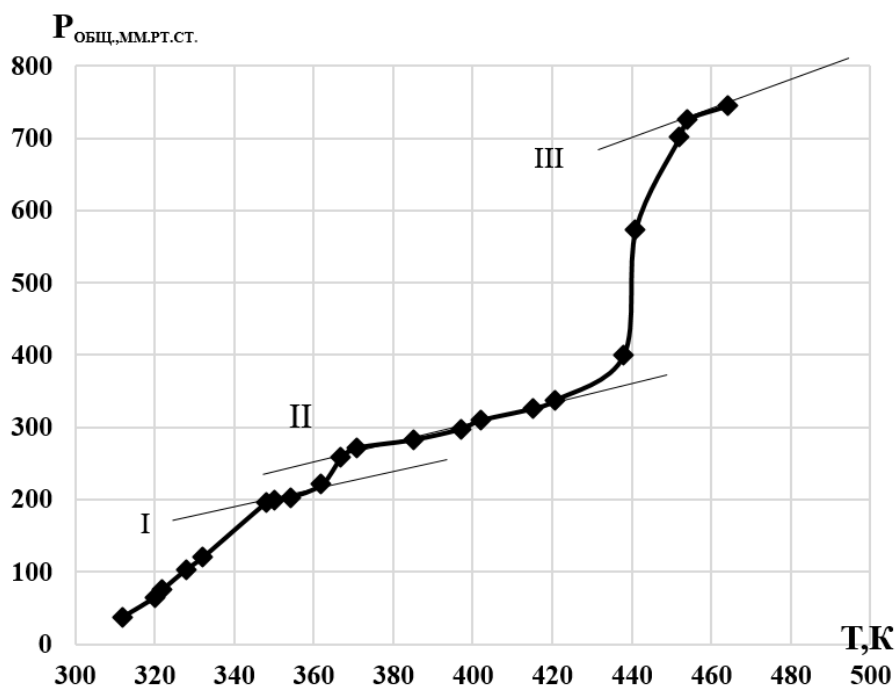


Рис. 1. Барограмма ПП трансмиссионного масла марки «LUMIX transmission oil: SAE 80W-90; API GL-5».

Обработанный таким способом объект (масло) приобретает более темную окраску по сравнению с исходным образцом. Полученные экспериментальные данные для каждой ступени ПП исследуемого объекта в виде зависимости $\lg P$ от обратной температуры, которые обработаны отдельно, приведены на рис.2. Для этого значения давления пара последующих стадий определены за вычетом давления пара предыдущих стадий. Полученные данные обработаны методом наименьших квадратов с использованием значения-коэффициента Стьюдента [15], при 95%-ном доверительном интервале.

Термические характеристики (энтальпия (ΔH , кДж/моль), энтропия (ΔS , Дж/моль·К) и энергия Гиббса (ΔG , кДж/моль)) всех ступеней ПП исследуемого объекта, рассчитан по полученным уравнениям прямых линий, приведенны в табл.2 и 3.

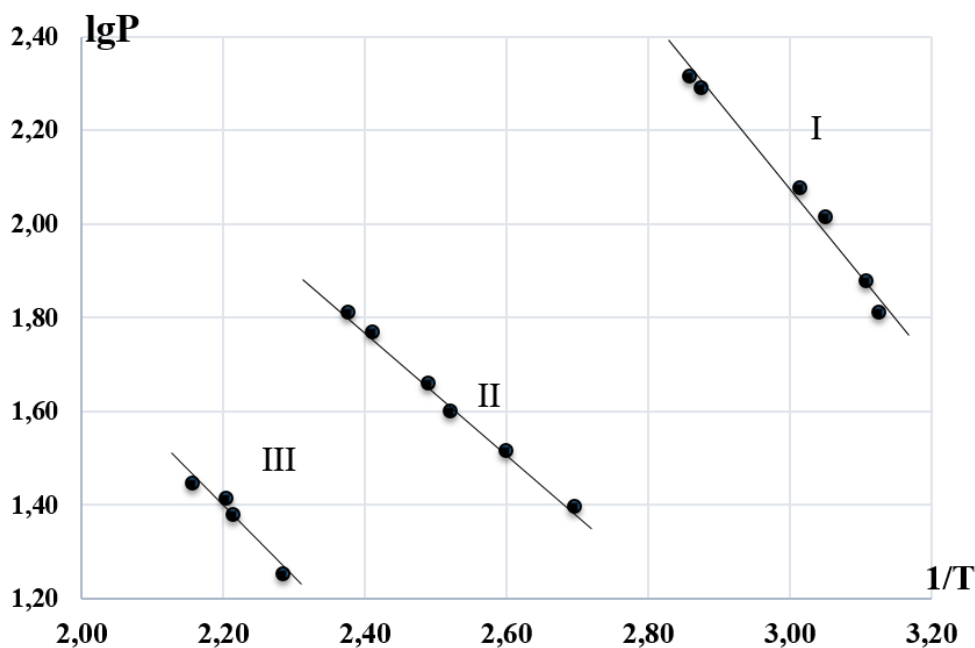


Рис. 2. График зависимости lgP от обратной температуры ступеней ПП.

Таблица 2

Динамика изменения давления паров ПП масла марки
«LUMIX transmission oil: SAE 80W-90; API GL-5»

№	T, K (°C)	P _{общ}	1/T · 10 ³ (x)	lgP (y)	x ²	xy
I	312 (39)	38	3.21	1.58	10.30	5.07
	320 (47)	65	3.13	1.81	9.77	5.67
	322 (49)	76	3.11	1.88	9.64	5.84
	328 (55)	104	3.05	2.02	9.30	6.15
	332 (75)	120	3.01	2.08	9.07	6.26
	348 (77)	196	2.87	2.29	8.26	6.59
	350 (81)	208	2.86	2.32	8.16	6.62
II	362 (89)	20	2.71	2.34	7.63	6.48
	367 (94)	57	2.72	2.41	7.42	6.58
	371 (98)	69	2.70	2.43	7.27	6.56
III	421 (148)	38	2.38	1.58	5.64	3.75
	438 (165)	95	2.28	1.98	5.21	4.52
	441 (168)	265	2.27	2.42	5.14	5.49
	452 (179)	390	2.21	2.59	4.89	5.73
	454 (181)	411	2.20	2.61	4.85	5.76

Таблица 3

Уравнения барограмм и термодинамические параметры ступеней ПП трансмиссионного масла марки «LUMIX transmission oil: SAE 80W-90; API GL-5»

(А и В – безразмерные коэффициенты уравнения барограмм, определенные из графика - рис. 2)

Ступени	$\Delta T, K$	Уравнение $LgP_{(at)} = B - A \cdot 10^3/T$		Термодинамические параметры		
		A	B	ΔH_T^o , кДж/моль	ΔS_T^o , Дж/моль·К	ΔG_{298}^o , кДж/моль
I	312-350	1.79±0.04	4.59±0.08	8.19±0.2	34.18±0.4	-2.0±0.4
II	362-371	9.87±0.05	25.59±0.09	45.15±0.2	117.07±0.4	3.3±0.2
III	421-454	6.22±0.04	13.46±0.08	28.46±0.2	61.60±0.4	1.5±0.4

В ы в о д ы

В общем температурном диапазоне $T=300-500 K$ процесс парообразования смазочные масла марки «LUMIX transmission oil: SAE 80W-90; API GL-5», протекая согласно сложной схеме, состоит из трех ступеней:

- первая ступень, протекающая в температурном диапазоне 312-350 K, соответствует процессу десорбции поглощённых газов воздуха и влаги из испытуемого объекта. Малое значение величины энергии Гиббса свидетельствует об обратимости данной ступени процесса парообразования;

- интенсивное протекание второй ступени в более узком температурном диапазоне 362-371 K, соответствует процессу парообразования более легколетучих компонентов объекта;

- при более высоких температурах, соответствующих температурному диапазону 421-454 K и процессу парообразования объекта, происходит термическое разложение более тяжелых компонентов исследуемого смазочные масла.

2. Полученные результаты данного исследования могут использоваться как дополнение к базам данных термических характеристик и свойств смазочные масла, благодаря которым появится возможность дальнейшего улучшения температурно-вязкостных диапазонов трансмиссионных масел.

Поступило 09.06.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Анистратова Е.В. Exxon Mobil Fuels & Lubricants – высокоэффективные промышленные смазочные материалы - Горная промышленность, 2014, № 1 (113), с. 88-90.
2. АО «Горнопромышленная финансовая компания». Профессиональная линейка смазочных материалов и специальных жидкостей для техники БЕЛАЗ – УГОЛЬ, 2018, № 4, с. 51-53.
3. Нажмуудинов Ш.З. Анализ параметров рабочего процесса двухпоточной гидромеханической трансмиссии – УГОЛЬ, 2014, № 6, с. 34-36.
4. Подэрни Р.Ю., Нажмуудинов Ш.З., Холиков М.С. Установление зависимостей параметров перспективной гидромеханической передачи – УГОЛЬ, 2016, № 11, с. 28-30
5. Халилов И.Х. Теплофизические свойства и аспекты технологии очистки технических масел бентонитовыми глинами Таджикистана - Дис...канд. техн. наук, Душанбе, 2021, 135с.
6. Башта Т.М. Машиностроительная гидравлика, Справочное пособие – М.: МАШГИЗ, 1963, 696с.
7. Ковалевский В.Ф., Железняков Н.Т., Бейлин Ю.Е. Справочник по гидроприводам горных машин. – М.: Недра, 1973, 504с.

8. Замышляев В.Ф., Русихин В.И., Шешко Е.Е. Эксплуатация и ремонт карьерного оборудования: Учебное пособие для ВУЗов. – М.: Недра, 1991, 285 с.
9. Кламанн Д., Заславский Ю. С., Смазки и родственные продукты: Синтез. Свойства. Применение. Перевод с английского – М.: Химия, 1988, 488с.
10. Юнусов М. Физико-химические основы утилизации отработанных смазочных материалов: Автореф... дис. канд. техн. наук. – Душанбе, 2006, 22с.
11. Суворов А.В. Термодинамическая химия парообразного состояния – Л.: Изд-во Химия, 1970, 204с.
12. Бурцев С.В., Духнов П.А., Дорошенко С.В, Ширлин И.И. Эффективное использование техники на предприятиях компании СДС-Уголь за счет внедрения программы «OTS Monitoring» - комплексного мониторинга смазочных материалов – УГОЛЬ, 2016, № 1, с.17-23.
13. Бизнес масел ЛУКОЙЛ: Позитивные итоги – УГОЛЬ, 2018, № 2, с.24.
14. www.neftesintes.com
15. Гордон А., Форд Р. Спутник химика– М.: Мир. 1976, 541с.

М.С.Холиков

**ТАВСИФҶОИ ҲАРОРАТИИ ҶАРАЁНИ БУҶШАВИИ РАВҶАНИ
ТРАНСМИССИОНИИ ТАМҶАИ
«LUMIX TRANSMISSION OIL: SAE 80W-90; API GL-5»**

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ.

Ҷараёни буҷшавии равғани трансмиссионии тамғаи “LUMIX oil transmission: SAE 80W-90; API GL-5” бо истифода аз усули тензиметрии мембранааш нул-манометрӣ омӯхта шудааст. Таҳқиқоти дар фосилаи ҳароратии 300-500 К бо истифода аз шароитҳои изохорӣ ва баробарвазний гузаронидашуда нишон додаанд, ки ҷараёни буҷшавии объекти таҳқиқотшаванда аз се зина иборатаст ва тавсифҳои ҳароратии онҳо муайян карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: равғанҳои молиданӣ, нишондиҳандаҳои техникӣ-иқтисодӣ, ҷараёни буҷшавӣ, зинагӣ, тавсифҳои ҳароратӣ.

M.S.Kholikov

**THERMAL CHARACTERISTICS OF THE PROCESS OF STEAM FORMATION
OF TRANSMISSION OIL BRAND
“LUMIX TRANSMISSION OIL: SAE 80W-90; API GL-5”**

M.S.Osimi Tajik Technical University

The process of vaporization of transmission oil brand “LUMIX transmission oil: SAE 80W-90; API GL-5” by tensimetry with a membrane zero pressure gauge was studied. Investigations carried out in the temperature range of 300-500 K under isochoric and equilibrium conditions have shown that the process of vaporization of an object consists of three stages and their thermal characteristics have been determined.

Key words: lubricating oils, technical and economic indicators, vaporization process, grading, thermodynamic characteristics.

УДК 669.76+542.943

У.Р.Джобиров, академик НАН Таджикистана И.Н.Ганиев, М.Ч.Ширинов, З.Р.Обидов

АНОДНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЦИНКОВОГО СПЛАВА $Zn_{0.5}Al$, ЛЕГИРОВАННОГО ЭРБИЕМ В КИСЛОЙ СРЕДЕ*Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана*

В работе представлены результаты потенциодинамического исследования анодного поведения цинкового сплава $Zn_{0.5}Al$, легированного эрбием в кислой среде. Показано, что введение в цинковый сплав $Zn_{0.5}Al$ эрбия (0.01-1.0 мас.%) способствует незначительному уменьшению скорости коррозии этого анодного сплава.

Ключевые слова: *сплав $Zn_{0.5}Al$, эрбий, потенциостатический метод, электролит HCl, потенциал коррозии, скорость коррозии.*

В настоящее время для защиты от коррозии изделий из стали и чугуна применяются металлические покрытия на основе цинка, наносимые на поверхность изделий различными методами [1-3].

При изучении анодного поведения сплавов широко используются электрохимические методы, особенно потенциостатические [4]. Используя потенциодинамические режимы исследования, можно оценить в поведении анодного сплава роль электродного потенциала в пассивном состоянии. Обусловлено, что важнейшей анодной характеристикой сплава является зависимость кинетики растворения от потенциала, где можно применять для выбора способа защиты и повышения устойчивости анодного сплава в эксплуатационных заданных условиях.

Таким образом, авторами [5] разработаны новые защитные цинк-алюминиевые покрытия с некоторыми элементами периодической таблицы. Имеются сведения об анодном поведении данных сплавов в кислых, нейтральных и щелочных средах [6]. Установлена эффективность их легирования третьими компонентами [7].

В научной литературе и в сети интернета нами не обнаружены сведения, относящиеся к влиянию эрбия на анодное поведение цинкового сплава $Zn_{0.5}Al$. Исходя из этого, в качестве легирующего компонента цинкового сплава $Zn_{0.5}Al$ был выбран эрбий.

Образцы сплава для исследования были получены из цинка марки ХЧ(гранулированный), алюминий марки А7 и его лигатуры с эрбием (10 мас.% Er) в тиглях из оксида алюминия в шахтной печи электрического сопротивления типа СШОЛ в интервале температур 650...800°C. Химический анализ компонентов состава исследуемых сплавов контролировался микрорентгеноспектральным анализом на приборе SEM серии AIS 2100 (Южно-Корейского производства). Из полученных сплавов в графитовую изложницу отливали стержни диаметром 8 мм и длиной 140 мм. Боковые части образцов покрывались коррозионностойким лаком. Рабочей поверхностью служил торец электрода.

Коррозионно-электрохимические исследования тройных сплавов проводили потенциостатическим методом в потенциодинамическом режиме на потенциостате ПИ-50-1.1 со скоростью раз-

Адрес для корреспонденции: Джобиров Умед Рустамович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: z.r.obidov@rambler.ru

вёртки потенциала 2 мВ/с, в кислых средах 0.001н, 0.01н и 0.1н электролита HCl. Электродом сравнения служил хлоридсеребряный, вспомогательным – платиновый. Методика электрохимического исследования сплавов описана в работах [8-10].

Результаты коррозионно-электрохимического исследования сплавов представлены в табл. 1 и 2. Как видно, со временем потенциалы свободной коррозии ($-E_{\text{св.кор.}}$, В) сплавов смещаются в положительную область. Потенциал $E_{\text{св.кор.}}$ цинкового сплава Zn0.5Al, легированного эрбием, по мере роста концентрации хлорид-иона в электролите HCl смещается в область отрицательных значений (табл. 1). Введение в цинковый сплав Zn0.5Al эрбия в пределах изученной концентрации способствует смещению потенциалов коррозии ($-E_{\text{корр.}}$, В), питтингообразования ($-E_{\text{п.о.}}$, В) и репассивации ($-E_{\text{реп.}}$, В) в область положительных значений (табл. 2). Следует отметить, что динамика изменения коррозионно-электрохимических потенциалов благоприятно влияет на изменения коррозионной стойкости сплавов в целом.

Таблица 1

Изменения потенциала свободной коррозии ($-E_{\text{св.кор.}}$, В) цинкового сплава Zn0.5Al, легированного эрбием, во времени, в кислой среде

Среда HCl	Добавки Er в сплаве, мас.%	Время выдержки сплава, минут							
		1/3	2/3	1	5	15	40	50	60
0.001н	-	1.066	1.064	1.058	1.049	1.045	1.045	1.045	1.045
	0.01	0.930	0.929	0.928	0.926	0.923	0.910	0.910	0.910
	0.05	0.926	0.923	0.921	0.917	0.914	0.896	0.896	0.896
	0.1	0.889	0.888	0.887	0.881	0.877	0.865	0.865	0.865
	0.5	0.963	0.963	0.958	0.955	0.953	0.942	0.942	0.942
	1.0	0.977	0.976	0.974	0.971	0.966	0.958	0.958	0.958
0.01н	-	1.123	1.122	1.117	1.115	1.110	1.110	1.110	1.110
	0.01	0.987	0.987	0.985	0.976	0.971	0.962	0.962	0.962
	0.05	0.969	0.968	0.967	0.955	0.952	0.940	0.940	0.940
	0.1	0.935	0.933	0.932	0.930	0.927	0.918	0.918	0.918
	0.5	0.987	0.986	0.985	0.983	0.979	0.971	0.971	0.971
	1.0	1.014	1.012	1.011	1.009	0.998	0.987	0.987	0.987
0.1н	-	1.211	1.210	1.209	1.201	1.190	1.190	1.190	1.190
	0.01	1.006	1.005	0.997	0.996	0.992	0.980	0.980	0.980
	0.05	0.988	0.987	0.985	0.983	0.976	0.972	0.972	0.972
	0.1	0.976	0.976	0.974	0.971	0.967	0.958	0.958	0.958
	0.5	1.015	1.014	1.013	1.011	1.005	0.995	0.995	0.995
	1.0	1.027	1.024	1.023	1.018	1.015	1.013	1.013	1.013

Таблица 2

Коррозионно-электрохимические характеристики цинкового сплава Zn0.5Al, легированного эрбием, в кислой среде

Среда НС1	Добавки Er в сплаве, мас. %	Электрохимические потенциалы, В (х.с.э.)				Скорость коррозии	
		-E _{св.кор.}	-E _{кор.}	-E _{п.о.}	-E _{реп.}	$i_{кор} \cdot 10^2$ А/м ²	K · 10 ³ г/м ² · ч
0.001н	-	1.045	1.051	0.912	0.921	0.136	1.65
	0.01	0.910	0.945	0.852	0.863	0.118	1.44
	0.05	0.896	0.931	0.835	0.842	0.114	1.39
	0.1	0.865	0.883	0.828	0.833	0.109	1.33
	0.5	0.942	0.966	0.868	0.873	0.123	1.50
	1.0	0.958	0.984	0.875	0.888	0.125	1.52
0.01н	-	1.110	1.118	0.980	0.995	0.154	1.87
	0.01	0.962	0.993	0.892	0.902	0.133	1.62
	0.05	0.940	0.975	0.885	0.891	0.130	1.58
	0.1	0.918	0.943	0.865	0.873	0.126	1.54
	0.5	0.971	0.994	0.908	0.912	0.142	1.73
	1.0	0.987	1.005	0.916	0.923	0.143	1.74
0.1н	-	1.190	1.195	1.030	1.036	0.178	2.17
	0.01	0.980	1.010	0.940	0.955	0.153	1.86
	0.05	0.972	0.995	0.935	0.947	0.150	1.83
	0.1	0.958	0.985	0.923	0.934	0.148	1.80
	0.5	0.995	1.024	0.968	0.978	0.166	2.02
	1.0	1.013	1.038	0.975	0.982	0.169	2.06

В целом, легирование цинкового сплава Zn0.5Al эрбием различной концентрации придаёт сплаву (защитного покрытия) большей анодной устойчивости в кислой среде, вследствие их природы, термодинамическая устойчивость или эффективного торможения той или иной стадии анодного процесса из-за наступления пассивного состояния. Следовательно, введение в цинковый сплав Zn0.5Al эрбия (0.01-0.1 мас.%) способствует некоторому уменьшению скорости коррозии анодного сплава Zn0.5Al (табл. 2). Составы данных сплавов считаются оптимальными, в плане разработки анодных сплавных покрытий для защиты конструкций, изделий и сооружений из углеродистой стали и чугуна от коррозии.

Поступило 10.03.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кечин В.А., Люблинский Е.Я. Цинковые сплавы. – М.: Металлургия, 1986, 247 с.
2. Слэндер С.Д., Бойд У.К. Коррозионная стойкость цинка. – М.: Металлургия, 1976, 200 с.
3. Виткин А.И., Тейндл И.И. Металлические покрытия листовой и полосовой стали. – М.: Металлургия, 1971, 493 с.
4. Фрейман Л.И., Макаров В.А., Брыксин И.Е. Потенциостатические методы в коррозионных исследованиях и электрохимической защите. – Л.: Химия, 1972, 240 с.
5. Obidov Z.R., Ganiev I.N. – Russian Journal of Applied Chemistry, 2012, v. 85, №11, pp. 81-1784.
6. Обидов З.Р. Влияние pH среды на анодное поведение сплава Zn55Al, легированного бериллием и магнием. – Журнал прикладной химии, 2015, т. 88, № 9, с. 1306-1312.

7. Обидов З.Р. Влияние рН среды на анодное поведение сплава Zn5Al, легированного бериллием и магнием. – Известия СПбГТИ (ТУ), 2015, № 32(58), с. 52-55.
8. Колотыркин Я.М. Металл и коррозия. – М.: Металлургия, 1985, 88 с.
9. Улиг Г.Г., Ревы Р.У. Коррозия и борьба с ней. Введение в коррозионную науку и технику. – Л.: Химия, 1989, 456 с.
10. Семенова И.В., Флорианович Г.М., Хорошилов А.В. Коррозия и защита от коррозии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002, 336 с.

У.Р.Джобиров, И.Н.Ганиев, М.Ч.Ширинов, З.Р.Обидов

РАФТОРИ АНОДИИ ХЎЛАИ РУҲ Zn0.5Al, БО ЭРБИЙ ҶАВҲАРОНИДАШУДА ДАР МУҲИТИ КИСЛОТАГӢ

Институту кимиёи ба номи В.И.Никитини Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола натиҷаҳои таҳқиқоти потенциодинамикии рафтори анодии хӯлаи руҳ Zn0.5Al, ки бо эрбий ҷавҳаронидашуда, дар муҳити кислотагӣ пешниҳод шудааст. Нишон дода шудааст, ки ба хӯлаи руҳ Zn0.5Al илова намудани эрбий қобилияти начандон камқунии суръати коррозияи хӯлаи анодии Zn0.5Al -ро зоҳир менамояд.

Калимаҳои калидӣ: хӯлаи Zn0.5Al, эрбий, усули потенциостатикӣ, электролити HCl, потенциали коррозия, суръати коррозия.

U.R.Jobirov, I.N.Ganiev, M.Ch.Shirinov, Z.R.Obidov

ANODE BEHAVIOUR OF Zn0.5Al ZINC ALLOY, DOPED WITH ERBIUM, IN THE SOUR ENVIRONMENT

V.I.Nikitin Institute of Chemistry National Academy of Sciences of the Tajikistan

In this paper the results potentiodynamical researches of anode behaviour of Zn0.5Al zinc alloy, doped with erbium, in the sour environment, are presented. Showed, that introduction in Zn0.5Al zinc alloy erbium promotes reduction of corrosion rate of anodic alloy.

Key words: Zn0.5Al alloy, erbium, potentiostatically method, HCl electrolyte, corrosion potential, corrosion rate.

УДК 669.849.3

А.А.Кодиров, Х.Ш.Рахимов, член-корреспондент НАН Таджикистана А.Бадалов*

**МЕХАНИЧЕСКАЯ АКТИВАЦИЯ СУЛЬФИДНО-СУРЬМЯНЫХ
КОНЦЕНТРАТОВ***Горно-металлургический институт Таджикистана, Бустон,***Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими, Душанбе*

Разработан способ механической активации сульфидно - сурьмяного концентрата. Определены оптимальные условия обработки концентрата, позволяющие росту извлечение сурьмы из него.

Ключевые слова: *сульфидно-сурьмяной концентрат, механическая активация, оптимальные условия, извлечение сурьмы.*

Комплексная переработка поликомпонентных местных минеральных руд, имеющих на территории Республики Таджикистан, требует поиск более эффективных способов извлечения не только основного компонента, но и других сопутствующих полезных веществ из состава минерального сырья. Подтвержденные мировые запасы сурьмы составляют 3.9 млн/т, а Таджикистан занимает третье место (после Китая и Таиланда) в Азии и первое - среди стран СНГ. В настоящее время применяемый на Анзобском ГОК-е способ переработки минерального сырья требует модернизации [1].

Одним из рациональных методов переработки и способов достижения максимального вскрытия природного сырья является механическая активация минеральных руд [2-6]. Авторами этих и других работ [7-9] установлено, что при механической обработке в процессе измельчения руды происходят структурные изменения с образованием множества дефектов в кристаллической решетке частиц. Частицы с развитой поверхностью и приобретённой механической энергией становятся более реакционноспособными.

Настоящая работа посвящена разработке и определению оптимальных условий проведения механической активации высокосортных сульфидно-сурьмяных концентратов [10]. По результатам рентгенофазового анализа, проведенного в лаборатории Физико-технического института имени С.У.Умарова НАН Таджикистана, исходный сульфидно-сурьмяной концентрат имеет следующий фазовый состав (% масс.): стибитит Sb_2S_3 – 49.78; киноварь HgS – 30.74; сульфат оксида сурьмы $Sb_6O_7(SO_4)_2$ – 19.47 (рис. 1).

Адрес для корреспонденции: Бадалов Абдулхайр. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Раджабовых, 10, Таджикский технический университет. E-mail: badalovab@mail.ru

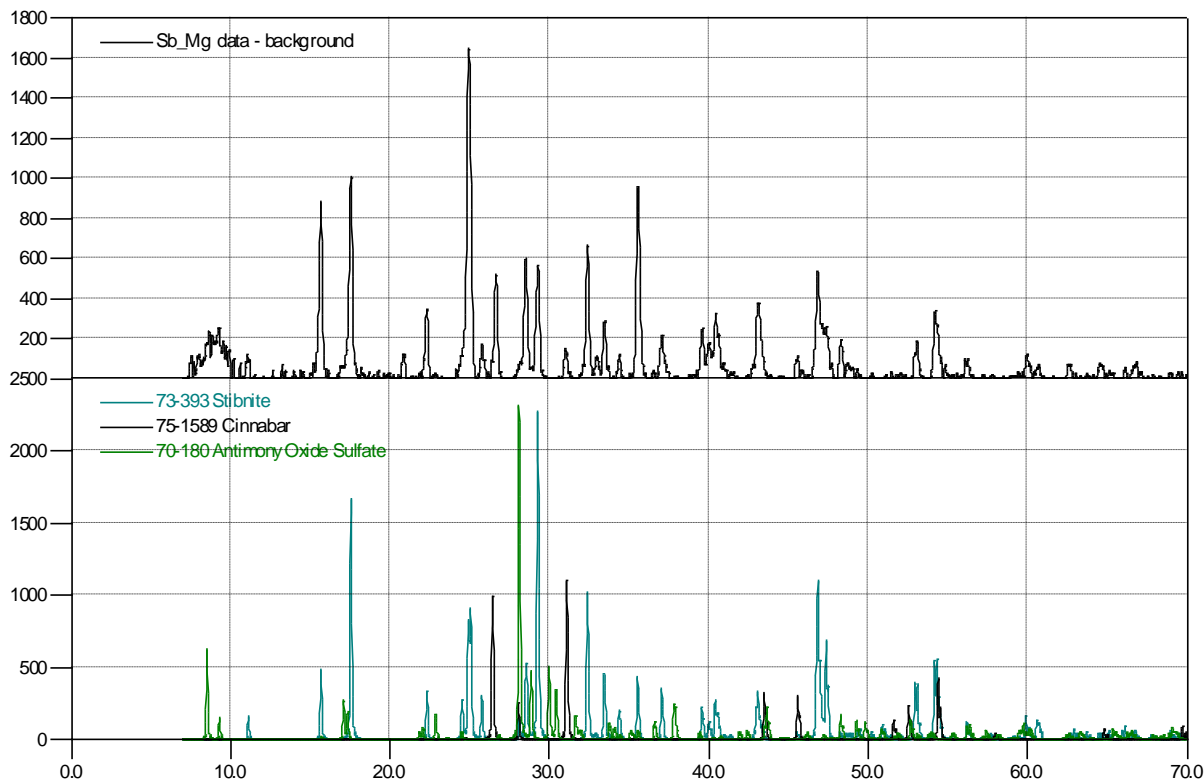


Рис. 1. Пиктограмма концентрата до механоактивации.

Концентрат, предварительно измельчённый до крупности частиц 74 мкм, был подвергнут механической активации для увеличения энергии поверхностного натяжения в результате появления микротрещин, приводящих к повышению реакционной способности частиц.

Механическая активация сульфидно-сурьмяного концентрата произведена на лабораторном активаторе-измельчителе роликовый марки ЛАИР-015 (рис. 2). Механическое воздействие на сурьмяный концентрат обеспечивается скоростью вращения, как мельницы, так и барабанов, а также сложной траекторией движения самого концентрата. В этих условиях под воздействием центробежного ускорения сила тяжести внутри шаровой мельницы увеличивается в 35-45 раз [1,2].

С целью достижения высокой эффективности процесса механической активации и определения оптимальных условий извлечения сурьмы из концентрата проведены серии опытов при постоянной скорости вращения мельницы. Изучены влияние следующих факторов – степень заполнения внутреннего пространства (Z-объём) мельницы-активатора, соотношение масс шаров и концентрата ($M_{ш}:M_{к}$), продолжительность механической обработки концентрата.

Исследования показали, что при прочих равных условиях наиболее оптимальной степенью заполнения пространства (Z-объём) активатора-мельницы концентратом и шариками является Z-объём=80% [2].

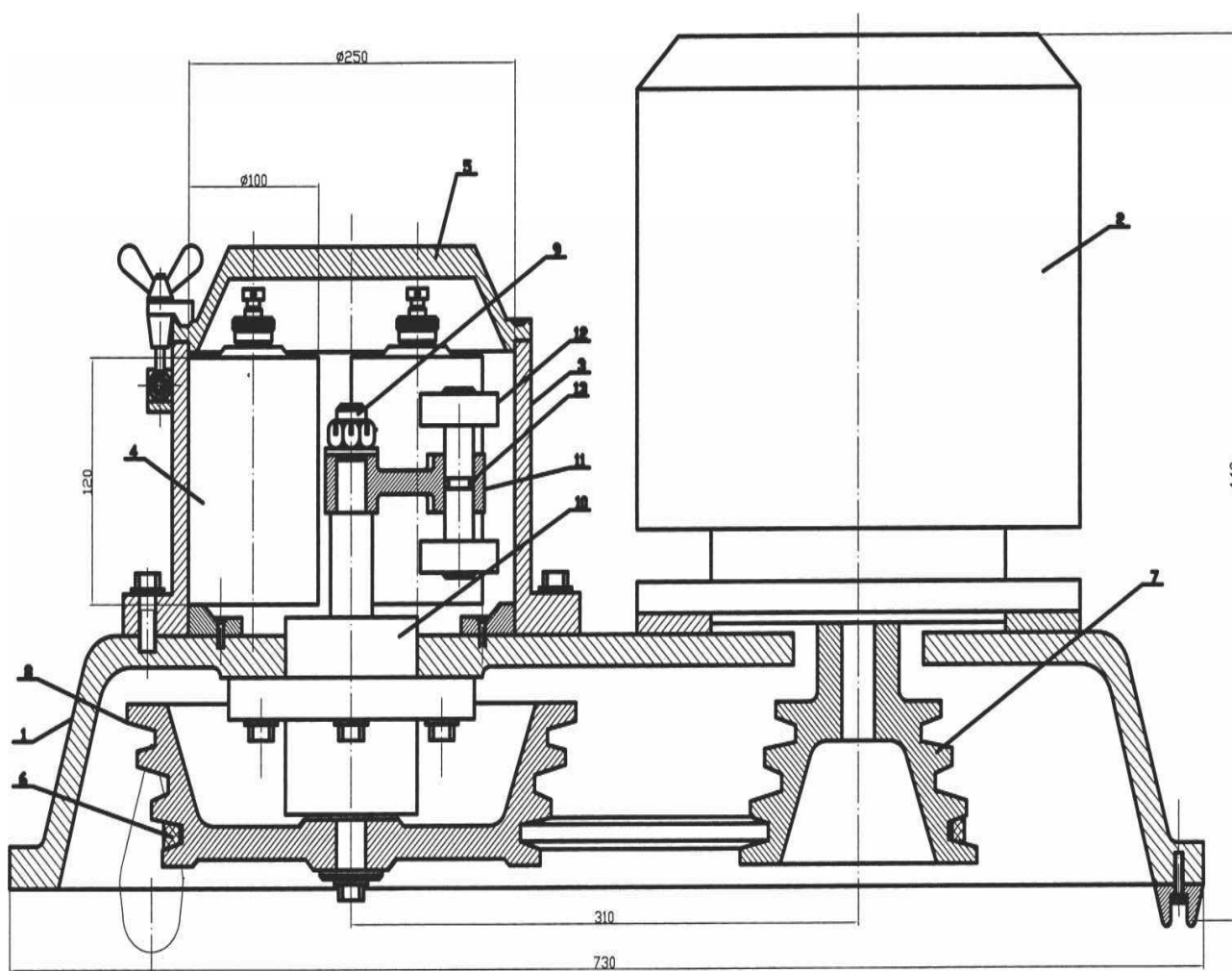


Рис. 2. Планетарная центробежная мельница ЛАИР-0.015:

1 – основание; 2 – электродвигатель; 3 – цилиндр; 4 – барабан; 5 – крышка; 6 – ремень; 7 – шкив ведущий; 8 – шкив ведомый; 9 – вал водила; 10 – корпус подшипников; 11 – водило; 12 – ролик толкающий; 13 – штифт.

Проведены серии опытов для достижения максимальной степени извлечения (α) сурьмы из механически активированного концентрата при одинаковой температуре обработки в зависимости от влияния следующих факторов:

- при разных соотношениях массы концентрата (M_k) к массе шаров ($M_{ш}$), обозначенное $M_k:M_{ш}$ и разным времени обработки процесса механоактивации концентрата (τ_a , мин.) (первая серия опытов, табл. 1);

- при одинаковом соотношении $M_k:M_{ш}$ и разным времени обработки процесса механоактивации концентрата (τ_a , мин.) (вторая серия опытов, табл. 1);

- при разных соотношениях $M_k:M_{ш}$ и одинаковом времени обработки (третья серия опытов, табл. 1);

Таблица 1

Условия проведения серии опытов

Первая серия						Вторая серия		Третья серия	
$M_k : M_{ш}$, в граммах	t(a), мин.					$M_k : M_{ш}$, в граммах	t(a), мин.	$M_k : M_{ш}$, в граммах	t(a), мин.
10:400;	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	30:400	0.5	30:100	4.5
20:400;	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	30:400	1.5	30:200	4.5
30:400;	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	30:400	2.5	30:300	4.5
40:400;	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	30:400	3.5	30:400	4.5
50:400;	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	30:400	4.5	30:500	4.5
						30:400	5.5	30:600	4.5
								30:700	4.5
								30:800	4.5

По завершению процесса механической активации обработанный сульфидно-сурьмяной концентрат разгружается в сито с размерами отверстия $r = 0.074$ мкм. Прошедшая через сито фракция концентрата растворяется в 25% масс. водном растворе NaOH в течение трёх часов при температуре $T=90^{\circ}C$ и соотношение массы концентрата (M_k) к массе раствора (M_p), равное $M_k : M_p = 1 : 6$. Содержание сурьмы в растворе определено атомно-абсорбционным методом.

Степень извлечения сурьмы (α) из концентрата рассчитана по результатам химического анализа содержания сурьмы в растворе. Зависимость (α) от количества концентрата (M_k) и времени механической активации (τ_a , мин.) (при постоянстве $M_{ш}=400$ г) имеет сложный характер (рис. 3).

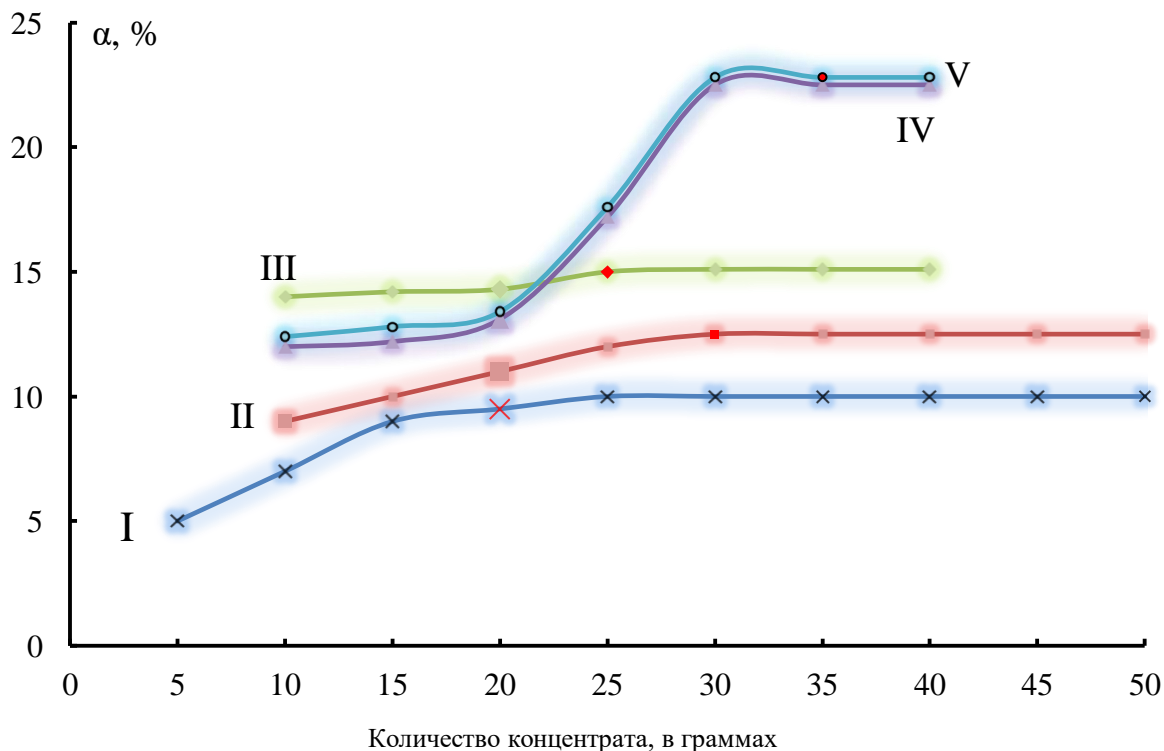


Рис. 3. Зависимость степени извлечений (α) сурьмы от количества концентрата (M_k) при времени (τ_a , мин.) механической активации: I – 0.5; II – 1.5; III – 2.5; IV – 3.5; V – 4.5.

Из рис. 3 видно, что при малых временных отрезках (кривые I и II) механической активации концентрата максимально допустимое значение $\alpha = (10 - 12)\%$ достигается при значениях $M_k = 20$ г. Возможно, процесс извлечения сурьмы протекает во внешней диффузионной области частиц. При механической активации этого же количества концентрата в течение более трёх минут (кривые IV и V) наблюдается резкое повышение степени извлечения сурьмы ($\alpha=22\%$ и более), что связано с протеканием процесса не только во внешней, но также и во внутренней диффузионной области объёма частиц.

З а к л ю ч е н и е

На основе проведённых экспериментов можно сделать следующие заключения:

- способом предварительной механической активации можно достичь почти двукратное повышение степени извлечения ($\alpha_{ак.} = 22.5\%$) сурьмы из активированного сульфидно-сурьмяного концентрата по сравнению с неактивированным ($\alpha_{неак.} = 13.1\%$) при одинаковых условиях обработки концентрата;

- экономическая эффективность достигается повышением реакционной способности частиц, которая влечёт за собой снижение затрат на переработку и уменьшение выброса сернистых газов;

- перевод минерального концентрата из сульфидной в хлоридную растворимую в водных растворах форму;

- сокращение технологических операций;

- способствует понижению температуры обжига и удаления серы;

- снижает энергоёмкость производства;

- повышается сквозное извлечение сурьмы из концентрата в готовый продукт;

Разработанный способ предварительной механической активации сульфидно-сурьмяного концентрата рекомендуется к внедрению в производстве в Анзобский ГОК. Достигается улучшение технико-экономических показателей технологических процессов производства путём увеличения извлечения сурьмы, легкости вскрытия концентрата, что приводит к снижению себестоимости производства сурьмы.

Поступило 12.05.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мельников С.М., Розловский А.А., Шуклин А.М. и другие. Сурьма. – «Металлургия», 1977, 536 с.
2. Богатырева Е.В. Развитие теории и практики эффективного применения механоактивации в технологии гидрометаллургического вскрытия кислородосодержащего редкометалльного сырья: Дисс. ...д.т.н. – М., 2015, 331 с.
3. Аввакумов Е.Г. Механические методы активации химических процессов. – Новосибирск: Наука, 1986, 304 с.
4. Аввакумов Е.Г., Гусев А.А. Механические методы активации в переработке природного и техногенного сырья. – Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2009, 155 с.

5. Богомолов А.М., Захарчевный Д.И., Кальков А.А. и другие. Химическая активность и структурные особенности молибденсодержащих продуктов после механического и радиационного воздействия. – Комплексное использование минерального сырья, 1987, №9, с.23-26.
6. Balaz P., Kamel R. Механохимическое выщелачивание упорных комплексных сульфидных руд: от лабораторных испытаний к пилотным заводским экспериментам. – Химия в интересах устойчивого развития, 1998, №6, с.259-261.
7. Мальцева Н.Н., Голованова А.И., Кедрова Н.С., Минаева Н.А. В кн.: Механохимический синтез в неорганической химии. – М.: Наука, Сибир. отд., 1991, с.139-147.
8. Малый патент №ТJ 1100. Способ переработки алюмосиликатов методом активации. – Мирзоев Д.Х., Азизов О.А., Отаев Ш.Д. и другие, 2020, 3 с.
9. Mirsaidov U. Mehano-Chemical method of alkale earth metals hydrides and Lanthanides borohydrides production. – International Journal of Hydrogen Energy, 2011, v. 36, № 1, p. 1190-1191.
10. Патенти хурд №ТJ 1109. Тарзи коркарди концентратҳои сулфидӣ. – Кодиров А.А., Рахимов Х.Ш., Бадалов А., 2021, 4 с.

А.А.Қодиров, Х.Ш.Рахимов, А.Бадалов*

ФАЪОЛСОЗИИ МЕХАНИКИИ КОНСЕНТРАТИ СУЛФИДИИ СУРМАДОР

Донишқадаи кӯҳию металлургии Тоҷикистон, Бӯстон,

**Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ*

Усули фаъолсозии механикии концентрати сулфидии сурмадор коркард шудааст. Шароити муфиди коркарди концентрат баҳри зиёд кардани ҷудошавии сурма муайян карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: концентрати сулфидии сурмадор, фаъолсозии механикии, шароити муфид, ҷудошавии сурма.

Kh.Sh.Rakhimov, A.A.Kodirov, A.B.Badalov*

MECHANICAL ACTIVATIONS OF THE SULFIDE-ANTIMONY CONCENTRATES

Mining and Metallurgical Institute of Tajikistan, Buston,

**M.S.Osimi Tajik Technical University*

A method of mechanical activation of sulphide - antimony concentrate has been developed. The optimal conditions for processing concentrate, allowing growth to extract antimony from it.

Key words: antimony sulfide concentrate, mechanical activation, useful conditions, antimony isolation.

УДК 548.0.549.0(575.3)

Н.К.Усмонов, Ф.А.Файзиев*, член-корреспондент НАН Таджикистана **А.Р.Файзиев******ГЕОЛОГО-МИНЕРАЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА
ЗОЛОТО-СУЛЬФИДНОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ ТУТЛЫ-КУДУК
(ЮГО-ЗАПАДНЫЙ КАРАМАЗАР)***Горно-металлургический институт Таджикистана,***Таджикский национальный университет,****Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии**Национальной академии наук Таджикистана*

В статье приводятся сведения о золото-сульфидном месторождении Тутлы-Кудук. Минеральный состав руд в нем простой. Основным жильным минералом является кварц, а рудным – пирит. Из других минералов следует отметить серицит, галлуазит, гидроокислы железа и ярозит.

Ключевые слова: *Тутлы-Кудук, месторождение, вторичные кварциты, кварц, пирит, серицит, гидроокислы железа, галлуазит.*

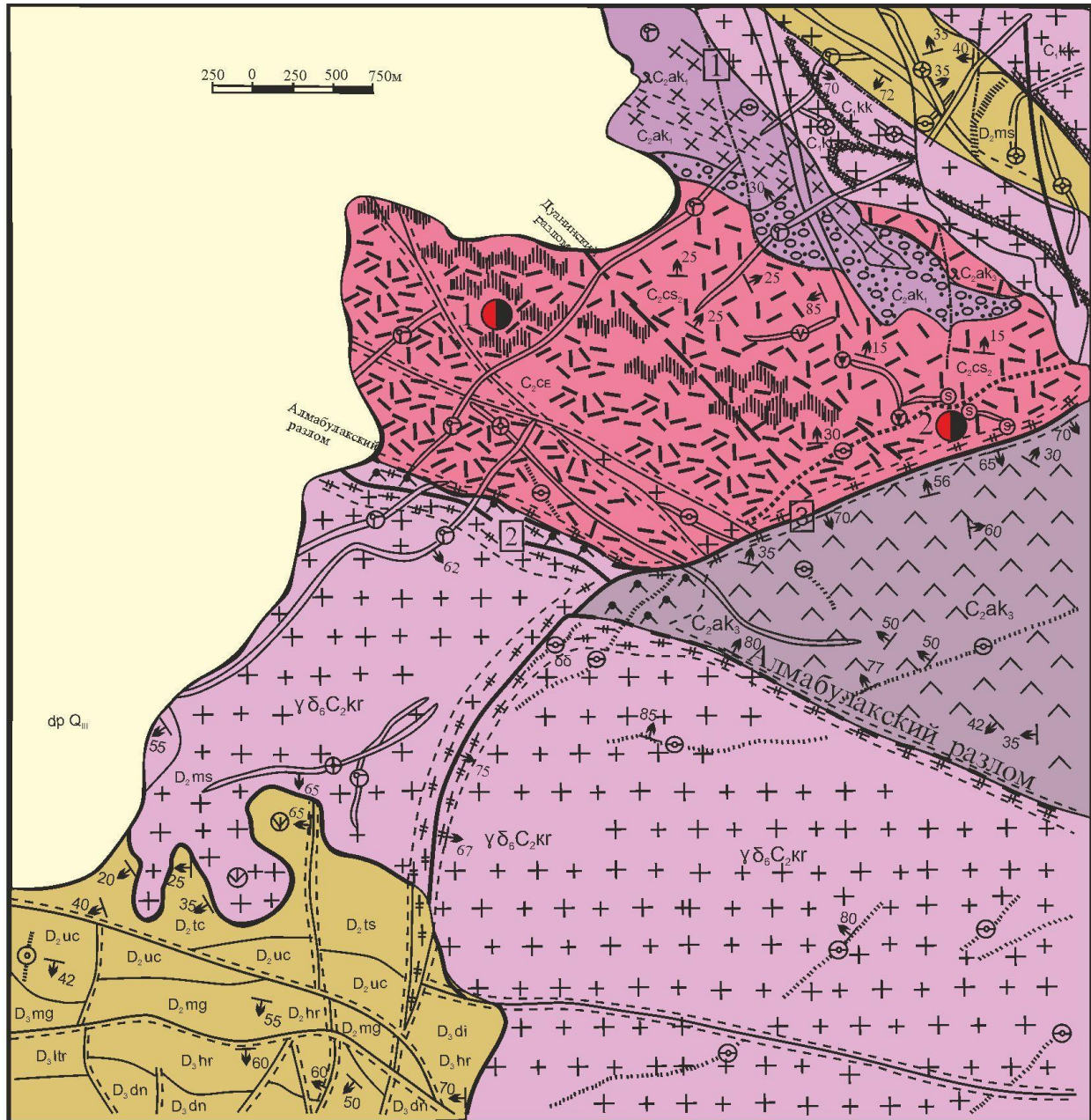
В пределах Юго-Западного Карамазара получили развитие почти все главные рудные формации региона (скарново-магнетитовая, скарново-полиметаллическая, свинцово-цинковая, золото-сульфидная, кварц-карбонат-золоторудная, медно-висмутовая, скарново-редкометалльная и мышьяково-полиметаллическая), из которых промышленное значение имеют три: скарново-полиметаллическая, золото-сульфидная и кварц-карбонат-золоторудная формации.

Скарново-полиметаллическая формация локализуется в скарнах гранат-пироксенового состава. В последние годы геолого-минералогические особенности и формационные типы полиметаллических месторождений Юго-Западного Карамазара рассматривались нами в [1-7]. Промышленные скопления руд этой формации выявлены, разведаны и отработаны на месторождениях Куруксай-I, Куруксай-II, Скарновая зона, Промежуточное, Тутлы-I и Тутлы-III.

Золото-сульфидная формация является продуктивной в пределах Юго-Западного Карамазара. С нею связаны рудопроявление Тутлы-IV и ряд рудных зон, выявленных в его округе. Формация проявлена зонами прожилкового окварцевания или кварцевыми жилами (мощностью от 1 до 3 м), содержащими сульфидную минерализацию (пирит, арсенопирит) и прослеженными от 50 до 100 м.

Кварц-карбонат-золоторудная формация представлена жилами, локализованными в гранитоидах Кураминского массива, диоритах туранглинского типа (рудопроявления Бегулы и Джангалык) и вулканитах чашлинской и акчинской свит (рудопроявление Мирзатау). Главным минералом этой формации, несущим основную часть золотого оруденения, является кварц. Карбонат находится в подчиненном количестве и редко достигает содержания 25-40%. Из рудных минералов в жилах встречаются пирит, пираргирит, халькопирит. Золото представлено электрумом и кюстелитом.

Адрес для корреспонденции: *Файзиев Фотех Абдувакилович, Файзиев Абдулхак Раджабович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ. E-mail: foteh81@mail.ru, faiziev38@mail.ru*



Условные обозначения



1. Четвертичные аллювиально-пролювиальные образования. Вулканогенные образования; 2. Акчинская свита - С ак. Дацито-андезиты, андезидациты, в основании-туфоконгломераты, туфопесчаники, в кровле-риолиты, риодациты. 3. Чашлинская свита С sh. Андезиты, андезидациты, дацито-андезиты, трахиандезитовые туфы, в основании-туфы, туффиты, туфопесчаники. 4. Минбласская свита С mb. Андезиты, андезибазальты, в основании-прослой песчаников, глинистых сланцев и известняковые конгломераты. 5. Свита уя - С uj. Кремнистые, известняково- кремнистые сланцы, туфопесчаники, туфы андезибазальтов. Интрузивные образования; 6. Раннетриасовые интрузии Канмансурского комплекса: дайки диабазов (⊖), фельзитов (⊕), диорит порфиров (⊕), кварцевых сиенит-порфиров (⊕), 7. Позднепермские-раннетриасовые интрузии Арапанского комплекса: дайки гранодиорит-порфиров (⊕), кварц диорит-порфиров (⊕), сиенит-порфиров (⊕). 8. Позднепермские интрузии Чорухдайронского комплекса: штоки, дайки, жилы диоритов (⊕), сиенито-диоритов (⊕), кварц монцитов (⊕), гранит порфиров (⊕), гранодиорит-порфиров (⊕), граносиенит-порфиров (⊕). 9. Среднекарбонные интрузии Кураминского комплекса: гранодиориты кураминские (⊕), порфировидные гранодиориты алмабулакские (⊕), гранит-порфиры (⊕), гранит-аплиты (⊕), жилы диоритовых порфиров (⊕). Послемагматические образования. 10. Вторичные кварциты монокварцевой и алуит-кварц-серцит-пиррофилитовой фации и пропилитованные породы. 11. Скарны, 12. Гидротермально измененные породы. 13. Кварцевые жилы. Тектонические нарушения. 14. Разломы: 1-Акчагальский (Эффузивный), 2-Алмабулакский, 3-Тутлинский и др. 15. Дробление пород; 16. Элементы залегания пород; 17. Золоторудные проявления: 1-Тутлы-Кудук, 2-Тутлы IV

Рис. Схематическая геологическая карта Тутлы-Алмабулакского рудного поля.

Ниже приведем характеристику месторождения Тутлы-Кудук, относящегося к золото-сульфидной формации.

В геологическом строении месторождения принимают участие среднекаменноугольные эффузивные образования чашлинской и акчинской свит, прорванные интрузивными образованиями среднекаменноугольного, позднепермского и позднепермско-раннетриасового возраста (рис.).

Чашлинская свита сложена внизу туфами андезито-дацитового и трахиандезитового состава, сменяющимся вверху туфопесчаниками, на которых залегают лавы андезитовых порфиритов, андезито-дацитовых и дацитовых порфиров. Породы чашлинской толщи также наиболее развиты в соседних месторождениях Мышиккол, Перевальное, Зарнисор. Мощность свиты в целом около 600 м.

Акчинская свита развита в северо-восточной и южной частях площади месторождения. На северо-восточном участке свита представлена толщей известняково-аркозовых конгломератов мощностью 180-200 м, полого (12-15°) перекрывающей вулканы чашлинской свиты.

Конгломераты подвержены интенсивному скарнированию, особенно в нижних частях и обогащению, хотя не очень богаты по содержанию полезных компонентов. Толща конгломератов перекрывается андезито-дацитовыми и дацитовыми порфирами, относимыми к средней акчинской свите. Среди них выделяются как покровные, так и субвулканические фации. Мощность среднеакчинских образований иногда превышает 800 м.

Другой выход пород акчинской свиты, представленный туфобрекчией риолито-дацитового состава, обнажается в южной части участка, где она залегает на размытой поверхности гранитоидов Алмабулакского массива и эффузивов чашлинской свиты. Здесь туфобрекчии представляют собой останец некогда мощной толщи, почти полностью уничтоженной позднее эрозией. Сохранившаяся мощность толщи не превышает 70-80 м. В составе туфобрекчии преобладают обломки нижележащих эффузивных образований. Цементирующей массой служит туф липарито-дацитового состава.

Четвертичные отложения представлены древнечетвертичными и современными образованиями. Первые сложены грубообломочной конглобрекчией, обломки которой представлены всеми эффузивными и интрузивными разностями пород, развитыми в пределах участка, а цементом служит песчано-глинистый материал. Современные отложения представлены рыхлым делювиальным и аллювиально-пролювиальным материалом, состоящим из слабо окатанных валунов и галек в руслах саев и дресвы – на склонах. Мощность этих отложений колеблется в пределах от 0.2-2 м на склонах до 8-17 м в тальвегах саев.

Интрузивные образования на площади месторождения Тутлы-Кудук представлены немногочисленными дайками среднекарбонных и пермских гранодиоритов кураминского, чорухдайронского и арашанского комплексов и дайко-линзо-штокообразными телами фельзитов, сферолитовых гранит-порфиров, граносиенит-порфиров и диабазовых порфиритов позднепермско-раннетриасового возраста арашанского и канимансурского комплексов.

В геолого-структурном отношении площадь месторождения Тутлы-Кудук и собственно его массив вторичных кварцитов приурочены к ядру синклинали складки, ось которой прослеживается в северо-западном направлении вдоль гребня водораздела Дуанасая и Тутлисия. К северу и югу от неё развиты антиклинальные складки того же направления. Все эти складки являются по существу

структурами более высоких порядков, осложняющих Тутлинскую грабен-синклиналь. На площади месторождения Тутлы-Кудук грабен-синклиналь выполнена в основном андезитами, андезитодацитами и их туфами чашлинской свиты (C_2), прорванных дайкообразными телами кураминского, чорухдайронского, арашанского и канимансурского интрузивных комплексов.

Оруденение в пределах Курусай-Туранглинского тектонического блока в целом, а в Тутлы-Кудукском месторождении в частности локализовано в тесной пространственной связи с долгоживущим разрывом Эффузивный [8].

Главными элементами разрывной тектоники месторождения являются дизъюнктивные нарушения окурдаванской и тутлинской систем сколового и отрывного характера. К первой относятся Дуанинский и Тутлы-Кудукский разломы, а также все аналогичные по направлению сколы, развитые в блоке между ними. Большинство из внутриблоковых разрывных нарушений представляют собой сложнопостроенную тектоническую зону, сопровождающуюся иногда крутопадающими ($75-85^\circ$) дайками гранодиорит-порфиров, диабазовых порфиритов, граносиенит-порфиров и кварцевых порфиров.

Вулканиты чашлинской свиты на значительной части Тутлинской площади подвержены процессам поствулканического метасоматического преобразования, главными продуктами которых являются вторичные кварциты. Это монокварцевые и алунит-кварц-серицитовые, иногда с пиррофиллитом, фации и пропициты (эпидот-хлорит-серицит-кварцевые образования).

Вторичные кварциты, слагающие в основном центральную часть зоны метасоматитов массива Тутлы-Кудук, представляют собой плотные мономинеральные образования серого, светло-серого цвета, состоящие исключительно из вторичного кварца с очень незначительным (около 3%) количеством тонко рассеянного пирита. Валовый химический состав породы следующий (%): SiO_2 – 85-87, Al_2O_3 – 5.3-6.8, Fe_2O_3 – 2.2-3.1, CaO – 0.4-0.6, K_2O – 0.8-1.0, S – 0.3-0.4, SO_3 – 0.8-1.0, CO_2 – 0.0 - 0.1, H_2O – 0.03-0.06, п.п.п. – 4-5.

По своему генезису вторичные кварциты являются продуктом вулканогенно-гидротермальной деятельности и, по аналогии с многочисленными массивами вторичных кварцитов Казахстана, образовались в результате интенсивной фумарольно-сульфатной деятельности, происходившей в завершающих этапах излияния эффузивов чашлинской свиты. Фумарольная деятельность производила проработку пород газовыми компонентами и парами воды, что привело к площадному окварцеванию и осветлению пород вплоть до появления зон монокварцитизации, серицитизации, каолинитизации, в меньшей степени пиррофиллитизации.

Алунит-кварц-серицитовые метасоматиты, развившиеся по вулканитам чашлинской свиты светло-серые по цвету преимущественно распространены на южном склоне горы Тутлы и на восточном фланге описываемого месторождения. Кварц этой фации, количественно уступающий главному минералу - серициту, более или менее равномерно распределен в породе, образует изометричные, иногда неправильные заливчатые по краям зерна с размером от сотых до десятых долей мм. Общее содержание кварца составляет 20% и более. Серицит образует веерообразные, таблитчатые и сноповидные агрегаты с размером отдельных чешуек чаще 0.03-0.05 мм и реже 0.1-0.2 мм. Неполный химический состав породы (%), среднее из 9 анализов): SiO_2 – 61.08, Al_2O_3 – 19.65, K_2O – 3.63, Na_2O –

0.20, $S_{\text{общ.}}$ – 6.22. Содержание серицита варьирует в широких пределах от 40 до 80-85% всей массы. Из рудных минералов постоянным спутником алуни-кварц-серицитовых метасоматитов является мелкокристаллический пирит.

И, наконец, эпидот-хлорит-серицит-кварцевые (пропилитовые) метасоматиты как продукт регионального метаморфизма (гипабиссальных глубин) по распространенности не уступают двум вышеописанным метасоматитам, охватывая не менее 30% площади развития вулканитов чашлинской свиты. Полный петрохимический состав пород следующий (% , среднее из 6 анализов): SiO_2 – 63.58, Al_2O_3 – 15.57, Fe_2O_3 – 10.56, K_2O – 3.63, Na_2O – 0.20, $S_{\text{общ.}}$ – 6.22. Как видно, повышенное содержание Fe_2O_3 и K_2O свидетельствует о существенном количестве в составе описываемых метасоматитов хлорита и серицита.

Минералогия рудовмещающих вторичных кварцитов и самого месторождения Тутлы-Кудук специально не изучалась. Однако, основываясь на данных микроскопии и изучения вещественного состава технологических проб, можно дать краткую минералогическую характеристику этих пород.

На месторождении присутствуют два типа рудных тел – жильный и площадной, отличающихся между собой не только генезисом, но и качественным составом. Наибольшим распространением, а следовательно и значением, на месторождении пользуется второй тип рудных тел – площадной. Поскольку основными породообразующими минералами этих образований являются кварц и серицит, то их можно отнести к кварц-серицитовой фации вторичных кварцитов. Ниже приводим краткую минералогическую характеристику этих пород.

Кварц на месторождении представлен тремя типами. Наиболее ранним является кварц материнской породы – андезито-дацитовых или дацитовых порфиров. Он представлен угловато-оплавленными водяно-прозрачными зернами размером от десятых долей до 2-4 мм в поперечнике.

Кварц второго типа, образовавшийся в результате гидротермального метасоматоза, представлен, как правило, очень мелкозернистым агрегатом. Зёрна неправильной формы размером до 0.001 мм различаются только при больших увеличениях. Иногда этот кварц образует более крупнозернистые скопления с размерами отдельных зерен до 0.1 мм. Метасоматический кварц обычно загрязнен продуктами разложения тех минералов, за счет замещения которых он образовался. Наблюдаются тесные сростания кварца с серицитом. Содержание кварца второго типа в породе резко изменчиво и колеблется от 10-15 до 100%.

Третий, наиболее поздний тип кварца представлен жильным образованием. Он среднезернистый, зерна характеризуются удлинённой неправильной формой. В количественном отношении этот кварц имеет подчиненное значение.

Серицит является, пожалуй, самым распространенным минералом, после кварца, во вторичных кварцитах. Он заполняет целые участки в породе, состоящие из веерообразных, таблитчатых и сноповидных агрегатов. Размеры отдельных чешуек колеблются в пределах 0.03-0.05 мм. Очень часто в шлифах наблюдаются участки более крупночешуйчатых агрегатов. Размеры отдельных чешуек здесь достигают 0.1-0.2 мм. Их уже можно считать мелкозернистым мусковитом, тем более что они ИМЕЮТ характерные для мусковита синие и красные цвета интерференции. Содержание серицита в породе находится в обратной зависимости от содержания кварца. В наиболее осветленных и пере-

дробленных породах он составляет 80-86% от всей массы. Среднее же содержание серицита, по данным минералогического анализа технологической пробы, составляет 40%. Химический анализ продуктов обогащения пробы показывает, что он состоит в основном из гидрослюд.

Галлуазит в серицитизированных кварцитах образует редкие маломощные, не более 0.4 мм, прожилки. Под электронным микроскопом видны редкие трубочки, характерные для галлуазита. Содержание галлуазита в породе не превышает первые единицы процентов.

Ярозит является весьма распространенным минералом. Макроскопически он представляет собой тонкие прожилки, пятнистые включения, плёнки и примазки жёлтого цвета. В прозрачных шлифах отчетливо видно, что ярозит образует прожилки и гнёзда, состоящие из таблитчатых, прямоугольных, реже шестиугольных кристаллов. Размер их не превышает 0.002-0.01 мм. Цвет минерала в шлифе золотисто-жёлтый и золотисто-зеленоватый. Содержание ярозита в породе достигает 8%.

Гидроокислы железа образуют прожилки, нередко совместно с кварцем и ярозитом. Наиболее часто они наблюдаются в приповерхностной части осветленных пород, образуя землистые массы в загипсованных участках. Содержание гидроокислов в породе составляет 1.0-1.5%. Списание выщепленных минералов практически ограничивается состав серицитизированных вторичных кварцитов.

Минералогический состав жильных каолинизированных руд примерно такой же, что и для руд вторичных кварцитов, только соотношение слагающих минералов здесь другой. Если во вторичных кварцитах преобладающими минералами являлись кварц и серицит, то в каолинизированных породах главными породообразующими минералами оказываются галлуазит, кварц и серицит.

Галлуазит образует в большинстве случаев отдельные мономинеральные участки и реже маломощные прожилки. Макроскопически этот минерал встречается в виде землистых агрегатов белого цвета. Он жирен на ощупь. Галлуазит является как бы цементом для кварца, серицита и других минералов, слагающих породу. Ввиду очень мелких размеров отдельных чешуек галлуазит диагностируется под микроскопом с большим трудом и более уверенно устанавливается на основании кривых нагревания. Размер отдельных частиц измеряется единицами и реже десятками микрон. Под микроскопом в скрещенных николях тонкоигольчатые зерна галлуазита собраны в таблитчатые и неправильной формы агрегаты, имеющие очень низкие цвета интерференции. Содержание галлуазита в жильных рудных телах по данным изучения технологических проб колеблется от 40 до 55%.

Кварц, как и во вторичных кварцитах, в рудных телах жильного типа встречается в тех же трех генетических типах. Первый тип кварца встречается редко, и он разбит трещинами на отдельные куски, различимые благодаря проникновению по трещинкам гидроокислов железа.

Кварц второго типа образует изометричные, удлиненные, неправильной формы выделения, более или менее равномерно распределенные в породе. Края зерен неровные заливчатые, что создает ложное впечатление замещения его галлуазитом, серицитом и другими минералами. Размер отдельных зерен кварца колеблется от сотых до десятых долей мм. Общее содержание кварца в породе составляет 20%.

Прожилковый кварц встречается редко, образуя микропрожилки с более хорошо выраженными гранями отдельных кристаллов.

Серицит образует мелкие чешуйки размером не более 0.005-0.007 мм. Отдельные чешуйки собраны в розетки, веерообразные агрегаты, гнездообразные скопления. Чаще всего скопления серицита имеют форму замещенных табличек плагиоклазов. Серицит в свою очередь замещается галлуазитом. Замещение в этом случае обычно идет от центра серицитовых скоплений к периферии. В породе серицит развит равномерно и находится в тесном срастании с кварцем и галлуазитом. Содержание серицита в породе составляет около 15%.

Каолинит имеет сравнительно небольшое развитие, составляя 5-10% объема породы. Образуется он за счет перекристаллизации галлуазита и встречается в виде прожилков, как продукт гидротермальной деятельности.

Гидроокислы железа образуют очень тонкие пылевидные выделения, пропитывающие породу, иногда присутствуют в виде очень тонких пленок на других минералах. Образуются они, по видимому, за счет замещения пирита. Размеры отдельных частиц очень малы, достигая редко 30 микрон. Содержание гидроокислов в породе равно в среднем 1.5-2%.

В обеих разновидностях пород постоянно присутствуют, но в незначительных количествах, хлорит, апатит, циркон, сфен, а также карбонаты.

Основным рудным минералом Тутлы-Кудука является *пирит*, количество которого составляет 3-5%, иногда повышаясь до 7-10% и выше. Он представлен преимущественно вкрапленностью различной густоты распределения, прожилками мощностью от 0.3-0.5 см до 1.0-1.5 см и мелкими гнездами размером 0.5x1.5 см. Вкрапленный пирит имеет хорошую кубическую огранку, а прожилковый пирит чаще всего образует зернистые агрегаты. С поверхности пирит практически полностью окислен, вероятно, до глубин не менее 5-10 м, сохраняясь в том или ином количестве лишь в монокварцитах. Образующиеся за счет окисления пирита гидроокислы железа окрашивают породу от желтого до бурого цвета разных оттенков. За счет окисления пирита и переотложения гидроокислов вдоль юго-западного подножия гряды образовались небольшие залежи бурых железняков и глинистой охры. Из других рудных минералов отмечаются галенит, халькопирит, сфалерит и гематит.

Золоторудная минерализация массива вторичных кварцитов Тутлы-Кудук проявилась в виде двух типов и, вероятно, возрастов. Первый (ранний) тип, по-видимому, сингенетически связан со вторичными кварцитами (монокварцевой и алунит-кварц-серицитовой, иногда с пирофиллитом, фациями) и ранними пропилитами (эпидот+хлорит+серицит+кварц) с мелкозернистым пиритом кубического габитуса. Золото этого типа тонкодисперсное (визуально не видимое). Оно крайне рассеянное и низкого содержания – от тысячных до сотых и первых десятков долей грамма на тонну руды. Образование его на Тутлинской площади, вероятно, связано с рудонакоплением вулканогенно-гидротермальных растворов в стадию затухания среднекарбонового вулкано-плутонизма, ознаменовавшего завершение формирования вулканогенной толщи чашлинской свиты.

Второй (поздний) тип золоторудной минерализации связан с зонами гидротермального метасоматического и прожилкового окварцевания с повышенным содержанием сульфидов. Наиболее значимые содержания золота встречаются в тех участках поверхности и интервалах глубин, где отмечаются несколько генераций кварца, карбоната и других нерудных минералов в ассоциации с пиритом (средне- и крупнокристаллическим сложного габитуса), галенитом, сфалеритом, халькопиритом и

блеклыми рудами. По аналогии с соседним Курусайским месторождением описываемое золото, вероятно, связано с последним позднепермско-раннетриасовым гидротермальным этапом формирования месторождений Курусай-Тутлинской площади. Кстати, Ш.Х.Рахимовым [8] на IX-ом шахтном горизонте Курусайского месторождения (на глубине около 300 м от поверхности) в парагенезисе с блеклой рудой, галенитом, сфалеритом (клеюфаном), самородным серебром и др. в манганокальците был обнаружен прожилок самородного золота.

Поступило 11.04.2020 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Файзиев А.Р., Файзиев Ф.А. Рудноформационные типы серебряных месторождений Таджикистана. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2015, №3 (160), с. 92-99.
2. Файзиев Ф.А. Структурно-геологические типы эндогенных серебряных и серебросодержащих месторождений Таджикистана. – ДАН РТ, 2018, т. 61, №11, с. 888-892.
3. Файзиев Ф.А., Файзиев А.Р., Ятимов С.Б. Матильдит из серебряных и серебросодержащих месторождений Таджикистана. – ДАН РТ, 2018, т. 61, №9-10, с.794-799.
4. Файзиев Ф.А., Файзиев А.Р., Ятимов С.Б. О сереброносности скарново-полиметаллических месторождений Западного Карамазара (Северный Таджикистан). – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2018, №1 (170), с. 97-106.
5. Файзиев Ф.А., Файзиев А.Р. Блеклые руды в серебряных и серебросодержащих месторождениях Таджикистана и их сереброносность. – Геология и геофизика Юга России, 2018, №4, 226-234.
6. Файзиев Ф.А., Ятимов С.Б., Усмонов Н.К. Серебросодержащие минералы месторождений Такеллийского рудного поля (Юго-Западный Карамазар). – ДАН РТ, 2019, т. 62, №9-10, с. 581-587.
7. Файзиев Ф.А. Структурный фактор контроля оруденения на некоторых серебряных и серебросодержащих месторождениях Северного и Центрального Таджикистана. – Наука и инновация ТНУ. Сер. геол. и техн. н., 2020, №1, с. 56-60.
8. Рахимов Ш.Х. Геолого-структурные условия локализации скарново-полиметаллических месторождений Карамазара. – Ташкент: Фан, 1978, 144 с.

Н.К.Усмонов*, Ф.А.Файзиев**, А.Р.Файзиев***

**ТАВСИФИ ГЕОЛОГӢ-МИНЕРАЛОГИИ КОНИ ТИЛЛО-СУЛФИДИИ
ТУТЛӢ-ҚУДУҚ (ҚАРОМАЗОРИ ҶАНУБӢ-ҒАРБӢ)**

**Донишқадаи қўҳӣ-металлургии Тоҷикистон,*

***Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,*

****Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи*

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола дар бораи кони тилло-сулфидии Тутлӣ-Қудуқ маълумот оварда шудааст. Таркиби минералии маъданҳо оддӣ аст. Минерали асосии рағҳо кварц ва минерали маъданӣ, пирит мебошад. Ба минералҳои дигар серитсит, галлуазит, гидрооксидҳои оҳан ва дохил мешаванд.

Калимаҳои калидӣ: *Тутлӣ-Қудуқ, кон, кварцитҳои дуҷумдараҷа, кварс, пирит, серитсит, гидрооксидҳои оҳан, галлуазит.*

N.K.Usmonov*, F.A.Fayziev**, A.R.Fayziev***

**GEOLOGICAL AND MINERALOGICAL CHARACTERISTICS TUTLI-KUDUK
GOLD-SULFIDE DEPOSIT (SOUTH-WESTERN KARAMAZAR)**

**Mining and Metallurgical Institute of Tajikistan,*

***Tajik National University,*

****Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology*

National Academy of Sciences of Tajikistan

The article provides information on the Tutly-Kuduk gold-sulfide deposit. The mineral composition of the ores is simple. The main vein mineral is quartz and ore pyrite. Other minerals include sericite, halloysite, iron hydroxides, and jarosite.

Key words: *Tutly-Kuduk, deposit, secondary quartzite, quartz, pyrite, sericite, iron hydroxides, halloysite.*

УДК 615.012/022

М.О.Убайдулло, академик НАН Таджикистана Г.К.Мироджов*,

академик НАН Таджикистана М.М.Якубова, М.К.Курбонов

**ПРОТИВОВИРУСНОЕ И ГЕПАТОПРОТЕКТОРНОЕ ДЕЙСТВИЕ НАСТОЙКИ
ЛАГЕНАРИИ ОБЫКНОВЕННОЙ – *LAGENARIA SICERARIA* (MOLINA)
STANDL. ПРИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ВИРУСНОМ ГЕПАТИТЕ «В»***Центр инновационной биологии и медицины НАН Таджикистана,***ГУ «Институт гастроэнтерологии» Республики Таджикистан*

В статье приведены результаты влияния настойки лагенарии обыкновенной на белых мышей, заражённых вирусом гепатита В. При внутрижелудочном введении настойки из лагенарии наблюдается уменьшение степени виремии и снижение активности ферментов у опытных групп животных по отношению к контрольной группе. Это косвенно свидетельствует о действии препарата на вирус и уменьшение его отрицательного влияния на функцию печени (в определенной степени о цитопротективном свойстве настойки по отношению к клеткам печени), что свидетельствует о возможности использования препаратов из лагенарии как лекарственного (гепатопротекторного) средства.

Ключевые слова: настойка, лагенария, вирусный гепатит В, полимеразная цепная реакция.

Вирусные гепатиты представляют серьезную проблему здравоохранения ввиду их повсеместного распространения, высокого уровня заболеваемости, особенно среди лиц молодого работоспособного возраста [1-3]. В настоящее время вирус гепатита В занимает доминирующее место среди всех этиологических факторов заболеваний печени. По статистическим данным в мире насчитывается от 350 до 400 млн. "носителей" вируса гепатита В [4-6]. Считается, что почти треть населения Земли инфицирована этим вирусом. По данным ВОЗ, ежегодно около 50 млн. человек в мире заболевают гепатитом В. От хронических заболеваний печени, вызванных этим вирусом, более 2 млн. человек умирают [7-10]. Лечение вирусного гепатита В по-прежнему остается одной из актуальных задач медицины и практического здравоохранения. Отсутствие специфического лечения хронического гепатита при его повсеместном распространении побуждает к настойчивым поискам новых лекарственных средств, воздействующих на основные звенья патогенеза болезни. Многие лекарственные препараты, полученные химическим путём, воздействуют токсически на печеночные клетки, либо вызывают аллергическую реакцию [11]. В данное время в медицине официально известны два препарата, используемые для лечения вирусных гепатитов В и С – препараты альфа-интерферон и рибавирин. Однако, из-за недостаточной лечебной эффективности этих препаратов, их высокая стоимость и побочные действия, такие как развитие анемии, нейтропении, лейкопении, диспептических явлений и развития резистентности при проведении повторных курсов терапии, поиск новых лекарственных

Адрес для корреспонденции: Убайдулло Мухаммадхофизи Одина, Якубова Мухиба Мухсиновна. 734017, Республика Таджикистан, г Душанбе, ул. Карамова, 27, Центр инновационной биологии и медицины НАНТ. E-mail: muhamad_0505@mail.ru; mukhiba@mail.ru

препаратов растительного происхождения, обладающих противовирусным действием, имеет важное практическое значение [12]. Гепатопротекторы растительного происхождения с противовирусным действием повышают резистентность гепатоцитов к токсическим воздействиям и нормализуют их метаболизм. Подобная гепатопротективная терапия оправдана тем, что она не только ускоряет регенерацию гепатоцитов, но и приводит к регрессии фиброзной ткани [13].

В связи с этим одним из перспективных лекарственных растений, в составе которого содержится комплексное сочетание флавоноидов, гликозидов и других биологически активных веществ, является лагенария обыкновенная (*Lagenaria siceraria* (Molina) Standl. - однолетнее растение с лазающими или лежачими стеблями, многосемянные плоды различной формы и величины с твердой наружной оболочкой и внутренней мякотью [14,15].

Целью настоящей работы явилось изучение механизма действия настойки лагенарии при экспериментальном вирусном гепатите В.

М а т е р и а л и м е т о д ы и с с л е д о в а н и я

Настойка разработана нами на основе мякоти лагенарии обыкновенной и приготовлена на 30% спирте при соотношении 1:10.

Постановка эксперимента определялась требованиями и рекомендациями к проведению доклинических исследований лекарственных средств в соответствии с международным стандартом качества планирования и проведения исследований на животных [16].

На базе Института ветеринарии ТАСХ нами проведены работы по изучению механизма действия настойки лагенарии при экспериментальном вирусном гепатите В.

Предварительно 30%-ую спиртовую настойку мякоти лагенарии обыкновенной упаривали, остаток растворяли в дистиллированной воде в соотношении 1:10.

Эксперименты были проведены на 40 беспородных белых мышах обоего пола весом 18- 22 г, которые были разделены на следующие серии опытов:

1 – интактные;

2 – контрольные животные, которым подкожно вводили НВV (сыворотки больных с высоким титром ДНК НВV) из расчёта 0.2 мл / на 20 г массы животных 1 раз в течение 3-х месяцев (животные содержались в отдельном виварии);

3 серия – мыши, которым наряду с вирусом гепатита В (ВГВ) ежедневно в течение 2-х месяцев внутрижелудочно (в/ж) вводили настойку лагенарии в дозе 0.5 мл на 100 г массы тела животного.

4 серия – мыши, которым наряду с вирусом гепатита В (ВГВ) ежедневно в течение 2-х месяцев внутрижелудочно вводили настойку лагенарии в дозе 1 мл на 100 г массы тела животного.

В сыворотке крови исследовали следующие биохимические показатели: активность ферментов АлАТ, АсАТ, содержание билирубина и общего белка. Для определения вышеуказанных биохимических показателей были использованы наборы фирмы Витал с помощью анализатора STOT FAXC.

Концентрацию общего белка определяли биуретовым методом, содержание альбумина и глюкозы с помощью набора Vital колориметрическим методом. Уровень ДНК вируса гепатита В определяли методом полимеразной цепной реакции (ПЦР).

Результаты и их обсуждение

Экспериментальная модель вирусного гепатита В была вызвана введением 0.2 мл сыворотки крови, содержащей высокий уровень (более 1млн. копий на мл) ДНК вируса гепатита В, в результате чего через 30 дней у мышей развился острый гепатит В.

В табл. 1 представлены данные влияния настойки лагенарии на экспериментальных мышей, зараженных ВГВ. Как видно из таблицы, в случае введения настойки в дозе 0.5 мл на 100 г/массы тела животного отмечалось резкое снижение уровня вирусемии. При повышении дозы настойки до 1 мл на 100 г/массы тела животного наблюдалось дальнейшее снижение степени вирусемии.

Таблица 1

Влияние настойки лагенарии на уровень ДНК вируса В при экспериментальном гепатите у мышей

Показатели	Серия опытов и дозы		
	контрольные (n=10)	0.5 мл на 100 г/веса (n=10)	1 мл на 100 г/веса (n=10)
ДНК HBV	$4.11 \cdot 10^5 \pm 0.03$ 100%	$4.33 \cdot 10^2 \pm 0.01$ - 64%	$3.33 \cdot 10^1 \pm 0.02$ - 48.4%

В связи с этим нам было интересно исследовать влияние настойки лагенарии на такие важные биохимические показатели состава крови, как АсАТ, АлАТ, билирубин, содержание общего белка, альбумины и глюкоза.

Результаты исследования ферментов печени аспаргатаминотрансферазы, аланинаминотрансферазы (АсАТ, АлАТ) и билирубина представлены в табл. 2.

Таблица 2

Влияние настойки лагенарии на некоторые биохимические показатели функции печени белых мышей при экспериментальном гепатите вируса В

Серия опытов	АсАТ, Ед/л	АлАТ, Ед/л	Билирубин, мкмоль/л	Общий Белок, г/л	Альбумин, г/л	Глюкоза, ммоль/л
Интактный (n=10)	30±0.44	43±1.48	16.4±0.10	56.4±1.2	34±1.15	4.8±0.1
Контрольный (n=10)	70±0.86*	94±2.33	25±0.33	50±1.4	29±1.11	6.4±0.5
0.5мл на 100 г/веса (n=10)	48±0.6**	51±1.60	22±0.29	52±1.27	32±1.0	5.7±0.7
1 мл на 100 г/веса (n=10)	43±0.51**	46±1.55	19.4±0.26	55,3±1.5	34.6±1.10	5.2±0.4

Примечание: * – p<0.05 в сравнении с интактной группой; ** – p<0.05 в сравнении с контрольной группой.

Как видно из данных, представленных в табл. 2, через 30 дней после заражения мышей вирусом гепатита В обнаружилось резкое повышение активности ферментов печени, билирубина и умеренное повышение глюкозы в крови у животных контрольной группы. Особенно резкое повышение отмечено в показателях АсАТ и АлАТ (больше, чем в 2 раза) и билирубина (почти на 58%), что свидетельствует о печеночно-клеточном повреждении. Наблюдалась также тенденция к снижению общего белка (на 10.7%) и особенно фракции альбуминов (на 14.7%). Это свидетельствует о повреждении клеток печени и печеночно-клеточной недостаточности органа. При введении препарата во всех сериях опыта наблюдалась типичная картина выраженного протективного действия настойки в дозе

0.5 мл на 100 г/ массы тела. Однако существенной разницы в терапевтическом эффекте между разными дозами препарата (0.5 мл и 1 мл на 100 г/массы) не наблюдалось. Под действием настойки в дозе 0.5 мл на 100 г/ массы снижалась степень увеличения уровня ферментов (АсАТ и АлАТ) на 31 и 45% по отношению к показателям животных контрольной группы, а уровни общего белка и альбуминовой фракции снижались в меньшей степени по сравнению с контрольной группой. Такая же картина наблюдалась и в отношении относительно к уровню глюкозы крови у этой серии животных в сравнении с контрольными.

Таким образом, при внутривенном введении настойки из лагенарии наблюдается уменьшение степени вирусемии и снижение активности ферментов у опытных групп животных по отношению к контрольной группе. Это косвенно свидетельствует о действии препарата на вирус и уменьшение его отрицательного влияния на функцию печени (в определенной степени о цитопротективном свойстве настойки по отношению к клеткам печени), что свидетельствует о возможности использования препаратов из лагенарии как лекарственного (гепатопротекторного) средства.

Поступило 20.08.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шаханина И.Л., Осипова Л.А. Экономические потери от инфекционной заболеваемости в России: величины и тенденции. – Эпидемиология и инфекционные болезни, 2005, №4, с. 19-25.
2. Шахгильдян И.В., Михайлов М.И., Онищенко Г.Г. – Парентеральные вирусные гепатиты (эпидемиология, диагностика, профилактика). – М., 2003, с. 171-236.
3. Шахгильдян И.В., Михайлов М.И., Хухлович П.А., Онищенко Г.Г. Современная эпидемиологическая характеристика парентеральных вирусных гепатитов (гепатитов В и С) в Российской Федерации. – VI Всерос. науч.-практ. конф. «Вирусные гепатиты - проблемы эпидемиологии, диагностики, лечения и профилактики». – М., 2005, с.380-384.
4. Ющука Н.Д., Венгерова Ю.Я. Инфекционные болезни: Национальное руководство. – М.: ГЭОТАР-Медиа, 2009, 1056 с.
5. Ющука Н.Д., Климова Е.А. и др. Вирусные гепатиты. Клиника, диагностика, лечение. – М.: ГЭОТАР-Медиа, 2014, 160 с.
6. Мансуров Х.Х., Мироджов Г.К. Достижения и перспективы развития гастроэнтерологии в Таджикистане. – Проблемы ГАЭЛ, 2012. №3, с. 3-10.
7. Горбарец И.П., Яшина Т.Л. Отдаленные исходы острых вирусных гепатитов В, С и D. – Всерос. науч.-практ. конф. «Гепатит В, С и D – проблемы изучения, диагностики лечения, профилактики». – 20-22 июня. – Москва., 1995, с. 39.
8. Соринсон, С.Н. Вирусные гепатиты. – 2-е изд. – СПб., 1998, 304 с.
9. Балаян, М.С., Михайлов М.И. Энциклопедический словарь – вирусные гепатиты – 2-е издание. – М.: Амипресс, 1999, 301 с.
10. Серов, В.В., Апросина З.Г. Хронический вирусный гепатит. – М.: Медицина, 2002, 384 с.
11. Мансуров Х.Х., Мироджов Г.К., Мансурова Ф.Х. Опыт лечения больных хроническим вирусным гепатитом В. – Проблемы ГАЭЛ, 2007, №4, с.141-143.
12. Корсун В.Ф. Лекарственные растения в гепатологии. М.: Русский врач, 2005, 274 с.

13. Доркина Е.Г. Изучение гепатозащитного действия природных флавоноидных соединений. Экспериментальная и клиническая фармакология. – 2004, с. 41-45.
14. Флора Таджикской ССР. – Л.: Наука, 1988, т.9, с. 145-146.
15. Убайдулло М.О., Якубова М.М., Курбонов М.К. Содержание биологически активных веществ в составе лагенарии обыкновенной (*Lagenaria siceraria* (Mol.) Stendl. – Изв. АН РТ., 2017, №4 (199), с.36-40.
16. Хабриева Р.У. Руководство по экспериментальному (доклиническому) изучению новых фармакологических веществ– Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Медицина, 2005, 832 с.

М.О.Убайдулло, Г.К.Мирочов*, М.М.Якубова, М.К.Курбонов

**ТАЪСИРИ ЗИДДИВИРУСӢ ВА ГЕПАТОПРОТЕКТОРИИ ЧАВӢАРИ
ЧУБКАДУИ ОДӢ *LAGENARIA SICERARIA* (MOLINA) STENDL ДАР
ТАҶРИБА БО ВИРУСИ ГЕПАТИТИ “В”**

*Маркази инноватсионии биология ва тибби АМИТ,
МД “Институту гастроэнтерологияи” АМИТ*

Дар мақола натиҷаҳои таъсири чавҳари чубкадуи оддӣ ба мушҳои сафед, ки бо вируси гепатити В сироят ёфтаанд, нишон дода шудааст. Сатҳи ДНК-и вирус ҳангоми инкишофи гепатит ва пас аз табобат бо усули занҷири полимеразӣ (УЗП) муайян карда шуд. Параметрҳои биохимиявии фаъолияти ферментҳои АлАТ, АсАТ ва билирубин дар зардоби хун омӯхта шуданд. Натиҷаҳои таҷрибаҳо имконият медиҳанд, ки чавҳари чубкаду барои гепатити этиологияи вирусӣ ва омехта тавсия карда шавад.

Калимаҳои калидӣ: чавҳар, чӯбкаду, вируси гепатити В.

М.О.Убайдулло, Г.К.Мироджов*, М.М.Якубова, М.К.Курбонов

ANTIVIRAL AND HEPATOPROTECTIVE EFFECT OF TINCTURE *LAGENARIA SICERARIA* (MOLINA) STENDL IN EXPERIMENTAL VIRAL HEPATITIS "B"

*Center for Innovative Biology and Medicine National Academy of Sciences Tajikistan,
State Institution "Institute of Gastroenterology" National Academy of Sciences Tajikistan

In this article the results of the effect of tincture of *Lagenaria vulgaris* on white mice infected with the hepatitis B virus are presents. The DNA level of the virus during the development of hepatitis and after treatment was determined by the polymerase chain reaction (PCR) method, the biochemical parameters of the activity of the enzymes ALT, AST and bilirubin were studied in the blood serum. The results of the experiments allow us to recommend tincture of *Lagenaria* for the treatment of hepatitis of viral and mixed etiology.

Key words: tincture, *lagenaria*, medicinal viral hepatitis B.

УДК 158.132:631.52

Член-корреспондент НАН Таджикистана Х.А.Абдуллаев,

Б.А.Солиева, Н.Х.Ойзода, М.М.Саиднабиев*

РЕПАРАТИВНАЯ РЕГЕНЕРАЦИЯ ЛИСТЬЕВ У РАСТЕНИЙ ХЛОПЧАТНИКА ПОСЛЕ ДЕФОЛИАЦИИ

*Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана,***Худжандский научный центр НАН Таджикистана*

Изучена восстановительная регенерация листьев после дефолиации у инбредных линий хлопчатника с различными формами и окрасками листа. Установлено, что у линий Л-501 и Л-549 с цельнокрайними листьями, после стопроцентной дефолиации, в конце вегетации, наблюдается низкая способность регенерации листьев по сравнению с контрольными растениями. Напротив, у линии Л-3 с пальчаторассечёнными листьями и у линии Л-601 с пальчатодольчатыми листьями в результате вторичного отрастания листьев через 90 дней после полного удаления всех листьев сформировалась новая листовая поверхность, превышающая таковую у растений в норме на 23.1% и 56.3%, соответственно. Эти результаты свидетельствуют о репаративной регенерации, т.е. восстановлении площади листьев у растений хлопчатника после полной дефолиации.

Ключевые слова: средневолокнистый хлопчатник *Gossypium hirsutum* L., инбредные линии, форма и окраска листа, общая листовая поверхность.

Ранее [1] с использованием тонковолокнистого хлопчатника *Gossypium barbadense* L. сорта 9326-B с предельным типом ветвления и пятидольчатыми листьями зелёной окраски методом дефолиации было показано, что у тех растений, у которых в фазах бутонизации и цветения искусственно были удалены все листья, со временем, в конце вегетации, в фазу созревания урожая хлопка-сырца в результате вторичного отрастания листьев сформировалась новая листовая поверхность, аналогичная по количеству и площади, как у контрольных растений. Этот процесс свидетельствует о проявлении репаративной регенерации у растений.

Интересно было выяснить наблюдается ли такая закономерность при полной дефолиации растений других видов и генотипов хлопчатника?

В связи с этим, целью настоящей работы было изучение проявления репаративной регенерации у разных генотипов средневолокнистого хлопчатника *Gossypium hirsutum* L. с различными типами куста, формами, окрасками листьев.

Материалы и методы исследований

Материалом для исследования служили инбредные линии средневолокнистого хлопчатника Л-3, Л-461, Л-501, Л-549 и Л-601 из генетической коллекции *Gossypium hirsutum* L. Ташкентского государственного университета им. Мирзо Улугбека (Узбекистан), контрастные по высоте стебля, по форме и окраске листа. Ниже приводится краткая морфо-биологическая характеристика этих линий. Классификация форм листовых пластинок и обозначения генов даны по М.Ф.Абзалову [2].

Адрес для корреспонденции: Абдуллаев Хамиджон Абдуллаевич. 734017, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул.Каримова, 27, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАНТ. E-mail: homidjon1945@mail.ru

Линия Л-3 высокорослая, имеет симподиальные ветви предельного типа (*ss*), листья пальчаторассечённые *in'in'O₁O₁* (типа окра) с антоциановой окраской (*R_pR_p*).

Линия Л-461 имеет симподиальные ветви неpredельного типа (I-II тип, гены *ss*), моноподиев – 1-2. Высота главного стебля – 85-95 см. Листья светло-зелёные, пальчаторассечённые (типа супер-окра, гены *in'in'O₁O₁*).

Линия Л-501 – карликовая, с детерминантным ростом главного стебля (высота стебля 50-55 см) совершенно не характерная для рода *Gossypium* L. На верхушке стебля образуются 3-4 плодовые органы. Линией свойственна цельнокрайняя форма листовой пластинки (гены *In^lIn^lO₁O₁*). Этот признак результат плейотропного действия (гена *In^lIn^l*). Окраска листьев зелёная.

Линия Л-549 также с детерминантным ростом главного стебля. Высота главного стебля – 55-60 см. Листья цельнокрайние (гены *In^lIn^lO₁O₁*) с антоциановой окраской (*R_pR_p*), обусловлена плейотропным эффектом гена *In^lIn^l*.

Линия Л-601 – карликовая, высота главного стебля – 55-60 см. Листья (пальчатодольчатые гены *in'in'o'o'*), зелёной окраски. Симподиальные ветви неpredельного типа (I-II тип, гены *ss*). Низкорослость линии Л-601 обусловлена большой концентрацией рецессивных аллелей генов, контролирующих количество и длину междоузлий (гены *Intⁿintⁿ*).

Растения для опытов выращивали на экспериментальном участке Института ботаники, физиологии и генетики растений Национальной академии наук Таджикистана, расположенном в восточной части Гиссарской долины на высоте 830 м над ур.м., в одинаковых условиях, согласно агрорекомендациям по выращиванию хлопчатника в Таджикистане [3] в едином опыте. Делянки опыта четырёхрядковые, десятилуночные, схема посева – 60x30x1, биологическая повторность трёхкратная, рендомизированная. Для анализов брали растения с одинаковым уровнем роста развития.

Разовое механическое удаление листьев (дефолиацию) растений в различной степени проводили в среднем ярусе куста хлопчатника. В опытных вариантах удаляли 25, 50, 75 и 100% листьев от общего их количества на растениях. Контролем служили растения хлопчатника с сохранением всех сформировавшихся листьев.

Площадь листа определяли расчётным (математическим) методом путём измерения его линейных параметров – длины и ширины с последующим умножением их на конкретный поправочный коэффициент, учитывающий форму листа. Для каждой линии были вычислены соответствующие поправочные коэффициенты. Затем, измеряя длину и ширину всех листьев и используя эти поправочные коэффициенты, находили общую листовую поверхность растения [4].

Статистический анализ полученных результатов проводили с использованием программы *Microsoft Excel 2010*. В таблицах приведены среднеарифметические величины и их стандартные ошибки из трёх биологических повторностей и трёх аналитических определений.

Достоверность различий определяли по *t-критерию Стьюдента* при числе степеней свободы $n^1 = (n_1 + n_2) - 2 = 4$. Достоверными считали различия при величине *P*, не превышающей 0.01.

Результаты исследований и их обсуждение

Результаты измерения высоты главного стебля, подсчёта количества листьев и определения площади листьев у дефолиированных растений инбредных линий хлопчатника в фазах бутонизации и цветения через 95 и 66 дней после удаления листьев представлены в табл. 1, 2.

Как видно из табл. 1, растения линий Л-3 и Л-501 после удаления всех листьев в фазе бутонизации отстают в росте, а у линий Л-461 и Л-549 этот показатель не превышает контроль. У линии Л-601 высота главного стебля растений находится почти на уровне контроля. Данные табл. 1 показывают, что у всех линий и во всех вариантах опытов количество листьев на растении в конце вегетации всегда было меньше, чем в контроле, то есть дефолированные растения уступают по росту контролю.

Анализ общей листовой поверхности у растений (табл. 1) показал, что только у двух линий Л-3 (пальчаторассечённые листья) и Л-601 (пальчатодольчатые) в конце вегетации после удаления всех листьев полностью восстанавливается общая площадь листьев, превышающая контрольные растения на 23.1% и 56.3%, соответственно. Эти данные говорят о репаративной регенерации листьев независимо от формы и окраски листа.

Таблица 1

Морфобиологические показатели инбредных линий хлопчатника при разной степени дефолиации с середины куста. Дата дефолиации в фазе бутонизации – 05.07.2020 г.
Дата определения показателей через 90 дней – 01.10.2020 г.

Варианты опыта	Высота главного стебля, см	Количество листьев, шт./ растение	Общая листовая поверхность, дм ² / растение
Линия Л-3			
Контроль	93.3±2.4	22.3±2.3	33.7±1.1
25%	94.6±9.9	9.0±0.1	35.2±0.1
50%	77.0±2.6	14.0±1.0	38.6±3.7
75%	99.0±7.0	7.5±0.5	30.7±3.0
100%	80.0±0.5	12.6±0.8	41.5±3.4
Линия Л-461			
Контроль	54.6±1.2	15.6±1.8	17.0±0.5
25%	66.6±7.0	9.3±1.7	32.0±1.5
50%	67.0±3.4	10.0±1.8	6.0±0.2
75%	63.6±1.4	6.6±2.0	6.7±1.1
100%	59.3±1.2	13.3±2.3	14.0±1.0
Линия Л-501			
Контроль	62.6±3.7	25.0±1.1	14.2±0.6
25%	66.3±4.3	17.3±0.7	15.2±1.8
50%	60.3±3.7	7.6±1.2	13.6±0.8
75%	57.6±2.0	8.6±2.0	11.7±0.4
100%	52.6±2.1	11.0±0.01	9.3±0.1
Линия Л-549			
Контроль	65.3±2.3	15.6±0.8	17.6±2.6
25%	77.3±4.0	17.0±0.5	16.6±1.1
50%	72.0±4.1	12.6±1.7	10.8±0.4
75%	57.3±1.7	9.0±0.5	28.1±0.1
100%	68.6±7.3	11.3±0.8	14.7±2.3
Линия Л-601			
Контроль	73.3±1.2	25.0±1.5	33.7±1.1
25%	69.0±4.1	20.5±2.0	30.5±3.5
50%	71.6±2.6	21.9±5.3	26.5±1.5
75%	68.6±2.9	17.0±0.5	55.1±1.5
100%	72.0±5.5	18.3±0.8	52.7±2.3

В фазу цветения при стопроцентной дефолиации растений (табл. 2) все инбредные линии значительно уступают по росту в сравнении с контрольными растениями, за исключение линии

Л-501. По количеству листьев на растении все линии в 2-3 раза имеют меньшее число листьев в кусте. Величина общей листовой поверхности у всех линий после стопроцентной дефолиации, в конце вегетации, после 66 дней, восстанавливается почти до уровня контрольных растений только у линий Л-3, Л-501 и линии Л-601, а у линий Л-549 и Л-461 общая листовая площадь растений незначительно меньше, чем в контроле.

Возможно, это связано с тем, что мутантный ген *In¹*, контролирующей цельную форму листовой пластинки в ходе онтогенетического развития растений нарушает фитогормональный баланс цитокининов и гиббереллинов, и тем самым вызывает апикальное доминирование путём индукции фасциации в фазе бутонизации. Этот ген имеет очень широкое плейотропное действие – влияет на морфологию и дифференцировку структурных элементов листа [3] и, вероятно, задерживает рост и экспансию листьев.

Таблица 2

Морфобиологические показатели инбредных линий хлопчатника при разной степени дефолиации с середины куста. Дата дефолиации в фазе цветения – 27.07.2020 г.
Дата определения показателей через 66 дней – 01.10.2020 г.

Варианты опыта	Высота главного стебля, см	Количество листьев, шт./ растение	Общая листовая поверхность, дм ² / растение
Линия Л-3			
Контроль	92.3±3.9	10.0±1.1	30.8±0.2
25%	86.0±4.9	8.6±0.8	28.8±2.9
50%	91.6±3.2	8.0±1.0	21.9±0.0
75%	92.0±4.1	4.0±0.0	30.7±3.0
100%	90.0±2.3	8.0±0.0	31.9±0.0
Линия Л-461			
Контроль	58.3±2.7	8.0±1.0	10.2±0.2
25%	64.3±4.7	8.3±0.8	8.7±0.9
50%	59.0±2.9	6.0±2.0	8.0±2.0
75%	60.0±3.6	-	-
100%	55.0±2.8	5.0±0.0	6,5±0,0
Линия Л-501			
Контроль	57.6±1.8	12.3±2.1	18.7±2.0
25%	63,0±4.0	11.6±0.8	14.8±1.7
50%	62.0±3.0	9.6±0.8	15.1±2.9
75%	60.3±2.0	5.0±1.0	8.3±1.0
100%	64.6±2.9	4.0±0.0	25.3±0.0
Линия Л-549			
Контроль	67.3±4.8	11.0±1.0	11.5±0.5
25%	60.6±1.7	9.6±0.8	11.8±0.5
50%	61.6±1.4	8.3±0.8	9.7±1,8
75%	73.0±2.6	7.6±1.2	12.7±0.9
100%	65.0±4.0	3.0±0.0	9.9±0.0
Линия Л-601			
Контроль	70.3±1.4	12.6±1.7	37.0±1.0
25%	68.0±3.2	12.5±2.2	30.9±3.5
50%	60.6±2.3	11.0±1.0	26.7±0.5
75%	69.3±2.9	6.3±0.3	37.5±1.0
100%	59.0±3.2	6.0±1.0	37.5±5.7

Таким образом, в результате исследования установлено, что репаративная регенерация листьев после дефолиации происходит по-разному в зависимости от формы и окраски листа. Так, если у

линий Л-501 и Л-549 с цельнокрайними листьями, после стопроцентной дефолиации, в конце вегетации, наблюдается низкая способность регенерации листьев по сравнению с контрольными растениями, то у линии Л-3 с пальчаторассчѐнными листьями и у линии Л-601 (с пальчатодольчатыми листьями) в результате вторичного отрастания листьев через 90 дней после полного удаления всех листьев сформировалась новая листовая поверхность, превышающая таковую у растений в норме на 23.1% и 56.3% соответственно. Эти результаты свидетельствуют о восстановлении площади удаленных листьев у растений хлопчатника после дефолиации.

Поступило 12.05.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бохирова М.К., Абдуллаев Х.А., Гиясидинов Б.Б., Эргашев А. О некоторых постэффектах дефолиации у растений хлопчатника – ДАН РТ, 2017, Т. 60, № 5-6, с. 264-268.
2. Абзалов М.Ф. Генетика и фенотипика важнейших признаков хлопчатника *G. hirsutum* L.: Дисс. ...д.б.н. в форме научного доклада. – М.: Институт общей генетики им. Н.И.Вавилова АН СССР, 1991, 84 с.
3. Научная система ведения сельского хозяйства Таджикистана (на тадж.яз) /Под ред. акад. ТАСХН Ахмедова Х.М., Набиева Т.Н., Бухориева Т.А. – Душанбе: Матбуот, 2009, 764 с.
4. Абдуллаев Х.А., Каримов Х.Х. Индексы фотосинтеза в селекции хлопчатника. – Душанбе: Дониш, 2021, 267 с.

Х.А.Абдуллаев, Б.А.Солиева, Н.Х.Ойзода, М.М.Саиднабиев*

РЕГЕНЕРАТСИЯИ РЕПЕРАТИВИИ БАРГҲОИ РАСТАНИИ ПАХТА ПАС АЗ ТАМОМАН СОҚИТ КАРДАНИ БАРГҲО

Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

**Маркази илмии Хуч анд, АМИТ*

Дар мақола маълумот дар бораи регенератсияи репаративии барги растаниҳои инбредии пахта, ки аз ҳамдигар бо ранг ва шакли барг фарқият доранд, дода шудааст. Муайян карда шудааст, ки линияҳои Л-501 ва Л-549 пас аз тамоман соқит кардани баргҳо дар охири давраи нашъунамо қобилияти сусти регенератсияи баргҳоро доранд. Баракс, линияи Л-3 (шакли баргаш қайчибарг) ва линияи Л-601 (шакли баргаш панҷгушаона) дар натиҷаи дубора пайдошавии баргҳо масоҳати баргашон нисбат ба растаниҳои назоратӣ 23.1% ва 56.3% зиёд мешавад. Ин натиҷаҳо аз қобилияти барқароршавии баргҳо пас аз дефолиатсия шаҳодат медиҳанд.

Калимаҳои калидӣ: пахтаи миёнаҳа *Gossypium hirsutum* L., линияҳои инбредӣ, шакл ва ранги барг, масоҳати умумии барги растани.

Kh.A.Abdullaev, B.A.Solieva, N.Kh.Oyzoda, M.M.Saidnabiev*

REPERATIVE REGENERATION OF COTTON LEAVES AFTER DEFOLIATION

Institute of Botany, Plant Physiology and Genetics, National Academy of Sciences of Tajikistan,

**Khudjand of Sciences Center of National Academy of Sciences of Tajikistan*

In this paper, the result of reparative regeneration of the leaves after defoliation of inbred lines of cotton with different shapes and colors of the leaves are presents. It is shown, that in lines L-501 and L-549 with integri form of the leaves and after full removed in the end of vegetation period, low ability of the leaves regeneration was observed. But in line L-3 (with okra leaves type) and L-601 (with broad leaves) in results of second grow of leaves after 90 days of defoliation a new leaves area was formed, exceeding of control plants in 23% and 56.3% accordingly. This result is evidence about reparative regeneration of the leaves in cotton.

Key words: *middle stable cotton Gossypium hirsutum L., inbred lines, shape and colors of leaf, leaf and leaf area.*

Исправления и опечатки

В №7-8, за 2020 год, журнала «Доклады академии наук Республики Таджикистан», в статье М.М.Мамадвафоева, Д.А.Давлатшоева «Водород в породах интрузивных комплексов Кафандарского рудного поля (Восточный Гиссар)», на странице 507, в «Примечание к таблице 1,2», фраза *«Жирным шрифтом выделены и подчёркнуты случаи отклонения асимметрии и эксцесса от гипотетической функции распределения»*, в таблице 1 относится к столбцам $A/\sigma_{(A)}$ и $E/\sigma_{(E)}$ в диоритах и роговообманково-биотитовых гранитах, и $E/\sigma_{(E)}$ – в спессартитах, а в таблице 2 – к столбцам $A/\sigma_{(A)}$ и $E/\sigma_{(E)}$ – во всех указанных породах.