

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- А.А.Собиров.** Проблема Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми.....5
- П.М.Фозилова.** Тернарная проблема Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми.....14
- А.Мухлис.** О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций и точных значениях поперечников некоторых классов функций в L_224
- К.К.Палавонов.** Наилучшее совместное полиномиальное приближение периодических функций и решение некоторых экстремальных задач в L_237
- Г.Джангибеков, С.Ф.Савлатов.** О поликern-функции полуплоскости $Imz > 0$ и её связи с двумерными сингулярными интегральными операторами44

ИНФОРМАТИКА

- С.М.Пиров.** Алгоритм распознавания благозвучия таджикских слов при использовании униграмм57

ФИЗИКА

- Д.Рашидов, Т.Х.Салихов, Ш.И.Акназарова, С.Х.Табаров, А.Мирзо, Д.М.Шарифов, Ф.Содиқов, М.Р.Файзиева.** Влияние фуллерена C_{60} на температуропроводность полиметилметакрилата63
- Д.С.Кучакшоев, А.Г.Джабаров, А.Холов.** Рентгенофазовый анализ стёкол $2Bi_2O_3-B_2O_3$ и $Bi_2O_3-2B_2O_3$ с различной концентрацией NaOH в формовочной смеси69
- С.К.Каримов, М.Х.Эгамов, А.Абдуманонов.** Конформационные переходы в капсулированных полимером жидкокристаллических пленках75

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

- Д.Н.Низомов, С.С.Зарифов.** Математическое моделирование подземных сооружений, расположенных в однородной упругой среде81

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- С.М.Гафорзода, Д.Х.Мирзоев, Д.О.Давлатов, Н.М.Джамолов, У.М.Мирсаидов.** Термодинамический анализ протекающих процессов при разложении каолиновых глин месторождения Чашма-Санг Таджикистана соляной кислотой88
- К.С.Мабаткадамзода.** Устойчивость 1-фенил-2,3-диметилпиразолинтионных комплексов Fe(III) в сернокислом и солянокислом растворах92

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А.Шарифов, З.Х.Гайбуллаева, Д.С.Неъматзода, З.А.Гозиев. Эффективные способы предотвращения коррозии гидротехнического бетона98

ЭКОЛОГИЯ

С.В.Муминов. Изучение содержания природных радионуклидов в почвах некоторых районов Таджикистана.....106

М.С.Сафаров, Х.У.Каримов, А.С.Саидов, И.Б.Холматов, Л.С.Набиев, А.У.Бобожонов. Мониторинг биоразнообразия южных отрогов Вахшского хребта с применением беспилотных летательных аппаратов112

ГИДРОЛОГИЯ И ВОДНЫЕ РЕСУРСЫ

О.Ш.Маджидов, М.А.Ниёзова. Современное состояние гидрографии озёр бассейна реки Киштуд (Центральный Таджикистан)119

БИОХИМИЯ РАСТЕНИЙ

Н.С.Диловарова. Перекисное окисление липидов у растений *Solanum tuberosum* L. в условиях *ex vitro*128

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

М.М.Рахимов. О содержании растворимых углеводов у пшеницы в различных экологических условиях133

CONTENTS

MATHEMATICS

- A.A.Sobirov.** Esterman problem for cubes of primes with almost equal summands5
- P.A.Fozilova.** Esterman's ternary problem for cubes of primes with almost proportional summands.....14
- A.Mukhlis.** The best approximation of periodic differentiated functions and sharp values of widths of some classes of the function in L_2 24
- Q.Q.Palavonov.** The best mutual polynomial approximation of periodic functions and solution of some extreme problems in L_2 37
- G.Jangibekov, S.F.Savlatov.** On the polykernel function of the half-plane $Imz>0$ and its connection with two-dimensional singular integral operators44

INFORMATICS

- S.M.Pirov.** About developing a basis to metrization of word's euphony at usage unigram57

PHYSICS

- D.Radhidov, T.Kh.Salikhov, Sh.I.Aknazarova, S.Kh.Tabarov, A.Mirzo, D.M.Sharifov, F.Sodikov, M.R.Fayzieva.** The effect of the fullerene C_{60} on the thermal diffusivity of polymethylmetacrilate63
- D.S.Kuchakshoev, A.G.Dzhabarov, A.Kholov.** X-ray phase analysis of glasses $2Bi_2O_3-B_2O_3$ and $Bi_2O_3-2B_2O_3$ with different concentrations of NaOH in the molding sand.....69
- S.K.Karimov, M.Kh.Egamov, A.Abdumanonov.** Conformational transitions in capsulated polymer liquid crystal films.....75

STRUCTURAL MECHANICS

- J.N.Nizomov, S.S.Zarifov.** Mathematical modeling of the underground structures located in uniform springy ambience.....81

INORGANIC CHEMISTRY

- S.M.Gaforzoda, D.Kh.Mirzoev, D.O.Davlatov, N.M.Jamolov, U.M.Mirsaidov.** Thermodynamic analysis of occurred processes during the decomposition of kaolin clays of the Chashma-Sang deposit of Tajikistan with chloride acid.....88
- K.S.Mabatkadamzoda.** Stability of 1-phenyl-2,3-dimethylpyrazolintion complexes of Fe(III) in sulfuric acid and hydrochloric acid solutions92

PHYSICAL CHEMISTRY

- A.Sharifov, Z.H.Gaibullaeva, D.S.Nematzoda, Z.A.Goziev.** Effective methods for preventing corrosion of hydraulic concrete98

ECOLOGY

S.V.Muminov. Studying the content of natural radionuclides in the soils of certain regions of Tajikistan.....106

M.S.Safarov, H.U.Karimov, A.S.Saidov, I.B.Kholmatov, L.S.Nabiev, A.U.Bobojonov. Biodiversity monitoring of the southern spurs of the Vakhsh ridge with the use of unmanned aerial vehicles.....112

HYDROLOGY AND WATER RESOURCES

O.Sh.Majidov, M.A.Niyozova. Current state of hydrography in the Kishtud river basin (Central Tajikistan).....119

PLANT BIOCHEMISTRY

N.S.Dilovarova. Lipid peroxidation of *Solanum tuberosum* l. plants under *ex vitro* conditions.....128

PLANT PHYSIOLOGY

M.M.Rahimov. Content of soluble carbohydrates in wheat grained in various ecological conditions.....133

УДК 511.325

А.А.Собиров

ПРОБЛЕМА ЭСТЕРМАНА ДЛЯ КУБОВ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ С ПОЧТИ РАВНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 22.01.2021 г.)

Доказана асимптотическая формула для количества представления достаточно большого натурального числа N в виде суммы двух простых чисел p_1 , p_2 и куба простого p_3 , с условиями

$$|p_i - N/3| \leq H, \quad |p_3^3 - N/3| \leq H, \quad H \geq N^{1-\frac{1}{15+3\eta}} \mathcal{L}^c, \quad \eta = \frac{2}{7+4\sqrt{3}}, \quad c = \frac{10476-4816\sqrt{3}}{39}.$$

Ключевые слова: почти равные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма с простыми числами, диофантово уравнение.

Т.Эстерман [1] доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^2 = N, \tag{1}$$

где p_1 , p_2 – простые числа, m – натуральное число. В работе [2] эта задача исследована с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, и выведена асимптотическая формула для числа решений (1) с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i=1,2; \quad \left| m^2 - \frac{N}{3} \right| \leq H; \quad H \geq N^{\frac{3}{4}} \mathcal{L}^3.$$

Далее в работах [3,4] асимптотическая формула выведена для более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, то есть когда в уравнении (1) квадрат натурального m заменяется на его

куб при $H \geq N^{\frac{5}{6}} \mathcal{L}^{10}$. А в работе [5] асимптотическая формула выведена для ещё более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, то есть когда в уравнении (1) квадрат

натурального m заменяется на его четвёртую степень при $H \geq N^{\frac{11}{12}} \mathcal{L}^{\frac{40}{3}}$. В работе [6] доказана асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3^2 = N, \quad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i=1,2; \quad \left| p_3^2 - \frac{N}{3} \right| \leq H; \quad H \geq N^{\frac{27}{32}+\varepsilon},$$

где p_1 , p_2 и p_3 – простые числа.

В этой работе асимптотическая формула выводится уже для более редкой, притом сложной последовательности с почти равными слагаемыми, когда в уравнении (1) квадрат натурального m

Адрес для корреспонденции: Собиров Абдушукур Абдурасулович. 734063. Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАН Таджикистана. E-mail: safo9333@mail.ru

заменяется на куб простого числа, доказательство которой проводится круговым методом и опирается на результаты работ [7-11], в которых для коротких тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n)e(\alpha n^k)$$

получены асимптотические формулы для $S_1(\alpha; x, y)$ и $S_3(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг, а также нетривиальная оценка суммы $S_3(\alpha; x, y)$ в больших дугах, за исключением малой окрестности их центров, и малых дугах.

Теорема. Пусть N – достаточно большое натуральное число, $I(N, H)$ – число представлений N суммой двух простых чисел p_1, p_2 и куба простого числа p_3 с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i=1, 2, \quad \left| p_3^3 - \frac{N}{3} \right| \leq H,$$

$\rho(N, p)$ – число решений сравнения $k^3 \equiv N \pmod{p}$, $\mathcal{L}_3 = \ln \left(\frac{N}{3} \right)^{\frac{1}{3}}$,

$$\eta = \frac{2}{7+4\sqrt{3}} \approx 0.1435935394, \quad c = \frac{10476-4816\sqrt{3}}{39} \approx 54.7,$$

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_{(p, N)=1} \left(1 + \frac{\rho(N, p) - 1}{(p-1)^2} + \frac{\rho(N, p)}{(p-1)^3} \right) \prod_{(p, N)=p} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right).$$

Тогда при $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta}} \mathcal{L}_3^c$, справедлива асимптотическая формула:

$$I(N, H) = \frac{\mathfrak{S}(N)H^2}{3^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^3} + O \left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^4} \right).$$

Доказательство теоремы. Не ограничивая общности, будем считать, что $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta}} \mathcal{L}_3^c$, и для удобства при $\nu = 1; 3$ вводим обозначения

$$N_\nu = \left(\frac{N}{3} \right)^{\frac{1}{\nu}}, \quad H_\nu = \frac{H}{\nu(N/3)^{1-\frac{1}{\nu}}}, \quad \tau = \frac{(2H_3)^5}{(N_3 + H_3)^2 \mathcal{L}_3^{704}}, \quad \mathfrak{x} = \tau^{-1}.$$

Имеем

$$\mathcal{J}(N, H) = \int_{-\mathfrak{x}}^{1-\mathfrak{x}} \mathfrak{S}_1^2(\alpha; N, H) \mathfrak{S}_3(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha,$$

$$\mathfrak{S}_\nu(\alpha; N, H) = \sum_{|p^\nu - N/3| \leq H} e(\alpha p^\nu).$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}. \quad (2)$$

В этом представлении $0 \leq a \leq q - 1$, причём $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через \mathfrak{M} обозначим те α , для которых $q \leq \mathcal{L}_3^{704}$ в представлении (2), через \mathfrak{m} – обозначим оставшиеся α . Множество \mathfrak{M} состоит из непересекающихся отрезков. Разобьем множество \mathfrak{M} на множества \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 :

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{ \alpha : \alpha \in \mathfrak{M}, \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{\mathcal{L}_3^2}{H} \right\},$$

$$\mathfrak{M}_2 = \left\{ \alpha : \alpha \in \mathfrak{M}, \frac{\mathcal{L}_3^2}{H} < \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q\tau} \right\}.$$

Обозначим через $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам \mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_2 и \mathfrak{m} . Будем иметь

$$I(N, H) = I(\mathfrak{M}_1) + I(\mathfrak{M}_2) + I(\mathfrak{m}).$$

В последней формуле первый член, то есть $I(\mathfrak{M}_1)$, доставляет главный член асимптотической формулы для $I(N, H)$, а $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

При ν равным 1 или 3 будем пользоваться соотношениями

$$3\mathcal{L}_3 = \ln \frac{N}{3} = \nu \ln p + O(HN^{-1}), \quad |p^\nu - N/3| \leq H,$$

$$\left(\frac{N}{3} \pm H \right)^\frac{1}{\nu} = N_\nu \pm H_\nu + O\left(\frac{H^2}{N^{2-1/\nu}} \right),$$

соответственно являющимися следствием формулы Лагранжа о конечных приращениях и формулы $(1+u)^\mu = 1 + \mu u + O(u^2)$, где $|u| < 0.5$. Воспользовавшись этими формулами, отрезок суммирования $|p^\nu - N/3| \leq H$ в сумме $\mathfrak{S}_\nu(\alpha; N, H)$ заменим на интервал $N_\nu - H_\nu < n \leq N_\nu + H_\nu$, а затем выражаем через сумму вида $S(\alpha; x, y)$. Имеем

$$\mathfrak{S}_\nu(\alpha; N, H) = \frac{\nu}{3\mathcal{L}_3} S_\nu(\alpha; N_\nu + H_\nu, 2H_\nu) + O\left(\frac{H^2}{N^{2-\frac{1}{\nu}}} \right). \quad (3)$$

Вычисление интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$. По определению интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$ имеем:

$$I(\mathfrak{M}_1) = \int_{\mathfrak{M}_1} \mathfrak{S}_1^2(\alpha; N, H) \mathfrak{S}_3(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha = \sum_{q \leq \mathcal{L}_3^{704}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} I(a, q), \quad (4)$$

$$I(a, q) = e\left(-\frac{aN}{q}\right) \int_{|\lambda| \leq \mathcal{L}_3^{2H^{-1}}} F\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) e(-\lambda N) d\lambda, \quad (5)$$

$$F(\alpha; N, H) = \mathfrak{S}_1^2(\alpha; N, H) \mathfrak{S}_3(\alpha; N, H), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda.$$

К сумме $S_1(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)$ применим основной результат работы [9], полагая $x = N_1 + H_1$, $y = 2H_1$, $A = 1411$, $b = 704$, и с учётом формулы (3) при $\nu = 1$ найдём

$$\mathfrak{S}_1(\alpha; N, H) = \frac{1}{3\mathcal{L}_3} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda} e\left(\frac{\lambda N}{3}\right) + R_1, \quad R_1 \ll \frac{H}{\mathcal{L}_3^{1412}}.$$

Пользуясь этой формулой и имея в виду, что

$$\left| \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda} e\left(\frac{\lambda N}{3}\right) \right| \leq \frac{H}{\varphi(q)}, \quad |\mathfrak{S}_1(\alpha; N, H)| \leq \frac{H}{\mathcal{L}_3},$$

найдем

$$\mathfrak{S}_1^2\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) - \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \cdot \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{9\pi^2 \lambda^2 \mathcal{L}_3^2} e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right) \ll \frac{H^2}{\mathcal{L}_3^{1413}}.$$

Умножая это неравенство на тривиальное неравенство $\mathfrak{S}_3(\alpha; N, H) \ll HN^{-\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^{-1}$ и имея в виду, что $F(\alpha; N, H) = \mathfrak{S}_1^2(\alpha; N, H) \mathfrak{S}_3(\alpha; N, H)$, находим

$$F(\alpha; N, H) - \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{9\pi^2 \lambda^2 \mathcal{L}_3^2} e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right) \mathfrak{S}_3(\alpha; N, H) \ll \frac{H^3}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^{1414}}. \quad (6)$$

К сумме $S_3(\alpha; N_3 + H_3, 2H_3)$ применим теорему работы [7], полагая $x = N_3 + H_3$, $y = 2H_3$, $A = 1411$, $b = 704$, и с учётом формулы (3) при $\nu = 3$ найдём

$$\mathfrak{S}_3(\alpha; N, H) = \frac{2S_3(a, q)H}{3^{\frac{1}{3}} \varphi(q) N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3} \gamma(\lambda) + R_2, \quad R_2 \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^{1412}},$$

$$S_3'(a, q) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^q e\left(\frac{an^3}{q}\right), \quad \gamma(\lambda) = e\left(\lambda \left(\left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2H}{3^{\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}}} t \right)^3\right) dt.$$

Подставляя правую часть этой формулы в (6), получим

$$F(\alpha; N, H) = \frac{2H}{3^{\frac{7}{3}} N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^3} \frac{\mu^2(q) S_3(a, q)}{\varphi^3(q)} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2} e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right) \gamma(\lambda) + O\left(\frac{H^3}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^{1414}}\right).$$

Подставляя значение $F(\alpha; N, H)$ в формулу (5), найдём

$$I(a, q) = e\left(-\frac{aN}{q}\right) \frac{2H}{3^{\frac{7}{3}} N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^3} \cdot \frac{\mu^2(q) S_3(a, q)}{\varphi^3(q)} \cdot J(H) + R_4,$$

$$J(H) = \int_{|\lambda| \leq \mathcal{L}_3^{2H^{-1}}} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2} \gamma(\lambda) e\left(-\frac{\lambda N}{3}\right) d\lambda, \quad R_4 \ll \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^{1412}}.$$

Подставляя значение $\gamma(\lambda)$, делая в интеграле подстановку $u = 2\pi\lambda H$ и, имея в виду, что

$$e\left(\frac{ut}{\pi} \left(\frac{2Ht}{N} + \frac{4H^2 t^2}{N^2}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{H \mathcal{L}_3^2}{N}\right),$$

а затем заменяя интеграл по u близким к нему несобственным интегралом, независимым от \mathcal{L}_3 , найдём

$$J(H) = \frac{4H}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^3 u}{u^3} du + O\left(\frac{H}{\mathcal{L}_3^6}\right) = \frac{3H}{2} + O\left(\frac{H}{\mathcal{L}_3^6}\right).$$

Отсюда и из формулы (5) найдём

$$I(a, q) = \frac{H^2}{3^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^3} \cdot \frac{\mu^2(q) S'_3(a, q)}{\varphi^3(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right) + R_5(a, q), \quad (7)$$

$$R_5(a, q) \ll \frac{\mu^2(q) |S'_3(a, q)|}{\varphi^3(q)} \cdot \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^9} + \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^{1412}}.$$

Подставляя правую часть равенства (7) в (4), получим

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{H^2}{3^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^3} \sum_{q \leq \mathcal{L}_3^{704}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)} \Phi_N(q) + R(\mathfrak{M}_1), \quad (8)$$

$$\Phi_N(q) = \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^q S'(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right), \quad R(\mathfrak{M}_1) \ll \sum_{q \leq \mathcal{L}_3^{704}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} R_5(a, q) \ll \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^4}.$$

В (8), заменяя сумму по q близким к ней бесконечным рядом, не зависящим от \mathcal{L}_3^{704} , найдём

$$\sum_{q \leq \mathcal{L}_3^{704}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)} \Phi_N(q) = \mathfrak{S}(N) - R(N), \tag{9}$$

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)} \Phi_N(q), \quad R(N) = \sum_{q > \mathcal{L}_3^{704}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)} \Phi_N(q).$$

Пользуясь абсолютной сходимостью $\mathfrak{S}(N)$ и мультипликативностью $\Phi_N(q)$, имеем

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_p \left(1 + \frac{\Phi_N(p)}{(p-1)^3} \right).$$

Вычисляя точное значение $\Phi_N(p)$ в двух возможных случаях $(N, p) = 1$ и $(N, p) = p$, представим $\mathfrak{S}(N)$ в виде

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_{(p, N)=1} \left(1 + \frac{\rho(N, p) - 1}{(p-1)^2} + \frac{\rho(N, p)}{(p-1)^3} \right) \prod_{(p, N)=p} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right).$$

Теперь оценим $R(N)$. Так как $\Phi_N(q)$ – мультипликативная функция и q – бесквадратное число,

$S'(a, p) = S(a, p) - 1$ и $|S(a, p)| \ll p^{1/2}$, то $|\Phi_N(q)| \ll q^{\frac{3}{2}}$. Поэтому

$$|R(N)| \leq \sum_{q > \mathcal{L}_3^{704}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)} q^{\frac{3}{2}} \ll \sum_{q > \mathcal{L}_3^{704}} \frac{(\ln \ln q)^3}{q^{\frac{3}{2}}} \ll \int_{\mathcal{L}_3^{704}}^{\infty} \frac{(\ln \ln u)^3}{u^{\frac{3}{2}}} du \ll \mathcal{L}_3^{-8}.$$

Таким образом, соотношение (9) принимает вид

$$\sum_{q \leq \mathcal{L}_3^{704}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)} \Phi_N(q) = \mathfrak{S}(N) + O(\mathcal{L}_3^{-8}).$$

Подставляя правую часть этого равенства в (8), получим

$$I(\mathfrak{M}_1) = -\frac{\mathfrak{S}(N)H^2}{3^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^3} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^4} \right).$$

Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$. Имеем

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |\mathfrak{S}_3(\alpha; N, H)| \int_0^1 |\mathfrak{S}_1(\alpha; N, H)|^2 d\alpha \ll \frac{H}{\mathcal{L}_3} \cdot \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |\mathfrak{S}_3(\alpha; N, H)|. \tag{10}$$

Если $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad \frac{\mathcal{L}_3^2}{H} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq \mathcal{L}_3^{704}.$$

Оценим $\mathfrak{S}_3(\alpha, N, H)$ для α из множества \mathfrak{M}_2 . Рассмотрим два возможных случая:

$$1. \frac{\mathcal{L}_3^2}{H} < |\lambda| \leq \frac{1}{18\pi(N_3 + H_3)(2H_3)^2};$$

$$2. \frac{1}{18\pi(N_3 + H_3)(2H_3)^2} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Случай 1. К сумме $S_3(\alpha; N_3 + H_3, 2H_3)$ точно так же, как в случае $I(\mathfrak{M}_1)$, применяя теорему работы [7], с учётом формулы (3) при $\nu = 3$, найдём

$$\mathfrak{S}_3(\alpha; N, H) = \frac{2S_3(a, q)H}{3^3 \varphi(q) N^{\frac{1}{3}} \mathcal{L}_3^{\frac{2}{3}}} \gamma(\lambda) + R_2, \quad R_2 \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^{1412}}.$$

Переходя к оценкам, имея в виду, что $|S'_3(a, q)| \leq \varphi(q)$, получим

$$|\mathfrak{S}_3(\alpha; N, H)| \ll \frac{|S'_3(a, q)| H}{\varphi(q) N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^{\frac{2}{3}}} |\gamma(\lambda)| + \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^{1412}} \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^{\frac{2}{3}}} |\gamma(\lambda)| + \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^3}. \quad (11)$$

Оценивая интеграл $\gamma(\lambda)$ по величине модуля производной первого порядка, найдём $|\gamma(\lambda)| \leq \mathcal{L}_3^{-2}$, а затем, подставляя эту оценку в (11), получим

$$|S_3(\alpha; N, H)| \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^3}. \quad (12)$$

Случай 2. Воспользовавшись теоремой работы [8], при $x = N_3 + H_3$, $y = 2H_3$, $A = 2$, $b = b_1 = 704$, $c_3 = \frac{10476 - 4816\sqrt{3}}{39}$, оценивая сумму $S_3(\alpha; N_3 + H_3, 2H_3)$, получим

$$|S_3(\alpha; N_3 + H_3, 2H_3)| \ll \frac{H_3}{(\ln(N_3 + H_3))^2} \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^2}.$$

Далее, применяя формулу (3), получим оценку (12) и, подставляя ее в (10), получим

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H^2}{\sqrt[3]{N^2} \mathcal{L}_3^4}.$$

Оценка интеграла $I(\mathfrak{m})$. Аналогично, как при оценке $I(M_2)$, имеем

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\mathcal{L}_3} \cdot \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |S_3(\alpha; N, H)|. \quad (13)$$

Если $\alpha \in \mathfrak{m}$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad \mathcal{L}_3^{704} \leq q \leq \tau.$$

Для оценки суммы $\mathfrak{S}_3(\alpha; N, H)$, сначала применяя формулу (3) при $\nu = 3$, а затем, оценивая сумму $S_3(\alpha; N_3 + H_3, 2H_3)$, воспользовавшись основной теоремой работ [10,11] при $x = N_3 + H_3$, $y = 2H_3$, $B = 2$, получим

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S}_3(\alpha; N, H)| &\ll \frac{|S_3(\alpha; N_3 + H_3, 2H_3)|}{\mathcal{L}_3} + \frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}} \ll \\ &\ll \mathcal{L}_3^{-1} \frac{H_3}{(\ln(N_3 + H_3))^2} + \frac{H^2}{N^{\frac{5}{3}}} \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_3^3}. \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в (13), получим

$$I(m) \ll \frac{H^2}{\sqrt[3]{N^2} \mathcal{L}_3^4}.$$

Теорема доказана.

Поступило 25.02.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square. – Proc. London math.Soc., 1937, v. 11, pp. 501-516.
2. Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2003, т. 74, вып. 4, с 564-572.
3. Рахмонов З.Х., Фозилова Д.М. Об одной тернарной задаче с почти равными слагаемыми. – ДАН РТ, 2012, т. 55, №6, с 433-440.
4. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2014, т. 95, вып. 3, с 445-456.
5. Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвертой степени с почти равными слагаемыми. – ДАН РТ, 2015, т. 58, №9, с. 769-771.
6. Liu J., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I. – Mh Math, 1999, v. 127, pp. 27-41.
7. Рахмонов З.Х., Собиров А.А., Фозилова П.М. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг. – ДАН РТ, 2020, т. 63, №5-6, с. 279-288.
8. Рахмонов З.Х., Собиров А.А., Фозилова П.М. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в большие дуги. – ДАН РТ, 2020, т. 63, №7-8, с. 405-415.

9. Собиров А.А. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами в окрестности центра больших дуг. – ДАН РТ, 2021, т. 64, 11-12, с. 611-620.
10. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм в малых дугах. – ДАН РТ, 2016, т. 59, №7-8, с. 273-277.
11. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Короткие кубические суммы с простыми числами. – Труды МИАН, 2016, т. 296, с. 220-242.

А.А.Собиров

МУАММОИ ЭСТЕРМАН БАРОИ КУБҲОИ АДАДИ СОДДА БО ҶАМЪШАВАНДАҲОИ ҚАРИБ БАРОБАР

Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Барои миқдори тасвирҳои адади кифоя калони натуралии N дар намуди суммаи ду ададҳои соддаи p_1, p_2 ва куби адади соддаи p_3 , бо шартҳои $|p_i - N/3| \leq H$, $|p_3^3 - N/3| \leq H$, $H \geq N^{1 - \frac{1}{15+3\eta}} \mathcal{L}^c$,
 $\eta = \frac{2}{7+4\sqrt{3}}$, $c = \frac{10476 - 4816\sqrt{3}}{39}$ формулаи асимптотӣ исбот карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: ҷамъшавандаҳои қариб баробар, суммаи тригонометрии қўтоҳ бо ададҳои содда, муодилаи диофантӣ.

A.A.Sobirov

ESTERMAN PROBLEM FOR CUBES OF PRIMES WITH ALMOST EQUAL SUMMANDS

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan

We prove an asymptotic formula for the number of representations of a sufficiently large natural number N as the sum of two primes p_1 and p_2 and the cube of a prime p_3 satisfying the conditions $|p_i - N/3| \leq H$, $|p_3^3 - N/3| \leq H$, $H \geq N^{1 - \frac{1}{15+3\eta}} \mathcal{L}^c$, $\eta = \frac{2}{7+4\sqrt{3}}$, $c = \frac{10476 - 4816\sqrt{3}}{39}$.

Key words: almost equal summands, short exponential sum with primes, Diophantine equation.

УДК 511.325

П.М.Фозилова

ТЕРНАРНАЯ ПРОБЛЕМА ЭСТЕРМАНА ДЛЯ КУБОВ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ С ПОЧТИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 08.10.2021 г.)

Пусть N – достаточно большое натуральное число, μ_1, μ_2, μ_3 – положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \quad \eta = \frac{2}{7 + 4\sqrt{3}}, \quad c = \frac{10476 - 4816\sqrt{3}}{39}.$$

При $H = N^{1 - \frac{1}{15+3\eta}} \mathcal{L}^c$ получена асимптотическая формула для количества решений диофантова уравнения с почти пропорциональными слагаемыми вида

$$p_1 + p_2 + p_3^3 = N, \quad |p_i - \mu_i N| \leq H, \quad i=1,2, \quad |p_3^3 - \mu_3 N| \leq H$$

относительно простых чисел p_1, p_2 и p_3 .

Ключевые слова: почти пропорциональные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма с простыми числами, диофантово уравнение, малая окрестность центра больших дуг.

Английский математик Мейтленд Райт [1,2] сформулировал и решил ряд аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми, к которым относится задача о представлении числа n в виде

$$n = m_1^2 + \dots + m_s^2, \quad |m_i^2 - \lambda_i n| = O(n^{1-\beta}), \quad 0 < \beta < \alpha,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – фиксированные положительные числа, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = 1$ и

$$\alpha = \frac{s-4}{4(s-3)}, \quad s=5, 6, 7; \quad \alpha = \frac{s-2}{2(2s-1)}, \quad s \geq 8,$$

а также задача о представимости нечетного числа n в виде

$$n = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2, \quad m_i = \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} (1 + o(1)), \quad i=1, 2, 3, 4.$$

Аддитивные задачи с почти равными слагаемыми являются частным случаем аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми. Если в аддитивной задаче с почти

пропорциональными слагаемыми $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ равными между собой, то есть $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = \frac{1}{s}$, то она превращается в задачу с почти равными слагаемыми.

Т.Эстерман [3] доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^2 = N, \quad (1)$$

где p_1, p_2 – простые числа, m – натуральное число. В работе [4] эта задача исследована с более жесткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, и выведена асимптотическая формула для числа решений (1) с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i=1,2; \quad \left| m^2 - \frac{N}{3} \right| \leq H; \quad H \geq N^{\frac{3}{4}} \mathcal{L}^3.$$

Далее в работах [5,6] асимптотическая формула выведена для более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, то есть когда в уравнении (1) квадрат натурального m заменяется на его куб при $H \geq N^{\frac{5}{6}} \mathcal{L}^{10}$. А в работе [7] асимптотическая формула выведена для еще более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, то есть когда в уравнении (1) квадрат натурального m заменяется на его четвертую степень при $H \geq N^{\frac{11}{12}} \mathcal{L}^{\frac{40}{3}}$. В работе [8] доказана асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3^2 = N, \quad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i=1,2; \quad \left| p_3^2 - \frac{N}{3} \right| \leq H; \quad H \geq N^{\frac{27}{32} + \varepsilon},$$

где p_1, p_2 и p_3 – простые числа.

Настоящая работа посвящена асимптотической формуле для последовательности с почти пропорциональными слагаемыми, когда в уравнении (1) квадрат натурального m заменяется на куб простого числа. Доказательство основной теоремы проводится круговым методом с использованием результатов работ [9-14], в которых для короткой кубической тригонометрической суммы с простыми числами вида

$$S_3(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^3)$$

получена асимптотическая формула в малой окрестности центра больших дуг, а также нетривиальная оценка в больших дугах за исключением малой окрестности их центров, и малых дугах.

Теорема. Пусть N – достаточно большое натуральное число, μ_1, μ_2, μ_3 – положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \quad \eta = \frac{2}{7 + 4\sqrt{3}}, \quad c = \frac{10476 - 4816\sqrt{3}}{39},$$

$I(N, H)$ – число решений относительно простых чисел p_1, p_2 и p_3 диофантова уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3^3 = N, \quad |p_i - \mu_i N| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad |p_3^3 - \mu_3 N| \leq H.$$

Тогда при $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta}} \mathcal{L}^c$, справедлива асимптотическая формула

$$I(N, H) = \frac{\mathfrak{S}(N)H^2}{9(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^3} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^4}\right), \quad \mathfrak{S}(N) = \prod_p \left(1 + \frac{\Phi(p, N)}{(p-1)^3}\right),$$

где $\Phi(p, N) = 1 - p$ если $(p, N) = p$, и $\Phi(p, N) = 1 - p + p\rho(N, p)$ если $(p, N) = 1$, $\rho(N, p)$ – число решений сравнения $k^3 \equiv N \pmod{p}$.

Доказательство теоремы. Не ограничивая общности, будем считать, что $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta}} \mathcal{L}^c$, а также пусть $\mathfrak{x} = \tau^{-1}$, где

$$\tau = \left(\frac{2H}{(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}\right)^5 \left((\mu_3 N)^{\frac{1}{3}} + \frac{2H}{(3\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}}\right)^{-2} \mathcal{L}^{-736}.$$

Имеем

$$\mathcal{J}(N, H) = \int_{-\mathfrak{x}}^{1-\mathfrak{x}} \mathbb{S}_1(\alpha; \mu_1 N, H) \mathbb{S}_1(\alpha; \mu_2 N, H) \mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H) e(-\alpha N) d\alpha,$$

$$\mathbb{S}_v(\alpha; \mu N, H) = \sum_{|p^v - \mu N| \leq H} e(\alpha p^v).$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональным числами, каждое α из промежутка $[-\mathfrak{x}, 1 - \mathfrak{x}]$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}. \quad (2)$$

В этом представлении $0 \leq a \leq q - 1$, причем $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через \mathfrak{M} обозначим те α , для которых $q \leq \mathcal{L}^{704}$ в представлении (2), через \mathfrak{m} – обозначим оставшиеся α . Множество \mathfrak{M} состоит из непересекающихся отрезков. Разобьем множество \mathfrak{M} на множества \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 :

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{ \alpha : \alpha \in \mathfrak{M}, \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{\mathcal{L}^3}{H} \right\},$$

$$\mathfrak{M}_2 = \left\{ \alpha : \alpha \in \mathfrak{M}, \frac{\mathcal{L}^3}{H} < \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q\tau} \right\}.$$

Обозначим через $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам \mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_2 и \mathfrak{m} . Будем иметь

$$I(N, H) = I(\mathfrak{M}_1) + I(\mathfrak{M}_2) + I(\mathfrak{m}).$$

В последней формуле первый член, то есть $I(\mathfrak{M}_1)$, доставляет главный член асимптотической формулы для $I(N, H)$, а $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

Вычисление интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$. По определению интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$ имеем:

$$I(\mathfrak{M}_1) = \int_{\mathfrak{M}_1} \mathbb{F}(\alpha) e(-\alpha N) d\alpha = \sum_{q \leq \mathcal{L}^{736}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} I(a, q), \tag{3}$$

$$I(a, q) = e\left(-\frac{aN}{q}\right) \int_{|\lambda| \leq \mathcal{L}^{3H^{-1}}} \mathbb{F}\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) e(-\lambda N) d\lambda, \tag{4}$$

$$\mathbb{F}(\alpha) = \mathbb{F}(\alpha; N, H) = \mathbb{S}_1(\alpha; \mu_1 N, H) \mathbb{S}_1(\alpha; \mu_2 N, H) \mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H).$$

К суммам $\mathbb{S}_i(\alpha; \mu_i N, H)$, $i = 1, 2$, применяя основной результат работы [11], полагая,

$$x = \mu_i N + H, \quad y = 2H, \quad A = 1476, \quad b = 736,$$

также, имея в виду, что $1.5A + 0.25b + 18 = 2416$ и

$$\ln(\mu_i N) = \ln(\mu_3 N) + \ln \mu_i - \ln \mu_3 = 3\mathcal{L} + \ln \mu_i - \ln \mu_3, \tag{5}$$

получим

$$\mathbb{S}_1(\alpha; \mu_i N, H) = \frac{1}{\ln(\mu_i N)} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda} e(\lambda\mu_i N) + \mathbb{R}_1, \quad \mathbb{R}_1 \ll \frac{H}{\mathcal{L}^{1477}}.$$

Воспользовавшись этой формулой, а также соотношением (5), и имея виду, что

$$\left| \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda} e(\lambda\mu_i N) \right| \leq \frac{H}{\varphi(q)}, \quad |\mathbb{S}_1(\alpha; \mu_i N, H)| \leq \frac{H}{\mathcal{L}},$$

найдем

$$\mathbb{S}_1(\alpha; \mu_1 N, H) \mathbb{S}_1(\alpha; \mu_2 N, H) - \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \cdot \frac{\sin^2 2\pi\lambda H e(\lambda(\mu_1 + \mu_2)N)}{\pi^2 \lambda^2 \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N)} \ll \frac{H \mathbb{R}_1}{\mathcal{L}}. \tag{6}$$

Почленно умножая полученное неравенство на неравенство (6) и имея в виду, что

$$\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H) \ll HN^{-\frac{2}{3}} \mathcal{L}^{-1}, \text{ находим}$$

$$\mathbb{F}(\alpha) - \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \cdot \frac{\sin^2 2\pi\lambda H e(\lambda(\mu_1 + \mu_2)N)}{\pi^2 \lambda^2 \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N)} \mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H) \ll \frac{H^2 \mathbb{R}_1}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^2}. \quad (7)$$

К сумме $\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)$, применяя теорему о поведении коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [11], получим

$$\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H) = \frac{2S'_3(a, q)H}{3\mu_3^{\frac{2}{3}} \varphi(q) N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^{-0.5}} \int_{-0.5}^{0.5} e \left(\lambda \left((\mu_3 N)^{\frac{1}{3}} + \frac{2Ht}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}} \right)^3 \right) dt + \mathbb{R}_2. \quad (8)$$

Для краткости последний интеграл по t обозначим через $\gamma(\lambda)$. Далее подставляя правую часть формулы (8) в (7), получим

$$\mathbb{F}(\alpha) = \frac{2H\mu^2(q)S'_3(a, q)\sin^2 2\pi\lambda H e(\lambda(\mu_1 + \mu_2)N)\gamma(\lambda)}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}} \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N) \mathcal{L} \varphi^3(q) (\pi\lambda)^2} + \mathbb{R}_3, \quad \mathbb{R}_3 \ll \frac{H^3}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^{1479}}.$$

Подставляя значение функции $\mathbb{F}(\alpha)$, то есть правую часть последней формулы в (4), найдем

$$I(a, q) = \frac{2H \cdot \mu^2(q) S'_3(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right)}{3(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}} \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N) \mathcal{L} \varphi^3(q)} J(H) + \mathbb{R}_4, \quad \mathbb{R}_4 \ll \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^{1476}}, \quad (9)$$

$$J(H) = \int_{|\lambda| \leq \mathcal{L}^3 H^{-1}} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2} \gamma(\lambda) e(\lambda(\mu_1 + \mu_2 - 1)N) d\lambda.$$

Имея в виду, что $\mu_1 + \mu_2 - 1 = -\mu_3$, подставляя значение интеграла $\gamma(\lambda)$ из формулы (8) в правую часть последней формулы, делая в интеграле подстановку $u = 2\pi\lambda H$ и воспользовавшись соотношением

$$e\left(\frac{ut}{\pi} \left(\frac{2Ht}{3\mu_3 N} + \frac{4H^2 t^2}{27\mu_3^2 N^2} \right)\right) = 1 + O\left(\frac{H \mathcal{L}^3}{N}\right),$$

а затем заменяя интеграл близким к нему несобственным интегралом, найдем

$$J(H) = \frac{3H}{2} + O\left(\frac{H}{\mathcal{L}^9}\right).$$

Подставляя значение интеграла $J(H)$ в формулу (9), найдем

$$I(a, q) = \frac{H^2 \cdot \mu^2(q) S'_3(a, q)}{(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}} \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N) \mathcal{L} \varphi^3(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right) + \mathbb{R}_5,$$

$$\mathbb{R}_5 \ll \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^8} \left(\frac{\mu^2(q) |S'_3(a, q)|}{\varphi^3(q)} + \frac{1}{\mathcal{L}^{1468}} \right).$$

Подставляя полученное значение интеграла $I(a, q)$ в (3), получим

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{H^2}{(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}} \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N) \mathcal{L}^{\frac{2}{3}} \sum_{q \leq \mathcal{L}^{736}} \varphi^3(q)} \sum_{q \leq \mathcal{L}^{736}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)} \Phi(q, N) + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^4}\right), \quad (10)$$

$$\Phi(q, N) = \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^q S'(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right).$$

Сумму по q в (10) заменим близким к ней бесконечным рядом, не зависящим от степени \mathcal{L} , то есть

$$\sum_{q \leq \mathcal{L}^{736}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)} \Phi(q, N) = \mathfrak{S}(N) - R(N),$$

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)} \Phi(q, N), \quad R(N) = \sum_{q > \mathcal{L}^{736}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)} \Phi(q, N).$$

Пользуясь тем, что $\mathfrak{S}(N)$ – абсолютно сходится, $\Phi(q, N)$ – мультипликативная функция, q – бесквадратное число, имеем

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)} \Phi(q, N) = \prod_p \left(1 + \frac{\Phi(p, N)}{(p-1)^3} \right),$$

$$\Phi(p, N) = \begin{cases} 1 - p + p\rho(N, p), & \text{если } (N, p) = 1; \\ 1 - p, & \text{если } (N, p) = p, \end{cases}$$

где $\rho(N, p)$ – число решений сравнения $x^3 \equiv N \pmod{p}$.

Далее, имея в виду, что $\Phi(q, N)$ – мультипликативная функция и q – бесквадратное число,

$S'(a, p) = S(a, p) - 1$ и $|S(a, p)| \ll p^{1/2}$, получим, что $|\Phi(q, N)| \ll q^{\frac{3}{2}}$. Следовательно,

$$|R(N)| \leq \sum_{q > \mathcal{L}^{736}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)} |\Phi(q, N)| \leq \sum_{q > \mathcal{L}^{736}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^3(q)} q^{\frac{3}{2}} \ll \sum_{q > \mathcal{L}^{736}} \frac{(\ln \ln q)^3}{q^{\frac{3}{2}}} \ll \mathcal{L}^{-10}.$$

Подставляя правую часть этого равенства в (10), и воспользовались соотношением

$$\frac{1}{\ln(\mu_i N)} = \frac{1}{3\mathcal{L}} + \frac{\ln \mu_3 - \ln \mu_1}{3\mathcal{L}(3\mathcal{L} + \ln \mu_i - \ln \mu_3)} = \frac{1}{3\mathcal{L}} + O\left(\frac{1}{\mathcal{L}^2}\right),$$

являющимся следствием формулы (5), получим

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{\mathfrak{S}(N)H^2}{9(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^3} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^4}\right).$$

Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$. Переходя к оценкам, а затем воспользовавшись неравенством Коши для интегралов, находим

$$\begin{aligned} I(\mathfrak{M}_2) &\ll \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)| \int_0^1 |\mathbb{S}_1(\alpha; \mu_1 N, H)| |\mathbb{S}_1(\alpha; \mu_2 N, H)| d\alpha \leq \\ &\leq \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)| \left(\int_0^1 |\mathbb{S}_1(\alpha; \mu_1 N, H)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |\mathbb{S}_1(\alpha; \mu_2 N, H)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)| \left(\pi(\mu_1 N + H) - \pi(\mu_1 N - H) \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\pi(\mu_2 N + H) - \pi(\mu_2 N - H) \right)^{\frac{1}{2}} \ll \frac{H}{\mathcal{L}} \cdot \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)|. \end{aligned} \tag{11}$$

Оценим теперь сумму $\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)$. Если $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad \frac{\mathcal{L}^2}{H} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq \mathcal{L}^{736}.$$

Рассмотрим случаи $\frac{\mathcal{L}^3}{H} < |\lambda| \leq \frac{1}{18\pi(N_1 + H_1)(2H_1)^2}$ и $\frac{1}{18\pi(N_1 + H_1)(2H_1)^2} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$.

Случай 1. Как в случае $I(\mathfrak{M}_1)$, к сумме $\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)$, применяя теорему о поведении коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг [11], получим

$$\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H) = \frac{2S'_3(a, q)H}{3\varphi(q)(\mu_3 N^{\frac{2}{3}})\mathcal{L}} \gamma(\lambda) + O\left(\frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^3}\right).$$

Переходя к оценкам и пользуясь оценкой $|S'_3(a, q)| \leq \varphi(q)$, имеем

$$|\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)| \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}} |\gamma(\lambda)| + \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^3}. \tag{12}$$

Оценивая интеграл $\gamma(\lambda)$ по величине модуля производной первого порядка, найдем $|\gamma(\lambda)| \leq \mathcal{L}_3^{-2}$, а затем подставляя эту оценку в (12), получим

$$|\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)| \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^3}.$$

Случай 2. Для оценки суммы $\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)$ воспользуемся теоремой работы [10] при $x = N_1 + H_1$, $y = 2H_1$, $A = 3$, $b = b_1 = 736$, $c = \frac{9050 - 5032\sqrt{3}}{39}$. Имеем

$$\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H) \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^4}.$$

Подставляя полученную оценку для $|\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)|$, $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, в (11), получим

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H}{\mathcal{L}} \cdot \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)| \ll \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^5}.$$

Оценка интеграла $I(\mathfrak{m})$. Поступая аналогично, как при оценке $I(\mathfrak{M}_2)$, находим

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\mathcal{L}} \cdot \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)|. \tag{13}$$

Оценим теперь сумму $\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)$, если $\alpha \in \mathfrak{m}$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad \mathcal{L}^{736} \leq q \leq \tau.$$

Воспользовавшись основной теоремой работы [12] при $x = N_1 + H_1$, $y = 2H_1$, $B = 3$, получим

$$|\mathbb{S}_3(\alpha; N, H)| \ll \frac{H}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^4}.$$

Подставляя полученную оценку для $|\mathbb{S}_3(\alpha; \mu_3 N, H)|$, $\alpha \in \mathfrak{m}$, в (13), имеем

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\mathcal{L}} \cdot \max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |\mathbb{S}_3(\alpha; N, H)| \ll \frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^5}.$$

Теорема доказана.

Поступило 08.10.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wright E.M. The representation of a number as a sum of five or more squares. – The Quarterly Journal of Mathematics, 1933, v. 4, Is. 1, pp. 37-51.

2. Wright E.M. The representation of a number as a sum of four 'almost proportional' squares. – The Quarterly Journal of Mathematics, 1936, v. 7, Is. 1, pp. 230-240.
3. Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square. – Proc. London math.Soc., 1937, v. 11, pp. 501-516.
4. Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2003, т. 74, вып. 4, с. 564-572.
5. Рахмонов З.Х., Фозилова Д.М. Об одной тернарной задаче с почти равными слагаемыми. – ДАН РТ, 2012, т. 55, №6, с.433-440.
6. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2014, т. 95, вып. 3, с. 445-456.
7. Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвертой степени с почти равными слагаемыми. – ДАН РТ, 2015, т. 58, №9, с. 769-771.
8. Liu J., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I. – Mh Math, 1999, v. 127, pp. 27-41.
9. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм в малых дугах. – ДАН РТ, 2016, т. 59, №7-8, с. 273-277.
10. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Короткие кубические суммы с простыми числами. – Труды МИАН, 2016, т. 296, с. 220-242.
11. Рахмонов З.Х., Собиров А.А., Фозилова П.М. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг. – ДАН РТ, 2020, т. 63, №5-6, с. 279-288.
12. Рахмонов З.Х., Собиров А.А., Фозилова П.М. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в большие дуги. – ДАН РТ, 2020, т. 63, №7-8, с. 405-415.
13. Собиров А.А. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами в окрестности центра больших дуг. – ДАН РТ, 2021, т. 64, №11-12, с. 611-620.
14. Фозилова П.М. Среднее значение коротких кубических тригонометрических сумм Г.Вейля с простыми числами. – ДАН РТ, 2021, т. 64, №11-12, с. 605-610.

П.М.Фозилова

МУАММОИ ТЕРНАРНИИ ЭСТЕРМАН БАРОИ КУБҲОИ АДАДИ СОДДА БО ЧАМЪШАВАНДАҲОИ ҚАРИБ МУТАНОСИБ

Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Бигзор N – адади кифоя калони натуралӣ, μ_1, μ_2, μ_3 – ададҳои мусбати фиксиронидашуда ба шартҳои

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \quad \eta = \frac{2}{7 + 4\sqrt{3}}, \quad c = \frac{10476 - 4816\sqrt{3}}{39},$$

қаноат мекунанд. Ҳангоми $H = N^{1 - \frac{1}{15 + 3\eta}} \mathcal{L}^c$ барои миқдори ҳалҳои муодилаи диофантии чамъшавандаҳояш қариб мутаносиби

$$p_1 + p_2 + p_3^3 = N, \quad |p_i - \mu_i N| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad |p_3^3 - \mu_3 N| \leq H.$$

нисбат ба ададҳои соддаи p_1 , p_2 ва p_3 формулаи асимптотӣ исбот карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: сумаи тригонометрии қўтоҳ бо ададҳои содда, муодилаи диофантӣ, интегралҳои тригонометрӣ.

P.A.Fozilova

ESTERMAN'S TERNARY PROBLEM FOR CUBES OF PRIMES WITH ALMOST PROPORTIONAL SUMMANDS

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan

Let N – a sufficiently large natural number, μ_1, μ_2, μ_3 – positive fixed numbers satisfying the condition

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \quad \eta = \frac{2}{7 + 4\sqrt{3}}, \quad c = \frac{10476 - 4816\sqrt{3}}{39}.$$

For $H = N^{1 - \frac{1}{15 + 3\eta}} \mathcal{L}^c$ an asymptotic formula is obtained for the number of solutions of a Diophantine equation with almost proportional terms of the form

$$p_1 + p_2 + p_3^3 = N, \quad |p_i - \mu_i N| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad |p_3^3 - \mu_3 N| \leq H$$

with respect to the primes p_1 , p_2 and p_3 .

Key words: almost proportional summands, short exponential sum with primes, diophantine equation, small neighborhood of the center of majors arcs.

УДК 517.5

А.Мухлис

**О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ И ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ
ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В L_2**

Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 08.10.2021 г.)

Получены точные неравенства типа Джексона-Стечкина для осредненных с весом модулей непрерывности m -го ($m \in \mathbb{N}$) порядка. Для классов функций, определяемых при помощи мажорант и указанных осредненных величин, вычислены точные значения различных n -поперечников при выполнении определенных ограничений на мажоранты.

Ключевые слова: наилучшие приближения, модуль непрерывности, верхние грани, неравенства типа Джексона-Стечкина, n -поперечники.

1. Пусть $L_2 := L_2([0, 2\pi])$ – пространство измеримых по Лебегу вещественных 2π -периодических функций f , имеющих конечную норму

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Символом \mathcal{T}_{n-1} обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка, не превосходящего $n-1$. Известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

величина ее наилучшего полиномиального приближения элементами подпространства \mathcal{T}_{n-1} равна

$$E_{n-1}(f) := \inf \{ \|f - T_{n-1}\|; T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{n-1} \} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2},$$

где

$$S_{n-1}(f) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

есть частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f , а $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $a_k(f)$ и $b_k(f)$ соответственно косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f . Под модулем непрерывности m -го ($m \in \mathbb{N}$) порядка функции $f \in L_2$ понимаем величину

$$\omega_m(f, t) := \sup \{ \|\Delta_h^m(f)\| : |h| \leq t \},$$

где

$$\Delta_h^m(f, x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + kh)$$

есть конечная разность m -го порядка функции $f \in L_2$ в точке x с шагом h .

$L_2^r (r \in \mathbb{Z}_+; L_2^0 \equiv L_2)$ – множество 2π -периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2 .

2. При решении экстремальных задач теории аппроксимации в пространстве L_2 , связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \chi n^{-r} \omega_m(f^{(r)}, \frac{t}{n})_2,$$

где $t > 0$, $f \in L_2^{(r)}$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f^{(0)} \equiv f$, многими математиками в разное время рассматривались различные экстремальные характеристики, способствующие уточнению оценок сверху констант χ (см., например, [1-4], [6, 7], [9, 10, 13-15], [17-20]). В связи с этим Черных в работе [1] отмечал, что поскольку функционал

$$\left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_1^2(f, t) \sin ntdt \right)^{1/2}$$

меньше джексоновского функционала $\omega_1(f, \pi/n) (f \neq const)$, то, по-видимому, он более естественен для характеристики величин наилучших полиномиальных приближений $E_{n-1}(f)$ периодических функций f в L_2 .

В подтверждение сказанного, в работе [2] была рассмотрена экстремальная характеристика, содержащая специальным образом осредненный с весом модуль непрерывности высшего порядка, которая использовалась для получения точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина. Продолжая указанную тематику, в статье [19] была рассмотрена следующая экстремальная характеристика

$$\chi_{m,n,r}(h) := \sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{2(r+m)} h^{2m} E_{n-1}^2(f)}{\left\{ \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h) + n^2 \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \right\}^m}, \quad (1)$$

где $0 < h \leq \pi/n$; $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. С ее помощью удалось обобщать один результат Тайкова, полученный им в теореме 1 работы [14] для $m = 1$, на случай модуля непрерывности произвольного порядка $m \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(nh)^{2m} n^{2r}} \leq \sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}^2(f)}{\omega_m^2(f^{(r)}, h)} \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{1}{(nh)^2} + \frac{1}{2} \right)^m.$$

В связи со сказанным определенным интерес, с нашей точки зрения, представляет изучение следующей экстремальной характеристики

$$\tilde{\chi}_{m,n,r}(h) := \sup \left\{ \frac{n^r h^m E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \right)^{m/2}} : f \in L_2^r, f \neq \text{const} \right\}, \quad (2)$$

содержащей осредненный модуль непрерывности m -го порядка $\omega_m^{2/m}(f, t)$ с весовой функцией $h-t$, где $0 \leq t \leq h$. Еще одним аргументом в пользу такого выбора, по нашему мнению, является также работа [3], в которой сделано существенное продвижение в решении задачи о точном неравенстве Джексона-Стечкина в пространстве $C := C([0, 2\pi])$. При этом важную роль сыграл указанный вес, с помощью которого осреднялась сама конечная разность, а не ее норма.

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для любого числа h , удовлетворяющего условию $0 < h \leq \pi/n$, справедливо равенство

$$\tilde{\chi}_{m,n,r}(h) = \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \quad (3)$$

Доказательство. Для получения оценки сверху величины $\chi_{m,n,r}(h)$ воспользуемся рядом рассуждений, имевших место при доказательстве теоремы 1 из работы [18]. Для произвольной функции $f \in L_2^r$ получаем

$$\| \Delta_t^m(f^{(r)}) \|^2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) (1 - \cos kt)^m.$$

Применив, с учетом данного соотношения, к правой части равенства

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cos kt = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^{2-2/m}(f) \rho_k^{2/m}(f) (1 - \cos kt)$$

неравенства Гельдера и используя определение модуля непрерывности m -го порядка, имеем

$$\begin{aligned} & E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cos kt \leq \\ & \leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f) \left\{ \frac{1}{n^{2r}} \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) (1 - \cos kt)^m \right\}^{1/m} \leq \\ & \leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f) \frac{\|\Delta_t^m(f^{(r)})\|^{2/m}}{2n^{2r/m}} \leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f) \frac{\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)}{2n^{2r/m}}. \end{aligned}$$

Умножив левую и правую части этого неравенства на функцию $h-t$ и затем проинтегрировав полученный результат по переменной t в пределах от 0 до h , запишем

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2} E_{n-1}^2(f) & \leq \frac{h^2}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \left(\frac{2 \sin(kh/2)}{kh} \right)^2 + \\ & + E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f) \frac{1}{2n^{2r/m}} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt. \end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку

$$\sup \left\{ \frac{\sin x}{x} : \frac{nh}{2} \leq x < \infty \right\} = \frac{2 \sin(nh/2)}{nh}$$

(см., например, [8], с. 129, 132), то из неравенства (4) получаем

$$\begin{aligned} h^2 E_{n-1}^2(f) & \leq h^2 \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 E_{n-1}^2(f) + \\ & + E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f) \frac{1}{n^{2r/m}} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) & \leq h^{-m} \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \right\}^{-m/2} \times \\ & \times \frac{1}{n^r} \left(\int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \right)^{m/2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Из соотношений (2) и (5) следует оценка сверху экстремальной характеристики $\tilde{\chi}_{m,n,r}(h)$, а именно

$$\tilde{\chi}_{m,n,r}(h) \leq \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \quad (6)$$

Для получения оценки снизу величины $\tilde{\chi}_{m,n,r}(h)$ рассмотрим функцию $f_0(x) := \cos nx$, принадлежащую L_2^r . Поскольку

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \omega_m(f_0^{(r)}, t) = 2^m n^r \sin^m(nt/2), \quad \text{где } 0 \leq t \leq \pi/n,$$

и, как нетрудно убедиться путем непосредственных подсчетов

$$\left(\int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t) dt \right)^{m/2} = n^r h^m \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \right\}^{m/2},$$

то с учетом формулы (2) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{m,n,r}(h) &\geq \frac{n^r h^m E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t) dt \right)^{m/2}} = \\ &= \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Сопоставляя оценку сверху (6) и оценку снизу (7), получаем требуемое равенство (3). Теорема 1 доказана.

3. Пусть \mathbb{B} – единичный шар в L_2 ; \mathfrak{M} – выпуклое центрально-симметричное множество из L_2 ; $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n ; $\mathcal{L} : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор; $\mathcal{L}^\perp : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) = \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon \mathbb{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \|f - g\| : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\| : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}; L_2) = \inf \left\{ \sup \{ \|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}; L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\| : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным n -поперечниками. Указанные n -поперечники связаны в L_2 следующими соотношения [16]:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}; L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \Pi(\mathfrak{M}; L_2). \quad (8)$$

Также полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Напомним, что величину $E_{n-1}(\mathfrak{M})$ определяют как наилучшее приближение множества \mathfrak{M} подпространством T_{n-1} .

Непрерывную возрастающую на полуинтервале $[0, \infty)$ функцию Φ такую, что $\Phi(0) = 0$, будем называть мажорантой.

Для произвольных чисел $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0, 2\pi]$ введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(h) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \leq 1 \right\},$$

$$\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \leq \Phi(h) \right\}.$$

Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, \pi/n]$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2) &= \lambda_{2n}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2) = E_{n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h)) = \\ &= n^{-r} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \right\}^{-m/2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n -поперечников.

Доказательство. Учитывая определение класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, а также соотношение (5) и (8), получаем оценки сверху

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2) &\leq \lambda_{2n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2) \leq d_{2n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2) \leq \\ &\leq E_{n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h)) \leq n^{-r} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для получения оценок снизу n -поперечника класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$ рассмотрим на множестве $\mathcal{T}_{2n+1} \cap L_2$ шар многочленов

$$B_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \leq n^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \right\}^{-m/2} \right\}.$$

Для любого многочлена $T_n \in B_{2n+1}$ из неравенства [15]

$$\omega_m^2(T_n^{(r)}, t) \leq 2^m n^{2r} (1 - \cos nt)_*^m \cdot \|T_n\|^2, \tag{11}$$

где

$$(1 - \cos nt)_*^m := \begin{cases} (1 - \cos nt)^m, & \text{если } 0 \leq t \leq \pi/n; \\ 2^m, & \text{если } t \geq \pi/n, \end{cases}$$

при $0 < h \leq \pi/n$ получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, t) dt \leq \\ & \leq 2n^{2r/m} \cdot h^{-2} \cdot \|T_n\|^{2/m} \int_0^h (h-t)(1 - \cos nt) dt \leq 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Учитывая определение класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$ и неравенство (12), заключаем, что $B_{2n+1} \subset \mathcal{F}_m^{(r)}(h)$. Используя соотношение между n -поперечниками (8) и определение бернштейновского n -поперечника, запишем оценки снизу для всех вышеперечисленных n -поперечников

$$\begin{aligned} \lambda_{2n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2) & \geq \lambda_{2n}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2) \geq b_{2n}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h), L_2) \geq \\ & \geq b_{2n}(B_{2n+1}, L_2) \geq n^{-r} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Сравнивая оценки сверху (10) с оценками снизу (13), получаем требуемое равенства (9), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Отметим, что понятие модуль непрерывности $\omega_1(f, t)$ для функции $f \in C[0, 2\pi]$ впервые дано Лебегом [5]. В терминах характеристики гладкости $\omega(f, t)_c$ в [5] получены оценки коэффициентов Фурье. Этот вопрос в дальнейшем рассматривался многими математиками и привёл к отысканию точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций. Для рассматриваемых в этой статье классов функций найдены решения сформулированной задачи на рассматриваемых классах функций.

Теорема 3. При выполнении условий теоремы 2 при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sup\{|a_n(f)|: f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(h)\} &= \sup\{|b_n(f)|: f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(h)\} = \\ &= n^{-r} \cdot \left\{1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh}\right)^2\right\}^{-m/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Как показано в [11], в силу того, что

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin\left(nt + \frac{\pi}{2}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(t - \frac{\pi}{2n}\right) \sin nt dt = b_n\left(f\left(t - \frac{\pi}{2n}\right)\right) \end{aligned}$$

и сдвиг по аргументу не выводит функцию f из класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, то очевидно, что

$$\sup\{|a_n(f)|: f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(h)\} = \sup\{|b_n(f)|: f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(h)\}. \quad (15)$$

Следовательно, достаточно найти точную верхнюю грань одной из них. Найдём, например, равенство (15) для косинус-коэффициента Фурье $a_n(f)$.

Поскольку

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(t) - S_{n-1}(f, t)) \cos nt dt, \quad (16)$$

где $S_{n-1}(f, t)$ – частная сумма $(n-1)$ -го порядка функции $f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(h)$, то, применяя к равенству справа в (16) неравенство Коши-Буняковского, с учетом последнего равенство из (9) запишем

$$|a_n(f)| \leq \|f - S_{n-1}(f)\| = E_{n-1}(f) \leq E_{n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h)). \quad (17)$$

Переходя к верхней грани в левой части (17), запишем

$$\begin{aligned} \sup\{|a_n(f)|: f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(h)\} &\leq E_{n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(h)) = \\ &= n^{-r} \cdot \left\{1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh}\right)^2\right\}^{-m/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для получения аналогичной оценки снизу введем в рассмотрение функцию

$$f_1(x) := n^{-r} \cdot \left\{1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh}\right)^2\right\}^{-m/2} \cdot \cos nx.$$

Из доказательства второй части теоремы 2 следует, что функция $f_1 \in \mathcal{B}_{2n+1}$. Поэтому функция f_1 является элементом класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(h)$ и имеет место следующее неравенство

$$\begin{aligned} \sup \{ |a_n(f)| : f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(h) \} &\geq |a_n(f_1)| = \\ &= n^{-r} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Требуемое равенство (14) является результатом сопоставления неравенств (18) и (19). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть мажоранта Φ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \geq \frac{1}{\pi^2 - 4} \cdot \left(\frac{\pi}{nh} \right)^2 \cdot \begin{cases} (nh)^2 - 2(1 - \cos nh), & \text{если } 0 \leq h \leq \pi/n, \\ \pi^2 - 4 + (nh - \pi)^2, & \text{если } h \geq \pi/n. \end{cases} \tag{20}$$

Тогда для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi), L_2) &= \lambda_{2n}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi), L_2) = E_{n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi)) = \\ &= \frac{1}{n^r} \cdot \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{m/2}, \end{aligned} \tag{21}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ или $\Pi_n(\cdot)$. Множество мажорант, удовлетворяющего ограничению (20), не пусто.

Доказательство. Полагая в неравенстве (5) имеющей вид

$$E_{n-1}(f) \leq \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \right\}^{-m/2} \cdot \frac{1}{n^r} \left(\frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \right)^{m/2},$$

$h = \pi/n$ и используя определение класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi)$, для произвольной функции $f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi)$ будем иметь

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{n^r} \cdot \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{m/2} \tag{22}$$

и благодаря неравенству (8) и (22) запишем оценки сверху для всех перечисленных выше n -поперечников

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi), L_2) &\leq \lambda_{2n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi), L_2) \leq d_{2n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi), L_2) \leq \\ &\leq E_{n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi)) \leq \frac{1}{n^r} \cdot \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{m/2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Для получения оценок снизу указанных n -поперечников рассмотрим в множестве $\mathcal{S}_{2n+1} \cap L_2$ шар полиномов

$$\bar{B}_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathcal{F}_{2n+1} : \|T_n\| \leq \frac{1}{n^r} \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right)^{m/2} \right\}$$

и покажем, что $\bar{B}_{2n+1} \subset \mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi)$. Рассуждения проведём в два этапа: $0 \leq h \leq \pi/n$ и $h > \pi/n$.

Пусть сначала $0 \leq h \leq \pi/n$. Учитывая определение класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi)$, первое из ограничений (20) и неравенство (11), для любого полинома $T_n \in \bar{B}_{2n+1}$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, t) dt \leq \\ & \leq 2n^{2r/m} \|T_n\|^{2/m} \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t)(1 - \cos nt) dt \leq \\ & \leq \frac{1}{(nh)^2} \cdot \{(nh)^2 - 2(1 - \cos nh)\} \cdot \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) = \\ & = \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot (nh)^{-2} \{(nh)^2 - 2(1 - \cos nh)\} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \Phi(h). \end{aligned} \tag{24}$$

Пусть теперь $h \geq \pi/n$. Используя второе из ограничений (20) и соотношение (11), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, t) dt \leq \\ & \leq 2n^{2r/m} \|T_n\|^{2/m} \cdot \frac{1}{h^2} \left\{ \int_0^{\pi/n} \left(\frac{\pi}{n} - t\right) (1 - \cos nt) dt + 2 \int_{\pi/n}^h (h-t) dt \right\} = \\ & = \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot (nh)^{-2} \{ \pi^2 - 4 + (nh - \pi)^2 \} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \Phi(h). \end{aligned} \tag{25}$$

Из неравенств (24) и (25) следует, что $\bar{B}_{2n+1} \subset \mathcal{F}_m^{(r)}(h)$.

Используя соотношения (8) между n -поперечниками и определение бернштейновского n -поперечника, запишем оценки снизу для рассматриваемых n -поперечников

$$\begin{aligned} \lambda_{2n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi), L_2) & \geq \lambda_{2n}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi), L_2) \geq b_{2n}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi), L_2) \geq \\ & \geq b_{2n}(\bar{B}_{2n+1}; L_2) = \frac{1}{n^r} \cdot \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{m/2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Сопоставляя оценки сверху (23) и снизу (26), получаем равенства (21).

Покажем, что множество мажорант Φ , удовлетворяющих условию (20), не пусто. Для этого рассмотрим функцию $\Phi_0(h) := h^\alpha$, где $\alpha = \frac{8}{\pi^2 - 4}$ и убедимся в том, что для неё соотношение (20) имеет место. Конкретизируя с этой целью функцию Φ , в (20) получаем неравенства

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^\alpha \geq \frac{1}{\pi^2 - 4} \cdot \left(\frac{\pi}{nh}\right)^2 \cdot \begin{cases} (nh)^2 - 2(1 - \cos nh), & \text{если } 0 \leq h \leq \pi/n, \\ \pi^2 - 4 + (nh - \pi)^2, & \text{если } h \geq \pi/n, \end{cases}$$

которые ещё надо доказать. Полагая $nh = \mu\pi$, перепишем полученные неравенства в эквивалентном виде

$$\mu^{\alpha+2} \geq \frac{1}{\pi^2 - 4} \cdot \begin{cases} (\mu\pi)^2 - 2(1 - \cos \mu\pi), & \text{если } 0 \leq \mu \leq 1, \\ \pi^2 - 4 + (\mu - 1)^2 \pi^2, & \text{если } \mu \geq 1 \end{cases}$$

Последнее неравенство со значением $\alpha + 2 = \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4}$ доказано в работе [12], а потому в нашем случае имеет место для $\alpha = \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} - 2 = \frac{8}{\pi^2 - 4}$, чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Следующее утверждение является следствием теоремы 3.

Теорема 5. Пусть выполнены все условия теоремы 3. Тогда для любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \sup \{ |a_n(f)| : f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi) \} &= \sup \{ |b_n(f)| : f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi) \} = \\ &= \frac{1}{n^r} \cdot \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{m/2}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 5 не приводится, поскольку идея её доказательства в общих чертах совпадает с ходом доказательства теоремы 3.

Поступило 08.10.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 . – Матем. заметки, 1967, т.2, №5, с.513–522.
2. Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона. – Матем. заметки, 1999, т.65, №6, с.816-820.
3. Foucart S., Kryakin Yu., Shadrin A. On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric. – Constr. Approx., 2009, v.29, pp.157–179.
4. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространстве L_p . – ТулГУ, Тула, 1995.

5. Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschits. – Bul. S. V. F., 1910, v.38, pp.184-210.
6. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 . – Матем. заметки, 1978, т.24, №6, с.785-792.
7. Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 . – Матем. заметки, 1988, т.43, №6, с.757-769.
8. Рыбасенко В.Д. Рыбасенко И.Д. Элементарные функции. – М.: Наука, 1987.
9. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$. – Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
10. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Неравенства между наилучшими приближениями и усреднениями модулей непрерывности в пространстве L_2 . – ДАН России, 2010, т.435, №2, с.178-181.
11. Шабозов М.Ш. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 . – Матем. заметки, 2021, т.110, в.3, с.450-458.
12. Шабозов М.Ш., С.Б.Вакарчук. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 . – Analysis Mathematica, 2012, v.38, pp.147-159.
13. Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков. – Укр. матем. журнал, 1991, т.43, №1, с.125-129.
14. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 . – Матем. заметки, 1976, т.20, №3, с.433-438.
15. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 . – Матем. заметки, 1979, т.25, №2, с.217-223.
16. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976.
17. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 . – Матем. заметки, 2005, т.75, №5, с.792-796.
18. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 . – Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.
19. Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в $L_2[0,2\pi]$ и поперечники некоторых классов функций. – Укр. матем. журнал, 2004, т.56, №11, с.1458-1466.
20. Юдин В.А. Диофантовы приближения в экстремальных задачах. – ДАН СССР, 1980, т.251, №1, с.54-57.

А.Мухлис

**ОИДИ НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ФУНКСИЯҲОИ ДАВРИИ
ДИФФЕРЕНСИРОНИДАШАВАНДА ВА ҚИМАТИ АНИҚИ БАЪЗЕ СИНФИ
ФУНКСИЯҲО ДАР L_2**

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айни

Дар мақола нобаробарии аниқи намуди Чексон-Стечкин барои модули бефосилагии тартиби m -уми ($m \in \mathbb{N}$) бо вазн миёнакардашуда ба даст оварда шудаан. Барои синфи функцияҳое, ки бо

ёри мажорант ва бузургии нишондодашуда муайян шудаанд, кимати аниқи n -қутрҳои гуногун бо маҳдудияти муайян нисбати мажоранта, ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин, модули бифосилагӣ, сарҳади саҳеҳи болоӣ, нобаробарии намуди Чексон-Стечкин, n -қутрҳо.

A.Mukhlis

**THE BEST APPROXIMATION OF PERIODIC DIFFERENTIATED FUNCTIONS
AND SHARP VALUES OF WIDTHS OF SOME CLASSES OF THE FUNCTION
IN L_2**

Tajik State Pedagogical University named after S.Aini

The sharp inequalities of Jackson-Stechkin type for the averaged with the weight of moduli of continuity of m -th order ($m \in \mathbb{N}$) were obtained. For the classes of functions determined by majorant and averaged magnitudes, the sharp values of n -widths satisfying stated constrains on majorant, were calculated.

Key words: the best approximation, modulus of continuity, upper bound, Jackson-Stechkin type inequality, n -widths.

УДК 517.5

К.К.Палавонов

НАИЛУЧШЕЕ СОВМЕСТНОЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В L_2

Таджикский государственный университет коммерции

(Представлено академиком НАН Республики Таджикистан М.Ш.Шабозовым 15.04.2021 г.)

Найдены точные верхние грани наилучшего среднеквадратического приближения некоторых периодических классов функций, задаваемых модулем непрерывности m -го порядка.

Ключевые слова: *наилучшие приближения, модуль непрерывности, экстремальная характеристика, верхние грани.*

1. Пусть \mathbb{N} – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; \mathbb{R}_+ – множество положительных чисел вещественной оси; $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых и суммируемых с квадратом по Лебегу 2π – периодических функций, у которых норма

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Множество всех тригонометрических полиномов

$$T_{n-1}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

порядка $n-1$ обозначим \mathcal{T}_{2n-1} . Хорошо известно, что если

$$S_{n-1}(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

– частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx), \quad (1)$$

то величина наилучшего приближения элементами подпространства \mathcal{T}_{2n-1} в пространстве L_2 равна

$$E_{n-1}(f) := \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1} \} =$$

Адрес для корреспонденции: Палавонов Курбоназар Курбонбекович. 734061, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Дехоти, 1/2, Таджикский государственный университет коммерции.
E-mail: kurbonazar-1987@mail.ru

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2},$$

где $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$, $k \in \mathbb{N}$.

Через $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$; $L_2^{(0)} = L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)}(x) \in L_2$.

Модуль непрерывности m -го порядка произвольной 2π -периодической суммируемой с квадратом функции $f \in L_2$ определяем равенством

$$\omega_m(f, t) = \sup \left\{ \|\Delta_h^m f(\cdot)\|; |h| \leq t \right\},$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + (m-k)h)$$

– разность m -го порядка функции f в точке x с шагом h .

При решении экстремальных задач теории полиномиальной аппроксимации в пространстве L_2 , связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \chi \cdot n^{-r} \omega_m(f^{(r)}, t/n), t > 0, f \in L_2^{(r)},$$

где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, рассматривались различные экстремальные характеристики, способствовавшие уточнению оценок сверху констант χ (см., например, [1-15]).

В [1] доказано, что для любых $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $0 < nh \leq \pi/2$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{2^{m+1/p} n^{r-1/p} E_{n-1}^2(f)_2}{\left(\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^p(f^{(r)}, u) du \right) dt \right)^{1/p}} = \\ = \left(\int_0^{nh/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\sin u)^{mp} du \right) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \tag{2}$$

Так как для функции $f \in L_2^{(r)}$ все её промежуточные производные $f^{(s)} \in L_2^{(r)}$ ($s = \overline{1, r-1}$), то представляет интерес изучение поведения величины $E_{n-1}(f^{(s)})$ на самом классе $L_2^{(r)}$ или на некотором её подклассе $\mathfrak{N} \subset L_2^{(r)}$.

Дифференцируя ряд Фурье (1) функции $f \in L_2^{(r)}$ s раз, где $s = \overline{1, r-1}$, $r \geq 2$, получаем

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^s \left(a_k(f) \cos \left(kx + \frac{s\pi}{2} \right) + b_k(f) \sin \left(kx + \frac{s\pi}{2} \right) \right).$$

Легко подсчитать, что

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f^{(s)})_2 &:= \inf \left\{ \| f^{(s)} - T_{n-1}^{(s)} \|_2 : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1} \right\} = \\ &= \| f^{(s)} - S_{n-1}(f^{(s)}) \|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Имеет место следующая теорема, являющаяся обобщением равенства (2)

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $1/r < p \leq 2$, $h \in (0, \pi/n]$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{2^{m+1/p} n^{r-s-1/p} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^p(f^{(r)}, u) du \right) dt \right)^{1/p}} = \\ = \left(\int_0^{nh/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\sin u)^{mp} du \right) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство. Всюду далее, для $f \in L_2^{(r)}$ предполагается, что $f \neq \text{const}$. В левой части равенства (3) введем обозначение $f^{(s)} \equiv g$, откуда $f^{(r)} \equiv g^{(r-s)}$. Последнее равенство означает, что если $f \in L_2^{(r)}$, то $g \in L_2^{(r-s)}$, а потому, учитывая (2), запишем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m+1/p} n^{r-s-1/p} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^p(f^{(r)}, u) du \right) dt \right)^{1/p}} = \\ = \sup_{g \in L_2^{(r-s)}} \frac{2^{m+1/p} n^{r-s-1/p} E_{n-1}(g)}{\left(\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^p(g^{(r-s)}, u) du \right) dt \right)^{1/p}} = \\ = \left(\int_0^{nh/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\sin u)^{mp} du \right) dt \right)^{-1/p}, \end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Следствие 1. В условиях теоремы 1, при $h = \pi/n$ и $p = 1/m$, $m, n \in \mathbb{N}$, имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{2^{m+1/p} n^{r-s-1/p} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^{\pi/n} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^{1/m}(f^{(r)}, u) du \right) dt \right)^m} = \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{1/m},$$

где $Si(t) = \int_0^t u^{-1} \sin u du$ – интегральный синус.

В экстремальных задачах теории аппроксимации с заданным классом $\mathfrak{N} \subset L_2^{(r)}$ часто связывают следующую его аппроксимационную характеристику, то есть требуется при $s = 1, 2, \dots, r-1, r \geq 2, r \in \mathbb{N}$ найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{N})_2 = \sup\{E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in \mathfrak{N}\}. \tag{4}$$

Для $r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}, 0 < p \leq 2, 0 < h \leq 2\pi$ введём в рассмотрение следующий класс функций:

$$W_{m,p}^{(r)} = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\int_0^h \frac{1}{t} \left(\int_0^t \omega_m^p(f^{(r)}, u)_2 du \right) dt \right)^{1/p} \leq 1 \right\}. \tag{5}$$

Для этого класса функций справедливо следующее утверждение

Теорема 2. Пусть $m, n, r \in \mathbb{Z}_+, s \in \mathbb{Z}_+, r > s, 1/r < p \leq 2$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{m,p}^{(r)})_2 = \frac{1}{2^{m+1/p} n^{r-s-1/p}} \cdot \left(\int_0^{nh/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\sin u)^{mp} du \right) dt \right)^{-\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

В частности, при $nh = \pi, p = 1/m, m \in \mathbb{N}$ из (6) следует, что

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{m,p}^{(r)}(\Phi))_2 = \frac{1}{2^{m+1/p} n^{r-s-1/p}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{1/m}.$$

Доказательство Из равенства (3) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{1}{2^{m+1/p} n^{r-s-1/p}} \cdot \frac{\left(\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^p(f^{(r)}, u) du \right) dt \right)^{1/p}}{\left(\int_0^{nh/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\sin u)^{mp} du \right) dt \right)^{1/p}}. \tag{7}$$

Если теперь предположить, что функция $f \in L_2^{(r)} \cap W_{m,p}^{(r)}$, то из неравенства (7) получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq 2^{-(m+1/p)} n^{-(r-s-1/p)} \cdot \left(\int_0^{nh/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\sin u)^{mp} du \right) dt \right)^{-1/p}.$$

Переходя к верхней грани по всей функции $f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$, будем иметь оценку сверху величины (4):

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{m,p}^{(r)})_2 \leq 2^{-(m+1/p)} n^{-(r-s-1/p)} \cdot \left(\int_0^{nh/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\sin u)^{mp} du \right) dt \right)^{-1/p}. \quad (8)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу введем в рассмотрение функцию

$$f_0(x) = \frac{1}{2^{m+1/p} n^{r-1/p}} \cdot \left(\int_0^{nh/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\sin u)^{mp} du \right) dt \right)^{-1/p} \cdot \cos nx,$$

для которой непосредственным вычислением получаем

$$f_0^{(s)}(x) = \frac{1}{2^{m+1/p} n^{r-s-1/p}} \cdot \left(\int_0^{nh/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\sin u)^{mp} du \right) dt \right)^{-1/p} \cdot \cos \left(nx + \frac{s\pi}{2} \right),$$

$$E_{n-1}(f_0^{(s)})_2 = \frac{1}{2^{m+1/p} n^{r-s-1/p}} \cdot \left(\int_0^{nh/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\sin u)^{mp} du \right) dt \right)^{-1/p},$$

а также простые вычисления показывают, что

$$\left(\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^p(f^{(r)}, u)_2 du \right) dt \right)^{1/p} \leq 1.$$

Последнее равенство означает, что $f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$, а потому имеем оценку снизу

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{m,p}^{(r)})_2 &\geq E_{n-1}(f_0^{(s)})_2 = \\ &= 2^{-(m+1/p)} n^{-(r-s-1/p)} \cdot \left(\int_0^{nh/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\sin u)^{mp} du \right) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (9)$$

Требуемое равенство (6) получаем из сопоставления неравенств (8) и (9), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Пусть

$$E_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{N})_{L_2} := \sup \left\{ \inf \left\{ \|f^{(s)} - T_{n-1}^{(s)}\|_2 : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1} \right\} : f \in \mathfrak{N} \right\} \quad (10)$$

– наилучшее совместное приближение класса \mathfrak{N} подпространством \mathcal{T}_{2n-1} тригонометрических полиномов $T_{n-1}(x)$ порядка $n-1$ размерности $2n-1$;

$$\gamma_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{N})_{L_2} := \sup \left\{ \|f^{(s)}\|_2 : f \in \mathfrak{N}_n^\perp \right\}, \quad s = 0, 1, \dots, r-1 \tag{11}$$

где \mathfrak{N}_n^\perp – множество функций $f \in \mathfrak{N}$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(t) \geq \begin{cases} \sin kt \\ \cos kt \end{cases} dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{N})_2 = \inf \{ \sup \{ \|f^{(s)} - Af^{(s)}\|_2 : f \in \mathfrak{N} \} : A \in \mathcal{L}_n \}, \tag{12}$$

где \mathcal{L}_n – совокупность всех линейных операторов, переводящих функции $f^{(s)} \in \mathfrak{N}$ в тригонометрические полиномы $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$.

Из приведённых выше определений для аппроксимационных характеристик (10)-(12) сразу следуют соотношения

$$E_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{N})_{L_2} \leq \gamma_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{N})_{L_2} \leq \mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{N})_{L_2}.$$

Наша цель состоит в отыскании точных значений величины (10)-(12) для классов функций (5), естественно возникающие из утверждение теоремы 1. Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть $r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s, 0 < p \leq 2$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} E_{n-1}^{(s)}(W_{m,p}^{(r)})_2 &= \gamma_{n-1}^{(s)}(W_{m,p}^{(r)})_2 = \mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{m,p}^{(r)})_2 = \\ &= \frac{1}{2^{m+1/p} n^{r-s-1/p}} \cdot \left(\int_0^{nh/2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\sin u)^{mp} du \right) dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Поступило 15.04.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 . – Труды Матем. ин-та АН СССР, 1967, т.88, с. 71-74.
2. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 . – Матем. заметки, 1967, т.2, №5, с.513-522.
3. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 . – Матем. заметки, 1976, т.20, №3, с.433-438.
4. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 . – Матем. заметки, 1979. т.25, №2, с.217-223.
5. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 . – Матем. заметки, 1978, т.24, №6, с.785-592.
6. Юдин В.А. Диофантовы приближения в экстремальных задачах. – ДАН СССР, 1980, т.251, №1, с.54-57.
7. Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 . – Матем. заметки, 1986, т.39, №5, с.651-664.

8. Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 . – Матем. заметки, 1988, т.43, №6, с.757-769.
9. Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин Н.И. Неравенства Джексона-Стечкина в L_2 . с тригонометрическим модулем непрерывности. – Матем. заметки, 1999, т.65, №6, с.928-932.
10. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p . – Тула: ТулГУ, 1995.
11. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников. – Матем. заметки, 2005, т.78, №5, с.792-796.
12. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 . – Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.
13. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$. – Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
14. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и усреднениями модулей непрерывности в пространстве L_2 . – ДАН России, 2010, т.435, №2, с.178-181.
15. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 . – ДАН. РТ, 2011, т.54, №2, с.3-7.
16. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Палавонов К.К. Среднеквадратическое приближение периодических функций и значения поперечников классов функций из L_2 . – ДАН. РТ, 2018, т.61, №1, с.12-18.

Қ.Қ.Палавонов

НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ЯҚЧОЯШУДАИ ПОЛИНОМИАЛИИ ФУНКСИЯҲОИ ДАВРӢ ВА ҲАЛЛИ БАЪЗЕ МАСЪАЛАҲОИ ЭКСТРЕМАЛӢ ДАР L_2

Донишгоҳи давлатии тижорати Тоҷикистон

Қимати аниқи сарҳади саҳеҳи болоии наздиккунии беҳтарини миёна-кватратии баъзе синфи функцияҳои даврӣ, ки бо модули бефосилагии тартиби m -ум додасудаанд, ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин, модули бефосилагӣ, характеристикаи экстремалӣ, сарҳади болоӣ.

Q.Q.Palavonov

THE BEST MUTUAL POLYNOMIAL APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS AND SOLUTION OF SOME EXTREME PROBLEMS IN L_2

Tajik State University of Commerce

The exact upper bounds are found for the best mean-square approximation of some periodic classes functions defined by the modulus of continuity of the m -th order.

Key words: the best approximation, modulus of continuity, extreme characteristic, upper bounds values.

УДК 517.968.2

Г.Джангибеков, С.Ф.Савлатов*

О ПОЛИКЕРН-ФУНКЦИИ ПОЛУПЛОСКОСТИ $Imz > 0$ И ЕЁ СВЯЗИ С ДВУМЕРНЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Институт математики им. А.Джуроева Национальной академии наук Таджикистана,

**Таджикский национальный университет*

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.И.Илоловым 16.11.2021 г.)

В работе найдено явное выражение поликern-функции Бергмана пространства A_2^m для полуплоскости $Imz > 0$. Изучена алгебра интегральных операторов с поликern-ядрами Бергмана. Установлены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости указанных операторов в лебеговых пространствах и вычислен индекс операторов из данной алгебры.

Ключевые слова: поликern-функция, поликern-оператор Бергмана, сингулярный интеграл, символ оператора, индекс оператора, нетеровость оператора.

1. Впервые С.Бергманом [1, 2] и С.Бохнером [3] была найдена kern-функция пространства $A_2(\mathbf{D})$ функций, аналитических в круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и принадлежащих $L^2(\mathbf{D})$ в виде

$$B(z, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\pi(1 - z\bar{\zeta})^2}. \quad (1)$$

Как отмечено в монографии Р.Куранта ([4] стр. 253), интегральный оператор с этим ядром

$$(Bf)(z) = \iint_D B(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta \quad (2)$$

для функции $f(z) \in A_2(\mathbf{D})$ обладает воспроизводящим свойством

$$\iint_D B(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta = f(z). \quad (3)$$

В дальнейшем А.Д.Кошелевым [5] и Г.Джангибековым [6] (см. также [7]) независимо была найдена поликern-функция

$$B_{2m}(z, \bar{\zeta}) = \frac{e^{-2mi\alpha}}{\pi |1 - z\bar{\zeta}|^2} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} k C_m^k C_{m+k-1}^k \left| \frac{\zeta - z}{1 - z\bar{\zeta}} \right|^{2(k-1)}, \quad \alpha = \arg(1 - z\bar{\zeta}) \quad (4)$$

Адрес для корреспонденции: Джангибеков Гулходжа. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет, e-mail: gulkhoja@list.ru

более широкого пространства функций $A_2^m(\mathbf{D})$: полианалитических (произвольного фиксированного порядка m) в круге \mathbf{D} и принадлежащих $L_2(\mathbf{D})$ функций $f(z)$

$$f(z) = h_0(z) + \bar{z}h_1(z) + \dots + \bar{z}^{m-1}h_{m-1}(z), \tag{5}$$

где $h_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$) – аналитические в \mathbf{D} функции. При этом при любых $f(z) \in A_2^m(\mathbf{D})$ для ядра $B_m(z, \bar{\zeta})$ справедлива формула

$$(f(z), \overline{B_{2m}(z, \bar{\zeta})}) = \iint_{\mathbf{D}} B_{2m}(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_{\zeta} = f(z).$$

2. Поскольку класс полианалитических функций не является инвариантным относительно конформных отображений, то представляет интерес получение в явном виде поликэрн-функции типа Бергмана для некруговых областей. В предлагаемой статье вводится и изучается поликэрн-функция Бергмана и интегральный оператор с поликэрн ядром Бергмана для полуплоскости $E_2^+ = \{z: Imz > 0\}$.

Рассмотрим теперь в верхней полуплоскости E_2^+ следующий двумерный сингулярный интегральный оператор с характеристикой $e^{-in\theta}$ для любого числа $n = 2m$:

$$(S_n^{E_2^+} f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint_{E_2^+} \frac{e^{-in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_{\zeta}, \quad \theta = \arg(\zeta - z), z \in \overline{E_2^+}, \tag{6}$$

$z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta$ – комплексные точки плоскости. Прежде всего заметим, что ограниченность сингулярного оператора S_n в весовом пространстве $L_{\beta-2/p}^p(D)$:

$$L_{\beta-2/p}^p(D) = \left\{ f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), \|f\|_{L_{\beta-2/p}^p} = \|F\|_{L^p} \right\},$$

($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$) следует из работы Е.Стейна [8].

Вычислим композицию $S_{2m}^{E_2^+} S_{-2m}^{E_2^+}$:

$$(S_{2m}^{E_2^+} S_{-2m}^{E_2^+} f)(z) = \frac{m}{\pi i^{2m}} \iint_{E_2^+} \frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z|^2} ds_{\zeta} \frac{m}{\pi i^{2m}} \iint_{E_2^+} \frac{e^{2im\theta_1}}{|\sigma - \zeta|^2} f(\sigma) ds_{\sigma}. \tag{7}$$

Воспользуясь формулой дифференцирования интегралов со слабой особенностью (см.[9] стр. 65):

$$\frac{\partial}{\partial z} \iint_{E_2^+} \frac{u(z, \theta)}{|\zeta - z|} f(\zeta) ds_{\zeta} = \iint_{E_2^+} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u(z, \theta)}{|\zeta - z|} \right) f(\zeta) ds_{\zeta} - f(z) \int_0^{2\pi} u(z, \theta) e^{-i\theta} d\theta \tag{8}$$

и имея ввиду, что

$$\frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z|^2} = \frac{\left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z}\right)^m}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})} = \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{m-1}}{(\zeta - z)^{m+1}},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-i(2m-1)\theta}}{|\zeta - z|} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{m-1}}{(\zeta - z)^m} \right) = m \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{m-1}}{(\zeta - z)^{m+1}} = m \frac{e^{-2im\theta}}{(|\zeta - z|^2)},$$

в силу этого внешний интеграл в (6) запишем в виде

$$(S_{2m} S_{-2m} f)(z) = \frac{m}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{E_2^+} \frac{e^{-i(2m-1)\theta}}{|\zeta - z|^2} ds_\zeta \iint_{E_2^+} \frac{e^{2im\theta_1}}{|\sigma - \zeta|^2} f(\sigma) ds_\sigma.$$

Поменяв порядок интегрирования, получим

$$(S_{2m}^{E_2^+} S_{-2m}^{E_2^+} f)(z) = \frac{m}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{E_2^+} f(\sigma) ds_\sigma \iint_{E_2^+} \frac{e^{-i(2m-1)\theta} e^{2im\theta_1}}{|\zeta - z| |\sigma - \zeta|^2} ds_\zeta =$$

$$= \frac{m}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{E_2^+} f(\sigma) ds_\sigma \left(\iint_{E_2^+} \frac{e^{-i(2m-1)\theta} e^{2im\theta_1}}{|\zeta - z| |\sigma - \zeta|^2} ds_\zeta + \iint_{E_2^-} \frac{e^{-i(2m-1)\theta} e^{2im\theta_1}}{|\zeta - z| |\sigma - \zeta|^2} ds_\zeta \right) -$$

$$- \frac{m}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{E_2^+} f(\sigma) ds_\sigma \iint_{E_2^-} \frac{e^{-i(2m-1)\theta} e^{2im\theta_1}}{|\zeta - z| |\sigma - \zeta|^2} ds_\zeta.$$

Теперь положим

$$F(z) = \begin{cases} f(\sigma), & \text{если } |\sigma| \in E_2^+, \\ 0, & \text{если } |\sigma| \in E_2^-. \end{cases}$$

Тогда $S_{2m}^{E_2^+} S_{-2m}^{E_2^+}$ представим в виде

$$(S_{2m}^{E_2^+} S_{-2m}^{E_2^+} f)(z) =$$

$$= \frac{m}{\pi^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \iint_{E_2^+} F(\sigma) ds_\sigma \left[\iint_{E_2^+} \frac{e^{-i(2m-1)\theta} e^{2im\theta_1}}{|\zeta - z| |\sigma - \zeta|^2} ds_\zeta + \iint_{E_2^-} \frac{e^{-i(2m-1)\theta} e^{2im\theta_1}}{|\zeta - z| |\sigma - \zeta|^2} ds_\zeta \right] \right) -$$

$$- \frac{m}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{E_2^+} f(\sigma) ds_\sigma \iint_{E_2^-} \frac{e^{-i(2m-1)\theta} e^{2im\theta_1}}{|\zeta - z| |\sigma - \zeta|^2} ds_\zeta.$$

Первое слагаемое представляет собой композицию операторов $S_{2m}^{E_2} S_{-2m}^{E_2}$ по всей комплексной плоскости E_2 и по формуле Михлина [9]

$$(S_{2m}^{E_2} S_{-2m}^{E_2} F)(z) = F(z) = f(z).$$

В дальнейшем мы займемся вычислением второго слагаемого. Поскольку там во внутреннем интеграле $z \in E_2^+, \sigma \in E_2^+$, а интегрирование ведется по нижней полуплоскости $\zeta \in E_2^-$, то особенность во внутреннем интеграле лежит на границе области $Re \zeta$. Поэтому этот интеграл является обычным интегралом Лебега и можно дифференцировать под знаком интеграла, то есть,

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-i(2m-1)\theta} e^{2im\theta_1}}{|\zeta - z| |\zeta - \sigma|^2} = m \frac{e^{-2im\theta} e^{2im\theta_1}}{|\zeta - z|^2 |\zeta - \sigma|^2}.$$

В итоге имеем

$$(S_{2m}^{E_2^+} S_{-2m}^{E_2^+} f)(z)(z) = f(z) - \frac{m^2}{\pi^2} \iint_{E_2^+} f(\sigma) ds_\sigma \iint_{E_2^-} \frac{e^{-2im\theta} e^{2im\theta_1}}{|\zeta - z|^2 |\sigma - \zeta|^2} ds_\zeta. \quad (9)$$

Введем обозначение

$$J_{2m}(z, \sigma) = \frac{1}{\pi} \iint_{E_2^-} \frac{e^{-2im\theta} e^{2im\theta_1}}{|\zeta - z|^2 |\sigma - \zeta|^2} ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \quad \theta_1 = \arg(\sigma - \zeta), \quad z \in E_2^+. \quad (10)$$

Займемся вычислением интеграла J_{2m} . Для этого представим ядро интеграла в виде

$$\frac{e^{-2im\theta} e^{2im\theta_1}}{|\zeta - z|^2 |\sigma - \zeta|^2} = \frac{\left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z}\right)^m \left(\frac{\zeta - \sigma}{\bar{\zeta} - \bar{\sigma}}\right)^m}{|\zeta - z|^2 |\sigma - \zeta|^2} = \frac{\left(\frac{\zeta - \sigma}{\zeta - z}\right)^{m-1} \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{\sigma}}\right)^{m-1}}{(\zeta - z)^2 (\bar{\zeta} - \bar{\sigma})^2}.$$

Функция $\left(\frac{\zeta - \sigma}{\zeta - z}\right)^{m-1}$ – аналитична по ζ в нижней полуплоскости: $|\zeta| \in E_2^-$ и на бесконечности равна 1 (выберем такую ветвь однозначной аналитической функции). Разложим эту функцию в степенной ряд в окрестности точки $\zeta = \infty$:

$$\left(\frac{\zeta - \sigma}{\zeta - z}\right)^{m-1} = \left(1 - \frac{\sigma - z}{\zeta - z}\right)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k (-1)^k \left(\frac{\sigma - z}{\zeta - z}\right)^k.$$

Аналогично имеем

$$\left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{\sigma}}\right)^{m-1} = \left(1 + \frac{\bar{\sigma} - \bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{\sigma}}\right)^{m-1} = \sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^l \left(\frac{\bar{\sigma} - \bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{\sigma}}\right)^l.$$

Тогда получим

$$J_{2m}(z, \sigma) = \frac{1}{\pi} \iint_{E_2^-} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^k C_{m-1}^l (-1)^k \frac{(\sigma - z)^k (\bar{\sigma} - \bar{z})^l}{(\zeta - z)^{k+2} (\bar{\zeta} - \bar{\sigma})^{l+2}} ds_{\zeta}. \tag{11}$$

Или же, поменяв порядок интегрирование и суммирования, имеем

$$J_{2m}(z, \sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^k C_{m-1}^l (-1)^k (\sigma - z)^k (\bar{\sigma} - \bar{z})^l \frac{1}{\pi} \iint_{E_2^-} \frac{ds_{\zeta}}{(\zeta - z)^{k+2} (\bar{\zeta} - \bar{\sigma})^{l+2}}.$$

Далее вынесем производные по переменным z и \bar{z} и воспользуемся результатами композиции операторов $S\bar{S}$

$$J_{2m}(z, \sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^k C_{m-1}^l (-1)^k \frac{(\sigma - z)^k (\bar{\sigma} - \bar{z})^l}{(k+1)!(l+1)!} \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \frac{1}{\pi} \iint_{E_2^-} \frac{ds_{\zeta}}{(\zeta - z)^2 (\bar{\zeta} - \bar{\sigma})^2}. \tag{12}$$

Введем обозначение

$$I_1(z, \bar{\sigma}) = \frac{1}{\pi} \iint_{E_2^-} \frac{ds_{\zeta}}{(\zeta - z)^2 (\bar{\zeta} - \bar{\sigma})^2}.$$

Займемся вычислением интеграла I_1 . Для этого заменим ζ на $\bar{\zeta}$ и, применив к интегралу формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} I_1(z, \bar{\sigma}) &= \frac{1}{\pi} \iint_{E_2^-} \frac{ds_{\zeta}}{(\zeta - z)^2 (\bar{\zeta} - \bar{\sigma})^2} = -\frac{1}{\pi} \iint_{E_2^+} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{1}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{\sigma})^2} \right) ds_{\zeta} = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(\tau - z)(\tau - \bar{\sigma})^2}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $\frac{1}{(\tau - \bar{\sigma})^2}$ – аналитически продолжима по верхней полуплоскости, то по интегральной формуле Коши получим

$$I_1(z, \bar{\sigma}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(\tau - z)(\tau - \bar{\sigma})^2} = \frac{1}{(\bar{\sigma} - z)^2}.$$

Заменив в последней полученной формуле σ на ζ , окончательно получим

$$\begin{aligned}
 J_{2m}(z, \sigma) &= \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^k C_{m-1}^l (-1)^{k-1} \frac{(\sigma-z)^k (\bar{\sigma}-\bar{z})^l}{(k+1)!(l+1)!} \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{\sigma}^l} \left(\frac{1}{(\zeta-z)^2} \right). \tag{13}
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{\zeta}^l} \left(\frac{1}{(\zeta-z)^2} \right) = \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left(\frac{(l+1)!(-1)^l}{(\zeta-z)^{l+2}} \right),$$

то имеем

$$\begin{aligned}
 B_{2m}^{E_2^+}(z, \zeta) &= \\
 &= \frac{m^2}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{k+1} C_{m-1}^k C_{m-1}^l \frac{(\zeta-z)^k (\bar{\zeta}-\bar{z})^l}{(k+1)!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left(\frac{(-1)^l}{(\zeta-z)^{l+2}} \right) = \\
 &= \frac{m^2}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} C_{m-1}^k \frac{(\zeta-z)^k}{(k+1)!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{1}{(\bar{\zeta}-z)^2} \sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^l (-1)^l \left(\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{\zeta-z} \right)^l.
 \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^l (-1)^l \left(\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{\zeta-z} \right)^l = \left(\frac{\bar{z}-z}{\zeta-z} \right)^{m-1},$$

то получим

$$B_{2m}^{E_2^+}(z, \zeta) = \frac{m^2}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} C_{m-1}^k \frac{(\zeta-z)^k (-1)^{m-1}}{(k+1)!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{(z-\bar{z})^{m-1}}{(\bar{\zeta}-z)^{m+1}}.$$

Имеет место тождество

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left(\frac{m}{(k+1)!} \frac{(z-\bar{z})^{m-1}}{(\bar{\zeta}-z)^{m+1}} \right) &= \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left[\frac{1}{(k+1)!} (z-\bar{z})^{m-1} (\bar{\zeta}-z)^{-(m+1)} \right] = \\
 &= \sum_{l=0}^k C_{m+1}^{k+1} C_k^l \frac{(z-\bar{z})^{m-k+l-1}}{(\bar{\zeta}-z)^{m+l+1}}. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Поставив это значение в предыдущее равенство, получим

$$B_{2m}^{E_2^+}(z, \zeta) = \frac{m}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+m} C_{m-1}^k (\zeta-z)^k \sum_{l=0}^k C_{m+1}^{k+1} C_k^l \frac{(z-\bar{z})^{m-k+l-1}}{(\bar{\zeta}-z)^{m+l+1}}. \tag{15}$$

С помощью довольно трудоемких алгебраических преобразований вычислим данные суммы и получим поликern-ядро Бергмана для верхней полуплоскости $E_2^+ = \{\zeta : \text{Im}\zeta > 0\}$ в явном виде

$$\begin{aligned}
 B_{2m}^{E_2^+}(z, \bar{\zeta}) &= -\frac{m}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^{m-k-1} C_{2m-k-1}^m \frac{[(z-\bar{z})(\zeta-\bar{\zeta})]^{m-k-1} (\zeta-\bar{z})^k}{(\bar{\zeta}-z)^{2m-k}} = \\
 &= -\frac{me^{-2im\theta}}{\pi |\bar{\zeta}-z|^2} \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^{m-k-1} C_{2m-1-k}^m \left[\frac{(\zeta-\bar{\zeta})(z-\bar{z})}{|\bar{\zeta}-z|^2} \right]^{m-1-k} = \\
 &= \frac{me^{-2im\theta}}{\pi |\bar{\zeta}-z|^2} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} C_{m-1}^{m-k-1} C_{2m-1-k}^m \left[\frac{4Im\zeta \cdot Imz}{|\bar{\zeta}-z|^2} \right]^{m-1-k}. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Воспользуясь тождеством $(\zeta-\bar{\zeta})(z-\bar{z}) = |\zeta-z|^2 - |\bar{\zeta}-z|^2$, формулу (16) можно преобразовать к виду

$$B_{2m}^{E_2^+}(z, \bar{\zeta}) = \frac{e^{-2im\theta}}{\pi |\bar{\zeta}-z|^2} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-m} k C_m^k C_{m+k-1}^m \left| \frac{\zeta-z}{\bar{\zeta}-z} \right|^{2(k-1)}. \tag{17}$$

Теорема 1. Пусть $E_2^+ = \{\zeta : Im\zeta > 0\}$ – верхняя полуплоскость с границей $-\infty < Re\zeta < +\infty$ и $f(\zeta) \in L^p(E_2^+)$, $p > 1$. Тогда имеет место формула

$$(S_{2m}^{E_2^+} S_{-2m}^{E_2^+} f)(z) = f(z) - \iint_{E_2^+} B_{2m}^{E_2^+}(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta, \quad z \in E_2^+, \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
 B_{2m}^{E_2^+}(z, \bar{\zeta}) &= \\
 &= \frac{e^{-2im\theta}}{\pi |\bar{\zeta}-z|^2} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-m} k C_m^k C_{m+k-1}^m \left| \frac{\zeta-z}{\bar{\zeta}-z} \right|^{2(k-1)}, \quad \theta = \arg(\bar{\zeta}-z), \tag{19}
 \end{aligned}$$

то есть функция (19) является поликэрн-функцией Бергмана пространства $A_2^m(E_2^+)$ для верхней полуплоскости $E_2^+ = \{z : Imz > 0\}$, так что для $\forall f(z) \in A_2^m(E_2^+)$ и $\forall z_0 \in E_2^+$ справедлива формула

$$f(z_0) = \iint_{E_2^+} B_{2m}^{E_2^+}(z_0, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta. \tag{20}$$

Следствие 1. В случае $m = 1$, ядро Бергмана (19) для верхней полуплоскости имеет вид

$$B_2^{E_2^+}(z, \bar{\zeta}) = -\frac{1}{\pi(\bar{\zeta}-z)^2}.$$

Доказательство формулы (20) выводится из равенства

$$(f(z), \overline{B_{2m}(0, \bar{\zeta})}) = \iint_{|\zeta|<1} B_{2m}(0, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta = f(0) \tag{21}$$

для единичного круга $|\zeta| < 1$, где $B_{2m}(z, \zeta)$ определяется по формуле (4). Действительно, в формуле (19) зафиксируем точку $z_0 = x_0 + iy_0$, $Imz_0 = y_0 > 0$ и совершим конформное отображение

$$\omega(\zeta) = \frac{\zeta - z_0}{\zeta - \bar{z}_0}, \quad (22)$$

полуплоскости $Im\zeta > 0$ на круг $|\omega| < 1$, так что точка z_0 переходит в точку $\omega(z_0) = 0$. Из (22) находим

$$\zeta = h(\omega) = \frac{\omega\bar{z}_0 - z_0}{\omega - 1}, \quad h'(\omega) = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(\omega - 1)^2}. \quad (23)$$

Функция $\zeta = h(\omega)$ конформно отображает круг $|\omega| < 1$ на полуплоскость $Im\zeta > 0$ так что $h(0) = z_0$. Далее находим

$$ds_\zeta = |h'(\omega)|^2 ds_\omega = \frac{|z_0 - \bar{z}_0|^2}{|\bar{\omega} - 1|^4} ds_\omega, \quad \bar{\zeta} - z_0 = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{\bar{\omega} - 1},$$

$$\left(\frac{\bar{\zeta} - z_0}{\zeta - \bar{z}_0} \right)^m = (-1)^m \left(\frac{\omega - 1}{\bar{\omega} - 1} \right)^m.$$

Поставив эти значения в интеграл (20), имеем

$$\begin{aligned} (B_{2m}^{E_2^+} f)(z_0) &= \iint_{Im\zeta > 0} B_{2m}^{E_2^+}(z_0, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta = \\ &= \iint_{|\omega| < 1} B_{2m}(0, \overline{h(\omega)}) |h'(\omega)|^2 f(h(\omega)) ds_\omega = \\ &= \frac{(-1)^m}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{(\omega - 1)^{m-1}}{(\bar{\omega} - 1)^{m+1}} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-m} k C_m^k C_{m+k-1}^k |\omega|^{2(k-1)} f(h(\omega)) ds_\omega, \end{aligned} \quad (24)$$

где $f(z)$ – полианалитическая функция в верхней полуплоскости E_2^+ определяется по формуле (5).

Введем обозначение

$$\widetilde{f(\omega)} = (-1)^m \frac{(\omega - 1)^{m-1}}{(\bar{\omega} - 1)^{m+1}} f(h(\omega))$$

и, хотя класс полианалитических функций не является инвариантным относительно конформных отображений, тем не менее по формуле (21) получим

$$\begin{aligned} (B_{2m}^{E_2^+} f)(z_0) &= \frac{1}{\pi} \iint_{|\omega| < 1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k \frac{(C_n^k)^2}{2} |\omega|^{2(k-1)} \widetilde{f(\omega)} ds_\omega = \\ &= \widetilde{f(0)} = f(h(0)) = f(z_0). \end{aligned} \quad (25)$$

Теорема 1 доказана.

3. Интегральные уравнения, содержащие сингулярные операторы с ч характеристикой S_{2m} и поликэрн-операторами B_{2m} в ограниченной области комплексной плоскости, изучены в работах [10-13].

Здесь изучается алгебра \mathfrak{M} , порожденная операторами вида

$$A = a(z)I + b(z)S_{2m}^{E_2^+}K + c(z)B_{2m}^{E_2^+} + T \tag{26}$$

по полуплоскости $E_2^+ = \{Im\zeta > 0\}$, где $a(z), b(z), c(z)$ – комплекснозначные непрерывные в $E_2^+ = \{Im\zeta > 0\} \cup Re z$ функции, T – вполне непрерывный в $L_{\beta-2/p}^p(E_2^+)$ ($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$) оператор, $B_{2m}^{E_2^+}$ – интегральный оператор с поликэрн ядром Бергмана:

$$\left(B_{2m}^{E_2^+} f \right) (z) = \iint_{Im\zeta > 0} B_{2m}^{E_2^+} (z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_{\zeta}, \tag{27}$$

ds_{ζ} – элемент плоской меры Лебега.

В дальнейшем используются следующие утверждения, которые устанавливаются непосредственными вычислениями.

Лемма 1. Для всех функций $f(z) \in L_{\beta-2/p}^p(E_2^+)$ ($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$)

$$S_{2m}^{E_2^+} \overline{B_{2m}^{E_2^+}} f = B_{2m}^{E_2^+} S_{2m} f = 0.$$

Лемма 2. Для всех функций $f(z) \in L_{\beta-2/p}^p(E_2^+)$ ($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$)

$$[B_{2m}^{E_2^+}]^2 f = B_{2m}^{E_2^+} f.$$

Рассмотрим множество \mathfrak{M} всех двумерных сингулярных интегральных операторов (действующих в $E_2^+ = \{\zeta : Im\zeta > 0\}$), имеющих вид (26). Устанавливается, что указанное множество составляет алгебру \mathfrak{M} , то есть если $A_j \in \mathfrak{M}$, где

$$A_j = a_j I + b_j S_{2m}^{E_2^+} K + c_j B_{2m}^{E_2^+} + T_j, \quad j = 1, 2,$$

то $A_1 + A_2 \in \mathfrak{M}$ и $A = A_1 + A_2 \in \mathfrak{M}$, причем коэффициенты оператора A имеют вид

$$a = a_1 a_2 + b_1 \overline{b_2}, \quad b = a_1 b_2 + b_1 \overline{a_2}, \quad c = a_1 c_2 + a_2 c_1 + c_1 c_2 - b_1 \overline{b_2}.$$

Каждому оператору $A_j \in \mathfrak{M}$ сопоставляем в качестве символа матрицу

$$\sigma_A(z, x) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) & 0 \\ -\overline{b(z)} & \overline{a(z)} & 0 \\ 0 & 0 & a(x) + c(x) \end{pmatrix},$$

где $z \in E_2^+$, $x \in Re z$, то есть матрица-функция $\sigma_A(z, x)$ непрерывна на компакте $\{Im z > 0\} \cup Re z$. Нетрудно убедиться, что множество так определенных символов \mathfrak{N} также есть алгебра, то есть

$$\sigma_{A_1+A_2}(z, x) = \sigma_{A_1}(z, x) + \sigma_{A_2}(z, x), \quad \sigma_{A_1 \cdot A_2}(z, x) = \sigma_{A_1}(z, x) \cdot \sigma_{A_2}(z, x).$$

Пусть теперь матрица $\sigma_A(z, x) \in \mathfrak{N}$ невырожденная, то есть $det \sigma_A(z, x) \neq 0$, при всех $z \in E_2^+$, $x \in Re z$. Это равносильно выполнению двух условий

$$\Delta(z) \neq 0, \quad z \in \overline{D}; \quad a(x) + c(x) \neq 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

где $\Delta(z) = |a(z)|^2 + |b(z)|^2$. Тогда существует матрица $[\sigma_A(z, t)]^{-1} \in \mathfrak{N}$ и она является символом оператора $\mathfrak{R} \in \mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{R} = \frac{\overline{a}}{\Delta} I - \frac{b}{\Delta} S_{2m}^{E_2^+} K + c^* B_{2m}^{E_2^+}, \tag{28}$$

где c^* – такая непрерывная в $\overline{E_2^+}$ функция, что на границе Γ совпадает с функцией

$$\frac{1}{a(x) + c(x)} - \frac{\overline{a(x)}}{\Delta(x)}.$$

Имеет место

Теорема 2. Для того чтобы произвольный оператор A вида (26) из алгебры \mathfrak{M} был нётеровым в пространстве $L_{\beta-2/p}^p(E_2^+)$ ($1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$) ($E_2^+ = \{\zeta : Im \zeta > 0\}$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad \forall z \in E_2^+ \quad \text{и}$$

$$a(x) + c(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad \forall x : -\infty < x < \infty.$$

При выполнении этих условий оператор A имеет двусторонний регуляризатор \mathfrak{R} вида (28) и его индекс равен

$$\varkappa = 2m \text{Ind}[a(x) + c(x)]_{-\infty < x < \infty}.$$

4. В этом пункте рассмотрим алгебру \mathfrak{R} , порожденную всеми действующими в пространстве $L_{\beta-2/p}^p(E_2^+)$, $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$ операторами вида \mathfrak{M}

$$\mathfrak{M} = aI + bS_{2m}^{E_2^+} K + cB_{2m}^{E_2^+} + d\overline{B}_{2m}^{E_2^+} + eB_{2m}^{E_2^+} K + q\overline{B}_{2m}^{E_2^+} K + T, \tag{29}$$

где a, b, c, d, e, q – непрерывные в E_2^+ функции, $T \in \mathfrak{J}$, а через \mathfrak{J} обозначен идеал содержащихся в $L_{\beta-2/p}^p(E_2^+)$ вполне непрерывных операторов. При этом, хотя функции, входящие в $L_{\beta-2/p}^p(E_2^+)$, являются комплекснозначными, само пространство будем считать вещественным, то есть рассматривать его как линейное множество над полем вещественных чисел. Тогда операторы из \mathfrak{A} будут обычными линейными ограниченными операторами в $L_{\beta-2/p}^p(E_2^+)$. В силу того, что \mathfrak{A} одновременно содержит операторы $\overline{B_{2m}^{E_2^+}}, \overline{B_{2m}^{E_2^+}}K, B_{2m}^{E_2^+}$ и $S_{2m}^{E_2^+}K$, алгебра \mathfrak{A} не исчерпывается одними только операторами вида \mathfrak{M} . Это связано с тем, что в алгебру \mathfrak{A} входят, напр., операторы $S_{2m}^{E_2^+}B_{2m}^{E_2^+}$ и $\overline{B_{2m}^{E_2^+}}S_{2m}^{E_2^+}$, которые в силу леммы 4 не являются вполне непрерывными в $L_{\beta-2/p}^p(E_2^+)$. Поэтому при описании алгебры \mathfrak{A} возникает необходимость в изучении операторов более сложной природы, а именно, операторов вида

$$A = aI + bS_{2m}^{E_2^+}K + c\overline{B_{2m}^{E_2^+}} + d\overline{B_{2m}^{E_2^+}} + eB_{2m}^{E_2^+}K + q\overline{B_{2m}^{E_2^+}}K + \lambda S_{2m}^{E_2^+}K + \mu\overline{B_{2m}^{E_2^+}}S_{2m}^{E_2^+}K + \nu S_{2m}^{E_2^+}\overline{S_{2m}^{E_2^+}} + \gamma S_{2m}^{E_2^+}B_{2m}^{E_2^+} + \delta\overline{B_{2m}^{E_2^+}}\overline{S_{2m}^{E_2^+}} + T, \tag{30}$$

где все коэффициенты – непрерывные в E_2^+ функции.

Каждому оператору $A \in \mathfrak{A}$ сопоставим в качестве символа матрицу вида

$$\sigma_A(z, t) = \begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix}, \text{ где } \Delta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ \overline{b(z)} & \overline{a(z)} \end{pmatrix}, z \in E_2^+,$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} a(x) + c(x) & e(x) & \delta(x) \\ \overline{q(x)} & \overline{a(x) + d(x)} & \overline{b(x) + \mu(x)} \\ \gamma(x) & a(x) + \lambda(x) & a(x) + \nu(x) \end{pmatrix}, x \in R,$$

то есть матрица-функция $\sigma_A(z, t)$ непрерывна на компакте $E_2^+ \times \Gamma$. Множество определенных таким образом символов обозначим через \mathfrak{N} .

Лемма 3. Символ $\sigma_A(z, x) \in \mathfrak{N}$ оператора $A \in \mathfrak{A}$ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда $A \in \mathfrak{J}$.

Имеет место

Теорема 3. Для того чтобы произвольный оператор A из алгебры \mathfrak{A} был оператором в пространстве $L_{\beta-2/p}^p(E_2^+)$, $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$, необходимо и достаточно, чтобы

$$|a(z)| \neq |b(z)| \text{ при } z \in \overline{E_2^+}, \det D(x) \neq 0 \text{ при } x \in R. \tag{31}$$

При выполнении этих условий индекс оператора \hat{A} равен

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi} [\arg \det D(x)] \Big|_{-\infty < x < +\infty}.$$

Поступило 16.11.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bergman S. Uber die Entwinning der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. – Math. Ann., 1922, v.86, pp.238-271.
2. Bergman S. The Kernel Funktion and Conformal Mapping. – Math. Surveys., 1970, v.5, Am. Math. Soc. N.Y.
3. Bochner S. Thtae relations with sferical harmonics. – Proceed of the Nat. Acad. Sciences of USA, 1951, v.37, 12, pp.804-808.
4. Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. – М.: ИЛ, 1953, 310 с.
5. Кошелев А.Д. О керн-функции гильбертова пространства функций, полианалитических в круге. – ДАН СССР, 1977, т.232, №2, с.277–279.
6. Джангибеков Г. Формула обращения для одного двумерного сингулярного интегрального уравнения. – Доклады АН ТаджССР, 1984, т.27, №5, с.243-248.
7. Джангибеков Г. Некоторые интегральные уравнения с несуммируемыми однородными ядрами. – Дисс. к. физ.-мат. н. – Душанбе, 1981, 109 с.
8. Stein E.M. Not on singular integrals. – Pros. Amer. Math. Soc., 1957, 8, №2, pp.250-254.
9. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физ.-мат.лит., 1962, 254 с.
10. Джангибеков Г. Нетеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов. – Докл. АН ТаджССР, 1987, т.30, №7, с.400-405.
11. Джангибеков Г. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов. – ДАН СССР, 1988, т.300, №2, с.272-276.
12. Джангибеков Г. Нетеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов. – Известия вузов. Математика, 1991, №1, с.19-27.
13. Джангибеков Г., Савлатов Ф.С. О поликern-функциях Бергмана и их связь с сингулярными интегральными операторами по ограниченной области. – Вестник филиала МГУ им. М.В.Ломоносова, 2018, №3, с.32-50.

Г.Чангибеков, С.Ф.Савлатов

**ДАР БОРАИ ПОЛИКЕРН-ФУНКСИЯИ НИМҲАМВОРИИ $Imz > 0$ ВА
АЛОҚАМАНДИИ ОН БО ОПЕРАТОРҲОИ ИНТЕГРАЛИИ СИНГУЛЯРИИ
ДУЧЕНАКА***Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,
Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола поликерна-функсияи Бергмани фазои A_2^m барои нимҳамвории $Imz > 0$ ба таври ошкор ёфта шудааст. Алгебраи операторҳо бо поликерна ядроҳои Бергман омӯхта шуда, шартҳои эффективноки зарурӣ ва кифоягии нетеровӣ будани операторҳои алгебра ҳосил ва индекси операторҳо ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: поликерна-функсия, поликерна-оператори Бергман, интегралҳои сингулярӣ, симболи оператор, индекси оператор, нетерови будани оператор.

G.Jangibekov, S.F.Savlatov

**ON THE POLYKERNEL FUNCTION OF THE HALF-PLANE $Imz > 0$
AND ITS CONNECTION WITH TWO-DIMENSIONAL SINGULAR INTEGRAL
OPERATORS***A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan,
Tajik National University*

An explicit expression is found for the polykernels – Bergman functions of the space A_2^m for the half-plane $Imz > 0$. The algebra of integral operators with polykernels Bergman kernels is studied. Effective necessary and sufficient conditions are established for the Noetherian operators in Lebesgue spaces to be Noetherian, and the index of operators from this algebra is calculated.

Key words: polykern-function, polykern-Bergman operator, singular integral, operator symbol, operator index, operator Noetherian.

УДК 81'322::811.222.8::519.25

С.М.Пиров

АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ БЛАГОЗВУЧИЯ ТАДЖИКСКИХ СЛОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ УНИГРАММ

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 24.12.2021 г.)

Статья посвящена исследованию благозвучия таджикских слов при использовании униграмм, разработан алгоритм распознавания их благозвучности и представлены полученные результаты.

Ключевые слова: слово, алгоритм, распознавание, благозвучие, униграмма.

Создание компьютерного инструментария для автоматического распознавания качества звучания слов предоставит возможность составления эвфонометрического словаря, который может быть полезным дополнением к лингвистическому корпусу естественного языка. Успехи в разработке основ эвфометрии слов неизбежно повлекут за собой ускоренное развитие систем автоматической оценки благозвучия предложений, текстов, произведений и творчества авторов [1].

Из коллекции таджикских текстов извлекаем список некоторых слов. Такой список содержит наиболее употребительные словоформы “грубого”, “нейтрального” и “приятного” звучаний.

Множество таджикских слов G разделим на 3 группы: G_1 – грубозвучные, G_2 – сладкозвучные и G_3 – нейтральные слова. Из каждой группы выбираем по 1000-1500 слов. Группу G_1 разделим каким-либо образом на 3 подгруппы – G_{11} , G_{12} , G_{13} – приблизительно одинаковых размеров (в смысле числа слов). Группу G_2 тоже разделим каким-либо образом на 3 подгруппы – G_{21} , G_{22} , G_{23} – приблизительно одинаковых размеров (то есть, по числу слов). Группы G_{1i} и G_{2j} будем рассматривать как тексты (произведения).

В качестве элементов для описания количественного образа текстов используем единый таджикский алфавит, состоящий из 35 букв (униграмма): а, б, в, ..., э, ю, я.

Для каждого из 6 -и текстов G_{1i} и G_{2j} вводим единый цифровой портрет, задаваемый в табличном виде законами распределения

$$\begin{aligned} \bar{N} &: 1 \ 2 \ \dots \ 35 \\ P &: p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m, \end{aligned} \quad (1)$$

где в первой строке указывается занумерованный в алфавитном порядке список $m = 35$ таджикских букв, а во второй – их частотности для конкретной группы, причём

$$\sum_{k=1}^{35} p_k = 1.$$

Каждому из 6 произведений (подгрупп) ставится соответствующая функция

$$F(s) = \sum_{k=1}^s p_k \quad (s = 1, \dots, m = 35) \tag{2}$$

– дискретный аналог функции распределения. Пусть T_1, T_2 – произвольная пара текстов из $\{G\}$ и

$$G^{(\alpha)}(s) = \sum_{k=1}^s p_k^{(\alpha)} -$$

соответствующие им дискретные функции, $\alpha = 1, 2$ и $s = 1, \dots, 35$. Воспользуемся определениями из статей [2-4].

Определение 1. Расстоянием между текстами T_1 и T_2 назовем положительное число $\rho(T_1, T_2)$, определяемое по формуле

$$\rho(T_1, T_2) = \sqrt{35/2} \max_s \left| \sum_{k=1}^s (p_k^{(1)} - p_k^{(2)}) \right|, \tag{3}$$

то есть расстояние между дискретными случайными величинами (с одинаковым набором \bar{N} возможных значений) вычисляется как максимальное расстояние между их дискретными функциями $F^{(1)}(s)$ и $F^{(2)}(s)$, умноженное на весовой коэффициент $\sqrt{17.5}$.

Гипотеза III “однородности” произведений. Она привлекается для того, чтобы выделить характерную особенность слов, предназначенную для построения математической модели распознавания качества звучания слов. Её мы формулируем в следующем виде.

ГИПОТЕЗА III. Слова, которые звучат сладко, – “однородны”, а которые не звучат сладко (то есть звучат грубо) – “не однородны”.

Говоря об “однородности” благозвучия слов, мы имеем в виду их похожесть, одинаковость, сходность, однотипность, родственность и т.п.

Математическая модель III-гипотезы. Пусть γ – некоторое положительное число.

Определение 2. Тексты T_1 и T_2 называются γ -однородными (звучат сладко), если

$$\rho(T_1, T_2) \leq \gamma, \tag{4}$$

и γ -неоднородными (звучат грубо), если

$$\rho(T_1, T_2) > \gamma. \tag{5}$$

Неравенства (4) и (5) являются математической интерпретацией (моделью) гипотезы III.

Определение 3. γ -классификатор – зависящий от одного вещественного параметра γ , алгоритм принятия решения об отнесении пары текстов T_1 и T_2 к одному или двум разным качествам звучания слов.

Очевидно, что от значения γ зависит однородность или неоднородность любой пары текстов, следовательно, и степень выполнимости гипотезы. Принадлежность двух текстов одной группе (G_1) в рамках математической модели означает справедливость неравенства (4), а двум разным группам (G_1, G_2) – справедливость неравенства (5). Гипотеза \mathbb{H} может нарушаться для каких-то пар текстов одной и той же группы в случае, когда вместо неравенства (4) имеет место неравенство (5), а также в случае, когда какие-то два текста в разных группах удовлетворяют неравенству (4) вместо того, чтобы выполнялось неравенство (5).

Пусть $\tau = \tau(\gamma)$ – суммарное количество нарушений гипотезы \mathbb{H} одновременно в двух случаях: невыполнения неравенства “однородности” в случае двух текстов, принадлежащих одной группе, и невыполнения неравенства “неоднородности” в случае двух текстов, принадлежащих разным группам. Тогда для фиксированного γ показатель выполнения гипотезы будет определяться величиной π , задаваемой формулой

$$\pi = 1 - \tau(\gamma) / L,$$

где L – число взаимных расстояний между всеми парами текстов из коллекции G (в нашем случае $L = G_6^2 = 15$). Из этой формулы следует, что π может принимать значения из отрезка $[0, 1]$, причём $\pi = 0$, если $\tau = L (= 15)$, и $\pi = 1$, если $\tau = 0$. В первом случае гипотезу \mathbb{H} следует признать непригодной, а во втором – полностью согласованной с обучающей выборкой.

В связи с тем, что эффективность γ -классификатора зависит от значения параметра γ , представляет интерес найти такое его значение, при котором π принимает максимальное значение. Именно в этом и заключается суть настройки γ -классификатора на данных обучающей выборки. Если такая настройка будет приемлемой, то можно говорить о решении задачи обучения γ -классификатора и его предрасположенности к распознаванию благозвучия таджикских слов самых разнообразных коллекций.

Итоговые результаты на примере модельной коллекции G приведены далее путём последовательного выполнения следующих операций:

- вычисление цифровых портретов (частотности букв) для всех 6 подгрупп модельной коллекции G ;
- вычисление по формулам (1), (2) и (3) пятнадцати парных расстояний $\rho(T_1, T_2)$ между подгруппами коллекции G (результаты расчетов приведены в следующей таблице):

Таблица 1

Расстояния между текстами коллекции G

Тексты		Группа грубо звучных слов (G_1)			Группа сладкозвучных слов (G_2)		
		G_{11}	G_{12}	G_{13}	G_{21}	G_{22}	G_{23}
Группа грубозвучных слов (G_1)	G_{11}						
	G_{12}	0.0423					
	G_{13}	0.1974	0.1863				
Группа сладкозвучных слов (G_2)	G_{21}	0.4708	0.4580	0.6202			
	G_{22}	0.3399	0.3270	0.4893	0.1521		
	G_{23}	0.4455	0.4327	0.5949	0.1385	0.1074	

- вычисление с помощью алгоритма настройки γ -классификатора [2-4] оптимального интервала значений γ , для которого величина $\tau = \tau(\gamma)$ суммарного числа случаев нарушения гипотезы H достигает минимального значения и, следовательно, величина π показателя выполнения гипотезы H принимает максимальное значение.

На данных табл. 1 получены следующие результаты:

- совокупность всех пар расстояний размещается на отрезке [0.0423, 0.6202], при этом минимальное расстояние реализуется между подгруппами G_{11} и G_{12} в грубозвучных подгруппах, а максимальное – между G_{13} в грубозвучных и G_{21} в сладкозвучных подгруппах;

- оптимальный полуинтервал значений γ оказывается в пределах

$$\gamma^{opt} \in [0.1974; 0.3270];$$

в соответствии с определением 3 это значит, что если расстояние $\rho(T_1, T_2)$ между двумя текстами не превосходит значения γ^{opt} из указанного полуинтервала, то пара текстов принадлежит одной и той же группе, если же превосходит, то они принадлежат разным группам;

- отметим, что для всех (без исключений) произведений коллекции G полностью подтвердилась гипотеза H и её математическая интерпретация в виде определения 3, и потому получено

$$\tau = \tau_{min} = 0,$$

то есть ни одно из неравенств (4) и (5) не было нарушено;

- вследствие чего показатель эффективности предложенной в настоящей работе математической модели распознавания благозвучия слов оказался равным

$$\pi = \pi_{max} = 1.$$

Тестирование. Итак, настройка (обучение) γ -классификатора на данных модельной коллекции текстов G прошла успешно. Для тестирования классификатора выбраны группы G_3 нейтраль-

ных слов, которые не знаем какой группе относятся. Группу G_3 тоже разделим каким-либо образом на 3 подгруппы G_{31}, G_{32}, G_{33} приблизительно одинаковых размеров (в смысле числа слов).

После формирования ЦП произведений и вычисления расстояний по формуле (3), получена следующая таблица расстояний от каждого из текстов до всех 6 произведений исходной коллекции:

Таблица 2

Расстояния между текстами коллекции и тестируемыми группами

Тексты		Группа нейтральных слов (G_3)		
		G_{31}	G_{32}	G_{33}
Группа грубозвучных слов (G_1)	G_{11}	0.1280	<i>0.1155</i>	0.1067
	G_{12}	<i>0.1127</i>	0.1187	<i>0.0939</i>
	G_{13}	0.2832	0.2610	0.2561
Группа сладкозвучных слов (G_2)	G_{21}	0.3525	0.3592	0.3641
	G_{22}	0.2215	0.2283	0.2331
	G_{23}	0.3272	0.3339	0.3388

В табл. 2 жирным и курсивным шрифтом выделены пары ячеек, которые соответствуют минимальным расстояниям от тестируемых объектов до элементов коллекции текстов. Полученные результаты показывают, что ближайшими соседями выбранной тройки подгрупп оказались однородные только с подгруппами грубозвучных слов.

Заключение. γ -классификатор с фиксированным значением $\gamma = \gamma^{omn}$ был протестирован на случайных выборках текстов и подтвердил 100%-ную способность распознавания благозвучия таджикских слов.

Научная работа в данном направлении, а также настоящая статья, были начаты под руководством академика Усманова Зафара Джураевича.

Поступило 28.12.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усманов З.Д., Пиров С.М. К разработке основ эвфонометрии слов. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2015, №3 (160), с. 39-42.
2. Усманов З.Д. Алгоритм настройки кластеризатора дискретных случайных величин. – ДАН РТ, 2017, т.60, № 9, с. 392-397.
3. Усманов З.Д., Косимов А.А. О распознавании авторства таджикского текста. – ДАН РТ, 2016, т. 59, № 3-4, с. 114-119.
4. Гамма-классификатор. Материал из Википедии. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гамма-классификатор_дискретных_случайных_величин – свободной энциклопедии (последнее обращение 10.12.2021).

С.М.Пиров

АЛГОРИТМИ ШИНОХТИ ХУШОҲАНГИИ КАЛИМАҲОИ ТОЧИКӢ ҲАНГОМИ ИСТИФОДАИ УНИГРАММАҲО

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар ин мақола омӯзиши хушоҳангии калимаҳои забони тоҷикӣ ба роҳ монда шуда, алгоритми шинохти хушоҳангии онҳо бо истифодаи униграммаҳо таҳия карда шуда ва натиҷаҳои ҳосилгардидаи он пешниҳод гардидааст.

Калимаҳои калидӣ: *калима, алгоритм, шинохт, хушоҳангӣ, униграмма.*

S.M.Pirov

ABOUT DEVELOPING A BASIS TO METRIZATION OF WORD'S EUPHONY AT USAGE UNIGRAM

Tajik National University

The article is devoted to the study of Tajik words' euphoniousness at usage unigram, an algorithm for recognizing their euphoniousness is developed and the results obtained are presented.

Key words: *word, algorithm, recognition, euphony, unigram.*

УДК 53+54(575.3)

Д.Рашидов, член-корреспондент НАН Таджикистана Т.Х.Салихов, Ш.И.Акназарова,
С.Х.Табаров, А.Мирзо, Д.М.Шарифов, Ф.Содиқов, М.Р.Файзиева

ВЛИЯНИЕ ФУЛЛЕРЕНА C₆₀ НА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТЬ ПОЛИМЕТИЛМЕТАКРИЛАТА

Таджикский национальный университет

Методами дилатометрии и термографии исследованы температурные изменения относительной деформации, плотности и коэффициентов тепловой усадки/расширения и температуропроводности образцов фуллереннаполненного полиметилметакрилата. Показано, что коэффициент температуропроводности композитных систем полиметилметакрилат–C₆₀ с ростом концентрации последнего уменьшается, что связано с ростом числа центров рассеяния фоонов-неоднородностей структуры полимерной матрицы и наночастиц наполнителя.

Ключевые слова: полимер, нанокомпозит, фуллерен, деформация, температуропроводность.

Важнейшими характеристиками полимеров, наряду с термостабильностью, являются теплопроводность, теплоёмкость, температуропроводность, тепловое расширение/усадка. В последнее время для улучшения этих показателей используют различные методы их модификации нанокремнеземными материалами [1-3].

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование влияния добавок фуллерена C₆₀ на дилатометрические свойства и коэффициент температуропроводности образцов полиметилметакрилата (ПММА). В качестве полимерной матрицы был выбран ПММА с молекулярной массой $M=8 \cdot 10^4$, характеристики которого приведены в [4]. Наполнителем служил фуллерен C₆₀ с химической чистотой 99.7%.

Образцы плёнок ПММА с различным содержанием фуллерена получали из смешанных растворов полимера и фуллерена в бромбензоле [1, 4]. Процессы тепловой усадки и расширения в цикле нагрев/охлаждение изучали на дилатометре DIL 420C фирмы Netzsch при скорости нагрева/охлаждения 5 град/мин на образцах квадратной формы 8x8 мм и толщиной 0.13-0.15 мм. Теплоёмкость образцов C_p в цикле нагрев/охлаждение измеряли на калориметре DSC 204F1 фирмы NETZSCH со скоростью нагрева 10 град/мин.

На рис. 1 приведены типичные дилатограммы образцов плёнок композитов ПММА-C₆₀, характеризующие температурные зависимости величин относительной деформации $\varepsilon = d\delta/\delta_0$ (кривые 1-5), где δ_0 – исходная толщина образца, и коэффициента тепловой усадки/ расширения $\alpha = d\varepsilon/dT$ (кривые 1'-5') в перпендикулярном плоскости образцов направлении.

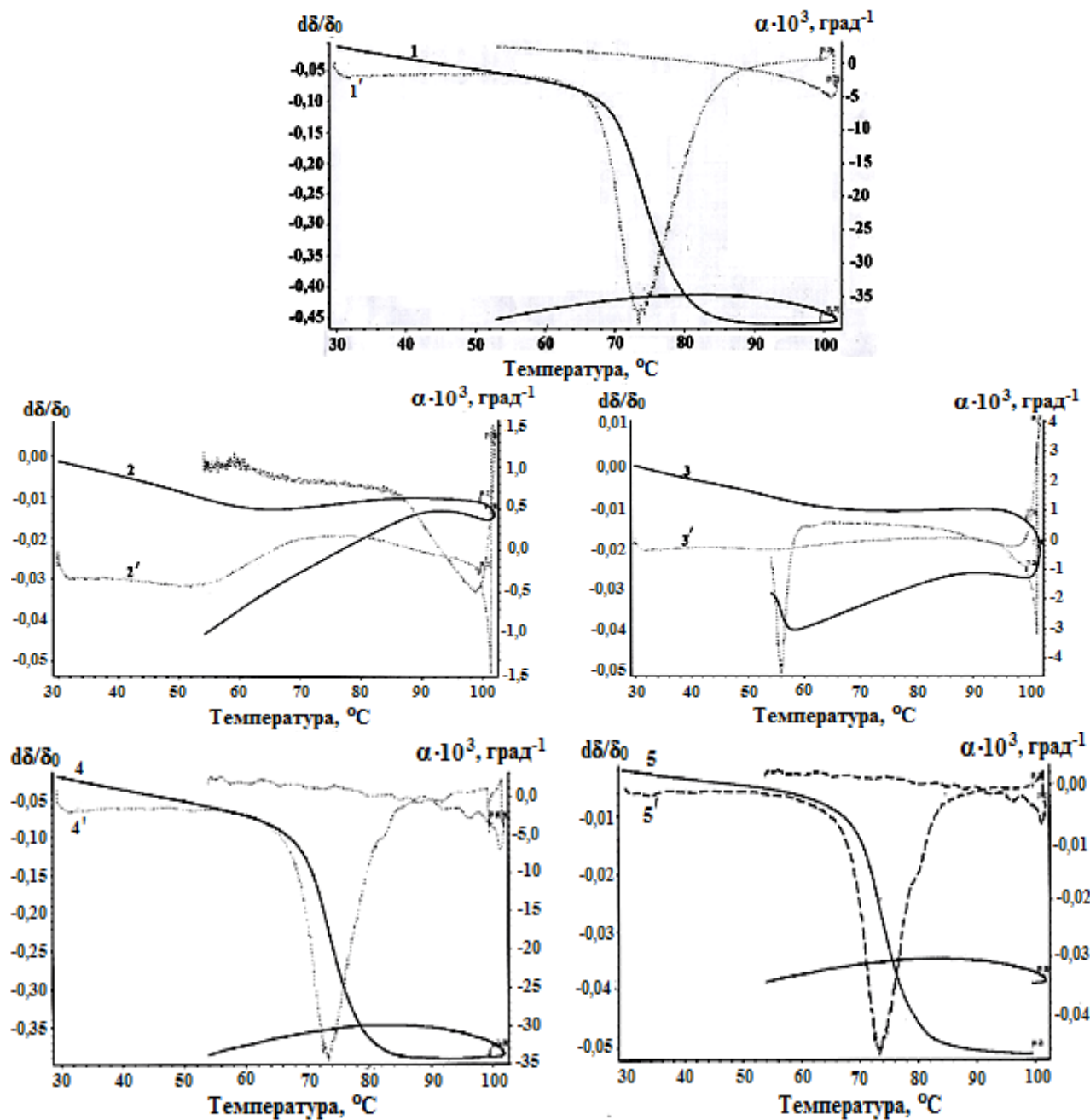


Рис. 1. Дилатогаммы нанокompозита ПММА- C_{60} :
 1 – исходный ПММА; 2 – ПММА-1% C_{60} ; 3 – ПММА-3% C_{60} ;
 4 – ПММА-5% C_{60} ; 5 – ПММА-10% C_{60} .

Как следует из рис.1, в цикле нагрев/охлаждение в диапазоне температур 30-102-50°C с ростом концентрации C_{60} наблюдается усадка образцов, абсолютная величина которой составляет ~ 4% для образцов ПММА-1% C_{60} , а затем постепенно увеличивается до 49% в интервале концентраций наполнения 3-10%. Кроме того, наблюдается тенденция постоянства величины α в интервале 30-55°C, её увеличение в области 55-92°C и падение в области 92-102°C; резкий рост в области плавления и снижение при охлаждении в интервале 102-92°C и дальнейшее его постоянство в интервале 92-50°C. Следует отметить, что при охлаждении с ростом концентрации C_{60} с 0 до 10% на дилатогаммах на-

блюдаются довольно острые пики, по-видимому, соответствующие температуре стеклования полимера T_g . Наблюдаемые изменения температуры стеклования (рост от 56 до 74°C) с ростом концентрации фуллерена C_{60} , по-видимому, связаны с усилением взаимодействия на границе раздела фаз полимер-наполнитель, ограничивающим сегментальную подвижность полимерных цепей, то есть с ростом жёсткости композита в целом.

Оказалось, что при увеличении концентрации C_{60} наблюдается довольно заметная тепловая усадка линейных размеров образцов композитов с 1 до 49% при нагревании и с 3 до 20% при охлаждении, что обусловлено конформационными переходами цепных молекул типа вытянутая цепь-клубок или спираль-клубок в аморфных областях полимера [6].

На основе полученных результатов, в сочетании с ранее полученными экспериментальными результатами по теплопроводности [7], нами были изучены температурные и концентрационные зависимости величины коэффициента температуропроводности ($\chi = \lambda/(\rho C_p)$) данных образцов. Для чего по температурному изменению коэффициента тепловой усадки/расширения α (рис. 1) были рассчитаны температурные изменения плотности $\rho(T)$ образцов композитов ПММА- C_{60} , приведенные в таблице. По этим данным были рассчитаны величины коэффициента температуропроводности χ при разных температурах и концентрациях наполнения, что представлено на рис. 2 и 3.

Таблица

Температурная и концентрационная зависимость плотности $\rho(T)$ (г/см³) и удельной теплоёмкости C_p (Дж./г.К) нанокompозитных образцов ПММА+ C_{60}

Температура, °C	30		40		50		60		70		80	
	ρ	C_p	ρ	C_p	ρ	C_p	ρ	C_p	ρ	C_p	ρ	C_p
Композит												
ПММА (исх.)	1.053	1.399	1.064	1.439	1.055	1.478	1.040	1.518	1.034	1.558	1.066	1.598
ПММА-1% C_{60}	1.063	1.135	1.167	1.100	1.165	1.181	1.124	1.280	1.120	1.380	1.117	1.443
ПММА-5% C_{60}	1.115	0.998	1.142	1.069	1.089	1.201	1.051	1.334	0.984	1.510	0.965	1.641
ПММА-10% C_{60}	1.150	0.128	1.141	0.131	1.150	0.133	1.064	0.140	0.972	0.146	0.973	0.151

Из рис. 2 видно, что с ростом температуры величина χ для всех образцов линейно падает и для исходных (ненаполненных) плёнок ПММА совпадает с результатом [8].

Концентрационные зависимости температуропроводности композитов при разных температурах, представленные на рис. 3, показывают, что, во-первых, все эти зависимости, в отличие от фуллереннаполненных композитов на основе кристаллического полиэтилена низкой плотности, для которых концентрационные зависимости температуропроводности линейно-ниспадающие [2], носят характер нелинейных ниспадающих кривых, то есть с ростом концентрации происходит падение температуропроводности по нелинейному закону, во-вторых, с ростом температуры концентрационные зависимости смещаются в сторону более низких значений температуропроводности. Так, уже при 1% наполнении фуллереном происходит довольно существенный (~ 25%) спад температуропроводности.

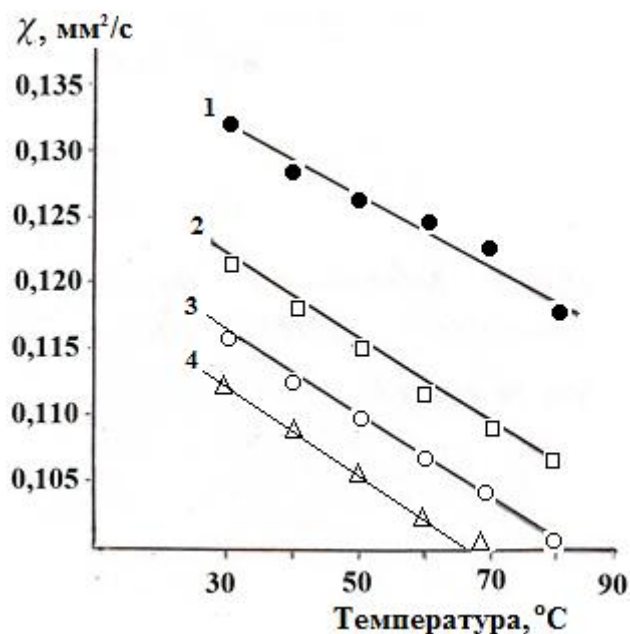


Рис. 2. Температурные зависимости коэффициента температуропроводности композитов ПММА-С₆₀ при разных концентрациях фуллерена:
 1 – исходный ПММА; 2 – композит ПММА-1% С₆₀; 3 – композит ПММА-5% С₆₀;
 4 – композит ПММА-10% С₆₀.

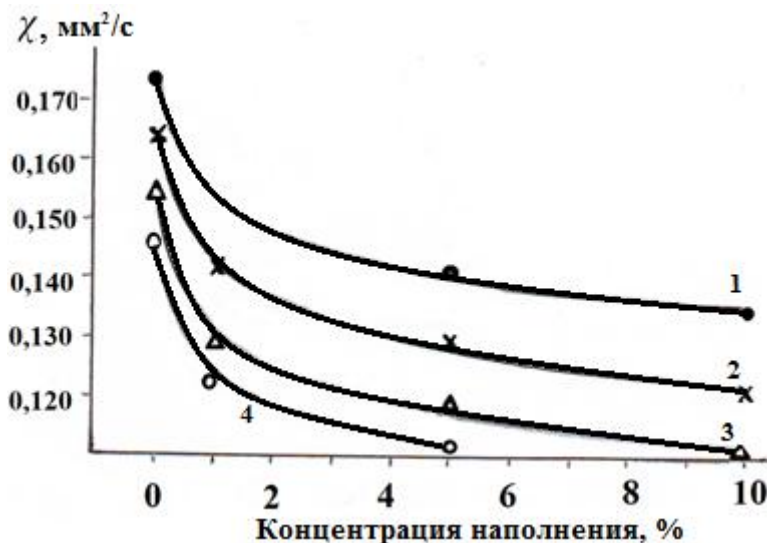


Рис. 3. Концентрационные зависимости температуропроводности композитов ПММА-С₆₀ при разных температурах: 1 – при 30°C; 2 – при 50°C; 3 – при 70°C; 4 – при 80°C.

Причины спада температуропроводности с ростом концентрации фуллерена связаны, по нашему мнению, с тем, что: во-первых, с ростом концентрации С₆₀ происходит увеличение свободного объема в полимерной матрице, следовательно и ослабление межмолекулярного взаимодействия, что в свою очередь приводит к падению коэффициента температуропроводности. Во-вторых, внедрение фуллерена приводит к увеличению степени неоднородности полимера, росту вероятности образования крупных ассоциатов частиц наполнителя, что, в свою очередь, способствует росту концентрации дефектов типа микропор и микротрещин в полимерной матрице. Рассеяние фононов от этих неоднородностей, а также от частиц фуллерена С₆₀ и его ассоциатов также приводит к снижению коэффициента температуропроводности.

Таким образом, полученные результаты показывают, что внедрение добавок фуллерена C_{60} в пределах 1-10 масс.% приводит к нелинейному снижению температуропроводности нанокompозитов на основе полиметилметакрилата.

Поступило 23.11.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Туйчиев Ш., Рашидов Д. Структура и свойства полимерных нанокompозитов. – Душанбе: Эрграф, 2018, 211 с.
2. Рашидов Д., Салихов Т.Х., Табаров С.Х., Мирзо А., Шарифов Д.М., Содиков Ф. Температуропроводность фуллеренсодержащего полиэтилена. – Доклады НАН Таджикистана, 2021, т. 64, №5-6, с.303-307.
3. Поздняков О.Ф., Попов Е.О., Поздняков А.О. Фотостабильность композиции полиметилметакрилат – C_{60} в ультрафиолетовой области. – Письма в Журн. техн. физики, 2012, т.38, №23, с.19-24.
4. Гинзбург Б.М., Туйчиев Ш., Рашидов Д., Табаров С.Х., Суханова Т.Е., Вылегжанина М.Э. Влияние фуллерена C_{60} на структуру и механические свойства тонких пленок из полиметилметакрилата и других карбоцепных полимеров винилового ряда: Технологический аспект. – Высокомолек. соединения. Сер. А, 2012, т.54, №8, с.1283-1296.
5. Энциклопедия полимеров. – М.: Советская энциклопедия, 1974, т.2, с.87-92.
6. Манделькерн Л. Кристаллизация полимеров. – Л.: Химия, 1967, 336 с.
7. Салихов Т.Х., Табаров С., Рашидов Д., Туйчиев Ш., Хуссейн А. Влияние добавок фуллерена C_{60} на теплопроводность пленок из полиметилметакрилата. – Письма в ЖТФ, 2009, т.5, вып.21, с.75-78.
8. Rudtsch S. and Hammerschmidt U. Intercomparison of Measurements of the Thermophysical Properties of Polymethyl Methacrylate. – International Journal of Thermophysics, 2004, v.25, №5, pp.1475-1482.

**Қ.Рашидов, Т.Х.Салихов, Ш.И.Акназарова, С.Х.Табаров, А.Мирзо,
Д.М.Шарифов, Ф.Содиқов, М.Р.Файзиева**

ТАЪСИРИ ФУЛЛЕРЕН C_{60} БА ҲАРОРАТГУЗАРОНИИ ПОЛИМЕТИЛМЕТАКРИЛАТ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Тағйирёбии ҳароратии ғафсӣ, зичӣ ва коэффитсенти васеъшавии ҳароратии намунаҳои композитӣ бар асоси полиметилметакрилат ва фуллерени C_{60} бо усулҳои дилатометрия ва термография омӯхта шудааст. Нишон дода шудааст, ки коэффитсенти ҳароратгузаронии намунаҳои ПММА- C_{60} бо афзоиши консентратсияи C_{60} хаттӣ кам мешавад, ки бо коҳиши дарозии дав ва афзоиши интензивияти пароканиши фононҳо аз ғайрирякчинсагии сохтор ва нанозарраҳои фуллеренӣ алоқаманд аст.

Калимаҳои калидӣ: полимер, нанокompозит, фуллерен, фононҳо, ҳароратгузаронӣ.

D.Radhidov, T.Kh.Salikhov, Sh.I.Aknazarova, S.Kh.Tabarov, A.Mirzo,

D.M.Sharifov, F.Sodikov, M.R.Fayzieva

THE EFFECT OF THE FULLERENE C₆₀ ON THE THERMAL DIFFUSIVITY OF POLYMETHYLMETACRILATE

Tajik National University

Using dilatometry and thermography methods, the temperature changes in relative deformation, density and coefficient of thermal shrinkage or expansion of samples of polymethacrylate containing C₆₀ fullerene were studied. It is shown that the value of thermal diffusivity of PMMA + C₆₀ composite samples decreases with increasing concentration of C₆₀, which is associated with an increase in the scattering of photons by structural inhomogeneity and by the C₆₀ fullerene nanoparticles themselves.

Key words: *polymer, nanocomposite, fullerene, deformation, thermal diffusivity.*

УДК 53; 538.9; 339.213; 552.125

Д.С.Кучакшоев, А.Г.Джабаров, А.Холов

РЕНТГЕНОФАЗОВЫЙ АНАЛИЗ СТЁКОЛ $2\text{Vi}_2\text{O}_3\text{-V}_2\text{O}_3$ И $\text{Vi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{V}_2\text{O}_3$ С РАЗЛИЧНОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ NaOH В ФОРМОВОЧНОЙ СМЕСИ*Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистан**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Т.Х.Салиховым 05.02.2022 г.)*

Методом рентгенофазового анализа исследовано влияние NaOH на фазовый состав стёкол $2\text{Vi}_2\text{O}_3\text{-V}_2\text{O}_3$ и $\text{Vi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{V}_2\text{O}_3$. Показано, что с увеличением концентрации NaOH содержание кристаллической фазы уменьшается, аморфной – увеличивается. В стёклах $\text{Vi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{V}_2\text{O}_3$ обнаружен эффект малых добавок NaOH: добавление до 4-5 мольных процентов NaOH приводит к уменьшению кристаллическости, большие добавки приводят к её увеличению, а при концентрациях больших 12% её величина стабилизируется. Добавление NaOH в стёкла $2\text{Vi}_2\text{O}_3\text{-V}_2\text{O}_3$ и $\text{Vi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{V}_2\text{O}_3$ приводит к изменению состава кристаллической фазы.

Ключевые слова: стёкла, рентгенофазовый анализ, кристаллическая и аморфная фазы.

Стёкла и изделия на их основе нашли широкое применение практически во всех областях народного хозяйства. Стёкла превратились в незаменимый материал строительного и конструкционного назначения, прочно утвердились в элементах конструкций транспортной, электронной, атомной, ракетной и других отраслей техники, стали неотъемлемой частью бытовых потребностей населения [1].

Предметом пристального изучения являются стёкла разного химического состава. Хорошо изучены многие соединения боратов висмута, которые обладают высокими значениями показателя преломления, широкой областью прозрачности в видимом и ИК диапазоне. Это позволяет создавать на их основе кристаллические материалы и стёкла для нелинейной оптики, лазерной и оптоволоконной техники [2-4]. Стёкла на основе соединений V_2O_3 характеризуются широкими областями стеклообразования [5], что позволяет изменять состав и свойства стекла в широких пределах.

В работе методом рентгенофазового анализа (РФА) [6] исследовано влияние добавки NaOH на фазовый состав получаемых стёкол систем $2\text{Vi}_2\text{O}_3\text{-V}_2\text{O}_3$ и $\text{Vi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{V}_2\text{O}_3$. В формовочную смесь, состоящую из размельчённого стекла $2\text{Vi}_2\text{O}_3\text{-V}_2\text{O}_3$ или $\text{Vi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{V}_2\text{O}_3$, добавляли от 1 до 50 мольных процентов NaOH. Смесь растирали в агатовой ступке, плавил в платиновом тигле при 850°C , выдерживали расплав в течение длительного времени (более 10 часов), быстро охлаждали расплав до комнатной температуры, выливая его в керамический тигель. Съёмка рентгенограмм в интервале углов 2θ от 7° до 70° (излучение Cu K_α , длина волны $\lambda = 1.5405 \text{ \AA}$, Ni-фильтр) изготовленных образцов в виде порошка проводилась на дифрактометре ДРОН-1.5 при комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении со скоростью $2^\circ/\text{мин}$ при вращении образца в собственной плоскости.

Адрес для корреспонденции: Кучакшоев Давлатназар Соибназарович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Физико-технический институт НАНТ. E-mail: k.davlat@mail.ru

Компьютерная регистрация рентгеновских дифрактограмм осуществлялась при поддержке программы Search-Match-DEMO [7], включающей базу Diffraction Data PDF4 ICDD [8]. Расшифровка дифрактограмм по определению состава кристаллической фазы образцов проводилась средствами программы Search-Match с дополнительным привлечением программы OriginLab 2015 для определения содержания аморфной фазы. Содержание аморфной фазы χ_{am} (содержание кристаллической фазы $\chi_{cr} = 1 - \chi_{am}$) в образцах определяли по отношению площади фона к площади спектра, которые рассчитывали с помощью программы OriginLab. Полученные дифрактограммы исследованных образцов приведены на рис.1.

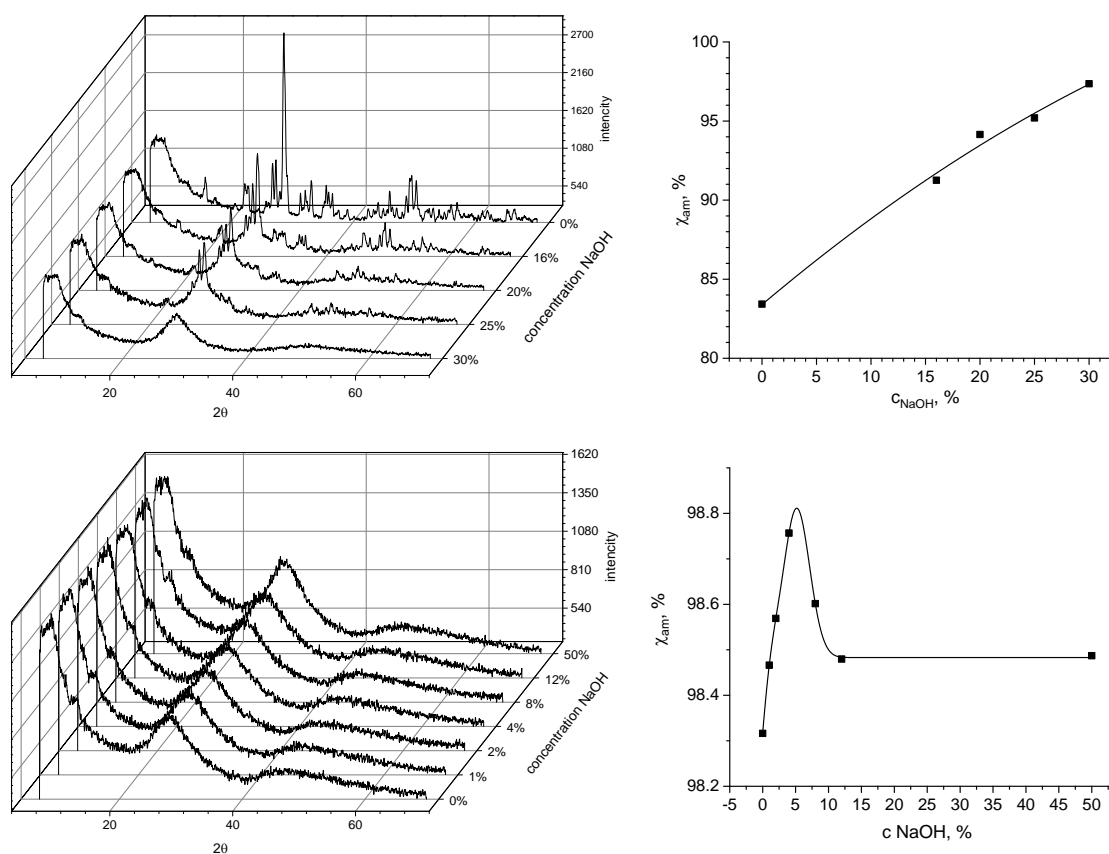


Рис. 1. Рентгеновские дифрактограммы стёкол: $(2\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-B}_2\text{O}_3) + \text{NaOH}$ – вверху слева (для мольных концентраций NaOH – 0, 16, 20, 25 и 30%); $(\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{B}_2\text{O}_3) + \text{NaOH}$ – внизу слева (для мольных концентраций NaOH – 0, 1, 2, 4, 8, 12 и 50%). Справа – зависимости изменения содержания аморфной фазы от концентрации NaOH для $(2\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-B}_2\text{O}_3) + \text{NaOH}$ – вверху и для $(\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{B}_2\text{O}_3) + \text{NaOH}$ – внизу.

Из рис. 1 видно, что для стёкол, полученных на основе $2\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-B}_2\text{O}_3$, введение кристаллической щёлочи NaOH по мере увеличения её концентрации наблюдается уменьшение интенсивности дифракционных максимумов, характерных для кристаллических образований, которое сопровождается постепенным изменением прозрачности образцов (от непрозрачных образцов без добавления NaOH до прозрачных, соответствующих образцам с 30% добавкой NaOH). Наряду с этим наблюдается изменение соотношения интенсивности отдельных максимумов и появление новых, происходит постепенный рост интенсивности размытых дифракционных максимумов (7 – 8, 28.7 и 50°), харак-

терных для аморфных образцов. На дифрактограмме образца с 30% добавкой NaOH кристаллические дифракционные максимумы наблюдаются на уровне фона.

Для стёкол $\text{Bi}_2\text{O}_3\text{--}2\text{B}_2\text{O}_3$ (рис. 1, внизу слева) следует, что дифрактограммы исходного образца (без добавления NaOH) и образцов с добавлением NaOH с любой концентрацией представляют собой спектры с широкими размытыми дифракционными максимумами ($7 - 8$, 28.7 и 47°), что свидетельствует об аморфной структуре этих образцов. Кристаллические дифракционные пики различаются на уровне фона. Все образцы $(\text{Bi}_2\text{O}_3\text{--}2\text{B}_2\text{O}_3) + \text{NaOH}$ прозрачные.

Результаты РФА и расчётов содержания аморфной и кристаллической фазы, приведённые в таблицах 1 (для $(2\text{Bi}_2\text{O}_3\text{--}\text{B}_2\text{O}_3) + \text{NaOH}$) и 2 (для $(\text{Bi}_2\text{O}_3\text{--}2\text{B}_2\text{O}_3) + \text{NaOH}$), показывают, что с увеличением концентрации NaOH содержание кристаллической фазы в образцах $(2\text{Bi}_2\text{O}_3\text{--}\text{B}_2\text{O}_3) + \text{NaOH}$ уменьшается, содержание аморфной фазы увеличивается. Непрозрачные образцы в верхней части таблицы постепенно превращаются в прозрачные в нижней части таблицы. Несмотря на стехиометрический состав расплава $(2\text{Bi}_2\text{O}_3\text{--}\text{B}_2\text{O}_3)$, только около 9% исходного вещества при его охлаждении образуют известные кристаллиты $\text{Bi}_4\text{B}_2\text{O}_9$. Это является следствием неблагоприятных условий для образования таких кристаллов – кристаллизация протекает при больших скоростях охлаждения (сотни и тысячи К/мин). Кристаллиты оксида висмута составляют около 6% от всей кристаллической фазы. Чуть более 1% составляют кристаллиты гидрогенизированного бора. Остальная часть вещества образует аморфную стеклообразную фазу. Добавление NaOH приводит к разрушению кристаллической фазы по мере увеличения его концентрации. Увеличение аморфной фазы с ростом концентрации NaOH имеет параболическую концентрационную зависимость (рис.1, вверху справа).

Таблица 1

Содержание кристаллической и аморфной фазы в образцах $(2\text{Bi}_2\text{O}_3\text{--}\text{B}_2\text{O}_3) + \text{NaOH}$ при разной концентрации NaOH в исходной смеси

NaOH, %	№ п/п	Компоненты кристаллической фазы	Доля компонента в кристаллической фазе	Кристаллическая фаза, %	Аморфная фаза, %
0	1	$\text{Bi}_4\text{B}_2\text{O}_9$	0.5515	16.58	83.42
	2	Bi_2O_3	0.3755		
	3	$\text{H}_3\text{B}_3\text{O}_6$	0.0730		
16	1	$\text{Bi}_{45}\text{BO}_{69}$	0.4745	8.74	91.26
	2	$\text{Bi}_4\text{B}_2\text{O}_9$	0.2776		
	3	Bi_2O_3	0.1679		
	4	$\text{Na}_2\text{B}_6\text{O}_{10}$	0.0393		
	5	Na_3BiO_4	0.0406		
20	1	$\text{Bi}_4\text{B}_2\text{O}_9$	0.5457	5.85	94.15
	2	Bi_2O_3	0.3686		
	3	$\text{Na}_2\text{B}_6\text{O}_{10}$	0.0857		
25	1	$\text{Bi}_{45}\text{BO}_{69}$	0.5697	4.81	95.19
	2	$\text{Bi}_4\text{B}_2\text{O}_9$	0.2316		
	3	Bi_2O_3	0.1661		
	4	$\text{Na}_2\text{B}_6\text{O}_{10}$	0.0326		
30	1	Bi_2O_3	0.3968	2.65	97.35
	2	Bi_2O_3	0.1831		
	3	Bi_2O_3	0.1454		
	4	$\text{Bi}_{6.5}\text{B}_{0.1}\text{O}_{9.9}$	0.1366		
	5	$\text{B}_{10}\text{H}_{14}$	0.0858		
	6	$\text{B}_{13}\text{H}_{19}$	0.0522		

Ниже в таблице 2 представлены результаты РФА симметричного соединения ($\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{B}_2\text{O}_3$), к расплаву которого также добавляли NaOH в концентрации 1, 2, 4, 8, 12 и 50 мольных процентов. Из сказанного выше и, как это следует из результатов РФА, все образцы представляют собой аморфные стёкла, кристаллическая фаза которых составляет менее 2 процентов.

Таблица 2

Содержание кристаллической и аморфной фаз в образцах ($\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{B}_2\text{O}_3$)+NaOH при разной концентрации NaOH в исходной смеси

NaOH, %	№ п/п	Компоненты кристаллической фазы	Доля компонента в кристаллической фазе	Кристаллическая фаза, %	Аморфная фаза, %
0	1	$\text{B}_{10}\text{H}_{14}$	0.6137	1.68	98.32
	2	$\text{B}_{13}\text{H}_{19}$	0.3863		
1	1	$\text{B}_{10}\text{H}_{14}$	0.4504	1.53	98.47
	2	$\text{B}_{13}\text{H}_{19}$	0.2950		
	3	$\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7(\text{H}_2\text{O})_5$	0.2546		
2	1	$\text{B}_{10}\text{H}_{14}$	0.4517	1.43	98.57
	2	$\text{B}_{13}\text{H}_{19}$	0.2834		
	3	$\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7(\text{H}_2\text{O})_5$	0.2649		
4	1	$\text{B}_{10}\text{H}_{14}$	0.5826	1.24	98.76
	2	$\text{B}_{13}\text{H}_{19}$	0.4174		
8	1	$\text{B}_{12}\text{H}_{16}$	0.7700	1.40	98.60
	2	$\text{B}_{10}\text{H}_{14}$	0.1485		
	3	$\text{B}_{13}\text{H}_{19}$	0.0711		
	4	$\text{B}_{14}\text{H}_{20}$	0.0104		
12	1	$\text{Na}_2\text{B}_{12}\text{H}_{12}(\text{H}_2\text{O})_4$	0.4210	1.52	98.48
	2	Na_3BiO_3	0.3629		
	3	$\text{B}_{10}\text{H}_{14}$	0.1158		
	4	$\text{B}_{13}\text{H}_{19}$	0.0584		
	5	$\text{Na}_2\text{B}_6\text{O}_{10}$	0.0323		
	6	$\text{B}_{14}\text{H}_{20}$	0.0096		
50	1	$\text{BiO}_{1.5}$	0.4881	1.51	98.49
	2	Bi_2O_3	0.2074		
	3	$\text{B}_{10}\text{H}_{14}$	0.0953		
	4	$\text{B}_{13}\text{H}_{19}$	0.0659		
	5	$\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7(\text{H}_2\text{O})_5$	0.0581		
	6	$\text{B}_{12}\text{H}_{16}$	0.0428		
	7	$\text{Na}_2\text{B}_6\text{O}_{10}$	0.0422		

Добавление NaOH увеличивает разнообразие кристаллитов в составе кристаллической фазы (помимо боранов с содержанием бора больше 10 появляются бораты и висмутаты натрия, оксиды висмута). Слабая концентрационная зависимость влияния NaOH на изменение содержания аморфной (кристаллической) фазы представлена на рис.1, внизу справа. Согласно рисунку аморфная фаза увеличивается, достигает максимума при концентрациях NaOH 4 – 5 мольных процентов, а далее уменьшается и при концентрациях более 12% стабилизируется вблизи значения 98.5%. Необходимо отметить, что надёжность идентификации кристаллических структур с образованием значительной аморфной фазы (равно со значительным уменьшением кристаллической фазы) сильно падает. Идентификация структур осуществима по 1 – 3 кристаллическим пикам, что требует дополнительных усилий по их определению.

Поступило 02.09.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гулоян Ю.А. Технология стекла и стеклоизделий. Учебник для средних специальных учебных заведений, систем профессионально-технического и производственного обучения. –Владимир: Транзит-Икс, 2003, 480 с.
2. Hasu H., Ito T., Hase H. et al. Third-Order Optical NonLinearity of Bi_2O_3 -Based
3. Glasses. – J. Non-Cryst. Solids, 1996, v. 204, № 1, pp. 78-82.
4. Becker P. Thermal and Optical Properties of Glasses of the System Bi_2O_3 - B_2O_3 . –Cryst. Res. Technol, 2003, v. 38, № 1, pp. 74–82.
5. Ehrt D. The Effect of ZnO , La_2O_3 , PbO and Bi_2O_3 on the Properties of Binary Borate Glasses and Melts. – Phys. Chem. Glasses, 2006, v. 47, № 6, pp. 669–674.
6. Мазурин О.В., Стрельщина М.В., Швайко-Швайковская Т.П. Свойства стёкол истеклообразующих расплавов. Справочник. - СПб.: Наука, т.6, ч. 2, 1998, 523 с.
7. Ковба Л.М., Трунов, В.К. Рентгенофазовый анализ. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1976, 232 с.
8. Васильев Е.К., Нахмансон, М.С. Качественный рентгенофазовый анализ. Отв. ред. С.Б.Брандт. – Новосибирск: Наука, 1986, 200 с.
9. JCPDS-International Centre for Diffraction Data. – 2000, – PCPDFWin v. 2.1. 2.7. CRYSTAL IMPACT GbRКreuzherrenstr. 102 D-53227 Bonn Germany, 2011.

Д.С.Кучакшоев, А.Г.Чаборов, А.Холов

ТАҲЛИЛИ РЕНТГЕНОФАЗАВИИ ШИШАҲОИ $2\text{Bi}_2\text{O}_3$ - B_2O_3 ВА Bi_2O_3 - $2\text{B}_2\text{O}_3$ БО КОНСЕНТРАТСИЯИ ГУНОГУНИ NaOH ДАР ОМЕХТАИ ҚОЛИБӢ

Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Бо усули таҳлили рентгенофазавӣ таъсири NaOH ба таркиби фазавии шишаҳои $2\text{Bi}_2\text{O}_3$ - B_2O_3 ва Bi_2O_3 - $2\text{B}_2\text{O}_3$ омӯхта шудааст. Нишондода шудааст, ки бо зиёдшудани консентратсияи NaOH таркиби фазаи кристаллӣ кам мешавад, аммо фазаи аморфӣ меафзояд. Дар шишаҳои Bi_2O_3 - $2\text{B}_2\text{O}_3$ таъсири иловаҳои ками NaOH муайян карда шудааст: илова кардани то 4-5 мол.% NaOH боиси пастшудани фазаи кристаллӣ гардида, изофаҳои калон ба зиёдшудани онҳо оварда мерасонад ва дар консентратсияи зиёда аз 12% қимати он мӯътадил мегардад. Илова кардани NaOH ба шишаҳои $2\text{Bi}_2\text{O}_3$ - B_2O_3 ва Bi_2O_3 - $2\text{B}_2\text{O}_3$ боиси тағйирёбии таркиби фазаи кристаллӣ мегардад.

Калимаҳои калидӣ: шиша, таҳлили рентгенофазӣ, фазаҳои кристаллӣ ва аморфӣ.

D.S.Kuchakshoev, A.G.Dzhabarov, A.Kholov

**X-RAY PHASE ANALYSIS OF GLASSES $2\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-B}_2\text{O}_3$ AND $\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{B}_2\text{O}_3$
WITH DIFFERENT CONCENTRATIONS OF NaOH IN THE MOLDING SAND**

S.U.Umarov Physical-Technical Institute, of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The influence of NaOH on the phase composition of $2\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-B}_2\text{O}_3$ and $\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{B}_2\text{O}_3$ glasses was studied by X-ray phase analysis. It is shown that with increasing NaOH concentration, the content of the crystalline phase decreases, while the content of the amorphous phase increases. In $\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{B}_2\text{O}_3$ glasses, the effect of small additions of NaOH was found: the addition of up to 4–5 mole percent of NaOH leads to a decrease in crystallinity, large additions lead to its increase, and at concentrations greater than 12%, its value stabilizes. The addition of NaOH to the $2\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-B}_2\text{O}_3$ and $\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}2\text{B}_2\text{O}_3$ glasses leads to a change in the composition of the crystalline phase.

Key words: *glasses, X-ray phase analysis, crystalline and amorphous phases.*

УДК 532.783+543.421

С.К.Каримов, М.Х.Эгамов, А.Абдуманонов**КОНФОРМАЦИОННЫЕ ПЕРЕХОДЫ В КАПСУЛИРОВАННЫХ
ПОЛИМЕРОМ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛЕНКАХ***Худжандский научный центр Национальной академии наук Таджикистана**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Т.Х.Салиховым 24.05.2021 г.)*

Показано, что наиболее стабильной конформацией молекулы 7СБ ($X \equiv OCH_3$, OC_3H_7) в исходном состоянии является твист-конформация с углом поворота мономерной изомерии. Установлено, что поворот бензольных колец относительно друг друга сопровождается изменением относительной ориентации взаимодействующих орбиталей мостиковых атомов углерода колец. Выявлено, что удлинение алифатической цепи в фрагменте C_3H_7 не приводит к заметным изменениям особенностей геометрической структуры молекулы.

Ключевые слова: жидкие кристаллы, нематик, поливинилбутираль, ИК-Фурье спектроскопия, полоса поглощения, частота колебания, конформация.

Цианобифенилы представляют собой особый класс термотропных жидких кристаллов (ЖК), которые успешно применяются в средствах отображения информации. Исследования ИК-спектров разных модификаций *n*-алкил-*n*'-цианобифенилов (ЦБ) при различных внешних факторах свидетельствует о наличии двух видов конформаций молекулы в кристаллической фазе [1]. Обнаруженные экспериментальным путем смещения частот колебания и изменения интенсивности полос поглощения в максимуме в ИК-спектрах ЦБ под действием внешних воздействий характерны для многих аналогичных соединений, в которых существует поворотная изомерия. Вполне логично, что молекулы ЦБ могут существовать в различных поворотных-изомерных формах, именуемых конформерами, которые отличаются друг от друга только значением угла между плоскостями двух соседних бензольных колец [1]. Согласно [2], у кристаллического бифенила бензольные кольца лежат в одной плоскости с симметрией D_{2h} , в то время как в жидком или газообразном состоянии вещества эти молекулы имеют симметрию C_2 , и тогда, угол между плоскостями бензольных колец составляет около 45° .

Свободные конформационные переходы молекул ЦБ и его производных позволяют опытным путем исследовать их внутримолекулярного взаимодействия хромофорных групп. Для этой цели наиболее подходящим считается полимерно-жидкокристаллических систем при изменении состава одного из компонентов.

Для изготовления композитных пленок нами были использованы нематический жидкий кристалл (НЖК) 4-*n*-гептил-4'-цианобифенил (7ЦБ), находящийся в нематической фазе в диапазоне температур 25-42.5°C. Показатели преломления исследуемого 7ЦБ: $n_{\parallel} = n_{e,max} = 1.725$ и

Адрес для корреспонденции: Каримов Сорбон Каримович. 735714, Таджикистан, г. Худжанд, Северо-восточная пром. зона, Худжандский научный центр НАНТ. E-mail: sorbon_25@mail.ru.

$n_{\perp} = n_0 = 1.534$ при температуре $T=28^{\circ}\text{C}$ и длин волн $\lambda=0,633$ мкм. Полимерным связующим материалом был поливинилбутираль (ПВБ) с $n_p=1.492$ [3]. ПВБ-растворимый полимер, отличающийся стойкостью к органическим растворителям и термостойкостью, низкой газопроницаемостью, хорошими адгезионными свойствами, он обеспечивает тангенциальное сцепление с молекулами производных алкилцианобифенилов. НЖК 7ЦБ диспергировали в полимерной матрице по растворной технологии [4] при испарении общего растворителя – этилового спирта. Была изготовлена серия образцов пленок ПВБ (исходный и ПВБ+7ЦБ) по весу концентрациями компонентов (15, 20, 25 и 30%), соответственно. Подготовленный смесь наносили на поверхности стеклянной подложки и в режиме термостатирования испарили растворитель. Толщина образцов после сушки составляла 25-30 мкм и размер капли 7ЦБ 10-15 мкм.

Для исследования спектральной характеристики использовали ИК-спектрофотометр с Фурье преобразованием марки IRAffinity-1 SHIMADZU в диапазоне $4000-400$ cm^{-1} с разрешением 0.5 cm^{-1} . Идентификация состава пленок (веществ) методом инфракрасной спектроскопии проводилась согласно [5, 6], а расшифровку полученных спектров проводили на основании данных, приведенных в [5].

Характеристические частоты поглощения химических групп исследуемых полимеров (ПВБ) и интенсивность пиков зарегистрированных полос на ИК-спектрах приведены в таблице 1. Полученные ИК-спектры приведены на рис. 1. Сопоставительный анализ данных показали, что с увеличением концентрации НЖК 7ЦБ в составе матрицы от 15% до 30% частота колебаний группы $\text{C}\equiv\text{N}$ увеличиваются от 2328 до 2333 cm^{-1} , а интенсивность полосы поглощения в максимуме, наоборот, уменьшаются.

Таблица 1

Характеристические частоты поглощения химических групп поливинилбутираля, полученные методом ИК-Фурье спектроскопии

Тип колебания	Исходный		15%		20%		25%		30%	
	ν, cm^{-1}	A	ν, cm^{-1}	A	ν, cm^{-1}	A	ν, cm^{-1}	A	ν, cm^{-1}	A
$\nu(\text{C}\equiv\text{N})$	2328	110	2328	107	2330	89.4	2331	77.2	2333	66.4
$\nu_s(\text{C-O})$	1068	63.1	1068	60.3	1068	55.0	1069	50.5	1069	48.0
$\nu_{as}(\text{C-O})$	1295	274.8	1292	296.3	1289	300.6	1287	299.2	1286	296.7
$\nu(\angle \text{COC})$	529.4	17.8	529.1	16.6	528.2	14.1	527.8	11.4	528.0	8.8
$\nu(\angle \text{CC-H})_{\text{Ph}}$	1444	6.6	1442	3.3	1444	6.4	1437	5.9	1435	5.5
$\nu(\text{CC}, \angle \text{CC-H})_{\text{Ph}}$	1590	1.7	1589	1.7	1588	1.75	1587	1.6	1588	1.0
$\nu_s(\text{C-H})_{\text{Ph}}$	3201	19.8	3198	18.2	3192	11.0	3188	5.9	3188	7.0
$\nu_{as}(\text{C-H})_{\text{Ph}}$	3202	2.3	3199	3.1	3193	8.3	3189	12.0	3188	9.1
$\nu_{as}(\text{C-H})_{\text{CH}_3}$	3021	71.2	3021	70.7	320	69.5	3019	67.6	3018	65.1
$\nu(\angle \text{OCH})_{\text{CH}_3}$	1209	14.5	127	30.6	1206	48.9	1205	27.3	1204	3.6
$\nu_{as}(\delta_{\text{CH}_3})$	1480	15.2	1480	15.4	1480	14.2	1480	12.6	1480	11.9

Соответственно, частоты валентных колебаний связей типа С-Н бензольных колец и группы CH_3 с ростом концентрации 7ЦБ уменьшаются. Исходная пленка из ПВБ без содержания НЖК 7СБ при комнатной температуре содержит сравнительно незначительное количество водородных связей. Однако, интенсивность полос плоских и неплоских С-Н-колебаний бензольных колец слишком мала.

Аналогичные картины наблюдаются и к интенсивности полосы валентных С-С колебаний бензольных колец, частота которых найдена минимальной при концентрации 15% для НЖК 7СБ.

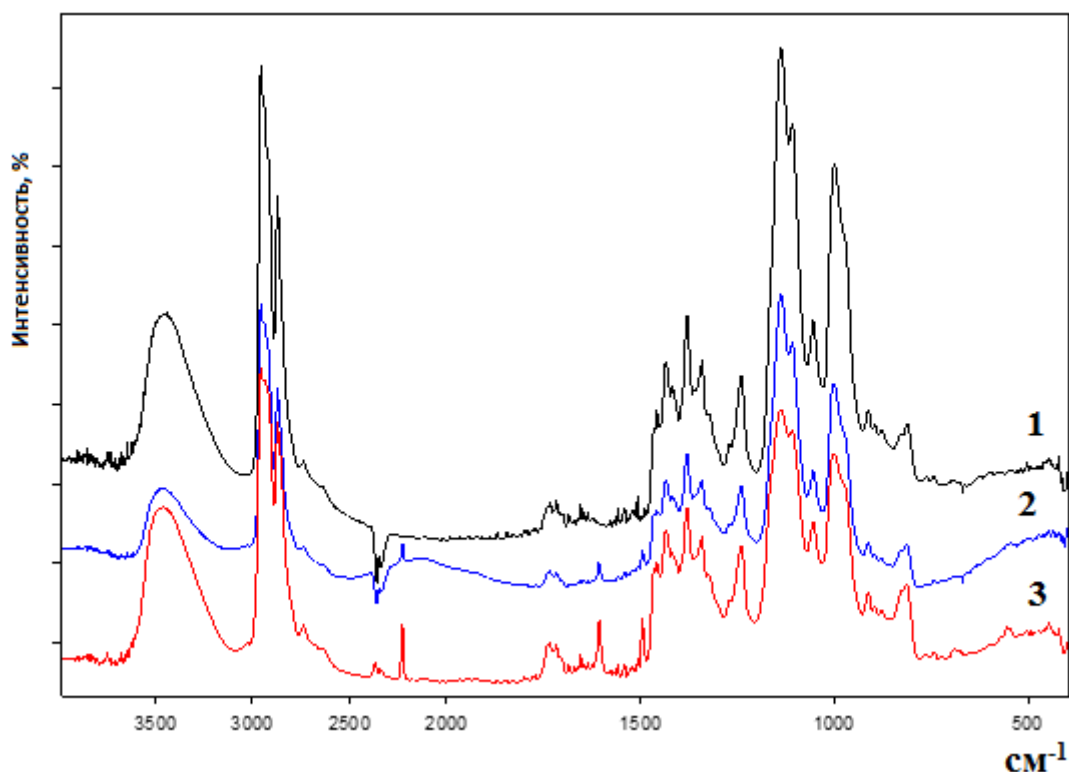


Рис. 1. ИК-спектры поглощения исходного ПВБ (1), ПВБ+7ЦБ (20%) (2), 30% (3) в диапазоне частот от 400 до 4000 см^{-1}

Из рис.1 также видно, что частоты валентных и угловых колебаний фрагмента СОС с изменением состава композита меняется незначительно, повышаясь всего на 2 см^{-1} в случае симметричного валентного колебания $\nu_s(\text{C-O})$, и одновременно, уменьшаясь на 10 см^{-1} в случае симметричного валентного колебания несимметричного $\nu_{as}(\text{C-O})$. Тем не менее, интенсивность полос в максимуме обеих колебаний при этом, существенно меняется, возрастая в случае колебаний несимметричного $\nu_{as}(\text{C-O})$ и уменьшаясь в случае колебаний симметричного $\nu_s(\text{C-O})$ групп.

Для углового $\nu(\angle \text{COC})$ колебания и внутренних деформационных колебаний метильной группы, соответствующей полосе 1480 см^{-1} , интенсивности полос поглощения с ростом концентрации компонент НЖК за счет угла между плоскостями бензольных колец уменьшаются, хотя частоты колебаний при этом почти не меняются. Изменение интенсивности полосы внешних деформационных колебаний метильной группы 1209 см^{-1} , при этом носит немонотонный характер. Оказалось, что максимум интенсивности наблюдается при концентрации 25%-ного содержания 7ЦБ в составе полимера. Дальнейшее увеличение концентрации НЖК 7ЦБ приводит к быстрому снижению интенсивности этой полосы практически до нуля при 30% концентрации данной компоненты.

С целью детального анализа отдельных полос поглощений исследуемого объекта, на рис. 2 приведен фрагмент ИК-спектров для диапазона частот $900\text{-}1300 \text{ см}^{-1}$.

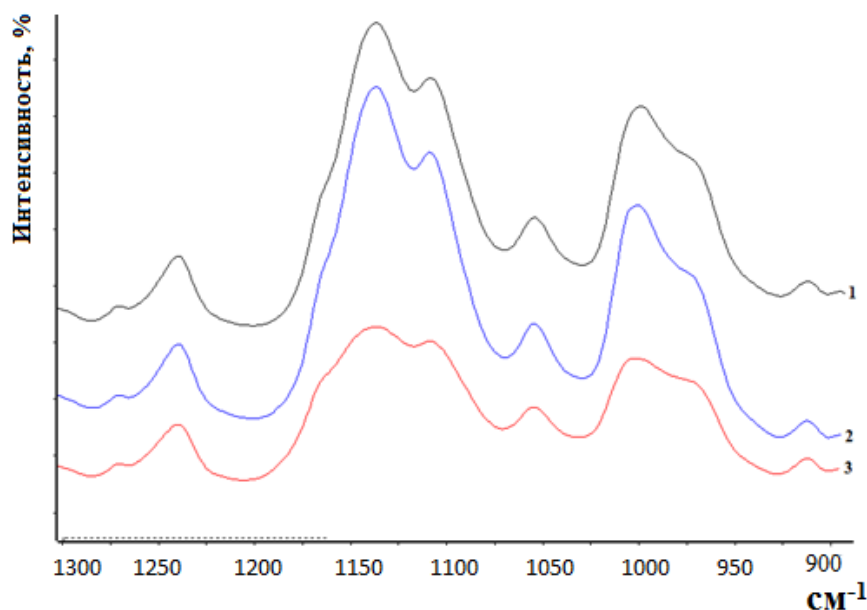


Рис. 2. Фрагменты ИК-спектров поглощения ПВБ (1), ПВБ+7СВ (20%) –(2), 30% (3) в диапазоне частот от 900 до 1300 см.⁻¹

Как видно, при переходе от плоской к перпендикулярной конформации молекулы НЖК 7СВ, после увеличения доли компоненты ЖК, можно наблюдать уменьшение частот валентных колебаний С-Н-связей бензольных колец и метильной группы (СН₃), а также внешних деформационных колебаний этих групп на 4-5 см⁻¹. Для наиболее стабильной твист-конформации имеет место наименьшая частота валентных колебаний С-С фенильных колец и максимум интенсивности полос валентных $\nu_{as}(C-O)$ -колебаний, к которым присоединяются С-С- и С-Н-колебания и внешних деформационных колебаний метильной группы.

Сравнительный анализ колебательных частот и интенсивностей полос для композитов с содержанием 20% и 30% компоненты НЖК 7СВ показали, что удлинение алифатической цепи очень слабо влияет на колебательные частоты ядра молекулы, а также на характер их изменения при вращении колец. Аналогичная картина наблюдается и для интенсивностей полос поглощений. Здесь необходимо отметить уменьшение на 5 см⁻¹ частоты симметричного валентного колебания $\nu_s(C-O)$ и увеличение на такое же значение частоты углового колебания $\nu(\angle COC)$. Частота валентных колебаний С-Н метильной группы в плоской конформации молекулы увеличивается на 15 см⁻¹ по сравнению с молекулой с 20%-ным содержанием НЖК 7СВ и практически не меняется при увеличении угла вращения бензольного кольца. Такие значительные изменения также претерпевают внутренние и внешние деформационные колебания метильной группы и, как следствие этого, появление частот колебаний с участием групп СН₂, нормальные моды которых в образцах с 30%-ным содержанием 7СВ включают движение всех атомов водорода алифатической цепи. При этом они будут делокализованы относительно фрагменту С₃Н₇. Для подобных колебаний наблюдается существенный частотный сдвиг относительно $\nu(CH_3)$, а также уменьшения интенсивность полос в максимуме, однако, частота и интенсивность этих полос в данном случае не зависят от угла между бензольными кольцами.

Таким образом, в настоящей работы показано, что наиболее стабильной конформацией молекулы 7СВ ($X \equiv OCH_3$, OC_3H_7) в исходном состоянии является твист-конформация с углом поворота

мономерной изомерии. Установлено, что поворот бензольных колец друг относительно друга сопровождается изменением относительной ориентации взаимодействующих орбиталей мостиковых атомов углерода колец. Предположено, что с ростом угла между плоскостями бензольных колец дипольный момент молекулы НЖК 7СБ уменьшается, и при переходе к перпендикулярной конформации молекулы наблюдается увеличение частоты колебаний валентной связи $C\equiv N$ на 5 см^{-1} и уменьшение интенсивности ИК-полосы почти на 2 раза. Выявлено, что удлинение алифатической цепи в фрагменте C_3H_7 не приводит к заметным изменениям особенностей геометрической структуры молекулы.

Поступило 24.05.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Зотов С.К., Березин К.В., Нечаев В.В. Инфракрасный спектр и структура молекулы 4-гептил-4'-цианобифенила. – Журнал физической химии, 2004, т. 78, № 11, с.204-2047.
2. Свердлов Л.М., Ковнер М.А., Крайнов Е.П. Колебательные спектры многоатомных молекул. – М.: Наука, 1970, 559 с.
3. Розенберг М.Э. Полимеры на основе поливинилацетата. – Л.: Химия, 1983, 174 с.
4. Жаркова Г.М., Сонин А.С. Жидкокристаллические композиты. – М.: Наука. 1994, 240 с.
5. Кушцов А.Х., Жижин Г.Н. Фурье-спектры КР и ИК поглощения полимеров. Справочник. – М.: Физматлит, 2001, 656 с.
6. Наканиси К. Инфракрасные спектры и строение органических соединений. – М.: Мир, 1965, 216 с.

С.К.Каримов, М.Х.Эгамов, А.Абдуманонов

ГУЗАРИШҶОИ КОНФОРМАТСИОНӢ ДАР ПАРДАҶОИ ПОЛИМЕРИИ ҚАТРАИ КРИСТАЛЛИ МОЕЪ ДОШТА

Маркази илмии Хучанди Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Нишон дода шудааст, ки конформатсияи нисбатан устувори молекулаҳои 7СБ дар ҳолати ибтидоӣ твист-конформатсия бо кунҷи гардиши изомерияи мономерӣ ҳисоб меёбад. Муқаррар карда шудааст, ки гардиши ҳалқаҳои бензолӣ нисбат ба ҳамдигар боиси дигаргуншавии самтноқшавии нисбии мадорҳои мутақобилаи атомҳои карбонӣ мегардад. Дарозшавии занҷири алифатӣ дар фрагменти C_3H_7 имконият намедихад, ки структураи геометрии молекулаҳо ба таври назаррас дигаргун шавад.

Калимаҳои калидӣ: кристалли моеъ, нематик, поливинилбутирал, спектроскопияи Фурье-инфрасурх, хати фурубурд, басомади лапши, конформатсия.

S.K.Karimov, M.Kh.Egamov, A.Abdumanonov

**CONFORMATIONAL TRANSITIONS IN CAPSULATED POLYMER LIQUID
CRYSTAL FILMS***Khujand Scientific Center of National Academy of Sciences of Tajikistan*

It was shown that the most stable conformation of the 7CB molecule ($X\equiv OCH_3$, OC_3H_7) in the initial state is considered to be the twist conformation with the rotation angle of the monomeric isomerism. It was found that the rotation of benzene rings relative to each other is accompanied by a change in the relative orientation of the interacting orbitals of the bridging carbon atoms of the rings. It was revealed that the lengthening of the aliphatic chain in the C_3H_7 fragment does not lead to noticeable changes in the features of the geometric structure of the molecule.

Key words: *liquid crystals, nematic, polyvinylbutyral, FTIR spectroscopy, absorption band, vibration frequency, conformation.*

УДК 624.04

Член-корреспондент НАН Таджикистана Д.Н.Низомов, С.С.Зарифов*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ,
РАСПОЛОЖЕННЫХ В ОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ*Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии**Национальной академии наук Таджикистана,***Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими*

В статье рассматривается математическое моделирование задач взаимодействия сооружения с упругим полупространством на основе метода граничных уравнений. Разработан алгоритм и предлагается математическая модель решения задач полупространства, ослабленной отверстием произвольной формы в условиях плоской деформации при различных воздействиях.

Ключевые слова: математическое моделирование, граничные уравнения, полупространство, полуплоскость, плоская деформация, отверстие, фундаментальное решение.

Применение модели упругого полупространства для решения задачи взаимодействия подземного сооружения с грунтом приводит к математической модели, где требуются фундаментальные решения для полупространства. Решение задачи от действия единичных сосредоточенных сил, приложенных внутри изотропной полуплоскости получено Меланом [1]. Фундаментальные решения Миндлина [2] для полупространства и Мелана для полуплоскости состоят из суммы решения Кельвина и дополнительных решений [3].

Моделирование. Пусть в точке $p(\xi, \eta)$ полуплоскости действуют единичные сосредоточенные силы e_x и e_y . От действия этих сил в точке $k(x, y)$ возникают перемещения, которые можно записать в виде

$$u_x^* = u_{xx}^* + u_{xy}^*, \quad u_y^* = u_{yx}^* + u_{yy}^* \quad (1)$$

Компоненты перемещений в (1) являются фундаментальными решениями Мелана и записываются в виде [4-8]

$$u_{xx}^* = a \left\{ -(3-4\nu) \ln r_{pk} + \cos^2 \beta_1 + \right. \\ \left. + \left[(3-4\nu) - 8(1-\nu)^2 \right] \ln R + (3-4\nu) \sin^2 \theta + 2y_p y_k (1-2\sin^2 \theta) / R^2 \right\}, \\ u_{xy}^* = a \left[\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \right.$$

Адрес для корреспонденции: Низомов Джахонгир Низомович. 734029, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ. E-mail: tiees@mail.ru, nizomov-jn@mail.ru ; Зарифов Сирочиддин Садриддинович. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект академиков Раджабовых, 10, Таджикский технический университет. E-mail: s.zarifov.1972@gmail.com

$$+(3-4\nu) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta - 4y_p y_k \cos \theta \cdot \sin \theta / R^2 + 4(1-\nu)(1-2\nu)\theta],$$

$$u_{yx}^* = a[\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \tag{2}$$

$$-4(1-\nu)(1-2\nu)\theta],$$

$$u_{yy}^* = a\{-(3-4\nu)\ln r + \cos^2 \beta_2 +$$

$$+[(3-4\nu) - 8(1-\nu)^2] \ln R + (3-4\nu)\cos^2 \theta - 2y_p y_k (1-2\cos^2 \theta) / R^2\},$$

здесь $a = 1/8\pi G(1-\nu)$, $\theta = \arctg(R_1/R_2)$, $\cos \beta_1 = r_1/r$; $\cos \beta_2 = r_2/r_{pk}$, ν – коэффициент Пуассона.

Компоненты перемещений (2) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$G_1 \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial y^2} + G_2 \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial x \partial y} = -\delta(k, p) \cdot e_x, \tag{3}$$

$$G_1 \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial x^2} + G_2 \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x \partial y} = -\delta(k, p) \cdot e_y,$$

где $G_1 = 2G(1-\nu)/(1-2\nu)$, $G_2 = G/(1-2\nu)$, G – модуль упругости при сдвиге,

$\delta(k, p) = \begin{cases} 0, & \text{при } p \neq k, \\ \infty, & \text{при } p = k \end{cases}$ – дельта-функция; p – особая точка; $k \in \bar{\Omega}$ – точка пространства,

e_x, e_y – единичные векторы, направленные соответственно по осям x и y . Деформации, соответствующие полям перемещений единичных состояний, согласно уравнениям Коши, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^* &= \frac{\partial u_{xx}^*}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yx}^* = \frac{\partial u_{yx}^*}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy}^* = \frac{\partial u_{xy}^*}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy}^* = \frac{\partial u_{yy}^*}{\partial y}, \\ \gamma_{xy,x}^* &= \frac{\partial u_{xx}^*}{\partial y} + \frac{\partial u_{yx}^*}{\partial x}, \quad \gamma_{xy,y}^* = \frac{\partial u_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial u_{yy}^*}{\partial x}. \end{aligned} \tag{4}$$

Компоненты напряжений в произвольной точке двумерной изотропной области при ее последовательном нагружении, в соответствии с законом Гука для плоской деформации, записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^* &= 2G[(1-\nu)\varepsilon_{xx}^* + \nu\varepsilon_{yy}^*]/(1-2\nu), \quad \sigma_{yx}^* = 2G[(1-\nu)\varepsilon_{yx}^* + \nu\varepsilon_{xy}^*]/(1-2\nu), \\ \sigma_{xy}^* &= 2G[(1-\nu)\varepsilon_{xy}^* + \nu\varepsilon_{yx}^*]/(1-2\nu), \quad \sigma_{yy}^* = 2G[(1-\nu)\varepsilon_{yy}^* + \nu\varepsilon_{xx}^*]/(1-2\nu), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\tau_{xy,x}^* = G\gamma_{xy,x}^*, \quad \tau_{xy,y}^* = G\gamma_{xy,y}^*, \quad \tau_{yx,x}^* = \tau_{xy,x}^*, \quad \tau_{yx,y}^* = \tau_{xy,y}^*.$$

Компоненты напряжений на любой наклонной площадке, определяемые из условия равновесия призматического элемента, представляются так:

$$\begin{aligned} p_{xx}^* &= \sigma_{xx}^* \cos \alpha_1 + \tau_{yx,x}^* \cos \alpha_2, & p_{xy}^* &= \sigma_{xy}^* \cos \alpha_1 + \tau_{yx,y}^* \cos \alpha_2, \\ p_{yx}^* &= \sigma_{yx}^* \cos \alpha_2 + \tau_{xy,x}^* \cos \alpha_1, & p_{yy}^* &= \sigma_{yy}^* \cos \alpha_2 + \tau_{xy,y}^* \cos \alpha_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Соответствующие напряжения p_{xx}^* , p_{xy}^* , p_{yx}^* , p_{yy}^* , на наклонных плоскостях можно получить из (4)-(6), например

$$\begin{aligned} p_{xx}^* &= -b \left\{ \left[(1-2\mu) + 2m_1^2 \right] \frac{\cos \gamma}{r_{pk}} + 3(1-2\mu) \frac{\sin \theta}{R} n_1 + \right. \\ &+ 2 \left[\sin^2 \theta - \frac{4y_p y_k}{R} - \frac{2y_p^2}{R^2} - 2(1-2\mu) \frac{y_k}{R} \cos \theta \right] \frac{\sin \theta}{R} n_1 + \\ &+ 16y_p y_k \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{R^3} n_1 + (1-2\mu) \frac{3y_k + y_p}{R^2} n_2 + \\ &+ 4y_p y_k \frac{\cos \theta}{R^3} n_2 + \frac{2\sin^2 \theta \cos \theta}{R} n_2 - \\ &\left. - 4(1-2\mu) \frac{y_k \cos^2 \theta}{R^2} n_2 - \frac{16y_p y_k \cos \theta \sin^2 \theta}{R^3} n_2 \right\}, \end{aligned}$$

где $b = 1/4\pi(1-\nu)$, $n_1 = \cos \alpha_1$; $n_2 = \cos \alpha_2$; $\cos \gamma = n_1 m_1 + n_2 m_2$; $m_1 = \cos \beta_1$; $m_2 = \cos \beta_2$; γ – угол наклона между радиус-вектором r_{pk} и нормалью n в точке k .

Рассмотрим задачу, которая представляет собой полуплоскость с отверстием при действии растягивающих напряжений. Здесь считается, что поверхность полуплоскости Γ_0 свободна от нагрузки. В этом случае граничное интегральное уравнение записывается в виде [5]

$$\mathbf{C}\mathbf{U}_p + \int_{\Gamma} \mathbf{P}^* \mathbf{U}_k d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^* \mathbf{P}_k d\Gamma, \quad (7)$$

где векторы искомых перемещений и заданных напряжений представляются в виде

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Симметричные матрицы коэффициентов, фундаментальных перемещений и напряжений записываются так:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{xx} & -c_{yx} \\ -c_{xy} & c_{xx} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} u_{xx}^* & u_{yx}^* \\ u_{xy}^* & u_{yy}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} p_{xx}^* & p_{xx}^* \\ p_{xx}^* & p_{xx}^* \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где для гладкой границы $c_{xx} = c_{yy} = 0,5$; $c_{xy} = c_{yx} = 0$.

В случае, когда на поверхности Γ_0 полуплоскости действует внешняя нагрузка, интегральное уравнение принимает вид [4], [6]

$$\mathbf{C}\mathbf{U}_p + \int_{\Gamma} \mathbf{P}^* \mathbf{U}_k d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^* \mathbf{P}_k d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}^* \mathbf{P}_0 d\Gamma, \quad (10)$$

здесь $\mathbf{P}_0 = \{q_x, q_y\}^T$ – вектор заданной нагрузки на поверхности полуплоскости. Значения коэффициентов матрицы \mathbf{C} зависят от местоположения точки $p(\xi, \eta)$. При расположении точки $p(\xi, \eta)$ на поверхности Γ_0 , матрица \mathbf{C} становится единичной матрицей второго порядка. Когда точка $p \in \Gamma$, то интеграл в левой части (7) понимается в смысле главного значения и система граничных уравнений для n узлов сплайна записывается в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N a_{ij}^* u_{xj} + \sum_{j=1}^N b_{ij} u_{yj} &= -\sigma_x^0 \sum_{j=1}^N e_{ij} \cos \alpha_{1j}, \\ \sum_{j=1}^N c_{ij} u_{xj} + \sum_{j=1}^N d_{ij}^* u_{yj} &= -\sigma_x^0 \sum_{j=1}^N g_{ij} \cos \alpha_{1j}, \\ a_{ij}^* &= a_{ij} + 0,5\delta_{ij}, \quad d_{ij}^* = d_{ij} + 0,5\delta_{ij}, \end{aligned} \quad (11)$$

где i – номер фиксированного элемента, j – номер элемента, в котором производится интегрирование; N – число узлов на контуре отверстия; u_x, u_y – компоненты искомых перемещений, σ_x^0 – заданные на бесконечность растягивающие напряжения, α_{1j} – угол между осью x и внутренней нормалью n в j -ом элементе; δ_{ij} – символ Кронекера.

Систему уравнений (11) можно представить в матричной форме

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = -\mathbf{B}, \quad (12)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \sigma_x^0, \quad (13)$$

$$U_x = \{u_{x1} \ u_{x2} \ \dots \ u_{xn}\}^T, \quad U_y = \{u_{y1} \ u_{y2} \ \dots \ u_{yn}\}^T,$$

$$C_1 = \{c_{11} \ c_{12} \ \dots \ c_{1n}\}^T, \quad C_2 = \{c_{21} \ c_{22} \ \dots \ c_{2n}\}^T,$$

$$c_{1j} = \cos \alpha_{1j}, \quad c_{2j} = \sin \alpha_{1j},$$

где \mathbf{A} – квадратная матрица порядка N . Матрицы A, B, C, D и E, F, G, H формируются из коэффициентов, которых можно представить в виде

$$a_{ij} = \int_{S_j} p_{xx}^* ds + 0,5\delta_{ij}, \quad b_{ij} = \int_{S_j} p_{yx}^* ds, \quad c_{ij} = \int_{S_j} p_{xy}^* ds, \quad d_{ij} = \int_{S_j} p_{yy}^* ds + 0,5\delta_{ij}, \quad (14)$$

$$e_{ij} = \int_{S_j} u_{xx}^* ds, \quad f_{ij} = \int_{S_j} u_{yx}^* ds, \quad g_{ij} = \int_{S_j} u_{xy}^* ds, \quad h_{ij} = \int_{S_j} u_{yy}^* ds, \quad (15)$$

здесь $u_{xx}^*, \dots, p_{xx}^*, \dots$ – фундаментальные решения Мелана, S_j – длина j -го элемента на контуре Γ .

Вычислив коэффициенты (14) и (15) с использованием квадратурной формулы Гаусса с четным числом точек, после формирования общей матрицы коэффициентов и вектора свободных членов, из решения системы (11) получаем значения векторов перемещений. По найденным перемещениям определим компоненты деформации, а затем вычислим компоненты тензора напряжений [4-8].

Пример. В качестве примера рассмотрим одноосное растяжение полуплоскости с круговым отверстием в условиях плоской деформации (рис.). Численное интегрирование коэффициентов было произведено методом Гаусса [9] с 8 точками.

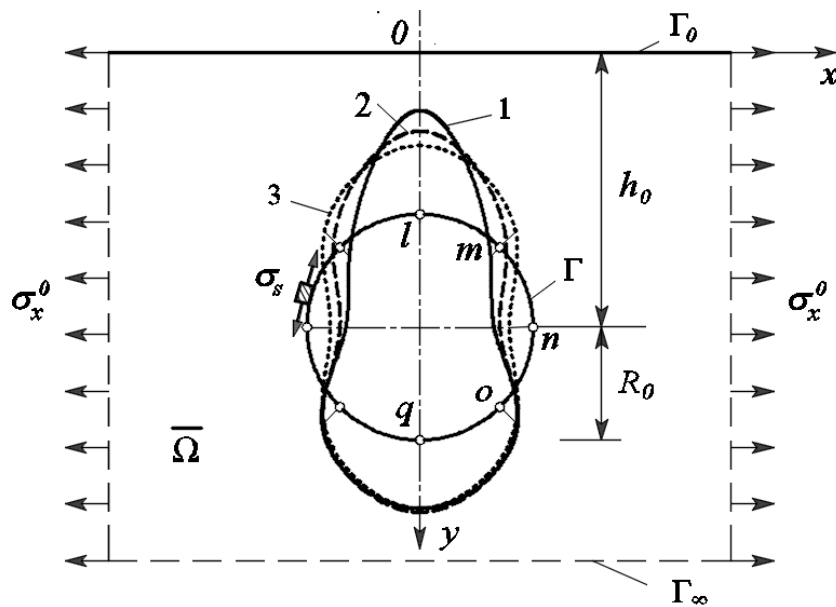


Рис. Эпюра тангенциальных напряжений: 1; 2; 3 – при $h_0 = 1.5; 2.0; 6.0$

Значения тангенциальных напряжений σ_s на контуре отверстия, при действии горизонтального растягивающего напряжения, при различных значениях глубины, приведены в таблице. Результаты численного решения получены при разбиении контура отверстия на 64 элемента нулевого порядка. Расчёты выполнены по разработанной компьютерной программе, при следующих данных: $\sigma_x^0 = 1, R_0 = 1, G = 1, \nu = 0.25$. Из анализа результатов, приведенных в таблице и на рисунке, следует, что при достаточном удалении от поверхности полуплоскости, при $h_0 \geq 6R_0$, решения для полуплоскости практически совпадает с аналитическим решением [10].

Таблица

Распределение тангенциальных напряжений на контуре отверстия без подкрепления от действия горизонтального растягивающего напряжения σ_x при различных глубинах

h_0	Контрольные узлы				
	l	m	n	o	q
$1.5R_0$	4.594	-0.579	-1.727	1.116	3.301
$2R_0$	3.678	0.392	-1.468	1.043	3.185
$4R_0$	3.119	0.920	-1.125	1.000	3.053
$6R_0$	3.041	0.975	-1.048	1	3.021
$8R_0$	3.016	0.990	-1.020	1.000	3.008
Аналитическое решение	3	1	-1	1	3

В ы в о д

Таким образом, на основе метода граничных уравнений разработаны математическая модель и алгоритм решения задачи полупространства, ослабленного отверстием произвольной формы в условиях плоской деформации при различных воздействиях. Предлагаемая методика может быть использована для решения задач подземных сооружений с подкреплениями, взаимодействующими с упругим полупространством.

Поступило 30.11.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Melan E. Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Inneren beanspruchten-Halbscheibe. – Z. Angew. Math. Mech., 1932, №12, pp. 343-346.
2. Mindlin R.D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. – Proc. First Midwestern Conf. Solid Mech., Univ. of Illinois, Urbana, 1953.
3. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970, 939 с.
4. Низомов Д.Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов (АСВ), 2000, 282 с.
5. Низомов Д.Н., Ходжибоев А.А., Ходжибоев О.А. Метод граничных уравнений в решении двумерных задач теории упругости. – Душанбе: Дониш, 2019, 435 с.
6. Зарифов С.С. Численное исследование концентрации напряжений на контурах подземных сооружений методом граничных уравнений: Автореф. дисс. к.техн. н. – Душанбе, 20019, 23 с.
7. Низомов Д.Н., Ходжибоев А.А., Зарифов С.С. Концентрация напряжений на контуре незамкнутой крепи. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2012, №2 (147), с. 58-64.
8. Зарифов С.С. Исследование напряженно-деформированного состояния незамкнутой крепи методом граничных уравнений. – Вестник ТТУ, 2015, №2 (30), с.106-110.
9. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970, 664 с.
10. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990, 399с.

Ч.Н.Низомов, С.С.Зарифов*

**МОДЕЛСОЗИИ МАТЕМАТИКИИ ИНШООТҲОИ ЗЕРИЗАМИНӢ,
КИ ДАР МУҲИТИ ЯКЧИНСАИ ЭЛАСТИКӢ ҶОЙГИР ШУДААНД**

Институти геология, сохтмони заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

**Донишгоҳи техникаи Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ*

Дар мақола моделсозии математикии масъалаи ҳамтаъсирии иншоот бо нимфазаи эластикӣ дар асоси методи муодилаҳои канорӣ баррасӣ шудааст. Алгоритм ва модели математикии ҳалли масъалаҳои нимфазо, бо суроҳии шакли ихтиёрӣ дошта дар шароитҳои деформатсияи ҳамвор аз таъсиротҳои гуногун коркард шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: моделсозии математикӣ, муодилаҳои канорӣ, нимфазо, нимҳамворӣ, деформатсияи ҳамвор, сӯроҳӣ, ҳалли фундаменталӣ.

J.N.Nizomov, S.S.Zarifov*

**MATHEMATICAL MODELING OF THE UNDERGROUND STRUCTURES
LOCATED IN UNIFORM SPRINGY AMBIENCE**

Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology

of the National Academy of Sciences of Tajikistan,

**M.Osimi Tajik technical University*

This article deals with mathematical modeling of interaction problems between a structure and an elastic half-space based on the method of boundary equations. An algorithm and mathematical model for solving problems of the half-space weakened by a hole of arbitrary shape under plane deformation under various influences have been developed.

Key words: mathematical modeling, boundary equations, half-space, half-plane, plane deformation, hole, fundamental solution.

УДК 546.31(575.3)

С.М.Гафорзода, Д.Х.Мирзоев, Д.О.Давлатов, Н.М.Джамолов,

академик НАН Таджикистана У.М.Мирсаидов

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОТЕКАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ РАЗЛОЖЕНИИ КАОЛИНОВЫХ ГЛИН МЕСТОРОЖДЕНИЯ ЧАШМА-САНГ ТАДЖИКИСТАНА СОЛЯНОЙ КИСЛОТОЙ

Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана

В статье приведены результаты термодинамического расчёта разложения каолиновых глин месторождения Чашма-Санг соляной кислотой, также определены термодинамические характеристики минералов, входящих в состав алюмосиликатного сырья и расчёт энергии Гиббса для каждой реакции.

Ключевые слова: каолиновые глины, энтальпия, энтропия, энергия Гиббса, разложение.

Ранее [1-3] были изучены процессы разложения алюмосиликатных руд минеральными кислотами, найдены оптимальные условия процессов разложения кислотами и предложены принципиальные технологические схемы переработки алюмосиликатных руд.

Как известно, каолиновые глины месторождения Чашма-Санг состоят из следующих минералов: каолинит ($\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$), гематит (Fe_2O_3), гётит ($\text{FeO}(\text{OH})$), кварц (SiO_2), монтмориллонит ($(\text{OH})_4\text{Si}_8\text{Al}_4\text{O}_{20} \cdot n\text{H}_2\text{O}$), иллит ($\text{KAl}_2[\text{AlSi}_3\text{O}_{10}](\text{OH})_2$), гидраргиллит ($\text{Al}(\text{OH})_3$), гидрослюда ($3\text{NaAl}_2[\text{AlSi}_3\text{O}_{10}](\text{OH})_2$) [4-5].

В табл.1 приведены справочные данные по изменению энтальпии и энтропии веществ и минералов, которые содержатся в рудах – каолиновых глинах месторождения Чашма-Санг.

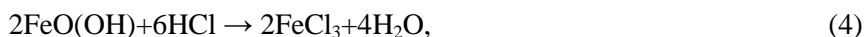
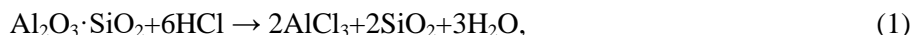
Таблица 1

Термодинамические характеристики минералов каолиновой глины месторождения Чашма-Санг

№	Вещество	ΔH_{298}^0 , кДж/моль	ΔS_{298}^0 , Дж/моль·К
1.	$\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}_{\text{кр}}$	-4098.6	203
2.	$\text{NaAl}_2[\text{AlSi}_3\text{O}_{10}](\text{OH})_2_{\text{кр}}$	-5932	284.5
3.	$\text{KAl}_2[\text{AlSi}_3\text{O}_{10}](\text{OH})_2_{\text{кр}}$	-5982	306.4
4.	$\text{FeO}(\text{OH})_{\text{кр}}$	-558	60.3
5.	HCl	-92.3	186.8
6.	$\text{SiO}_2_{\text{кр}}$	-910.90	42.00
7.	$\text{H}_2\text{O}_{\text{ж}}$	-286	70
8.	$\text{Al}(\text{OH})_3$	-1219.8	91.87
9.	KCl	-436.5	82.55
10.	NaCl	-411.4	72.13
11.	FeCl_3	-399.4	-139.4
12.	AlCl_3	-704.16	109.3

Адрес для корреспонденции: Мирзоев Давлатмурод Хайруллоевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: daviatmurod.mirzoev.71@mail.ru

При взаимодействии соляной кислоты с минералами каолиновых глин вероятно протекание следующих реакций:



Основными функциями, характеризующими состояние системы, являются следующие термодинамические характеристики: энтальпия, энтропия и энергия Гиббса. Термодинамическое обоснование разложения реакций проведено с использованием следующих уравнений:

$$\Delta H_p^0 = \sum \Delta_f H_{\text{кон.продукт}}^0 - \sum \Delta_f H_{\text{исх.вещ-во}}^0,$$

$$\Delta S_p^0 = \sum \Delta S_{\text{кон.продукт}}^0 - \sum \Delta S_{\text{исх.вещ-во}}^0,$$

$$\Delta G_p^0 = \Delta H_p^0 - T \Delta S_p^0.$$

Для каждой реакции были рассчитаны термодинамические характеристики, которые приведены в табл.2 и 3.

Таблица 2

Вычисленные термодинамические характеристики реакций, протекающих при разложении каолиновой глины совместно с HCl

№ схемы реакции	ΔH_{298}^0 , кДж/моль	ΔS_{298}^0 , Дж/моль·град	ΔG_{298}^0 , кДж/моль
(1)	904.23	-0.7134	1116.82
(2)	-231.76	0.1575	-278.69
(3)	-181.56	-2.4368	544.6
(4)	-271.9	-1.24	97.62
(5)	-280.25	-1277.05	100.296
(6)	-129.72	-0.665	68.45

Результаты расчёта термодинамических характеристик предполагаемых реакций (1)-(6) в исследуемых системах приведены в табл.3.

Таблица 3

Значения энергии Гиббса (ΔG^0 , кДж/моль) рассматриваемых реакций при различных температурах

№ реакции	ΔG_{298}^0	ΔG_{318}^0	ΔG_{338}^0	ΔG_{358}^0	ΔG_{371}^0
(1)	1116.82	1131.09	1145.35	1159.62	1168.9
(2)	-278.69	-281.845	-284.995	-288.135	-290.192
(3)	544.6	593.34	642.07	690.81	722.49
(4)	97.62	122.42	146.22	172.02	188.14
(5)	100.29	125.83	151.37	176.91	193.51
(6)	68.45	81.75	95.05	108.35	116.99

Результаты расчёта термодинамических характеристик предполагаемых реакций (табл.2) указывают на вероятность протекания процессов в стандартных условиях. В табл.3 и на рис. приводятся результаты зависимости энергии Гиббса рассматриваемого процесса разложения от повышения температуры (серия опытов проводилась при $t=298, 318, 338, 358, 371$ К), по результатам опытов можно констатировать, что повышение температуры положительно влияет на разложение каолиновых глин соляной кислотой, то есть при увеличении температуры реакции минералов с соляной кислотой протекают значительно быстрее.

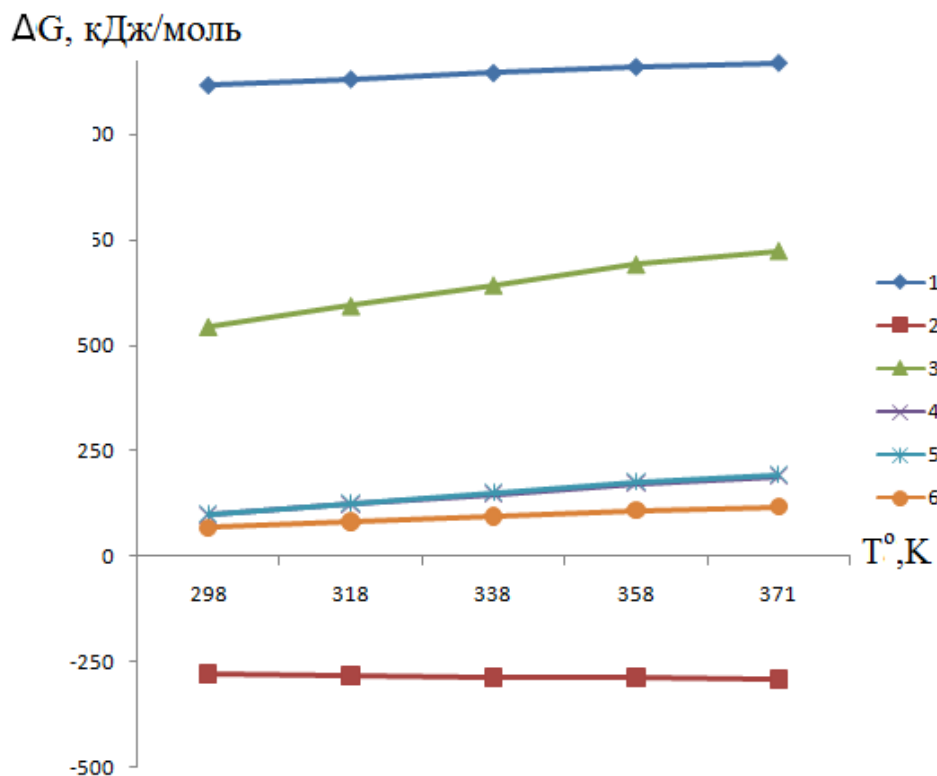


Рис. Зависимости изменения ΔG от температуры разложения минералов, содержащихся в каолиновых глинах, при разложении соляной кислотой: 1 – каолинит, 2 – гидрослюда, 3 – иллит, 4 – гётит, 5 – гематит, 6 – гидраргилит.

Таким образом, переработка каолиновых глин с соляной кислотой показывает на необходимость проведения процесса при температурах 298-371 К с получением полезных компонентов.

Поступило 22.11.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Отаев Ш.Д., Гафорзода С.М., Аъзамов Ш.О., Мирзоев Д.Х. Оценка процесса разложения аргиллитов месторождения Чашма-Санг минеральными кислотами. – Междунар. научно-практ. конф. «Перспективы использования материалов, устойчивых к коррозии, в промышленности Республики Таджикистан». – Душанбе, 2018, с.24.
2. Каюмов А.М., Мирзоев Д.Х., Отаев Ш.Д., Гафорзода С.М. Физико-химические основы разложения низкокачественных алюминийсодержащих руд минеральными кислотами. – Там же, с.26.

3. Мирзоев Д.Х., Отаев Ш.Д., Гафурзода С.М., Аъзамов Ш.О. Оценка процесса разложения каолиновых глин минеральными кислотами и уксусной кислотой. – Там же, с.126.
4. Отаев Ш.Д., Мирзоев Д.Х., Каюмов А.М., Мирсаидов У.М. Термодинамическая оценка разложения каолиновых глин месторождения Чашма-Санг Таджикистана минеральными кислотами. – Изв. АН РТ, 2019, №4(177), с.98.
5. Отаев Ш.Д., Мирзоев Д.Х., Джамолов Н.Н. и др. Термодинамический анализ протекающих процессов при разложении каолиновых глин месторождения Чашма-Санг Таджикистана фосфорной кислотой. – ДАН РТ, 2019, т.62, №11-12.

С.М.Гафурзода, Д.Х.Мирзоев, Д.О.Давлатов, Н.М.Чамолов, У.М.Мирсаидов

**ТАҲЛИЛИ ТЕРМОДИНАМИКИИ ГУЗАРИШИ РАВАНДҶО ҲАНГОМИ
ТАҶЗИЯИ МИНЕРАЛИ ХОКАИ КАОЛИНӢ КОНИ ЧАШМА-САНГИ
ТОҶИКИСТОН БО КИСЛОТАИ ХЛОРИД**

Институти химияи ба номи В.И.Никитини Академияи милли илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола натиҷаҳои ҳисоби термодинамикии хокаи каолини кони Чашма-Санг бо кислотаи хлорид оварда шудааст. Инчунин характеристикаи термодинамикии минералҳои таркиби маъдани алюмосиликати ва ҳисоби энергияи Гиббс барои ҳар кадом реаксия муайян карда шудааст

Калимаҳои калидӣ: маъдани каолинӣ, энталпия, энтропия, энергияи Гиббс, таҷзия.

S.M.Gaforzoda, D.Kh.Mirzoev, D.O.Davlatov, N.M.Jamolov, U.M.Mirsaidov

**THERMODYNAMIC ANALYSIS OF OCCURED PROCESSES DURING THE
DECOMPOSITION OF KAOLIN CLAYS OF THE CHASHMA-SANG DEPOSIT
OF TAJIKISTAN WITH CHLORIDE ACID**

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, National Academy of Sciences of Tajikistan

In this article the results of thermodynamic calculations for the decomposition of kaolin clays of the Chashma-Sang deposit with chloride acid are presents, the thermodynamic characteristics of the minerals included in the aluminosilicate raw material and the calculation of the Gibbs energy for each reaction have been determined.

Key words: kaolin clays, enthalpy, entropy, Gibbs energy, decomposition.

УДК 547.556.9

К.С.Мабаткадамзода

УСТОЙЧИВОСТЬ 1-ФЕНИЛ-2,3-ДИМЕТИЛПИРАЗОЛИНТИОННЫХ КОМПЛЕКСОВ Fe(III) В СЕРНОКИСЛОМ И СОЛЯНОКИСЛОМ РАСТВОРАХ*Таджикский национальный университет**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана А.Бадаловым 03.01.2022 г.)*

Изучен процесс комплексообразования Fe(III) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолинтионом (FPt) в растворе, содержащем 2 моль/л H₂SO₄ (HCl). Установлено, что процесс комплексообразования Fe(III) с этим органическим лигандом протекает ступенчато. Определены величины констант устойчивости всех комплексных форм. Показано, что устойчивость комплексов железа (III) с FPt в растворе 2 моль/л HCl больше, чем в H₂SO₄.

Ключевые слова: железо (III), 1-фенил-2,3-диметилпиразолинтион, константа устойчивости, комплексы, комплексообразование, потенциометрическое титрование.

Изучение влияния природы растворителя на процессы комплексообразования представляет интерес не только для неорганической химии, но и для решения задач физико-химических и биолого-химических дисциплин. Это предопределено значимостью координационных равновесий в водных и неводных растворителях, а также представляет теоретический интерес для установления причинно-следственной связи процессов комплексообразования. В настоящей работе приведены результаты исследования влияния H₂SO₄ и HCl на равновесие комплексообразования Fe(III) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолинтионом в растворе. Известно, что производные пиразолона являются классом органических реагентов. Их серосодержащие аналоги 1-фенил-2,3-диметилпиразолинтион и его производные использованы для экстракционного выделения мягких катионов или их экстракционно-фотометрического определения [1,2]. Наряду с этим данные соединения, благодаря наличию в их составе нескольких донорных групп, способны к комплексообразованию с различными металлами, как в растворе, так и в твердом виде. Амнджановым А.О. и др. в [3] изучен процесс комплексообразования Fe(V) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолинтионом в растворе HBr. В работах [4,5] потенциометрическим методом исследован процесс комплексообразования Mo(V) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолинтионом в растворах 5 и 6,5 моль/л HCl. Термодинамические свойства нитратного комплекса Fe(II) с трис(3,5-диметилпиразол-1-ил) метаном исследованы в [6]. Установлено, что в трис(3,5-диметилпиразол-1-ил) метансодержащем комплексе железа (II) величины избыточной энтропии выше значений, соответствующей электронному вкладу, обусловленному изменением спина. Этот экспериментальный факт позволил авторам сделать вывод, что наблюдаемая аномалия теплоемкости с максимумом при T_{тс} = -229.7 К в исследованном нитратном комплексе Fe(II) с трис(3,5-диметилпиразол-1-ил)метаном является фазовым переходом первого рода. Исследованию комплексо-

Адрес для корреспонденции: Мабаткадамзода Кимё Сабзикадам. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: kimyo84@mail.ru

образования меди (II) и железа(III) с тиопирином посвящены работы [7,8]. Установлены состав и количество тиопириносодержащих комплексов в зависимости от температуры в растворах HCl и смешанного растворителя.

В литературе отсутствуют данные относительно влияния природы растворителя (H₂SO₄, HCl) на состав и устойчивость комплексов Fe(III) с FPt. Целью настоящей работы явилось исследование процесса комплексообразования Fe(III) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолинтионом в растворах 2 моль/л H₂SO₄ (HCl) при 288 К.

Экспериментальная часть

Процесс комплексообразования Fe(III) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом в растворе 2 моль/л H₂SO₄ (HCl) исследовали с использованием окислительно-восстановительного электрода на основе 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тиона и его окисленной формы. Исходными соединениями служили Fe₂(SO₄)₃·9H₂O (FeCl₃·7H₂O) марки «ч.д.а.» и 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тиона, который был синтезирован в соответствии с методикой [9]. Потенциометрическое титрование проводили с использованием компаратора напряжения Р-3003М1. Точность поддержания температуры составила ±0.1°C. Различную концентрацию окисленной и восстановленной форм 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тиона создавали окислением его части в среде 2 моль/л H₂SO₄ (HCl) 0.1 N раствором J₂. Индикаторным электродом служила платиновая пластинка. В качестве электрода сравнения использовали хлорсеребряный электрод. Расчёт равновесной концентрации органического лиганда (L) в каждой точке титрования и функцию образования (\bar{n}) находили по формулам:

$$\lg[L] = \frac{E_{исх} - E_i}{1.983 \cdot 10^{-4} T} + \lg C_L^{исх} + \frac{1}{2} \lg \frac{V_{исх}}{V_{общ}}, \quad (1)$$

$$\bar{n} = \frac{C_L - [L]}{C_{Fe(III)}}, \quad (2)$$

где E_{исх} – исходный равновесный потенциал системы в отсутствие железа(III); E_i – равновесный потенциал системы в данной точке титрования; C_L – исходная аналитическая концентрация лиганда; C_{Fe(III)} – исходная аналитическая концентрация железа(III), V_{исх}/V_{общ} – отношения исходного объёма системы к общему; T – температура проведения опыта.

Все расчёты по определению равновесной концентрации FPt, функции образования, уточнение констант устойчивости и мольных долей проводились с использованием компьютерной программы.

Результаты и их обсуждения

В качестве иллюстрации представлены (см. табл. 1) результаты потенциометрического титрования и результаты по определению равновесной концентрации FPt, функции образования комплексов Fe (III) с FPt в растворе, содержащем 2 моль/л H₂SO₄ при 288 К.

Таблица 1

Результаты потенциометрического титрования системы R-S-S-S/2RS, где RS- FPt, раствором Fe(III) в среде 2 моль/л H₂SO₄ при 288 К, C_{Fe(III)}^{исх}=0.1моль/л; C_L^{исх}=0.01моль/л

ΔE, мВ	C _{FPt} , моль/л	C _{Fe(III)} , моль/л	lg[FPt]	\bar{n}	ΔE, мВ	C _{FPt} , моль/л	C _{Fe(III)} , моль/л	lg[FPt]	π
37.6	0.00984	0.00151	-2.666	4.93	218.6	0.00906	0.00933	-5.851	0.97
52.3	0.00977	0.00232	-2.925	3.69	224.6	0.00900	0.00998	-5.958	0.90
70.6	0.00969	0.00307	-3.247	2.97	243.6	0.00887	0.01124	-6.293	0.79
125.6	0.00961	0.00380	-4.211	2.51	256.6	0.00869	0.01310	-6.525	0.66
145.7	0.00955	0.00453	-4.564	2.09	265.6	0.00845	0.01541	-6.689	0.55
157.6	0.00947	0.00525	-4.774	1.80	272.0	0.00818	0.01815	-6.808	0.45
169.1	0.00940	0.00596	-4.977	1.58	275.6	0.00782	0.02170	-6.881	0.36
175.9	0.00931	0.00665	-5.098	1.40	279.5	0.00737	0.02627	-6.962	0.28
190.6	0.00926	0.00733	-5.357	1.26	284.2	0.00685	0.03148	-7.060	0.22
198.6	0.00919	0.00801	-5.498	1.15					

Показано, что при добавлении Fe(III) к раствору, содержащему R-S-S-S/2RS в среде 2 моль/л H₂SO₄ (HCl), равновесный потенциал гальванического элемента закономерно увеличивается. Этот экспериментальный факт свидетельствует об участии восстановленной формы FPt в комплексообразовании с Fe(III). При этом обработка экспериментальных результатов показала, что для системы Fe(III) – FPt – 2 моль/л H₂SO₄ (HCl) максимальное значение функции Бьеррума в зависимости от природы растворителя принимает значение 4.7-4.9.

На основании данных таблицы 1 и полученных уточненных значений равновесной концентрации FPt построена зависимость \bar{n} от -lg[FPt], представленная на рисунке.

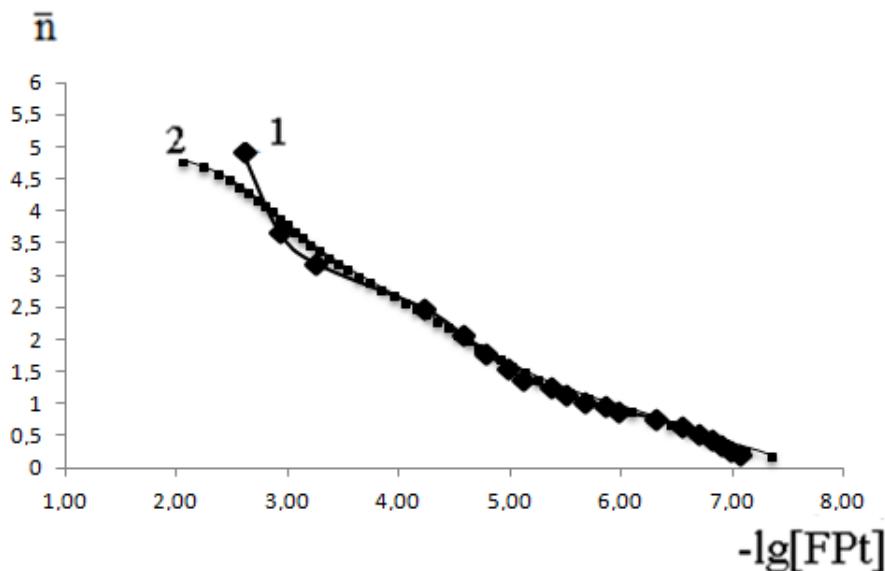


Рис. Кривые образования 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионных комплексов Fe(III) в растворе 2 моль/л H₂SO₄ при 288 К: 1 – экспериментальные, по данным табл.1, 2 – после уточнения и обработки результатов.

Из кривых видно, что процесс комплексообразования 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионных комплексов Fe(III) в данных условиях протекает ступенчато с образованием пяти комплексных форм. Из полученного графика при полуцелых значениях функции Бьеррума оценены ступенчатые константы устойчивости, которые далее были уточнены.

В табл. 2 представлены ступенчатые константы устойчивости комплексов Fe(III) 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом в среде 2 моль/л H₂SO₄ (HCl) при 288 К.

Таблица 2

Величины ступенчатых констант устойчивости комплексов Fe(III)
1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом в среде 2 моль/л H₂SO₄ (HCl)

Среда	$\lg K_{1[FeL]}^{3+}$	$\lg K_{2[FeL_2]}^{3+}$	$\lg K_{3[FeL_3]}^{3+}$	$\lg K_{4[FeL_4]}^{3+}$	$\lg K_{5[FeL_5]}^{3+}$
H ₂ SO ₄	6.79±0.02	5.19±0.06	4.15±0.01	3.22±0.02	2.33±0.1
HCl	7.21±0.10	5.61±0.02	4.19±0.05	3.56±0.06	2.96±0.2

Как видно из таблицы, вхождение объёмных молекул 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тиона во внутреннюю координационную сферу комплекса Fe(III) приводит к дестабилизации комплексных форм. Установлено, что природа растворителя не влияет на количество образующихся комплексов, но оказывает значительное влияние на их устойчивость. Показано, что в целом устойчивость комплексов в солянокислом растворе больше, чем в серноукислом. Нужно отметить, что с точки зрения электростатики, более полярный лиганд будет сильнее связан с ионом металла и соответственно сульфатный ион будет больше влиять на равновесие комплексообразования Fe(III) с FPt. Следовательно, можно ожидать образования комплексов более устойчивых в среде 2 моль/л соляной кислоты, чем комплексов в среде 2 моль/л H₂SO₄. Устойчивость комплексов изменяется и при возрастании концентрации H₂SO₄ (HCl) в растворе. Сравнение полученных нами данных с данными работ [10,11] показало, что при увеличении концентрации HCl до 6 моль/л величины ступенчатых констант устойчивости уменьшаются, а в растворе H₂SO₄ они наоборот увеличиваются. Проведенные исследования показали, что природа растворителя в целом не изменяет характер комплексообразования Fe(III) с FPt, но влияет на устойчивость образующихся комплексов.

Используя значение констант устойчивости построены диаграммы распределения комплексных форм, образующихся в системе Fe(III) – FPt – H₂SO₄(HCl). Рассчитанные мольные доли и построенные диаграммы распределения комплексов дали возможность найти концентрацию каждой комплексной частицы и максимальную степень её накопления в зависимости от природы растворителя.

Полученные результаты могут быть использованы как справочные данные для направленного синтеза комплексов с большим практическим выходом.

Поступило 03.01.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Живописцев В.П., Петров Б.И. Диантипирилметан и его гомологи как аналитические реагенты. – Ученые записки ПГУ, Пермь, 1974, №324, с.12-30.
2. Долгеров А.В., Лысак Я.Г., Зибарова Ю.Ф. Тиопирин и дитиопириметан – новые аналитические реагенты. Синтез и свойства. Применение производных пиразолона в аналитической химии. – Межвуз.сб. науч. трудов. – Пермь, 1977, с. 8-15.

3. Аминджанов А.А., Рафиев Р.С., Бекназарова Н.С. Комплексообразование рения (V) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом в среде 6 моль/л HBr при 288 К. – ДАН РТ, 2009, т.52, № 7, с. 522-525.
4. Азизкулова О.А., Эгамбердиев А.Ш. Комплексообразование молибдена (V) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом в среде 5 моль/л HCl при 298 К. – Вестник ТНУ, 2017, №1/2, с. 143-148.
5. Азизкулова О.А., Эгамбердиев А.Ш., Абдулхаева М.И. Исследование процессов комплексообразования молибдена (V) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом в среде 6,5 моль/л HCl при 308 К. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2016, № 4 (165), с. 76-83.
6. Березовский Г.А., Далецкий В.А., Пищур Д.П., Стрекалова А.Д., Лавренова Л.Г. Термодинамические свойства комплексного соединения нитрата железа(II) с трис(3,5-диметилпиразол-1-ил)метаном. – Журн. физич. химии, 2013, т.87, №8, с. 1285-1288.
7. Аминджанов А.А., Хасанов Ф.Н., Баходуров Ю.Ф., Бекназарова Н.С. Термодинамические характеристики процесса комплексообразования меди(II) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом в среде 5 моль/л HCl. – Мат-лы XII всероссийской конференции с международным участием «Проблемы сольватации и комплексообразования в растворах. От эффектов в растворах к новым материалам». – Иваново, 2015, с.200-201.
8. Бекназарова Н.С., Хасанов О.К. Исследование процесса комплексообразования в системе железо (III)–1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тион–6 моль/л HCl + ацетон потенциометрическим методом. – Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020, № 5, с. 83-96.
9. Биккулова А.Т., Капина А.П., Медведева Е.А. Синтез и свойства комплексов 1-фенил-2,3-диметилпиразолон-5-тиона с металлами. – Журн. неорганической химии, 2005, т.8, с.1831-1833.
10. Аминджанов А.А., Баходуров Ю.Ф., Рахматуллоев Б.К., Бекназарова Н.С. Комплексообразования железа (III) с 1-фенил-2,3-диметилпиразолин-5-тионом в среде 6 моль/л HCl при 288 К. – Наука и инновация Таджикского национального университета, 2014, с. 108-112.
11. Мабаткадамзода К.С., Сафармамадов С.М., Рахматуллоев Б.К. Окислительно-восстановительная система на основе тиопирина и его координационные соединения с железом (III) – Международная конференция. Химия и технология функциональных материалов. – Иваново, 2020, с. 25.

К.С.Мабаткадамзода

УСТУВОРИИ ПАЙВАСТҲОИ КОМПЛЕКСИИ Fe(III) БО 1-ФЕНИЛ-2,3-ДИМЕТИЛПИРАЗОЛИНТИОН ДАР МАҲЛУЛИ КИСЛОТАИ СУЛФАТ ВА ХЛОРИД

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Раванди комплексҳосилкунии Fe(III) бо 1-фенил-2,3-диметилпиразолинтион (FPt) дар маҳлуле, ки 2 мол/л H₂SO₄ (HCl) дорад, омӯхта шуд. Муқаррар карда шуд, ки раванди комплексҳосилшавии Fe(III) бо ин лиганди органикӣ зинагӣ мегузарад. Бузургиҳои собиҳои устуворӣ барои ҳамаи шаклҳои комплексӣ муайян карда шуданд. Нишон дода шудааст, ки устувории комплексҳои оҳани (III) бо FPt ҳангоми гузариш аз H₂SO₄ ба HCl меафзояд.

Калимаҳои калидӣ: оҳани(III), 1-фенил-2,3-диметилпиразолинтион, собитаи устуворӣ, комплексҳо, комплексоҳосилкунӣ, титронии потенциометрӣ.

K.S.Mabatkadamzoda

STABILITY OF 1-PHENYL-2,3-DIMETHYLPYRAZOLINTION COMPLEXES OF Fe(III) IN SULFURIC ACID AND HYDROCHLORIC ACID SOLUTIONS

Tajik National University

The process of complexation of Fe(III) with 1-phenyl-2,3-dimethylpyrazolintion (FPt) in a solution containing 2 mol/l H₂SO₄ (HCl) has been studied. It is established that the process of complexation of Fe(III) with this organic ligand proceeds stepwise. The values of stability constants of all complex forms are determined. It is shown that the stability of iron (III) complexes with FPt increases during the transition from H₂SO₄ to HCl.

Key words: *iron (III), 1-phenyl-2,3-dimethylpyrazolintion, stability constant, complexes, complex formation, potentiometric titration.*

УДК 691.32

А.Шарифов, З.Х.Гайбуллаева*, Д.С.Неъматзода, З.А.Гозиев

**ЭФФЕКТИВНЫЕ СПОСОБЫ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ КОРРОЗИИ
ГИДРОТЕХНИЧЕСКОГО БЕТОНА***Дангаринский государственный университет,***Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими**(Представлено академиком НАНТ И.Н.Ганиевым 14.04.2021 г.)*

Статья посвящена способам предотвращения коррозии бетона для повышения долговечности гидротехнических сооружений. Проведено модифицирование состава цемента минеральными добавками из природного волластонита, отхода обогащения флюоритовых руд и золы угля, и органо-химическими добавками из декстрина, модифицированного технического лигносульфоната и щелочного экстракта стеблей хлопчатника. Указанные добавки при гидратации минералов цемента способствовали образованию коррозионностойких соединений и низко пористой структуры цементного камня, повышающих строительно-технические качества бетона. Добавки повышали прочность, водонепроницаемость и коррозионностойкость гидротехнического бетона в дистиллированной и минерализованной водах, растворах сульфата магния и серной кислоты.

Ключевые слова: гидротехнический бетон, коррозия бетона, цемент, минералы клинкеры, минеральные и органо-химические добавки, прочность, водонепроницаемость, стойкость, долговечность сооружений.

В нашей статье [1] более подробно рассмотрены факторы, способствующие протеканию коррозии гидротехнического бетона. Было показано, что протекание коррозии бетона зависит от таких факторов, как вещественный состав продуктов гидратации минералов цемента, пористость цементного камня, вещественный состав влияющий на бетон среды, прочность и водонепроницаемость структуры бетона и др. На деле практически невозможно исключить влияние среды на строительные сооружения, поэтому решение вопроса предотвращения коррозии бетона в них сводится к созданию непроницаемой или малопроницаемой структуры цементного камня, что достигается снижением её пористости и в разработке и применении таких составов цементных вяжущих, при твердении которых образуются высокопрочные и стойкие к агрессивным средам вещества цементного камня. Важным также является повышение показателей строительно-технических характеристик бетона, таких как его прочность и водонепроницаемость, которые непосредственно влияют на стойкость бетона в агрессивных средах.

Решение первой задачи предотвращения коррозии бетона зависит от минералогического состава цемента, а решение второго вопроса – от технологии производства гидротехнического бетона. Исходя из этого, методы предотвращения коррозии гидротехнического бетона можно разделить на две группы: 1) подбор вида цемента, минералогический состав которого при гидратации и твердении

Адрес для корреспонденции: Гайбуллаева Зумрат Хабибовна. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. акад. Раджабовых, 10, Таджикский технический университет. E-mail: zumratihabib@rambler.ru

образует малопрочные и легко корродируемые продукты реакции при преобладающем образовании высокопрочных и стойких к процессам коррозии соединений; 2) подбор оптимального состава бетонной смеси и технологии её приготовления и формирования с наименьшим образованием технологических пор, способствующий образованию высокоплотной малопроницаемой или даже непроницаемой структуры бетона для воды и агрессивных веществ.

Для производства гидротехнического бетона обычно рекомендуют применение сульфатостойкого цемента, который отличается от обычного своим минералогическим составом, в котором ограничены содержания минералов C_3S , C_3A и C_4AF . Обычно содержание минерала C_2S в составе сульфатостойкого цемента больше, чем в обычном портландцементе.

Сульфатостойкий цемент выпускается на Душанбинском заводе, однако его производство ограничено и недостаточно для обеспечения потребностей строящихся объектов по всей республике. Решение вопроса необходимо искать по-другому и это возможно, даже легко выполняемо, чем при производстве сульфатостойкого цемента. На производствах бетона минералогический состав цемента можно изменять введением минеральных добавок к нему. Так, использованием активных минеральных добавок из осадочных и вулканических горных пород из клинкера обычного портландцемента получают пуццолановый цемент с содержанием добавки до 40% в зависимости от её вида, с металлургическими и топливными шлаками при их дозировке до 20% в Российской Федерации и до 50% в странах Европы и получают портландцемент со шлаком.

Регулирование минералогического состава цемента минеральными добавками

Минеральные добавки, заменяя часть клинкера в цементе, существенно снижают энергоёмкость производства цемента по причине, что в производстве обычного портландцемента в среднем расходуется до 223 кг/т условного топлива, когда на получение минеральной добавки его расход не превышает 5 кг/т [2], они положительно влияют на структурообразование цементного камня и формирование строительно-технических свойств бетона.

В Таджикистане не производят пуццолановый и шлаковый цементы, однако для производства вяжущего, обеспечивающего коррозионостойкость бетона, имеется возможность применения других минеральных добавок. Наши исследования показали на эффективность применения природного волластонита, отхода обогащения флюоритовых руд (ООФР) и золы угля в составе цемента [3,4]. Следует отметить, что в Таджикистане имеются огромные запасы природного волластонита $CaO \cdot SiO_2$ [5], ООФР накопились в многотысячные тонны в хвостохранилищах Такобского ГОК, а зола угля ежегодно образуется также многотысячными тоннами на ТЭС. В сезон получения тепла на ТЭС-2 города Душанбе сжигается до 6000 т в сутки угля Фон-Ягнобского месторождения, наименьшая его зольность составляет от 3.18 до 38.81% [6]. Если считать, что на котлах ТЭС-2 сжигается уголь наименьшей зольности 3.18%, что маловероятно, то в сутки образуется 190 т золы. Если в каждом 1 м³ бетона со средним расходом цемента в 400 кг всего 15% вяжущего заменить на минеральную добавку, то появится возможность производить 3167 м³ стойкого в агрессивных средах гидротехнического бетона и, при этом, сэкономить 190 т цемента. Следует отметить, что уголь применяется не только на

ТЭС-2 г. Душанбе, но и в других теплоэлектростанциях и промышленных предприятиях республики и зола всегда выделяется как отход его сжигания.

В табл.1 приведены составы природного волластонита, ООФР и золы угля.

Таблица 1

Химические составы минеральных добавок к цементу

Добавка	Химический состав, масс. %									
	SiO ₂	TiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₃ O ₄	CaO/ MgO	K ₂ O/ Na ₂ O	P ₂ O ₅ /S _{общ.}	MnO	CaF ₂	П.п.п.
Волластонит	47.4	-	0.79	0.71	46.15	0.03	-	0.53	-	4.39
ООФР	74.30	0.01	6.63	1.31	6.28 0.45	2,50 0.55	0,11 0,10	0.12	4.26	3.38
Зола	53.8	1.1	21.3	5.4	3.4	5.9	0.2 0.6	0.5	-	7.8

Рассмотрим изменения химического состава цемента при добавлении к нему в среднем 20% массы клинкера минеральную добавку согласно составам (табл.1). В качестве базисного принять обычный цемент следующего минералогического состава, масс. %: C₃S – 55.75; C₂S – 16.28; C₃A – 5.47; C₄AF – 13.74; природный гипс – 8.76. При введении в состав цемента минеральную добавку меняется не только его минералогический состав, но и химическое содержание отдельных компонентов.

В табл.2 приведены химические составы чистого цемента и смешанных цементов с 20% минеральной добавкой.

Таблица 2

Химические составы цементов без и с минеральной добавкой

	Химический состав, масс. %									
	SiO ₂	TiO ₂		Fe ₃ O ₄	CaO/ MgO	K ₂ O/ Na ₂ O	P ₂ O ₅ / S _{общ.}	MnO	CaF ₂	П.п.п.
Чистый цемент	20.35	-	3.67	3.61	66.46	-	0.00/ 4.07	-	-	1.84
Цемент с волластонитом	25.75	-	3.09	3.03	62.40	0.01	0.00/ 3.26	0.11	-	2,35
Цемент с ООФР	31.14	0.002	4.262	3.15	54.42/ 0.09	0.50/ 0.11	0.022/ 3.28	0.024	0.85	2.14
Цемент с золой	27.05	0.22	7.2	4.0	53.8	1.18	0.04/ 3.38	0.1	-	3.03

Из сравнения данных табл. 2 следует, что при использовании предложенных минеральных добавок состав вяжущего в основном изменяется в содержаниях основных оксидов, содержание CaO снижается, а содержание SiO₂ повышается, причём если соотношение CaO: SiO₂ в составе чистого цемента было 3.27, то при введении минеральной добавки в количестве 20% из волластонита это соотношение снижается до 2.42, при использовании золы – до 2.0, а при использовании ООФР, который на 2/3 состоит из SiO₂ – данное соотношение составляет всего 1.75. В то же время при использовании золы, ввиду большого содержания Al₂O₃, повышается также содержание Al₂O₃ в составе цемента – почти в два раза. Зола и ООФР также вносят в состав цемента оксиды щелочных металлов от 0.6 до 1.2%, что следует учитывать при использовании цемента с данными добавками в определённых условиях эксплуатации гидротехнического бетона.

Снижение соотношения $\text{CaO}:\text{SiO}_2$ благоприятно влияет на свойства цемента, обычный цемент практически превращается в коррозионностойкий благодаря тому, что при твердении цемента с добавками меньше образуется $\text{Ca}(\text{OH})_2$ и образующиеся гидросиликатными кальция в основном будут представлены низко основными формами с общей формулой $\text{CSH}(\text{B})$.

Высокопрочные продукты гидратации цемента с минеральными добавками обеспечивают высокую стойкость гидротехнического бетона в агрессивных средах. Подтверждением данного утверждения являются экспериментальные данные по исследованию коррозионностойкости бетонных образцов состава 1:1.51:2.57:0.4 (вяжущее:песок:щебень:вода), изготовленных из обычного цемента М400 без и с минеральными добавками, твердеющих до 360 сут в дистиллированной и минерализованной водах, растворах MgSO_4 и H_2SO_4 (табл. 3).

Образцы размерами 10x10x10 см после месячного твердения в нормальных условиях были помещены в сосуды с агрессивными веществами в расчёте 2 л на один образец. Коррозионностойкость бетона оценена по изменению прочности образцов в агрессивной среде к прочности эквивалентных образцов, твердеющих в нормальных условиях. По их значениям вычислили коэффициент стойкости бетона K_c .

Минерализованная вода содержала 5098.3 мг/л солей NaHCO_3 , CaSO_4 , MgSO_4 , Na_2SO_4 , NaCl . Через каждые 20 суток рабочие растворы агрессивных веществ были заменены на свежие порции. Периодическая смена агрессивного раствора усиливает степень его агрессивности по воздействию на цементный камень бетона.

Как следует из сравнения данных табл.4, во всех агрессивных средах коэффициент стойкости бетона на вяжущих с минеральными добавками выше, чем для бетона на цементе. В растворе H_2SO_4 из-за сильной его агрессивности происходит сильное разрушение бетона для всех составов, однако скорость разрушения образцов с минеральными добавками более замедленная, чем для образца на чистом цементе. Прирост стойкости бетона с добавками составляет от 9 до 39%.

Таблица 3

Составы вяжущего, агрессивные вещества и коэффициент стойкости бетона

Вяжущее		Агрессивные среды и коэффициент стойкости бетона (K_c) после нахождения образцов 360 суток в них			
Цемент	Добавка	Дистиллированная вода	минерализованная вода	6% раствор MgSO_4	0,25моль/л H_2SO_4
100	-	0.84	0.93	0.95	0.44
Цемент + природный волластонит					
90	10	0.96	1.0	1.0	0.48
60	40	1.0	1.0	1.05	0.51
Цемент + ООФР					
80	20	0.99	0.96	0.97	0.61
Цемент + зола					
85	15	0.92	0.94	0.96	0.58

Технологические способы повышения прочности и коррозионностойкости гидротехнического бетона

Бетон – конгломератный материал, поэтому его свойства, в том числе и стойкость в агрессивных средах, во многом определяются использованием качественных материалов и правильным выбо-

ром их количественных соотношений, обеспечивающих минимально возможную межзерновую пустотность каменного заполнителя. Качество бетона также в большей степени зависит от технологии приготовления и формирования бетонной смеси и правильного ухода за твердением цементного камня.

Методики определения свойств материалов и подбора состава бетона нужного качества на них известны и широко апробируются на производствах, где организован систематический контроль за качеством материалов и технологией их использования в составе бетонной смеси. Однако не на всех производствах бетонных материалов в республике соблюдается порядок требуемого контроля качества материалов, на некоторых производствах контроль качества материалов и строительных работ практически отсутствует. К числу неконтролируемых параметров относятся, также несоблюдение применения щебня качественного состава согласно требуемых размеров заполнителей, неучёт влажности заполнителей и их гранулометрический состав при их дозировке на стадии приготовления бетонной смеси, прибавление большего количества воды чем по норме к бетонной смеси для повышения степени её текучести и т.п.

Также не всегда соблюдается режим вибрирования бетонной смеси при формировании строительных изделий. В условиях сухого и жаркого климата нашей республики бетонная смесь до и в процессах формовки быстро обезвоживается, теряет свою подвижность, поэтому будет плохо вибрироваться в формах. Для облегчения процесса вибрирования таких смесей строители чаще применяют приём прибавления воды. Данная практика совершенно недопустима, она приводит к резкому снижению прочности твердеющего бетона, поскольку для гидратации минералов широко применяемых цементов, в том числе и для гидротехнического бетона, необходимое количество воды в среднем варьирует в пределах $V/C = 0.28...0.31$ в зависимости от состава цемента [2]. Излишек воды после гидратации минералов клинкера испаряется из структуры бетона в процессах структурообразования цементного камня, образуя капиллярные поры и трещины на его теле.

Соблюдение норм и правил использования материалов, технологических параметров приготовления и формирования бетонной смеси и организации правильного режима ухода за твердеющим бетоном является основополагающим принципом для получения качественного бетона. Даже при использовании качественных материалов и цемента нужного минералогического состава несоблюдение технологии приготовления бетона может свести их эффективность к нулю.

Технологические проблемы приготовления бетонной смеси во многом решаются эффективно, когда в состав цемента вводят химико-органические добавки, регулирующие реологические и технологические свойства бетонной смеси и строительно-технические качества бетона. Обычно эти добавки вводятся к цементу от десятых долей процента до 1.0 ... 2.0% его массы, но они способны в зависимости от своего химического состава вводить ощутимые изменения в свойствах бетона. Они при низких значениях V/C , что необходимо поддерживать для образования плотной структуры цементного камня, пластифицируют бетонную смесь до той степени, что она становится сама формируемой и не требующей вибрирования или минимального вибрирования. Процесс формирования пластифицированных бетонных смесей органо-химическими добавками мало трудо- и энергозатратный, мало-водная и плотно уложенная бетонная смесь твердеет без выделения воды, разумеется при защите

поверхности формированного изделия от испарения ещё не участвовавшей в реакциях гидратации цемента порции воды, что в результате образуется высокоплотная и прочная структура бетона, обеспечивающая его непроницаемости от действия воды и агрессивных веществ.

Органо-химические добавки к цементам имеют разное вещественное происхождение и составы, что отражается на их функциональных действиях на свойствах бетонной смеси и бетона [7,8]. Их классификация регламентируется государственными стандартами [9]. Наиболее широко применяемыми являются пластификаторы и суперпластификаторы, гидрофобизаторы поверхности бетона, регуляторы времени схватывания цементного теста и его твердения, противоморозные добавки и т.п. Ассортимент органо-химических добавок в мире расширяется с каждым годом, однако их применения в строительном комплексе республики единичны. В то же время во всех развитых странах цемент без добавок не применяется для приготовления бетона и других композиционных материалов.

Эффективность применения добавок возрастает, если они, наряду с обеспечением необходимой эффективности, являются доступными и дешёвыми. Такие добавки можно получить только на основе местного сырья. В Таджикском техническом университете им. академика М.С.Осими, начиная с восьмидесятых годов прошлого века велись научные исследования по разработке органо-химических добавок разных назначений, в том числе и для повышения непроницаемости гидротехнического бетона. Были разработаны такие эффективные добавки к бетонам, как декстрин, модифицированный технический лигносульфонат (МЛСТ), щелочной экстракт стеблей хлопчатника (ЩЭСХ), многочисленные их комплексные составы, в том числе и с минеральными добавками из природного волластонита и ООФР [6,10-13]. Декстрин является модифицированным крахмалом, полученным из кукурузы и картофеля, МЛСТ получен обработкой известного технического лигносульфоната лёссом, а ЩЭСХ получают обработкой измельчённых стеблей хлопчатника низкоконцентрированным раствором щелочи NaOH.

Все названные добавки прошли производственные испытания, они были внедрены на некоторых производствах бетона, в частности для получения напорных железобетонных труб для водоводов и лотков ирригационных сооружений.

В табл. 4 приведены некоторые сравнительные показатели по оценки эффективности предложенных органо-химических дабавок при их применении в составе гидротехнического бетона.

Таблица 4

Показатели применения органо-химических добавок в составе цемента гидротехнического бетона

Добавка	Оптимальное содержание добавки в состав цемента, %	Повышение показателей бетонной смеси и бетона с добавками		
		подвижность (ОК) бетонной смеси, раз	прочность бетона R_b , %	водонепроницаемость бетона W , %
Декстрин	0.03-0.05	2.0-2.5	25.0-30.0	80.0 – 175.0
МЛСТ	0.30-0.50	3.0-4.0	31.0-48.0	40.0-80.0
ЩЭСХ	0.10-0.50	1.0-1.3	30.0- 55.0	-

Примечание: ОК – подвижность бетонной смеси по осадке конуса, см; НГ – нормальная густота или водопотребность цементного теста, %; R_b – прочность бетона через 28 суток твердения, МПа; w – водонепроницаемость бетона, МПа.

Данные табл. 4 свидетельствуют об эффективности использования органо-химических добавок для повышения качества гидротехнического бетона. Добавки так сильно пластифицируют бетон-

ную смесь, что она сама будет способна формироваться без вибрирования или с минимальным вибрированием с образованием равномерно уложенного слоя. Плотнo уложенный слой бетонной смеси превращается в прочный бетон с малопроницаемой структурой, что будет предотвращать протекание процесса коррозии в его теле.

Ещё одним положительным эффектом применения этих добавок является их малый расход в составе цемента и то, что они получены из местных видов сырья. Эти факторы будут способствовать снижению себестоимости производства гидротехнического бетона.

З а к л ю ч е н и е

Предотвращение коррозии бетона способствует повышению долговечности гидротехнических сооружений и позволяет сэкономить огромные средства для развития строительного комплекса республики. Решение вопроса требует его понимания специалистами отрасли, в первую очередь проектировщиков, строителей и эксплуатационных работников гидротехнических сооружений. Используя результаты научно-исследовательских разработок, можно с применением обычных материалов существенно повышать коррозионностойкость бетона. Для этого, прежде всего, необходимо правильно анализировать существующую проблему и принять необходимые меры, начиная со стадии проектирования объекта и его строительства.

Поступило 21.04.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шарифов А., Гайбуллаева З.Х., Нейматзода Д., Гозиев З. Коррозия гидротехнического бетона и причины её протекания. – Доклады НАНТ, 2021, т. 64, №3-4, с. 224-231.
2. Волженский А.В., Буров Ю.С., Колокольников В.С. Минеральные вяжущие вещества. – М.: Стройиздат, 1979, 476 с.
3. Шарифов А. Цементно-воластонитовые вяжущие и химические добавки для повышения стойкости бетона в агрессивных средах. – Душанбе: Дониш, 1994, 284 с.
4. Шарифов А., Шодиев Г.Г., Субхонов Д.К., Бобоев Т.С. Использование золы угля Фан-Ягнобского месторождения в качестве наполнителя композиций из гипсовых вяжущих. ДАН РТ, 2016, т.59, №9-10, с. 413-417.
5. Кантор М.З. О воластонитовых породах Северного Таджикистана и возможном их практическом использовании. – ДАН Тадж.ССР, 1956, т.XV, с. 19-24.
6. Караваев Н.М., Румянцева З.И., Певзнер З.И. Способы использования углей Зеравшанской долины в промышленности и их технико-экономические показатели. – Душанбе: АН Таджикской ССР, 1963, 156 с.
7. Ратинов В.Б., Розенберг Т.И. Добавки в бетон. – М.: Стройиздат, 1989, 188 с.
8. Батраков В.Г. Модифицированные бетоны. – М.: Стройиздат, 1989, 396 с.
9. ГОСТ 24111-91. Добавки для бетонов. Общие технические требования. ГОСТ24111-2008. Добавки для бетонов и строительных растворов. Общие технические условия. ГОСТ 30459-2008. Добавки для бетонов и строительных растворов. Определение и оценка эффективности.
10. А.С. № 1144997 СССР, МКИ С 04 624/10. Вяжущее для бетонной смеси и строительного раствора. Оpub.15.03.885, бюл. №10.
11. А.С. № 1564139 СССР, МКИ С 04 В 24/18. Способ приготовления пластифицирующей добавки для бетонной смеси. Оpubл. 15.05.90, бюл. №18.
12. А.С. № 1590464 СССР, МКИ С 04 В 28/02, 24/10. Способ получения добавки для бетонной смеси, опубл. 07.09.90, бюл. №33.

13. А.С. № 1664763 СССР, МКИ С 04 В 24/18, Комплексная добавка для бетонной смеси, опубл. 23.07.91, бюл. №27.

А.Шарифов, З.Х.Гайбуллоева*, Д.С.Неъматзода, З.А.Ғозиев

УСУЛҲОИ МАҲСУЛНОКИ ПЕШГИРӢ НАМУДАНИ КОРРОЗИЯШАВИИ БЕТОНИ ГИДРОТЕХНИКӢ

Донишгоҳи Давлатии Дангара,

**Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи акад. М.С.Осимӣ*

Мақола ба омӯзиши усулҳои пешгирӣ намудани коррозияшавии бетон барои зиёд намудани дарозумрии иншоотҳои гидротехникӣ бахшида шудааст. Таркиби семент бо истифодаи иловаҳои минералӣ аз волластонити табиӣ, партови бойгардони маъдани флюорит, хокистари ангишт ва иловаҳои кимиёвӣ-органикӣ аз декстрин, лигносулфонати техникии таркибтағйирёфта ва экстракти ишқорӣ ғӯзапоя бой гардонида шудааст. Маводҳои иловагии номбаршуда ҳангоми гидрататсияшавии минералҳои таркиби семент барои ҳосил шудани пайвастагиҳои ба коррозияшавӣ устувор ва сохтори камқовоки санги сементӣ мусоидат намуданд, ки ин сифати сохтмонӣ-техникии бетонро баланд менамояд. Маводҳои иловагӣ мустаҳкамӣ, обнагузаронӣ ва устувории бетони гидротехниро ба коррозияшавӣ зери таъсири обҳои нарм ва намақдор, маҳлулҳои сульфати магний ва кислотаи сульфат зиёд менамояд.

Калимаҳои калидӣ: бетони гидротехникӣ, коррозияшавии бетон, семент, иловаҳои минералӣ ва органикӣ-кимиёвӣ, мустаҳкамӣ, , устуворӣ, дарозумрии иншоот.

A.Sharifov, Z.H.Gaibullaeva*, D.S.Nematzoda, Z.A.Goziev

EFFECTIVE METHODS FOR PREVENTING CORROSION OF HYDRAULIC CONCRETE

Dangara State University,

**M.S.Osimi Tajik Technical University*

The article is devoted to methods of preventing corrosion of concrete to increase the durability of hydraulic structures. Modifying the composition of cement mineral additives from natural wollastonite, waste enrichment of fluorite ores and ashes of coal, and organ-chemical additives from dextrin, modified technical lignosulfonate and alkaline cotton stalk extract. These additives during the hydration of cement minerals contributed to the formation of corrosion-resistant compounds and the low-pore structure of cement stone that increase the construction and technical quality of concrete. Additives increased strength, waterproofability and corrosion resistance of hydraulic concrete in distilled and mineralized waters, magnesium sulfate solutions and sulfuric acid.

Key words: hydraulic concrete, concrete corrosion, cement, clinker minerals, mineral and organic-chemical additives, strength, waterproof, resistance, durability of structures.

УДК 504.064.2÷502.2.05:54-78

С.В.Муминов

ИЗУЧЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ПРИРОДНЫХ РАДИОНУКЛИДОВ В ПОЧВАХ НЕКОТОРЫХ РАЙОНОВ ТАДЖИКИСТАНА

*Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности**НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 01.10.2021 г.)*

Изучено содержание естественных радионуклидов в почвах некоторых районов Таджикистана. В песчаных почвах природные радионуклиды содержатся в сравнительно малых количествах. Высокое содержание естественных радионуклидов наблюдается в глинистых почвах.

Ключевые слова: *почва, удельная активность, естественная радиоактивность, радионуклиды, Хатлонская область.*

Источниками внешнего облучения человека являются радиоактивные вещества, содержащиеся в почве, горных породах, воздухе, воде, строительных материалах, а также космические лучи [1]. При этом на долю эндогенных радионуклидов (без учёта радона) приходится свыше 25% облучения населения Земли природными источниками, что составляет около 20% годовой дозы облучения от всех источников, включая антропогенные (0.77 мЗв/год из суммарных 4.06 мЗв/год) [2]. Вклад естественных радионуклидов (ЕРН), наиболее распространенных в горных породах – ^{232}Th , ^{226}Ra и ^{40}K – в 2 раза значительнее, чем космических лучей, и уступает только радоновым эманациям и медицинскому облучению. С одной стороны, радиоактивные элементы являются необходимой составляющей питательных сред, без которых невозможно развитие не только растительных, но и животных организмов [2], с другой, повышенные дозы увеличивают риск заболеваний лейкемией, снижают скорость кровотока и жизненные функции ряда органов, оказывая на них хроническое действие. Допустимое значение эффективной дозы, обусловленной суммарным воздействием природных источников излучения, для населения не устанавливается. Снижение облучения населения достигается путём установления системы ограничений на облучение населения от отдельных природных источников излучения [3].

Как известно [1-4], радиоизотопы ^{232}Th , ^{226}Ra и ^{40}K принадлежат к различным радиоактивным семействам и характеризуются определенными различиями в ландшафтно-геохимических особенностях. Так, торий присутствует в почвах, главным образом, в форме изоморфных примесей в минералах – в первичных кислых силикатах, в кристаллическую решетку которых данный элемент встраивается легче. Калий, в том числе радиоактивный ^{40}K , также может быть изоморфной примесью и, кроме того, интенсивно сорбируется глинами – гидрослюдами и монтмориллонитом. Для радия, кроме изоморфного замещения, большое значение имеют радиоактивный распад ^{238}U в породах (радий – про-

Адрес для корреспонденции: Муминов Сафарали Валиевич. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАНТ. E-mail: tuminov_saf@mail.ru

дукт данного распада), а также избирательное поглощение высшими растениями. Данное свойство растительных организмов, очевидно, унаследовано ими от древних форм жизни, для которых имела значение собственно радиоактивность Ra, как дополнительный источник энергии [5]. По указанным причинам следует ожидать рост содержания ЕРН в почвах тяжелого состава, а для радия также должна играть роль гумусированность почв и наличие в среде родоначальника радиоактивного семейства – урана.

Цель настоящей работы заключалась в изучении и оценке пространственных закономерностей естественного радиационного фона, роли почвообразования и техногенеза как факторов распределения природных радионуклидов на территории Таджикистана (на примере Хатлонской области).

Материалы и методы исследования

Почвенный покров Таджикистана отличается исключительной пестротой. Причем вследствие резких различий в высоте отчетливо выражена высотная почвенная поясность. Выделяются четыре пояса: 1) равнинно-низкогорный в основном с сероземными почвами; 2) среднегорный с горными коричневыми почвами; 3) высокогорный с высокогорными лугово-степными, степными, пустынно-степными, занговыми и пустынными почвами; 4) нивальный пояс (рухляковые почвы среди ледников, снежников и скал) [6].

Территория регионов, выбранных для отбора проб, включает в себя самые разнообразные ландшафты: альпийские луга, высокогорные и равнинные пустыни, глубокие и узкие ущелья рек, сжатые скалистыми хребтами. Территория полевых исследований (площадь около ~ 25000 км²) характеризуется типичным для Бохтарского и Кулябского региона соотношением природных ландшафтов и включает различные по природным особенностям территории. Исследовано 36 образцов почв различных генетических типов, а также почвообразующих пород и природных материалов. В каждом районе было выбрано от 3 до 5 точек для отбора проб, где минимальное расстояние между точками составляет примерно 5 - 7 км. Отбор проб почвы проводили согласно ГОСТ 17.4.3.01-2017 [7] от поверхности земли до глубины 25 см. Из общей массы методом квартования отбирали объемом более 1 дм³ образца. Почвы высушивали до воздушно-сухого состояния, измельчали на мельнице и просеивали через сито диаметром отверстий 2 мм.

Для гамма-спектрометрического измерения проб использовали стандартный сосуд «Маринелли» объемом 1 дм³. Измерения проводились на гамма-спектрометре с детектором из особо чистого германия (CANBERA, программное обеспечение Genie-2000) с неопределённостью измерения от 5 до 12%, в аккредитованной Лаборатории технических услуг Агентства по ядерной и радиационной безопасности НАНТ.

Результаты обследований

На рисунке приведен энергетический спектр гамма-излучения образца пробы № 3 почвы «Сари Хосор».

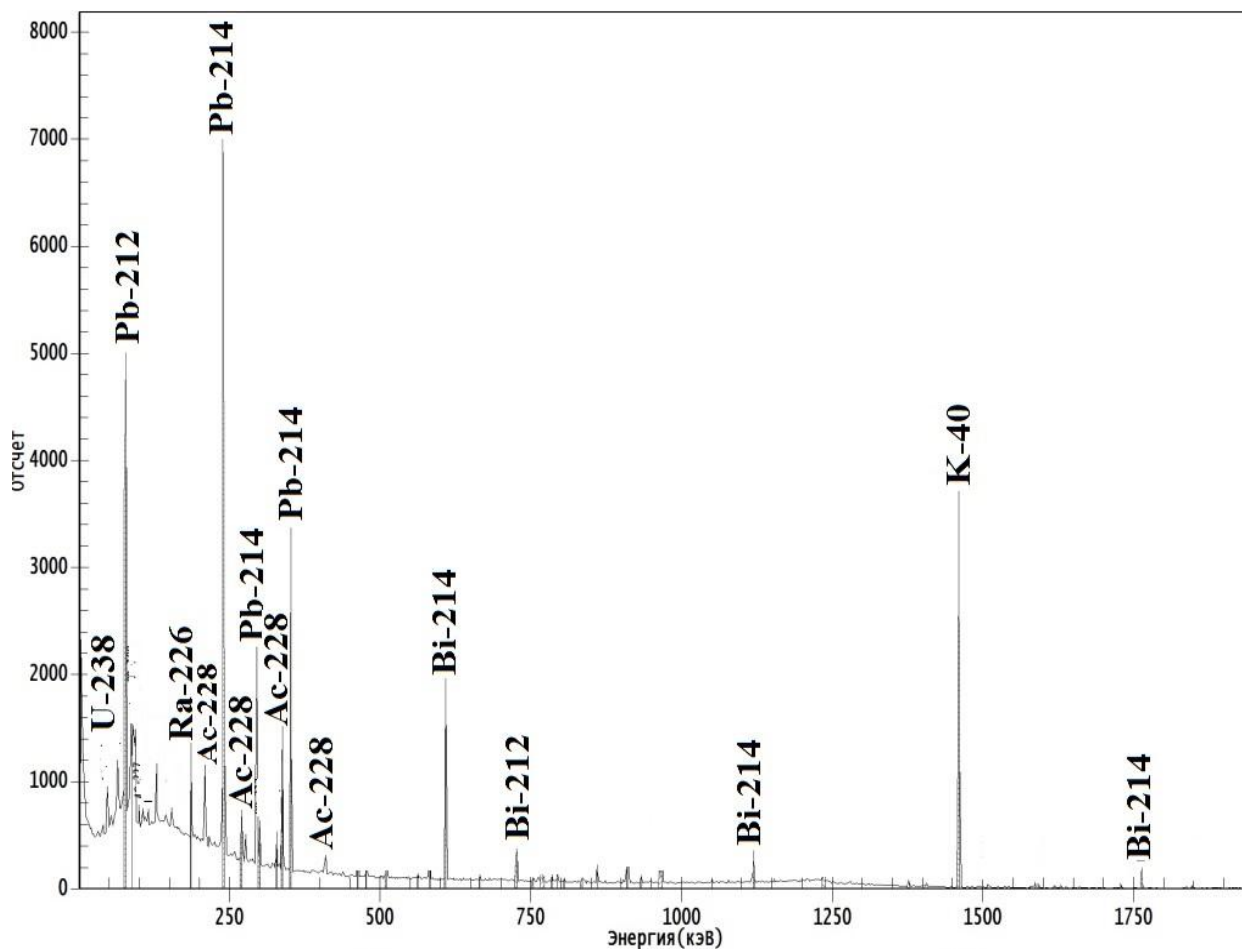


Рис. Энергетический спектр гамма – излучения образца пробы № 3 почвы «Сари Хосор».

Из рисунка видно, что в спектре основные пики полного поглощения относятся к семейству урана-238, тория-232 и изотопу калия-40.

Результаты измерений удельной активности образцов почв некоторых районов Хатлонской области Республики Таджикистана приведены в таблице.

Таблица

Результаты измерений удельной активности образцов почв (Бк/кг)

Изотоп	Район					
	Н. Хусрав	Н. Хусрав 2	Н. Хусрав 3	Н. Хусрав 4	Шахритус 1	Шахритус 2
Ка-40	542.866	589.413	460.530	320.901	645.099	594.437
Bi-214	31.347	29.724	37.894	5.425	22.266	26.611
Pb-214	31.083	30.341	35.897	23.768	21.023	-
Pb-210	38.034	26.867	26.470	23.174	27.389	-
Bi-212	22.554	20.294	27.435	15.856	17.295	-
Pb-212	29.018	34.425	20.156	21.071	23.067	-
Ac-228	32.885	36.088	34.391	24.456	26.673	-
Th-228	-	120.138	-	-	60.103	-
U-238	23.002	125.886	27.530	16.574	15.486	-
Ra-226	66.4798	36.380	80.514	44.581	10.335	-
Изотоп	Район					
	Шахритус 3	Кубодиён 1	Кубодиён 2	Кубодиён 3	Кубодиён 4	Ховалинг 1
Ка-40	605.775	507.373	624.673	626.553	601.886	678.144
Bi-214	32.171	30.231	30.928	37.019	29.568	31.568
Pb-214	31.673	24.994	29.153	35.193	25.487	28.171

Pb-210	25.795	-	29.979	31.332	23.209	-
Bi-212	23.720	23.444	25.023	39.659	24.324	33.483
Pb-212	36.400	-	32.532	28.218	33.271	-
Ac-228	40.746	-	37.399	43.143	38.949	46.948
Th-228	-	-	-	107.535	88.169	-
U-238	-	-	21.432	45.715	22.131	-
Ra-226	-	43.280	38.058	46.712	-	-
Изотоп	Район					
	Ховалинг 2	Ховалинг 3	Ховалинг 4	Ховалинг 5	Куляб 1	Куляб 2
Ка-40	555.680	661.583	787.757	547.016	443.353	520.644
Bi-214	31.370	34.583	36.961	32.675	25.521	33.469
Pb-214	30.442	33.728	37.212	32.219	23.784	32.683
Pb-210	38.903	49.230	50.108	25.135	31.191	33.403
Bi-212	25.370	31.965	33.600	26.862	19.511	24.775
Pb-212	38.517	46.202	49.885	39.702	27.904	37.357
Ac-228	39.555	46.440	52.070	41.304	29.007	39.946
Th-228	-	-	-	-	73.805	99.376
U-238	23.520	29.981	23.804	-	19.958	27.961
Ra-226	-	-	-	-	56.313	74.908
Изотоп	Район					
	Воце 1	Воце 2	Воце 3	Воце 4	Воце 5	Фархор 1
Ка-40	578.860	526.575	365.382	545.480	611.384	484.751
Bi-214	37.058	35.387	22.881	26.764	30.489	27.169
Pb-214	35.345	35.801	22.379	26.477	29.186	26.475
Pb-210	33.694	33.190	24.022	21.608	24.840	26.042
Bi-212	26.895	25.039	16.479	21.115	24.401	20.701
Pb-212	36.768	33.685	24.285	26.764	37.041	30.962
Ac-228	41.022	36.909	25.180	33.175	37.152	33.306
Th-228	-	-	-	-	-	-
U-238	-	24.876	18.360	17.451	23.837	23.012
Ra-226	-	66.888	-	-	-	-
Изотоп	Район					
	Фархор 2	Фархор 3	Фархор 4	Темурмалик 1	Темурмалик 2	Хамадони 1
Ка-40	485.644	496.468	560.737	567.175	532.354	413.168
Bi-214	30.457	32.737	30.799	29.841	28.754	26.077
Pb-214	29.401	30.286	31.132	28.437	28.131	25.466
Pb-210	-	33.826	29.271	-	31.896	23.381
Bi-212	22.751	21.725	22.486	25.597	22.387	19.346
Pb-212	33.132	31.466	35.119	-	32.900	27.941
Ac-228	34.223	35.152	36.437	-	34.153	30.075
Th-228	-	-	99.658	-	80.957	62.605
U-238	23.778	-	23.375	-	24.891	17.822
Ra-226	66.164	68.881	40.121	-	34.595	55.396
Изотоп	Район					
	Хамадони 2	Хамадони 3	Сари Хосор 1	Сари Хосор 2	Сари Хосор 3	
Ка-40	460.530	445.031	472.973	779.305	418.319	
Bi-214	37.894	25.809	22.118	30.286	22.595	
Pb-214	35.897	24.153	21.796	30.398	22.148	
Pb-210	26.470	22.218	120.387	22.080	26.997	
Bi-212	20.156	17.275	19.367	24.639	15.775	
Pb-212	27.435	27.146	28.747	34.280	24.469	
Ac-228	34.391	29.136	29.084	37.483	24.992	
Th-228	-	68.594	74.783	-	-	
U-238	27.530	20.659	21.742	24.630	15.773	
Ra-226	80.514	49.435	17.516	27.783	14.208	

В таблице выделены максимальные значения удельной активности образцов для каждого радионуклида.

Известно, что основной вклад в содержание природных радионуклидов в почвах исследуемых территорий вносит ^{40}K . Результаты нашей работы показали, что самый высокий уровень содержания данного изотопа был обнаружен в образцах почв «Ховалинг 4» (787.7 Бк/кг), которые были отобраны на территории Ховалингского района Хатлонской области. Самый низкий уровень содержания ^{40}K характерен для образца почвы «Н. Хусрав 4», значение удельной активности которой составляет 320.1 Бк/кг.

Значительное количество радия-226 обнаружено нами в почвенных образцах, взятых на территории района Н. Хусрав (80.5 Бк/кг), а минимальное содержание – в образце «Шахритус 1», которое составило 10.3 Бк/кг. В некоторых образцах почв изотоп радия-226 не обнаружен.

В ы в о д ы

Различия в содержании ЕРН в почвах разных типов почвообразования статистически достоверны при $p > 99\%$, причем наиболее принципиальные различия наблюдаются между почвами легкого и тяжелого состава. В песчаных почвах содержание ЕРН сравнительно мало. Например, из таблицы видно, что в образце «Шахритус 2» содержание радионуклидов низкое, а образец почвы отобран на территории Айвача из земель песчаного типа. Из этого следует, что из состава почвы все изотопы смывались, т.е. выщелачивались во время дождя и других природных воздействиях.

В глинистых почвах наблюдаются почти все радиоизотопы семейства урана-238 и тория -232 (образцы почв «Н.Хусрав 2», «Кубодиён 3», «Фархор 4», «Темурмалик 2», «Хамадони 1» и др.

Поступило 04.10.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Левин М.Н., Негроров О.П., Гитлин В.Р. Природный радиационный фон: Учебное пособие для вузов. – Воронеж, 2000.
2. Старков В.Д., Мигунов В.И. Радиационная экология. – Тюмень: ФГУ ИПП «Тюмень», 2003.
3. Нормы радиационной безопасности (НРБ-06): Санитарные нормы и правила СанПин 2.6.1.001-06. Утверждены Приказом директора Агентства по ядерной и радиационной безопасности Академии наук Республики Таджикистан от 25.12.2006 г. №12. Зарегистрировано в Министерстве юстиции Республики Таджикистан 16 января 2007 года, регистрационный №237.
4. Белоусова И.М., Штуккенберг Ю.М. Естественная радиоактивность. – М.: Медгиз, 1961.
5. Перельман А.И., Касимов Н.С. Геохимия ландшафта. – М.: Астрейя-2000, 1999.
6. Национальная Программа по борьбе с опустыниванием в Таджикистане. – Душанбе, 2000, 184с.
7. ГОСТ 17.4.3.01-2017. Охрана природы (ССОП). Почвы. Общие требования к отбору проб. Межгосударственный стандарт. – М.: Стандартиформ, 2018, 9 с.

С.В.Муминов

ОМУЗИШИ МИҚДОРИ РАДИОНУКЛИДҲОИ ТАБИӢ ДАР ХОҚҲОИ БАЪЗЕ НОҲИЯҲОИ ТОҶИКИСТОН

Агентии амнияти ядрой ва радиатсионии АМИ Тоҷикистон

Миқдори радионуклидҳои табиӣ дар ҳоқҳои баъзе ноҳияҳои Тоҷикистон, омӯхта шуданд. Дар ҳоқҳои регдор миқдори радионуклидҳои табиӣ нисбатан кам дида мешавад. Миқдори баланди радионуклидҳои табиӣ дар ҳоқҳои гилин ба назар мерасанд.

Калимаҳои калидӣ: *ҳоқ, радиоактивияти ҳос, радиоактивии табиӣ, вилояти Хатлон.*

S.V.Muminov

STUDYING THE CONTENT OF NATURAL RADIONUCLIDES IN THE SOILS OF CERTAIN REGIONS OF TAJIKISTAN

Nuclear and Radiation Safety Agency of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The content of natural radionuclides in the soils of some regions of Tajikistan has been studied. The content of natural radionuclides is relatively small in sandy soils. A high content of natural radionuclides is observed in clay soils.

Key words: *soil, specific activity, natural radioactivity, Khatlon region.*

УДК 574 +528.8 (575.3)

М.С.Сафаров, Х.У.Каримов*, член-корреспондент НАН Таджикистана А.С.Саидов,

И.Б.Холматов**, Л.С.Набиев***, А.У.Бобожонов

МОНИТОРИНГ БИОРАЗНООБРАЗИЯ ЮЖНЫХ ОТРОГОВ ВАХШСКОГО ХРЕБТА С ПРИМЕНЕНИЕМ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ*Научно-исследовательский центр экологии и окружающей среды Центральной Азии (Душанбе),***ООО “Оксус Холдинг”, г. Душанбе,****Таджикский национальный университет,*****Институт зоологии и паразитологии им. Е.Н.Павловского НАН Таджикистана*

В статье приведены результаты, полученные в ходе полевых исследований с применением беспилотных летательных аппаратов на Вахшском хребте с целью мониторинга биоразнообразия. Впервые для мониторинга растительности и животных лесных экосистем применены беспилотные летательные аппараты (БПЛА), которые позволили за короткое время провести экологический мониторинг и получить достоверные данные.

Ключевые слова: мониторинг, беспилотные летательные аппараты, аэрофотосъёмки, растительность, животные.

В условиях быстро меняющегося климата и воздействия антропогенных факторов на окружающую среду возникает острая необходимость ведения эффективного мониторинга окружающей среды. Согласно О.Ю.Шевченко [1], существуют традиционные методы получения данных и проведения мониторинга, такие как стационарные исследования, непосредственное участие человека в наблюдениях (пешие маршруты), использование катеров, летательных аппаратов, космических систем и др. Эти методы обладают как недостатками, так и преимуществами. К сожалению, из-за сложных орографических условий применение перечисленных методов в горных условиях Таджикистана является затруднительным. Стационарные пункты исследования не имеют возможности перемещения в другое место, физическое ограничение для человека и отсутствие возможности проведения наблюдений в горных, труднопроходимых и опасных районах также являются трудоёмкими. Так, катера невозможно использовать на большинстве горных рек Таджикистана, а данные космических снимков в открытом доступе с разрешением более 10 м не позволяют эффективно провести детальный мониторинг окружающей среды, растительности и животных.

Р а й о н и с с л е д о в а н и я

Вахшский хребет в административном отношении расположен в Бальджуванском районе Хатлонской области Республики Таджикистан и служит водоразделом рек Вахш и Кызылсу, вытянут вдоль левого берега среднего течения реки Вахш. Протяжённость хребта составляет около 80 км. Максимальная высота – 3141 м над ур. м. Геология и орография Вахшского хребта описана в [2]. Он образован песчаниками,

Адрес для корреспонденции: Сафаров Мустафо Сулаймонович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Научно-исследовательский центр экологии и окружающей среды Центральной Азии (Душанбе).
E-mail: mustafo-2010@mail.ru

известняками, конгломератами и глинами. На хребте наряду с палеоген-неоген-четвертичными отложениями встречаются докембрийские образования и интрузивные породы [2].

Климат района относительно разнообразен, в основном, мягко-континентальный и прохладный. Средняя годовая температура +11°C, атмосферные осадки – 500-1000 мм в год [3].

Растительность района исследований разнообразна и представлена более 30 значимыми и редкими видами древесно-кустарниковых и травянистых растений: груша таджикистанская (*Pyrus tadshikistanica*), груша Коржинского (*Pyrus korshinskyi*), миндаль бухарский (*Amygdalus bucharica*), яблоня Сиверса (*Malus sieversii*), алыча (*Prunus sogdiana*), клен туркестанский (*Acer turkestanicum*), клен Регеля (*Acer regelii*), боярышник понтийский (*Crataegus pontica*); из травянистых растений здесь широко представлены: ирис Гуга (*Iris hoogiana*), И. разлинованный (*I. lineata*), юнона Розенбаха (*Juno rosenbachiana*), тюльпан превосходный (*Tulipa praestans*), тюльпан Максимовича (*T. maximowiczii*), лук дарвазский (*Allium darwasicum*), горец бальджуанский (*Polygonum baldshuanicum*) и др.

Крупными представителями млекопитающих Вахшского хребта являются снежный барс (*Panthera uncia*), бухарский горный баран (*Ovis vignei bocharensis*), сибирский козерог (*Capra sibirica*), кабан (*Sus scrofa*) и тьянь-шаньский бурый медведь (*Ursus arctos isabellinus*).

Выбранный район для исследования не охватывает всю территорию южных отрогов Вахшского хребта. Целью мониторинга было подтверждение присутствия приоритетных видов с помощью беспилотных летательных аппаратов (БПЛА).

Материалы и методы исследований

За последнее время в Таджикистане наряду с космоснимками нашли применение малогабаритные БПЛА для проведения аэрофотосъемок окружающей среды, оценки стихийных бедствий, мониторинга ледников и др. [4,5].

Для проведения мониторинга биоразнообразия необходимы данные дистанционного зондирования с высоким пространственным разрешением, которое может обеспечить необходимое качество полученных результатов дешифрирования аэрофотосъемок [6].

Мониторинг лесных экосистем включает оценку степени вырубки лесного массива, определение пород деревьев, предотвращение возникновения лесных пожаров (высохший лес, тлеющие торфяники, обнаружение малых очагов пожаров), оценку ущерба лесных ресурсов после пожаров или природных катаклизмов, обнаружение несанкционированных свалок с определением лиц и номеров машин нарушителей и др. Применение беспилотных летательных аппаратов также является рентабельным для учёта численности животных. Такой «воздушный учёт» позволяет точно определить численность животных в охотхозяйствах и выявить места их концентрации [7].

Следует отметить, что в горных условиях использование БПЛА имеет широкие возможности для мониторинга биоразнообразия и оценки состояния популяции диких животных, имеющих практическое значение для получения точных данных. БПЛА в Таджикистане впервые использовались для учёта численности поголовья диких животных.

С целью проведения мониторинга биоразнообразия, в том числе учёта численности диких животных, в частности бухарского горного барана (уриала), занесенного в Красную книгу Таджики-

стана, и картирования его местообитаний были проведены аэрофотосъёмки на южных отрогах Вахшского хребта в июне 2020 г. с использованием БПЛА (рис. 1).

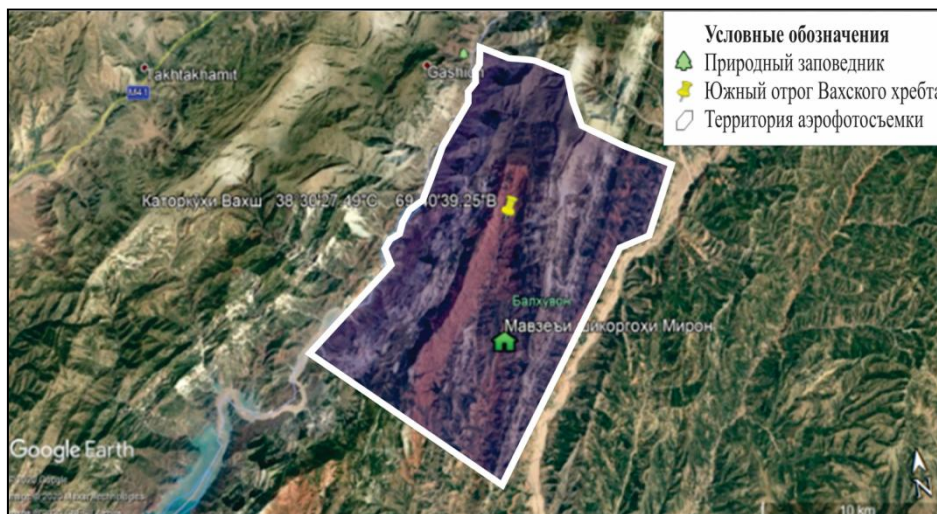


Рис. 1. Зона полёта беспилотных летательных аппаратов на южных отрогах Вахшского хребта. Координаты местности: 38°29'22.83"С 69°40'47.40"В.

В ходе мониторинга были использованы БПЛА "QC-2 Микро", "Dji Phantom 4" и "Dji Inspire 1Pro" Научно-исследовательского Центра экологии и окружающей среды Центральной Азии (Душанбе).

В табл. 1 приведены данные БПЛА с дополнительной информацией о весе полезной нагрузки, высоты и времени полета, которая была использована нами в ходе полевых исследований. Рассматриваемые технологии позволили существенно расширить возможности мониторинга с воздуха в Таджикистане [8].

Таблица 1

Характеристика БПЛА с возможностями аэрофото-видеосъёмки для мониторинга биоразнообразия на Вахшском хребте

Название БПЛА	Вес полезной нагрузки, г	Высота полета, м над ур. м.	Время, мин.
Dji Phantom 4	400	6000	28-30
Dji Inspire 1 Pro	500	4500	15
QC-2 Микро	500	5000	60-90

С использованием карт и приспособлений был разработан план полётов. Беспилотные летательные аппараты совершали полёт на высоте 3800 м над ур. м. В рамках составленного плана произведена аэрофотосъёмка местности площадью более 200 км². Обработка полученных аэрофотоснимков и данных GPS была выполнена в программной среде Pix4d с дальнейшей их обработкой в Arcgis и других графических редакторах.

Результаты исследования и их обсуждение

По результатам исследования с применением БПЛА была составлена карта обследованного района площадью 230 км² с разрешением 35 см (рис. 2). Впервые для района исследований получены высокоточные цифровые данные и подготовлен ортофотоплан, который позволил исследовать мест-

ность детально, в том числе выявить основные типы растительности южного отрога Вахшского хребта.

По результатам использования БПЛА установлено, что на территории исследования встречаются следующие типы растительности и поясные группы формаций:

Чернолесье. Формации теплолюбивых (мезотермных) и мезофильных древесных и кустарниковых пород-грецкий орех (*Juglans regia*), туркестанский клен (*Acer turkestanicum*), чинар восточный (*Platanus orientalis*), экзохорда (*Exochorda alberti*) и др.).

Шибляк. Преимущественно деревья и кустарники с такими господствующими видами, как фисташка (*Pistacia vera*), сумах дубильный (*Rhus coriaria*), унаби (*Zizyphus jujuba*), багрянник (*Cercis griffithii*) и др.

Термофильные арчёвники. Насаждения теплолюбивых высокоствольных видов, формируются за счет можжевельника зеравшанского (*Juniperus seravschanica*).

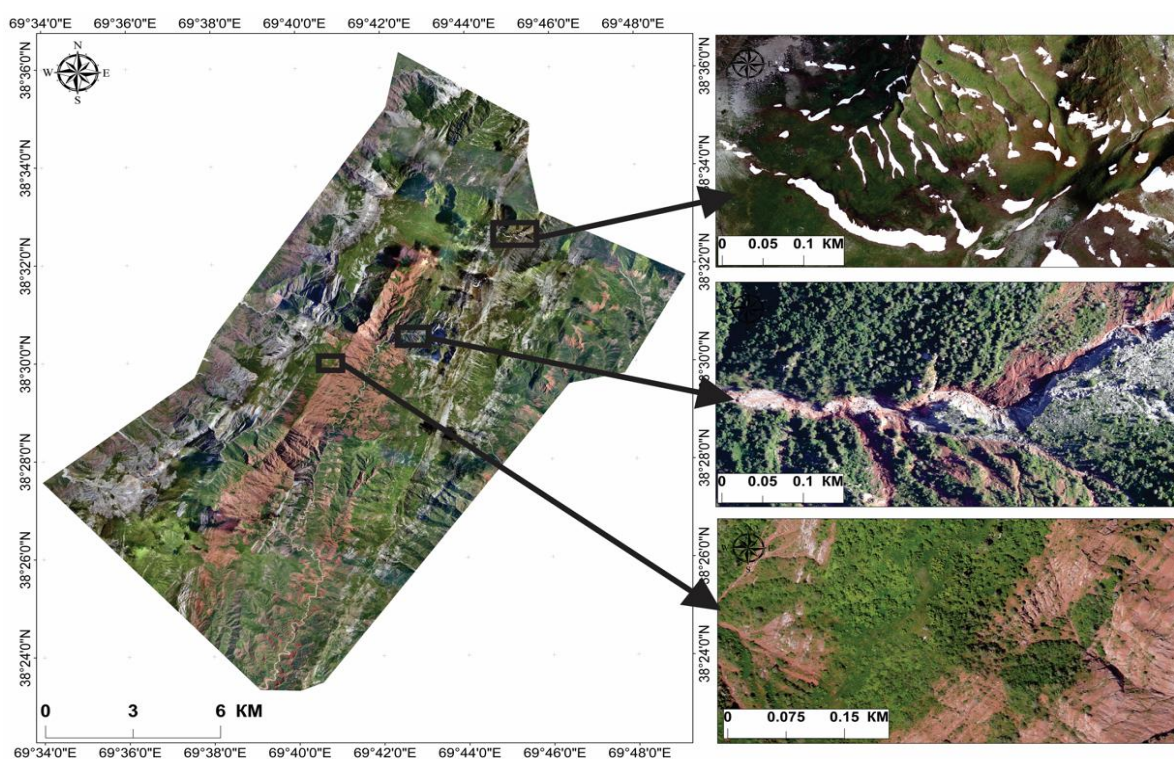


Рис. 2. Карта района аэрофотосъёмки после обработки аэрофотоматериалов.

Следует отметить, что по данным снимков видно, что на обследованной территории имеет место самовосстановление лесных ресурсов. Причиной этому служит исключение выпаса скота на некоторых участках хребта и отсутствие хозяйственной деятельности человека.

С помощью квадрокоптеров в трёх точках были засняты 12 особей бухарского горного барана (уриала) (рис. 3), в том числе 6 самок и 5 годовалых ягнят. Следует отметить, что в период исследования самцы бухарского горного барана были отделены от самок с детёнышами и занимали верхние пояса хребта. Поэтому для оценки реальной численности этого горного копытного проведение учёта необходимо планировать в ноябре-декабре, когда во время гона самцы и самки образуют смешанные стада.

Из хищных птиц квадрокоптерами на крутых склонах южных отрогов Вахшского хребта, лишённых растительности были засняты 22 особи белоголового сипа (рис. 4).

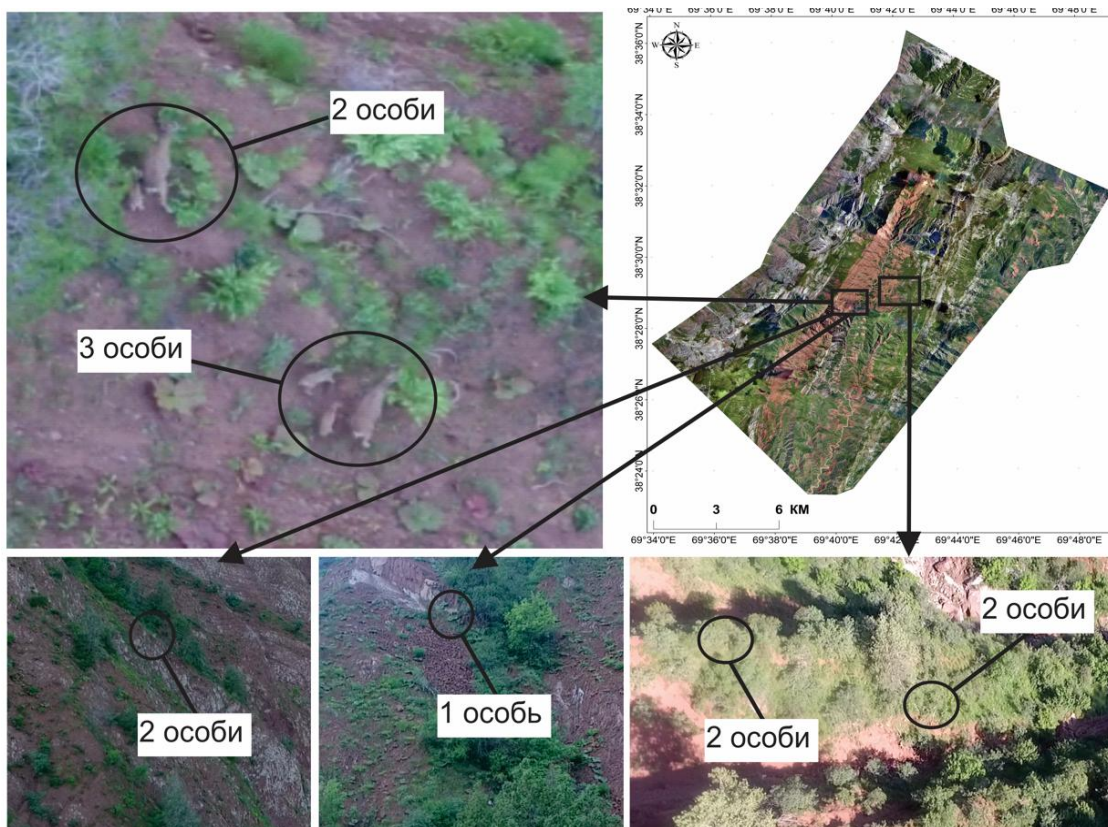


Рис. 3. Снимки бухарского горного барана (уриала) на разных участках исследования.



Рис. 4. Снимки белоголового сипа.

Таким образом, в перспективе, наряду с традиционными методами сбора данных, БПЛА могут быть использованы для упрощения работ исследователей и получения качественных и достоверных результатов за короткие сроки. Следует учесть, что горные копытные боятся звука БПЛА, поэтому необходимо соблюдать дистанцию, чтобы не испугать их. Исследования с применением БПЛА в мониторинге окружающей среды, в том числе флоры и фауны, будут и дальше продолжаться в сотрудничестве с профильными научными учреждениями Национальной академии наук Таджикистана.

Поступило 11.10.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевченко О.Ю., Боричевский А.Б. Использование беспилотных летательных аппаратов для ведения мониторинга использования территорий. – Экономика и экология территориальных образований. 2015, №3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-bespilotnyh-letatelnyh-apparatov-dlya-vedeniya-monitoringa-ispolzovaniya-territoriy> (дата обращения: 12.01.2022).
2. Таджикистан (природа и природные ресурсы). – Душанбе: Дониш, 1982, с. 213-214.
3. Большая советская энциклопедия. Вахшский хребет. 3 изд. т. 4 – М.: Советская энциклопедия, 1971, с. 340.
4. Сафаров М.С., Фазылов А.Р. Применение современных технологий дистанционного зондирования для мониторинга селеопасных районов горных территорий. – ГеоРиск, т. XIV, 2020, №2, с. 32-41, <https://doi.org/10.25296/1997-8669-2020-14-2-32-41>.
5. Каюмов А.К., Сафаров М.С. Инновационные методы изучения ледников. – Мат.-алы Республиканской науч.-практ. конф. «Водные ресурсы: состояние, новые подходы и перспективы развития», посвящ. 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан. – Душанбе, 2021, с. 39-43.
6. Зубова С.С., Постникова С.С. Мониторинг лесных экосистем. – Екатеринбург: УГЛТУ, 2020, 89 с.
7. Федосеева Н.А., Загвоздкин М.В. Перспективные области применения беспилотных летательных аппаратов. – Научный журнал, 2017, № 9 (22), с. 26-29.
8. Сафаров М.С., Фазылов А.Р. Риски стихийных бедствий, связанные с водой, и дистанционные методы их мониторинга. – Известия АН РТ. Отд. физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2018, №4 (173), с. 160-166.

М.С.Сафаров, Х.У.Каримов*, А.С.Саидов, И.Б.Холматов, Л.С.Набиев***, А.У.Бобочонов**

МОНИТОРИНГИ ГУНОГУНИИ БИОЛОГИИ ҚИСМАТИ ЧАНУБИИ ҚАТОРҚҶҲИ ВАХШ БО ИСТИФОДА АЗ ҲАВОПАЙМОҲОИ БЕСАРНИШИН

Маркази илмӣ-таҳқиқотии экология ва муҳити зисти Осӣи Марказӣ (Душанбе),

**ҶДММ «Оксус Холдинг» ш. Душанбе,*

***Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,*

****Институти зоология ва паразитология ба номи Е.Н.Павловскийи АМИТ*

Дар мақола натиҷаҳои таҳқиқоти саҳроӣ бо истифода аз ҳавопаймоҳои бесарнишин дар қаторқӯҳи Вахш бо мақсади мониторинги гуногунии биологӣ оварда шудааст. Бори аввал барои

мониторинги наботот ва ҳайвоноти экосистемаҳои ҷангал аз ҳавопаймоҳои бесарнишин истифода бурда шуд, он имкон дод, ки дар муддати кӯтоҳ мониторинги муҳити зист гузаронида шуда, маълумотҳои боэътимод ба даст оварда шаванд.

Калимаҳои калидӣ: мониторинг, ҳавопаймоҳои бесарнишин, аксбардори фазой, наботот, ҳайвонот.

M.S.Safarov, H.U.Karimov*, A.S.Saidov, I.B.Kholmatov**, L.S.Nabiev***, A.U.Bobojonov

BIODIVERSITY MONITORING OF THE SOUTHERN SPURS OF THE VAKHSH RIDGE WITH THE USE OF UNMANNED AERIAL VEHICLES

Research Center for Ecology and Environment of Central Asia (Dushanbe),

**Oxsus Holding LLC Dushanbe,*

***Tajik National University,*

****E.N.Pavlovsky Institute of Zoology and Parasitology of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

In this article the results obtained in the course of field studies using unmanned aerial vehicles on the Vakhsh ridge in order to monitor biodiversity are presents. For the first time, unmanned aerial vehicles were used to monitor the vegetation and animals of forest ecosystems, which made it possible to conduct environmental monitoring in a short time and obtain reliable data.

Key words: *monitoring, unmanned aerial vehicles, aerial photography, vegetation, animals.*

УДК 528.931.2+ 613.472(575.3-191.2)

О.Ш.Маджидов, М.А.Ниёзова

**СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ГИДРОГРАФИИ ОЗЁР БАССЕЙНА
РЕКИ КИШТУД (ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ТАДЖИКИСТАН)***Отдел географии НАН Таджикистана**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана З.В.Кобули 31.08.2021 г.)*

В статье впервые представлена подробная, полная и актуальная информация об озёрах бассейна р.Киштуд – левого притока р.Зеравшан. Основой количественных наблюдений являются крупномасштабные топографические карты, интернет-ресурсы (Google Earth, Bing) и полевые наблюдения. Акцент делается на сравнении текущего состояния водных ресурсов бассейна с предыдущими наблюдениями, их изменениях и тенденциях. В связи с тем, что озёра региона также нестабильны из-за изменения климата, особое внимание уделяется современному состоянию озёр, выявлены их количественное изменение и основные характеристики. Выполнено сравнение изменения площади озёр за 2007-2020 гг.

Ключевые слова: *Таджикистан, Киштуд, гидрография, река, озеро, ледник, изменение климата.*

Гидрографическая сеть Таджикистана сформировалась в неогеновое и четвертичное время, но сейчас она изменяется и, в первую очередь, из-за изменения климата, различных денудационных процессов на водосборах рек, появления и исчезновения ряда озёр и других причин. Эти процессы коснулись и трансграничных рек, таких как Зеравшан, притоков и озёр её бассейна. В этой связи представляется актуальным исследование (современное состояние) гидрографических особенностей озёр бассейна реки, особенно её левого притока – р.Киштуд. Для этих целей нами использованы полевые визуальные наблюдения, картографические методы с “Гугл-Земля”.

Озёра в бассейне р.Зеравшан, как и во всем Таджикистане, расположены в высокогорье, вдали от населенных пунктов, часто в труднопроходимых местах. Поэтому они недостаточно изучены [1].

Бассейн р.Киштуд, составляет юго-западную часть Зеравшанской долины и является одним из крупнейшим бассейнов.

На территории Пенджикентского района протекает более 317 малых и средних рек с притоками разного порядка, которые относятся к самостоятельным речным бассейнам: Зеравшан (более 267 рек) и бассейну Кашкадарья более 50 рек и ручьев.

Особенности режима озёр зависят от их размеров и географических условий их бассейнов. Поэтому понятие озёрного режима напрямую связано с изучением водоемов.

Гидрография Пенджикентского района еще во второй половине 20 века заинтересовала исследователей, таких как А.О.Кеммерих, В.И.Липский [2] и др. По А.О.Кеммерих [3], площадь бассейна р.Киштуд составляет 843 км². В нём отмечено 28 озёр разной величины (по состоянию на 1970 г.). Эти озёра расположены на высотах от 800 до 3500 м абс., а озёрность составляла 2% от об-

Адрес для корреспонденций: Маджидов Одинабой Шарифмуродович. 734025. Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр.Рудаки, 33, Отдел географии НАНТ. E-mail: mbobojon@mail.ru

щей площади бассейна. По нашим подсчётам, к 2019 г (через полвека), озёрность этого бассейна уменьшилась до 0.15-0.16%.

Бассейн р.Киштуд – один из крупнейших в долине р.Заравшан, он занимает 23% территории Пенджикентского района (рис.1).

В р.Киштуд впадают более 12 малых рек (притоки первого порядка), в свою очередь, большинство из них берут начало из других водостоков. В этом бассейне находятся большие озера Зеравшанской долины, такие как: Большое Ало, Чукурак, Душаха и др., часть из которых нанесены на картах. Некоторые из этих озёр образовались после 1980-х годов в результате таяния ледников из их остатков (на месте ледников). Остальные высохли по разным причинам. Поэтому эти озёра обычно не показаны на картах и не имеют названий.

Слева от р.Уреч находится озеро Чукурак, оно расположено южнее озера Зиёрат. Озёра соединяются между собой рекой. Эти озера расположены примерно в 1.7 км друг от друга. Небольшая безымянная река течет на юго-запад в озеро Чукурак. Примерно в 500-600 м к востоку от озера Чукурак находится еще одно относительно небольшое безымянное озеро, которое не имеет названия и питается ручьем, стекающим с востока. К северу от озера Чукурак есть озеро, называемое Белым [4]. Эти озера ограничены на востоке горами Говхона, на юге – горами Сариоб, а на западе - перевалом Саришах.

В 1 км к югу от альплагеря Артуч на берегу р.Уреч расположено озеро Чукурак. Первое озеро, расположенное в районе озера Чукурак, находится в 30 м в северной его части. В паводковые годы вода выходит из северной части озера Чукурак и впадает в р.Уреч. Еще одно озеро, которое не указано на картах озеро Сафедак, расположено на расстоянии 240 м восточнее от озера Чукурак. Водосборная площадь озера составляет 2.3 км².

Озеро Зиёрат образовалось в результате оползня. Летом 2019 г. было замечено высыхание этого озера. В восточной части хребта Говхона на высоте 2830 м абс. находится самое большое озеро бассейна – озеро Кули Калон. Прежде это озеро назывался Мохиф [5]. водосбор бассейн которого, составляет 42.8 км². В этой части бассейна р.Киштуд также находятся 5 озер: на севере и в северо-восточной части Кули Калон. Также там можно заметить следы высохших озёр. В сезон половодья эти котловины заполняются водой. Есть ещё четыре относительно больших озера и несколько других небольших озёр вокруг них.

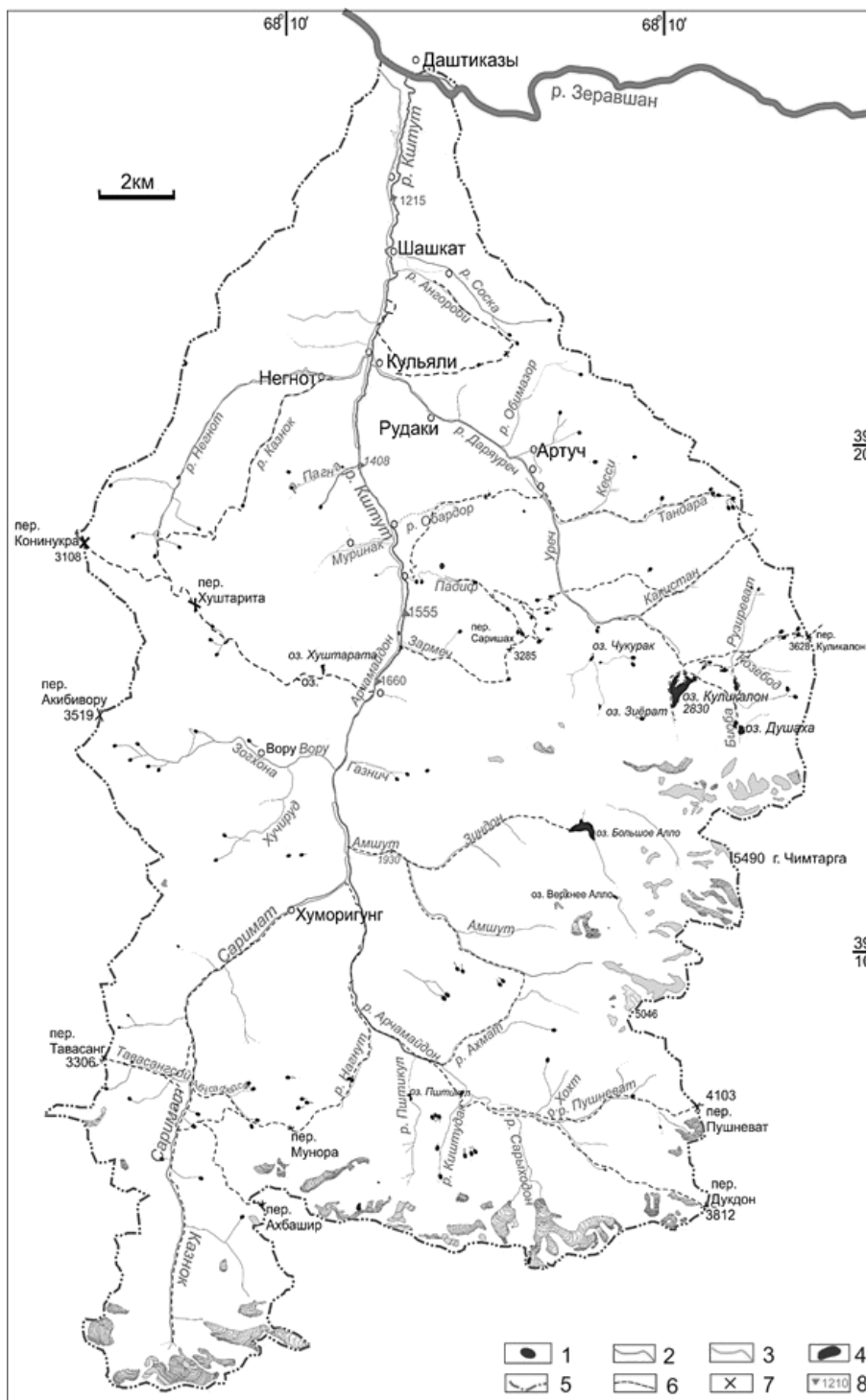


Рис. 1. Карта бассейна реки Киштуд.

1 – родники, 2 – реки, 3 – автодорога, 4 – озёра, 5 – граница водораздела, 6 – тропа, 7 – перевалы, 8 – урез реки.

Все эти озёра питаются водами ледников, которые находятся в хребтах вокруг них. Из этого можно сделать вывод, что само озеро Кули Калон и окружающие его озёра за последние 90 лет по площади стали намного меньше. На топографических картах 1960-х годов указаны два небольших озера в северной части озера Кули Калон. Эти озёра в настоящее время практически исчезли.

Река Биоба течёт на северо-восток на озеро Кули Калон, беря своё начало от озера Джангали и протекая через озеро Бибиджонак.

К северо-востоку от озера Кули Калон первым находится озеро Чангал с многочисленными заливами. В 60 м к северу от него находится еще одно озеро, которое наполняется водой в дождливые годы и высыхает в засушливые. Оно начало сокращаться с 2007 г., и полностью высохло в 2019 г. Другое озеро, которое находится к востоку от озера Кули Калон, называется Сиёх. В дождливые годы озеро Сиёх наполняется и вода из него впадает в озеро Джангал. В это озеро впадает и р.Биоба.

Озеро Бибиджонак расположено примерно в 600 м к востоку от озера Джангали. Озеро питают две реки, одна с севера: р.Рузиреват с притоком Козебод, а другая с востока: р.Биоба, которая протекает через озеро Молшуй, чуть выше озера Джангали.

Среди этих озёр на топографических картах отмечены только озеро Кули Калон и озеро Душаха, который состоит из двух небольших озёр, находящихся к северу от озера Кули Калон. Сведения о них и других озёрах исследуемого региона приведены в табл. 1.

Таблица 1

Озёра бассейна р.Киштуд

№	Название озёр /координаты	Параметры озёр в разные годы															Абс. высота, м
		Площадь, м ²					Максимальная длина, м					Максимальная ширина, м					
		2007/06	2013/08	2016/11	2017/06	2019/10	2007/06	2013/08	2016/11	2017/06	2019/10	2007/06	2013/08	2016/11	2017/06	2019/10	
1	Безымянное 39°15'54" с.ш. 68°08'04" в.д.	2263	1202	Не обновлено	2160	69	79	75	Не обновлено	81	13	48	30	Не обновлено	42	11	2428
2	Чукурак 39°15'48" с.ш. 68°07'59" в.д.	30317	30120	Не обновлено	31615	16600	289	291	Не обновлено	301	238	132	135	Не обновлено	134	108	2429
3	Безымянное (Сафедак) 39°15'43" с.ш. 68°08'17" в.д.	9630	6353	Не обновлено	8773	5425	148	129	Не обновлено	149	122	98	69	Не обновлено	84	65	2460
4	Зиёрат 39°14'50" с.ш. 68°08'15" в.д.	12992	9380	Не обновлено	12540	нест	213	202	Не обновлено	217	нест	135	123	Не обновлено	140	нест	2812
5	Кули Калон (Мохиф) 39°14'49" с.ш. 68°08'14" в.д.	485576	548715	494080	484414	Не обновлено	2007/06	2013/08	2016/06	2017/06	Не обновлено	576	607	587	588	Не обновлено	2830
6	Безымянное (Джангали) 39°15'38" с.ш. 68°11'00" в.д.		17760	17870	17658	Не обновлено	217	220	226	221	Не обновлено	111	130	126	125	Не обновлено	2840
7	Безымянное 39°15'38" с.ш. 68°11'00" в.д.	13022	11515	1820	783	Не обновлено	251	264	83	30	Не обновлено	86	79	28	18	Не обновлено	2846
8	Безымянное (кули Сиёх) 39°15'44" с.ш. 68°11'09" в.д.		15706	13280	13741	Не обновлено	207	210	198	197	Не обновлено	118	107	100	104	Не обновлено	2858
9	Безымянное (Бибиджонак) 39°15'35" с.ш. 68°11'34" в.д.	63897	52410	48540	48766	48750	511	509	507	510	352	202	201	208	201	191	2875
10	Безымянное (Молшуй) 39°15'16" с.ш. 68°11'51" в.д.	67490	64556	65566	63622	65492	595	567	573	572	575	170	153	157	157	160	2879
11	Душаха-1 39°14'30" с.ш. 68°11'51" в.д.	Не обновлено	47640	46540	47520	43677	Не обновлено	366	354	355	353	Не обновлено	175	182	185	177	2974

	в.д.																	
1 2	Душаха-2 39°14'25" с.ш. 68°12'00" в.д.	Не обновлен о	76605	76670	77543	76638	Не обновлен о	398	426	419	402	Не обновлен о	284	287	292	289	2975	
1 3	Большое Ало 39°12'28" с.ш. 68°07'51" в.д.		271948	375148	375998	253075	364825	833	1043	1047	824	1023	568	779	787	536	782	3147
1 4	Верхнее Ало (Сариоб) 39°12'28" с.ш. 68°07'51" в.д.		17960	18580	18800	17523	нест	241	243	244	232	нест	138	140	140	137	нест	3386
1 5	Безмянное 39°11'07" с.ш. 68°08'46" в.д.		693	1534	1580	632	высохло	38	46	46	29	высохло	29	44	44	27	высохло	3387
1 6	Безмянное 39°12'56" с.ш. 68°08'22" в.д.	высохло	4613	4642	высохло	высохло	высохло	146	147	высохло	высохло	высохло	42	41	высохло	высохло	3375	
1 7	Пуштикул 39°07'09" с.ш. 68°03'17" в.д.		33405	29439	30791	29726	30102	343	283	318	313	314	160	158	159	155	155	2505
1 8	Безмянное 39°05'04" с.ш. 68°02'58" в.д.	Под снегом	523	1131	Не обновлен о	2025	Не обновлен о	37	52	Не обновлен о	72	Не обновлен о	24	30	Не обновлен о	42	3450	
1 9	Безмянное 39°05'04" с.ш. 68°02'58" в.д.		31203	39832	41612	41510	37420	284	305	321	316	308	181	204	207	187	175	3670
2 0	Безмянное 39°05'29" с.ш. 68°02'28" в.д.		1979	1152	2186	4077	3794	108	85	84	135	137	51	38	58	55	48	3601
2 1	Безмянное 39°06'08" с.ш. 68°00'48" в.д.		1940	1377	1691	1593	2004	70	69	69	75	83	37	31	37	39	43	3484
2 2	Безмянное 39°06'37" с.ш. 68°00'46" в.д.		2380	1468	1760	2215	1950	56	61	59	55	47	51	50	43	53	49	3241
2 3	Безмянное 39°06'08" с.ш. 68°00'48" в.д.		4905	4976	5568	8401	Не обновлен о	123	119	127	152	Не обновлен о	55	53	59	75	Не обновлен о	4225
2 4	Безмянное (Пушневат) 39°06'33" с.ш. 68°09'53" в.д.	Не обновлен о	4869	8236	8396	Не обновлен о	142	Не обновлен о	150	155	Не обновлен о	74	Не обновлен о	85	85	Не обновлен о	3866	
2 5	Хуштарата 39°15'35" с.ш. 68°00'55" в.д.		38048	45760	Не обновлен о	38416	67675	340	364	Не обновлен о	345	420	200	215	Не обновлен о	202	270	1985
2 6	Безмянное 39°15'22" с.ш. 68°00'16" в.д.		6868	4661	Не обновлен о	6366	7496	147	125	Не обновлен о	151	158	58	36	Не обновлен о	56	62	2110
2 7	Безмянное 39°19'05" с.ш. 67°58'19" в.д.	2012год- 10788	2014год- 9101	Не обновлен о	11376	Не обновлен о	2012 год -213	2014 сол -199	Не обновлен о	220	Не обновлен о	2012 год- 79	2014 год- 74	Не обновлен о	82	Не обновлен о	2647	

Примечание. *Эти названия не указаны на картах.

Озеро Душаха не очень глубокое и зимой полностью замерзает. Второе озеро Душаха относительно большое, соединено рекой с первым озером. С востока в него впадает речка, приток р.Биоба.

В южной части горы Сариоб, на высоте 3147 м находится еще одно озеро – Алои Калон. Это озеро считается истоком р.Зиндон. В южной части гор Сариоб, на высоте 3147 м над уровнем моря, в истоках р.Амшут, находится еще одно озеро – называемое Алои Калон. Из него берет своё начало р.Зиндон. Озеро Алои Калон имеет моренное происхождение. Исследователи полагают, что озеро образовалось в 1918 г. в результате обрушения горных пород и перекрытия р.Зиндон.

Озеро Алои Калон расположено в месте слияния двух каньонов, один из которых начинается у подножия пика Чимтарга, как дуга, поворачивает сначала на северо-запад, затем на запад и, наконец, на юг. Вдоль ущелья в озеро впадает река, в конце сезона половодья в ней появляется небольшое озеро. Воды этой реки примерно в километре к северо-востоку от озера уходят под горные обломки.

Второе ущелье тянется на юго-восток от озера Алои Калон до заснеженных вершин. В этом ущелье р.Сарыкуль впадает в озеро Алои Калон. Эта река берет начало из озера Верхнее Ало (Сарыкуль). Когда озеро переполнено, вода переливается через плотину, а когда воды мало, она просачивается через его тело. Озеро Верхнее Ало расположено в 2.1 км к юго-востоку от озера Алои Калон.

Озеро Верхнее Ало также имеет моренное происхождение. Озеро неглубокое и иногда высыхает. В восточной части озера существовало еще одно небольшое озеро. К юго-востоку от этих озер течет ручей из ледников, лежащих на вершинах гор. Много лет назад между озерами Алло протекала река. Летом 2019 г. вода из озера Верхнее Ало полностью ушла.

В бассейне р.Арчамайдон, которая является основным притоком р.Киштуд, новообразованных озёр (озёра, которые образовались после 1980 г. теперь не указаны на топографических картах) больше, чем в других бассейнах. Первое озеро, расположенное на левом берегу р.Арчамайдон, расположено вдоль р.Пуштикуль и носит одноименное название. Примерно в 5.2 км к югу озеро Пуштикуль, в истоках р.Пуштикуль, на языке ледника 42 находится еще одно безымянное озеро [6].

В бассейне р.Саримад – одного из крупных притоков р.Киштуд, озёр не зарегистрировано. Также в ущелье под названием Хуштарата на левом берегу р.Киштуд в юго-восточной части гор Казнок, напротив села Газза, есть три бессточных озера. Первое озеро, которое расположено ниже двух других, носит название ущелья, Хуштарата. Из этих трёх озёр вода не вытекает. В озеро, которое находится выше двух других, впадают воды трёх источников. У двух нижних озер нет притока и стока. Из всех озёр в бассейне р.Киштуд только эти три озера были переполнены водой больше обычного в 2019 г., тогда так другие озёра истожились в этом же году, а некоторые полностью высохли.

В 2006 г. оползень в южной части р.Казнок (приток правого берега р.Негнот), примерно в 200 м к юго-востоку от села Негнот Пенджикентского района, перекрыл реку, в результате чего образовалось небольшое озеро. Жители села Негнот называли его Хуронкуль. С 2006 по 2020 г. его площадь увеличилась более чем в 3.5 раза. По имеющимся данным, в первый месяц существования озеро было 80 м в длину и 12 м в ширину. В табл. 2 приведены изменения морфометрических показателей этого озера за 2007-2019 гг.

Таблица 2

Динамика изменения морфометрических показателей озера Хуронкуль по результатам полевых съемок авторов

№№	Дата наблюдения	Площадь, м ²	Максимальная длина, м	Макси-мальная ширина, м	Периметр, м	Абс. высота зеркала, м
1	10.06.2007	1300	54	34	162	1546
2	22.09.2012	3430	90	75	189	1547
3	06.08.2013	3520	94	71	293	1548
4	16.06.2017	5700	103	86	397	1550
5	23.07.2019	4600	112	84	367	1548

Летом 2019 г. в бассейне р.Киштуд было зарегистрировано 21 озеро, из которых 5 появились после 80-х годов прошлого столетия. С 1980 г. по 2019 г. здесь полностью высохли 4 озера.

Поверхностный режим озёр определяется рядом природных условий, таких как: а) разница между водой, поступающей в озеро (осадки, поверхностные и грунтовые воды) и оттоком (испарение, фильтрация); б) морфометрические параметры озера: размеры, форма, очертания берегов, ветровая активность и др.

Абсолютная величина изменения амплитуды поверхности озёр в исследуемом бассейне очень разная – от высохших до 10000 м². Колебания площадей озёр в бассейне р.Киштуд с 2007 по 2019 гг. (среднее значение) приведены на рис. 2.

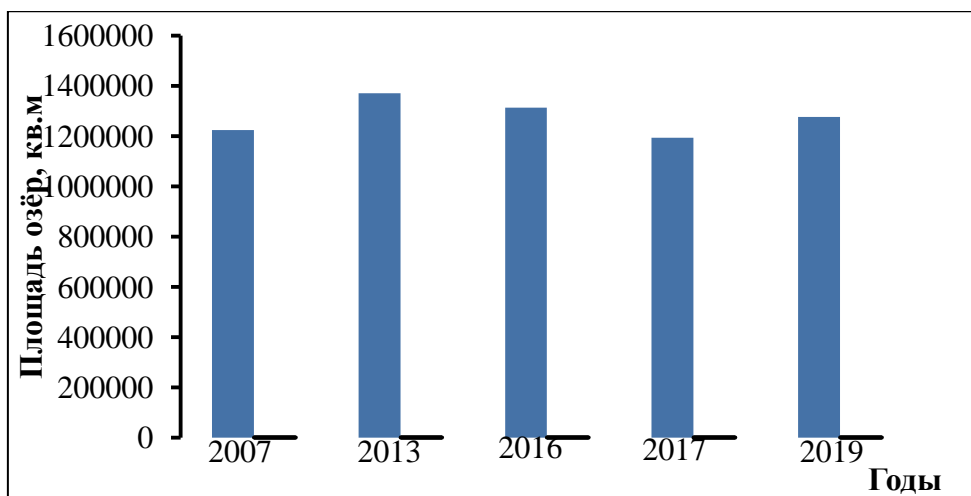


Рис. 2. Изменение площади озёр бассейна р.Киштуд по годам.

Средняя высота расположения озёр бассейна р.Киштуд над уровнем моря составляет 3045 м. Распределение озёр по высотам имеет чёткую закономерность (рис.3). Как видно из рис.3, наибольшее количество озёр (19) приходится к высотам 2700-4000 м

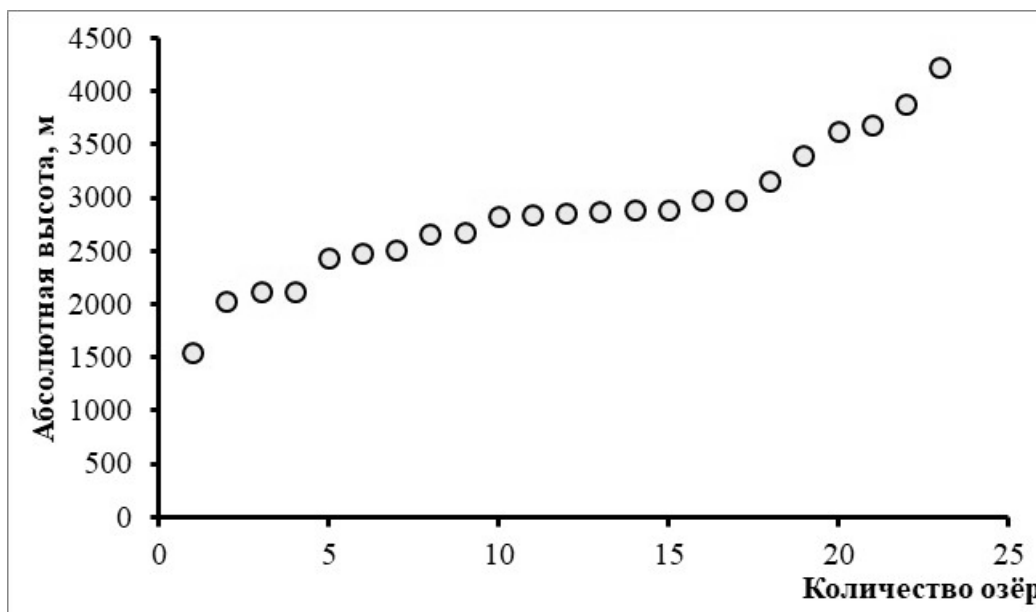


Рис. 3. Распределение озёр бассейна р.Киштуд по абсолютным высотам.

С годами в бассейне появляются новые озёра, а некоторые старые по разным причинам исчезают. На настоящее время озёрность бассейна р.Киштуд составляет всего 0.15%.

В ы в о д ы

Анализ данных за последние 50 лет показывает, что из-за изменения климата и других физико-географических факторов в бассейне р. Киштуд количество озёр не остаётся постоянным. Кроме этого, площади некоторых озёр под воздействием природных факторов увеличиваются, что может стать причиной опасных геодинамических проявлений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Каталог ледников СССР. том 14. Средняя Азия. выпуск 3. Амударья, части 1.2, бассейн р.Зеравшан. – Л.: Гидрометеиздат, 1982, 121 с.
2. Липский В.И. Горная Бухара. Результаты трёхлетней путешествий в Среднюю Азию в 1899 г. Часть 3. – СПб: Герольда, 1905. 735 с.
3. Кеммерих А.О. Гидрография Памира и Памиро-Алая. – Москва: Мысль, 1978, 263 с.
4. Аброров Х. Экономический потенциал водных ресурсов долины р.Зеравшан. – Душанбе: Деваштич, 2005, 190 с.
5. Мустаджир Абдурахмон. Дневник Искандаркульской экспедиции. – Душанбе: Ирфон, 1989, 176 с.
6. Молчанов Л.А. Озёра Средней Азии. – Ташкент: САГУ, 1929, 83 с.

О.Ш.Мачидов, М.А.Ниёзова

ҲОЛАТИ КУНУНИИ ГИДРОГРАФИЯИ КЎЛҶОИ ҲАВЗАИ ДАРӢИ КИШТЎД (ТОҶИКИСТОНИ МАРКАЗӢ)

Шуъбаи географияи АМИ Тоҷикистон

Дар мақола бори аввал маълумоти муфассал, мукамал ва муосир дар бораи кўлҳои ҳавзаи дарёи Киштуд – шохоби чапи дарёи Зарафшон пешниҳод карда мешавад. Мушоҳидаҳои микдорӣ ба

харитаҳои калонмиқёси топографӣ, захираҳои интернетӣ (Google Earth, Bing) ва мушоҳидаҳои саҳроӣ асос ёфтаанд. Тавачҷӯҳ ба муқоисаи вазъи имрӯзаи захираҳои оби ҳавза бо мушоҳидаҳои қаблӣ, тағирот ва тамоюлҳои онҳо равана карда шудааст. Аз сабаби он, ки қўлҳои минтақа низ вобаста ба тағирёбии иқлим ноустувор мебошанд, ба ҳолати кунунии қўлҳо тавачҷӯҳи махсус зоҳир карда шуда, тағироти миқдорӣ ва хусусиятҳои асосии онҳо муайян карда шудаанд. Муқоисаи тағйирот дар минтақаи қўлҳо барои солҳои 2007-2020 гузаронида шудааст.

Калимаҳои калидӣ: Тоҷикистон, Киштуд, гидрография, дарё, қўл, пирях, тағирёбии иқлим.

O.Sh.Majidov, M.A.Niyozova

CURRENT STATE OF HYDROGRAPHY IN THE KISHTUD RIVER BASIN (CENTRAL TAJIKISTAN)

Department of geography of NAS of Tajikistan

For the first time, in this article detailed, complete and up-to-date information about the lakes of the river basin are presents. Kishtud is a left tributary of the Zeravshan River. Quantitative observations are based on large-scale topographic maps, Internet resources (Google Earth, Bing) and field observations. The emphasis is on comparing the current state of the basin's water resources with previous observations, their changes and trends. Due to the fact that the lakes of the region are also unstable due to climate change, special attention is paid to the current state of the lakes, their quantitative change and main characteristics have been identified. Comparison of changes in the area of lakes for 2007-2020 is carried out.

Key words: Tajikistan, Kishtud, hydrography, river, lake, glacier, climate change.

УДК 581.19:631.522/524

Н.С.Диловарова

ПЕРЕКИСНОЕ ОКИСЛЕНИЕ ЛИПИДОВ У РАСТЕНИЙ *SOLANUM TUBEROSUM* L. В УСЛОВИЯХ *EX VITRO**Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана К.Алиевым 30.06.2021 г.)*

Были изучены интенсивность перекисного окисления липидов (ПОЛ) и ферменты антиоксидантной системы защиты в условиях *in vitro* и при продолжительной экспозиции в водно-солевом растворе (*ex vitro*) регенерантов перспективного клона картофеля №26. Показано, что в условиях *in vitro* уровень накопления малонового диальдегида низкий как в листьях, так и в корнях, а при переводе растений в водно-солевой раствор (разбавленный в два раза) Мурасиге-Скуга (МС) в условиях *ex vitro* наблюдается возрастание активности ПОЛ. Изменение накопления МДА в условиях *ex vitro* существенно влияет на интенсивность накопления перекиси водорода (АФК). Такое изменение АФК влияет на активность антиоксидантных ферментов каталазы и гваяколпероксидазы.

Ключевые слова: картофель, активные формы кислорода, перекисное окисление липидов, фермент, перекись водорода.

Основной причиной повреждения растений при неблагоприятных факторах среды является развитие окислительного стресса, приводящего к перекисному окислению липидов мембранных структур, снижению степени ненасыщенности жирных кислот и, следовательно, к изменению вязкости мембраны, которые тестируются по образованию малонового диальдегида (МДА) [1]. Вместе с тем содержания АФК, низкомолекулярных антиоксидантов и ферментов системы защиты определяют адаптационный потенциал растений при действии экстремальных факторов среды, поскольку указывают на устойчивость растений к стрессорам различной природы [2] и зависят от статуса генотипа к стрессу. Однако причины, сдерживающие интенсивность ПОЛ или его стимулирование у генотипов, отличающихся по продуктивности и устойчивости картофеля в системах *ex vitro* и *in vitro*, недостаточно изучены.

Окислительный стресс можно идентифицировать как нарушение оптимальных условий баланса между про- и антиоксидантными компонентами клетки. Главным представителем прооксидантов является избыточная внутриклеточная генерация АФК, которая представлена в виде супероксид-радикала (O_2^-), пероксид водорода (H_2O_2), гидроксил-радикала (ОН). Они участвуют в реакции окисления многих клеточных структур и в итоге нарушают ход нормальных метаболических процессов в клетке [2-5]. В нормальных условиях роста и развития растений постоянно присутствует АФК как фактор, осуществляющий гомеостатический контроль уровня свободных радикалов [6]. Функционирование АФК системы клетки, очевидно, имеет существенное значение при адаптации растений к стрессорным воздействиям. В пользу этой точки зрения в настоящее время имеются данные, согласно

Адрес для корреспонденции: Диловарова Нигина Сифатишоевна. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул.Айни, 299/2, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАНТ. E-mail: nigin.sima@mail.ru

которым устойчивые генотипы имеют более высокий уровень активности антиоксидантных ферментов [7,8].

В связи с этим в задачу наших исследований входило изучение показателей, характеризующих состояние ПОЛ в условиях *in vitro* и *ex vitro* на примере двух отличающихся по устойчивости генотипов картофеля. Для этого был использован клон-гибрид №26. Ранее нами было показано, что данный генотип характеризуется достаточно высокой устойчивостью к водному стрессу [9]. Вместе с тем, эти данные недостаточно раскрывают специфичность функции антиоксидантных ферментов в органах растения и не раскрывают активность конкретных АФК-окисляющих антиоксидантов в листьях и корнях растений.

Материал и методы исследования

Объектом исследования служил клон-гибрид №26 из коллекции лаборатории молекулярной биологии и биотехнологии растений Института ботаники, физиологии и генетики растений Национальной академии наук Таджикистана.

Перекисное окисление липидов определяли по содержанию МДА с тиобарбитуровой кислотой (ТБК) согласно [10] и выражали в мкмоль/г сырой массы. Для этого 0.5 г листьев растирали с 4 мл раствора реакционной смеси (0.5% ТБК, приготовленный 20% растворенной в трихлоруксусной кислоте). Гомогенат перемешивали и переносили в плотно закрытые пробирки и нагревали в течение 30 мин при 95-100°C. Затем пробирки быстро охлаждали и центрифугировали 5 мин при 9000 об/мин. Оптическую плотность пробы измеряли при E_{532} нм и E_{600} нм на спектрофотометре UltraspecII (Швеция). Содержание H_2O_2 определялось согласно [11].

Эксперименты повторяли не менее трёх раз. Результаты представлены в виде средней арифметической величины со стандартной ошибкой. Использовали параметрическую кривую Стьюдента при уровне значимости $P < 0.05$.

Результаты исследования и их обсуждение

Общепринятым критерием оценки уровня перекисного окисления липидов является интенсивность образования МДА. Результаты анализа содержания МДА в листьях и корнях клон-гибрида №26 представлены на рис. 1. Как видно из рис. 1, низкое содержание МДА как в листьях, так и в корнях наблюдалось в условиях *in vitro*. При переводе растений-регенерантов в условия *ex vitro* происходило быстрое накопление МДА в течение последующего их выращивания в водно-минеральной смеси МС. Такая тенденция быстрого накопления МДА отмечалась в течение от 3-х до 9-ти суток с последующим падением его содержания. Характер накопления МДА в листьях и корнях при переводе растений в условия *ex vitro* несколько отличался. Содержание МДА в листьях в первые 3 и 6 суток было гораздо выше, чем в корнях.

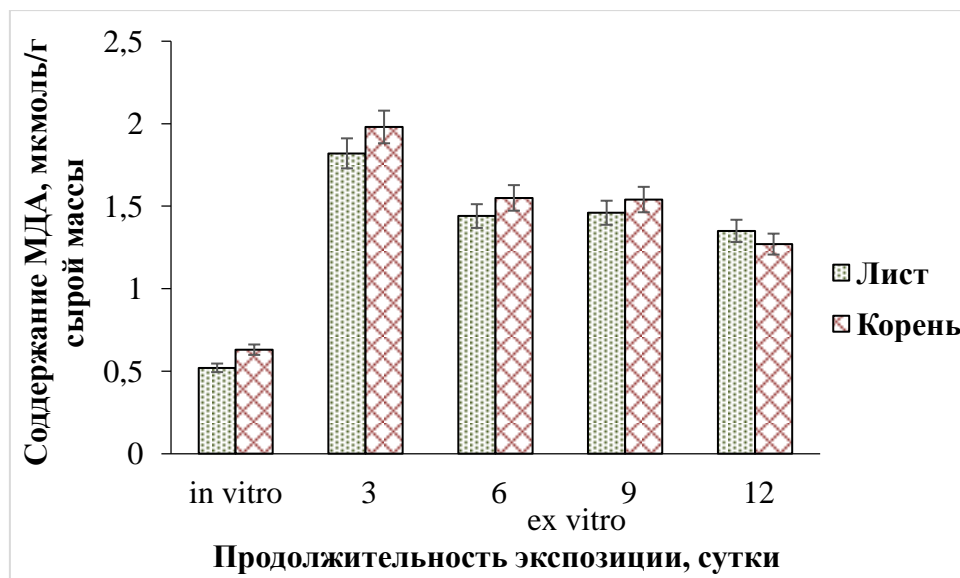


Рис. 1. Содержание малонового диальдегида в листьях и корнях растений картофеля в условиях *in vitro* и *ex vitro*.

Полученные данные свидетельствуют о том, что в клетке растений существуют две фазы: чувствительная, кратковременная (до 3-х суток) и продолжительная, специфичное (от 6-ти до 12 суток). Эти фазы в листьях и корнях отличаются по уровню накопления МДА и H_2O_2 .

Повышение уровня содержания МДА может быть связано с быстрым увеличением содержания H_2O_2 (рис. 2), которое в последующем периоде выращивания выходит на стационарный уровень. Уровень накопления H_2O_2 в условиях *ex vitro* в корнях был значительно выше, чем в листьях.

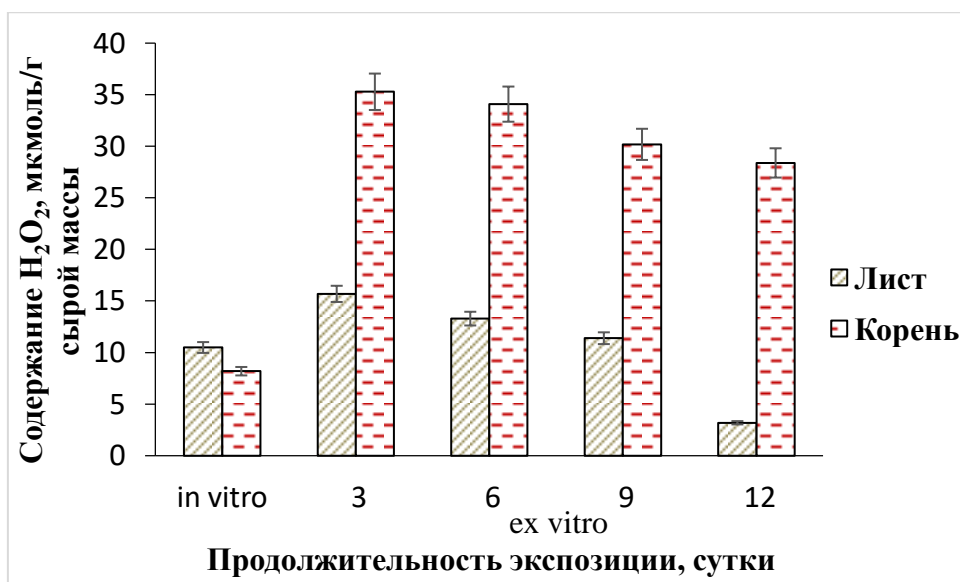


Рис. 2. Содержание перекиси водорода в листьях и корнях растений картофеля в условиях *in vitro* и *ex vitro*.

Чувствительная фаза и в листьях, и в корнях характеризуется повышением содержания H_2O_2 и интенсивным образованием МДА. Во второй фазе (от 6-ти до 12 суток) оба эти показателя были одинаковыми и переходили на стационарный уровень, что незамедлительно отражалось на активности антиоксидантных ферментов.

Таким образом, полученные результаты показали, что, в отличие от листьев, корневая система растений картофеля обладает низким потенциалом накопления прооксидантов. Это, видимо, связано с высоким уровнем активности антиоксидантных ферментов, что будет изучено в дальнейшем.

Поступило 30.06.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мерзляк М.Н. Активированный кислород и окислительные процессы в мембранах растительной клетки. – Итоги науки и техники. Сер. Физиология растений, 1989, т. 6, 167 с.
2. Лукаткин А.С. Холодовое повреждение теплолюбивых растений и окислительный стресс. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2002, 208 с.
3. Гарифзянов А.Р., Жуков Н.Н., Иванищев В.В. Образование и физиологические реакции активных форм кислорода в клетках растений. – Современные проблемы науки и образования, 2011, № 2, с. 1-21.
4. Zhang J.L., Shi H. Physiological and molecular mechanisms of plant salt tolerance. – *Photosynth. Res.*, 2013, v. 115, pp. 1-22.
5. Норкулов Н.Х., Давлятназарова З.Б., Азимов М.Л., Алиев У.К., Файзиева С.А., Киёмова З., Алиев К. Роль антиоксидантных ферментов в развитии устойчивости растений к стрессорному воздействию. – Вестник Таджикского национального университета. Сер. естеств. наук, 2014, № 12 (130), с. 167-173.
6. Киёмова З.С., Давлятназарова З.Б., Шукурова М.Х., Ашуров С.Х., Алиев К.А. Активность супероксиддисмутазы у разнотолерантных растений-регенерантов картофеля в условиях солевого стресса. – Изв. АН РТ. Отд. биол. и мед.н., 2013, №1 (182), с. 40-46.
7. Колупаев Ю.Е., Кокорев А.И. Антиоксидантная система и устойчивость растений к недостатку влаги. – Физиология растений и генетика, 2019, т. 51 (1), с. 28-54.
8. Ефимова М.В., Коломейчук Л.В., Бойко Е.В., Малофий М.К., Видершпан А.Н., Плюснин И.Н., Головацкая И.Ф., Мурган О.К., Кузнецов Вл.В. Физиологические механизмы устойчивости растений *Solanum tuberosum* L. к хлоридному засолению. – Физ. раст., 2018, т. 65, № 3, с. 196-206.
9. Диловарова Н.С., Норкулов Н.Х., Давлятназарова З.Б., Каспарова И.С., Садриддинов М., Алиев К. Индукция антиоксидантной системы растений картофеля *Solanum tuberosum* L. в условиях засухи. – Изв. АН РТ. Отд. биол. и мед.н., 2020, № 2 (209), с. 38-45.
10. Aebi H. Catalase in vitro. – *Methods Enzymol.*, 1984, v.105, pp. 121-126.
11. Синькевич М.С., Нарайкина Н.В., Трунова Т.И. Процессы, препятствующие повышению интенсивности перекисного окисления липидов у холодостойких растений при гипотермии. – Физ.раст., 2011, т.58, с.1020-1026.

Н.С.Диловарова

**ОКСИДШАВИИ ПЕРОКСИДИИ ЧАРБҲО ДАР РАСТАНИҲОИ
SOLANUM TUBEROSUM L. ДАР ШАРОИТИ *EX VITRO****Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани**Академияи милли илмҳои Тоҷикистон*

Шиддатнокии оксидшавии пероксидии чарбҳо (ОПЧ) ва ферментҳои исистемаи муҳофизатианти оксидантӣ дар шароити *in vitro* ва ҳангоми таъсири дарозмуддати маҳлули регенерантии обу-намак (*ex vitro*) ба клони умедбахши картошкаи №26 омӯхта шуд. Нишон дода шуд, ки дар шароити *in vitro* сатҳи чамъшавии диальдегиди малонӣ (ДМА) ҳам дар барг ва ҳам дар реша паст аст ва бо гузаронидани растаниҳо ба маҳлули обу-намаки (думаротиба иловакардашуда) Мурасиге Скуга (МС) афзоиш фаъолиятнокии ОПЧ дар шароити *ex vitro* ба назар мерасад. Тағирёбии чамъшавии ДМА дар шароити *ex vitro* ба суръати чамъшавии пероксиди гидроген (ШФО) ба таври назаррас таъсир мерасонад. Ин тарз тағирёбии ШФО ба фаъолиятнокии ферментҳои антиоксидантии каталаза ва гваякол пероксидаза таъсир мекунад.

Калимаҳои калидӣ: картошка, шаклҳои фаъоли оксиген, оксидшавии пероксидии чарбҳо, фермент, пероксиди гидроген.

N.S.Dilovarova

**LIPID PEROXIDATION OF *SOLANUM TUBEROSUM* L.
PLANTS UNDER *EX VITRO* CONDITIONS***Institute of Botany, Plant Physiology and Genetics of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

The intensity of lipid peroxidation and the enzymes of the antioxidant system protection *in vitro* and under long lasting exposure in water-salt solution (*ex vitro*) on the perspective potato's clone №26 were studied. It was shown, that accumulation level of the malondialdehyde (MDA) was lower both in leaves and in roots *in vitro*, and after transferring the plants into the Murashige and Skoog (MS) water-salt solution (diluted twice) the activity of the lipid peroxidation increased in *ex vitro* condition. The variation on MDA accumulation under *ex vitro* condition sufficiently influences the intensity of the hydrogen peroxide accumulation (ROS). Such drifting of the ROS accumulation influences activity of both catalase and guaiacol peroxidase enzymes. As a result, the organ specificity of the protective antioxidant system of plant *ex vitro* was determined.

Key words: potato, reactive oxygenspecies, lipid peroxidation, enzyme, hydrogen peroxide.

УДК 581.132.633.11

М.М.Рахимов

О СОДЕРЖАНИИ РАСТВОРИМЫХ УГЛЕВОДОВ У ПШЕНИЦЫ В РАЗЛИЧНЫХ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни

(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Х.А.Абдуллаевым 19.05.2021 г.)

В статье приведены результаты работ по изучению содержания растворимых углеводов в органах трёх сортов пшеницы: местной селекции (Зафар и Хуросон) и интродуцированной (Купава) из России в основные фазы вегетации растений, выращенных в условиях богары и полива. Установлено, что в условиях богары содержание растворимых углеводов больше, чем в условиях полива. Показано, что за счёт ускоренного синтеза и быстрой мобилизации растворимых углеводов в обменные процессы, растения активно продолжают свою вегетацию.

Ключевые слова: *пшеница, листья, стебли, колос, растворимые углеводы, экологические условия.*

В связи с глобальным изменением климата, а также влиянием экстремальных факторов биогенного и антропогенного характера создаются проблемы в жизнедеятельности растений.

В селекции злаковых культур важнейшими биохимическими признаками, характеризующими адаптацию растений к тем или иным экологическим условиям, является повышение содержания неструктурных углеводов, то есть суммы растворимых углеводов и крахмала [1-4].

Содержание растворимых углеводов в вегетативных органах пшеницы находится в тесной зависимости от физиологического состояния, уровня фотосинтетической активности растений и экологических условий [5,6].

В этой связи целью настоящей работы явилось изучение содержания растворимых углеводов в различных органах растений трёх сортов пшеницы в основные фазы развития растений, выращенных в условиях богары и полива.

Материалы и методы исследований

Объектами исследования служили: местные сорта пшеницы Зафар и Хуросон и интродуцированный из России сорт Купава. Сорт Зафар выведен в корпорации «Хуроквори» и агрофирме «Табиаат», районирован в Республике Таджикистан. Сорт Хуросон получен в Институте ботаники, физиологии и генетики растений АН РТ. Сорт Купава получен из Краснодарского НИИ сельского хозяйства им. П.П.Лукияненко (Российская Федерация).

Опыты были заложены на экспериментальном участке Института ботаники, физиологии и генетики растений АН РТ (Душанбе, 830 м над ур.м.), пшеницу выращивали без полива и одновременно – на поливных землях в хозяйстве «Бобои Али» (район Джамии, Хатлонская область, 650 м над ур.м.).

Адрес для корреспонденции: *Рахимов Махмаднавруз Муродович. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет. E-mail: navruzbg@mail.ru*

Посевы на богарных землях проводили в последней декаде ноября. Согласно общепринятым агротехнологиям выращивания пшеницы в Республике Таджикистан [7,8]. Применяли широкорядный ленточный посев (расстояние между рядами 20-25 см). Размер делянок 2x2 м. Азотные и фосфорные удобрения вносили три раза: в фазах трубкования, колошения-цветения и молочной спелости.

Содержание растворимых углеводов определяли по микрометоду Дюбуа [9]. Статистическую обработку экспериментальных данных проводили по Б.А.Доспехову [10] с использованием программы *Microsoft Excel 2010*.

Результаты исследований и их обсуждение

Результаты анализа содержания растворимых углеводов в органах растений пшеницы, выращенной в условиях богары и полива, представлены на рис. 1.

Как видно из рис.1, в условиях богары у всех сортов в разных органах растения содержание углеводов повышается, начиная с фазы кущения, затем к фазе восковой спелости их количество снижается. Максимальное количество растворимых углеводов накапливается в стебле в фазе цветения.

Аналогичная картина динамики накопления углеводов наблюдали и в условиях полива, только разница была в том, что в условиях достаточной водообеспеченности у всех сортов содержание растворимых углеводов в органах во всех фазах развития растений было значительно ниже, чем в условиях богары.

Синтез углеводов в листьях и стебле в процессе вегетации у пшеницы сорта Зафар был активен до восковой спелости, у пшеницы сортов Хуросон и Купава только в листе, а в остальных органах содержание углеводов сильно колебалось. В условиях богары углеводы во всех органах пшеницы в основном возрастают до фазы цветения, затем к фазе восковой спелости их содержание понижается. В стебле, начиная с фазы цветения, синтезируется большое количество растворимых углеводов, которые обычно выполняют роль донора в данный период вегетации, затем происходит процесс их утилизации, так как в дальнейшем к фазе восковой спелости, в связи с использованием в процессе формирования зерновок, их содержание уменьшается.

Такие же данные были получены раньше [11] при работе с тритикале и пшеницей, где чётко проявилась роль стебля – донора в накоплении растворимых углеводов, которые в будущем в процессе вегетации используются для участия в формировании зерновок.

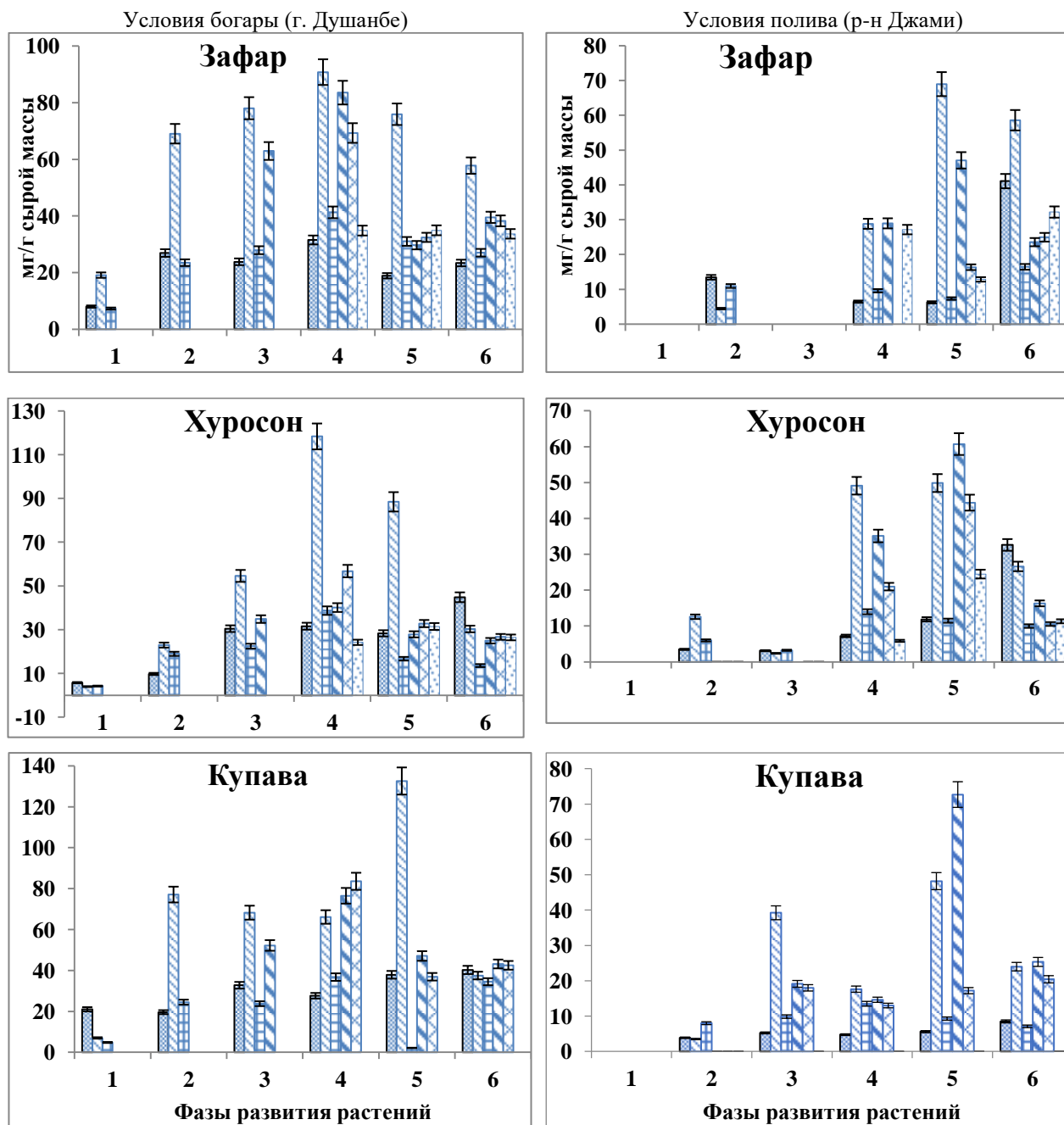


Рис. 1. Содержание растворимых углеводов (мг/г сырой массы) в органах пшеницы, выращенной в разных условиях. Фазы развития: 1 – кущение; 2 – трубкование; 3 – колошение; 4 – цветение; 5 – молочная спелость; 6 – восковая спелость.

Обозначения: ■ лист ; ▨ стебель ; ▩ корни ; ▤ колос ; ▥ чешуя ; ▦ ости ;

З а к л ю ч е н и е

Таким образом, результаты наших исследований позволяют заключить, что в условиях богары и полива, благодаря значительным запасам растворимых углеводов, жизнедеятельность растения происходит активно за счёт мобилизации углеводов и других ассимилятов, что способствует интенсивному накоплению биомассы.

Проведённый корреляционный анализ показал, что между содержанием углеводов в различных органах и показателями продуктивности растений пшеницы наблюдается положительная корреляционная зависимость, отражающая их взаимодействия.

Поступило 26.05.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Drake B.G., Gonraler-Meler M.A., Long S.P. More Efficient plants: A Consequence of Rising Atmospheric CO₂. – Annu. Rev. Plant Physiol. Plant Mol. Biol., 1997, v. 48, pp. 609-639.
2. Bowes G. Facing the Inevitable: Plants and increasing Atmospheric CO₂ – Annu. Rev. Plant Physiol. Plant Mol. Biol., 1993, v. 44, pp. 309-332.
3. Каримов Х.Х. Физиология и биохимия зимневегетирующих кормовых культур. – Душанбе, 2003, с. 43-119.
4. Сабоиев И.А. Физиолого-биохимические особенности пшеницы, обуславливающие высокую продуктивность в условиях Центрального Таджикистана: Дисс.... к.б.н. – Душанбе, 2006, 117 с.
5. Аникеева Л.А. Исследование углеводного комплекса некоторых короткостебельных сортов озимой пшеницы: Автореф. дисс.... к.б.н. – Алма-Ата, 1980, 17 с.
6. Рахимов М.М., Ниязмухамедова М.Б. Содержание растворимых углеводов в разных органах пшеницы, выращенной в условиях богары и полива. – "Фотосинтез и проблемы повышения продуктивности растений". Мат-лы науч. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения академика АН РТ Ю.С.Насырова. – Душанбе, 2012, с.58-59.
7. Научная система ведения сельского хозяйства Таджикистана. – Душанбе: Матбуот, 2009, 764 с.
8. Научно обоснованная система земледелия Таджикской ССР. – Душанбе: Ирфон, 1984, 498 с.
9. Dubois M., Gilles K.A., Hamilton J.K., Rebers P.A., Smith F. – Colorimetric method for determination of sugars and related substances. – Analit. Chem. 1956, v. 28, №3, pp. 350-356.
10. Доспехов Б.А. Методика полевого опыта. – М.: Колос, 1985, 352 с.
11. Ниязмухамедова М.Б. О соотношении содержания растворимых углеводов в корневой и надземной системах тритикале. – Изв. АН РТ. Отд. биол. н. – Депонир. в ВИНТИ, 1997, N1691-В 97, 11 с.

М.М.Рахимов

МИҚДОРИ КАРБОГИДРАТҲОИ ҲАЛШАВАНДА ДАР УЗВҲОИ РАСТАНИИ ГАНДУМ ДАР ШАРОИТҲОИ ГУНОГУНИ ЭКОЛОГӢ

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Дар мақола натиҷаҳои корҳои тадқиқотӣ оид ба омӯзиши карбогидратҳои ҳалшаванда дар узвҳои се навъи гандум, гандуми селекцияи маҳаллӣ (Зафар ва Хуросон) ва аз Русия ба Тоҷикистон оварда шуда (Купава) дар марҳилаҳои асосии нашъунамои растанӣ, ки дар шароити лалмӣ ва обёршаванда кишт шудаанд, маълумотҳои оварда шудааст. Фарқияти миқдори карбогидратҳои ҳалшаванда дар генотипҳои гуногуни гандуми дар шароити лалмӣ ва обёрӣ киштшуда ошкор карда шудааст.

Маълум карда шудааст, ки дар шароити хушкӣ миқдори карбогидратҳои ҳалшаванда нисбат ба шароити обӣ зиёдтар аст. Синтези ғайол ва истифодаи карбогидратҳои ҳалшаванда дар раванди мубодилаи моддаҳои растанӣ ба онҳо имконият медиҳанд, ки ғайолияти ҳаётии худро бемайлон идома диҳанд.

Калимаҳои калидӣ: гандум, барғҳо, тана, хӯша, карбогидратҳои ҳалшаванда, шароитҳои экологӣ.

M.M.Rahimov

CONTENT OF SOLUBLE CARBOHYDRATES IN WHEAT GRAINED IN VARIOUS ECOLOGICAL CONDITIONS

S.Aini Tajik State Pedagogical University

In this article the results of studies on the soluble carbohydrates in the organs of wheat of three varieties of wheat of local selection (Zafar and Khuroson) and introduced (Kupava) from Russia to Tajikistan in the main phases of vegetation of plants grown in rainfed and irrigation are presents. Differences in the level of soluble carbohydrates in different wheat genotypes were identified under conditions of rainfed and irrigation. It is shown that, in the conditions of dry water, the content of soluble carbohydrates is greater than under irrigation conditions. Due to the active synthesis and mobilization of soluble carbohydrates, plants safely continue their activity.

Key words: wheat, leaves, stems, ears, soluble carbohydrates, environmental conditions.