

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

- М.Ш.Шабозов, З.А.Парвонаева.** О неравенствах типа Джексона в  $L_2[-1,1]$  и решения некоторых экстремальных задач теории приближений.....143
- Ю.Х.Хасанов, М.М.Махамадиева.** О суммировании рядов Фурье методом Вороного-Нёрлунда .....150
- С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров.** О конечномерности ядра некоторых вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида.....157
- И.Курбонов, У.Бахтовар.**  $E$ -задача электродинамики для изотропной кусочно-линейной и нелинейной среды с памятью .....162
- Ш.Б.Халилов, Б.Н.Рушанов.** К теории граничных задач для многомерных эллиптических по Петровскому систем уравнений второго порядка .....171
- Г.Х.Худжаназарова, И.З.Хонов.** Основные краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений четвертого порядка с разрывными коэффициентами .....179

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- М.М.Кабиллов.** Тепловое воспламенение смеси газов в инертной пористой среде .....186

## АСТРОФИЗИКА

- Х.Г.Асоев.** Исследование зависимости абсолютной яркости комет от активности Солнца .....192

## ФИЗИКА

- А.М.Олимов, М.С.Курбониён, Томоюки Ямамото, Ф.Рахими.** Воздействие давления на геометрические и эластические свойства  $CsPbX_3$  ( $X = Cl, Br, I$ ) .....201
- С.Одинаев, Д.А.Абдурасулов, А.А.Абдурасулов.** Молекулярно-статистическое исследование ориентационных упругих свойств нематических жидких кристаллов .....210
- Ш.С.Нурулхаков.** О точном решении связанных уравнений при вынужденном комбинационном рассеянии света методом Римана .....220

## ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- М.Д.Бобоёров.** Кинетика разложения урансодержащих руд Таджикистана .....229
- А.С.Джафаров.** Фазовые равновесия в системе In-Te .....233
- Т.М.Умарова, С.С.Холова, Д.С.Кучакшоев.** Синтез и физико-химические свойства сплавов систем Al-Te, легированных неодимом.....240

**ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ**

**А.Тошмахмадзода.** Модификация битума с добавками полимеров с использованием вторичного сырья и побочных продуктов промышленности.....248

**ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ**

**Ф.М.Тошов, Ш.Р.Самихов, Ш.А.Курбонов, Н.Х.Ойзода, Х.А.Абдуллаев.** Влияние фосфорного удобрения, полученного из фосфоритов Риватского месторождения, на биологические и хозяйственно ценные показатели средневолокнистого хлопчатника .....254

**Т.Ш.Авезов, А.Эргашев.** Влияние обработки семян физиологически активными веществами на активность антиоксидантных ферментов листьев пшеницы в условиях почвенной засухи.....260

**БИОХИМИЯ**

**А.К.Сайфудинов, М.А.Бабаджанова.** Кинетическое исследование рибозофосфатизомеразной активности мультиферментного комплекса цикла Кальвина в экстрактах из листьев хлопчатника .....264

**ГАСТРОЭНТЕРОЛОГИЯ**

**Б.И.Ганиев, С.А.Авезов.** Гипербилирубинемия в развитии энцефалопатии при циррозе печени.....269

## CONTENTS

## MATHEMATICS

- M.Sh.Shabozov, Z.A.Parvonaeva.** About Jackson-type inequalities in  $L_2[-1,1]$  and solutions of some extremal problems .....143
- Yu.Kh.Khasanov, M.M.Makhamadieva.** About the summation of Fourier series by Voronoi-Nerlund method .....150
- S.A.Iskhokov, K.E.Khakhazarov.** On the finite dimensionality of the kernel of some non-degenerate elliptic operators .....157
- I.Kurbonov, U.Bakhtovar.**  $E$ -problem of electrodynamics for an isotropic suspension-linear and nonlinear medium with memory .....162
- Sh.B.Khalilov, B.N.Rushanov.** On the theory of boundary problems for multidimensional Petrovsky elliptic systems of equations of the second order .....171
- G.Kh.Khujanazarova, I.Z.Khonov.** Basic boundary-value problems for elliptic systems of differential equations of the fourth order with displacement coefficients .....179

## MATHEMATICAL PHYSICS

- M.M.Kabilov.** Thermal ignition of a mixture of gas in an inert porous medium .....186

## ASTROPHYSICS

- H.G.Asoev.** Investigation of the dependence of the absolute brightness of comets on the Solar activity .....192

## PHYSICS

- A.M.Olimov, M.Subhoni, Tomoyuki Yamamoto, F.Rahimi.** Effect of pressure on the geometric and elastic properties of  $\text{CsPbX}_3$  ( $X = \text{Cl, Br, I}$ ) .....201
- S.Odinaev, D.A.Abdurasulov, A.A.Abdurasulov.** Molecular statistical study of the orientation elastic properties of nematic liquid crystals .....210
- Sh.S.Nurulhakov.** An exact solution of the coupled equations in the theory of stimulated Brillouin scattering using Riemann method .....220

## PHYSICAL CHEMISTRY

- M.D.Boboyorov.** Decomposition kinetics of uranium-containing ores in Tajikistan .....229
- A.S.Jafarov.** Phase equilibrium in the In-Te system .....233
- T.M.Umarova, S.S.Holova, D.S.Kuchakshoev.** Synthesis and physicochemical properties of Al-Te alloys alloyed by neodymium .....240

**CHEMICAL TECHNOLOGY**

**A.Toshmakhmadzoda.** Modification of bitumen with polymer additives using secondary raw materials and by-products of the industry .....248

**PLANT PHYSIOLOGY**

**F.M.Toshov, Sh.R.Samikhov, Sh.A.Kurbonov, N.Kh.Oyzoda, Kh.A.Abdullaev.** Action of phosphate fertilizer, produced from phosphorites of the Rivat deposit on biological and economical traits of middle staple cotton .....254

**T.Sh.Avezov, A.Ergashev.** Effect of seed treatment with physiologically active substances on the activity of antioxidant enzymes in wheat leaves under soil dry conditions.....260

**BIOCHEMISTRY**

**A.K.Sayfudinov, M.A.Babazhanova.** The kinetic behavior of a multifactorial multienzyme complex of Calvin cycle in extracts from leaves of cotton leaves.....264

**GASTROENTEROLOGY**

**B.I.Ganiev, S.A.Avezov.** Hyperbilirubinemia in the development of encephalopathy in liver cirrhosis.....269

УДК 517.5

Академик НАН Таджикистана М.Ш.Шабозов, З.А.Парвонаева

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ДЖЕКСОНА В  $L_2[-1,1]$  И РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ*Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана,  
Технологический университет Таджикистана*

В пространстве  $L_2[-1,1]$  найдено точное неравенство типа Джексона между  $E_{n-1}(f)$  – наилучшим приближением непериодической функции  $f$  подпространством  $\mathcal{P}_{n-1}$  – алгебраических полиномов степени  $(n-1)$  и введенным А.А.Абиловым обобщенным модулем непрерывности первого порядка  $\omega(f^{(r)}, t)$   $r$ -й производной  $f^{(r)} \in L_2[-1,1]$ . Аналогичное неравенство доказано между  $E_{n-1}(f)$  и  $\mathcal{K}$ -функционалом Петре.

**Ключевые слова:** неравенство типа Джексона, наилучшее среднеквадратическое приближение, полиномы Лежандра, модуль непрерывности.

1. Пусть  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}$  – множество натуральных, целых неотрицательных, положительных и вещественных чисел;  $L_2[-1,1]$  – пространство суммируемых с квадратом вещественных функций  $f$  на отрезке  $[-1,1]$  с конечной нормой

$$\|f\| = \|f\|_{L_2[-1,1]} = \left( \int_{-1}^1 f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Для любого  $n \in \mathbb{N}$  равенством

$$E_{n-1}(f) := E_{n-1}(f)_{L_2[-1,1]} = \inf \{ \|f - q_{n-1}\| : q_{n-1} \in \mathcal{Q}_{n-1} \} \quad (1)$$

определим наилучшее среднеквадратическое приближение функций  $f \in L_2[-1,1]$  подпространством

$$\mathcal{Q}_{n-1} := \{ q_{n-1} : q_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k, b_k \in \mathbb{R} \}$$

– алгебраических полиномов степени  $n-1$ . Пусть

$$P_n(x) := \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

– ортогональная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2[-1,1]$ , для которых [1, с.116]

**Адрес для корреспонденции:** Шабозов Мирганд Шабозович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики им. А.Джураева НАНТ. E-mail: shabozov@mail.ru  
Парвонаева Зайбогул Абдулалиевна. 734061, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Н.Карабаева, 63/3, Технологический университет Таджикистана. E-mail: nzaibogul@mail.ru

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \{0, \text{ если } m \neq n; 2/(2n+1), \text{ если } m = n\}.$$

Для произвольной функции  $f \in L_2[-1,1]$  запишем её разложение в ряд Фурье-Лежандра [1, с.25-26]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)P_k(x), \tag{2}$$

$$c_k(f) = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_k(x)dx$$

– коэффициент Фурье-Лежандра функции  $f \in L_2[-1,1]$ . Хорошо известно, что среди всех полиномов  $q_{n-1} \in Q_{n-1}$  нижнюю грань в правой части равенства (1) реализует частная сумма

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)P_k(x)$$

порядка  $n-1$  ряда (1). При этом

$$E_{n-1}(f) = \|f - S_{n-1}\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{2k+1} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Всюду далее, ради удобства, полагаем

$$a_k^2(f) = \frac{2}{2k+1} c_k^2(f),$$

и равенство (3) запишем в виде

$$E_{n-1}(f) = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2(f) \right\}. \tag{4}$$

Обозначим через  $L_2^{(r)}[-1,1] (r \in \mathbb{N}, L_2^{(0)}[-1,1] \equiv L_2[-1,1])$  множество функций  $f \in L_2[-1,1]$ , у которых производные  $(r-1)$ -го порядка  $f^{(r-1)}$  абсолютно-непрерывны на  $[-1,1]$ , а производные  $r$ -го порядка  $f^{(r)} \in L_2[-1,1]$ .

Приведем нужные для дальнейшего понятия и определения из работы [2]. Введем в рассмотрение оператор

$$T_h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x \cosh + \sqrt{1-x^2} \sinh \cos \theta) d\theta,$$

определенный для любых  $x \in [-1,1]$  и  $h \in \mathbb{R}_+$ . Легко проверить, что оператор  $T_h$  обладает следующими свойствами:

$$1. T_h(\lambda f + \mu g, x) = \lambda T_h(f, x) + \mu T_h(g, x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L_2[-1, 1];$$

$$2. \|T_h(f)\| \leq \|f\|; \quad 3. T_h(P_n, x) = P_n(\cosh)P_n(x); \quad 4. \|T_n(f) - f\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0+.$$

Для функции  $f \in L_2^{(r)}[-1, 1]$ , В.А.Абилов [2] ввёл следующий обобщенный модуль непрерывности первого порядка

$$\tilde{\omega}(f^{(r)}, t) := \sup \left\{ \left\| (1-x^2)^{r/2} [f^{(r)}(x) - T_h^{(r)}(f, x)] \right\| : 0 < h \leq t \right\}. \quad (5)$$

Пусть

$$P_n^r(x) := (1-x^2)^{r/2} \frac{d^r}{dx^r} P_n(x), \quad n, r \in \mathbb{N}$$

– присоединенные полиномы Лежандра. Для этих полиномов справедливы равенства [2, с.5]

$$\int_{-1}^1 P_n^r(x) P_m^r(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m \\ (2 / (2n+1)) \cdot \lambda_{n,r}, & \text{если } n = m, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\lambda_{n,r} := (n+r)! \cdot ((n-r)!)^{-1}, \quad n \geq r, \quad n, r \in \mathbb{N}.$$

Для произвольной функции  $f \in L_2^{(r)}[-1, 1]$  из (2) следует, что

$$(1-x^2)^{r/2} f^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k(f) P_n^r(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (7)$$

Применяя равенство Парсеваля, отсюда в силу (4) и (6), получаем

$$\left\| (1-x^2)^{r/2} f^{(r)} \right\| = \left\{ \sum_{k=r}^{\infty} \lambda_{k,r} a_k^2(f) \right\}^{1/2}, \quad (8)$$

$$E_{n-1} \left( (1-x^2)^{r/2} f^{(r)} \right) = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_{k,r} a_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (9)$$

Далее анонсируем некоторые новые результаты в этом направлении.

**Теорема 1.** Для любых натуральных  $n, r \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq r$  и произвольной функции  $f \in L_2^{(r)}[-1, 1]$  имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,r}}} \cdot E_{n-1} \left( (1-x^2)^{r/2} f^{(r)} \right), \quad (10)$$

которое является точным в том смысле, что существует функция  $f_0 \in L_2^{(r)}[-1, 1]$ , обращающая (10) в равенство.

Из этой теоремы вытекает

**Следствие 1.** В условиях теоремы 1 для любых  $n, r \in \mathbb{N}$  справедливы равенства

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)}[-1,1] \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}((1-x^2)^{r/2} f^{(r)})} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,r}}}.$$

Более общей является следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $n, r \in \mathbb{N}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq s$ . Тогда для произвольной функции  $f \in L_2^{(r)}[-1,1]$  имеет место неравенство типа Колмогорова

$$\begin{aligned} E_{n-1}((1-x^2)^{s/2} f^{(s)}) &\leq \\ &\leq \left(\frac{\lambda_{n,s}}{\lambda_{n,r}^{s/r}}\right)^{1/2} \cdot (E_{n-1}(f))^{1-s/r} \cdot (E_{n-1}((1-x^2)^{r/2} f^{(r)}))^{s/r}. \end{aligned} \tag{11}$$

Неравенство (11) точное в том смысле, что существует функция  $f \in L_2^{(r)}[-1,1]$ , для которой оно обращается в равенство.

2. В теории приближения функций одной из основных задач является задача нахождения точной константы в неравенствах типа Джексона в различных нормированных пространствах. Напомним, что под неравенством Джексона понимают неравенство, в котором величина наилучшего приближения конечномерным подпространством оценивается сверху через некоторую характеристику гладкости функции или ее некоторой производной.

Фиксируя  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ , и  $t \in \mathbb{R}_+$ , рассмотрим задачу отыскания точной константы  $\mathcal{K} := \mathcal{K}(n, r; t)$  в неравенстве типа Джексона

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\mathcal{K}}{\sqrt{\alpha_{n,r}}} \tilde{\omega}(f^{(r)}, t), \quad f \in L_2^{(r)}[-1,1],$$

где  $\tilde{\omega}(f^{(r)}, t)$  определен равенством (5). Иными словами, требуется найти точное значение следующей величины

$$\mathcal{K}(n, r; t) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)}[-1,1] \\ f \neq \text{const}}} \frac{\sqrt{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)}{\tilde{\omega}(f^{(r)}, t)}. \tag{12}$$

Пользуясь формулой (6) и свойством 3 оператора  $T_h(f)$ , В.А.Абиловым в [2] доказано, что для любой функции  $f \in L_2[-1,1]$  имеет место равенство

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^r \left[ f^{(r)}(x) - T_h^{(r)}(f, x) \right]^2 dx = \sum_{k=r}^{\infty} [1 - P_k(\cos h)]^2 \lambda_{k,r} a_k^2(f).$$

Отсюда и из (5) следует, что



$$\tilde{\omega}^2(f^{(r)}, t) = \sup \left\{ \sum_{k=r}^{\infty} [1 - P_k(\cos h)]^2 \lambda_{k,r} a_k^2(f) : 0 < h \leq t \right\}.$$

Для нахождения значения константы (12) нам понадобятся некоторые необходимые понятия и определения из работ [3, 4]. Следуя этим работам, предположим, что  $\{\mu_{j,n}\}_{j=1}^{[n/2]}$ , где  $[a]$  – целая часть числа  $a$ , есть последовательность относительные максимумы модуля полинома Лежандра  $|P_n(\cos h)|$  ( $n \geq 2$ ) при убывании  $\cos h$  от 1 до 0 (то есть при изменении  $h$  от 0 до  $\pi/2$ ). В таком случае известно [5], что

$$1 > \mu_{1,n} > \mu_{2,n} > \dots > \mu_{[n/2],n} > \dots$$

и при любом  $l \in [1, n/2]$  всегда

$$\mu_{l,k} \geq \mu_{l,k+1}$$

для любого  $l \geq n$  [5, с.198]. Обозначим через  $h_n, n \in \mathbb{N}$  то значение  $h \in [0, \pi/2]$ , при котором

$$P_n(\cos h_n) = \mu_{1,2} = \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Из (6), (8) и поведения полиномов Лежандра на отрезке  $[0,1]$  (см., напр., [6, с.75-80]) следует, что  $\cos h_n, n \in \mathbb{N}$  образуют монотонно возрастающую последовательность, имеющую предельной точкой единицу, причем для произвольной точки  $h \in [h_n, \pi/2]$  и любых  $j \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$P_n(\cos h) \geq P_{n+j}(\cos h), h_n \leq h \leq \pi/2.$$

Имеет место следующая

**Теорема 3.** Пусть  $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, h_n \in (0, \pi/2]$ . Тогда при всех  $h \in [h_n, \pi/2]$  для любой функции  $f \in L_2^{(r)}[-1,1]$  имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,r}}} \cdot \frac{\tilde{\omega}(f^{(r)}, h)}{1 - P_n(\cos h)}. \tag{14}$$

Неравенство (14) точное в том смысле, что существует функция  $f_0 \in L_2^{(r)}[-1,1]$ , для которой обращается в равенство. В частности, из (14) при  $h = h_n$  в силу (13) имеем

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{2}{\sqrt{\lambda_{n,r}}} \cdot \tilde{\omega}(f^{(r)}, h_n).$$

**Теорема 4.** Пусть  $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, n \geq r, h_n \leq t \leq \pi/2$ . Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{K}(n, r; t) = (1 - P_n(\cos t))^{-1}. \tag{15}$$

В частности, при  $t = h_n$  из (15) в силу (13) следует, что

$$\mathcal{K}(n, r; h_n) = 2.$$

3. В этом пункте приводим точные неравенства, связывающие величину наилучшего приближения  $E_{n-1}(f)$  функций  $f \in L_2^{(r)}[-1,1]$  посредством  $\mathcal{K}$ -функционала Петре [3, 7]. С этой целью определим  $\mathcal{K}$ -функционал, построенный по пространствам  $L_2[-1,1]$  и  $L_2^{(\nu)}[-1,1]$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(f, t) &:= \mathcal{K}(f, t; L_2, L_2^{(\nu)}) = \\ &= \inf \left\{ \|f - g\| + t \|(1-x^2)^{\nu/2} g^{(\nu)}\| : g \in L_2^{(\nu)}[-1,1] \right\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Представляет интерес точно вычислить экстремальную характеристику величины, подобной правой части равенства (12), но содержащей вместо модуля непрерывности  $\mathcal{K}$ -функционал (16).

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 5.** Пусть  $n, r, \nu \in \mathbb{N}$  – произвольные числа, такие, что  $n > r \geq \nu$ . Тогда для любой функции  $f \in L_2^{(r)}[-1,1]$  справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,r}}} \cdot \mathcal{K} \left( (1-x^2)^{r/2} f^{(r)}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,\nu}}} \right),$$

точное в том смысле, что существует функция  $f_1 \in L_2^{(r)}[-1,1]$ , для которой оно обращается в равенство.

**Следствие 2.** В условиях теоремы 5 справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}[-1,1]} \frac{\sqrt{\lambda_{n,r}} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K} \left( (1-x^2)^{r/2} f^{(r)}, 1/\sqrt{\lambda_{n,\nu}} \right)} = 1.$$

Поступило 31.05.2021 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.:Наука, 1979, 414 с.
2. Абилов А.А. Оценка поперечника одного класса функций в  $L_2$ . – Матем. заметки, 1992, т. 52, №1, с. 3-7.
3. Butzer P.L. Legendre trans form methods in the solution of basic problems in algebraic approximation. – Collequia Mathematica Socceitatis Janos Bolyai, Budapesht, 1980. v. 35, (Functiones, Series, Operators), pp. 277-301.
4. Вакарчук С.Б. О неравенстве типа Джексона в  $L_2[-1,1]$  и точных значениях  $n$  поперечников функциональных классов. – Український математичний вісник, 2006, т. 3, №1, с. 116-113.
5. Сеге Г. Ортогональные многочлены. –М.: Физматиз, 1962.

6. Бабич В.М., Григорьева Н.С. Ортогональные разложения и метод Фурье. – Л.: ЛГУ, 1983.
7. Petre J. On the connection between the theory of interpolation spaces and approximation theory. – Colloquium on Constructive Function Theory, Budapesht, 1969.

М.Ш.Шабозов, З.А.Парвонаева

## ОИД БА НОБАРОВАРИҲОИ НАМУДИ ЧЕКСОН ДАР $L_2[-1,1]$ ВА ҲАЛЛИ БАЪЗЕ МАСЪАЛАҲОИ ЭКСТРЕМАЛӢ

*Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,  
Донишгоҳи технологияи Тоҷикистон*

Дар фазои  $L_2[-1,1]$  нобаробарии аниқи Чексон байни бузургии наздиккунии беҳтарини  $E_{n-1}(f)$  функсияи ғайридаврии  $f$  ба воситаи зерфазои  $\mathcal{P}_{n-1}$  – бисёраъзогиҳои алгебравии дараҷаи  $(n-1)$  ва модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби якуми  $\omega(f^{(r)}, t)$ -и тартиби ҳосилаи  $r$ -уми  $f^{(r)} \in L_2[-1,1]$ , ки А.А.Абилов ворид кардааст, ёфта шудааст.

Инчунин нобаробарии ханиқ байни  $E_{n-1}(f)$  ва  $\mathcal{K}$ -функционали Петре исбот шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** нобаробарии намуди Чексон, наздиккунии миёнаи квадратии беҳтарин, полиномҳои Лежандр, модули бефосилагӣ.

M.Sh.Shabozov, Z.A.Parvonaeva

## ABOUT JACKSON-TYPE INEQUALITIES IN $L_2[-1,1]$ AND SOLUTIONS OF SOME EXTREMAL PROBLEMS

*A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan,  
Technological University of Tajikistan*

In the space  $L_2[-1,1]$  an exact Jackson-type inequality between  $E_{n-1}(f)$ , the best approximation of a continuous function  $f$  by the subspace  $\mathcal{P}_{n-1}$  – of algebraic polynomials of degree  $(n-1)$  the generalized modulus of continuity of the first order  $\omega(f^{(r)}, t)$  of the  $r^{\text{th}}$  derivative  $f^{(r)} \in L_2[-1,1]$  and introduced by A.A.Abilov was found. A similar inequality between  $E_{n-1}(f)$  and the  $\mathcal{K}$ -functional Petre is proved.

**Key words:** Jackson-type inequality, best mean-square approximation, Legendre polynomials, modulus of continuity.

УДК 512.518

Ю.Х.Хасанов, М.М.Махамадиева\*

## О СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ФУРЬЕ МЕТОДОМ ВОРОНОГО-НЁРЛУНДА

*Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана**\*Российско-Таджикский (Славянский) университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 18.01.2022 г.)*

Рассматривается измеримая и интегрируемая по Лебегу периода  $2\pi$  функция  $f(x)$ , принадлежащая пространству  $L_p (1 \leq p \leq \infty)$ . Исследуется вопрос о поведении линейного оператора, или  $(W, p_n)$  – средние Вороного, которые образуются с помощью частных сумм порядка  $k$  ряда Фурье функции  $f(x)$ . Доказывается утверждение, в котором для каждого  $n > 1$  устанавливается оценка сверху величины  $r(f; x; W_n)$  через последовательность наилучших приближений функции в равномерной метрике.

**Ключевые слова:** периодическая функция, ряд Фурье, линейный оператор, средние Вороного, регулярность метода суммирования, тригонометрические полиномы, коэффициенты Фурье, равномерная метрика.

Пусть измеримая и интегрируемая по Лебегу периода  $2\pi$  функция  $f(x)$  имеет ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, (k = 1, 2, \dots).$$

Линейным оператором, или  $(W, p_n)$  – средними Вороного называются средние вида

$$W_n(f; W; p_n) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_{n-k} S_k(f; x), \quad (1)$$

где

$$p_0 > 0, p_k \geq 0 (k = 1, 2, \dots), P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n,$$

$$S_k(f; x) = \sum_{v=0}^k A_v(x)$$

– частные суммы порядка  $k$  ряда Фурье функции  $f(x)$ .

**Адрес для корреспонденции:** Хасанов Юсуфали. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: yukhas60@mail.ru

Средними  $(W, p_n)$ , определенными формулой (1), называют суммирования рядов методом Вороного (Вороного – Нёрлунда) [1].

Известно (см. [2], стр.89), что необходимым и достаточным условием регулярности метода суммирования Вороного является условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_n} = 0.$$

Метод называется регулярным, если он суммирует все сходящиеся ряды к их обычной сумме.

Пусть  $\alpha_{nk}$  ( $n, k = 0, 1, 2, \dots$ ) – бесконечная матрица. Для последовательности  $U_n = \{u_0, u_1, \dots\}$  образуем новую последовательность

$$U'_n = \sum_k \alpha_{nk} U_k. \quad (A)$$

Если  $U'_n$  существуют при любом  $n = 0, 1, 2, \dots$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} U'_n = U'$ , то последовательность  $\{U'_n\}$  называется суммируемой методом  $A$  к сумме  $U'$ .

Преобразование (A) называют матричным преобразованием последовательности в последовательность.

**Теорема А (Кожима-Шура)** [3]. Для того, чтобы преобразование (A) было регулярным, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) существует  $\lim_n a_{nk} = a_k$ ;
- 2) существует  $\lim_n \sum_k a_{nk} = a$ ;
- 3)  $\sum_k |a_{nk}| = O(1)$ .

При этом, если  $\lim U_k = U$ , то

$$\lim U'_n = aU + \sum_k a_k (U_k - U) = (a - \sum_k a_k)U + \sum_k a_k U_k.$$

С доказательством этой теоремы можно ознакомиться в работе [2].

Посмотрим, при каких условиях метод  $(W, p_n)$  сохраняет сходимость. Применяя теорему А, получаем условия

$$\begin{aligned} \lim_n a_{nk} &= \lim_n \frac{p_{n-k}}{P_n} = a_k; \\ \sum_{k=0}^n a_{nk} &= \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_{n-k} = \frac{1}{P_n} p_n = 1; \\ \sum_{k=0}^n |a_{nk}| &= \frac{1}{|P_n|} \sum_{k=0}^n |p_{n-k}| = O(1). \end{aligned}$$

Условие 1 вытекает из существования предела  $a_0 = \lim \frac{P_n}{P_n}$ . Действительно, из представления

$$\frac{P_{n-k}}{P_n} = \frac{P_{n-k}}{P_{n-k}} \frac{P_{n-k}}{P_{n-k+1}} \dots \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} \frac{P_{n-1}}{P_n}$$

закключаем, что существует  $a_k$  и  $a_k = a_0(1 - a_0)$

$$\lim_n \frac{P_{n-k}}{P_{n-k}} = a_0, \lim_n \frac{P_{n-k}}{P_{n-k+1}} = \lim_n \left(1 - \frac{P_{n-k+1}}{P_{n-k+1}}\right) = 1 - a_0.$$

Метод  $(W, p_n)$ , сохраняющий сходимость, будет регулярным тогда и только тогда, если  $a_0 = 0$ , так как необходимым и достаточным условием регулярности метода суммирования Вороного является условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_n} = 0.$$

Хилл и Тамаркин установили следующее утверждение (см. [4], стр.187)

**Теорема Б.** Пусть  $p_\nu > p_{\nu+1} \rightarrow 0, P_\nu \rightarrow \infty (\nu \rightarrow \infty)$ . Для  $(W, p_n)$  суммируемости ряда Фурье функции  $f(x)$  в каждой ее точке непрерывности, необходимо и достаточно, чтобы последовательность чисел  $\left\{ \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=l}^n \frac{P_\nu}{\nu} \right\}$  была ограниченной.

Из теоремы Б вытекает, что для непрерывной периода  $2\pi$  функции  $f(x)$  равномерно по  $x$  имеет место

$$P(f; x; W_n) = |f(x) - W_n(f; x; p_n)| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

Наряду с теоремой Б мы докажем следующее утверждение, в котором для каждого  $n > 1$  содержится оценка сверху величины  $P(f; x; W_n)$  через последовательность наилучших приближений функции в равномерной метрике.

**Теорема 1.** Пусть  $f(x)$  – непрерывная, периодическая периода  $2\pi$  функция. Тогда имеет место следующая оценка

$$P(f; x; W_n) \leq \frac{C}{P_n} \sum_{\nu=0}^{m+1} \left\{ 2^\nu \sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^{\nu+1}} p_{n-k}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} E_{2^{\nu-1}}(f), \tag{2}$$

где

$$E_k(f) = \max_x |f(x) - T_k(x)|,$$

$T_k(x)$  – тригонометрический полином порядка не выше  $k$ , осуществляющий наилучшее приближение функции  $f(x)$  в равномерной метрике  $2^m \leq n \leq 2^{m+1}$ ,  $C$  – независимая константа.

**Доказательство.** Очевидно, что

$$\begin{aligned} p(f; x; W_n) &= \left| \sum_{v=0}^n \frac{P_{n-v}}{P_n} \{f(x) - S_v(f; x)\} \right| \\ &= \sum_{v=0}^{m-1} \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} \{f(x) - S_k(f; x)\} + \sum_{k=2^m+1}^n \frac{P_{n-k}}{P_n} \{f(x) - S_k(f; x)\} \leq \\ &\leq \sum_{v=0}^{m-1} \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} |f(x) - S_k(f; x)| + \sum_{k=2^m+1}^n \frac{P_{n-k}}{P_n} |f(x) - S_k(f; x)|. \end{aligned}$$

Так как

$$|f(x) - S_k(f; x)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)\} D_v(t) dt \right|, \tag{3}$$

где

$$D_v(t) = \frac{\sin(v + \frac{v}{2})}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos vt,$$

и для любого тригонометрического полинома  $T_{2^v-1}(x)$  при  $k \geq 2^v - 1$   $S_k(T_{2^v-1}; x) = T_{2^v-1}(x)$ , то обозначив через

$$P_v(f; x; W_n) = \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} |f(x) - S_k(f; x)|,$$

находим, что

$$\begin{aligned} P_v(f; x; W_n) &= \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} |f(x) - T_{2^v-1}(x) - S_k(f - T_{2^v-1}; x)| \leq \\ &\leq E_{2^v-1}(f) \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} + \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} |S_k(f - T_{2^v-1}; x)| = \sigma_v^{(1)}(n) + \sigma_v^{(2)}(n). \end{aligned}$$

Оценим величину  $\sigma_v^{(2)}(n)$ . Используя (3), получим

$$\sigma_v^{(2)}(n) = \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_v(x; t) D_v(t) dt \right|,$$

где

$$\varphi_\nu(x; t) = \{f(x+t) - T_{2^\nu-1}(x)\} - 2\{f(x) - T_{2^\nu-1}(x)\} + \{f(x-t) - T_{2^\nu-1}(x-t)\}.$$

Очевидно, что, когда  $T_{2^\nu-1}(x)$  – полином наилучшего равномерного приближения порядка  $2^\nu - 1$  функции  $f(x)$ , то

$$|\varphi_\nu(x; t)| \leq 4E_{2^\nu-1}(f). \tag{4}$$

Принимая во внимание, что  $D_\nu(t) = \nu + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2\nu + 1)$ , оценим интеграл

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\pi \varphi_\nu(x; t) D_\nu(t) dt \right| &\leq \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2^\nu}} \varphi_\nu(x; t) D_\nu(t) dt \right| + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left| \int_{\frac{\pi}{2^\nu}}^\pi \varphi_\nu(x; t) D_\nu(t) dt \right| = I_1(\nu) + I_2(\nu). \end{aligned} \tag{5}$$

Учитывая оценку (4), находим, что

$$I_1(\nu) \leq \frac{2(2\nu + 1)}{2^\nu} E_{2^\nu-1}(f). \tag{6}$$

Так как

$$\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)t = \sin\nu t \cos \frac{t}{2} + \cos\nu t \sin \frac{t}{2},$$

то

$$\begin{aligned} I_2(\nu) &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{\frac{\pi}{2^\nu}}^\pi \varphi_\nu(x; t) \frac{\sin\left(\nu + \frac{t}{2}\right)t}{2\sin \frac{t}{2}} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left| \int_{\frac{\pi}{2^\nu}}^\pi \frac{\varphi_\nu(x; t)}{2tg \frac{t}{2}} \sin\nu t dt \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\frac{\pi}{2^\nu}}^\pi \varphi_\nu(x; t) \cos\nu t dt \right| = \gamma_1(\nu) + \gamma_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Благодаря оценке (4)

$$\gamma_2(\nu) \leq 2E_{2^\nu-1}(f). \tag{8}$$

Далее рассмотрим величину  $\sigma_\nu^{(2)}(n)$ . Учитывая оценки (5)-(8), находим, что



$$\begin{aligned} \sigma_v^{(2)}(n) &= \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_v(x;t) D_v(t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{2(2v+1)}{2^v} E_{2^{v-1}} \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} 2E_{2^{v-1}}(f) \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} \leq \\ &\leq C_1 \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} (E_{2^{v-1}}(f) + \gamma_1(v)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1(v) &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{\frac{\pi}{2^v}}^{\pi} \frac{\varphi_v(x;t)}{2tg \frac{t}{2}} \sin vt dt \right| = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi \psi_v(x;t) \sin vt dt \right|, \\ \psi_v(x;t) &= \begin{cases} \frac{\varphi_v(x;t)}{4tg \frac{t}{2}}, & \frac{\pi}{2^v} \leq t \leq \pi, \\ 0, & 0 < t < \frac{\pi}{2^v}. \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому, в силу неравенства Буняковского и Бесселя, получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi_v(x;t) \sin vt dt \right| &\leq \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi_v(x;t) \sin vt dt \right| \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^\pi |\psi_v(x;t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq E_{2^{v-1}}(f) \left\{ \int_{\frac{\pi}{2^v}}^{\pi} \frac{dt}{t^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 2^{\frac{v}{2}} E_{2^{v-1}}(f) \left\{ \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \sigma_v^{(2)}(n) &\leq E_{2^{v-1}}(f) \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} E_{2^{v-1}}(f) \left\{ 2^v \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} \right\} \leq \\ &\leq E_{2^{v-1}}(f) \left\{ 2^v \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} \frac{P_{n-k}}{P_n} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$p(f; x; W_n) \leq \frac{C}{P_n} \sum_{v=0}^{m+1} \left\{ 2^v \sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v+1}} P_{n-k}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} E_{2^{v-1}}(f),$$

что и требовалось доказать.

Поступило 11.01.2022 г.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вороной Г.Ф. Расширение понятия о пределе суммы членов бесконечного ряда. Дневник XI-го съезда русских естествоиспытателей и врачей. – СПб., 1902, с. 60-61.
2. Харди Г.Х. Расходящиеся ряды. – М.: Мир, 1951, 511 с.
3. Барон С.А. Введение в теорию суммируемости рядов. – Таллин: Валгус, 1977, 280 с.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – М.-Л.: Редакция технико-теоретической литературы, 1939, 323 с.

Ю.Х.Хасанов, М.М.Махамадиева\*

## ОИД БА СУММИРОНИИ ҚАТОРҲОИ ФУРЬЕ ТАВАССУТИ УСУЛИ ВОРОНОЙ-НЁРЛУНД

*Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*\*Донишгоҳи (Славянии) Россия ва Тоҷикистон*

Дар фазои  $L_p(1 \leq p \leq \infty)$  функсияи  $f(x)$  муайян ва интегронронидашавандаи давраш  $2\pi$  муоина карда мешавад. Дар мақола баҳои рафтори оператори хаттӣ ва ё  $(W, p_n)$  – миёнаи Вороной тадқиқ карда шудааст, ки бо ёрии суммаҳои хусусии тартиби  $k$ -уми қатори Фурйеи функсияи  $f(x)$  тартиб дода шудааст. Нишон дода шудааст, ки барои ҳар як  $n > 1$  баҳои болоии бузургии  $p(f; x; W_n)$  тавассути пайдарпаии наздиққуноҳои беҳтарин дар метрикаи мунтазам, ҷой дорад.

**Калимаҳои калидӣ:** *функсияи даврӣ, қатори Фурйе, оператори хаттӣ, усули Вороной, регуляризи усули суммиронӣ, бисёраъзогиҳои тригонометрӣ, коэффициентҳои Фурйе, метрикаи мунтазам.*

Yu.Kh.Khasanov, M.M.Makhamadieva\*

## ABOUT THE SUMMATION OF FOURIER SERIES BY VORONOI-NERLUND METHOD

*A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*\*Russian-Tajik (Slavonic) University*

A measurable and Lebesgue integrable function  $f(x)$  belonging to the space  $L_p(1 \leq p \leq \infty)$  is considered. The question of the behavior of the Linear operator, or  $(W, p_n)$  – Voronoi averages, which are formed using partial sums of order  $k$  of the Fourier series of the function  $f(x)$ , is investigated. A statement is proved in which, for each  $n > 1$ , an upper bound of the value  $p(f; x; W_n)$  is established through a sequence of the best approximations of the function in a uniform metric.

**Key words:** *periodic function, Fourier series, linear operator, Voronoi averages, regularity of summation method, trigonometric polynomials, Fourier coefficients, uniform metric.*

УДК 517.957

Член-корреспондент НАН Таджикистана С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров

## О КОНЕЧНОМЕРНОСТИ ЯДРА НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

*Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана*

*В работе доказывается одно неравенство, содержащее норму эллиптического оператора недивергентного вида в ограниченной области  $n$ -мерного евклидова пространства, вырождающегося вдоль всей границы области. Затем с помощью этого неравенства доказывается конечномерность ядра исследуемых операторов. В отличие от ранее опубликованных работ, коэффициенты исследуемых операторов не дифференцируемы, и поэтому их нельзя привести к дивергентному виду.*

**Ключевые слова:** эллиптический оператор недивергентного вида, степенное вырождение, ограниченная область, конечномерное ядро, замкнутость области значений оператора.

1. Одним из основных методов изучения эллиптических дифференциальных операторов является метод, основанный на элементах теории функций и функционального анализа. Основы этого метода в случае эллиптических операторов в ограниченной области  $n$ -мерного евклидова пространства, вырождающихся вдоль всей границы области, заложены в фундаментальных работах С.М. Никольского, Л.Д.Кудрявцева, П.И. Лизоркина и Н.В. Мирошина (см. обзорную работу [1] и имеющуюся там библиографию). Позднее этот метод совершенствовался во многих работах, среди которых отметим [2]-[10]. Большая часть этих работ посвящена вырождающимся эллиптическим операторам дивергентного вида. Случай эллиптических операторов недивергентного вида рассматривался в недавних работах авторов [8]-[10], в которых предполагалось заданное число раз дифференцируемости коэффициентов исследуемых операторов. В отличие от этих работ, здесь не требуется дифференцируемость коэффициентов исследуемого оператора. В частности, относительно старших коэффициентов оператора требуется лишь их непрерывность в замыкании области.

2. Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  с замкнутой  $(n-1)$ -мерной границей  $\partial\Omega$ , удовлетворяющая условию конуса. Точки пространства  $\mathbb{R}^n$  обозначим через  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Пусть  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  – мультииндекс,  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  – длина мультииндекса  $k$  и пусть  $u^{(k)}(x)$  – обобщенная в смысле С.Л. Соболева производная функции  $u(x)$  мультииндекса  $k$ . Обозначим через  $\rho(x), x \in \Omega$ , регуляризованное расстояние точки  $x \in \Omega$  до границы  $\partial\Omega$ , то есть функцию, удовлетворяющую условиям

$$\rho(x) \leq \frac{1}{2} \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq C\rho(x), \quad |\rho^{(k)}(x)| \leq C_k \rho^{1-|k|}(x)$$

*Адрес для корреспонденции:* Исхоков Сулаймон Абунасович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики им. А.Джураева НАНТ, E-mail: sulaimon@mail.ru

для всех  $x \in \Omega$  и любого мультииндекса  $k$ . Здесь  $C, C_k$  – постоянные положительные числа.

Символом  $W_{2,\alpha}^m(\Omega)$ , где  $m$  – натуральное и  $\alpha$  – вещественное числа, обозначим пространство функций  $u(x)$ , имеющих в области  $\Omega$  все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные порядка  $m$ , с конечной нормой

$$\|u; W_{2,\alpha}^m(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=m} \int_{\Omega} \rho^{2m}(x) |u^{(k)}(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Замыкание класса бесконечно дифференцируемых финитных в  $\Omega$  функций  $C_0^\infty(\Omega)$  по этой норме обозначим через  $W_{2,\alpha}^m(\Omega)$ .

Пусть  $r$  – некоторое натуральное число. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u](x) = \sum_{|k| \leq 2r} \rho^{\alpha|k|}(x) b_k(x) u^{(k)}(x), \tag{1}$$

первоначально определенный для всех  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть все коэффициенты  $b_k(x)$  оператора (1) ограничены, и выполнены следующие условия:

I) существует положительное число  $\varkappa$  такое, что

$$\varkappa |\xi|^{2r} \leq \left| \sum_{|k|=2r} b_k(x) \xi^k \right|$$

для всех  $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$ ;

II) для любого достаточно малого  $\nu > 0$  существует  $\varepsilon_\nu > 0$  такое, что

$$|b_k(y) - b_k(z)| < \nu, \quad |k| = 2r, \text{ для всех } y \in \Omega \text{ и любого}$$

$$z \in J_\varepsilon(y) = \{z \in \mathbb{R}^n : |z - y| < \varepsilon \rho(y) / \varkappa\}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_\nu);$$

III) число  $\alpha = \alpha_{2r} > -1/2$  не принадлежит множеству

$\{1, 2, \dots, 2r\}$  и числа  $\alpha_j > -1/2, j = \overline{1, 2r-1}$  удовлетворяют одному из следующих условий:

1)  $2r - \alpha > j - \alpha_j$ ; 2)  $\alpha_j > \alpha \cdot j / 2r, j > 0$ .

Тогда существуют положительные числа  $c, K$  такие, что

$$c \|v; W_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)\| \leq \|L[v]; L_2(\Omega)\| + K \|v; L_2(\Omega)\| \tag{2}$$

для всех  $v \in W_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)$ .

Далее без доказательства сформулируем некоторые вспомогательные леммы, с помощью которых доказывается теорема 1.

**Лемма 1.** Пусть  $\varepsilon \in (0,1)$  и  $\chi_\varepsilon(x,y)$  – характеристическая функция шара  $J_\varepsilon(y)$ . Тогда

$$\left(\frac{\delta\varepsilon}{1+\delta\varepsilon}\right)^n \leq \rho^{-n}(x)\varkappa^n \omega_n^{-1} \int_{\Omega} \chi_\varepsilon(x,y)dy \leq \left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\delta\varepsilon}\right)^n,$$

где  $\omega_n$  – площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ .

Если же  $m$  – натуральное число и  $\chi_\varepsilon^{(m)}(x,y)$  – характеристическая функция шара  $J_\varepsilon^{(m)}(y)$ , который определяется равенством

$$J_\varepsilon^{(m)}(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : |z-y| < \delta \frac{m\varepsilon}{(m+1)\varkappa} \rho(y) \right\},$$

то

$$\left(\frac{\delta\varepsilon}{1+\delta\varepsilon}\right)^n \leq \rho^{-n}(x)\varkappa^n \omega_n^{-1} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n \int_{\Omega} \chi_\varepsilon^{(m)}(x,y)dy \leq \left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\delta\varepsilon}\right)^n,$$

**Лемма 2.** В условиях леммы 1 для любого действительного числа  $\theta$  и любого  $z \in J_\varepsilon^{(m)}(y)$  имеет место неравенство

$$|\rho^\theta(y) - \rho^\theta(z)| \leq \varepsilon \delta N_{1,m}(\delta, \varepsilon, \theta) \rho^\theta(z),$$

где

$$N_{1,m}(\delta, \varepsilon, \theta) = n\varkappa |\theta| (1 + \delta\varepsilon \operatorname{sgn}(\theta - 1))^{\theta-1} \frac{m}{(m+1)\varkappa} (1 - \delta\varepsilon \operatorname{sgn}\theta)^{-\theta}.$$

С помощью этих лемм утверждение теоремы 1 выводится из соответствующих результатов теории эллиптических операторов недивергентного вида без вырождения, которых можно найти, например, в книге [11].

Неравенство (2) теоремы 1 позволяет нам расширить область определения оператора (1) и определить его по непрерывности для всех  $u \in W_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)$ . В условиях теоремы 1 определим оператор  $\mathbb{L}u = L[u]$  с областью определения  $D(\mathbb{L}) = W_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)$ . Далее применяя неравенство (2), докажем конечномерность ядра оператора  $\mathbb{L}$  и замкнутость его области значений.

Согласно теореме 1.1.3 работы [1] вложение пространства  $W_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)$  в  $L_2(\Omega)$  компактно при  $2r - \alpha > 0$ . В этом случае, применяя лемму 5.1 из [12, стр. 185], получаем следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть  $2r - \alpha > 0$  и выполнены условия теоремы 1. Тогда оператор  $\mathbb{L}$  замкнут, имеет конечномерное ядро  $N(\mathbb{L})$  и замкнутое в пространстве  $L_2(\Omega)$  множество значений  $R(\mathbb{L})$ :

Напомним, что ядро  $N(\mathbb{L})$  оператора  $\mathbb{L}$  состоит из решений  $U \in W_{2,\alpha}^{2r}(\Omega)$  уравнения  $\mathbb{L}U = 0$ . Поэтому в условиях теоремы 2 однородное уравнение  $\mathbb{L}U = 0$  имеет конечномерное линейное пространство решений.

*Поступило 16.03.2022 г.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М, Лирозкин П.И, Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. – Известия вузов. Математика, 1988, №8, с. 4-30.
2. Мирошин Н.В. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением. – Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 1992, т. 194, с. 179-195.
3. Бойматов К.Х., Исмоков С.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой. – Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 1997, т. 214, с. 107-134.
4. Бойматов К.Х. О базисности по Абелю корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами. – Сибирский математический журнал, 2006, т. 47, 1, с. 46-57.
5. Жиков В.В., Пастухова С.Е. Усреднение вырождающихся эллиптических уравнений. – Сибирский математический журнал, 2008, т. 49, №1, с. 101-124.
6. Исмоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением. – Математические заметки, 2010, т. 87, №2, с. 201-216.
7. Константинова Т.П. Оценка резольвенты и спектральные свойства одного класса вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области. – Математические заметки СВФУ, 2019, т. 26, №4, с. 37-50.
8. Исмоков С.А., Хакназаров К.Э. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов не дивергентного вида в ограниченной области. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2020, т.63, №5-6, с. 308-314.
9. Хакназаров К.Э. О фредгольмовой разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов не дивергентного вида. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2020, т.63, №9-10. с. 586-590.
10. Исмоков С.А., Хакназаров К.Э. Вариационная задача Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов не дивергентного вида. – Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2021, т. 64, №7-8, с. 393-400.
11. Егоров Ю.В. Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. – М.: Изд-во Московского университета, 1985. 165 с.
12. Лионс Ж-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир. 1971. 372 с.

С.А.Исхоков, К.Э.Хакназаров

## ОИД БА ОХИРЧЕНАКА БУДАНИ ЯДРОИ БАЪЗЕ ОПЕРАТОРҲОИ ТАНАЗЗУЛЁБАНДАИ ЭЛЛИПТИКИИ ШАКЛИ ҒАЙРИ ДИВЕРГЕНТӢ

*Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола як нобаробарие исбот карда мешавад, ки нормаи оператори эллиптикии шакли ғайри дивергентӣро дорад, ки дар соҳаи маҳдуди фазои евклидии  $n$ -ченака додашуда, дар тамоми сарҳади соҳа таназзул меёбанд. Баъдан бо ёрии ин нобаробарӣ охирченака будани ядрои операторҳои таҳқиқшаванда исбот карда мешавад. Ба фарқ аз қорҳои пештар нашршуда, коэффитсиентҳои операторҳои таҳқиқшаванда ғайри дифференциронидашавандаанд ва бинобар ин онҳоро ба шакли дивергентӣ овардан мумкин нест.

**Калимаҳои калидӣ:** *оператори эллиптикии шакли ғайри дивергентӣ, таназзул ёбии дараҷагӣ, соҳаи маҳдуд, ядрои охирченака, сарбастагии соҳаи қимматҳои оператор.*

S.A.Iskhokov, K.E.Khakhnazarov

## ON THE FINITE DIMENSIONALITY OF THE KERNEL OF SOME NON- DIVERGENCE FORM DEGENERATE ELLIPTIC OPERATORS

*A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan*

We prove an inequality which contains the norm of a non-divergence form elliptic operator in a bounded domain of the  $n$ -dimensional Euclidean space that degenerates along the entire boundary of the domain. Then, with the help of this inequality, the finite-dimensionality of the kernel of the operators under investigation is proved. In contrast to previously published papers, the coefficients of the operators under investigation are not differentiable, and therefore they cannot be reduced to divergence form.

**Key words:** *non-divergence form elliptic operator, power degeneration, bounded domain, a finite-dimensional kernel, closeness of a range of operator.*

УДК 517:948.9:669.548.55

Член-корреспондент НАН Таджикистана И.Курбонов, У.Бахтовар\*

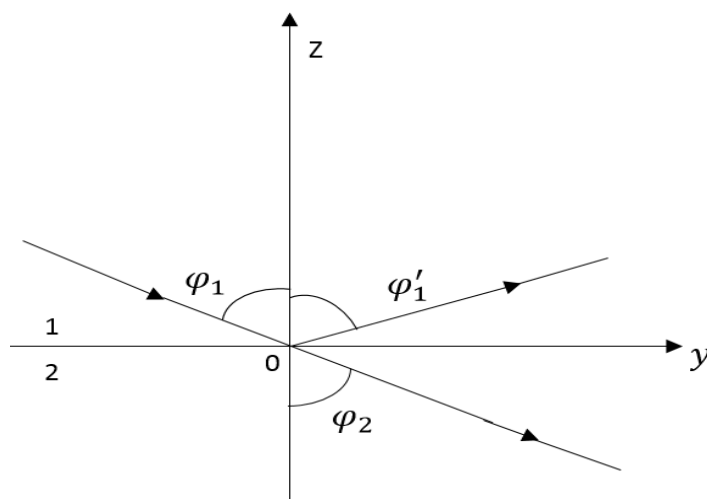
**E-ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ С ПАМЯТЬЮ***Российско-Таджикский (Славянский) университет,**\*Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими*

Рассмотрены вопросы распространения электромагнитных волн в кусочно-неоднородных нелинейных средах. Приведены постановки краевых задач для получения систем нелинейных интегродифференциальных уравнений частных производных. Их приближенные периодические во времени решения разыскиваются по методу эквивалентной линеаризации. Получено обобщение формулы Френеля E-задачи электродинамики для сред, обладающих свойствами памяти. Показано, что для непроводящих сред без памяти  $\varphi'_1 = \varphi_1 = \varphi_2$ , то есть углы падения, отражения и преломления равны.

**Ключевые слова:** кусочно-линейная среда, неоднородная среда, память, линейная и нелинейная среда, E-задачи электродинамики.

1. Рассмотрим задачу распространения электромагнитной волны в изотропной кусочно-линейной и нелинейной среде, обладающей свойствами памяти (последействия).

Расположим декартову систему координат таким образом, чтобы среда с разными свойствами разделяла плоскости  $z=0$  (рисунок): среда 1 (полупространство,  $z > 0$ ) характеризуется материальными уравнениями поля  $D = D_1(E_1)$ ,  $J = J_1(E_1)$ ,  $B = B_1(H_1)$ , а среда 2 (полупространство,  $z < 0$ ) - материальными уравнениями поля  $D = D_2(E_2)$ ,  $J = J_2(E_2)$ ,  $B = B_2(H_2)$ .



Адрес для корреспонденции: Курбонов Икром. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М. Турсунзаде, 30, РТСУ.



Предложим, что в первом полупространстве задана падающая линейно поляризованная касательная, составляющая напряженность электрического поля  $E_1(0, t)$ , являющаяся периодической функцией времени и удовлетворяющая условию регулярности на бесконечности, то есть

$$E_1(0, t) = E_1(t) = E_1(t + T),$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} E(z, t) = 0, \tag{1}$$

где  $T$  – период изменения электрического поля во времени.

Задача определения электромагнитных полей

$$H(z, t) = \begin{cases} H_1(z, t) + H_1'(z, t), & z > 0, \\ H_2(z, t), & z < 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$E(z, t) = \begin{cases} E_1(z, t) + E_1'(z, t), & z > 0, \\ E_2(z, t), & z < 0, \end{cases} \tag{3}$$

в общем случае сводится к отысканию периодических по  $t$  решениям уравнений Максвелла [1,2]

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = j(E) + \frac{\partial D(E)}{\partial t}, \quad \frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\partial H}{\partial z} \tag{4}$$

с общими материальными уравнениями

$$D(t) = D(E(\tau), \tau \leq t), \quad J(t) = J(E(\tau), \tau \leq t), \quad B(t) = B(H(\tau), \tau \leq t). \tag{5}$$

Поля (2), (3) полностью определяются скалярными функциями напряженности электрического  $E(z, t)$  и магнитного  $H(z, t)$  полей. Материальные уравнения поля (5) в общем случае сложные, нелинейные, более того обладают свойствами линейной и нелинейной памяти (последствия).

Необходимо найти соотношения между амплитудами напряженности электромагнитного поля падающей, отраженной и преломленной волн. Для этого следует учесть, что на границе раздела, то есть в плоскости  $z = 0$ , должны выполняться граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих суммарных электрического и магнитного полей

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} [H_1(z, t) + H_1'(z, t)] = \lim_{z \rightarrow 0^-} H_2(z, t),$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} [E_1(z, t) + E_1'(z, t)] = \lim_{z \rightarrow 0^-} E_2(z, t). \tag{6}$$

Ниже мы остановимся на определении электромагнитного поля в полупространстве  $z > 0$  и  $z < 0$  поставленной выше задачи для конкретных материальных уравнений (5), то есть на отыскании периодических решений краевых задач (1), (4)-(6).

2. Предположим теперь, что первое полупространство является сегнетоэлектрическим, а второе линейным, тогда материальные уравнения (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 D(E) &= \begin{cases} \varepsilon_1(|E_1|)E_1, & z > 0, \\ \varepsilon_2 E_2, & z < 0, \end{cases} \\
 J(E) &= \begin{cases} \sigma_1 E_1, & z > 0, \\ \sigma_2 E_2, & z < 0, \end{cases} \\
 H(E) &= \begin{cases} \mu_1 H_1, & z > 0, \\ \mu_2 H_2, & z < 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Решение поставленных задачи (1) - (4), (6), (7) будем искать в виде

$$\begin{aligned}
 E_i(z, t) &= E_i \exp[-k_{1i}z] \cos(k_{2i}z - \omega t + \psi_i), \\
 H_i(z, t) &= H_i \exp[-k_{1i}z] \cos(k_{2i}z - \omega t + \phi_i).
 \end{aligned} \tag{8}$$

С наличием отраженной волны, распространяющейся в полупространстве  $z > 0$ :

$$\begin{aligned}
 E'_i(z, t) &= E'_i \exp[-k_{1i}z] \cos(k_{2i}z - \omega t + \psi'_i), \\
 H'_i(z, t) &= H'_i \exp[-k_{1i}z] \cos(k_{2i}z - \omega t + \phi'_i),
 \end{aligned} \tag{9}$$

где  $\omega$ ,  $E_1$ , и  $\psi_1$  – заданные частота, амплитуда и фаза, постоянные  $k_{1i}$ ,  $k_{2i}$ ,  $E'_1$ ,  $E_2$ ,  $H_i$ ,  $H_2$ ,  $H'_1$ ,  $\phi_i$ ,  $\psi_2$ ,  $\phi'_1$  и  $\psi'_1$   $i = (1, 2)$  подлежат определению.

Постоянные  $k_{1i}$  и  $k_{2i}$ , характеризующие соответственно затухание и фазовую скорость распространения плоской волны в соответствующих полупространствах  $z > 0$  и  $z < 0$ , определяются из уравнений

$$k_{1i}^2 - k_{2i}^2 + \omega^2 \mu_i \bar{\varepsilon}_i(|E_i|) = 0, \quad 2k_{1i}k_{2i} - \omega \mu_i \sigma_i = 0, \tag{10}$$

где

$$\bar{\varepsilon}_i(|E_i|) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \varepsilon_i(|E_i| e^{-x} \cos \tau) e^{-2x} \cos^2 \tau \, d\tau \, dx.$$

Для положительных постоянных  $k_{1i}$  и  $k_{2i}$  получим выражение

$$k_{1i,2i} = \omega \sqrt{\frac{\mu_i \bar{\varepsilon}_i(|E_i|)}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma_i^2}{\omega^2 \bar{\varepsilon}_i^2(|E_i|)} + 1} \right)}.$$

Из второго уравнения (4) с учетом материального уравнения поля (7) легко найдем  $H'_1$  и  $\phi'_1$  через  $E'_1$ , и  $\psi'_1$ :

$$H'_1 = \frac{E'_1 \sqrt{k_{11}^2 + k_{21}^2}}{\omega \mu_1}; \quad \phi'_1 = \psi'_1 + \arctg \frac{k_{11}}{k_{21}}.$$

Зная  $E_1(z, t)$ , легко найти  $H_i(z, t)$  ( $i = 1, 2$ ) с помощью второго уравнения Максвелла (4) и третьего материального уравнения поля (7). Для  $H_i(z, t)$  при этом справедливо представление вида

$$H_i(z, t) = \frac{E_i \sqrt{k_{1i}^2 + k_{2i}^2}}{\omega \mu_i} \exp[-k_{1i}z] \times \cos \left( k_{2i}z - \omega t + \psi_i + \arctg \frac{k_{1i}}{k_{2i}} \right).$$

Теперь из условий (6) найдем  $E_2$ ,  $E_1'$ ,  $\psi_2$  и  $\psi_1'$ . Для них справедливо представление вида:

$$E_2 = 2\mu_1 E_1 \sqrt{\frac{k_{12}^2 + k_{22}^2}{(\mu_1 k_{12}^2 + \mu_2 k_{11}^2)^2 + (\mu_1 k_{22} + \mu_2 k_{21})^2}}; \tag{11}$$

$$\psi_2 = \psi_1 - \arctg \frac{\mu_2 (k_{11}k_{22} - k_{21}k_{12})}{\mu_1 (k_{12}^2 + k_{22}^2) + \mu_2 (k_{11}k_{22} + k_{21}k_{22})}; \tag{12}$$

$$E_1' = E_1 \sqrt{\frac{(\mu_1 k_{12} - \mu_2 k_{11})^2 + (\mu_1 k_{22} - \mu_2 k_{21})^2}{(\mu_1 k_{12} + \mu_2 k_{11})^2 + (\mu_2 k_{21} + \mu_1 k_{22})^2}}; \tag{13}$$

$$\psi_1' = \psi_1 - \arctg \frac{2\mu_1 \mu_2 (k_{11}k_{22} - k_{21}k_{12})}{\mu_1^2 (k_{12}^2 + k_{22}^2) - \mu_2^2 (k_{11}^2 + k_{21}^2)}. \tag{14}$$

Соотношения (11) и (14) есть обобщение формулы Френеля для нелинейных сред, то есть  $E$ -задачи электродинамики.

**Замечание 1.** Если  $k_{11} = k_{12} = 0$ , то соотношения (11)-(14) примут вид:

$$E_2 = \frac{2\mu_1 k_{22} E_1}{\mu_2 k_{21} + \mu_1 k_{22}}; \quad \psi_2 = \psi_1; \tag{15}$$

$$E_1' = \frac{\mu_1 k_{22} - \mu_2 k_{21}}{\mu_2 k_{21} + \mu_1 k_{22}} E_1; \quad \psi_1' = \psi_1. \tag{16}$$

Соотношения (15) и (16) полностью совпадают с формулой Френеля для  $E$ -задачи электродинамики [5].

3. Предположим теперь, что первое полупространство является сегнетоэлектрическими, а второе линейным, тогда материальные уравнения (5) можно представить в виде

$$D(E) = \begin{cases} \bar{\epsilon}_1 (|E_1|) E_1, & z > 0, \\ \epsilon_2 E_2, & z < 0, \end{cases}$$

$$J(E) = \begin{cases} \sigma_1 E_1 + \int_{-\infty}^t \chi_1(t-\tau) E_1 d\tau, & z > 0, \\ \sigma_2 E_2 + \int_{-\infty}^t \chi_2(t-\tau) E_2 d\tau, & z < 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$B(H) = \begin{cases} \mu_1 H_1 + \int_{-\infty}^t \psi_1(t-\tau) E_1 d\tau, & z > 0, \\ \mu_2 H_2 + \int_{-\infty}^t \psi_2(t-\tau) E_2 d\tau, & z < 0. \end{cases}$$

В отличие от линейных постановок, краевые задачи (1) - (4), (6), (7), (8), (9) не допускают точного решения. Приближенное решение краевых задач (1)-(4), (6), (7), (8), (9) будем искать по методу эквивалентной линеаризации [3,4] в виде (8) и (9). Для  $k_{1i}, k_{2i}, E'_1, E_2, H_i, H_2, H'_1, \varphi_i, \psi_2, \varphi'_1$  и  $\psi'_1$   $i = (1, 2)$ , получаем систему нелинейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{aligned} H_i [k_{1i} \cos \theta_i + k_{2i} \sin \theta_i] &= E_i (\sigma_i + \chi_{ic}), \\ H_i [-k_{1i} \sin \theta_i + k_{2i} \cos \theta_i] &= E_i (\omega \bar{\varepsilon}_i(|E_i|) + \chi_{is}), \\ E_i [k_{1i} \sin \theta_i + k_{2i} \cos \theta_i] &= \omega H_i (\mu_i + \psi_{ic}), \\ E_i [k_{1i} \cos \theta_i - k_{2i} \sin \theta_i] &= \omega H_i \psi_{is}, \end{aligned} \quad (18)$$

$i = 1, 2,$

где

$$\bar{\varepsilon}_i(|E_i|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \varepsilon_i(|E_i| e^{-x} \cos \tau) e^{-2x} \cos^2 \tau d\tau dx,$$

$$\theta_i = \varphi_i - \psi_i, \quad \bar{\varepsilon}_2(|E_2|) = \varepsilon_2.$$

Из четвертого уравнения полученной системы (18) находим

$$\theta_i = \operatorname{arctg} \frac{k_{1i} (\mu_i + \psi_{ic}) - k_{2i} \psi_{is}}{k_{1i} \psi_{is} + k_{2i} (\mu_i + \psi_{ic})}. \quad (19)$$

Дальнейшее исключение  $E_i, H_i$  и  $\theta_i$  из системы (18) с помощью (19) дает систему двух уравнений для определения постоянных

$$\begin{cases} k_{1i}^2 - k_{2i}^2 + a_i = 0, \\ 2k_{1i}k_{2i} - b_i = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$a_i = \omega^2 [\bar{\varepsilon}_i(|E_i|)\mu_i + \bar{\varepsilon}_i(|E_i|)\psi_{ic}] - \omega(\sigma_i\psi_{is} - \mu_i\chi_{is} - \psi_{ic}\chi_{is} + \psi_{is}\chi_{ic});$$

$$b_i = \omega^2 \bar{\varepsilon}_i(|E_i|) \psi_{ic} + \omega(\sigma_i \mu_i + \sigma_i \psi_{ic} + \mu_i \chi_{ic} + \psi_{ic} \chi_{ic} + \psi_{is} \chi_{is});$$

$$\psi_{ic} = \int_0^\infty \psi_i(s) \cos \omega s ds; \quad \psi_{is} = \int_0^\infty \psi_i(s) \sin \omega s ds;$$

$$\chi_{ic} = \int_0^\infty \chi_i(s) \cos \omega s ds; \quad \chi_{is} = \int_0^\infty \chi_i(s) \sin \omega s ds;$$

$$i = 1, 2.$$

Из третьего и четвертого уравнений системы (18) с учетом (20) можно найти  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H'_1$  в виде

$$H_1 = \frac{E_1}{\omega} \sqrt{\frac{k_{11}^2 + k_{21}^2}{(\mu_1 + \psi_{1c})^2 + \psi_{1s}^2}}, \quad H_2 = \frac{E_2}{\omega} \sqrt{\frac{k_{12}^2 + k_{22}^2}{(\mu_2 + \psi_{2c})^2 + \psi_{2s}^2}}, \quad (21)$$

$$H'_1 = \frac{E'_1}{\omega} \sqrt{\frac{k_{11}^2 + k_{21}^2}{(\mu_1 + \psi_{1c})^2 + \psi_{1s}^2}}. \quad (22)$$

Теперь из условий (6) найдем  $E_2$ ,  $E'_1$ ,  $\psi_2$  и  $\psi'_1$ . Для них справедливо представление вида:

$$E_2 = 2E_1 \sqrt{\frac{(k_{12}^2 + k_{22}^2) N_1}{(k_{12}^2 + k_{22}^2) N_1 + (k_{11}^2 + k_{21}^2) N_2 + 2[(k_{11} k_{12} + k_{21} k_{22}) N_3 + (k_{11} k_{22} - k_{21} k_{22}) N_4]}}}; \quad (23)$$

$$\psi_2 = \psi_1 - \arctg \frac{(k_{11} k_{22} - k_{21} k_{12}) N_3 - (k_{11} k_{12} + k_{21} k_{22}) N_4}{(k_{12}^2 + k_{22}^2) N_1 + (k_{11} k_{12} + k_{21} k_{22}) N_3 + (k_{11} k_{22} - k_{21} k_{22}) N_4}; \quad (24)$$

$$E'_1 = E_1 \sqrt{\frac{(k_{12}^2 + k_{22}^2) N_1 + (k_{11}^2 + k_{21}^2) N_2 - 2[(k_{11} k_{12} + k_{21} k_{22}) N_3 + (k_{11} k_{22} - k_{21} k_{22}) N_4]}{(k_{12}^2 + k_{22}^2) N_1 + (k_{11}^2 + k_{21}^2) N_2 + 2[(k_{11} k_{12} + k_{21} k_{22}) N_3 + (k_{11} k_{22} - k_{21} k_{22}) N_4]}}}; \quad (25)$$

$$\psi'_1 = \psi_1 - \arctg \frac{2[(k_{11} k_{22} - k_{21} k_{12}) N_3 - (k_{11} k_{12} + k_{21} k_{22}) N_4]}{(k_{12}^2 + k_{22}^2) N_1 - (k_{11}^2 + k_{21}^2) N_2}, \quad (26)$$

где

$$N_1 = \psi_{1s}^2 + (\mu_1 + \psi_{1c})^2; \quad N_2 = \psi_{2s}^2 + (\mu_2 + \psi_{2c})^2; \quad N_3 = \psi_{1s} \psi_{2s} + (\mu_1 + \psi_{1c})(\mu_2 + \psi_{2c});$$

$$N_4 = \psi_{1s}(\mu_2 + \psi_{2c}) - \psi_{2s}(\mu_1 + \psi_{1c}).$$

Соотношения (23) и (26) есть обобщение формулы Френеля для нелинейных (сегнетоэлектрических) сред, обладающих свойствами памяти (последействия) как в первой, так и во второй средах.

**Замечание 2.** Если  $\sigma_i \rightarrow 0$  и  $\psi_i(x) = 0$ ,  $\chi_i(x) = 0$ , то есть среда без памяти (последействия), то  $k_{11} = 0$  и  $k_{12} = 0$  и соотношения (23)-(26) примут вид:

$$E_2 = \frac{2\mu_1 k_{22} E_1}{\mu_1 k_{22} + \mu_2 k_{21}}; E'_1 = \frac{\mu_1 k_{22} - \mu_2 k_{21}}{\mu_2 k_{21} + \mu_1 k_{22}} E_1; \psi'_1 = \psi_2 = \psi_1. \tag{27}$$

Соотношения (25) полностью совпадают с формулой Френеля для  $E$ -задачи электродинамики [5].

**Замечание 3.** Если  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  и  $\psi_i(x) = 0$ ,  $\chi_i(x) = 0$ , то есть среда без памяти (последействия), то соотношения (23)-(26) будут следующими:

$$E_2 = 2E_1 \sqrt{\frac{k_{12}^2 + k_{22}^2}{(k_{11} + k_{12})^2 + (k_{21} + k_{22})^2}}; \psi_2 = \psi_1 - \arctg \frac{k_{11} k_{22} - k_{21} k_{12}}{k_{12}^2 + k_{22}^2 + k_{11} k_{12} + k_{21} k_{22}};$$

$$E'_1 = E_1 \sqrt{\frac{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2}{(k_{11} + k_{12})^2 + (k_{21} + k_{22})^2}}; \psi'_1 = \psi_1 - \arctg \frac{2(k_{11} k_{22} - k_{21} k_{12})}{k_{12}^2 + k_{22}^2 - (k_{11}^2 + k_{21}^2)}.$$

Фактическое решение найдено. Внося в (2) и (3) выражения (11)-(14), получаем

$$H(z, t) = \begin{cases} E_1 \frac{\sqrt{k_{11}^2 + k_{21}^2}}{\omega \mu_1} e^{-k_{11} z} \left[ \cos(k_{21} z - \omega t + \psi_1 + \arctg \frac{k_{11}}{k_{21}}) + \sqrt{\frac{(\mu_1 k_{12} - \mu_2 k_{11})^2 + (\mu_1 k_{22} - \mu_2 k_{21})^2}{(\mu_1 k_{12} + \mu_2 k_{11})^2 + (\mu_2 k_{21} + \mu_1 k_{22})^2}} \times \right. \\ \left. \times \cos \left( k_{21} z - \omega t + \psi_1 - \arctg \frac{2\mu_1 \mu_2 (k_{11} k_{22} - k_{21} k_{12})}{\mu_1^2 (k_{12}^2 + k_{22}^2) - \mu_2^2 (k_{11}^2 + k_{21}^2)} \right) \right], & z > 0; \\ \frac{2\mu_1 E_1 (k_{12}^2 + k_{22}^2)}{\omega \mu_2 \sqrt{(\mu_1 k_{12}^2 + \mu_2 k_{11}^2) + (\mu_1 k_{22} + \mu_2 k_{21})^2}} e^{-k_{12} z} \times \\ \times \cos \left( k_{22} z - \omega t + \psi_1 - \arctg \frac{\mu_2 (k_{11} k_{22} - k_{21} k_{12})}{\mu_1 (k_{12}^2 + k_{22}^2) + \mu_2 (k_{11} k_{22} + k_{21} k_{22})} \right), & z < 0; \end{cases}$$

$$E(z,t) = \begin{cases} E_1 e^{-k_{11}z} \left[ \cos(k_{21}z - \omega t + \psi_1) + \sqrt{\frac{(\mu_1 k_{12} - \mu_2 k_{11})^2 + (\mu_1 k_{22} - \mu_2 k_{21})^2}{(\mu_1 k_{12} + \mu_2 k_{11})^2 + (\mu_2 k_{21} + \mu_1 k_{22})^2}} \times \right. \\ \left. \times \cos \left( k_{21}z - \omega t + \psi_1 - \operatorname{arctg} \frac{2\mu_1\mu_2(k_{11}k_{22} - k_{21}k_{12})}{\mu_1^2(k_{12}^2 + k_{22}^2) - \mu_2^2(k_{11}^2 + k_{21}^2)} \right) \right], & z > 0; \\ 2\mu_1 E_1 \sqrt{\frac{k_{12}^2 + k_{22}^2}{(\mu_1 k_{12}^2 + \mu_2 k_{11}^2)^2 + (\mu_1 k_{22} + \mu_2 k_{21})^2}} e^{-k_{12}z} \times \\ \times \cos \left( k_{22}z - \omega t + \psi_1 - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2(k_{11}k_{22} - k_{21}k_{12})}{\mu_1(k_{12}^2 + k_{22}^2) + \mu_2(k_{11}k_{22} + k_{21}k_{22})} \right), & z < 0. \end{cases}$$

Поступило 01.03.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Курбонов И. – Тезисы докл. Всесоюзной конф. По нелинейным проблемам дифференциальных уравнений и математической физики. – Тернополь 12-15 сент. 1989 г., ч. 1, с. 229-230.
2. Курбонов И. Аналитические и качественные исследования нелинейных краевых задач математической физики с памятью: Автореф. дисс. д. физ.-мат. н. – Киев: АН УССР, Ин-т математики, 1991, 38 с.
3. Митропольский Ю.А., Курбонов И. О разрешимости краевых задач электромагнитоупругости с памятью. – ДАН СССР, 1991, т. 317, №1, с.35-39.
4. Березовский А.А., Курбонов И. Периодические во времени плоскости электромагнитные поля в полупространстве с общими материальными уравнениями. – Краевые задачи электродинамики проводящих сред. – Киев: АН УССР, Ин-т математики, 1976, с.35-57.
5. Стреттон Дж.А. Теория электромагнетизма. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948, 539 с.

И.Курбонов, У.Бахтовар\*

**Е-МАСЪАЛАИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ДАР МУҲИТИ ИЗОТРОПИИ  
ҚИСМАН-ЯҚЦИНСА ВА ҒАЙРИХАТТӢ БО ХОТИРА**

*Донишгоҳи (Славянии) Россияю Тоҷикистон,*

*\*Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М. Осимӣ*

Дар мақола масъалаи паҳншавии мавҷҳои электромагнитӣ барои муҳитҳои ғайрихаттии қисман-ғайрияққинса дида шудааст. Гузориши масъалаҳои канори барои ҳосил кардани системаҳои ғайрихаттии муодилаҳои интегро-дифференциалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ оварда шуда аст. Ҳалли тақрибии даврии онҳо нисбат ба вақт ба воситаи методи хаттиқунонии эквивалентӣ кофтуқоб карда мешавад. Формулаи Френел барои Е-масъалаи электродинамикаи муҳитҳои дорои хотира, умуми карда шудааст. Нишон дода шудааст, ки барои муҳитҳои шиддат нагузаронанда дорои хотира набуда  $\varphi_1' = \varphi_1 = \varphi_2$  аст. Яъне кунҷи афтиш, инъикос ва шикаст баробар мебошад.

*Калимаҳои калидӣ: муҳитҳои қисман якҷинса, муҳитҳои гайриякҷинса, хотира, муҳитҳои хаттӣ, муҳитҳои гайрихаттӣ, E-масъалаи электродинамика.*

**I.Kurbonov, U.Bakhtovar\***

***E-PROBLEM OF ELECTRODYNAMICS FOR AN ISOTROPIC  
SUSPENSION-LINEAR AND NONLINEAR MEDIUM WITH MEMORY***

*Russian-Tajik (Slavonic) University,*

*\*M.Osimi Tajik Technical University*

The problems of propagation of electromagnetic waves in piecewise- inhomogeneous nonlinear media are considered. Substitutions of boundary nonlinear integro-differential problems are given to obtain systems of partial differential equations. Their approximate time-periodic solutions are sought by the method of equivalent linearization. A generalization of the Fresnel formulas of the *E*-problem of electrodynamics for media with memory properties is obtained. It is shown that for non-conducting media without memory  $\varphi'_1 = \varphi_1 = \varphi_2$ . The is, the angles of incidence, reflection and refraction are equal.

**Key words:** *piecewise linear medium, inhomogeneous medium, memory, linear and nonlinear medium, E-problems of electrodynamics.*



УДК 517.956.2

Ш.Б.Халилов, Б.Н.Рушанов

**К ТЕОРИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ  
ПО ПЕТРОВСКОМУ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА***Таджикский национальный университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана Н.Раджабовым 04.10.2021 г.)*

*Работа посвящена исследованию разрешимости задачи Неймана для одной системы эллиптического типа четырех уравнений с четырьмя неизвестными функциями в полупространстве. Методом классического преобразования Фурье решение поставленной задачи записывается в явном виде через граничные значения.*

**Ключевые слова:** эллиптические системы, задача Неймана, преобразования Фурье, сильно эллиптические системы, гомотопическая классификация, характеристический определитель, матричный дифференциальный оператор.

В работе [1] А.И.Янушаускас предложил новую гомотопическую классификацию эллиптических систем уравнений в частных производных второго порядка. Все эллиптические системы, наряду с самой характеристической матрицей, симметрическая составляющая которой также определяет эллиптический оператор, называются эллиптическими системами класса  $P$ . Другой класс эллиптических по Петровскому систем содержит системы, симметрическая составляющая характеристической матрицы которых не определяет эллиптический оператор. Этот класс обозначается буквой  $Q$ . Например, сильноэллиптические и симметрично эллиптические по Петровскому системы уравнений второго порядка принадлежат классу  $P$ . Характер разрешимости краевых задач для систем класса  $Q$  по сравнению с системами класса  $P$  изучен мало.

Здесь в пространстве  $R^4$  переменных  $t, x_1, x_2, x_3$  будет рассмотрена система уравнений второго порядка эллиптического типа

$$-D\bar{D}U + \frac{\lambda}{2}(D + \bar{D})\bar{D}U = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – вещественный параметр,  $D, \bar{D}$  – являются матричными дифференциальными операторами вида

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}, \bar{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}$$

соответственно. Дифференциальные операторы  $D, \bar{D}$  обладают следующими свойствами

$$D\bar{D} = E\Delta, D + \bar{D} = 2E \frac{\partial}{\partial t},$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа по всем переменным, а  $E$  – четырехмерная единичная матрица. Отсюда систему (1) можно переписать так:

$$-\Delta U + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \bar{D}U = 0. \tag{2}$$

Характеристический определитель системы (2) имеет вид:

$$\sigma(\tau, \xi) = (\tau^2 + |\xi|^2)^2 ((\lambda - 1)^2 \tau^2 + |\xi|^2)^2, |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

Отсюда видно, что система (2) при любых значениях параметра  $\lambda \neq 1$  является эллиптической, при  $\lambda = 1$  вырождается в систему составного типа. Симметрическая составляющая характеристической матрицы этой системы имеет вид:

$$A_0 = \begin{pmatrix} -|\xi|^2 + (\lambda - 1)\tau^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -|\xi|^2 + (\lambda - 1)\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -|\xi|^2 + (\lambda - 1)\tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -|\xi|^2 + (\lambda - 1)\tau^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, она при  $\lambda < 1$  принадлежит классу  $P$ , а при  $\lambda > 1$  принадлежит классу  $Q$ .

**Задача Неймана.** Найти в полупространстве  $R_+^4 = (t, x) : t > 0, x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$  регулярное решение  $U = (u_0, u_1, u_2, u_3)$  системы (2), удовлетворяющее при  $t = 0$  краевым условиям

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} \Big|_{(t=0)} = g_k(x), \quad k = \overline{1, 4}, \tag{3}$$

где  $g_k(x)$  – заданные достаточно гладкие исчезающие на бесконечности со своими частными производными первого порядка функции.

Поставленную задачу можно решить методом преобразования Фурье. Обозначим преобразования Фурье функции  $f(x)$  по переменным  $x_1, x_2, x_3$  через  $\tilde{f}(\xi)$ , то есть [2]

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(x, \xi)} dx = \int_{R^3} f(x) e^{-i(x, \xi)} dx, \quad (4)$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $dx = dx_1 dx_2 dx_3$  и  $(x, \xi) = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3$  скалярное произведение векторов  $x$  и  $\xi$ . Применяя преобразование Фурье (4) к левым частям уравнений системы (2) будем иметь:

$$(\lambda - 1)\tilde{U}_n + \lambda A_0(\xi)\tilde{U}_t + |\xi|^2 \tilde{U} = 0, \quad (5)$$

где  $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$  и

$$A_0(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & i\xi_1 & i\xi_2 & i\xi_3 \\ -i\xi_1 & 0 & i\xi_3 & -i\xi_2 \\ -i\xi_2 & i\xi_3 & 0 & i\xi_1 \\ -i\xi_3 & i\xi_2 & -i\xi_1 & 0 \end{pmatrix},$$

а  $U$  – вектор-функция, записанная в виде матрицы-столбца  $(u_0 u_1 u_2 u_3)^T$ . Пусть  $\lambda \neq 1$ . Тогда, вводя новую вектор-функцию  $\tilde{V}(t, \xi) = (\tilde{v}_0 \tilde{v}_1 \tilde{v}_2 \tilde{v}_3)^T$ , формулой

$$\tilde{U}(t, \xi) = \exp\left[-\frac{1}{2} \lambda (\lambda - 1)^{-1} A_0(\xi) t\right] \tilde{V}(t, \xi), \quad (6)$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\tilde{V}_n - \left[\frac{(\lambda - 2)|\xi|}{2(\lambda)}\right]^2 E \tilde{V} = 0. \quad (7)$$

Случай  $\lambda = 2$  рассматривается отдельно [3]. Поэтому в дальнейшем всегда предполагается, что  $\lambda \neq 2$ .

Непосредственным подсчетом можно убедиться, что  $A_0^2(\xi) = E |\xi|^2$ . Отсюда без труда получим, что

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\lambda}{2(\lambda - 1)} A_0(\xi) t\right) &= \frac{1}{|\xi|} \left[ E |\xi| \operatorname{ch} \frac{\lambda |\xi| t}{2(\lambda - 1)} - A_0(\xi) \operatorname{sh} \frac{\lambda |\xi| t}{2(\lambda - 1)} \right] = \\ &= 1/2 |\xi| \left[ (|\xi| E - A_0) e^{\frac{\lambda |\xi| t}{2(\lambda - 1)}} + (|\xi| E + A_0) e^{-\frac{\lambda |\xi| t}{2(\lambda - 1)}} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Решая системы уравнения (7), с учетом (8), из равенства (6) для общего решения системы (5) будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t, \xi) = \frac{1}{|\xi|} & \left[ (E|\xi| - A_0(\xi))a(\xi)e^{|\xi|t} + (E|\xi| + A_0(\xi))b(\xi)e^{-|\xi|t} + \right. \\ & \left. + (E|\xi| - A_0(\xi))b(\xi)e^{(\lambda-1)^{-1}|\xi|t} + (E|\xi| + A_0(\xi))a(\xi)e^{-(\lambda-1)^{-1}|\xi|t} \right], \end{aligned} \tag{9}$$

где  $a(\xi) = (a_1 a_2 a_3 a_4)^T$ ,  $b(\xi) = (b_1 b_2 b_3 b_4)^T$  – произвольные достаточно гладкие вектор-функции переменной  $\xi$ .

Пусть  $\lambda < 1$ . В этом случае первое и четвертое слагаемое формулы (9) при возрастании  $t$  бесконечно растут. Поэтому ограниченная на бесконечности решений система (2) должна удовлетворять условиям

$$(E|\xi| - A_0(\xi))a(\xi) = 0, (E|\xi| + A_0(\xi))a(\xi) = 0.$$

Отсюда получим, что  $a(\xi) = \vec{0}$ . Следовательно,

$$\tilde{U}(t, \xi) = \frac{1}{|\xi|} \left[ (E|\xi| + A_0(\xi))b(\xi)e^{-|\xi|t} + (E|\xi| - A_0(\xi))b(\xi)e^{(\lambda-1)^{-1}|\xi|t} \right].$$

Для определения вектор-функции  $b(\xi)$  из краевых условий (3) находим:

$$[(2 - \lambda)|\xi| E - \lambda A_0(\xi)]b(\xi) = -2(1 - \lambda)\tilde{g}(\xi), \tag{10}$$

где  $\tilde{g}(\xi) = (\tilde{g}_0 \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \tilde{g}_3)^T$  - образ Фурье вектор-функции  $g(x) = (g_0 g_1 g_2 g_3)^T$ . Обозначим через

$$\begin{aligned} B = (2 - \lambda)|\xi| E - \lambda A_0 &= \begin{pmatrix} (2 - \lambda)|\xi| & -i\xi_1 & -i\xi_2 & -i\xi_3 \\ i\xi_1 & (2 - \lambda)|\xi| & -i\xi_3 & i\xi_2 \\ i\xi_2 & i\xi_3 & (2 - \lambda)|\xi| & -i\xi_1 \\ i\xi_3 & -i\xi_2 & i\xi_1 & (2 - \lambda)|\xi| \end{pmatrix}, \\ B' = (2 - \lambda)|\xi| E + \lambda A_0 &= \begin{pmatrix} (2 - \lambda)|\xi| & i\xi_1 & i\xi_2 & i\xi_3 \\ -i\xi_1 & (2 - \lambda)|\xi| & i\xi_3 & -i\xi_2 \\ -i\xi_2 & -i\xi_3 & (2 - \lambda)|\xi| & i\xi_1 \\ -i\xi_3 & i\xi_2 & -i\xi_1 & (2 - \lambda)|\xi| \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Легко можно увидеть, что

$$BB' = 4(1 - \lambda)|\xi|^2 E.$$

Следовательно, умножая обе стороны равенства (10) на  $B'$ , получим

$$4(1 - \lambda)|\xi|^2 Eb(\xi) = -2(1 - \lambda)B'\tilde{g}(\xi)$$

и отсюда находим, что

$$b(\xi) = -\frac{1}{(2|\xi|^2)} B'(\xi) \tilde{g}(\xi).$$

Тогда

$$\tilde{U}(t, \xi) = -\frac{1}{|\xi|^3} \left[ (E|\xi| + A_0(\xi)) B'(\xi) b(\xi) e^{-|\xi|t} + (E|\xi| - A_0(\xi)) B'(\xi) b(\xi) e^{(\lambda-1)^{-1}|\xi|t} \right].$$

Так как  $(E|\xi| + A_0(\xi)) B'(\xi) = 2|\xi|(|\xi|E + A_0)$  и  $(E|\xi| - A_0(\xi)) B'(\xi) = 2|\xi|(|\xi|E - A_0(\xi))$ , то окончательно получим, что

$$\tilde{U}(t, \xi) = -\frac{1}{|\xi|^2} \left[ (E|\xi| + A_0(\xi)) b(\xi) e^{-|\xi|t} + (E|\xi| - A_0(\xi)) b(\xi) e^{(\lambda-1)^{-1}|\xi|t} \right]. \quad (11)$$

Теперь, применяя обратное преобразование Фурье к равенствам (11), находим:

$$U(t, x) = D \int_{R^3} K_1(t, x, y) g(y) dy + \bar{D}_\lambda \int_{R^3} K_2(t, x, y) g(y) dy, \quad (12)$$

где

$$\bar{D}_\lambda = \begin{pmatrix} (1-\lambda)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} & (1-\lambda)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_3} & (1-\lambda)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & (1-\lambda)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix},$$

$$K_1(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{e^{-|\xi|t}}{|\xi|^2} e^{i(x-y, \xi)} d\xi, K_2(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{e^{-(1-\lambda)^{-1}|\xi|t}}{|\xi|^2} e^{i(x-y, \xi)} d\xi,$$

а  $D$  – матричный дифференциальный оператор, определенный формулой (4). В выражениях для  $K_1(t, x, y)$  и  $K_2(t, x, y)$ , переходя в сферические координаты, найдем:

$$K_1(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\rho[t-i(x-y, \Theta)]} d\rho \sin \varphi d\varphi d\theta,$$

$$K_2(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\rho[(1-\lambda)^{-1}t-i(x-y, \Theta)]} d\rho \sin \varphi d\varphi d\theta,$$

где  $\rho^2 = |\xi|^2$ ,

$$(x - y, \Theta) = (x_1 - y_1) \sin \varphi \cos \theta + (x_2 - y_2) \sin \varphi \sin \theta + (x_3 - y_3) \cos \varphi.$$

Здесь

$$\int_0^\infty e^{-\rho[t-i(x-y, \Theta)]} d\rho = \frac{1}{t-i(z, \Theta)}, \quad \int_0^\infty e^{-\rho[(1-\lambda)^{-1}t-i(x-y, \Theta)]} d\rho = \frac{1-\lambda}{t-i(1-\lambda)(z, \Theta)},$$

где для краткости через  $z$  обозначен вектор  $x - y$ . Следовательно,

$$K_1(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi d\theta}{t-i(z, \Theta)}, \quad K_2(t, x, y) = \frac{1-\lambda}{(2\pi)^3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi d\theta}{t-i(1-\lambda)(z, \Theta)}.$$

Для вычисления этих интегралов воспользуемся формулой 4.624 [4, стр.634]. В результате получим:

$$K_1(t, x, y) = \frac{1}{2\pi^2 r_0} \operatorname{arctg} \frac{r_0}{t}, \quad K_2(t, x, y) = \frac{1}{2\pi^2 r_0} \operatorname{arctg} \frac{(1-\lambda)r_0}{t},$$

где  $r_0^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2$ . Отсюда формулы (12) можно переписать в таком виде:

$$U(t, x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{R^3} A_1(t, x, y) g(y) dy + \frac{1}{2\pi^2} \int_{R^3} A_2(t, x, y) g(y) dy, \tag{13}$$

где

$$A_1(t, x, y) = D \left[ \frac{1}{r_0} \operatorname{arctg} \frac{r_0}{t} \right], \quad A_2(t, x, y) = \bar{D}_\lambda \left[ \frac{1}{r_0} \operatorname{arctg} \frac{(1-\lambda)r_0}{t} \right].$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденная формула (13) при  $t > 0$  удовлетворяет систему уравнений (2) и при  $t = 0$  – краевым условиям (3). Если  $\lambda > 1$ , то для того, чтобы решение было ограничено на бесконечности, первое и третье слагаемое в формуле (9) должны обращаться в нуль, то есть должно быть

$$(E | \xi | - A_0(\xi))a(\xi) = 0, (E | \xi | - A_0(\xi))b(\xi) = 0.$$

Эти системы эквивалентны друг другу и ранг матрицы у них равен двум. Следовательно, они имеют бесконечно много ненулевых решений и эти решения имеют вид:

$$a(\xi) = \frac{1}{\xi_2^2 + \xi_3^2} \left[ c^T(\xi) \alpha_1(\xi) + d^T \beta_1(\xi) \right],$$

$$b(\xi) = \frac{1}{\xi_2^2 + \xi_3^2} \left[ c^T(\xi) \alpha_2(\xi) + d^T \beta_2(\xi) \right],$$

где

$$c(\xi) = (-(\xi_1 \xi_3 - i \xi_2 | \xi |), \xi_1 \xi_2 + i \xi_3 | \xi |, \xi_2^2 + \xi_3^2, 0),$$

$$c(\xi) = (\xi_1 \xi_2 + i \xi_3 | \xi |, \xi_1 \xi_3 - i \xi_2 | \xi |, 0, \xi_2^2 + \xi_3^2),$$

а однородная задача имеет бесчисленные ненулевые решения вида

$$\tilde{U}_0(t, \xi) = \frac{1}{\xi_2^2 + \xi_3^2} \left[ c^T(\xi) \alpha_2(\xi) + d^T \beta_2(\xi) \right] \left[ e^{-|\xi|t} - (1-\lambda) e^{-(1-\lambda)^{-1} |\xi|t} \right].$$

Для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнения условий

$$(\xi_2^2 + \xi_3^2) \tilde{g}_0(\xi) + (\xi_1 \xi_3 - i \xi_2 | \xi |) \tilde{g}_2(\xi) + (\xi_1 \xi_2 + i \xi_3 | \xi |) \tilde{g}_3(\xi) = 0,$$

$$(\xi_2^2 + \xi_3^2) \tilde{g}_1(\xi) - (\xi_1 \xi_2 + i \xi_3 | \xi |) \tilde{g}_2(\xi) + (\xi_1 \xi_3 - i \xi_2 | \xi |) \tilde{g}_3(\xi) = 0.$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Теорема.** *Задача Неймана (3) для системы (2) в полупространстве  $R_+^4 = (t, x) : t > 0, x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$  при  $\lambda < 1$  всегда разрешима и имеет единственное решение, а при  $\lambda > 1$  она поставлена некорректно.*

Поступило 11.02.2022 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Янушаускас А.И. Граничные задачи для эллиптических уравнений в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1997, 168 с.
2. Шилов Г. Математический анализ. Второй спец. курс. – М.: Наука, 1965, 328 с.
3. Халилов Ш.Б., Халилова М.Ш. Масъалаи канорӣ барои як системаи ғайриқавӣ эллипси дар фазои чорченак. – Паёми Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, бахши илм табиӣ. – Душанбе: матбааи ДМТ, 2019, №3, с. 14-19.
4. Градштейн П.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971, 1108 с.

Ш.Б.Халилов, Б.Н.Рушанов

### ОИД БА НАЗАРИЯИ МАСЪАЛАҲОИ КАНОРӢ БАРОИ СИСТЕМАҲОИ БА АҚИДАИ ПЕТРОВСКИЙ ЭЛЛИПСӢ

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола ҳалшавандагии масъалаи Нейман барои як системаи эллипси чор муодилаи тартиби дуум, ки аз чор функцияи номаълум вобаста аст, дар нимфазо тадқиқ карда шудааст. Бо усули табдилдиҳии классикии Фурье ҳалли ошқори масъалаи гузошташуда ёфта шудааст, ки бавоситаи қиматҳои сарҳадӣ ифода меёбад.

**Калимаҳои калидӣ:** *системаҳои эллипси, масъалаи Нейман, табдилдиҳии Фурье, системаҳои қавӣ эллипси, раддабандии гомотопӣ, муайянкунандаи характеристикӣ, оператори матритсавии дифференсиалӣ.*

Sh.B.Khalilov, B.N.Rushanov

**ON THE THEORY OF BOUNDARY PROBLEMS FOR MULTIDIMENSIONAL  
PETROVSKY ELLIPTIC SYSTEMS OF EQUATIONS OF THE SECOND ORDER**

*Tajik National University*

In the article, for one elliptic system of four second-order equations depending on four unknown functions, the Neumann problem in a half-space is considered. Using the Fourier transform method, it is proved that the problem posed is uniquely solvable and this solution is found in an explicit form.

**Key words:** *elliptic system, Neumann problem, Fourier transform, strongly elliptic systems, homotopy classification, characteristic determinant, matrix differential operator.*



УДК 517.968.2

Г.Х.Худжаназарова, И.З.Хонов

## ОСНОВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

*Таджикский национальный университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Илоловым 26.04.2021 г.)*

В работе установлены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости для эллиптических систем дифференциальных уравнений четвертого порядка с разрывными коэффициентами и получена формула для подсчета индекса.

**Ключевые слова:** основные краевые задачи, эллиптические системы, сингулярный интегральный оператор, символ, индекс, нетеровость оператора.

Хорошо известно [1-3], что теория двумерных сингулярных интегральных операторов тесно связана с теорией краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости. В последнее время Г.Джангибековым были получены (см. напр., [4-10]) эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса некоторых классов двумерных сингулярных операторов по ограниченной области. Использование этих результатов позволило, в частности, получить в [8] теории разрешимости задач Дирихле и Неймана для эллиптических систем уравнений второго порядка на плоскости и вычислить индекс этих задач через коэффициенты системы.

В данной работе изучается вопрос разрешимости задачи Дирихле для эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка с разрывными коэффициентами на плоскости методом перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области.

Пусть  $D = \{z : |z| < 1\}$  - единичный круг комплексной плоскости  $z = x + iy$ .

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 & a(z) \frac{\partial^4 \omega}{\partial \bar{z}^2 \partial z^2} + b(z) \frac{\partial^4 \bar{\omega}}{\partial \bar{z}^2 \partial z^2} + c(z) e^{-i\varphi} \frac{\partial^4 \omega}{\partial \bar{z}^3 \partial z} + \\
 & + d(z) e^{i\varphi} \frac{\partial^4 \bar{\omega}}{\partial \bar{z}^3 \partial z} + \sum_{k+j=0}^3 [a_{k,j}(z) \frac{\partial^{k+j} \omega}{\partial \bar{z}^{-k} \partial z^j} + b_{k,j}(z) \frac{\partial^{k+j} \bar{\omega}}{\partial \bar{z}^{-k} \partial z^j}] = g(z),
 \end{aligned} \tag{1}$$

**Адрес для корреспонденции:** Худжаназарова Гулшод Худжаназаровна, Хонов Исхок Зарнилхонович. 734025, Республики Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: xgulshod@list.ru, Ishoq-92@mail.ru

где  $\varphi = \operatorname{arg} z, n$  – целое число, а  $a(z), b(z), c(z), d(z)$  – непрерывные в  $\bar{D}$  функции. Как видно из (1), коэффициент при производных  $\frac{\partial^4 \bar{\omega}}{\partial z^3 \partial \bar{z}}$  и  $\frac{\partial^4 \omega}{\partial \bar{z}^3 \partial z}$ , в точке  $z = 0$  по всем лучам, выходящим из начала координат, имеет разные пределы.

**Задача Дирихле.** Найти функцию  $\omega(z)$  из класса  $W_p^4(D) \cap C(\bar{D})$ , удовлетворяющую внутри  $G$  уравнению (1), а на ее границе  $\Gamma$  двум краевым условиям

$$\omega(z)|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где  $\frac{\partial \omega}{\partial n}$  – означает производную по направлению внешней нормали в точках контура  $\Gamma$ .

1. Известно [1-3], что любая комплекснозначная функция класса  $W_p^4(D) \cap C(\bar{D})$ , удовлетворяющая на границе  $\Gamma$  однородным краевым условиям (2), представляется в виде

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D G_4(z, \zeta) f(\zeta) ds_{\zeta} \tag{3}$$

с произвольной комплекснозначной плотностью  $f(z) \in L_p(D), p > 1$ , где  $G_4(z, \zeta)$  функция Грина бигармонического уравнения области  $D$ :

$$G_4(z, \zeta) = |\zeta - z|^2 \ln \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2).$$

Очевидно, что все производные от функции  $\omega(z)$  по  $z$  и  $\bar{z}$  до 3-го порядка дают интегральные операторы с непрерывными ядрами или с ядрами, имеющими слабую особенность и, следовательно, являются вполне непрерывными в  $L_p(D) (1 < p < \infty)$  операторами.

Непосредственный подсчет показывает, что  $\frac{\partial^4 \bar{\omega}}{\partial z^3 \partial \bar{z}}$  и  $\frac{\partial^4 \omega}{\partial \bar{z}^3 \partial z}$  определяются по формуле

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial \bar{z}^3 \partial z} = \frac{2}{\pi} \iint_D K_1(z, \zeta) f(\zeta) ds_{\zeta}, \tag{4}$$

где

$$K_1(z, \zeta) = -\frac{1}{(\zeta - z)^2} - \frac{2(\zeta - z)\bar{\zeta}^3}{(1 - z\bar{\zeta})^3} + \frac{3\bar{\zeta}^2}{(1 - z\bar{\zeta})^2} \tag{5}$$

и

$$\frac{\partial^4 \bar{\omega}}{\partial z^3 \partial \bar{z}} = \frac{2}{\pi} \iint_D K_2(z, \zeta) f(\zeta) ds_{\zeta}, \tag{6}$$

где

$$K_2(z, \zeta) = \frac{1}{(\zeta - z)^2} + \frac{2(\bar{\zeta} - \bar{z})\zeta^3}{(1 - z\zeta)^3} + \frac{3\zeta^2}{(1 - z\zeta)^2}. \quad (7)$$

Введём обозначения

$$(S^* f)(z) = \iint_D K_1(z, \zeta) f(\zeta) ds_\zeta, \quad (8)$$

$$(\bar{S}^* f)(z) = \iint_D K_2(z, \zeta) f(\zeta) ds_\zeta. \quad (9)$$

Интересно отметить, что первое слагаемое ядра  $K_1(z, \zeta)$  дает сингулярный интегральный оператор  $(S_{-2}f)(z)$ :

$$(S_{-2}f)(z) = \frac{2}{\pi} \iint_D \frac{e^{4i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), z \in D,$$

а два других слагаемых имеют особенность на границе  $\Gamma$  области  $D$ , следовательно, они не дают вполне непрерывные операторы. Однако, если  $\zeta \in \Gamma$ , то есть когда  $|\zeta|=1$ , тогда  $K_1(z, \zeta) = 0$ , следовательно, в целом ядро  $K_1(z, \zeta)$  имеет сингулярную особенность только внутри области  $D$ .

Здесь первое слагаемое ядра  $K_2(z, \zeta)$  дает сингулярный интегральный оператор  $S_{-1}$ , однако в силу того, что при  $\zeta \in \Gamma$  ядро  $K_2(z, \zeta) = 0$ , то в целом ядро  $K_2(z, \zeta)$  имеет сингулярную особенность только внутри области  $D$ .

Вычислив производную  $\frac{\partial^4 \omega}{\partial z^{-2} \partial \bar{z}^2}$ , получим

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial z^{-2} \partial \bar{z}^2} = f(z), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^4 \bar{\omega}}{\partial z^2 \partial \bar{z}^{-2}} = \overline{f(z)}. \quad (11)$$

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение (1) значения производных функций  $\omega(z)$ , вычисленные по формулам (4), (6), (10), (11) и используя обозначения (8) и (9), для определения функции  $f(z)$  получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение:

$$a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + e^{-in\varphi}c(z)(S^* f)(z) + d(z)e^{in\varphi}(\bar{S}^* f)(z) + (Tf)(z) = g(z), z \in D. \quad (12)$$

Интегральное уравнение (2) изучено в работе К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова [12]. Введем обозначения

$$\Delta_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \Delta_2(z) = |c(z)|^2 - |d(z)|^2,$$

$$\lambda(z) = \overline{a(z)}c(z) - b(z)\overline{d(z)}, \mu(z) = a(z)\overline{d(z)} - \overline{b(z)}c(z).$$

**Теорема 1.** Пусть в (12)  $n = 0$ . Тогда для того чтобы задача Дирихле (2) для эллиптической системы (12)  $W_p^4(D)$ ,  $2 < p < \infty$  была нетривиальной, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \text{для всех } z \in \overline{D}, \tag{13}$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \text{для всех } z \in \overline{D}; \quad \mu(t) \neq 0 \quad \text{для всех } t \in \Gamma. \tag{14}$$

При этом, если выполнено условие (13), то задача Фредгольмова; если выполнено (14), то индекс задачи равен

$$\kappa = -2 \text{Ind}_\Gamma \mu(t).$$

2. Теперь рассмотрим уравнение (12) в случае  $n \neq 0$ . Переходя в уравнении (12) к комплексно-сопряженным значениям, будем иметь

$$\overline{a(z)}f(z) + \overline{b(z)}\overline{f(z)} + e^{-in\varphi} \overline{d(z)}(S^* f)(z) + \overline{c(z)}e^{in\varphi} \overline{(S^* f)(z)} + (Tf)(z) = \overline{g(z)}, \quad z \in D. \tag{15}$$

Будем предполагать, что

$$\Delta_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2 \neq 0, \forall z \in \overline{D}.$$

Из двух уравнений (12) и (15), исключая слагаемое  $e^{-in\varphi} c(z)((S^* f)(z))$ , получим

$$\Delta_1 f(z) + e^{-in\varphi} \lambda(z)(S^* f)(z) + e^{in\varphi} \mu(z)\overline{(S^* f)(z)} + (Tf)(z) = \overline{g(z)}. \tag{16}$$

Умножая уравнение (16) слева на оператор

$$T = \alpha I - \beta q K, \quad \text{где } Kf = \overline{f(z)},$$

получим

$$\Delta_1 f(z) - \beta q \overline{f} + e^{-in\varphi} (\lambda(z) - \beta q \overline{\mu(z)}) (S^* f)(z) + e^{in\varphi} (\mu(z) - \beta q \overline{\lambda(z)}) \overline{(S^* f)(z)} + (Tf)(z) = \overline{g(z)}, \quad z \in D. \tag{17}$$

Из равенств

$$\alpha \lambda(z) - \beta q \overline{\mu(z)} = \alpha \Delta_1 q,$$

$$\alpha \mu(z) - \beta q \overline{\lambda(z)} = \alpha \Delta_1 \beta$$

получаем

$$\begin{cases} \alpha(\lambda(z) + \Delta_1 q) - \beta q \overline{\mu(z)} = 0 \\ \alpha \mu(z) - \beta(\Delta_1 + q \overline{\lambda(z)}) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Из второго равенства находим

$$\beta = \frac{\alpha \mu(z)}{\Delta_1 + \lambda(z) e^{i\varphi} q}.$$

Обозначим  $\lambda_1(z) = \overline{\lambda(z)} e^{i\varphi}$ .

$$\alpha(\lambda_1(z) + \Delta_1 q) - \frac{\alpha q |\mu(z)|^2}{\Delta_1 + q \lambda_1(z)} = 0,$$

$$\alpha(\lambda_1(z) + \Delta_1 q)(\Delta_1 + q \overline{\lambda_1(z)}) - \alpha q |\mu(z)|^2 = 0,$$

$$\Delta_1 \lambda_1(z) + q |\lambda(z)|^2 + \Delta_1^2 q + \Delta_1 q^2 \overline{\lambda(z)} - q |\mu(z)|^2 = 0,$$

$$\Delta_1 q^2 \overline{\lambda(z)} + (\Delta_1^2 + |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2) q + \Delta_1 \lambda_1(z) = 0,$$

где (\*) – является однородной алгебраической системой уравнений. Чтобы эта система имела ненулевое решение  $(\alpha, \beta)$ , необходимо, чтобы

$$\det = \begin{vmatrix} \mu & \Delta_1 + \overline{\lambda t} \\ \Delta_1 + \overline{\lambda t} & \overline{\mu} \end{vmatrix} = |\mu|^2 - |\Delta_1 + \overline{\lambda t}|^2 = 0,$$

а  $q$  – являлось корнем уравнения

$$|\mu(z)|^2 - |\Delta_1 + \overline{\lambda(z)} e^{i\varphi} q| = 0$$

таким, что  $|q| < 1$ , то есть уравнение (17) принимает вид

$$A_1 = \Delta_1 f(z) - \beta q \overline{f(z)} + e^{-i\varphi} \Delta_1 q (S^* f)(z) + e^{i\varphi} \Delta_1 \beta \overline{(S^* f)(z)} + (Tf)(z) = \overline{g(z)}. \quad (18)$$

Оператор из левой части (18) можно представить в виде

$$A_1 = (I - q e^{-i\varphi} (S^* f)(z)) (\beta I + e^{i\varphi} \beta \overline{(S^* f)(z)}),$$

поскольку  $|\beta| < 1, \forall z \in \overline{D}$ , то оператор  $A$  обратим в пространстве  $L^p(D)$ .

Далее введём следующие обозначения:

$$R_p(k) = \sqrt{1 - \frac{2n(1 - 2/p)}{(k + 2/p)(k + 2/q - n)}}, \quad k \geq n_0,$$

$k \neq \frac{n}{2}(1 + \text{sign}n) - 1, 1/p + 1/q = 1, n_0$  - целая часть числа  $(n-1)/2$ ,

$$\Lambda = \begin{cases} \frac{\Delta_1(0)}{\mu(0)}, & \text{если выполнено (19),} \\ \frac{\mu(0)}{\Delta_2(0)}, & \text{если выполнено (20).} \end{cases}$$

Через  $\mu_p(\Lambda)$  обозначим число, равное для  $|\Lambda| < 1$  количеству значений  $k$ , при которых  $R_p(k) < |\Lambda|$ , а для  $|\Lambda| > 1$  равное количеству значений  $k$ , при которых  $R_p(k) > |\Lambda|$ .

Если  $n \geq 0$ , то введем число

$$\varkappa_p(\lambda) = \begin{cases} -2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda| < 1, \\ 2n - 2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda| > 1 \text{ и } \mu_p(\Lambda) \neq n/2, \\ n + 1 & \text{при } |\Lambda| > 1 \text{ и } \mu_p(\Lambda) = n/2, \end{cases}$$

если  $n \leq -1$ , то введем

$$\varkappa_p(\Lambda) = \begin{cases} -2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda| < 1 \text{ и } \mu_p(\Lambda) \neq n/2, \\ 2n - 2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda| > 1, \\ n + 1 & \text{при } |\Lambda| < 1 \text{ и } \mu_p(\Lambda) = n/2. \end{cases}$$

Имеет место

**Теорема 2.** Пусть в (1)  $n \neq 0$  и  $\lambda(0) = 0$ . Если  $\Lambda \neq 1, \Lambda \neq R_n(k), (k \text{ целое, } k \geq 1/2n(1 + \text{sign}n))$  и выполняется одно из исключаяющих друг друга условий (19), (20), то задача Дирихле для эллиптической системы (1) в классе  $W_p^4(D)$ ,  $2 < p < \infty$  нетерова, причем если выполнено условие (19), то индекс задачи равен  $\varkappa_p(\Lambda)$ , а если выполнено (20), то

$$\varkappa = 2\text{Ind}_\Gamma \mu(t) + \varkappa_p(\lambda).$$

Поступило 26.03.2021 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.:Физматгиз, 1959, 672 с.
2. Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций: Дис...д. физ.-мат.н. – М.,1960.
3. Джурраев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. – М.:Наука, 1987, 415 с.
4. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах. – Мат.заметки, 1989, т.46, в.5. с.91-93.
5. Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторах. – ДАН СССР, 1990, т.314, №5, с.1055-1059.

6. Джангибеков Г. Нетеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов. – Изв.вузов. Математика, 1991, №1, с.19-28.
7. Джангибеков Г. Об условиях нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов. – ДАН СССР, 1991, т.319, №4, с.811-815.
8. Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскость. – Доклады РАН, 1993, т.330, №4, с.415-417.
9. Джангибеков Г., Худжаназарова Г.Х. Об одном классе интегральных уравнений с особенностями. – Вестник ХоГУ. Серия 1, 2000, №2, с.57-62.
10. Бильман Б.М., Джангибеков Г. Об условиях нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области. – ДАН СССР, 1986, т.288, №4, с.792-797.
11. Джангибеков Г. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами. – Мат.заметки, 1992, №9, с.25-37.
12. Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе. – УМН, 1988, т.43, №3, с.171-172.

Г.Х.Худжаназарова, И.З.Хонов

## МАСЪАЛАҶОИ КАНОРИИ АСОСӢ БАРОИ СИСТЕМАҶОИ ЭЛЛИПТИКИИ МУОДИЛАҶОИ ТАРТИБИ ЧОРУМ БО КОЭФФИЦИЕНТҶОИ КАНИШДОР

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола шартҳои зарурӣ ва кифоягии нетерови будани системаҳои эллиптикии муодилаҳои тартиби чорум бо коэффисиентҳои канишдор барқарор шудааст ва формула барои ҳисоб намудани индекс ҳосил карда шудааст.

*Калимаҳои калидӣ:* масъалаҳои канориҳои асосӣ, системаҳои эллиптикӣ, оператори интегралӣ сингулярӣ, симболи оператор, индекси оператор, нетерови будани оператор.

G.Kh.Khujanazarova, I.Z.Khonov

## BASIC BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR ELLIPTIC SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER WITH DISPLACEMENT COEFFICIENTS

*Tajik National University*

The work has established effective necessary and sufficient Noetherianness conditions for elliptic systems of differential fourth-order equations with discontinuous coefficients and the formula for calculating the index is obtained.

*Key words:* basic boundary value problems, elliptic systems, singular integral operator, symbol, index, operator impatience.

УДК 536.46

М.М.Кабиров

## ТЕПЛОВОЕ ВОСПЛАМЕНЕНИЕ СМЕСИ ГАЗОВ В ИНЕРТНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

*Российско-Таджикский (Славянский) университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.И.Илоловым 21.01.2022 г.)*

*Исследуется двухтемпературная модель теплового воспламенения смеси газов в инертной пористой среде в адиабатической постановке. Получено приближённое решение задачи.*

**Ключевые слова:** волна, горение, смесь, скорость, воспламенение, модель, пористая среда.

Вопрос теплового воспламенения реакционной смеси, находящейся в инертной пористой среде, считается важным в практическом отношении в силу пожаро-взрывобезопасности техники, сооружений и систем транспортировки и хранения топливно-воздушных смесей. Отметим, что газоз-воздушная смесь самовоспламеняется, если нагревать смесь до температуры воспламенения и эта температура зависит от концентрации реагирующего компонента, скорости тепловыделения, теплоотдачи, межфазного теплообмена, кинетических констант и давления смеси. Сущность теории теплового самовоспламенения заключается в нарушении теплового равновесия между реагирующей системой и окружающей средой [1,2]. Эта теория впоследствии была развита в работах [3-5]. Способам аналитического и численного решения задач о зажигании вещества посвящена монография [6]. Некоторые вопросы моделирования процессов самовоспламенения и горения в ограниченных объемах и двигателях внутреннего сгорания рассмотрены в [7]. В [8] рассмотрен тепловой взрыв реакционной смеси, находящейся в инертной пористой среде. Закономерности такого типа воспламенения используются при анализе механизма распространения волн горения и детонации в пористой среде [9]. Условие теплового воспламенения реакционной смеси, получено в виде критерия подобия в [10], представляющего собой отношение времён теплообмена между фазами и протекания химической реакции. Инициирование химической реакции горения смеси газов в инертной пористой среде в одностепенной и одномерной постановке рассмотрено в [11], в предположении равенства потоков тепла «уходящего» в окружающее пространство и выделяющегося в зоне горения. При этом отмечено, что в момент инициирования реагент не расходуется, а функция скорости химической реакции описывается усечённой функцией. Воспламенение топлива кислород-метан в условиях камеры сгорания является важной задачей при создании перспективных ракетных двигателей (РД). В настоящее время активно ведутся, как в России [12,13], так и за рубежом [14-17], работы направленные на исследование и внедрение лазерного зажигания для РД.

Целью настоящей работы является теоретическое определение температуры газа в порах пористой среды, при которой происходит горение, а также стационарной скорости волны, время и тол-

---

*Адрес для корреспонденции:* Кабилов Маруф Махмудович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М.Турсун-заде, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: maruf1960@mail.ru



щины зоны горения, профили температур и недостающего компонента смеси в зависимости от физико-химических констант пористой среды и смеси газов.

Математическая модель воспламенения смеси газов в инертной пористой среде имеет вид [9,10]

$$\begin{aligned} \rho_1 c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} + \rho_1 c_p v_1 \frac{\partial T_1}{\partial l} &= -\alpha_c S_c (T_1 - T_2) + \rho_1 Q J, \quad J = \eta k_0 \exp(-E/RT_1), \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \alpha_2 \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial l^2} + \alpha_c S_c (T_1 - T_2), \\ \rho_1 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \rho_1 v_1 \frac{\partial \eta}{\partial l} &= -\rho_1 J, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial l} = 0, \quad \rho_1 T_1 = \rho_{10} T_0, \\ \alpha_c &= \frac{Nu \cdot \lambda_1}{d_{eff}}, \quad S_c = \frac{6\alpha_2}{d}, \quad Nu = 0.395 Re^{0.64} Pr^{1/3}, \\ Re &= \frac{v_1 d_{eff} \rho_1}{\mu_1 \alpha_1}, \quad Pr = \frac{c_p \mu_1}{\lambda_1}, \quad d_{eff} = \frac{2\alpha_1 d}{3\alpha_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} t = 0: \quad T_1 &= T_*, \quad T_2 = T_2(l), \quad \eta = \eta(l), \\ l = 0: \quad T_1 &= T_*, \quad T_2 = T_{2*}(t), \quad \eta = \eta(t), \\ l = L: \quad \frac{\partial T_1}{\partial l} &= 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial l} = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $T_1, T_2$  – температуры газа и пористой среды;  $\eta$  – массовая концентрация недостающего компонента;  $v_1$  – скорость газа;  $\rho_{10}, c_p$  – приведённая плотность и теплоёмкость смеси газов;  $\rho_2, c_2$  – те же величины для пористой среды;  $\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности газовой и твёрдой фаз;  $\alpha_1, \alpha_2$  – объёмные содержания фаз;  $\alpha_c$  – поверхностный коэффициент межфазного теплообмена;  $S_c$  – удельная поверхность пористой среды;  $Q$  – тепловой эффект реакции;  $J$  – скорость химической реакции;  $E$  – энергия активации;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $d$  – диаметр частиц твёрдой фазы;  $d_{eff}$  – эффективный диаметр пор;  $k_0$  – предэкспонент;  $Nu$  – число Нусельта,  $\gamma, \beta$  – безразмерные параметры.

Система уравнений (1), описывающая процесс самовоспламенения реакционной смеси в инертной пористой среде включает уравнения сохранения энергии фаз (смеси газов и пористой среды) и массы недостающего компонента и смеси в целом, а также уравнение состояния. Рассматривается адиабатическая модель волн ФГТ без учёта диффузии и теплопроводности в газе. Поэтому в

системе (1) отсутствуют члены:  $\alpha_1 \lambda_1 \frac{d^2 T}{dx^2}, \rho_1 D \frac{d^2 n}{dx^2}, \alpha_{0,e} (T_0 - T_2)$  выражающие соответственно теплопроводность, диффузию и теплоотдачу. Заметим, что для изучения стационарных волн ФГТ, систему (1) записывают в подвижной (со скоростью волны) системе координат (2) и анализируют

стационарные решения на бесконечном интервале времени ( $t \rightarrow \infty$ ) [11]. В настоящей работе решения системы (2) анализируются на конечном интервале времени, где производные функции по времени не равны нулю, то есть исследуется начальная стадия формирования волны ФГГ. Система уравнений (2) получена из (1) посредством замены переменных  $x = l - ut + const$ , где  $u$  – постоянная скорость волны.

$$\begin{aligned} \rho_1 c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} + \rho_1 c_p (v_1 - u) \frac{\partial T_1}{\partial x} &= -\alpha_c S_c (T_1 - T_2) + \rho_1 QJ, \quad J = \eta k_0 \exp(-E/RT_1), \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - \rho_2 c_2 u \frac{\partial T_2}{\partial x} &= \alpha_2 \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \alpha_c S_c (T_1 - T_2), \\ \rho_1 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \rho_1 (v_1 - u) \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\rho_1 J, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 (v_1 - u)}{\partial x} = 0, \quad \rho_1 T_1 = \rho_{10} T_0, \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагаем квазистационарное распространение волны ФГГ, то есть с обеих сторон фронта горения функции постоянные, но имеют разные значения. Следовательно, фронт горения представляется как поверхность разрыва. Перед фронтом горения полагаем  $\rho_1 = \rho_{10}$  и из уравнения неразрывности смеси в целом (2) следует  $G = \rho_1 (v_1 - u) = \rho_{10} (v_{10} - u)$ .

В результате система уравнений (2) получит вид

$$\begin{aligned} \rho_{10} c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} + \rho_{10} c_p (v_{10} - u) \frac{\partial T_1}{\partial x} &= -\alpha_c S_c (T_1 - T_2) + \rho_{10} QJ, \quad J = \eta k_0 \exp(-E/RT_1), \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - \rho_2 c_2 u \frac{\partial T_2}{\partial x} &= \alpha_2 \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \alpha_c S_c (T_1 - T_2), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + (v_{10} - u) \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -J, \quad \rho_1 (v_1 - u) = \rho_{10} (v_{10} - u), \quad \rho_1 T_1 = \rho_{10} T_0, \end{aligned} \quad (3)$$

Введём безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}; \quad L = \frac{v_{10}}{k_0 \exp(-E/RT_*)}; \quad \bar{t} = k_0 \exp(-E/RT_*) \cdot t, \\ \theta_1 &= \frac{E}{RT_*^2} (T_1 - T_*); \quad \theta_2 = \frac{E}{RT_*^2} (T_2 - T_*); \quad n = \frac{\eta}{\eta_0}, \\ \gamma_1 &= \frac{RT_*^2 c_p}{EQ\eta_0}; \quad \gamma_2 = \gamma_1 \varphi; \quad \varphi = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_{10} c_p}; \quad \beta = \frac{RT_*}{E}, \\ \alpha' &= \frac{\alpha_c S_c}{\rho_{10} c_p k_0 \exp(-E/RT_*)}; \quad \Lambda = \frac{\alpha_2 \lambda_2}{L^2 \rho_{10} c_p k_0 \exp(-E/RT_*)}. \end{aligned}$$

Скорость химической реакции преобразуем в соответствии с заменой переменных и параметров

$$\begin{aligned}
 J &= nk_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_1}\right) = nk_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_*} + \frac{E}{RT_*} - \frac{E}{RT_1}\right) = nk_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right) \exp\left(\frac{E}{RT_*}\left(1 - \frac{T_*}{T_1}\right)\right) = \\
 &= nk_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right) \exp\left(\frac{E}{RT_*^2}\left(T_1 - T_*\right)\frac{T_*}{T_1}\right) = nk_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right) \exp\left(\frac{\frac{E}{RT_*^2}(T_1 - T_*)}{T_1/T_*}\right) = \\
 &= nk_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right) \exp\left(\frac{\frac{E}{RT_*^2}(T_1 - T_*)}{1 + T_1/T_* - 1}\right) = nk_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right) \exp\left(\frac{\frac{E}{RT_*^2}(T_1 - T_*)}{1 + \frac{RT_*}{E} \frac{E}{RT_*^2}(T_1 - T_*)}\right) = \\
 &= nk_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right) \exp\left(\frac{\theta_1}{1 + \beta\theta_1}\right).
 \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (3) примет вид

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \gamma_1 \left(1 - \frac{1}{u_0}\right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{x}} &= -\alpha' \gamma_1 (\theta_1 - \theta_2) + n \exp\left(\frac{\theta_1}{1 + \beta\theta_1}\right), \\
 \gamma_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \frac{\gamma_2}{u_0} \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{x}} &= \gamma_1 \Lambda \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{x}^2} + \alpha' \gamma_1 (\theta_1 - \theta_2), \\
 \frac{\partial n}{\partial t} + \left(1 - \frac{1}{u_0}\right) \frac{\partial n}{\partial \bar{x}} &= -n \exp\left(\frac{\theta_1}{1 + \beta\theta_1}\right).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что особенность задачи заключается в том, насколько влияет межфазный теплообмен на инициировании химической реакции. Для этого полагаем  $\theta_1 = \theta_* = 0$ , то есть температура смеси равна некоторой температуре  $T_*$  (подлежащая определению), при которой произойдёт инициирование химической реакции. Следовательно, система уравнений (4) упрощается и примет вид

$$\begin{aligned}
 \alpha' \gamma_1 \theta_2 + n &= 0, \\
 \gamma_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \frac{\gamma_2}{u_0} \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{x}} &= \gamma_1 \Lambda \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{x}^2} - \alpha' \gamma_1 \theta_2, \\
 \frac{\partial n}{\partial t} + \left(1 - \frac{1}{u_0}\right) \frac{\partial n}{\partial \bar{x}} &= -n,
 \end{aligned} \tag{5}$$

Функция  $n = \exp(-ka\bar{t} - k\bar{x})$ , где  $a = 1 - 1/u_0$ ,  $k = 1/2a$ , удовлетворяет третье уравнение системы (5). Из первого уравнения (5) находим

$$\theta_2 = -\frac{1}{\alpha' \gamma_1} \exp(-ka\bar{t} - k\bar{x}). \tag{6}$$

Подставляя функцию  $\theta_2$  из (6) во второе уравнение системы (5), получим следующее соотношение

$$2\varphi \left( 1 - \frac{u}{v_{10}(1-u/v_{10})} \right) - 4\alpha' + \frac{\Lambda}{(1-u/v_{10})^2} = 0. \quad (7)$$

Это соотношение при  $u=0$  используется для определения температуры инициирования химической реакции

$$T_* = -\frac{E}{R \ln \bar{t}_r}, \text{ где } \bar{t}_r = \frac{\varphi \rho_{10} c_p v_{10}^2}{k_0 \alpha_2 \lambda_2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha_c S_c \alpha_2 \lambda_2}{(\varphi \rho_{10} c_p v_{10})^2}} \right).$$

Условное время окончания химической реакции определим по заданному значению доли недостающего компонента, например  $n=0.001$ ;  $u=0$ ;  $a=1$

$$\bar{t} = 2 \ln 1000, \quad t = 2 \ln 1000 / k_0 \exp(-E/RT_*)$$

Толщина зоны горения определяется по формуле  $l_r = u \cdot t$ , где  $u$  - скорость волны, выбирается из (7) при заданной скорости газа  $v_{10}$ , пропорциональности параметров  $\alpha' = b \cdot \phi$  и других физико-химических констант пористой среды и смеси газов.

*Поступило 21.01.2022 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Семенов Н.Н. Цепные реакции. – Л.: ОНТИ, 1934, 274 с.
2. Вант-Гофф Я.Г. Очерки по химической динамике. – М.: ОНТИ, 1936, 316с.
3. Зельдович Я.Б. Теория зажигания накаливаемой поверхностью. – ЖЭТФ, 1939, т.9, №12, с.1530-1534.
4. Тодес О.М. К теории теплового взрыва. – Журнал физической химии, 1933, т.4, вып.1, с. 78-80.
5. Франк-Каменецкий Д.А. Распределение температур в реакционном сосуде и стационарная теория теплового взрыва. – Журнал физической химии, 1939, т.13, вып.6, с.738-755.
6. Вилунов В.Н. Теория зажигания конденсированных веществ. – Новосибирск: Наука СО, 1984, 190 с.
7. Сеначин П.К. Некоторые вопросы моделирования процессов самовоспламенения и горения в ограниченных объёмах и двигателях внутреннего сгорания. //elib.altstu.ru/elib/books/Files/va2000\_2/pages/07/07.htm
8. Бабушок В.И., Гольдштейн В.М., Романов А.С., Бабкин В.С. Тепловое воспламенение в инертной пористой среде. – Физика горения и взрыва, 1992, т.11, №4, с.3-9.
9. Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. Фильтрационное горение газов. – В сб. Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. – Новосибирск: Наука, 1988, с.108-145.

10. Кабилов М.М., Халимов И.Х. Тепловое инициирование химической реакции в инертной пористой среде. – ДАН РТ, 2013, т.56, №5, с.376-380.
11. Кабилов М.М., Халимов И.Х. Температура инициирования химической реакции в волне фильтрационного горения газов при наличии теплоотвода. – ДАН РТ, 2013, т.56, №6, с.445-449.
12. Ребров С.Г., Голубев В.А., Лозино-Лозинская И.Г., Позвонков Д.М. Лазерное воспламенение топлива кислород-метан в камере сгорания с осевым вводом лазерного излучения. – Труды МАИ, 2018, № 101. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=96338>
13. Ребров С.Г., Голиков А.Н., Голубев В.А. Лазерное воспламенение ракетных топлив в модельной камере сгорания. Труды МАИ, 2012, № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29491>
14. Soller S., Rackemann N., Kroupa G.. Laser Ignition Application to Cryogenic Propellant Rocket Thrust Chambers // Laser ignition conference, 20-23 June 2017, Bucharest, Romania, available at: <https://www.osapublishing.org/viewmedia.cfm?uri=LIC-2017-LFA4.3&seq=0>
15. Lacaze, G, Cuenot, B., Poinot, T. and Oschwald, M. Large eddy simulation of laser ignition and compressible reacting flow in a rocket-like configuration // Combustion and Flame, 2009, no. 156, pp. 1166-1180.
16. Manfletti C., Oschwald M., Sender J. Theoretical and Experimental Discourse on Laser Ignition in Liquid Rocket Engines // The 27th International Symposium on Space Technology and Science, 05-12 July 2009, Tsukuba, Japan, available at: <https://elib.dlr.de/59666/1/manfletti-2009-ists.pdf>
17. Börner M. Laser ignition of a multi-injector liquid rocket engine // Space Propulsion Conference 2014, SPC2014-2969567, 19th to 22nd Mai, 2014, Cologne, URL: <https://www.eucass.eu/doi/EUCASS2017-049.pdf>

**М.М.Қобиров**

## АЗ ГАРМӢ ОТАШГИРИИ ОМЕХТАИ ГАЗҶО ДАР МУҶИТИ КОВОКИ ИНЕРТӢ

*Донишгоҳи (Славянии) Россия ва Тоҷикистон*

Дар мақола аз гармӣ оташгирии омехтаи газҳо дар муҷити ковоки инертӣ таҳлил карда мешавад. Ҳалли тахминии масъала ёфта шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** мавҷ, сӯзиш, омехта, суръат, оташгирӣ, модел, муҷити ковок.

**M.M.Kabilov**

## THERMAL IGNITION OF A MIXTURE OF GAS IN AN INERT POROUS MEDIUM

*Russian-Tajik Slavonic University*

A two-temperature model of thermal ignition of a mixture of gases in an inert porous medium is investigated in the adiabatic formulation. An approximate solution of the problem is obtained.

**Key words:** wave, combustion, mixture, velocity, ignition, model, porous medium.

УДК 523.6

Х.Г.Асоев

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ АБСОЛЮТНОЙ ЯРКОСТИ КОМЕТ ОТ АКТИВНОСТИ СОЛНЦА

*Институт астрофизики НАН Таджикистана**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Г.И.Кохировой 14.03.2022 г.)*

В статье рассмотрена возможная связь активности Солнца с абсолютной яркостью комет семейств Сатурна и Юпитера. Выявлена зависимость блеска некоторых комет от активности Солнца. Показано, что для комет семейства Юпитера эта зависимость сильнее, чем для комет семейства Сатурна. Это связано с недостатком наблюдательных данных по кометам семейства Сатурна из-за более редких сближений с Солнцем по сравнению с кометами семейства Юпитера. Редкие наблюдения не позволяют выполнить полновесный анализ.

**Ключевые слова:** комета, фотометрический параметр, абсолютная яркость, солнечная активность, корреляция.

Кометы – это самые активные объекты в Солнечной системе. В настоящее время изучение комет стало очень актуальной проблемой, так как их исследование позволяет выяснить прошлое и настоящее состояния Солнечной системы.

Одними из основных характеристик активности комет являются фотометрические параметры. К ним относятся абсолютная яркость  $H_0$  и параметр  $p$ , характеризующий скорость возрастания яркости с приближением кометы к Солнцу [1]. Отметим, что эти величины являются постоянными для определенного ряда наблюдений. Абсолютный блеск кометы на момент открытия принято обозначать  $H_{10}$ . В результате изучения короткопериодических комет установлено, что их абсолютная звездная величина со временем должна уменьшаться [2]. В то же время, в результате изучения эволюции фотометрических параметров  $H_{10}$  и  $p$  короткопериодических комет выявлено, что они могут изменяться по-разному при каждом прохождении комет через точку перигелия [3]. Причинами увеличения или уменьшения фотометрических параметров комет при каждом возвращении могут быть активность Солнца, результат деления ядра кометы, разрастание тугоплавкой коры вокруг ядра кометы и др.

Почти все кометы поступают во внутренний регион Солнечной системы из пояса Койпера и со временем под воздействием гравитационных возмущений планет-гигантов (особенно Юпитера и Сатурна) переходят в группу короткопериодических комет. Большое разнообразие известных короткопериодических комет обусловило формирование целого ряда семейств. Приведем определение семейств, рассмотренных в данной работе. Семейство комет Юпитера образуют короткопериодические кометы с периодом обращения менее 15 лет и афелийными расстояниями орбит близкими к афелийному расстоянию Юпитера – 5.2 а.е. В семейство Сатурна входят кометы с периодом от 13 до

**Адрес для корреспонденции:** Асоев Хусейн Гиёсович. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бухоро, 22, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: asoiev85@mail.ru

20 лет и афелийными расстояниями орбит как у Сатурна – 10 а.е. [4]. После того, как кометы стали членами одного или другого семейства планет-гигантов, в течение 100 оборотов вокруг Солнца они постепенно превращаются в астероидоподобные тела [5]. Это означает, что поверхность их ядра покрывается темной тугоплавкой корой, которая может значительно уменьшить активность кометы при приближении к Солнцу или даже прекратить активность.

В работах [6,7] нами была выявлена сильная зависимость абсолютной яркости кометы семейства Сатурна 8P от активности Солнца, однако для трех других комет этого же семейства 28P/, 53P/ и 92P/ такая связь установлена в более слабой степени. Целью данной работы является продолжение исследования зависимости абсолютного блеска  $H_0$  комет от активности Солнца. Для исследования выбраны 8 комет семейства Сатурна и для сравнительного анализа 8 комет семейства Юпитера. Наименования комет двух семейств приведены в табл.1 и 2, соответственно, где также даны перигелийное расстояние орбит  $q$ , наклон плоскости орбит к плоскости эклиптики  $i$ , абсолютная яркость  $H_{10}$  комет на момент открытия и количество имеющихся наблюдений кометы  $N$ . Приведенные в табл. 1 величины  $q$ ,  $i$ ,  $H_{10}$  взяты из работы [8]. В табл.2 данные для комет 2P, 4P, 9P, и 10P взяты из работы [9], величины  $H_{10}$  для комет 19P, 43P и 48P вычислены нами по формуле

$$H_{10} = m - 10lgr - 5lg\Delta,$$

где  $r$  и  $\Delta$ -геоцентрическое и гелиоцентрическое расстояния кометы в момент наблюдения в а.е.,  $m$  – оценка видимого блеска кометы в звездных величинах.

Поскольку на момент открытия имелся большой ряд наблюдений, мы вычислили ряд величин  $H_{10}$  и методом наименьших квадратов определили  $H_{10}$ , которая и приведена в табл.1. Значения  $i$  и  $q$  для комет 19P, 43P и 48P взяты из [10].

Таблица 1

## Кометы семейства Сатурна

№	Кометы	$q$ (а.е.)	$i$ (град.)	$H_{10}$ (зв.вел.)	$N$	$r$
1	8P/Туттля	1.02	54.5	7.7	12	0.92±0.04
2	28P/Неуймин 1	1.55	14.1	10.3	6	0.23±0.38
3	53P/Ван Бисбрук	2.40	6.60	9.0	6	0.55±0.28
4	63P/Вилд 1	1.96	19.9	10.4	4	0.57±0.16
5	66P/ Дю Туа	1.28	18.6	11.7	4	0.29±0.23
6	90P/ Герелс 1	2.98	9.61	9.4	4	0.33±0.44
7	92P/ Сангин	1.80	18.7	13.1	4	0.50±0.19
8	101P/ Черных	2.34	5.00	7.4	3	0.50±0.43

Таблица 2

## Кометы семейства Юпитера

№	Кометы	$q$ (а.е.)	$i$ (град.)	$H_{10}$ (зв.вел.)	$N$	$r$
1	2P/Энке	0.341	12.00	9.0	52	0.86±0.03
2	4P/Фая	1.610	14.50	4.2	22	0.93±0.01
3	7P/Понс – Виннеке	1.254	15.60	8.8	19	0.83±0.07

4	9P/Темпель 1	1.497	3.40	8.4	7	0.90±0.10
5	10P/Темпель 2	1.424	12.02	8.5	17	0.77±0.10
6	19P/Боррелли	1.320	23.77	9.2	15	0.86±0.11
7	43P/Вольф – Харрингтон	1.615	15.96	11.4	10	0.96±0.05
8	48P/Джонсон	2.196	10.00	9.6	10	0.94±0.07

Для выявления степени зависимости абсолютной яркости комет от активности Солнца нами вычислен коэффициент корреляции между ними. Для характеристики солнечной активности использовались величины чисел Вольфа  $W$  для каждой кометы в моменты ее прохождения перигелия орбиты [11]. Коэффициент корреляции  $r$  приведен в последних столбцах табл. 1 и 2. Для комет, приведенных в табл. 1 и комет 19P, 43P и 48P из табл. 2 коэффициент  $r$  вычислен нами по формуле:

$$r = \frac{N_{mW}N - N_W N_m}{\sqrt{\overline{N_W} \overline{N_{\bar{W}}} \overline{N_m} \overline{N_{\bar{m}}}}}, \tag{1}$$

где для удобства абсолютная яркость  $H_{10}$  обозначена через  $m$  и

$N_{mW}$  – число интервалов с максимумами  $W$  и  $m$ ,

$N_W$  – число интервалов с максимумами  $W$ , но без максимума  $m$ ,

$N_m$  – число интервалов без максимума  $W$ , но с максимумом  $m$ ,

$N$  – число интервалов без максимумов,

$\overline{N_{\bar{W}}}$  – число интервалов без максимумов  $W$ ,

$\overline{N_W}$  – число интервалов с максимумами  $W$ ,

$\overline{N_{\bar{m}}}$  – число интервалов без максимумов  $m$ ,

$\gamma$  – общее число интервалов.

Для комет 2P, 4P, 7P, 9P и 10P в табл. 2, коэффициент  $r$  взят из [9].

Как видно из табл. 1-2, коэффициент корреляции активности Солнца с абсолютным блеском комет семейства Сатурна имеет относительно малые значения в интервале  $0.23 \leq r \leq 0.57$ , за исключением кометы 8P/Туттля, для которой он имеет величину  $r=0.92\pm0.04$ . Тогда как коэффициент корреляции для комет семейства Юпитера заключен в диапазоне  $0.77 \leq r \leq 0.98$ , то есть стремится к единице. Можно заключить, что коэффициенты корреляции комет двух семейств значительно различаются. Корреляция абсолютной яркости комет семейства Юпитера от активности Солнца больше, чем у комет семейства Сатурна. Это также наглядно демонстрируют рис. 1 и 2, на которых в графическом виде представлены коэффициенты корреляции комет этих семейств.



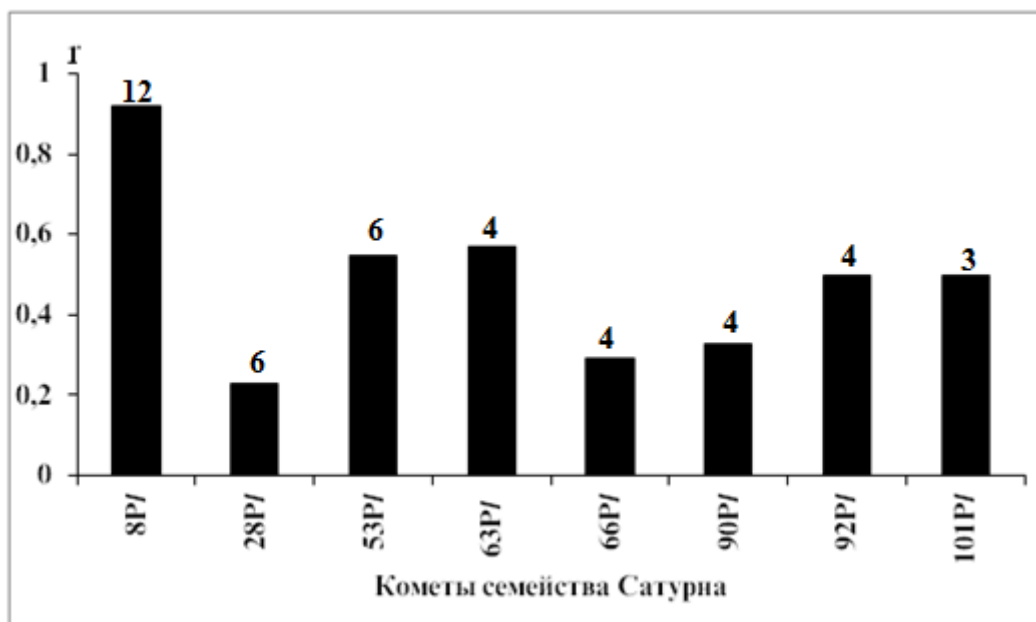


Рис. 1. Коэффициент корреляции абсолютной яркости комет семейства Сатурна и активности Солнца.

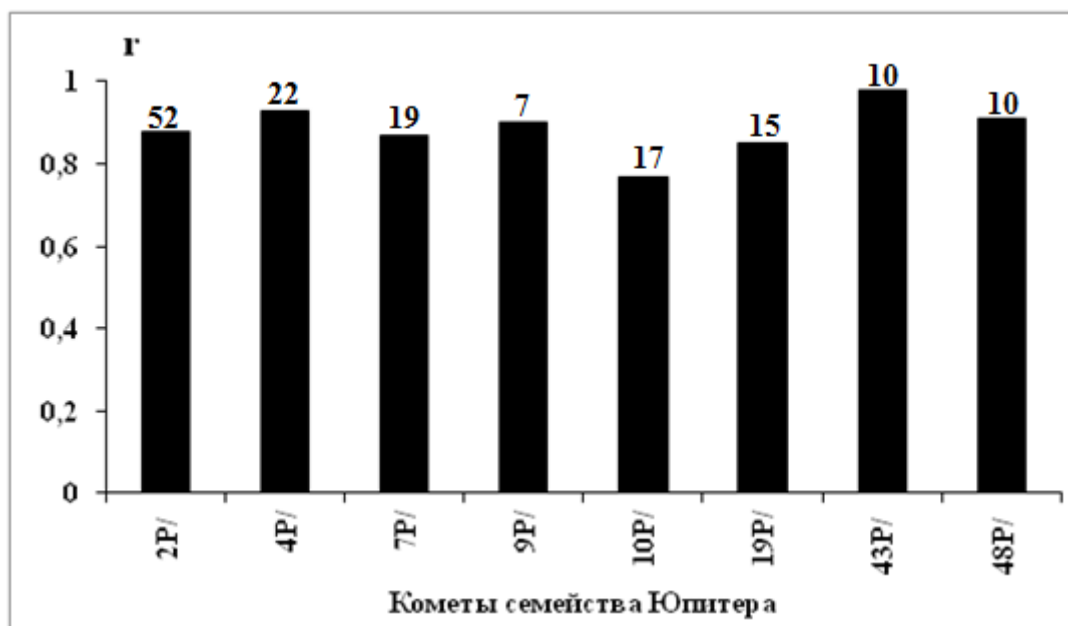


Рис. 2. Коэффициент корреляции абсолютной яркости комет семейства Юпитера и активности Солнца.

Одна из основных причин этого обусловлена количеством обращения комет вокруг Солнца с момента их открытия. Чем больше число оборотов и чаще кометы подходят к Солнцу, тем больше благоприятных периодов для их наблюдений. Из-за того, что период обращения комет семейства Юпитера вокруг Солнца (3.3–20 лет) короче, чем у комет семейства Сатурна (11–30 лет), они имеют относительно большее число оборотов. Следовательно, для комет семейства Юпитера накоплен гораздо больший наблюдательный материал, позволяющий определять их абсолютный блеск и исследовать его зависимость от солнечной активности, что наглядно демонстрирует величина  $N$  в табл. 2. Этим объясняется их большой коэффициент корреляции. Меньшие величины коэффициента корреляции для комет семейства Сатурна объясняются, в первую очередь, более редкими, по сравнению с

кометами семейства Юпитера, сближениями к Солнцу и меньшими возможностями наблюдать их. Об этом свидетельствует значение  $N$  в табл. 1. Нехватка наблюдательного материала не дает возможности исследовать зависимость их блеска от солнечной активности в полном объеме.

Рассмотрим более детально исследование зависимости активности Солнца и абсолютной яркости кометы семейства Юпитера 4P/Фая и кометы семейства Сатурна 66P/Дю Туа.

Короткопериодическая комета 4P/Фая (4P/Фае) открыта 22 ноября 1843 года Эрве Фаем в Париже. Во время открытия комета имела блеск около  $5^{m.6}$  (звездных величин) и обладала небольшим хвостом. Период обращения кометы вокруг Солнца равен 7.56 годам [12], с момента открытия и до 2014 г. комета совершила 22 оборота вокруг Солнца и наблюдалась в каждом из этих 22 прохождений перигелия. Со времени открытия абсолютный блеск кометы в среднем изменился от  $4.2^m$  до  $9.2^m$ .

В табл. 3 для кометы 4P/Фая приведены: дата прохождения перигелия гг/мм/дд, период обращения вокруг Солнца  $P$ , вычисленный на момент прохождения перигелия, перигелийное расстояние  $q$ , наклон плоскости орбиты к плоскости эклиптики  $i$ , эксцентриситет  $e$  [13], абсолютная яркость  $H_{10}$  [14] и среднегодовые значения числа Вольфа ( $W$ ), характеризующие активность Солнца, соответствующие году прохождения перигелия [11].

Таблица 3

Основные параметры кометы 4P/Фая и среднегодовые значения числа Вольфа

№	Дата прохождения перигелия (Т)	$P$ (лет)	$q$ (а.е.)	$i$ (град.)	$e$	$H_{10}$ (зв.вел.)	$W$
1	1843/10/17	7.44	1.692	11.35	0.555	4.2	11
2	1851.0 4.02	7.46	1.699	11.34	0.554	5.5	64
3	1858.09.13	7.45	1.694	11.35	0.555	8.1	55
4	1866.02.14	7.41	1.682	11.35	0.557	6.4	16
5	1873.07.18	7.41	1.682	11.35	0.557	7.4	66
6	1881.01.23	7.56	1.738	11.31	0.548	7.4	45
7	1888.08.20	7.59	1.747	11.29	0.547	7.4	7
8	1896.03.19	7.56	1.736	11.31	0.548	7.8	42
9	1910.11.02	7.42	1.655	10.56	0.564	9.1	19
10	1925.08.07	7.32	1.618	10.58	0.570	10.9	44
11	1932.12.16	7.32	1.619	10.57	0.570	9.5	11
12	1940.04. 24	7.42	1.653	10.54	0.565	10.7	68
13	1947.09.28	7.44	1.663	10.52	0.563	11.2	151
14	1955.03.04	7.41	1.651	10.54	0.565	11.1	38
15	1962.05.14	7.38	1.608	9.08	0.575	12.7	37
16	1969.10.07	7.41	1.616	9.07	0.574	10.8	105
17	1977.02. 27	7.39	1.609	9.08	0.575	10.4	27
18	1984.07.10	7.34	1.593	9.08	0.578	9.3	46
19	1991.11.16	7.34	1.593	9.08	0.578	9.6	146
20	1999.05. 6	7.52	1.657	9.04	0.568	11.2	93
21	2006.11.15	7.55	1.667	9.03	0.566	11.8	15
22	2014.05.29	7.52	1.655	9.04	0.568	9.9	75

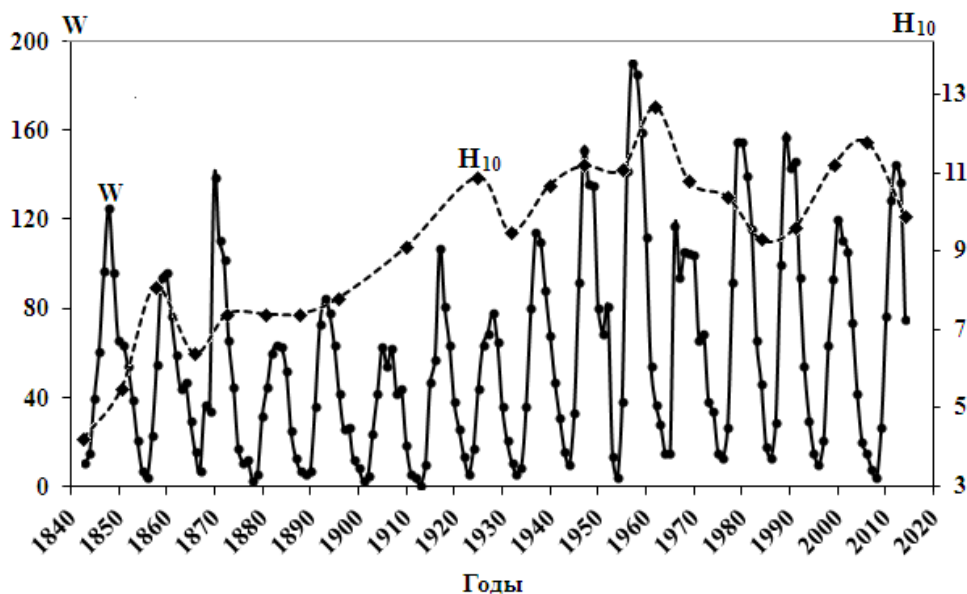


Рис. 3. Вариация абсолютной яркости кометы 4P/Фая и чисел Вольфа со временем.

На основе данных табл. 3 построены зависимости абсолютной яркости кометы 4P/Фая  $H_{10}$  и чисел Вольфа  $W$  от времени, приведенные на рис. 3. Как видно, между абсолютной яркостью  $H_{10}$  кометы 4P/Фая и числом Вольфа  $W$  есть явная корреляция. Вычислим коэффициент корреляции по соотношению (1) и дисперсию корреляции по уравнению (2):

$$r = \frac{5 \cdot 18 - 4 \cdot 6}{\sqrt{8 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 6}} = \frac{66}{\sqrt{4608}} = \frac{66}{68} \approx 0.97,$$

$$\sigma = \frac{1 - r^2}{\sqrt{\gamma}} = \frac{1 - (0.97)^2}{\sqrt{22}} = 0.012.$$

Величины использованных данных и результат вычислений приведены в табл.4.

Таблица 4

Коэффициент корреляции блеска кометы 4P/Фая с солнечной активностью

$N_{mw}$	$N_w$	$\bar{N}_w$	$N_m$	$N$	$\bar{N}_w$	$\bar{N}_m$	$\bar{N}_m$	$\gamma$	$r$	$\sigma$
5	4	8	6	18	12	8	6	22	0.97	0.012

Коэффициент корреляции абсолютной яркости кометы  $H_{10}$  и чисел Вольфа  $W$  составил 0.97. Это означает, что характер изменения яркости кометы 4P/Фая почти на 100% совпадает с характером солнечной активности. Повышение активности Солнца обусловило усиление абсолютного блеска кометы и наоборот, снижение солнечной активности приводит к ослаблению блеска кометы.

Короткопериодическая комета семейства Сатурна 66P/Дю Туа открыта Даниэлем дю Туа 16 мая 1944 года в обсерватории Бойдена в Южной Африке, ее яркость в тот момент была  $10^m$ . Отметим, что в том же году, с 16 сентября по 22 октября, комету наблюдал также Ван Бисбрук и она имела блеск  $17.5 - 18^m$ . Период обращения кометы вокруг Солнца равен 14.8 лет. Со времени открытия и до

2018 года комета совершила всего лишь шесть оборотов вокруг Солнца, два из которых не наблюдались (1959 г. и 1988 г.) [15].

В табл. 5 для кометы 66P/Дю Туа приведены: дата прохождения перигелия  $T$ , период обращения вокруг Солнца  $P$ , вычисленный на момент прохождения перигелия, перигелийное расстояние  $q$ , наклон плоскости орбиты к плоскости эклиптики  $i$ , эксцентриситет  $e$  [13], абсолютная яркость  $H_{10}$  и среднегодовые значения числа Вольфа ( $W$ ), характеризующие активность Солнца, соответствующие году прохождения перигелия [11].

Таблица 5

Основные параметры кометы 66P/Дю Туа и среднегодовые значения числа Вольфа

№	Дата прохождения перигелия (Т)	P (лет)	q (а.е.)	i (град.)	e	H <sub>10</sub> (зв.вел.)	W
1	1944.06. 17	14.80	1.276	18.75	0.787	11.7	10
2	1974.04. 01	15.00	1.294	18.70	0.786	16.5	34
3	2003.08. 27	14.70	1.274	18.70	0.787	12.0	74
4	2018.05. 19	14.89	1.290	18.67	0.786	13.0	4

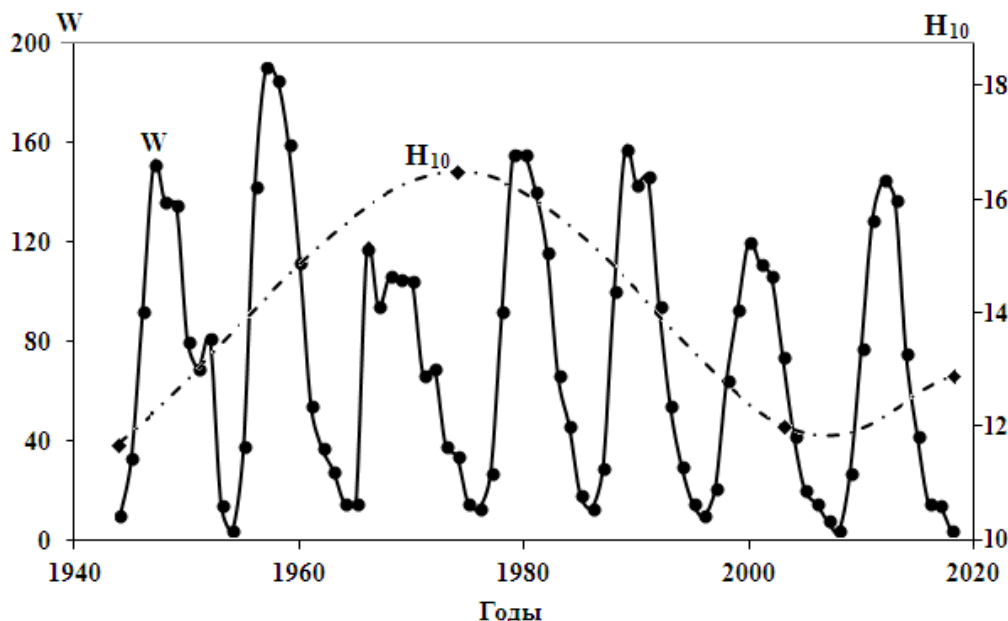


Рис. 4. Вариация абсолютной яркости кометы 66P/Дю Туа и чисел Вольфа со временем.

С использованием данных табл. 4 построены графики зависимости абсолютной яркости кометы 66P/Дю Туа и чисел Вольфа от времени (рис.4). Из рис.4 явная корреляция абсолютной яркости и чисел Вольфа не очевидна, поэтому необходимо вычислить коэффициент  $r$ . Данные для вычисления коэффициента корреляции кометы 66P/Дю Туа представлены в табл. 6. Коэффициент корреляции вычислен по формуле (1). По результатам вычисления коэффициент корреляции  $r$  равен 0.29 и свидетельствует о том, что действительно между  $H_{10}$  и  $W$  нет явной зависимости. Как уже отмечено выше, малое количество наблюдений кометы не позволило установить явную зависимость между  $H_{10}$  и  $W$ . Недостаток наблюдений обусловлен малым числом обращений кометы вокруг Солнца. Из шести оборотов использованы данные лишь для четырех, такая незначительная статистическая выборка не позволила провести более детальный анализ. Можно предположить, что при наличии большего коли-

чества наблюдательных данных зависимость блеска этой кометы, как и других комет семейства Сатурна, от солнечной активности будет выявлена. На это также указывает присутствие среди комет этого семейства кометы 8P (табл. 1), для которой  $r=0.92$ , вычисленный с использованием 12 наблюдений этой кометы у перигелия, указывает на сильную прямую связь блеска кометы с солнечной активностью [6].

Таблица 6

Коэффициент корреляции блеска кометы 66P/Дю Туа с солнечной активностью

$N_{mw}$	$N_w$	$\overline{N}_w$	$N_m$	$N$	$\overline{N}_w$	$\overline{N}_m$	$\overline{N}_m^-$	$\gamma$	$r$	$\sigma$
1	1	1	1	4	3	2	2	4	0.29	0.23

### В ы в о д ы

Исследована зависимость солнечной активности и абсолютного блеска комет семейства Сатурна. Показано, что прямая зависимость имеется, но в меньшей степени, чем для комет семейства Юпитера. Основная причина этого обусловлена меньшим количеством оборотов комет семейства Сатурна вокруг Солнца и, следовательно, меньшим количеством их наблюдений. Недостаток наблюдательных данных не позволяет провести полновесный статический анализ. Для более детального анализа необходимы новые наблюдения комет семейства Сатурна.

Автор выражает благодарность члену-корреспонденту НАН Таджикистана, д.ф.-м.н. Г.И.Кохировой за ценные советы, обсуждение результатов и помощь в подготовке работы.

*Поступило 14.03.2022 г.*

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Добровольский О.В. Кометы. – М.: Наука, 1966, 288 с.
2. Добровольский О.В. Нестационарные процессы в кометах и солнечная активность. – Тр. АН ТаджССР, 1961, т. VIII, 195 с.
3. Всехсвятский С.К. Физические характеристики комет. – М.: Госиздат. физ.–мат. лит., 1958, 571 с.
4. Чурюмов К.И. Кометы и их наблюдение. – М.: Наука, 1980, 160 с.
5. Ибадинов Х.И. Дезинтеграция кометных ядер: Автореф. дисс... д.ф.-м.н. – М.: ИКИ РАН, 1998, 40 с.
6. Ибадинов Х.И., Асоев Х.Г. Эволюция фотометрических параметров короткопериодической кометы 8P/Туттля и солнечная активность. – ДАН РТ, 2016, т. 59, № 11-12, с. 477-482.
7. Асоев Х.Г. Исследование фотометрических параметров комет семейства Сатурна. – Изв. АН РТ. Отд. физ. – мат., хим., геол. и техн. наук, 2019, № 1 (174), с. 96-103.
8. Всехсвятский С.К., Ильчишина Н.И. Физические характеристики комет 1965-1970 гг. – М.: Наука, 1974, 112 с.
9. Гулиев А.С., Деменко А.А., Деменко И.М. Особенности падения блеска короткопериодических комет семейства Юпитера. – Киев: Пробл. косм. физики, 1983, вып. 18, 124 с.
10. <https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/222395>
11. Чижевский А.Л. Земное эхо солнечных бурь. – М.: Мысль, 1976, 367 с.
12. <http://cometography.com/pcomet/004p.html>

13. Marsden B.G., Gareth V.W. Catalogue of cometary orbits 1996 (11 Editions), MPS, Smithsonian. – Astrophysical Observatory, 1996, 110 p.
14. Андриенко Д.А., Карпенко А.В. Физические характеристики комет 1981-1985 гг. – Киев: МП. Феникс, 1993, 269 с.
15. <http://cometography.com/pcomets/066p.html>

Ҳ.Ғ.Асоев

## ТАҲҚИҚИ ВОБАСТАГИИ ҚАДРИ МУТЛАҚИ КОМЕТАҲО БО ХУРҶИ ОҒТОБ

*Институти астрофизикаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола робитаи эҳтимолии фаъолияти Оғтоб бо дурахшонии мутлақи кометаҳои оилаҳои Зуҳал ва Муштарӣ баррасӣ шудааст. Ошкор карда шудааст, ки дурахшонии баъзе кометаҳо ба фаъолияти Оғтоб вобаста аст. Нишон дода шудааст, ки барои кометаҳои оилаи Муштарӣ ин вобастагӣ нисбат ба кометаҳои оилаи Зуҳал мувофиқтар аст. Сабаби ин кам будани маълумоти мушоҳидавӣ дар бораи кометаҳои оилаи Зуҳал ва камтар назик шуданашон ба Оғтоб нисбат ба кометаҳои оилаи Муштарӣ мебошад. Мушоҳидаҳои кам имконият намедиханд, ки таҳлили пурра гузаронида шавад.

**Калимаҳои калидӣ:** *комета, параметри фотометрӣ, қадри мутлақ, коррелясия, хурҷи Оғтоб.*

H.G.Asoev

## INVESTIGATION OF THE DEPENDENCE OF THE ABSOLUTE BRIGHTNESS OF COMETS ON THE SOLAR ACTIVITY

*Institute of Astrophysics, National Academy of Sciences of Tajikistan*

In this article a possible connection between the activity of the Sun and the absolute brightness of comets of the families of Saturn and Jupiter are considered. The dependence of the brightness of some comets on the activity of the Sun has been revealed. It is shown that for comets of the Jupiter family this dependence is stronger than for comets of the Saturn family. This is due to the lack of observational data on comets of the Saturn family due to rarer encounters with the Sun compared to comets of the Jupiter family. Rare observations do not allow a full-fledged analysis.

**Key words:** *comet, photometric parameter, absolute brightness, correlation, solar activity.*

УДК 530.1

А.М.Олимов, М.С.Курбониён\*, Томоюки Ямамото\*\*,

академик НАН Таджикистана Ф.Рахими

**ВОЗДЕЙСТВИЕ ДАВЛЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ЭЛАСТИЧЕСКИЕ  
СВОЙСТВА CsPbX<sub>3</sub> (X = Cl, Br, I)***Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана,**\* Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана,**\*\* Факультет науки и техники Университета Васэда, Токио, Япония*

*В работе представлены результаты исследований зависимости параметров элементарных ячеек, констант упругости, объёмных модулей упругости и других параметров упругости перовскитов CsPbX<sub>3</sub> (X = Cl, Br, I) от величины давления в интервале от 0 до 30 ГПа с шагом в 5 ГПа, в рамках теории функционала плотности. Определено, что для всех структур, величины объёмного модуля сжатия, усреднённой скорости звука, поперечной и продольной скорости звука, а также температуры Дебая повышаются при увеличении давления.*

**Ключевые слова:** *геометрические свойства, теория функционала плотности, длина связи, константы упругости, усреднённая скорость звука, поперечная и продольная скорость звука, модуль сдвига, температура Дебая.*

**В в е д е н и е**

Дальнейшее удовлетворение огромного роста энергопотребления является невозможным лишь за счёт ископаемых источников энергии, так как запасы традиционных энергоресурсов будут истощены. Также при использовании традиционных энергоресурсов происходит загрязнение атмосферы, что ведёт к необратимому изменению климата. По этим и некоторым другим причинам существует большая необходимость в использовании возобновляемых источников энергии (энергии Солнца, энергии ветра и других источников).

Солнце – огромный, возобновляемый и абсолютной бесплатный источник энергии. Наиболее распространённым материалом для преобразования солнечной энергии в электрическую является кремний различных разновидностей [1]. Монокристаллические кремниевые элементы обладают высоким КПД порядка 17-22%, но масштабное применение данного вида материала ограничивается дорогостоящей технологией получения, где необходимо использование чистого кремния, полученного по методу Чохральского. Технология получения поликристаллических кремниевых элементов сравнительно проще, чем монокристаллических элементов, что требует меньших энергозатрат. Однако показатель КПД таких материалов меньше, чем у монокристаллических элементов (порядка 12-18%). Реже применяются солнечные элементы на основе аморфного кремния, так как показатель КПД таких материалов составляет меньше 8-10%. Также возможно применение солнечных элементов

---

*Адрес для корреспонденции:* Олимов Анушервон Меликмуродович, Курбониён Мехрдод Субхони. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАНТ. E-mail: anushervon.olimov@mail.ru; mehrdodq@gmail.com.

на основе арсенида галлия и индия, эффективность которых приближается к 50%, но их применение ограничено из-за высокой стоимости [2].

В начале XXI века быстрое развитие получили солнечные элементы на основе перовскитов. В тот момент показатель КПД таких материалов не превышал 3-4%, однако спустя несколько лет показатель КПД солнечных элементов на основе перовскитов составлял уже около 55%. Данный вид материалов обладает огромным преимуществом по сравнению с кремниевыми солнечными элементами. Например, перовскитные солнечные элементы при толщине всего лишь в 1 микрон поглощают столько же света, сколько поглощают кремниевые элементы толщиной в 180 микрон. Также солнечные элементы на основе перовскитов имеют в несколько раз меньшую стоимость за 1 кВт, чем кремниевые фотоэлементы.

В дальнейшем перовскитные элементы показали отличные оптические свойства, высокую эффективность и имели низкую стоимость обработки, что привело к бурному развитию перовскитных солнечных элементов, показатель КПД которых был повышен с 3.8% до 55%. Однако данный вид перовскитных солнечных элементов имеет низкую стабильность из-за неустойчивости органических катионов к теплу, влажности и ультрафиолетовому излучению, что ограничивает масштабное применение данного вида солнечных элементов. На данный момент альтернативными светособирающими материалами считаются материалы с общей формулой  $CsPbX_3$  ( $X = Cl, Br, I$ , или их сочетания), которые продемонстрировали хорошую способность противостоять влаге и теплу.

В данной работе представлены результаты исследования методом теории функционала плотности зависимости параметров элементарной ячейки, их объёмов, констант упругости перовскитных элементов с общей формулой  $CsPbX_3$  ( $X = Cl, Br, I$ ) от изменения давления в интервале от 0 до 30 ГПа с шагом в 5 ГПа. Также предоставлены результаты исследования зависимости средней скорости упругих волн, скорости поперечных и продольных упругих волн и температуры Дебая от давления в том же интервале и с тем же шагом.

### **Геометрическая структура и метод расчета**

Минерал перовскит с химической формулой  $CaTiO_3$  впервые был обнаружен в Уральских горах в 1839 году. В этой стандартной структуре практически любой из атомов может быть заменён на сходный по свойствам. Все рассмотренные материалы имеют кубическую структуру с пространственной группой  $Rm\bar{3}m$  (#221) [3]. На рис. 1 приведена структура перовскита  $CsPbI_3$ , где видно, что катионы Cs расположены между октаэдрами  $PbI_6$ , соединёнными углом при вершине.



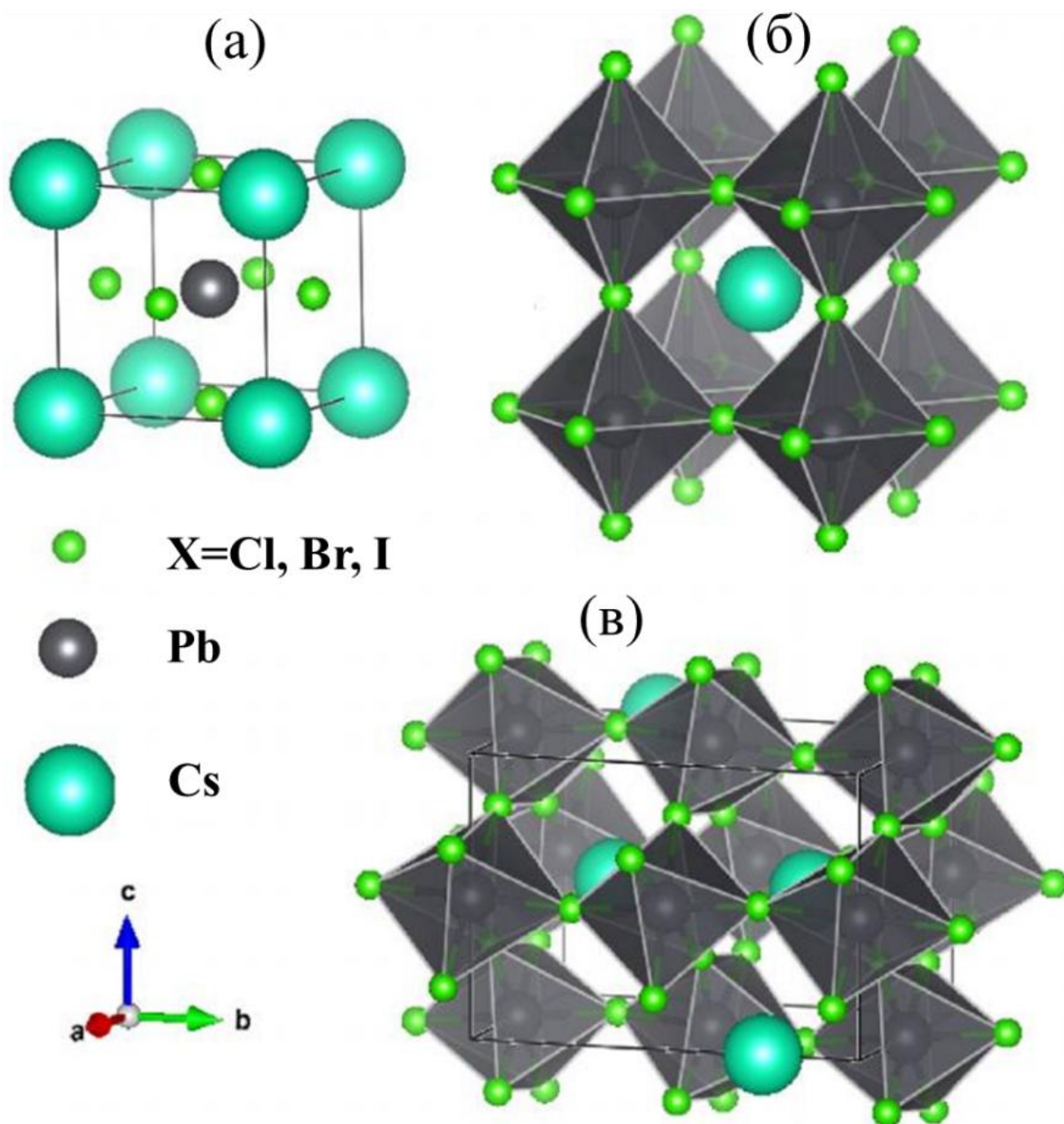


Рис. 1. Структурный вид кубического (а), тетрагонального (б) и орторомбического (в)  $\text{CsPbX}_3$  ( $X = \text{Cl, Br, I}$ ).

Данные материалы могут менять структуру в зависимости от температуры. Диапазон температур фазового перехода зависит от природы присоединённого атома галогена. Из работы Моллера [4], где исследованы структурные свойства  $\text{CsPbX}_3$  ( $X = \text{Cl, Br, I}$ ) с помощью рентгеновской дифракции известно, что эти соединения существуют в трех различных фазах. Перовскит  $\text{CsPbCl}_3$  может существовать в орторомбической структуре при температурах ниже 315 К, в тетрагональной структуре в диапазоне температур от 315 К до 320 К и в кубической структуре при температурах выше 320 К. Перовскит  $\text{CsPbBr}_3$  может существовать при комнатной температуре, находится в орторомбической фазе и при температуре 373 К переходит в тетрагональную фазу, а при 403 К в кубическую. Перовскит  $\text{CsPbI}_3$  при комнатной температуре находится в орторомбической фазе и при нагревании переходит в тетрагональную фазу, однако чёткого температурного интервала в литературе нет. Известно,

что при температуре 634 К перовскит CsPbI<sub>3</sub> переходит из тетрагональной фазы в кубическую. В работе Гези и др. [5] сообщается, что у перовскитов CsPbCl<sub>3</sub> и CsPbBr<sub>3</sub> наблюдается фазовый переход под давлением.

Геометрические и упругие свойства перовскитов CsPbX<sub>3</sub> (X = Cl, Br, I) изучались при помощи теории функционала плотности (DFT).

### Расчёт параметров упругости

По Фогхту (Voigt), упругие константы находятся усреднением тензора упругих констант монокристалла по всем его ориентациям, что даёт следующие выражения для модуля объёмной упругости и модуля сдвига [6]:

$$B_V = \frac{1}{9} [(C_{11} + C_{22} + C_{33}) + 2(C_{12} + C_{23} + C_{31})],$$

$$G_V = \frac{1}{15} [(C_{11} + C_{22} + C_{33}) - (C_{12} + C_{23} + C_{31}) + (C_{44} + C_{55} + C_{66})],$$

где  $C_{ij}$  – матрица упругих констант. В данном случае для кубической структуры  $C_{11} = C_{22} = C_{33}$ ,  $C_{12} = C_{31} = C_{23}$ ,  $C_{44} = C_{55} = C_{66}$ .

В приближении Ройса (Reuss) значения модуля объёмной упругости и модуля сдвига определяются следующими выражениями:

$$\frac{1}{B_R} = (S_{11} + S_{22} + S_{33}) + 2(S_{12} + S_{23} + S_{31}),$$

$$\frac{15}{G_R} = 4(S_{11} + S_{22} + S_{33}) - 4(S_{12} + S_{23} + S_{31}) + 3(S_{44} + S_{55} + S_{66}),$$

где  $S_{ij}$  – матрица, обратная к матрице упругих констант  $C_{ij}$ .

Хилл (Hill) показал, что приближения Фогхта и Ройса являются предельными возможными значениями для реальных модулей поликристалла [7]. Он также предложил использовать среднеарифметическое от значений в приближении Фогхта и Ройса, то есть:

$$B = \frac{B_V + B_R}{2}, \quad G = \frac{G_V + G_R}{2}.$$

### Результаты и обсуждения

Результаты вычисления параметров элементарных ячеек, их объёмов и величин модулей объёмной упругости для структур CsPbX<sub>3</sub> (X = I, Br, Cl) в интервале давлений от 0 до 30 ГПа с шагом в 5 ГПа представлены в таблице.

Таблица

Значения параметров элементарных ячеек и параметров упругости для структур CsPbX<sub>3</sub> (X = I, Br, Cl) при различных значениях давления

	P (ГПа)	a (Å)	b (Å)	c (Å)	V (Å <sup>3</sup> )	C <sub>11</sub> (ГПа)	C <sub>12</sub> (ГПа)	C <sub>44</sub> (ГПа)	B (ГПа)
CsPbI <sub>3</sub>	0	6.385	6.385	6.385	260.301	35.60	5.17	3.93	15.32
	5	5.966	5.966	5.966	212.397	79.78	7.09	4.25	31.32
	10	5.752	5.752	5.752	190.264	118.39	8.88	4.26	45.38
	15	5.604	5.604	5.604	176.008	154.24	10.92	4.26	58.69
	20	5.492	5.492	5.492	165.641	188.70	13.46	4.28	71.88
	25	5.401	5.401	5.401	157.556	221.20	16.20	4.21	84.53
	30	5.325	5.325	5.325	150.982	252.25	19.05	4.05	96.79
CsPbBr <sub>3</sub>	0	5.986	5.986	5.986	214.535	44.25	7.10	4.42	19.48
	5	5.653	5.653	5.653	180.634	88.44	10.21	4.43	36.29
	10	5.468	5.468	5.468	163.467	126.89	12.14	3.61	50.39
	15	5.338	5.338	5.338	152.061	162.66	14.37	2.91	63.80
	20	5.237	5.237	5.237	143.609	195.04	16.33	1.86	75.90
	25	5.155	5.155	5.155	136.952	227.55	18.88	0.68	88.44
	30	5.085	5.085	5.085	131.480	258.87	21.69	-0.42	100.75
CsPbCl <sub>3</sub>	0	5.720	5.720	5.720	187.148	51.25	8.43	6.65	22.70
	5	5.436	5.436	5.436	160.640	95.68	11.79	5.65	39.75
	10	5.271	5.271	5.271	146.447	134.09	14.09	4.32	54.09
	15	5.153	5.153	5.153	136.794	169.45	15.61	3.18	66.89
	20	5.060	5.060	5.060	129.537	202.07	17.25	1.78	78.86
	25	4.983	4.983	4.983	123.743	234.51	19.69	0.24	91.30
	30	4.918	4.918	4.918	118.947	263.96	22.07	-1.45	102.70

По рассчитанным значениям констант упругости и модуля объёмной упругости была построена зависимость этих величин от величины давления, представленная на рис. 2.

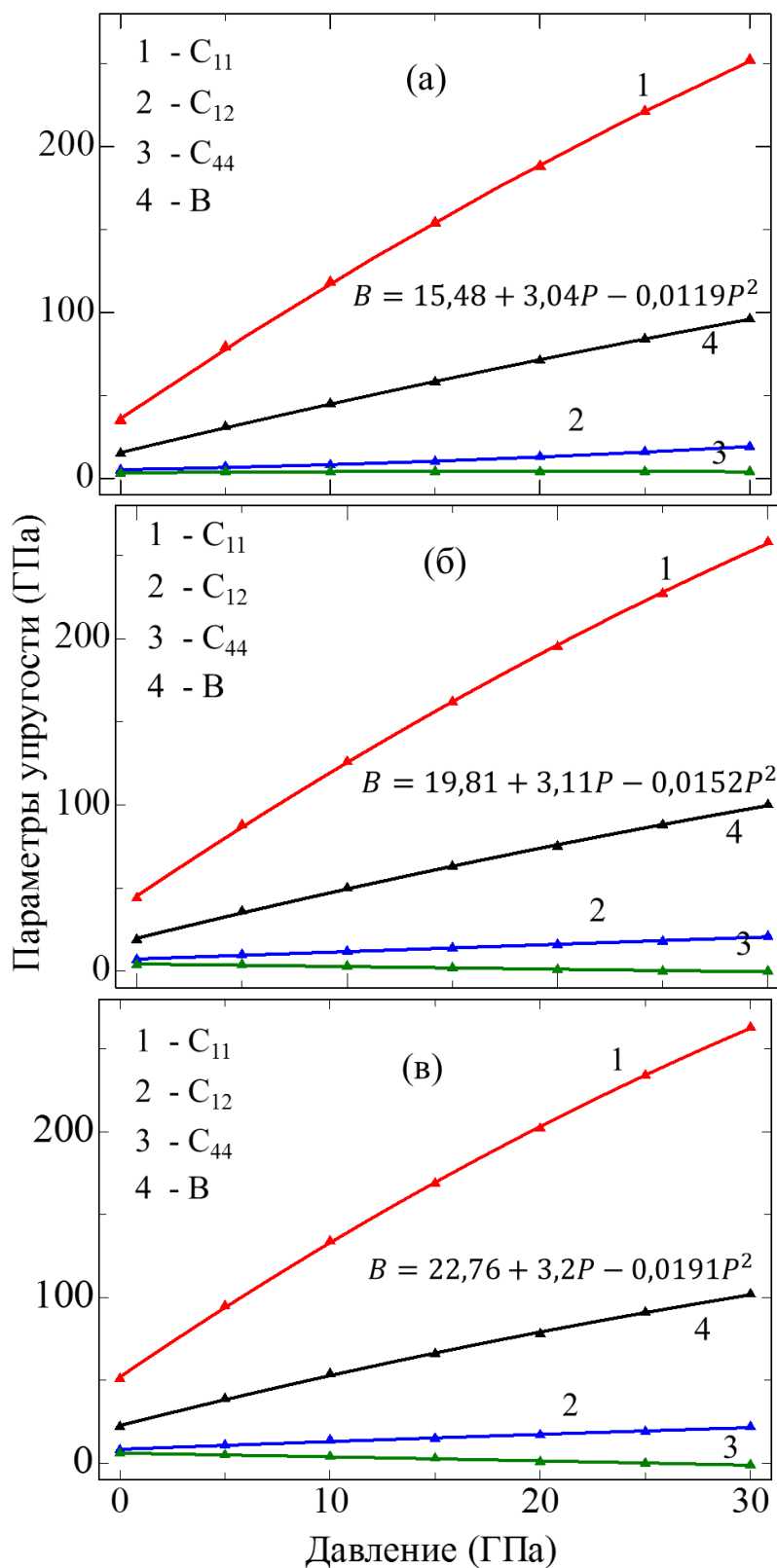


Рис. 2. Зависимость параметров упругости от величины давления для перовскитов  $CsPbI_3$ (а),  $CsPbBr_3$ (б) и  $CsPbCl_3$ (в).

Температура Дебая была рассчитана по усреднённой скорости звука ( $v_m$ ) по следующей формуле:

$$\Theta_D = \frac{h}{k} \left[ \frac{3n}{4\pi} \left( \frac{N_A \rho}{M} \right) \right]^{\frac{1}{3}} v_m,$$

где  $h$  и  $k$  – постоянные Планка и Больцмана соответственно,  $n$  – число атомов в элементарной ячейке [8]. Усреднённая скорость звука определялась по следующему выражению:

$$v_m = \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{2}{v_t^3} + \frac{1}{v_l^3} \right) \right]^{-\frac{1}{3}},$$

где  $v_l$  – продольная скорость звука, а  $v_t$  – поперечная скорость звука, которые связаны с модулем сдвига и модулем объёмного сжатия с помощью уравнений Навье:

$$v_l = \sqrt{\frac{3B+4G}{3\rho}} v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Зависимости температуры Дебая от величины давления для всех трёх структур  $\text{CsPbX}_3$  ( $X = \text{I, Br, Cl}$ ) представлены на рис. 3.

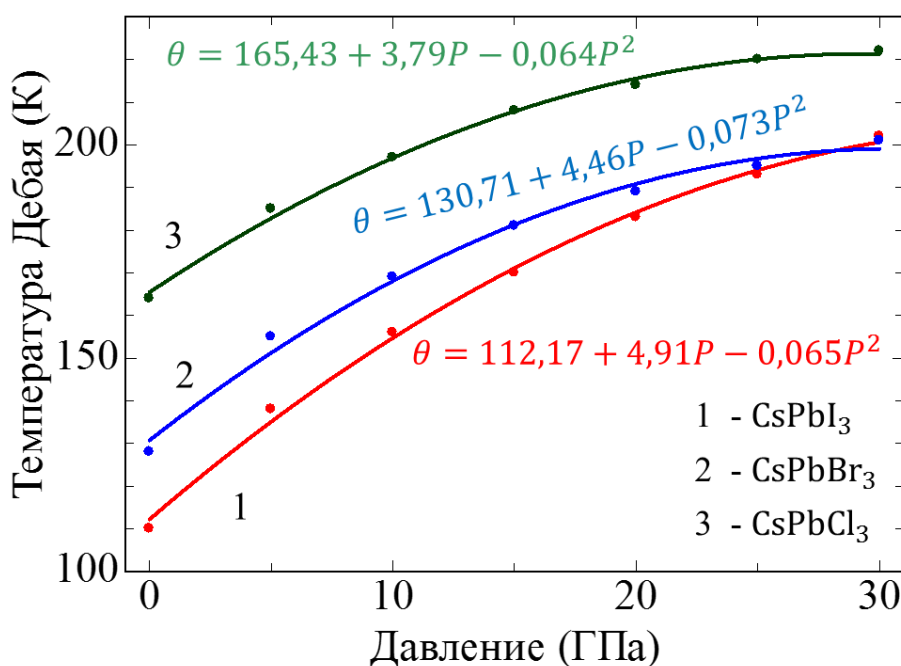


Рис. 3. Зависимости температуры Дебая от давления для структур с кубической сингонией  $\text{CsPbX}_3$  ( $X = \text{I, Br, Cl}$ ).

### З а к л ю ч е н и е

Воздействие давления привело к уменьшению параметров элементарных ячеек и их объёмов. В свою очередь уменьшение объёма элементарной ячейки приводит к равномерному увеличению параметров упругости для всех структур  $\text{CsPbX}_3$  ( $X = \text{I, Br, Cl}$ ). Температура Дебая также увеличивается с равномерным увеличением давления. Из рисунков видно, что температура Дебая для перовскита  $\text{CsPbI}_3$  из-за большего объёма элементарной ячейки увеличивается с большей скоростью по сравнению с перовскитом  $\text{CsPbBr}_3$ , так как под воздействием давления элементарная ячейка  $\text{CsPbI}_3$  сжи-

мається більше і, відповідно, параметри пружності для даної структури збільшуються швидше.

Поступило 19.01.2022 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Афанасьев В.П., Теруков Е.И., Шерченков А.А. Тонкоплённые солнечные элементы на основе кремния. – СПб.: Изд. СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011, с. 9-11.
2. Бессель В.В., Кучеров В.Г., Мингалеева Р.Д. Изучение солнечных фотоэлектрических элементов. – М.: Изд. Центр РГУ нефти и газа (НИУ) им. И.М.Губкина, 2016, с. 6-23.
3. Ahmad M., Rehman G., Ali L., Shafiq M., Iqbal R., Ahmad R., Khan T., Jalali-Asadabadi S., Maqbool M., Ahmad I. Structural, electronic and optical properties of CsPbX<sub>3</sub> (X=Cl, Br, I) for energy storage and hybrid solar cell applications. – Journal of Alloys and Compounds, 2017, v. 705, pp. 828-839.
4. Moller C.K. Crystal structure and photoconductivity of cesium plumbohalides. – Nature, 1958, v. 182, pp. 1436.
5. Gesi K., Ozawa K., Hirotsu S. Effect of hydrostatic pressure on the structural phase transitions in CsPbCl<sub>3</sub> and CsPbBr<sub>3</sub>. – Journal of the Physical Society of Japan, 1975, v. 38, pp. 463-466.
6. Goleorkhtabar R., Pavone P., Spitaler J., Puschnig P., Draxl C. A universal tool for calculating elastic constants from first principles. – Preprint submitted to Computer Physics Communications, 2012, v. 184, pp. 1861-1873.
7. Krasnenko V., Brik M.G. First-principles calculations of hydrostatic pressure effects on the structural, elastic and thermodynamic properties of cubic monocarbides XC (X=Ti, V, Cr, Nb, Mo, Hf). – Solid State Sciences, 2012, v. 14, pp. 1431-1444.
8. Connetable D., Thomas O. First-principles study of the structural, electronic, vibrational, and elastic properties of orthorhombic NiS. – Physical Review B (PRB), 2009, v. 79, 094101.

А.М.Олимов, М.С.Қурбониён\*, Томоюки Ямамото\*\*, Ф.Раҳимӣ

### ТАЪСИРИ ФИШОР БА ХОСИЯТҲОИ ГЕОМЕТРӢ ВА ЭЛАСТИКИИ CsPbX<sub>3</sub> (X = Cl, Br, I)

*Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*\*Маркази рушди инноватсионии илм ва технологияҳои нави*

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

*\*\*Факултети илм ва техникаи Донишгоҳи Васэда, Токио, Япония*

Дар мақола натиҷаҳои омӯзиши вобастагии параметрҳои ячейкаҳои элементарӣ, константаҳои чандирӣ, модулҳои ҳаҷмӣ чандирӣ ва дигар параметрҳои чандирии перовскитҳои CsPbX<sub>3</sub> (X = Cl, Br, I) аз фишор дар диапазони аз 0 то 30 ГПа, бо қадами 5 ГПа дар доираи назарияи функционали зичии оварда шудаанд. Муайян карда шудааст, ки барои ҳама маводҳо қиматҳои модули массивӣ, суръати миёнаи садо, суръати арзӣ ва тулии садо, инчунин ҳарорати Дебай бо афзоиши фишор меафзоянд.

*Калимаҳои калидӣ: хосиятҳои геометрӣ, назарияи функционалии зичӣ, дарозии пайванд, константаҳои чандирӣ, суръати миёнаи садо, суръати арзӣ ва тулии садо, модули гечии, ҳарорати Дебай.*

A.M.Olimov, M.Subhoni\*, Tomoyuki Yamamoto\*\*, F.Rahimi

## **EFFECT OF PRESSURE ON THE GEOMETRIC AND ELASTIC PROPERTIES OF CsPbX<sub>3</sub> (X = Cl, Br, I)**

*Physical-Technical Institute named after S.U.Umarov of the National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*\*Centre for innovative development of science and new technologies*

*of the National Academy of sciences of Tajikistan,*

*\*\*Faculty of Science and Engineering Waseda University, Tokyo, Japan*

In this paper the results of studying the dependence of unit cell parameters, elasticity constants, bulk moduli of elasticity, and other elasticity parameters of CsPbX<sub>3</sub> (X = Cl, Br, I) perovskites on pressure in the range from 0 to 30 GPa with a step of 5 GPa, in the framework of the density functional theory are presents. It is determined that for all structures, the values of the bulk modulus, the average speed of sound, the transverse and longitudinal speeds of sound, as well as the Debye temperature increase with increasing pressure.

**Key words:** *geometric properties, density functional theory, bond length, elasticity constants, average sound speed, transverse and longitudinal sound speeds, shear modulus, Debye temperature.*

УДК 532.7; 532.783

Академик НАН Таджикистана С.Одинаев, Д.А.Абдурасулов\*, А.А.Абдурасулов\*

## МОЛЕКУЛЯРНО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОРИЕНТАЦИОННЫХ УПРУГИХ СВОЙСТВ НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

*Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана,**\*Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими*

На основе обобщённой локально-равновесной статистической функции распределения жидких систем с произвольными формами молекул исследованы ориентационные упругие свойства нематических жидких кристаллов. Получены аналитические выражения для коэффициентов ориентационной упругости при деформациях поперечного изгиба ( $K_{11}$ ), продольного изгиба ( $K_{22}$ ) и кручения ( $K_{33}$ ). В рамках приближения разделимости потенциала межмолекулярного взаимодействия на радиальные и угловые части, и с использованием в качестве этих радиальных и угловых частей потенциалов Леннарда-Джонса и Майера-Заупе, исследована зависимость ориентационных коэффициентов упругости ( $K_{11}$ ,  $K_{22}$ ,  $K_{33}$ ) от температуры, давления и плотности для нематического жидкого кристалла  $n$ -азоксианизола (ПАА).

**Ключевые слова:** статистическая функция распределения, нематические жидкие кристаллы, ориентационная упругость, радиальный и ориентационный порядок.

Многие особенности физических свойств жидких кристаллов объясняются сохранением в них дальнего ориентационного порядка удлинённых молекул и в жидком состоянии [1]. Поэтому при описании равновесных теплофизических и вязкоупругих свойств жидких кристаллов возникает необходимость учёта этого дальнего ориентационного порядка.

В работе [2], на основе метода неполных термодинамических потенциалов [3], было определено выражение для ориентационного параметра порядка нематических жидких кристаллов (НЖК), позволяющее исследовать зависимость коэффициентов ориентационной упругости НЖК от температуры и давления [4].

Метод неравновесных функций распределения (НФР) [5] в работе [6] был обобщён для описания равновесных, локально-равновесных и неравновесных свойств сложных жидких систем, состоящих из жёстких молекул произвольной формы.

В настоящей работе приводятся некоторые результаты применения локально-равновесной функции распределения молекул [6] для описания ориентационных упругих свойств НЖК.

Рассматривается жидкая система, состоящая из  $N$  одинаковых жёстких молекул произвольной формы с массами  $m$  и моментами инерции  $I$ . Положение таких несферических молекул в фазовом



пространстве определяется набором декартовых  $\vec{x}_i(x_i; y_i; z_i)$  и угловых  $\vec{\theta}_i(\theta_i; \psi_i; \varphi_i)$  координат, а также соответствующих им компонентов импульса  $\vec{P}_i(P_{xi}; P_{y_i}; P_{z_i})$ , и момента импульса молекул  $\vec{M}_i(M_{xi}; M_{y_i}; M_{z_i})$ . Полагается, что такие молекулы обладают трансляционными (t) и вращательными (r) степенями свободы, свойства которых можно описать законами классической механики.

Микроскопическая модель жидкой системы задаётся Гамильтонианом

$$H(\vec{x}, \vec{\theta}) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\vec{P}_i^2}{2m} + \frac{\vec{M}_i^\alpha \vec{M}_i^\beta}{2I_{\alpha\beta}} + \sum_{i \neq j=1}^N \Phi_{ij}(\vec{x}_{ij}, \vec{\theta}_i, \vec{\theta}_j) \right), \quad (1)$$

где:  $\Phi_{ij}(\vec{x}_{ij}, \vec{\theta}_i, \vec{\theta}_j)$  - парный, но несферический потенциал взаимодействия молекул жидкости;  $\vec{P}_i^\alpha = p_i^\alpha - m u^\alpha(\vec{x}, t)$  и  $\vec{M}_i^\alpha = M_i^\alpha - I_{\alpha\beta} \omega^\beta(\vec{x}, t)$  - импульс и момент импульса молекул в сопровождающей жидкости системе координат;  $u^\alpha(\vec{x}, t)$  и  $\omega^\beta(\vec{x}, t)$  - макроскопические скорости поступательного и вращательного движения жидкости.

Неравновесное состояние жидкой системы характеризуется набором динамических величин, плотность которых в фазовом пространстве определяются выражением

$$\hat{P}_m(\vec{x}, \vec{\theta}) = \sum_{i=1}^N P_{mi} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \delta(\vec{\theta} - \vec{\theta}_i),$$

где  $P_{mi}$  - микроскопическое (молекулярное) выражение данной динамической величины,  $\delta(x)$  - дельта функции Дирака.

Полагается, что изменения динамических величин  $\hat{P}_m(\vec{x}, \vec{\theta})$  по времени имеют вид законов сохранения типа

$$\frac{\partial \hat{P}_m(\vec{x}, \vec{\theta})}{\partial t} + \frac{\partial \hat{J}_m^\alpha(\vec{x}, \vec{\theta})}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial (a^{\alpha\beta} \hat{J}_{mr}^\beta(\vec{x}, \vec{\theta}))}{\partial \theta^\alpha} = \hat{I}_m(\vec{x}, \vec{\theta}), \quad (2)$$

где  $\hat{J}_m^\alpha(\vec{x}, \vec{\theta})$  и  $\hat{J}_{mr}^\alpha(\vec{x}, \vec{\theta})$  - плотность компонент векторов потока динамических величин  $\hat{P}_m$ , обусловленных трансляционными (t) и вращательными (r) степенями свободы молекул жидкости,  $\hat{I}_m(\vec{x}, \vec{\theta})$  - плотность источников производства  $\hat{P}_m$ . Если  $\hat{P}_m$  - плотность сохраняющихся динамических величин, тогда  $\hat{I}_m(\vec{x}, \vec{\theta}) \equiv 0$ .

Чтобы из уравнения типа (2) получить уравнения обобщённой гидродинамики и исследовать динамические теплофизические свойства жидкостей, необходимо усреднить (2) по соответствующему статистическому ансамблю и определить входящие в (2) потоки и источники. Тогда усреднённое уравнение изменения динамических величин  $P_m(\vec{x}, \vec{\theta}, t)$ , то есть уравнение обобщённой гидродинамики жидкости формально можно написать в виде

$$\frac{\partial P_m(\vec{x}, \vec{\theta}, t)}{\partial t} = \hat{I}_{mR}(\vec{x}, \vec{\theta})_t + A(\vec{x}, \vec{\theta}, t). \tag{3}$$

При описании упругих, не диссипативных свойств жидких кристаллов в рамках локально-равновесного приближения -  $\hat{I}_{mR}(\vec{x}, \vec{\theta})_L = 0$ , и уравнение (3) принимает более простой вид

$$\frac{\partial P_m(\vec{x}, \vec{\theta}, t)}{\partial t} = A(\vec{x}, \vec{\theta}, t). \tag{4}$$

Для описания динамических вязкоупругих свойств жидкостей в качестве динамических величин, характеризующих неравновесные состояния жидкие системы были выбраны плотности компонента тензоров переноса импульса и момента импульса, обусловленного трансляционной (t), вращательной (r) степенями свободы молекул и перекрёстным взаимодействием этих степеней свободы (tr),(rt) в виде

$$\begin{aligned} \hat{P}_t^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}) &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\hat{P}_i^\alpha \hat{P}_i^\beta}{m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N F_{ij}^\alpha X_{ij}^\beta \right) \delta(\vec{x}_i - \vec{x}) \delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}), \\ \hat{P}_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}) &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\hat{M}_i^\alpha \hat{M}_i^\beta}{I_{\beta\gamma}} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N N_{ij}^{\alpha\beta} b_i^{\beta\gamma} \theta_{ij}^\gamma \right) \delta(\vec{x}_i - \vec{x}) \delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\hat{P}_{tr}^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}) = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{P}_i^\alpha \hat{M}_i^\beta}{I_{\beta\gamma}} \delta(\vec{x}_i - \vec{x}) \delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}), \quad \hat{P}_{rt}^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}) = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{P}_i^\alpha \hat{M}_i^\beta}{m} \delta(\vec{x}_i - \vec{x}) \delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}).$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получим систему уравнений временной эволюции динамических величин типа (2). Так как основной целью настоящей работы является исследование ориентационных упругих свойств нематических жидких кристаллов, ограничимся учётом вклада только тензора  $\hat{P}_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta})$ , обусловленного вращательными степенями свободы удлинённых молекул.

Дифференцируя  $\hat{P}_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta})$  в выражении (5) по времени, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \hat{P}_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta})}{\partial t} + I_{\gamma\beta} \hat{J}_r^\gamma(\vec{x}, \vec{\theta}) \frac{d\omega^\alpha(\vec{x}, t)}{dt} + \hat{J}_r^\alpha(\vec{x}, \vec{\theta}) I_{\gamma\beta} \frac{d\omega^\gamma(\vec{x}, t)}{dt} + \frac{\partial \hat{S}_t^{\alpha\beta\gamma}(\vec{x}, \vec{\theta})}{\partial x^\gamma} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (u^\gamma(\vec{x}, t) \hat{P}_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta})) + \frac{\partial}{\partial \theta^\gamma} (a^{\alpha\sigma} \hat{S}_r^{\alpha\beta\sigma}(\vec{x}, \vec{\theta})) + \frac{\partial}{\partial \theta^\gamma} (a^{\gamma\sigma} \omega^\sigma(\vec{x}, t) \hat{P}_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta})) + \\ &+ \hat{P}_r^{\beta\gamma}(\vec{x}, \vec{\theta}) \frac{\partial \omega^\alpha(\vec{x}, t)}{\partial x^\gamma} + \hat{P}_r^{\alpha\gamma} \frac{I_{\beta\sigma}}{m} \frac{\partial \omega^\sigma(\vec{x}, t)}{\partial x^\gamma} = \hat{I}_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}), \end{aligned} \tag{6}$$

где  $I_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}) = \frac{1}{2} (\hat{I}_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}) - \langle \hat{I}_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}) \rangle_L) =$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j=1}^N I_{\alpha\lambda}^{-1} (N_{ij}^\lambda M_{ij}^\beta + M_{ij}^\lambda N_{ij}^\beta) \delta(\vec{x}_i, -\vec{x}) \delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}) - \langle \hat{I}_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}) \rangle_L \right)$$

– соответствующий источник;  $\hat{J}_r^\gamma$  – плотность компонент вектора потока массы (число частиц). Чтобы замкнуть уравнение (6), необходимо представить тензоры третьего ранга в виде [7, с. 67]

$$\hat{S}^{\alpha\beta\gamma} \approx \frac{1}{5} (\hat{s}^\alpha \delta_{\beta\gamma} + \hat{s}^\beta \delta_{\alpha\gamma} + \hat{s}^\gamma \delta_{\alpha\beta}), \quad (7)$$

где  $\hat{s}^\alpha$  – плотность компонент соответствующего вектора потока тепла. Усредняя (6) с учётом (7) по локально-равновесному статистическому ансамблю, переходя от компонент тензора переноса момента импульса, к компонентам тензора напряжения  $\sigma_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}, t)$ , согласно выражению

$$\sigma_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}, t) = -\hat{P}_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta})_L + P_r(\vec{x}, \vec{\theta}, t) \delta^{\alpha\beta},$$

где  $P_r(\vec{x}, \vec{\theta}, t) = \frac{\hat{P}_r^{\alpha\alpha}(\vec{x}, \vec{\theta})_L}{3}$  – давление жидкости при пренебрежении вкладов диффузионных и термоупругих процессов в вязкоупругие свойства жидкости (полагая  $\hat{J}_r^\gamma, \hat{S}_r^\gamma \equiv 0$ ), получим уравнение типа (4)

$$\frac{\partial \sigma_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}, t)}{\partial t} = A_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}, t). \quad (8)$$

В работе [8], в рамках локально-равновесного приближения НФР [6], при более корректном определении, изменении давления по времени, в линейном приближении для  $A_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}, t)$  было определено выражение

$$\begin{aligned} A_r^{\alpha\beta} = & -\frac{P_t}{2c_v} \left( \frac{\partial P_r}{\partial T} \right)_\rho \left\{ \frac{\partial u^\alpha(\vec{x}, t)}{\partial x^\beta} \right\} - P_r \left[ 1 - \frac{\rho}{P_r} \left( \frac{\partial P_r}{\partial \rho} \right)_T - \frac{(e + P_t)}{P_r c_v} \left( \frac{\partial P_r}{\partial T} \right)_\rho \right] \delta^{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial u^\gamma(\vec{x}, t)}{\partial x^\gamma} \right\} - \\ & - P_r \left[ 1 - \frac{\rho}{P_r} \left( \frac{\partial P_r}{\partial \rho} \right)_T - \frac{e}{c_{VP_r}} \left( \frac{\partial P_r}{\partial T} \right)_\rho \right] \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial (a^{\gamma\rho} \omega^\rho(\vec{x}, t))}{\partial \theta^\gamma} - \frac{P_t}{c_v} \left( \frac{\partial P_r}{\partial T} \right)_\rho \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{2} (rot \vec{u})^\gamma, \end{aligned} \quad (9)$$

которое мы называли гидродинамическим источником.

Подставляя (9) в (8), переходя от градиентов скоростей к градиентам пространственного ( $\vec{l}$ ) и ориентационного ( $\vec{\Omega}$ ) смещений ( $\vec{u} = \frac{\partial \vec{l}}{\partial t}, \vec{\omega} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}$ ) и опуская по обе части равенства производную по времени, для тензора  $\sigma_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}, t)$  получим выражение

$$\sigma_r^{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{\theta}, t) = -\frac{P_t}{c_v} \left( \frac{\partial P_r}{\partial T} \right)_\rho \left\{ \frac{\partial S^\alpha(\vec{x}, t)}{\partial x^\beta} \right\} - \frac{P_t}{c_v} \left( \frac{\partial P_r}{\partial T} \right)_\rho \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{2} (rot \vec{s})^\gamma - P_r \left[ \frac{\rho}{P_r} \left( \frac{\partial P_r}{\partial \rho} \right)_T + \right. \quad (10)$$

$$+ \frac{e}{c_{VP_r}} \left( \frac{\partial P_r}{\partial T} \right)_\rho - 1 \left] \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial (a^{\gamma\rho} \Omega^\rho(\vec{x}, t))}{\partial \theta^\gamma} - P_r \left[ \frac{\rho}{P_r} \left( \frac{\partial P_r}{\partial \rho} \right)_T + \frac{(e + P_t)}{P_r c_{VP_r}} \left( \frac{\partial P_r}{\partial T} \right)_\rho - 1 \right] \delta^{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial S^\gamma(\vec{x}, t)}{\partial x^\gamma} \right\}.$$

Согласно закона Гука, коэффициенты, связывающие тензоры напряжения ( $\sigma^{\alpha\beta}$ ) с тензорами деформации  $\left( \frac{\partial l^\alpha(\vec{x}, t)}{\partial x^\beta} \right)$ , называются модулями упругости. Следовательно, в (10) коэффициенты при соответствующих градиентах пространственного и ориентационного смещения, представляют соответствующие модули упругости:

$$K_{11}^r = \frac{P_t}{c_V} \left( \frac{\partial P_r}{\partial T} \right)_\rho; K_{22}^r = \frac{P_t}{2c_V} \left( \frac{\partial P_r}{\partial T} \right)_\rho; K_{33}^r = P_r \left[ \frac{\rho}{P_r} \left( \frac{\partial P_r}{\partial \rho} \right)_T + \frac{e}{c_{VP_r}} \left( \frac{\partial P_r}{\partial T} \right)_\rho - 1 \right]; \tag{11}$$

$$K_V^r = P_r \left[ \frac{\rho}{P_r} \left( \frac{\partial P_r}{\partial \rho} \right)_T + \frac{(e + P_t)}{P_r c_{VP_r}} \left( \frac{\partial P_r}{\partial T} \right)_\rho - 1 \right].$$

В соответствие с принятыми обозначениями, например в [1,10,11], коэффициенты  $K_{11}$ ,  $K_{22}$ ,  $K_{33}$  определяют модули упругости НЖК, соответствующие деформациям поперечного изгиба ( $K_{11}$ ), продольного изгиба ( $K_{22}$ ) и *кручения* ( $K_{33}$ ). Последний модуль упругости  $K_V^r$  обусловлен деформациями типа объёмного сжатия (или расширения) и для несжимаемых жидкостей он равен нулю, поэтому в перечисленных источниках не указан.

Усредняя (1) и (5) по локально-равновесной канонической функции распределения Гиббса для плотности внутренней энергии ( $e$ ) и давления жидкости ( $P$ ), находим:

$$e(T, \rho) = \frac{12\epsilon \tilde{n}\tilde{T}}{\pi\sigma^2 L} + \frac{32\epsilon\tilde{n}^2}{\pi\sigma L^2} \int \tilde{\Phi}(r, \theta) g_o(r, \theta) d\vec{r} d\vec{\theta}; \tag{12a}$$

$$\left. \begin{matrix} P_t(T, n) \\ P_r(T, n) \end{matrix} \right\} = \frac{4\epsilon \tilde{n}\tilde{T}}{\pi\sigma^2 L} - \frac{32\epsilon\tilde{n}^2}{3\pi\sigma L^2} \int \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \tilde{\Phi}(r, \theta)}{\partial r} r \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}(r, \theta)}{\partial \theta} \theta \end{matrix} \right\} g_o(r, \theta) d\vec{r} d\vec{\theta}, \tag{12b}$$

где  $g_o(r, \theta)$  – равновесная радиальная функция распределения молекул,  $r = \frac{x_{ij}}{\sigma}$ ;

$\tilde{T} = \frac{k_B T}{\epsilon}$ ;  $\tilde{n} = \frac{\pi\sigma^2 L}{4} n$ ;  $\tilde{\Phi} = \frac{\Phi}{\epsilon}$ , где  $\sigma$  – диаметр и  $L$  – длина стержнеобразных молекул. Выражения

(12) фактически являются калорическими и термическими уравнениями состояния, используя которые определим входящие в (11) производные

$$c_v = \left( \frac{\partial e(\bar{x}, \bar{\theta}, t)}{\partial T} \right)_n = \frac{18k_B}{\pi\sigma^2 L} \left\{ \tilde{n} + \left( \frac{2\tilde{n}}{\tilde{T}} \right)^2 \frac{L}{\sigma} \int (\tilde{\Phi}(r, \theta))^2 g_o(r, \theta) r^2 dr d\theta \right\},$$

$$\left( \frac{\partial P_r}{\partial T} \right)_n = \frac{4k_B}{\pi\sigma^2 L} \left\{ \tilde{n} - \left( \frac{\tilde{n}}{\tilde{T}} \right)^2 \frac{8\sigma}{3L} \int \frac{\partial(\tilde{\Phi}(r, \theta))^2}{\partial \theta} g_o(r, \theta) br^2 dr d\theta \right\}, \quad (13)$$

$$\left( \frac{\partial P_r}{\partial n} \right)_T = \frac{4\epsilon}{\pi\sigma^2 L} \left( \tilde{T} - \frac{16\sigma\tilde{n}}{3L} \int \frac{\partial\tilde{\Phi}(r, \theta)}{\partial \theta} g_o(r, \theta) br^2 dr d\theta \right) \}.$$

Выбираем  $\tilde{\Phi}(r, \theta)$  и  $g_o(r, \theta)$  в виде [9]:

$$\tilde{\Phi}(r, \theta) = \begin{cases} \delta(r-1), & \text{при } 0 < r \leq 1, \\ \tilde{\Phi}_{ij}(r, \theta), & \text{при } r > 1. \end{cases} \quad (14)$$

$$g_o(r, \theta) = \begin{cases} y(1) = \frac{2-\tilde{n}}{2(1-\tilde{n})}, & \text{при } r \leq 1a, \\ y(r) e^{-\frac{\tilde{\Phi}_{ij}(r, \theta)}{\tilde{T}}}, & \text{при } r > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим простой случай, когда потенциал взаимодействия молекул можно представить в виде суммы радиальных и ориентационных частей  $\Phi(r, \theta) = \Phi(r) + \Phi(\theta)$ . В качестве ориентационных и радиальных частей потенциала, используем известные потенциалы Майера-Заупе [1]

$$\Phi(\theta) = -\frac{A}{V_m^2} \eta \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta_i - \frac{1}{2} \right) \quad (15)$$

и Леннарда-Джонса [9]

$$\Phi(r) = 4\epsilon (r^{-12} - r^{-6}). \quad (16)$$

Для равновесного значения ориентационного параметра порядка  $\eta$ , используем полученное в [2] выражение

$$\eta(P, T) = \frac{3}{4} \eta_c \left( 1 + \frac{\sqrt{T_i - T + \beta(P_c - P)}}{3\sqrt{T_i - T_c}} \right), \quad (17)$$

где  $T_c$  – температура равновесия нематической и изотропной фазы,  $\eta_c$  – критическое значение  $\eta$ ,  $T_i$  – температура выше, которой нематическая фаза неустойчива,  $P$  – давление жидкости.

Подставляя выражения (13)-(17) в (11), определяя по литературным данным значения входящих в них параметров:  $\epsilon = \frac{A}{V_m^2} = 2,5410^{-20}$  Джс;  $\epsilon = 4\epsilon_o = 2,88 \cdot 10^{-20}$  Джс;  $T_c = T_{NI} = 408,3^\circ \text{K}$ ;

$\eta_c = 0,34$ ;  $T_i - T_c = 0,34^\circ \text{K}$ ;  $\rho = 1158 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ;  $\mu \approx 258 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$ ;  $\sigma : L = 4 : 14 \text{ \AA}$ ;  $\sigma \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ ;

$\alpha = 0,017 \frac{Дж}{г \cdot град}$ , для нематического жидкого кристалла п-азоксианизола (ПАА), проводим чис-

ленный расчёт зависимости модулей ориентационной упругости (11) от температуры, плотности и давления.

Ниже в таблице приведены результаты численного расчёта зависимости модулей ориентационной упругости ПАА от температуры, при двух значениях плотности и давления жидкости. Как видно из таблицы, с увеличением значений температуры значения модулей упругости уменьшаются, а с увеличением плотности и давления растут, что вполне соответствует упругим свойствам жидкостей. Определенные нами численные значения ориентационных модулей упругости близки с имеющимися в литературе экспериментальными данными, которые приведены в нижней строке таблицы для значения температуры T= 395К.

Таблица

Зависимость коэффициентов ориентационной упругости ПАА от температуры при двух значениях плотности ( $\rho_2 = 1158 \text{ кг/м}^3, \rho_1 = 1124 \text{ кг/м}^3$ ) и двух значениях давления ( $P_c - P = 0, P_c - P = 100 \text{ атм.}$ )

T(K)	$K_{11}^r, \text{ МПа}$	$K_{22}^r, \text{ МПа}$	$K_{33}^r, \text{ МПа}$	$K_{11}^r, \text{ МПа}$	$K_{22}^r, \text{ МПа}$	$K_{33}^r, \text{ МПа}$
	$\rho_1 = 1158 \text{ кг/м}^3$			$\rho = 1124 \text{ кг/м}^3$		
	$P_c - P = 0,$					
390	0.667	0.3334	0.9664	0.544	0.272	0.8024
*395	0.6056	0.3028	0.9042	0.492	0.246	0.753
400	0.515	0.2574	0.8114	0.4152	0.2076	0.679
402	0.4648	0.2324	0.7598	0.3728	0.1864	0.6376
404	0.4018	0.2008	0.6944	0.3196	0.1598	0.585
406	0.3188	0.1594	0.6078	0.2496	0.1248	0.5152
408	0.2018	0.101	0.4842	0.1508	0.0754	0.4154
408.3	0.1796	0.0898	0.4606	0.1322	0.066	0.3964
408.32	0.1782	0.089	0.459	0.1308	0.0654	0.395
408.6	0.1558	0.078	0.4352	0.112	0.056	0.3758
408.64	0.1526	0.0762	0.4318	0.1092	0.0546	0.373
	$P_c - P = 100 \text{ атм.}$					
390		0.3432	0.9846	0.5604	0.2802	0.8168
*395	0.6316	0.3158	0.9292	0.514	0.257	0.7732
400	0.5526	0.2762	0.849	0.447	0.2236	0.7094
402	0.5102	0.255	0.8056	0.4112	0.2056	0.6746
404	0.4582	0.229	0.7522	0.3672	0.1836	0.6318
406	0.3924	0.1962	0.6842	0.3116	0.1558	0.5772
408	0.3052	0.1526	0.5934	0.238	0.119	0.5038
408.3	0.2894	0.1448	0.5768	0.2246	0.1124	0.4906
408.32	0.2884	0.1442	0.5758	0.2238	0.1118	0.4896
408.6	0.2728	0.1364	0.5594	0.2106	0.1054	0.4764
408.64	0.2706	0.1352	0.557	0.2088	0.1044	0.4746
	Эксперимент[11]					
*395	0.69	0.38	1.19			

На рис. А представлены результаты численных расчётов температурной зависимости модулей упругости  $K_{11}^r, K_{22}^r, K_{33}^r$  по формулам (11) при значении давления  $P_c - P = 0$ , и двух значениях плотностей:  $\rho_1 = 1124 \text{ кг/м}^3$  – пунктирные кривые;  $\rho_2 = 1158 \text{ кг/м}^3$  – сплошные кривые). Заметно, что с

увеличением плотности значения коэффициентов упругости увеличиваются и их температурная зависимость.

На рис. Б приведены температурная зависимость коэффициентов упругости ПАА при значении плотности жидкости  $\rho_1 = 1124 \text{ кг/м}^3$  и двух значениях давления жидкости ( $P_c - P = 0$ -пунктирные кривые и  $P_c - P = 100 \text{ атм.}$  – сплошные кривые). Здесь, также наблюдается прирост значений коэффициентов упругости с увеличением давления. Однако влияние плотности на температурную зависимость коэффициентов упругости более существенно в области низких температур, а влияние давления больше проявляется в области высоких температур.

На рис. В отражены экспериментальные результаты из [10, с. 105].

Как видно, результаты наших расчётов и экспериментальные данные близки, особенно при высоких значениях давления. В целом, результаты наших расчётов несколько выше, чем экспериментальные результаты на рис. В. Однако имеются и большие расхождения в самих экспериментальных результатах. Например, согласно приведённым в [11] данным, значения  $K$  при температуре 395 К гораздо больше, чем на рис. В. Отношение значения коэффициентов ориентационных упругостей

$\frac{K_{22}}{K_{11}}, \frac{K_{33}}{K_{11}}$ , согласно таблице близки к числам, приведённым в [11].

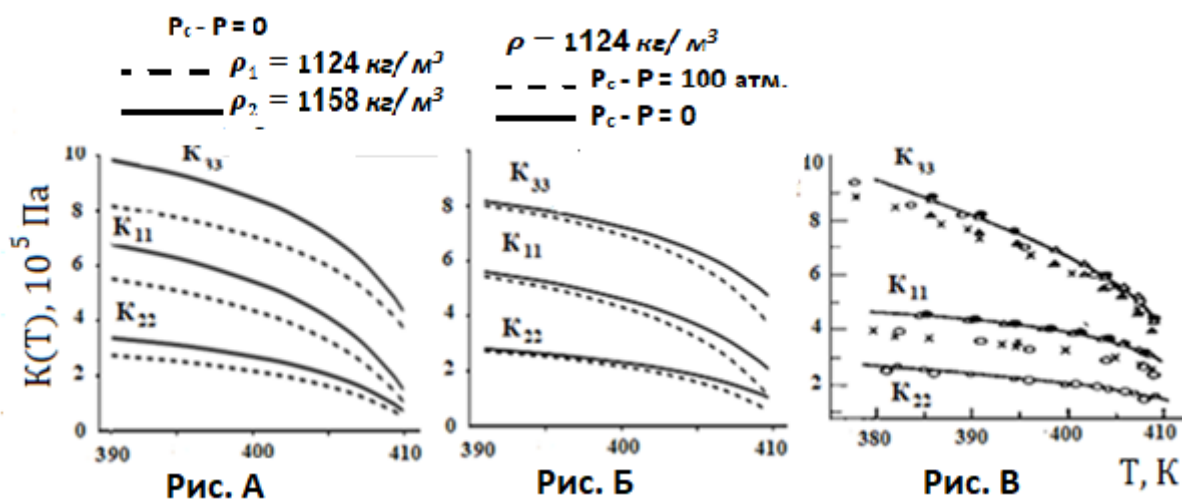


Рис. Зависимость коэффициентов ориентационной упругости ПАА от температуры

Порядок и единицы измерения коэффициентов (модулей) ориентационной упругости НЖК в наших результатах и в имеющейся в литературе информации в некоторых случаях не совпадают. В [1], например, коэффициенты ориентационной упругости оцениваются как отношение энергии взаимодействия молекул и их взаимное расстояние, и получают  $K \sim 10^{-7} \text{ дин}$ , а у нас  $K \sim 10^5 \text{ Па}$ . Мы определяем макроскопические модули ориентационной упругости, и если записать наши результаты в обозначениях энергии межмолекулярного взаимодействия, порядок и единица наших результатов также будет  $K \sim \frac{\epsilon}{\sigma} \sim 6 \cdot 10^{-7} \text{ дин}$ .

В конце заметим, что использованные нами потенциалы упрощённые и при расчётах значения интегральных множителей  $a(r)$  и  $a(\theta)$  полагались постоянными и равными единице. При выборе более подходящих для нематических жидких кристаллов потенциалов межмолекулярного взаимодействия и значений параметров состояния, можно получить более хорошие и достоверные результаты.

Поступило 20.12.2021 г.

#### ЛИТЕРАТУРА :

1. Де Жен П. Физика жидких кристаллов. – М.: Мир, 1977, 400 с.
2. Абдурасулов Д.А., Абдурасулов А.А., Одинаев С. Метод неполного термодинамического потенциала для нематических жидких кристаллов. – Политехнический вестник. Серия: Интеллект. Инновация. Инвестиции, 2019, №4(48), с. 12-16
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Т.5. Статистическая физика. – М.: «Физматлит», 2018, 620 с.
4. Абдурасулов А.Д., Абдурасулов А.А., Шоайдаров Н. Б. Исследование зависимости коэффициентов ориентационной деформации нематических жидких кристаллов от температуры и давления. – Мат. Межд. научно-практ. конф. «Технические науки и инженерное образование для устойчивого развития», часть 1. – Душанбе, 2021г., с. 127-130.
5. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. – М.: Наука, 1972, 280 с.
6. Абдурасулов А.А. О неравновесной статистической функции распределения асимметричных жидкостей. – ДАН РТ, 1998, т.51, №3-4, с. 36-41
7. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов. – Сб. «Механика», 1952, вып. №4, с. 62-97.
8. Абдурасулов А.А., Абдурасулов Д.А., Шоайдаров Н.Б. О вкладе динамики изменения внутренних давлений в вязкоупругие свойства асимметричных жидкостей. – Политехнический вестник. Серия: Интеллект. Инновации. Инвестиции, 2020, №4(52), с.20-26.
9. Адхамова А.А., Одинаев С., Абдурасулов А. Об оптимальном выборе радиальной функции распределения для простых жидкостей. – Докл. АН Тадж.ССР., 1989, т.32, №8, с.521-524.
10. Де Жё В. Физические свойства жидкокристаллических веществ. – М.: «Мир», 1982, 153 с.
11. Гребенкин М.Ф., Иващенко А.В. Жидкокристаллические материалы. – М.: Химия, 1989, 288 с.

С.Одинаев, Д.А.Абдурасулов\*, А.А.Абдурасулов\*

### ТАДҶИҚИ МОЛЕКУЛАВӢ-СТАТИСТИКӢИ ХОСИЯТҶОИ ЧАНДИРИИ ТАМОИЛИИ КРИСТАЛЛҶОИ МОЕЪ НЕМАТИКӢИ

*Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови АМИТ,  
\*Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ*

Дар заминаи функсияи тақсмоти статистикӣи локалӣ-мувозинатии барои омӯхтани моеъҳои шакли молекулаҳошон дилҳоҳ такмил дода шуда, хосиятҳои чандирии тамоилии кристаллҳои моеъ нематикӣи тадқиқ карда шудааст. Барои коэффицентҳои чандирии тамоилӣ ҳангоми таъзиқҳои



қатшавии амудӣ ( $K_{11}$ ), қатшавии арзӣ ( $K_{22}$ ) ва тобхӯрӣ ( $K_{33}$ ) ифодаҳои аналитикии мувофиқ ёфта шудаанд. Дар ҷаҳорҷубаи имконпозии ба қисмҳои радиалӣ ва тамоилӣ ҷудо кардани потенциали ҳамтаъсири байни молекулаҳо ва ба сифати потенциалҳои радиалӣ ва тамоилӣ истифода намудани потенциалҳои Леннард-Чинс ва Майер-Заупе вобастагии коэффисиентҳои чандирии тамоилии ( $K_{11}$ ,  $K_{22}$ ,  $K_{33}$ ) аз температура, зичӣ (фишор) барои п-азоксианизол (ПАА) ҳисоб карда шудааст.

*Калимаҳои калидӣ:* функсияи тақсимоти статистикӣ, кристаллҳои моеъ нематикӣ, чандирии тамоилӣ, тартибҳои радиалӣ ва тамоилӣ.

S.Oдинаев, D.A.Abdurasulov\*, A.A.Abdurasulov\*

## MOLECULAR STATISTICAL STUDY OF THE ORIENTATION ELASTIC PROPERTIES OF NEMATIC LIQUID CRYSTALS

*Physical-Technical Institute named after S.U.Umarov of the National Academy of Sciences of Tajikistan,  
\*Tajik Technical University named after academician M.S.Osimi*

The orientational elastic properties of nematic liquid crystals are investigated on the basis of the locally equilibrium statistical distribution function generalized for the description of liquid systems with arbitrary shapes of molecules. Analytical expressions are obtained for the coefficients of orientation elasticity during deformation of transverse bending ( $K_{11}$ ) longitudinal bending ( $K_{22}$ ) and torsion ( $K_{33}$ ). In the framework of the approximation of the separability of the intermolecular interaction potential into radial and angular parts, using the Lennard-Jones and Mayer-Zaupe potentials as its radial and orientation parts, the dependence of the orientation elasticity coefficients ( $K_{11}$ ,  $K_{22}$ ,  $K_{33}$ ) is investigated from temperature, pressure and density for NLC (PAA).

**Key words:** *statistical distribution function, nematic liquid crystals, orientation elasticity, radial and orientation order.*

УДК 533.951;533.9.082.5

Ш.С.Нурулхаков

## О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ КОМБИНАЦИОННОМ РАССЕЙАНИИ СВЕТА МЕТОДОМ РИМАНА

*Таджикский национальный университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана Ф.Рахими 22.12.2021 г.)*

*Получено точное решение связанных уравнений теории вынужденного комбинационного рассеяния электромагнитных волн в поле двумерно локализованной волны накачки при произвольных углах рассеяния методом Римана. Исследовано пространственное изменение амплитуд взаимодействующих волн для различных величин поля накачки и размеров области его локализации.*

**Ключевые слова:** *вынужденное комбинационное рассеяние, вынужденное рассеяние Манделъштама-Бриллюэна, ионно-звуковая волна.*

Теория вынужденного рассеяния Манделъштама-Бриллюэна в безграничной среде достаточно хорошо изучена [1,2]. Если размер области рассеяния ограничен вдоль распространения волны накачки, то для попутного рассеяния неустойчивость пропадает и, возможно, происходит только усиление падающей извне пробной волны. Как показано в [3,4], для обратного рассеяния существует критическое расстояние  $L_{cr}$  зависящее от порога неустойчивости в бесконечной среде амплитудой волны накачки. Если размер области взаимодействия  $L$  меньше  $L_{cr}$ , то происходит усиление волны, распространяющейся в обратном направлении. При превышении критического размера система становится неустойчивой – происходит возбуждение обратной волны. Эта неустойчивость имеет место только для параметрически связанных встречных волн, проекции групповых скоростей которых имеют противоположные знаки. Различие в свойствах прямого и обратного рассеяния в ограниченной среде обусловлено тем, что для абсолютной неустойчивости необходима обратная связь, благодаря которой часть энергии неустойчивой волны передается начальному возмущению. Для попутного рассеяния и звуковая и световая волны переносят энергию в одном направлении от начальной точки, поэтому обратная связь отсутствует и наблюдается только усиление внешних возмущений (или флуктуаций среды). При обратном рассеянии световая волна переносит энергию, которую она получила от волны накачки в обратном направлении. Поэтому если выполнены необходимые соотношения для фазы (положительная обратная связь) и амплитуды (достаточно большое усиление, определяемое амплитудой волны накачки и размером области взаимодействия), то будет наблюдаться абсолютная неустойчивость. Разумеется, волны при этом могут распространяться не только навстречу, но и под углом друг к другу. Рассмотренная картина взаимодействия [3,4] не меняется качественно при учете неоднородности плазмы [5,6] и для волны накачки, амплитуда которой изменяется на толщине слоя [7,8].

*Адрес для корреспонденции:* Нурулхаков Шамсулхак Самарулхакович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: nshs93@mail.ru

Поскольку в реальном эксперименте ограничен не только продольный, но и поперечный размеры области взаимодействия, актуальной является задача расчета, как порога развития абсолютной неустойчивости, так и коэффициентов усиления волн для рассеяния пробной волны в двумерно неоднородной системе с областью взаимодействия, ограниченной в поперечном направлении. Частично эта проблема обсуждалась в работах [9, 10], где исследовано вынужденное комбинационное рассеяние света только под прямым углом (боковое рассеяние) при двумерной локализации волны накачки. Показано, что при выходе одной из волн через боковую границу области взаимодействия абсолютная неустойчивость отсутствует и наблюдается только усиление внешней волны.

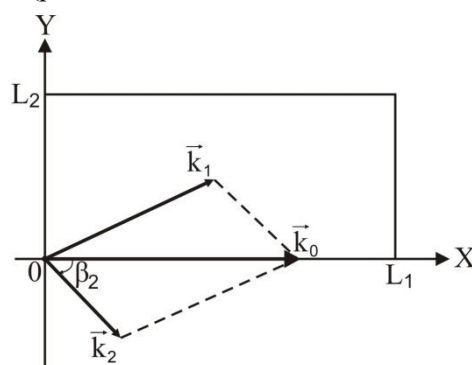
Используемые методы могут быть применены и для ряда других задач, актуальных в настоящее время – диагностики плазмы, ускорения электронов лазерным пучком, лазерного термоядерного синтеза, компрессии и усиления лазерных импульсов (см., например [11-24]) и определения параметров рассеянного излучения при других типах неустойчивости среды [25,26].

Частично некоторые аспекты данной задачи рассматривались в работах [17,18], в которых были определены пороги и коэффициенты усиления волн в поле волны накачки, ограниченной в поперечном направлении при произвольных значениях угла рассеяния.

В настоящей работе получено точное решение уравнений вынужденного комбинационного рассеяния света в поле двумерно локализованной волны накачки при произвольных значениях угла рассеяния (рассматривается только попутное рассеяние). Следует подчеркнуть, что мы остаемся в рамках модели работ [3–10] и ограничиваемся рассмотрением параметрической связи только двух волн (низкочастотной и рассеянной).

### Решение системы укороченных уравнений методом теоремы разложения

Используем систему укороченных уравнений для амплитуд двух волн  $b_1$  (звуковой) и  $b_2$  (рассеянной электромагнитной), взаимодействующих с волной накачки, локализованной в прямоугольной области  $0 < x < L_1$ ,  $0 < y < L_2$  (рис. 1) [18].



**Рис.1.** Область взаимодействия волн и ориентации волновых векторов при рассеянии под произвольным углом рассеяния.

Рассеянная поперечная волна распространяется под углом  $\beta_2$  к оси  $OX$ , а звуковая волна с волновым вектором  $k_1$  – под углом  $\beta_1$  к направлению распространения волны накачки  $k_0$ . Частоты волны накачки  $\omega_0$ , звуковой волны  $\omega_1$  и рассеянной волны  $\omega_2$  связаны соотношением  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ , а их волновые векторы –  $k_0 = k_1 + k_2$ . Угол рассеяния  $\beta_2$  изменяется в пределах  $0 \leq \beta_2 \leq \pi/2$ .

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_1}{\partial y} + \gamma_1 a_1 &= \mu_1 a_2, \\ \alpha_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_2}{\partial y} + \gamma_2 a_2 &= \mu_2 a_1. \end{aligned} \tag{1}$$

В (1) введены обозначения  $\alpha_1 = \text{ctg}\beta_1 = \text{tg}(\beta_2/2)$ ,  $\alpha_2 = \text{ctg}\beta_2$ ,  $\gamma_1 = \bar{\gamma}_1 / \cos(\beta_2/2)$ ,  $\gamma_2 = \bar{\gamma}_2 / \sin \beta_2$ ,  $\bar{\gamma}_1 = \gamma_s / V_s = v_i / 2V_s$ ,  $\bar{\gamma}_2 = \gamma_t / c = v_e \omega_{Le}^2 / 2\omega_2 c$ ,  $\mu_1 = \bar{\mu}_1 \alpha_1$ , В силу того, что скорость звуковой волны много меньше скорости света, углы рассеяния связаны соотношением  $\beta_1 = \pi/2 - \beta_2/2$ . Коэффициенты нелинейной связи волн  $\bar{\mu}_{1,2}$  не зависят от угла  $\beta_2$  и равны:  $\bar{\mu}_1 = ze^2 k_0 E_0 / 4mm_i \omega_0 \omega_2 V_s^2$ ;  $\bar{\mu}_2 = v_2 / c$ . Здесь также используются обозначения  $c$  – скорость света,  $V_s$  – скорость звука в плазме,  $v_i$  – частота столкновения ионов с нейтральными частицами или ионами другого сорта,  $v_e$  – частота столкновения электронов с тяжелыми частицами;  $e$ ,  $m_e$  – заряд и масса электронов;  $z$ ,  $m_i$  – зарядовое число и масса ионов,  $\omega_{Le}$  – ленгмюровская частота электронов,  $E_0$  – амплитуда волны накачки, которые считаются заданными. Величины  $\bar{\gamma}_{1,2}^{-1}$  определяют длину свободного пробега звуковых и рассеянных волн и не зависят от угла рассеяния.

В формуле (1) величины  $\alpha_{1,2}$  связаны соотношением  $\alpha_2 = (1 - \alpha_1^2) / 2\alpha_1$ . Применительно к вынужденному боковому рассеянию, когда  $\beta_2 = \pi/2$  ( $\alpha_1 = 1$  и, следовательно  $\alpha_2 = 0$ ), уравнения (1) исследовались в работах [9,10].

Решения системы (1) при нулевых граничных условиях позволяют выяснить вопрос о коэффициенте усиления и порогах неустойчивости. Для углов  $\beta_2$ , изменяющихся в пределах  $0 \leq \beta_2 \leq \pi/2$ , вопрос о порогах и коэффициенте усиления изучался в работах [17-19]. Для исследования изменения амплитуд волн, усиливающихся вследствие неустойчивости среды в пространстве необходимо решить уравнения (1) с ненулевыми граничными условиями

$$a_1(x=0, y) = 0, \quad a_2(x=0, y) = C, \tag{2}$$

$$a_1(x, y=0) = 0, \quad a_2(x, y=L_2) = C. \tag{3}$$

Постановка граничных условий в виде (2)-(3) означает, что луч пробной волны, усиливающийся на области с параметрически неустойчивой средой, слабо сфокусирован и его амплитуда не меняется в пределах границы области взаимодействия.

Для решения задачи произведем в уравнениях (1) замену переменных  $x$  и  $y$  на новые переменные  $\xi$  и  $\eta$  следующим образом:

$$\xi = \frac{x}{\alpha_1} - y, \quad \eta = \frac{x}{\alpha_2} + y.$$

Обратная связь при этом равна

$$x = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (\xi + \eta), \quad y = \frac{\alpha_2 \eta - \alpha_1 \xi}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (4)$$

Используя соотношения (4) и представим производные  $a_{1,2}$  по  $x$  и  $y$  в виде

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial x(y)} = \frac{\partial a_{1,2}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x(y)} + \frac{\partial a_{1,2}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x(y)}.$$

Тогда в переменных  $\xi$  и  $\eta$  уравнения (1) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \frac{\partial a_1}{\partial \xi} + \gamma_1 a_1 &= \mu_1 a_2, \\ \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \frac{\partial a_2}{\partial \xi} + \gamma_2 a_2 &= \mu_2 a_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Умножая первое уравнение (5) на  $\mu_2$  и используя второе уравнение, получим для функций  $a_{1,2}$  следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 a_{1,2}}{\partial \xi \partial \eta} + b_1 \frac{\partial a_{1,2}}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial a_{1,2}}{\partial \eta} + c a_{1,2} = 0,$$

$$\text{где } b_1 = \gamma_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad b_2 = \gamma_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad c = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} [\gamma_1 \gamma_2 - \mu_1 \mu_2] = b_1 b_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \mu_1 \mu_2.$$

Впредь будем интересоваться полем рассеянной волны  $a_2$ , поскольку именно оно выходит из области взаимодействий. Запишем граничные условия (2 и 3) в переменных  $\xi$  и  $\eta$ . Из формулы (5) следует, что при  $x = 0$  получим  $\xi = -\eta$ . Подставляя  $y = L_2$  и  $\xi = -\eta$ , получаем  $\eta = L_2$ . Следовательно, граничные условия для функции  $a_2$  в переменных  $\xi$  и  $\eta$  имеют вид

$$a_2(-L_2, \eta) = C, \quad a_2(\xi, L_2) = C. \quad (6)$$

Введём функцию  $A_2(\xi, \eta)$  следующим образом

$$a_2(\xi, \eta) = \ell^{\lambda \xi + \mu \eta} A_2(\xi, \eta). \quad (7)$$

Вычисляя производные по  $\xi$  и  $\eta$ , приравнявая к нулю коэффициенты при первой производной, получим  $\lambda = -b_2$ ,  $\mu = -b_1$  и тогда уравнение для  $A_2(\xi, \eta)$  примет вид

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial \xi \partial \eta} - \gamma^2 A_2 = 0, \quad (8)$$

$$\text{где } \gamma^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \mu_1 \mu_2.$$

Из (7) для  $A_2(\xi, \eta)$  имеем

$$A_2(\xi, \eta) = \ell^{-\lambda\xi - \mu\eta} a_2(\xi, \eta) = \ell^{b_2\xi + b_1\eta} a_2(\xi, \eta).$$

Запишем граничные условия для функций  $A_2(\xi, \eta)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} A_2(-L_2, \eta) &= e^{-b_2L_2 + b_1\eta} a_2(-L_2, \eta) = Ce^{-b_2L_2 + b_1\eta}, \\ A_2(\xi, L_2) &= e^{b_2\xi + b_1L_2} a_2(\xi, L_2) = Ce^{b_2\xi + b_1L_2}. \end{aligned}$$

Обозначим  $\xi_0 = -L_2$ ,  $\eta_0 = L_2$  и введем обозначение

$$\psi(\eta) = Ce^{-b_2L_2 + b_1\eta}, \phi(\xi) = Ce^{b_2\xi + b_1L_2}.$$

Тогда для функции  $A_2$  получим граничные условия

$$\begin{aligned} A_2(\xi_0, \eta) &= \psi(\eta) = Ce^{b_2\xi_0 + b_1\eta}, \\ A_2(\xi, \eta_0) &= \phi(\xi) = Ce^{b_2\xi + b_1\eta_0}. \end{aligned} \tag{9}$$

Из (9) следует, что  $\psi(\eta_0) = \phi(\xi_0)$ .

Функция Римана для уравнения (8) равна

$$R(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1) = I_0 \left[ 2\gamma \sqrt{(\xi - \xi_1)(\eta - \eta_1)} \right], \tag{10}$$

где  $I_0$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Решение уравнения (8) с граничными условиями (9) методом Римана [27] равно

$$\begin{aligned} A_2(\xi, \eta) &= R(\xi, \eta_0; \xi, \eta) \phi(\xi) + R(\xi_0, \eta; \xi, \eta) \psi(\eta) - R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) \psi(\xi_0) - \\ &- \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\partial}{\partial t} [R(t, \eta_0; \xi, \eta)] \phi(t) dt - \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \tau} [R(\xi_0, \tau; \xi, \eta)] \psi(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{11}$$

Из формулы (10) и свойства функции Бесселя следует, что

$$\begin{aligned} R(\xi_0, \eta; \xi_0, \eta) &= I_0(0) = 1, \\ R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) &= I_0(0) = 1, \\ R(\xi_0, \eta; \xi, \eta) &= I_0(0) = 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Непосредственная проверка показывает, что подставляя  $\xi = \xi_0$  в формулу (11), в действительности можно убедиться, что решению (11) удовлетворяет и уравнение (8) и граничные условия (9). Произведя интегрирование по частям в интегралах (11), получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{\xi_e}^{\xi} \frac{\partial}{\partial t} [R(t, \eta_0; \xi, \eta)] \phi(t) = \\
 & = R(\xi, \eta_0; \xi, \eta) \phi(\xi) - R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) \phi(\xi_0) - \int_{\xi_e}^{\xi} R(t, \eta_0; \xi, \eta) \phi'(t) dt, \\
 & \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\partial}{\partial \tau} [R(\xi_0, \tau; \xi, \eta)] \psi(\tau) d\tau = \\
 & = R(\xi_0, \tau; \xi, \eta) \psi(\eta) - R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) \psi(\eta_0) - \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0, \tau; \xi, \eta) \psi'(\tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя (12) и (13) в (11), получим

$$A_2(\xi, \eta) = R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) \psi(\eta_0) + \int_{\xi_0}^{\xi} R(t, \eta_0; \xi, \eta) \phi'(t) dt + \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0, \tau; \xi, \eta) \psi'(\tau) d\tau. \tag{14}$$

Подставляя формулы (14) и (9) в формулу (7), получим

$$\begin{aligned}
 a_2(\xi, \eta) & = e^{-b_2\xi - b_1\eta} \times \\
 & \times \left\{ R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) \psi(\eta_0) + \int_{\xi_0}^{\xi} R(t, \eta_0; \xi, \eta) \phi'(t) dt + \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0, \tau; \xi, \eta) \psi'(\tau) d\tau \right\}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Из (9) следует, что

$$\phi'(t) = Cb_2 e^{b_2 t + b_1 \eta_0}, \quad \psi'(\tau) = Cb_1 e^{b_2 \xi_0 + b_1 \tau}, \quad \psi(\eta_0) = Ce^{b_2 \xi_0 + b_1 \eta_0}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), получим

$$\begin{aligned}
 a_2(\xi, \eta) & = Ce^{-b_2\xi - b_1\eta} \left\{ R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) e^{b_2\xi_0 + b_1\eta_0} + b_2 e^{b_1\eta_0} \times \right. \\
 & \quad \left. \times \int_{\xi_0}^{\xi} R(t, \eta_0; \xi, \eta) e^{b_2 t} dt + b_1 e^{b_2\xi_0} \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0, \tau; \xi, \eta) e^{b_1 \tau} d\tau \right\}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя (10) в (17), получим

$$\begin{aligned}
 a_2(\xi, \eta) & = Ce \left\{ I_0 \left[ 2\gamma \sqrt{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)} \right] \cdot e^{b_2\xi_0 + b_1\eta_0} + b_2 e^{b_1\eta_0} \int_{\xi_0}^{\xi} I_0 \left[ 2\gamma \sqrt{(t - \xi)(\eta_0 - \eta)} \right] \times \right. \\
 & \quad \left. \times e^{b_2 t} dt + b_1 e^{b_2\xi_0} \int_{\eta_0}^{\eta} I_0 \left[ 2\gamma \sqrt{(\xi_0 - \xi)(\tau - \eta)} \right] e^{b_1 \tau} d\tau \right\}.
 \end{aligned}$$

Поскольку  $\xi_0 = -L_2$ ,  $\eta_0 = L_2$ , то окончательно для поля рассеянной волны получим точное решение в следующем виде

$$\begin{aligned}
 a_2(\xi, \eta) = & C e^{-b_2 \xi - b_1 \eta} \times \\
 & \times \left\{ I_0 \left[ 2\gamma \sqrt{(-L_2 - \xi)(L_2 - \eta)} \right] \cdot e^{(-b_2 + b_1)L_2} + b_2 e^{b_1 L_2} \int_{L_2}^{\xi} I_0 \left[ 2\gamma \sqrt{(t - \xi)(L_2 - \eta)} \right] \times \right. \\
 & \left. \times e^{b_2 t} dt + b_1 e^{-b_2 L_2} \int_{L_2}^{\eta} I_0 \left[ 2\gamma \sqrt{(-L_2 - \xi)(\tau - \eta)} \right] e^{b_1 \tau} d\tau \right\}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Решение (18) точно выполняет граничные условия (6) и является точным решением поставленной задачи.

В частности, в отсутствии диссипации взаимодействующих волн ( $b_1 = 0, b_2 = 0$ ) из (18) следует относительно простое выражение

$$a_2(\xi, \eta) = C I_0 \left[ 2\gamma \sqrt{(-L_2 - \xi)(L_2 - \eta)} \right].$$

Область взаимодействия волн в новых переменных  $\xi$  и  $\eta$  преобразуется к виду (рис. 2)

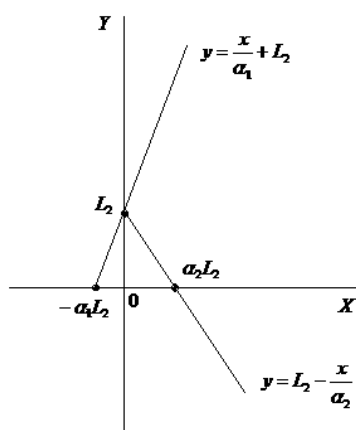


Рис. 2. Область взаимодействия волн на характеристиках.

### Выводы

Метод Римана позволяет определить точное решение системы уравнений для амплитуд взаимодействующих волн. Показано, что методом характеристики можно оценить величины коэффициента усиления волн.

Поступило 29.12.2021 г.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Gorbunov L.M. Intensity of stimulated Mandel'shtam-Brillouin scattering in a plasma. – JETP, 1974, v. 38, №3, pp. 490-493.
2. Кирий А.Ю. – Дисс. канд. физ.-мат. наук, ФИ РАН, 1972.
3. Kroll N.M. Excitation of hypersonic vibrations by means of photo-elastic coupling of high-intensity light waves to elastic waves. – Appl. Phys., 1965, v.36, №1, pp. 34-43.



4. Bobroff D.L., Haus H.A. Impulse response of active coupled wave systems, – Appl. Phys., 1967, v. 38, №1, pp. 390-403.
5. Pesme D., Laval G., Pellat R. Parametric instabilities in bounded plasmas. – Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, № 4, pp. 203-206.
6. Fuchs V., Beandry C. Threshold behavior of the three-wave parametric-decay interaction in bounded inhomogeneous plasmas. – Phys. Fluids, 1978, v.21, № 2, pp. 280-288.
7. White R.B., Kaw P., Pesme P., Rosenbluth M.N., Laval G., Huff R., Varma R. Absolute parametric instabilities in inhomogeneous plasmas. – Nucl. Fusion, 1974, v,14, №1, pp. 45-51.
8. Davydova T.A., Shamrai K.P. Parametric interaction of waves in a nonuniform pump field. – Plasma Phys., 1976, v.18, №12, pp.947-957.
9. Горбунов Л.М., Солихов Д.К. Вынужденное комбинационное рассеяние света в поле локализованной волны накачки. – Физика плазмы, 1984, т. 10, №4, с. 824-830.
10. Солихов Д.К. К теории вынужденного комбинационного рассеяния света в ограниченной области пространства. – Известия вузов, Радиофизика, 1984, т. 27, №1, с.34-41.
11. Courtois C., Conairon A., Cross B., Marques J.R., Matthieussent G. Propagation of intense ultrashort laser pulses in a plasma filled capillary tube: simulations and experiments. – Physics of plasmas, 2001, v. 8, №7, pp.3445-3452.
12. Kalmykov S., Mora P. Strongly coupled large-angle stimulated Raman scattering of short laser pulse in plasma-filled capillary. – Phys. Plasmas, 2005, v. 12, pp. 053101-053112.
13. Gaugadhara R.T., Deguchi S., Leseh H. – Phys. Plasmas, 2002, v. 9, №9, p.3999.
14. Cornella B.M., Gimelstein S.F., Shneider M.N. et all. – Optics express, 2012, v. 20, №5, p. 12976.
15. Esarey E., Schroeder C.V., Leemans W.P. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators. – Rev. Modern Phys. 2009, v. 81, №2, pp. 1229-1238.
16. Tabak M., Hammer J., Glinsky M.E. et all. Ignition and high gain with ultra-powerful lasers. – Physics of Plasmas, 1994, v. 1, №1, pp. 1626-1638.
17. Овчинников К.Н., Солихов Д.К. Краткие сообщения по физике. – ФИАН, 2010, №10, с. 3.
18. Солихов Д.К., Овчинников К.Н., Двинин С.А. О пороге вынужденного рассеяния в поле двумерно локализованной волны накачки при произвольных углах рассеяния. – Вестник Моск. ун-та, 2012, сер. 3, №1, с. 69.
19. Горбунов Л.М. К теории абсолютных параметрических неустойчивостей. – ЖТФ, 1977, т. 47, №1, с. 36-43.
20. Лаврентьев М.А, Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
21. Offenberger A.A., Cerveman M.R., Yam A.M., Pasternak A.W. Stimulated Brillouin scattering of CO<sub>2</sub> laser radiation from underdense plasma. – Appl. Phys., 1976, v. 47, №4, pp. 1451-1458.
22. Pitt L., Salzmann D., Oddenberger A. A. – Phys. Rev. Lett., 1979, v.42, №5, pp. 307-311.
23. McKinstrie C.J., Betti R. et all. Two-dimensional stimulated Raman scattering of short laser pulses. – Phys. Rev E., 1995, v.51, №4, pp. 3752-3758.
24. Kalmykov S.Yu. Large-angle stimulated Raman scattering of short laser pulses in plasma. – Plasma Physics Reports, 2000, v.26, №11, pp. 938-946.

25. Вагин К.Ю., Урюпин С.А. Усиление электромагнитного излучения неравновесной плазмой, неустойчивой относительно развития вейбелевской неустойчивости. – ЖЭТФ, 2010, т. 138, №4, с. 757-771.
26. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн, М.: Наука, ГРФМЛ, 1979, с. 335-342.
27. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: «Высшая школа», 1970, с. 712.

**Ш.С.Нурулхаков**

**ҲАЛЛИ АНИҚИ МУОДИЛАҲОИ ВОБАСТАШУДАИ ПАРЕШХУРДИ  
МАҶБУРИИ КОМБИНАТСИОНИИ МАВҶИ ЭЛЕКТРОМАГНИТӢ  
БО УСУЛИ РИМАН**

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақолаи мазкур ҳалли аниқи муодилаҳои вобасташудаи парешхурди маҷбурии комбинатсионӣ дар фазои маҳдуди дучанекаи локализатсияшудаи мавҷи афтанда ҳангоми парешхурд бо кунҷҳои дилҳоҳ бо методи Риман ҳосил карда шудааст. Тағйироти фазогии амплитудаи мавҷҳои мутақобила барои қимматҳои гуногуни мавҷи афтанда ва андозаи локалии он таҳқиқ шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** *парешхурди маҷбурии Риман, парешхурди маҷбурии Манделштам-Бриллюон, мавҷи садоӣ-ионӣ.*

**Sh.S.Nurulhakov**

**AN EXACT SOLUTION OF THE COUPLED EQUATIONS IN THE THEORY OF  
STIMULATED BRILLOUIN SCATTERING USING RIEMANN METHOD**

*Tajik National University*

In this article we have obtained an exact solution of the coupled equations in the theory of stimulated Riemann scattering of electromagnetic waves in the field of a two-dimensionally localized pump wave for arbitrary scattering angles by the Riemann method. The spatial variation of the amplitudes of the interacting waves is studied for various values of the pump field and the sizes of its localization region.

**Key words:** *stimulated Riemann scattering, stimulated Brillouin scattering, ion-acoustic wave.*

УДК 539.01

М.Д.Бобоёров

**КИНЕТИКА РАЗЛОЖЕНИЯ УРАНСОДЕРЖАЩИХ РУД ТАДЖИКИСТАНА***Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности**НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 10.02.2022 г.)*

*В статье представлены кинетические характеристики сернокислотного разложения урансодержащих руд месторождений «Центральный Таджикистан», «Западный Таджикистан», «Северный Таджикистан» и «Октябрьское».*

**Ключевые слова:** *кинетика, урановая руда, разложение, кислота, энергия активации.*

В последние годы, в связи с расширением поисков новых месторождений урансодержащих руд, в Таджикистане работы по возможности извлечения урана из руд стали актуальными. Ранее изучались возможности сернокислотного выщелачивания урансодержащих руд и отходов урановой промышленности из местных сырьевых материалов Таджикистана [1, 2].

В работах [3-5] изучен химический и минералогический состав урановых руд месторождений Таджикистана, а также механизм взаимодействия урановой руды с кислотами в присутствии различных окислителей.

Целью данной работы является исследование процесса разложения урановых руд Таджикистана серной кислотой и изучение кинетики процесса разложения руды.

Изучены кинетические кривые извлечения урана при температурах 303-353 К. Вычислена энергия активации ( $E_{ак.}$ ) процессов и выявлены зависимости скорости реакции от температуры и продолжительности процесса. Численные значения энергии активации свидетельствуют о протекании процесса разложения в диффузионной области.

Для нахождения энергии активации и более точного определения области протекания процесса разложения руды построили график зависимости логарифма средних значений констант скоростей реакции от обратной абсолютной температуры. По тангенсу угла наклона рассчитали значения энергии активации процессов (рис.1).

---

*Адрес для корреспонденции:* Бобоёров Мехровар Диловарович. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАНТ.  
E-mail: mehrovar.bobo@yandex.com

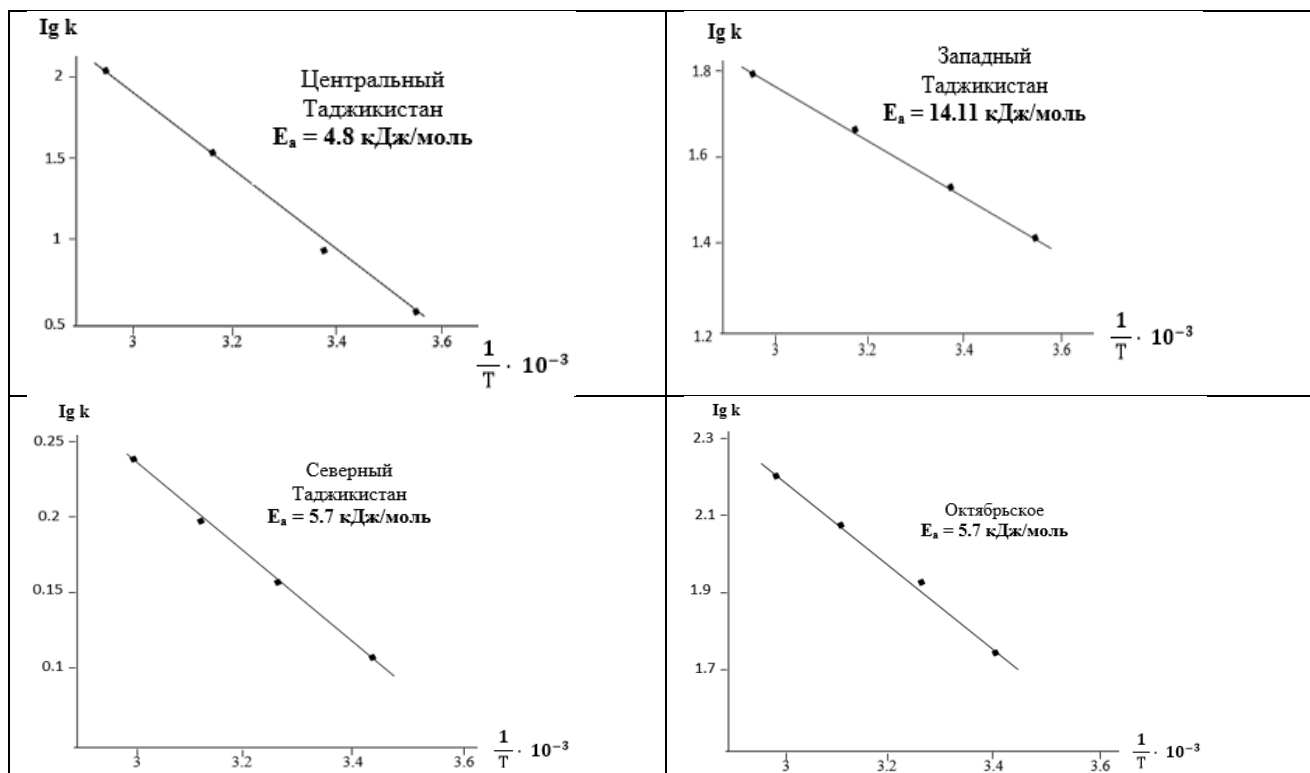


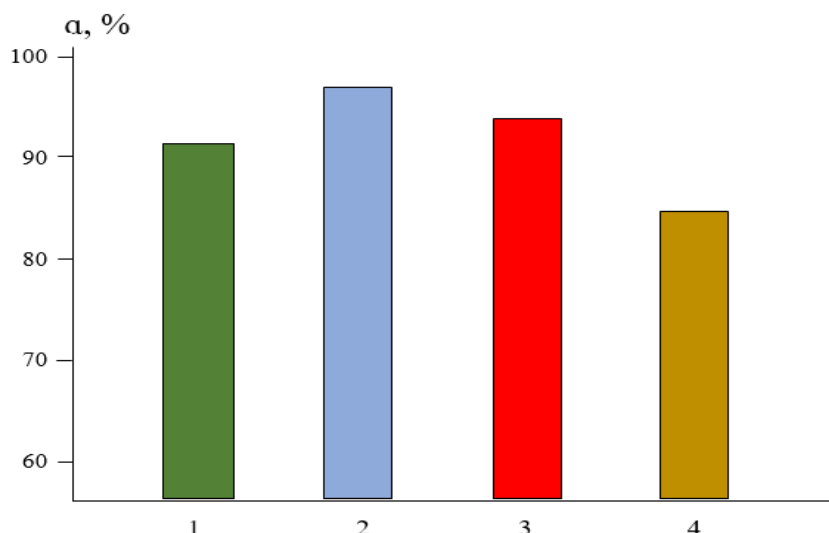
Рис. 1. Зависимость lg k от обратной абсолютной температуры разложения урансодержащих руд Таджикистана.

В таблице и на рис.2 показаны результаты разложения урансодержащих руд Таджикистана, а также приведены кинетические параметры процесса и оптимальные условия перехода урана в раствор.

Таблица

Кинетические параметры процесса разложения урановых руд Таджикистана

Месторождения урановых руд	Расход серной кислоты, кг/т	Оптимальная температура, К	Продолжительность процесса, час	Экспериментальная энергия активации, кДж/моль	Степень перехода урана в раствор, %
«Центральный Таджикистан»	150	333	3	4.8	91.5
«Западный Таджикистан»	350	353	1	14.11	96.2
«Северный Таджикистан»	600	348	6	5.7	93.3
«Октябрьское»	300	353	1	15.37	85



**Рис. 2.** Сравнительная оценка степени извлечения урана из руд различных месторождений Таджикистана:

- 1 – месторождение «Центральный Таджикистан»;
- 2 – месторождение «Западный Таджикистан»;
- 3 – месторождение «Северный Таджикистан»;
- 4 – месторождение «Октябрьское».

Таким образом, проведенные исследования раскрывают механизм сернокислотного разложения урансодержащих руд Таджикистана. Значения кинетических характеристик дают возможность выбора рационального режима осуществления процесса сернокислотного разложения руды.

*Поступило 21.02.2022 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Рахматов Н.Н., Мирсаидов И.У., Назаров Х.М. Физико-химическое состояние урана в супесчаных почвах. – Мат-лы XII Нумановских чтений. – Душанбе, 2015, с.84-86.
2. Ходжиев С.К., Назаров Х.М., Баротов Б.Б. и др. Сернокислотное выщелачивание урана из руд месторождения «Центральный Таджикистан». – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2017, №4(169), с.71-75.
3. Мирсаидов И.У. Физико-химические основы получения урановых концентратов из отходов и сырьевых материалов. – Душанбе: Дониш, 2014, 106 с.
4. Мирсаидов И.У., Баротов Б.Б., Рахматов Н.Н. и др. Извлечение уранового концентрата из различных сырьевых ресурсов Таджикистана. – Сб. мат-лов республиканской научно-практической конференции «Проблемы материаловедения в Республике Таджикистан», посвящ. «Дню химика» и 80-летию со дня рожд. академика Международной инженерной академии Вахобова Анвара Вахобовича. – Душанбе, 2016, с.226-228.
5. Баротов Б.Б. Физико-химические и технологические основы получения урановых концентратов из местных сырьевых материалов Таджикистана: Автореф. дисс. ... к. т. н. – Душанбе, 2011, 20 с.

М.Д.Бобоёров

## ТАҶЗИИ КИНЕТИКИ МАЪДАНҲОИ УРАНДОРИ ТОҶИКИСТОН

*Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии АМИ Тоҷикистон*

Дар мақола тавсифи кинетики таҷзи маъданҳои урандори конҳои «Тоҷикистони Марказӣ», «Тоҷикистони Ғарбӣ», «Тоҷикистони Шарқӣ» ва «Октябрское» бо кислотаи сулфат оварда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** кинетика, маъдани урандор, таҷзия, кислота, энергияи фаъолкунӣ.

M.D.Boboyorov

## DECOMPOSITION KINETICS OF URANIUM-CONTAINING ORES IN TAJIKISTAN

*Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety and Security Agency of the NAS of Tajikistan*

In this article the kinetic characteristics of the sulfuric acid decomposition of uranium-containing ores from the «Central Tajikistan», «Western Tajikistan», «Northern Tajikistan» and «Oktyabrskoe» deposits are presents.

**Key words:** kinetics, uranium ore, decomposition, acid, activation energy.

УДК 620.181.544

А.С.Джафаров

## ФАЗОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ В СИСТЕМЕ In-Te

*Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни**(Представлено академиком НАН Таджикистана Ф.Рахими 11.12.2021 г.)*

В статье приводятся результаты исследований температурной зависимости скорости распространения ультразвука в расслаивающихся расплавах системы In-Te. В системе In-Te были обнаружены аномалии на политермах  $\Delta s$ . Эти аномалии усиливаются постепенно с приближением концентрации расплавов к критической. Уточнены линии моновариантного равновесия жидкость – жидкость и критические параметры.

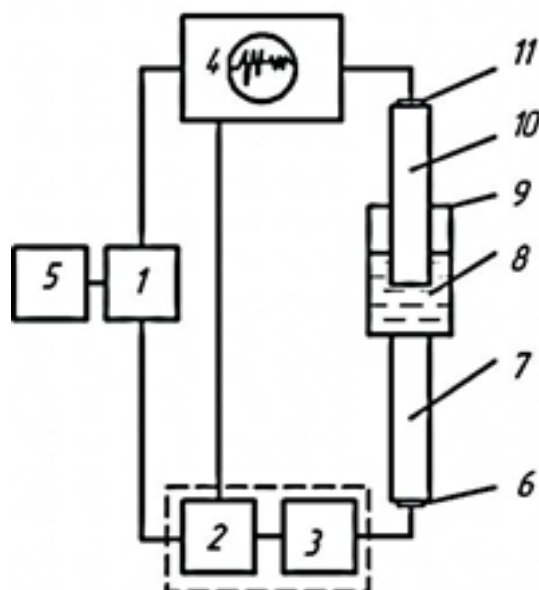
**Ключевые слова:** температура, фаза, система, индий, теллур, ультразвуковой метод, концентрация.

Халькогениды индия являются перспективными материалами для оптоэлектронных и термоэлектрических преобразователей. Используются они и для легирования полупроводниковых соединений  $A^2 B^6$ ,  $A^3 B^5$ ,  $A^4 B^6$ . Особые возможности практического применения связаны со слоистой структурой бинарных соединений  $A^3 B^6$ . С помощью интеркалирования в них ионов щелочных и щелочноземельных металлов можно создать новые классы аккумуляторов солнечной и электрической энергии [1-3].

Построение кривой моновариантного равновесия, ограничивающей область расслаивания жидкого раствора, является достаточно трудной экспериментальной задачей. Применявшиеся до последнего времени для её решения дифференциально-термический анализ, измерение электропроводности, плотности, закалка из жидкого состояния с последующим металлографическим исследованием структуры и другие методы по различным причинам малоэффективны и дают ненадежные и противоречивые результаты. В настоящей работе для решения этой задачи предложено использовать метод измерения скорости распространения ультразвука [4,5].

Функциональная блок-схема установки для систематических исследований ультразвуковых свойств расплавов металлов, полуметаллов и полупроводников представлена на рис. 1. Электронно-измерительная аппаратура, используемая при измерении ультразвуковых свойств в современных условиях, комплектуется в основном из электронных приборов и блоков, серийно выпускаемых промышленностью, за исключением генераторов радиоимпульсов, имеющих ряд специфических особенностей.

**Адрес для корреспонденции:** Джафаров Амиршо Сайобидович. 734003, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр. Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет. E-mail: jafarov\_as@mail.ru



**Рис. 1.** Функциональная блок-схема установки для исследований ультразвуковых свойств электронных расплавов.

Высокочастотный электрический сигнал с генератора синусоидальных сигналов 1 поступает на устройство 2, где из непрерывных синусоидальных колебаний формируются прямоугольные импульсы с высокочастотным заполнением определенной длительности и частоты следования. Импульсы эти усиливаются усилителем 3, поступают на излучающий пьезоэлемент 6 и, преобразовавшись в упругие колебания, в виде ультразвуковых волн проходят через нижний звукопровод 7 в расплав 8, размещающийся в контейнере 9. Потом упругие волны принимаются верхним звукопроводом 10 и вновь преобразовываются в электрические колебания приемным пьезоэлементом 11. После этого электрический сигнал поступает на один из входов осциллографа 4 с дифференциальным блоком усиления. На второй вход осциллографа попадает непрерывный сигнал той же частоты от задающего генератора 1. В дифференциальном блоке усиления происходит суммирование этих сигналов, что позволяет наблюдать интерференцию их при изменении фазы в импульсном сигнале, которое осуществляется перемещением верхнего звукопровода относительно нижнего на кратное число длин волн ультразвука в расплаве. Частота измеряется электронным частотомером 5.

Задавая частоту  $f$  и регистрируя общее перемещение  $L$  верхнего звукопровода измерительной ячейки, приходящиеся на общее количество  $n$  интерференционных погасаний, можно определить скорость распространения ультразвука по соотношению

$$v_s = \frac{L}{n} \cdot f = \lambda \cdot f, \tag{1}$$

где  $\lambda$  – длина волны ультразвука в исследуемой среде.

В применении к исследованиям расслаивающихся жидкостей описанная методика дополняется измерением скорости распространения ультразвука вдоль всей высоты столба жидкости  $h$ .

На рис. 2 представлена схема измерительной ячейки для изучения расслаивающейся жидкости.



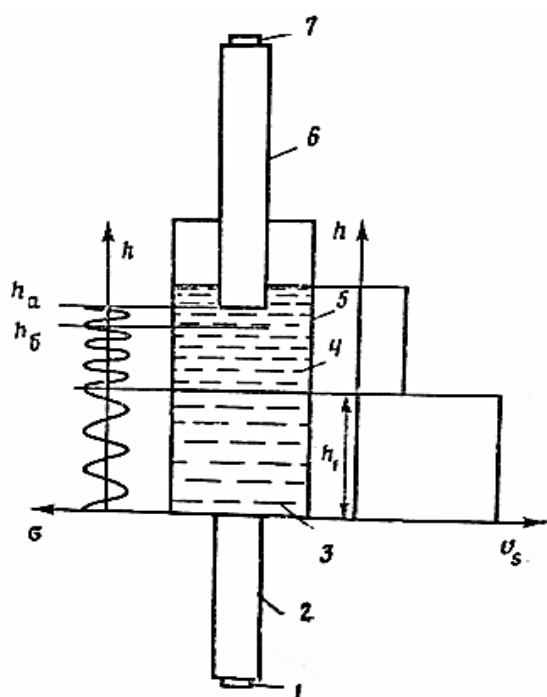


Рис. 2. Схема измерительной ячейки для исследований расслаивающихся расплавов металлов, полуметаллов и полупроводников.

Ультразвуковые импульсы от излучающего пьезоэлемента 1 через нижний неподвижный звукопровод 2 зондируют исследуемую жидкость, расслаившуюся на нижний 3 и верхний 4 слои. Контейнер 5 для расплава имеет цилиндрическую форму. Далее ультразвуковые импульсы через верхний подвижный звукопровод 6 поступают на приемный пьезоэлемент 7. Поскольку слои различаются по составу и плотности, то и скорость распространения ультразвука в них различна. На рис. 2 слева схематично показано распространение волны сжатия  $\delta$  по оси  $h$ . Если опустить верхний звукопроводяще на величину  $h_a - h_b$ , то можно определить скорость  $v_s$  по соотношению

$$v_s = (h_a - h_b) f = \lambda \cdot f. \quad (2)$$

При этом следует учитывать, что определенная по соотношению (2) величина  $v_s$  относится к веществу только в толще между  $h_a$  и  $h_b$ . Вся нижележащая жидкость, включая и нижний слой 3, в данном случае играет лишь роль звукопроводящей среды. Проводя измерения  $v_s$  с постепенным погружением верхнего звукопровода в расплав, можно обнаружить скачок скорости распространения ультразвука на высоте  $h_1$ , соответствующей границе между слоями 3 и 4, как показано на рис. 2 справа. Описанная методика хорошо зарекомендовала себя при исследовании расслаивающихся систем [6-9], и в этой связи была применена нами для изучения расслаивания расплавов в системе In-Te. Методика измерения скорости распространения ультразвука и соответствующая аппаратура описаны в [10].

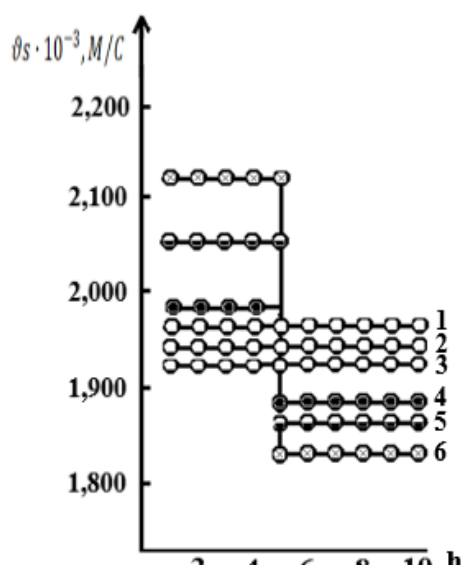
В качестве исходных материалов для приготовления сплавов использовали индий (In-000) и теллур марки ТА-1. Образцы сплавливали в откачанных до  $10^{-2}$  Па и отпаянных кварцевых ампулах при 1200 К в течение 2 ч с интенсивным встряхиванием. После проведения сплавления образец закалива-

ли резким охлаждением, для чего ампулу с расплавом при температуре порядка 700-900 К опускали в ванну с водой. Измерения проводили в атмосфере высокочистого аргона в интервале частот 1-3 МГц.

Разработанная нами методика для исследования расслаивания металлических и полупроводниковых жидкостей и изучения области микронеоднородности расплавов является модификацией [11], для более высокотемпературных расплавов до -2300 К.

На рис. 3 представлены результаты экспериментального исследования скорости распространения ультразвука ( $\vartheta s$ ) в зависимости от высоты ( $h$ ) столба жидкости образца исходного состава  $In_{81,65} - Te_{18,35}$  при различных температурах. Видно, что при 825, 813 и 806 К (соответственно линии 1-3) ( $\vartheta s - h$ ) - характеристики представляют собой прямые, параллельные оси  $h$ , то есть скорость распространения ультразвука не зависит от высоты, что свидетельствует об однородности расплава. Но при 795 К на ( $\vartheta s - h$ ) -характеристике (соответственно линия 4) наблюдается скачок скорости распространения ультразвука. Ступенька однозначно устанавливает факт расслаивания расплава на две жидкие фазы, различающиеся по величине скорости распространения ультразвука. Далее при 783 и 760 К величина ступеньки  $\Delta h$ , последовательно растет (см. рис. 3, линии 5,6), что говорит об увеличении концентрационного разрыва в сосуществующих слоях с понижением температуры.

Надо отметить, что ступеньки ( $\vartheta s - h$ ) -характеристик 4-6 фиксируются с большой точностью на одной и той же высоте.



**Рис. 3.** Изменение скорости распространения ультразвука по высоте при различных температурах в расслаивающемся расплаве исходного состава  $In_{81,65}Te_{18,35}$ . 1-6 соответствуют температурам 825, 813, 806, 795, 783, 760 К.

Тот факт, что граница между слоями при изменении температуры удерживается в одном положении, свидетельствует лишь о перераспределении атомов компонентов (соответственно  $In$  и  $Te$ ) без изменения объема фаз. Исходя из этого можно предположить, что состав такого раствора является критическим.

Данные, представленные на рис. 3, позволяют построить зависимость скорости распространения ультразвука вдоль линии моновариантного равновесия жидкость – жидкость. Для этого необходимо значения  $\vartheta s$ , отвечающие верхней и нижней ветвям ( $\vartheta s - h$ ) - характеристик, представить в зави-

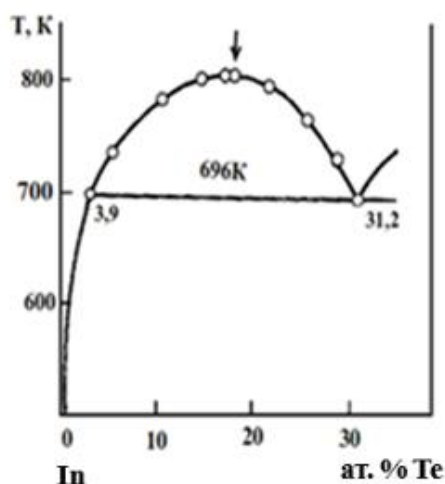
симости от температуры. В результате получается общая кривая, отвечающая зависимости скорости распространения ультразвука вдоль купола расслаивания.

В системе In-Te этим методом были проведены исследования температурной зависимости ( $\vartheta s$ -h) - характеристик в расплавах, содержащих 6, 11, 15, 18, 18.35, 22, 26, 29 ат. % Te.

В системе In-Te были обнаружены аномалии на политермах  $\vartheta s$ , суть которых заключается в том, что зависимость  $\vartheta s \sim f(T)$  проходит через пологий максимум, прежде чем становится линейной. Указанные аномалии распространяются на довольно широкий температурный интервал и наиболее выражены у сплава критического состава (18.35 ат% Te).

Согласно [12] расплавы системы In-Te являются полуметаллическими, то есть межатомные связи в них реализованы не только по металлическому типу, но и по ковалентному. Наличие в расплавах ковалентных связей обусловлено присутствием атомов теллура, склонных к образованию этих связей в силу известной специфики строения внешних электронных оболочек. Мы предлагаем, что наблюдаемые аномалии скорости распространения ультразвука в расплавах этой системы обусловлены именно возможностью сосуществования двух типов межатомных связей, что наряду с флуктуациями концентрации должно способствовать формированию значительных флуктуаций плотности. Характер же изменений последних при нагревании расплавов собственно и должен быть физической причиной возникновения аномалий на температурной зависимости скорости распространения ультразвука.

Результаты проведенных исследований дают полную экспериментальную информацию, на основании которой можно построить кривую моновариантного равновесия, ограничивающую область расслаивания на диаграмме фазовых равновесий системы In-Te. На рис. 4 приведены результаты такого построения. Полученные нами экспериментальные результаты достаточно хорошо согласуются с данными ранее выполненной работы [13].



**Рис. 4.** Фрагмент диаграммы фазовых равновесий системы In-Te, иллюстрирующий положение кривой моновариантного равновесия жидкость – жидкость в сочетании с монотектической горизонталью.

Таким образом, с использованием ультразвукового метода исследования уточнена область расслаивания в системе In-Te, построена кривая моновариантного равновесия, ограничивающая ука-

занную область. Установлены координаты критической точки: температура –  $(803 \pm 2)$  К, состав – 18.35 ат. % Те, остальное In.

Показано, что исследование скорости распространения ультразвука является эффективным и надежным методом построения кривых моновариантного равновесия жидкость – жидкость в высоко-температурных расплавах бинарных металлических и полупроводниковых систем.

*Поступило 11.12.2021 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Зломанов В.П., Новоселова А.В. р-Т-х-диаграммы состояния систем металл – халькоген. – М.: Наука, 1987. 208 с.
2. Абрикосов Н.Х., и др. Полупроводниковые халькогениды и сплавы на их основе. – М.: Наука, 1975, 219 с.
3. Григорчак И.И., и др. Плотность состояний в интеркалированных слоистых полупроводниках. – Укр. физ. журн. 1981. т. 26, №7, с. 1165-1168.
4. Глазов В.М., Ким С.Г. Исследование расслоения расплавов акустическим методом. – Доклады АН СССР, 1985, т. 282, №5, с. 1170-1173.
5. Глазов В.М., и др. Исследование расслаивания расплавов в системе Sb-Se акустическим методом. – Известия АН СССР, Неорганические материалы, 1990, т. 26, №3, с. 526-529.
6. Нуров К.Б. и др. Определение координат критического распада в расплавах систем Pb-Zn и Pb-Cu. – Вестник педагогического университета, 2021, № 1(10-11), с. 191-194.
7. Нуров К.Б. Основные особенности методики исследования расслаивающихся расплавов металлов и полупроводников акустическим методом. – Вестник ТНУ, 2015, №1/4(168), с. 127-130.
8. Нуров К.Б. Исследование области расслаивания расплавов в системе Cu-Pb импульсно-фазовым методом – Вестник ТНУ, Серия естественных наук, 2016, №1/1(192), с. 252-255.
9. Ходжаев Ф.К., Нуров К.Б. Исследование области расслаивания в системе Cu-Pb импульсно-фазовым методом. – Вестник Южно-Уральского госуниверситета. Серия металлургия, 2019, т. 19, №4, с. 4-9.
10. Глазов В.М. и др. Аппаратура и методика для исследования акустических свойств электронных расплавов. – Заводская лаборатория, 1985, т. 51, №3, с. 22-26.
11. Ким С.Г. Разработка методики и изучение ультраакустических свойств расплавов полуметаллов и полупроводников: Автреф. дисс... к. ф.-м. н. – М., 1985, 242 с.
12. Регель А.Р. и др. Акустические исследования структурных изменений при нагреве расплавов полупроводников и полуметаллов. – Физика и техника полупроводников, 1986, т. 20, №8, с. 1353-1376.
13. Глазов В.М., Ким С.Г. Акустические исследования расслаивания и закритических явлений в электронных расплавах. – Доклады АН СССР, 1986, т. 290, №4, с. 873-876.

А.С.Чафаров

## МУВОЗИНАТҲОИ ФАЗАГИИ СИСТЕМАИ In-Te

*Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ*

Мақолаи мазкур ба омӯзиши вобастагии ҳарорат аз суръати паҳншавии ултрасадо дар гудохташавии системаи In-Te бахшида шудааст. Хосиятҳои аномалии системаи In-Te дар политерма  $\vartheta_s$  муайян карда шудааст. Аномалияҳо ҳангоми наздик шудани концентратсияи гудохта, концентратсияи критикӣ тадричан зиёд мешавад. Хатҳои мувозинати моеъу–моеъи моновариантӣ ва параметрҳои критикӣ дар система муайян карда шудаанд.

**Калимаҳои калидӣ:** ҳарорат, фаза, система, индий, теллур, усули ултрасадоӣ, концентратсия.

A.S.Jafarov

## PHASE EQUILIBRIUM IN THE In-Te SYSTEM

*S.Ainy Tajik State Pedagogical University*

In this article the results of a study of the temperature dependence of the speed of propagation of ultrasound in exfoliating melts of the In-Te system are presents. In the In-Te system, anomalies in the polytherms  $\vartheta_s$ . It was found that these anomalies increase gradually as the concentration of melts approaches the critical one. The lines of monovariant liquid-liquid equilibrium and critical parameters have been refined.

**Key words:** temperature, phase, system, indium, tellurium, ultrasonic method, concentration.

УДК 620.193

Т.М.Умарова, С.С.Холова, Д.С.Кучакшоев\*

**СИНТЕЗ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ СИСТЕМ  
Al-Te, ЛЕГИРОВАННЫХ НЕОДИМОМ**

Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова в г.Душанбе,

\*Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана,

(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Х.Одиназода 16.08.2021 г.)

В работе кратко представлен анализ имеющихся литературных данных диаграммы состояния алюминий-теллур, показаны результаты исследований рентгенофазового и металлографического анализов сплавов системы Al-Te-Nd и перспектива их применения.

**Ключевые слова:** диаграмма состояния, алюминиевый сплав, неодим, теллурид алюминия, свойства, дифрактограмма, микроструктура.

Фазовая диаграмма системы Al-Te достаточно хорошо изучена, хотя в ней немало вопросов, особенно как речь идёт об образовании твёрдых фаз (ИМС), привлекающих внимание учёных-экспериментаторов различных стран. Наиболее интересны в данном направлении, на наш взгляд, работы Prabhu N. и Howe J.M., Colemenero J., Varandiaran J.M., Ferro D., (диаграмма построена на основе термического анализа), а также работы ChenyingShi, который показал термодинамическое моделирование бинарной системы Al – Te методом CALPHAD [1-5]; Said R. Castanet, Kehianian H.V. и Okamoto H., у которых диаграмма построена на основании расчётов с использованием ассоциированной модели с экспериментальными данными [6, 7]. В работах [8,9] выполнен сравнительный анализ имеющихся литературных данных относительно построения фазовой диаграммы Al-Te, на основании которой сделан вывод о существовании в правой части диаграммы химического соединения Al<sub>7</sub>Te<sub>10</sub>, подтвержденного рентгенофазовым анализом.

На рис. 1 представлена фазовая диаграмма алюминий-теллур авторов Prabhu N. и Howe J.M., на которой видно конгруэнтное плавление единственного химического соединения Al<sub>2</sub>Te<sub>3</sub> при 895°C. В целом, диаграмма состояния Al-Te хорошо изучена до 60% теллура, линия ликвидуса в интервале концентраций от 60 до 100% второго компонента нуждается в более точном определении, именно поэтому ряд авторов считает возможным существование более одного интерметаллического соединения (ИМС) в данной части диаграммы.

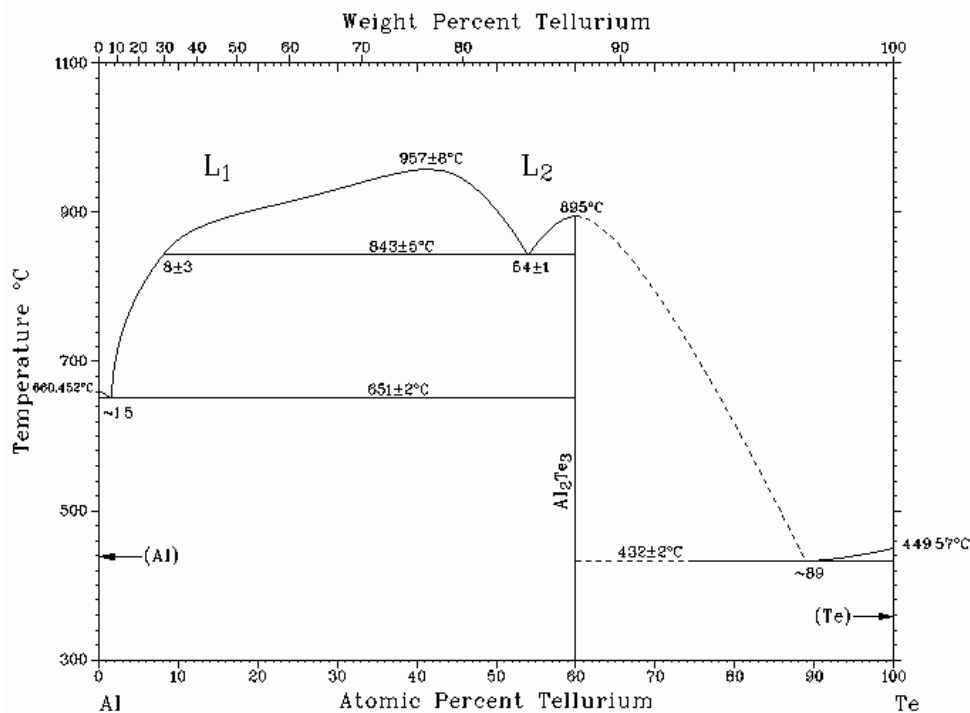


Рис. 1. Фазовая диаграмма Al-Te по Prabhu N.и Howe J.M. [2].

На сегодняшний день нет единого мнения относительно точного значения ИМС данной системы. Возможно их более четырёх, что будет иметь важное значение в обеспечении высоких физико-химических свойств сплавов (коррозионной стойкости, механических свойств и т.д.).

Теллур, как известно, термически стабилен, имеет превосходную электронную проводимость, высокую теоретическую объёмную мощность, что является хорошим основанием для использования теллурсодержащих сплавов в качестве микроэлектродного материала. Он используется в полупроводниковой технике наряду с известными проводниковыми сплавами систем Al-Sb, SiC, Ga-Sb; в качестве легирующей добавки в сплавах свинца, чугуна и стали для улучшения обрабатываемости и повышения механических свойств; в термогенераторах (теллуриды  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  и  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ ); в солнечных батареях (CdTe); в качестве полупроводниковых лазерных материалов; для производства цветных стёкол и эмалей [10] и т.д. Но экспериментаторам хорошо известно, что синтез сплавов с теллуром-дело не простое, процесс довольно сложный, так как реакция в печи протекает бурно, часто со взрывом, и это одна из причин того, что ценные свойства теллура и его соединений изучены не до конца. Поэтому сплавы с участием теллура привлекают к себе внимание материаловедов.

Анализ имеющихся литературных данных указывает на отсутствие данных о изучении свойств и применении сплавов системы Al-Te, легированных неодимом. Сегодня без металлов группы РЗМ невозможно создание полупроводниковых и сверхпроводниковых материалов, современной электроники, лазерной техники, оптических систем, материалов оборонной техники. Влияние редкоземельных металлов на алюминиевые сплавы всегда привлекает внимание исследователей, так как даже малые добавки лантаноидов (не более 0.5%) оказывают модифицирующий эффект на сплав-основу и, вследствие этого, приводит к лучшим показателям различных физико-химических характе-

ристик при их изучении. Поэтому, учитывая вышесказанное, сплавы системы Al-Te-Nd могут быть рекомендованы в качестве конструкционного материала с повышенными прочностными характеристиками и коррозионной стойкостью в машиностроении, авиа- и ракетной технике, в связи с чем актуальность данной работы не вызывает сомнений.

Добавка металла группы лантаноидов позволяет получить высокую электропроводность сплавов на основе алюминия. В работах Горбунова Ю.А. показано [11], что наиболее эффективным сплавом для применения в качестве проводникового материала является алюминиевый сплав 01417 с содержанием Ln7%, обладающий высокой коррозионной стойкостью и свариваемостью для изготовления бортовых проводов самолётов в условиях длительной работы и температурном интервале  $-50\div+250^{\circ}\text{C}$ . Также известно, что для лантаноидов с ростом температуры характерно увеличение коэффициента теплового расширения. Неодим, наряду с празеодимом, лантаном и церием, имеет более низкое значение коэффициента теплового расширения, чем другие лантаноиды.

Для синтеза сплавов систем Al-Te- Nd использованы следующие методы физико-химического анализа, приборы и оборудование: муфельная печь ПМ-8 013/262; металлографический анализ с помощью микроскопа NIKON SMZ 670 (x200), рентгенофазовый анализ с помощью рентгеновского дифрактометра ДРОН 1,5.

Образцы для исследования готовились в виде дисков диаметром 4-5 мм и толщиной 1.5 мм, основания которых шлифовали с последующим полированием. Съёмка рентгенограмм образцов проводилась при комнатной температуре со скоростью  $2^{\circ}/\text{мин}$  в интервале углов  $2\theta = 7 - 70$  (излучение Cu K $\alpha$  с длиной волны  $\lambda = 1.5405 \text{ \AA}$ , Ni-фильтр). При нахождении кристаллических фаз использовалась программа Search-Match-DEMO.

На рис. 2 представлена дифрактограмма сплава системы Al-Te-0.1% Nd, на которой видно присутствие линий алюминия, теллура, двух оксидов –  $\text{Nd}_2\text{O}_3$  ( $\text{O}_2$ ),  $\text{Te}_2\text{O}_5$  и соединения  $\text{Nd}_{0.58}\text{Al}_{10.14}\text{O}_{16.12}$  (с учётом окисляемости присутствующих компонентов в сплаве).

Увеличение концентрации третьего компонента системы (неодима) в 5 раз приводит к следующей картине (рис. 3). Кроме линий чистых компонентов (Al, Te), на дифрактограмме необходимо отметить существование оксидов  $\text{Te}_2\text{O}_5$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Nd}_2\text{O}_3$  и подтверждено ИМС-теллурид алюминия формулы  $\text{Al}_7\text{Te}_{10}$ , и это важно, поскольку сегодня нет единого мнения о наличии данной фазы в системе.



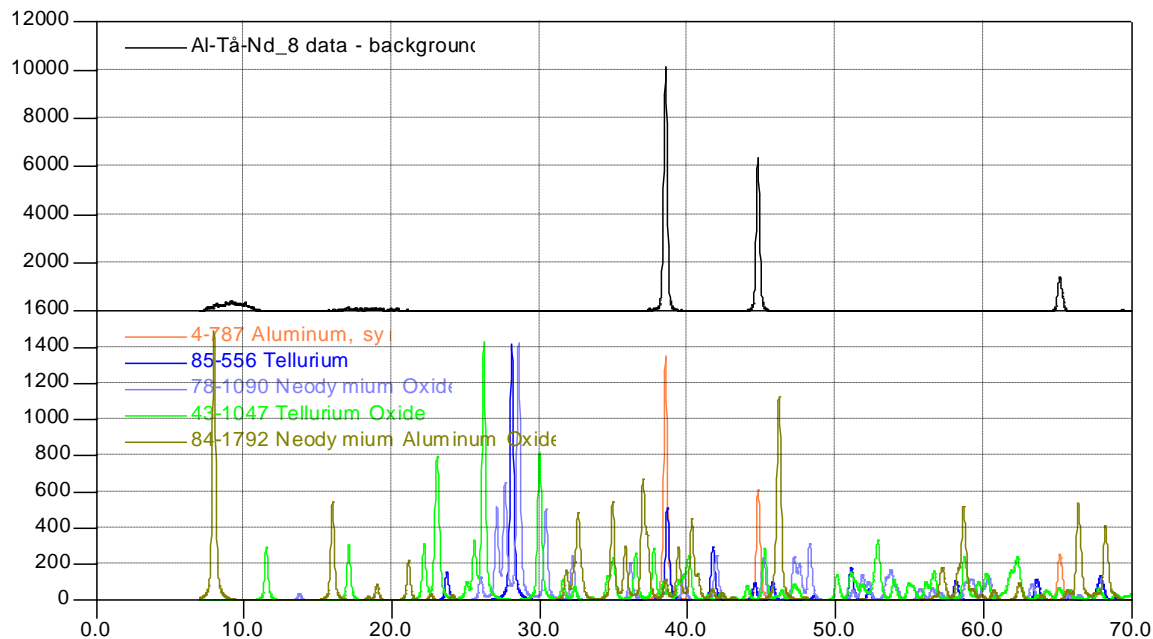


Рис. 2. Дифрактограммы соединений в системе Al-Te-0.1%Nd.

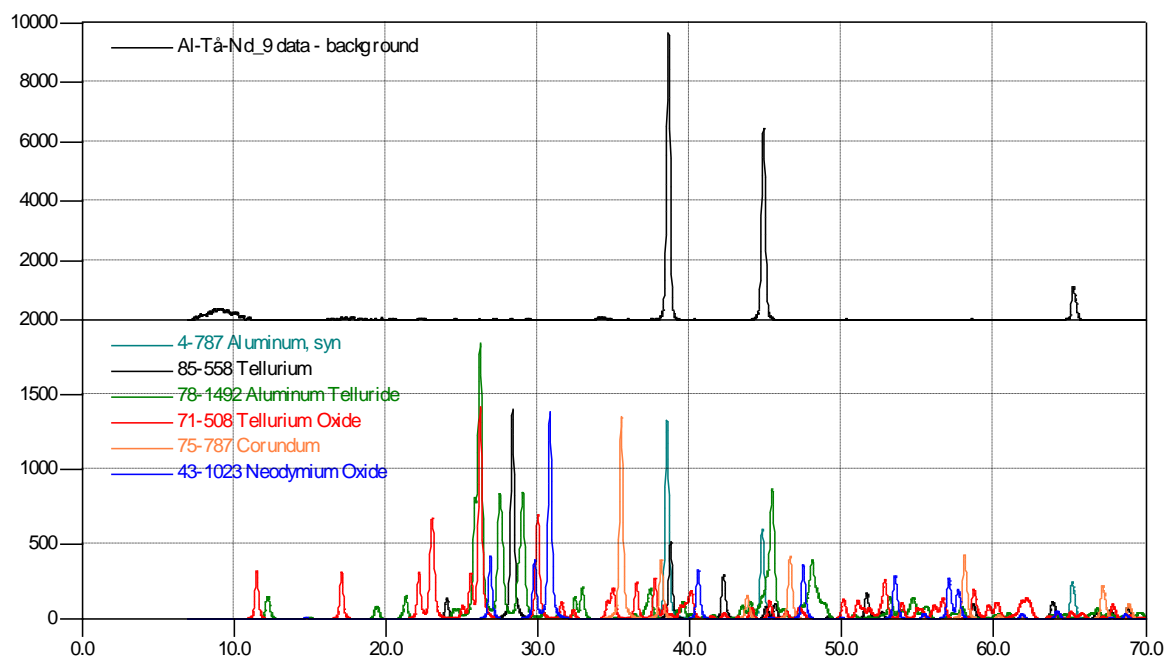
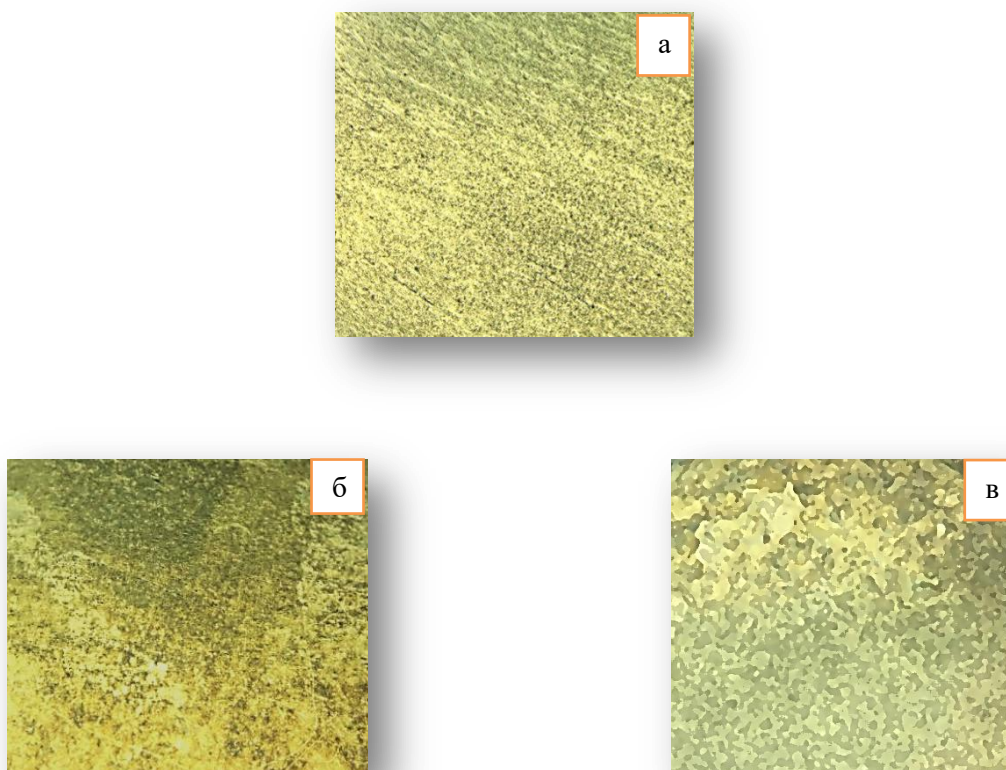


Рис. 3. Дифрактограммы соединений в системе Al-Te-0.5% Nd.

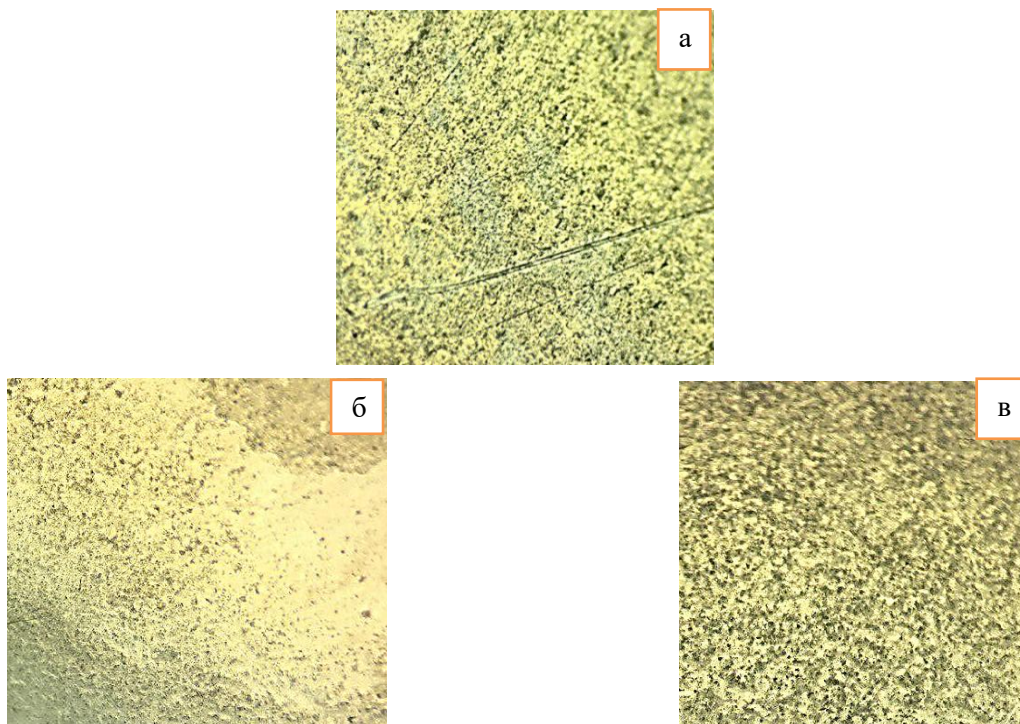
Сравнивая дифрактограммы на рисунках 2 и 3, необходимо отметить, что, кроме образования кристаллических фаз, можно видеть и аморфную составляющую в данном сплаве, что характерно для сплавов с теллуром (индием и др.).

Далее был проведен микроструктурный анализ сплава системы Al-Te-Nd в зависимости от концентрации неодима до и после травления поверхности образцов синтезированных сплавов. Под-

готовка образцов к микроструктурному анализу проводилась согласно рекомендациям авторов [12], но методика травления алюминиево-теллуристого сплава в литературе отсутствует, поэтому приходилось выбирать травитель и время травления методом проб и ошибок шагом в 30 сек. до 5 минут. Для выявления микроструктуры исследуемые образцы подвергались травлению 1.0% раствором NaOH при комнатной температуре. Таким образом, на рисунках 4-7 представлены результаты металлографического анализа сплавов данной системы с оптимальным временем травления (при увеличении в 200 раз).



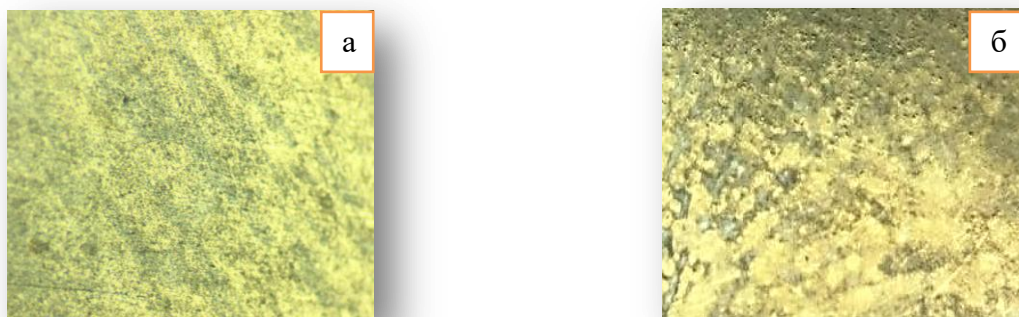
**Рис. 4.** Микроструктуры сплава системы Al-Te-0.01% Nd (а – до травления, б – травление 4 мин., в – травление 5 мин.).



**Рис. 5.** Микроструктуры сплава системы Al-Te-0.05%Nd (а – до травления, б – травление 2 мин., в – травление 3 мин.).



**Рис. 6.** Микроструктуры сплава системы Al-Te-0.10%Nd (а – до травления, б – травление 4 мин.).



**Рис. 7.** Микроструктуры сплава системы Al-Te-0.5% Nd (а – до травления, б – травление 4 мин.).

Анализ полученных снимков микроструктурного анализа позволяет заключить, что время травления для каждого состава сплава (в зависимости от концентрации неодима) индивидуально, причём оптимальное время травления составляет 4 минуты (кроме сплава Al-Te-0.05% Nd, которому для выявления структуры достаточно 3 минут).

Результаты исследований позволяют прийти к следующим выводам:

1. В системе Al-Te подтверждено наличие химического соединения теллурида алюминия формулы  $Al_7Te_{10}$  методом рентгенофазового анализа.
2. Рентгенофазовым анализом подтверждено наличие аморфной составляющей сплавов системы Al-Te- Nd (с 0.1 и 0.5% последнего).
3. Отработана методика травления сплавов системы Al-Te эвтектического состава, определено оптимальное время и концентрация травителя для выявления микроструктуры.
4. Полученные результаты микроструктурного анализа свидетельствуют об эффективности модифицирования алюминиево-теллуридной эвтектики неодимом до 0.5%, в присутствии которого первичные выделения приобретают сферическую форму (рис. 5 и 6), что позволяет в будущем рассматривать сплав состава Al-Te-0.05% Nd как наиболее перспективный конструкционный материал с улучшенными физико-химическими свойствами.

*Поступило 03.01.2022 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лякишев Н.П. Диаграммы состояния двойных металлических сплавов, 1996, 498 с.
2. Prabhu N., Howe J.M. The Al-Te (Aluminum-Tellurium) System, Bull. Alloys Phase Diagr., 1990, v. 11(2), pp. 202-206.
3. Kniep R., Blees P. Phasengleichgewichte und intermedia're Phasenim System Al-Te/Phase Relations and Intermediate Phases in the Al-Te System. – Z. Naturforsch. B, 1988, v. 43(2), pp. 182-188.
4. Colemenero J., Barandiaran J.M. – J. Noncrystallogr. Solids, 1979, v. 30, pp. 263-271.
5. Chenying Shi, Biaobiao Yang, Biao Hu, Yong Du, Sheng Yao. Thermodynamic Description of the Al-X (X = S, Se, Te) Systems. – Journal of Phase Equilibria and Diffusion, 2019.
6. Said H., Chastel R., Bergman C., Castanet R. Thermodynamic Investigation on Al-Te Alloys by Differential Thermal Analysis and Knudsen-Cell Mass-Spectrometry, 1981, v. 12(32), pp. 360-365.
7. Okamoto H. Al-Te (Aluminum-Tellurium). – J. Phase Equilib., 2000, v. 21(1), pp. 106-107.
8. Мирзоева Х., Умарова Т.М. Синтез сплавов на основе системы Al-Te-Pr. – Мат-лы науч.-практ. конф. «XI Ломоносовские чтения», посвящ. 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан. – Душанбе: Типография Филиала МГУ, 2021, с.52-54.
9. Умарова Т.М., Холова С.С. Особенности синтеза сплавов на основе системы Al-Te. – Мат-лы науч.-практ. конф. – Там же, с.55-58.
10. Теллур. Справочник химика. [Электронный ресурс] <http://chem100.ru/elem.php?n=52>
11. Gorbunov Ju.A. The Role and Prospects of Rare Earth Metals in the Development of Physical-Mechanical Characteristics and Applications of Deformable Aluminum Alloys – Journal of Siberian Federal University. – Engineering & Technologies, 2015, v. 5, №8, pp. 636-645.
12. Мальцев В.М. Металлография промышленных цветных металлов и сплавов. – М., 2013, 372 с.

Т.М.Умарова, С.С.Холова, Д.С.Кучакшоев\*

## СИНТЕЗ ВА ХУСУСИЯТҲОИ ФИЗИКАЮ ХИМИЯВИИ ХУЛАҲОИ СИСТЕМАҲОИ Al-Te, БО НЕОДИМ ҶАВҲАРКАРДАШУДА

*Филиали ДДМ Москва ба номи М.В.Ломоносов дар ш. Душанбе,*

*\*Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умаров АМИТ*

Дар мақола мухтасар тахлили маълумоти адабиёти мавҷуда оид ба диаграммаи фазаҳои алюминий-теллур, натиҷаҳои тадқиқоти фазаи рентгенӣ ва металлографии хӯлаҳои системаи Al-Te-Nd ва дурнамои татбиқи онҳо нишон дода шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** хӯлаи алюминий, металлҳои нодирзамин, лантан, празеодим, неодим, рафтори анодӣ, хатҳои қачи қутбишуда.

T.M.Umarova, S.S.Holova, D.S.Kuchakshoev\*

## SYNTHESIS AND PHYSICOCHEMICAL PROPERTIES OF Al-Te ALLOYS ALLOYED BY NEODYMIUM

*Lomonosov Moscow State University in Dushanbe,*

*\*S.U.Umarov Physical-Technical Institute of NACT*

The analysis of the available literature data on the aluminum-tellurium phase diagram, shows the results of studies of X-ray phase and metallographic analyzes of alloys of the Al-Te-Nd system and the prospect of their application are briefly presented.

**Key words:** state diagram, aluminum alloy, neodymium, aluminum telluride, diffractogram, microstructure.

УДК 678.073:665.779

А.Тошмахмадзода

## МОДИФИКАЦИЯ БИТУМА С ДОБАВКАМИ ПОЛИМЕРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВТОРИЧНОГО СЫРЬЯ И ПОБОЧНЫХ ПРОДУКТОВ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

*Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими**(Представлено академиком НАН Таджикистана Д.Х.Халиковым 16.12. 2021 г.)*

*В статье приведены результаты исследования влияния полимерных добавок из дивинилстирольного термоэластопласта, гудрона растительных масел, госсиполовой смолы и остатка от регенерации отработанных смазочных масел на физико-механические свойства битума. Показано, что применение вышеназванных добавок позволяет улучшить физико-механические свойства битума.*

**Ключевые слова:** полимер, масла, добавка, госсиполовая смола, свойства.

Научные исследования и практический опыт эксплуатации битумосодержащих материалов в дорожных покрытиях позволяют определить основные пути обеспечения долговечности дорожных покрытий. Это обусловлено повышением ряда их положительных качеств: применение высококачественных вяжущих и минеральных материалов, повышение эластичности органических вяжущих, регулирование температурного интервала эксплуатации вяжущих и обеспечение эксплуатационных качеств материалов.

В настоящее время, решая проблему обеспечения долговечности и качества дорожных покрытий, можно и нужно использовать качественные вяжущие с применением различных модифицирующих добавок, в частности полимерных.

Полимерно-битумные вяжущие (ПБВ) имеют ряд преимуществ, в частности им свойственны: высокая эластичность, более широкий интервал пластичности, более сильная адгезия с минеральными компонентами асфальтобетонной смеси, улучшенные температурные свойства, снижение колеобразования и повышение коррозионной стойкости дорожных покрытий.

В практике обычно для повышения совместимости полимерных добавок, например термопластов и битумов, используются в качестве модификатора растворы термоэластопластов (ТЭП) в растворителях, в частности низкокипящих маслах, дизельном топливе, ксилоле и др.

По мнению авторов [1-3], полимерно-битумные вяжущие должны характеризоваться необходимой пластификацией и адгезией к поверхности каменных материалов, чтобы обеспечить требуемый коэффициент длительной водостойкости материала и его длительную эксплуатацию в покрытии без появления определенных дефектов. Однако практика показывает, что введение только полимера

типа термоэластопластов в битум в большинстве случаев не позволяет получить требуемую пластификацию и адгезию ПБВ.

Поэтому разработка оптимальных ТЭП с предельной основной цепью и высокой совместимостью с низковязкими крупнотоннажными битумами представляется актуальной задачей, и в этом аспекте весьма эффективны смесевые термоэластопласты, представляющие собой, по сути, полимерные смеси с другими растворителями, в частности с низкокипящими маслами, полученными механическим путем.

В исследовании использовались следующие материалы: битум марки БНД60/90, остаток от регенерации смазочных масел (ОРСМ), госсиполовая смола (ГС), дивинилстирольный термоэластопласты (ДСТ). Характеристики битума приведены в табл. 1.

Таблица 1

Физико-механические показатели битума

Наименование показателя	Значение показателя по ГОСТ 22245 90	Значение показателя
Глубина проникания иглы, 0.1 мм, при 25°C	61-90	66
Глубина проникания иглы, 0.1 мм, при 0°C	не менее 20	23
Растяжимость, см, при 25°C	не менее 55	100
Растяжимость, см, при 0°C	не менее 3.5	7
Температура размягчения, °C	не ниже 47	52
Температура вспышки, °C	не ниже 230	235
Температура хрупкости, °C	не выше -15	- 17
Изменение температуры размягчения после прогрева, с.	не более 5	4

Остатки от регенерации смазочных масел представляют собой смесь нефтяных смазочных масел, включающих продукты окисления, смолистые вещества, частицы металла, механические примеси, активные присадки. По данным авторов [4], остатки от регенерации обычно содержат около 5% воды и менее 5% механических примесей, имеют вязкость  $C_{50}^{10} = (15 \div 30)c$ , температуру вспышки выше 140°C. Они содержат в основном парафино-нафтеновые углеводороды (45-60%), небольшое количество моноциклоароматических и бициклоароматических веществ (10-20%), смол (5%) и асфальтенов (5%). Количество отработанных смазочных масел в нашей республике значительно.

Госсиполовая смола является отходом предприятий, по производству пищевого масла, она образуется при дистилляции жирных кислот хлопкового соапстока. С целью применения госсипола в дорожном хозяйстве последние десятилетия отечественные исследователи изучали его вяжущие свойства [5].

Термоэластопласты – этот класс полимеров в перспективе имеет наибольший интерес для применения в качестве модификаторов битума, сочетающего в себе положительные свойства эластомеров, обладает совокупностью свойств, которые превосходят традиционные резины, в частности высокой устойчивостью при высоких температурах, эластичностью при низких температурах [6,7]. Анализ проведенных ранее работ авторов [7,8] показывает, что в настоящее время применяемые добавки полимеров в дорожном строительстве дивинилстирольные термоэластопласты (ДСТ) являются наиболее эффективным и модификаторам битума. ДСТ имеет следующее строение:





С целью определения влияния ОРСМ на физико-механические свойства битума нами проведены эксперименты в лабораторных условиях. Результаты исследования приведены в табл. 2.

Таблица 2

Изменение физико-механических свойств битума при добавлении в его состав остатка от регенерации смазочных масел

Состав вяжущего	Количество добавки, %	Температура, °С		Интервал пластичности, °С	Глубина проникания иглы при 25°С	Растяжимость при 25°С, см
		размягчения	хрупкость			
Битум	-	52	-17	69	71	100
	2	52	-17	69	77	98
	4	50	-18	68	81	80
	6	46	-19	64	94	74
	10	42	-21	63	106	65
	12	39	-23	62	148	56

Анализ данных табл. 2 показывает, что при добавлении остатка от регенерации смазочных масел в количестве 2-12% к битуму с глубиной проникания 60-90 (0.1мм) получают битум с глубиной проникания 90-130 (0.1мм) и более (см. табл. 1).

С целью повышения совместимости полимерные добавки с битумом нами проведено исследование влияния ОРСМ на свойства битума, содержащего полимерные добавки из ДСТ. Для сравнения нами было изучено и исследовано влияние добавки из госсиполовой смолы на свойства битума и битум с полимерными добавками из ДСТ.

Исследование складывалось следующим образом: в битум вводили добавки различного количества из ДСТ, а затем вводили от 3 до 8% от веса битума добавок от ОРСМ, с шагом 2% смолы госсиполовой при температуре 160°С, затем смесь перемешивали в течение 1.5 ч. После приготовленные смеси были испытаны. Результаты исследования приведены в табл. 3 и 4.

Таблица 3

Совместное влияние добавки из ДСТ и ОРСМ на физико-механические свойства дорожного битума

№ п/п	Количество добавки, % по массе		Глубина проникновения иглы, 0.1мм при 25°С	Температура размягчения (КиШ), °С	Растяжимость при 25°С, см
	ДСТ	ОРСМ			
1	-	-	71.0	52	100
2	2	-	63.5	54	96
3	-	2	77.0	52	98
4	2	2	66.5	53	97
5	4	-	60.4	56,5	89
6	-	4	81.0	50	86
7	4	4	64.5	52	87
8	6	-	54.5	58	64
9	-	6	94	46	83
10	6	6	73.5	54,6	74



Таблица 4

Влияние добавки из ГС и ОРСМ на физико-механические свойства дорожного битума

№п/п	Количество добавки, % по массе		Глубина проникновения иглы, 0.1мм при 25°C	Температура размягчения (КиШ), °C	Растяжи- мость при 25°C, см
	ГС	ОРСМ			
1	-	-	71	52	100
2	2		71.2	51	96
3		2	77	47	80
4	2	2	76.5	49	84
5	4		66.0	53.5	80
6		4	81	46	76
7	4	4	63.5	49.5	72
8	6		60.5	54.6	64
9		6	94	45	68
10	6	6	79.5	48.6	66

Анализ данных табл. 2 и 3 показывает, что при введении 2% добавки из ДСТ глубина проникновения иглы при 25°C составляет 63.5 (0.1мм), ГС 67.5 (0.1мм). При увеличении концентрации добавки от 6 до 8% продолжалось увеличение жесткости вяжущего. Так при 8% максимальное значение глубины проникание иглы для ДСТ 48.5 (0.1мм), а при ГС составляет 56.5 (0.1мм). Если рассматривать показатели растяжимости битума с добавками, аналогично повторяется такая тенденция, как при пенетрации. С увеличением концентрации добавки уменьшается растяжимость битума. Анализ зависимости значение температуры размягчения битума от количества добавки показывает, что с увеличением концентрации добавки повышается значение температуры размягчения битума. Приведенные в табл. 2 данные и анализ результатов табл. 3 показывают, что при совместном добавлении полимера и ОРСМ до 12% в битум значительно улучшаются его пластифицирующие свойства в сравнении чем, с битум с добавками ДСТ и ГС без ОРСМ. Однако ГС имеет ряд преимуществ как адгезионно-пластифицирующая добавка (см. табл. 4). С этой целью для определения изменения структурного состава битума при введении добавки нами проведен ИК-спектральный анализ состава битума с добавками в диапазоне от 4000 до 600 (см. рис.).

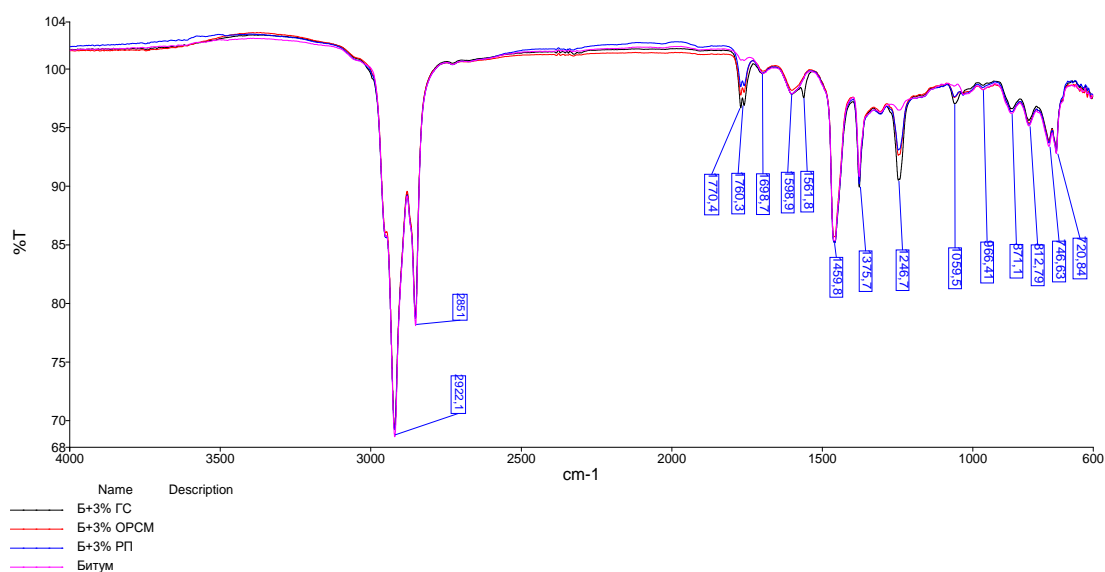


Рис. ИК-спектроскопия битума с добавками.

В отличие от низкомолекулярных соединений, полимеры состоят из длинных цепей. Из приведенных на рис. 1 данных видно, что битум активно взаимодействует с добавками ДСТ, ГС и ОРСМ, о чем свидетельствуют смещения в области  $3110 - 765 \text{ см}^{-1}$ , 1610, 1715, подтверждающие наличие различных функциональных групп органических кислородосодержащих соединений (-ОН, С=О, СООН).

### В ы в о д ы

Проведенные исследования показывают, что применение добавок из ОРСМ в вязких битумах снижает вязкость и улучшает их реологические свойства. Это обеспечивает обволакивание минерального материала даже при слабом подогреве, что в результате даёт возможность достаточно хорошо смачивать тонким слоем битума поверхность минерального сырья и проникнуть в его поры, и с одной стороны, снижают затраты тепловой энергии на подогрев, а с другой стороны, предотвращается преждевременное старение битума.

В технической литературе приведены сведения что окисленные остатки от регенерации оказывают заметное пластифицирующее действие на вязкий битум, снижая температуру его хрупкости на  $15-20^\circ\text{C}$  при введении их в количестве 20-30%, а также позволяют, наряду с улучшением деформативных свойств, увеличить соответственно выход вяжущего. По мнению [9], окисление остатка от регенерации масел можно производить на обычных установках для переработки гудрона в битум. Рекомендуется ступенчатый режим окисления: первые 2 ч процесс надо вести при  $150^\circ\text{C}$ , а затем до окончания при  $200-210^\circ\text{C}$ . В результате окисления получают продукт вязкостью  $C_{60}^5 = (180 \div 250)\text{с}$ , с температурой хрупкости ниже  $-25^\circ\text{C}$ , температурой вспышки выше  $200^\circ\text{C}$ . В зависимости от вязкости исходного битума количество добавляемого окисленного продукта лежит в пределах от 10 до 30%.

Окисленные остатки от регенерации смазочных масел применяют подогретым до  $60-80^\circ\text{C}$ , смешение с вязким битумом производят в течение 30 мин при температурах, выбранных в соответствии с маркой исходного вязкого битума в пределах от  $100$  до  $160^\circ\text{C}$ .

В результате окисления остатков от регенерации масел происходит накопление асфальтенов (до 16%) и смол (до 20%) за счет уменьшения содержания углеводов. Однако представленные исследования являются предварительными или условными, для полного исследования и влияния изучения влияния остатка от регенерации смазочных масел на эксплуатационные свойства битума и материалов на его основе и надо провести комплекс экспериментов.

Совместные применения ДСТ, ОРСМ и в комплексе ГС имеют ряд преимуществ, в сфере пластификации и адгезии битума с минеральными материалами.

*Поступило 16.12.2021 г.*

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Колбановская А.С., Михайлов В.В. Дорожные битумы. – М.: Транспорт, 1973, 264 с.
2. Гун Р.Б. Нефтяные битумы. – М.: Химия, 1973, 450 с.
3. Сайрахмонов Р.Х., Умаров С.С. и др. Повышение адгезионных свойств битума путем применения комплексной добавки. – Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2016, № 1-1 (192), с.181-185.

4. Асад Т., Юнусов М.Ю., Умаров С.С., Сайрахмонов Р.Х. Теоретические аспекты, экспериментальные исследования эффективности применения комплексной добавки различного функционального назначения в составе дорожных битумов. – Политехнический вестник. Серия инженерные исследования, 2020, №1 (49), с. 123
5. Сайрахмонов Р.Х., Исмоилов Л.С., Бобоев Х.К. Комплексные добавки на основе госсиполовой смолы для повышения устойчивости асфальтобетонов. – Журнал “Дороги Содружества независимых государств”, 2019, №3 (77), с. 98-99.
6. Вольфсон С.Н., Хакималин Ю.Н., Закирова Л.Ю. Модификация битумов как способ повышения их эксплуатационных свойств. – Вестник технологического университета, 2016, т. 19, №17, с. 29-33.
7. Сайрахмонов Р.Х., Бобоев Х.К., Нурмадов Г.Н. Влияние дробленной резиновой крошки на свойства битума. – Политехнический вестник. Серия инженерные исследования, 2019, №2 (46), с. 44-47.
8. Гохман Л.М. Полимерно-битумные композиции на основе ДСТ в зависимости от типа дисперсных структур битумов. – М.: Транспорт, 1975, 80 с.
9. Руденская И.М., Руденский А.В. Органические вяжущие для дорожного строительства. – М.: Транспорт, 1984, 229 с.

А.Тошмахмадзода

**БИТУМИ БО ИЛОВАГИҲОИ ПОЛИМЕРӢ АЗ БОҶИМОНДАИ КОРКАРДИ  
КОРҲОНАҲОИ САНОАТӢ ВА МАҲСУЛОТҲОИ ДУЮМДАРАҶА  
МОДИФИТСИРОНИДАШУДА**

*Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ*

Дар мақолаи маскур татқиқоти таъсири иловагиҳои полимерӣ аз двинистирол, қатрони равғани растаӣ, смолаи госсиполӣ ва боқимонда аз коркарди равғанҳои истифодашудаи автомобилӣ ба хосиятҳои физикию-механикии мум омӯхта шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** полимер, равған, иловагӣ, қатрони госсиполӣ, хосият.

A.Toshmakhmadzoda

**MODIFICATION OF BITUMEN WITH POLYMER ADDITIVES USING  
SECONDARY RAW MATERIALS AND BY-PRODUCTS OF THE INDUSTRY**

*M.S.Osimi Tajik Technical University*

In this article the effect of polymer additives from dynistyrene thermoplastic elastomer (DST), vegetable oil tar, gossypol resin (GS) and the residue from the regeneration of used lubricating oils (ORSM) on the physical and mechanical properties of bitumen are studied. It is shown that the use of the above-mentioned additives makes it possible to improve the physical and mechanical properties of bitumen.

**Key words:** polymer, oils, additive, gossypol resin, properties.

УДК 581.132:633.511

Ф.М.Тошов, Ш.Р.Самихов, Ш.А.Курбонов, Н.Х.Ойзода\*,

член-корреспондент НАН Таджикистана Х.А.Абдуллаев\*

**ВЛИЯНИЕ ФОСФОРНОГО УДОБРЕНИЯ, ПОЛУЧЕННОГО  
ИЗ ФОСФОРИТОВ РИВАТСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ,  
НА БИОЛОГИЧЕСКИЕ И ХОЗЯЙСТВЕННО ЦЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ  
СРЕДНЕВОЛОКНИСТОГО ХЛОПЧАТНИКА**

*Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана,**\*Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана*

*Установлено, что внесение в почву суперфосфата с содержанием  $P_2O_5$  13-20%, полученного из фосфоритов Риватского месторождения, положительно влияет на морфобиологические, фотосинтетические, хозяйственные показатели и технологические свойства хлопкового волокна средневолокнистого хлопчатника сорта Гулистон-2. Обнаружено, что в результате применения этого фосфорного удобрения увеличиваются высота главного стебля (в 3.1 раза), общая листовая поверхность растения (в 3.2 раза), число сформировавшихся плодовых органов (в 3.7 раза) по сравнению с контрольными растениями (без внесения фосфорного удобрения). Величина биологического урожая повышается в 2.7 раза, а хозяйственный урожай – в 1.7 раза.*

**Ключевые слова:** *средневолокнистый хлопчатник, фосфоритное сырьё, морфобиологические показатели, распределение ассимилятов, биологический и хозяйственный урожай, технологические качества хлопкового волокна.*

В предыдущей нашей работе [1] было показано, что внесение фосфорного удобрения, изготовленного из фосфоритов Каратагского месторождения, способствует повышению показателей фотосинтеза, значительно увеличивает массу вегетативных и генеративных органов хлопчатника, получению высокого урожая хорошего качества.

В настоящей работе приводятся результаты исследования количества и площади листьев УПП листа, распределения ассимилятов по органам и частям растений средневолокнистого хлопчатника сорта Гулистон-2 и показатели свойств хлопкового волокна при внесении фосфорных удобрений, изготовленных из фосфоритов Риватского месторождения.

**М а т е р и а л и м е т о д ы и с с л е д о в а н и я**

Материалом для исследования служил промышленный сорт средневолокнистого хлопчатника (*Gossypium hirsutum* L.) с неопредельным типом ветвления Гулистон-2 селекции Института ботаники, физиологии и генетики растений НАНТ. Ниже приводится морфобиологическая характеристика сорта.

---

*Адрес для корреспонденции:* Тошов Фирдавс Мунавварович, Самихов Шонавруз Рахимович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: Zarafshoni94@mail.ru

**Сорт Гулистон-2.** Выведен в результате скрещивания сорта Хорезм-125 с сортом АН Узбекистан-3 с многократными индивидуальными отборами с использованием фотосинтетических и физиологических признаков. Авторы сорта – Ш.Т.Бурнашев, Х.А.Абдуллаев.

Куст высотой 90-100 см, пирамидальной формы, стебель устойчив к полеганию, симподиальные ветви полуторного типа, среднеопушённые, первая плодовая ветвь закладывается на 4-5 узлах главного стебля. Листья 3-5-лопастные, среднерассечённые, средняя лопасть треугольная. Цветок жёлтого цвета. Коробочка шарообразной формы, поверхность мелкожелезистая, масса сырца одной коробочки – 5-6.0 г. Семена овальной формы, опушение сплошное с серым подпушком, масса 1000 семян – 115-120 г. Урожай хлопка-сырца – 35-40 ц/га, выход волокна – 36-37%, волокно IV типа: штапельная длина – 35-36 мм, метрический номер – 5400-6000, разрывная нагрузка – 4.4-4.5 г, разрывная длина – 28-28.5 км.

Сорт скороспелее стандартного сорта 108-Ф на 10 дней, вилтоустойчив. Сорт районирован в Республике Таджикистан с 2001 г.

Опыты были заложены на экспериментальном участке Института ботаники, физиологии и генетики растений НАНТ, расположенном в восточной части Гиссарской долины на высоте 830 м над ур. м. Перед началом опытов в почве участка определяли содержание  $P_2O_5$ . Почву брали на глубине 20-25 см. Анализ показал, что содержание  $P_2O_5$  в почве составлял 0.280-0.515%.

Растения выращивали согласно агрорекомендациям по выращиванию хлопчатника в Таджикистане [2]. Хлопчатник, выращиваемый с внесением только азотного удобрения, служил в качестве контроля. В опытных вариантах в течение вегетации растений было внесено удобрений из расчёта 350 кг/га суперфосфата, аммиачной селитры 180-200 и 45 кг/га калийных удобрений (KCL). Фосфорное удобрение – суперфосфат, было получено из фосфоритов Риватского месторождения методом флотации. Содержания некоторых микроэлементов в составе Риватского фосфорита были проанализированы на высокотехнологичном волнодисперсионном рентгенофлуоресцентном спектрометре S8TIGER (Германия) [3, 4].

Листовую поверхность растения определяли по периметру листа (длине и ширине) с использованием поправочного коэффициента 0.707 [5].

УПП листа определяли с помощью специального листового бура площадью не менее 0.8 см<sup>2</sup>. Высечки брали из центральной части листа между жилками, из той же части, которая обычно используется для измерений интенсивности видимого фотосинтеза. Высечки брали из пятого-шестого листьев от точки роста главного стебля в возрасте 20-25 дней и высушивали их до постоянного веса при температуре 100°C.

Для анализа распределения и накопления сухого вещества по органам хлопчатника определяли массу корня и надземных органов, путём их высушивания до постоянного веса в термостате при температуре 105°C.

Технологические свойства хлопкового волокна определяли стандартными методами [6], разработанными в Центральном научно-исследовательском институте хлопчатобумажной промышленности (ЦИНИХБИ, Москва, Россия) в лаборатории технологии волокна Института земледелия ТАСХН.

Статистический анализ полученных данных проводили с использованием программы *Microsoft Excel 2010*. В таблицах приведены среднеарифметические величины и их стандартные ошибки из трёх биологических повторностей трёх параллельных аналитических определений.

**Результаты и их обсуждение**

Результаты подсчёта количества листьев и определения листовой поверхности растения, УПП листа, распределения сухого вещества по органам и частям растения хлопчатника и технологический анализ свойств хлопкового волокна приведены в табл. 1-3.

Результаты определения таких важных показателей фотосинтеза, как число листьев, площадь листьев и удельной поверхности плотности листа (УППЛ) показывают, что под влиянием фосфорного удобрения, изготовленного из сырья Риватского месторождения, увеличивается величина перечисленных выше показателей по сравнению с контролем. При этом, если различия между контрольным и опытным вариантом по числу листьев очень существенны (на 63%), то по показателям площади листьев и удельной поверхностной плотности листа между ними достоверных различий нет.

Таблица 1

**Морфологические показатели хлопчатника сорта Гулистон-2**

после внесения фосфорного удобрения, изготовленного из Риватского месторождения. Фаза – бутонизация

Вид, сорт	Варианты опыта	Число листьев, шт./растение	Площадь листьев, дм <sup>2</sup> /растение	УПП листа, г/дм <sup>2</sup>
<i>Gossypium hirsutum</i> L., Гулистон-2	Контроль	14±1.15	28.48±0.87	0.618±0.03
	Опыт	22±1	29.76±3.96	0.705±0.03

Из данных табл. 2 видно, что при внесении фосфорного удобрения из расчёта 350 кг/га у средневолокнистого хлопчатника сорта Гулистон-2 по сравнению с контрольными растениями увеличивается масса: стебля – в 3.1 раза, листьев – в 3.2 раза, генеративных органов в 20.9 раза, зелёных коробочек – в 3.7 раза, хлопка-сырца – в 1.7 раза и общая биологическая масса – в 2.7 раза.

Таблица 2

Распределение ассимилятов и сухой биомассы по органам растений хлопчатника сорта Гулистон-2, при внесении суперфосфата, полученного из фосфоритов Риватского месторождения.

Фаза полного созревания урожая – 01.10.2020 г.

Варианты опыта	Сухая масса органов и частей растения, г									
	корень	стебель	листья	черешки листьев	бутоны, цветки и завязи	плодовые ветви	зелёные коробочки	масса хлопка-сырца одного растения	масса створок раскрытых коробочек	общая сухая биомасса растения, г
Контроль	3.07±0.58	6.03±0.26	7.17±0.87	4.47±3.22	0.87±0.67	0.43±0.09	7.2±1.65	17.93±0.55	6.37±0.29	53.54±12.83
Опыт	9.03±1.07	18.83±2.02	23.37±4.14	2.9±0.46	18.23±2.33	8.03±0.92	26.6±5.27	30.83±8.04	10.53±2.76	148.35±27.01±

Ранее [7] было обнаружено, что у средневолокнистого хлопчатника сорта Шавкат-80 величина этих морфобиологических и хозяйственно ценных показателей под влиянием суперфосфата, полученного из фосфоритов Риватского месторождения, меняется в такой же степени, то есть масса: стеб-

ля – 1.5 раза, листьев – 1.8 раза, корня – 1.9 раза, бутонов, цветков и завязей – 2.2 раза, зелёных коробочек – 4.9 раза, массы хлопка-сырца с одного растения – в 2.9 раза.

Таким образом, результаты наших исследований показали, что внесение фосфорных удобрений, полученных из фосфоритов Риватского месторождения, приводит к значительному увеличению биологического урожая и его хозяйственно ценной части у средневолокнистого хлопчатника сорта Гулистон-2.

Минеральные удобрения в оптимальных дозах являются наиболее эффективными и действенными факторами улучшения свойств и параметров хлопкового волокна. Эффективность тех или иных вносимых минеральных удобрений под хлопчатник обычно оценивают по конечному результату – качеству волокна. В этой связи нами также был проведен анализ технологических свойств хлопкового волокна исследованного сорта хлопчатника (см.табл.3).

Таблица 3

Технологические свойства волокна сорта средневолокнистого хлопчатника Гулистон-2 при внесении суперфосфата, изготовленного из фосфоритов Риватского месторождения. Урожай 2020 г.

Варианты опыта	Масса хлопка-сырца одной коробочки, г	Выход волокна, %	Штапельная длина, мм	Разрывная нагрузка г, с	Метрический номер, мм/мг	Разрывная длина, км
Контроль	5.4±0.26	36.37±1.03	33±0.58	4.33±0.09	5350±2.82	23.17±0.47
Опыт	5.5±0.12	40.07±0.92	33±0.29	4.43±0.09	5333.3±88.19	23.67±0.82

Как видно из данных табл. 3, после внесения фосфорных удобрений, полученных из фосфоритов Риватского месторождения, основной показатель, определяющий промышленную ценность сорта – выход волокна у сорта Гулистон-2, увеличивается на 3.6%.

Остальные технологические показатели хлопкового волокна, такие как штапельная длина, разрывная длина, разрывная нагрузка и метрический номер (тонина) при внесении фосфорных удобрений, изготовленных из фосфоритов Риватского месторождения, почти не меняются (табл. 3).

Таким образом, полученные данные позволяют заключить, что суперфосфат, изготовленный из фосфоритов Риватского месторождения, положительно влияет на биологический и хозяйственный урожай и некоторые технологические свойства хлопкового волокна сорта средневолокнистого хлопчатника Гулистон-2. Изготовленные фосфорные удобрения из Риватского фосфорита можно рекомендовать для использования в производстве при выращивании средневолокнистых и тонковолокнистых сортов хлопчатника с целью получения высокого урожая хорошего качества.

Поступило 11.01.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абдуллаев Х.А., Валиев Ю.Я., Горенкова Л.Г., Кабгов Х.Б., Маматов Э.Д. Влияние суперфосфата, полученного из фосфоритов Каратагского месторождения, на фотосинтез, распределение ассимилятов и качество волокна хлопчатника. – ДАН РТ, 2018, т. 61, № 3, с. 302-306.

2. Научная система ведения сельского хозяйства Таджикистана (на тадж.яз.) /Под ред. акад. ТАСХН Ахмадова Х.М., Набиева Т.Н., Бухориева Т.А. – Душанбе: Матбуот, 2009, 764 с.
3. Курбонов Ш.А., Ходжахон М.И., Кабгов Х., Мухидинов З.К., Абулхаев В.Дж., Самихов Ш.Р., Рахими Ф. Минералогический состав фосфоритных руд месторождений Риват и Каратаг. – ДАН РТ, 2017, т. 60, №7-8, с. 349-355.
4. Самихов Ш.Р., Зинченко З.А., Курбонов Ш.А., Сафаров С.Ш., Исмоилова М.С., Горенкова Л.Г. Изучение обогащения фосфатной руды месторождения Риват. – ДАН РТ, 2018, т. 61, № 2, с. 190-193.
5. Абдуллаев Х.А., Каримов Х.Х. Индексы фотосинтеза в селекции хлопчатника. – Душанбе: Дониш, 2001, 267 с.
6. Иванов С.С., Ладынина Л.П., Соловьёв А.И., Нилова В.И., Эйгес Е.Г. Методы определения свойств хлопка-волокна. – М.: Лёгкая индустрия, 1972, 287 с.
7. Курбонов Ш.А., Самихов Ш.Р., Тошов Ф.М., Солиева Б.А., Абдуллаев Х.А. Действие суперфосфата, изготовленного из фосфоритов месторождения Риват, на морфофизиологические показатели и технологические качества волокна хлопчатника. – ДАН РТ, 2019, т. 62, № 5-6, с. 344-349.

**Ф.М.Тошов, Ш.Р.Самихов, Ш.А.Курбонов, Н.Х.Ойзода, Х.А.Абдуллоев\***

## **ТАЪСИРИ НУРИИ ФОСФОРИИ АЗ ФОСФОРИТҲОИ КОНИ РИВАТ ҲОСИЛ КАРДА ШУДА БА НИШОНДИҲАНДАҲОИ БИОЛОГӢ ВА ҲОҶАГИИ ПАХТАИ МИЁНАНАХ**

*Институти кимиёи ба номи В.И.Никитини АМИТ,*

*\*Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани АМИТ*

Муайян карда шудааст, ки ба хок ворид кардани суперфосфати аз маъдани фосфордори кони Риват ҳосил карда шуда (миқдори  $P_2O_5$  13-18%) ба нишондиҳандаҳои биологӣ, хоҷагӣ ва ба сифати нахи пахта, таъсири мусбӣ мерасонад. Муқаррар карда шудааст, ки баландии танаи асосии ниҳол (3.1 маротиба), масоҳати умумии барг растанӣ (3.2 маротиба), миқдори узвҳои ҳосилдеҳ (3.7 маротиба), инчунин миқдори ғӯза ва мӯҳлати пухта расидани кӯраки пахта дар муқоиса бо растани назоратӣ зиёд мешавад. Ҳосили умумии биологӣ – 2.7, хоҷагӣ – 1.7 маротиба зиёд мешавад.

**Калимаҳои калидӣ:** пахта, маводи фосфордор, нишондиҳандаҳои морфофизиологӣ, тақсимооти ассимилятҳо, ҳосили биологӣ ва хоҷагӣ, сифатҳои технологияи нахи пахта.



F.M.Toshov, Sh.R.Samikhov, Sh.A.Kurbonov, N.Kh.Oyzoda, Kh.A.Abdullaev\*

**ACTION OF PHOSPHATE FERTILIZER, PRODUCED FROM PHOSPHORITES  
OF THE RIVAT DEPOSIT ON BIOLOGICAL AND ECONOMICAL TRATTS OF  
MIDLE STAPLE COTTON**

*V.I.Nikitin Institute of Chemistry, National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*\*Institute of Botany, Plant Physiology and Genetics, National Academy of Sciences of Tajikistan*

In the study found that by adding superphosphate to the soil with a  $P_2O_5$  content of 13-18% obtained from Rivat deposits, it positively affection on biological, economical and technological qualities of cotton fiber. It was found that as a result of the application of phosphate fertilizers obtained from Rivat deposits, increases the main stem (3/1 times), the total leaf surface area per plants (3.2 times), the number of formed fruit organs (3.7 times), total biological yield (2.7 times) with comparison to control plants of cotton.

**Key words:** *cotton, phosphate rock raw materials, superphosphate, morpophysiological patterns, distribution of assimilates, biological and economic harvest, technological properties of cotton fiber.*

УДК 633.11:581.13

Т.Ш.Авезов, А.Эргашев

## ВЛИЯНИЕ ОБРАБОТКИ СЕМЯН ФИЗИОЛОГИЧЕСКИ АКТИВНЫМИ ВЕЩЕСТВАМИ НА АКТИВНОСТЬ АНТИОКСИДАНТНЫХ ФЕРМЕНТОВ ЛИСТЬЕВ ПШЕНИЦЫ В УСЛОВИЯХ ПОЧВЕННОЙ ЗАСУХИ

*Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистан*

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Х.А.Абдуллаевым 07.05.2021 г.)*

Показано, что обработка семян до посева антиоксидантами:  $\alpha$ -токоферолом ( $\alpha$ -ТОК), аскорбиновой кислотой (АСК) и Zn-оксидиэтилфеноловой кислотой (Zn-ОДЭФК) в условиях почвенной засухи способствует повышению засухоустойчивости растений сортов мягкой и твёрдой пшеницы и оказывает положительное влияние на активность антиоксидантных ферментов.

**Ключевые слова:** пшеница, антиоксиданты, почвенная засуха, ферменты.

Солевой стресс по-разному оказывает влияние на активность антиоксидантных ферментов, которая зависит от их компартментации в клетках. Показано, что активность фермента супероксиддисмутазы у устойчивых генотипов картофеля связана с наличием пула этого фермента в клетке, способствующего обезвреживанию активных форм кислорода на период воздействия стресса, и приводит к активации генов этого фермента, локализованных в ядре [1].

Комплексная оценка влияния фитогормональных препаратов и других биологически активных веществ на морфофизиологические (рост, развитие, продуктивность) и биохимические (накопление метаболитов, липидов, активность ферментов) показатели может быть основанием для регуляции ростовых и репродуктивных процессов, повышения урожайности и его качества. Механизмы адаптации растений к действию стрессоров достаточно разнообразны. Часто они характеризуются высоким содержанием таких антиоксидантов, как аскорбиновая кислота (АСК), каротиноиды,  $\alpha$ -токоферол ( $\alpha$ -ТОК), глутатион и др [2, 3].

### Материалы и методы исследования

Объектами исследования служили сорта мягкой (*Triticum aestivum* L. – сорт Зафар) и твёрдой (*Triticum durum* Desf. – сорт Президент) пшеницы. Семена замачивали в растворе препаратов (0.1%  $\alpha$ -токоферол, 0.5% – аскорбиновой кислоты, 0.5% – Zn-ОДЭФК) в течение 24 ч. Контролем служили семена, замоченные в дистиллированной воде. Семена проращивали в чашках Петри на фильтровальной бумаге (в каждой чашке по 50 шт.). Микрополевые опыты с обработанными семенами проводили по методике [4].

Активность супероксиддисмутазы (СОД, КФ.1.15.1.1) определяли спектрофотометрически, с использованием нитросинего тетразолия методом, описанным в работе [5]. При этом нитросиний тетразолий (НТС) переходит в восстановленную форму – формазан, имеющий интенсивное сине-

---

**Адрес для корреспонденции:** Авезов Тагоймурод Шомуродович. 734017, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Каримова, 27, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАНТ. E-mail: avezov\_1991@inbox.ru

фиолетовое окрашивание. Оптическую плотность измеряли при длине волны 560 нм на спектрофотометре (Ultraspec-II), используя кюветы с длиной оптического пути 1.0 см. Расчёты производили по количеству препарата, способного подавить реакцию восстановления нитросинего тетразоля. За единицу активности принимали 50%-ное ингибирование образования формазана.

Для определения активности каталазы (КАТ, КФ 1.11.1.6) 0.5 г листа растирали с 5 мл 0.05M калий - фосфатного буфера (рН 7.0), гомогенат центрифугировали при 1000 об/мин в течение 5 мин. К 25 мкл экстракта добавляли 2.9 мл фосфатного буфера и 90 мкл 3%  $H_2O_2$  и измеряли снижение оптической плотности при 240 нм за 1 мин [6].

Содержание малонового диальдегида (МДА) определяли по методу, описанному в работе [7], с применением тиобарбитуровой кислоты. Содержание МДА рассчитывали с использованием коэффициента экстинкции  $\epsilon=156\text{мМ}^{-1}\text{см}^{-1}$ , после вычитания неспецифического поглощения при 600 нм.

Полученные результаты обработаны статистически по Лакину Г.Ф. [8] с использованием компьютерной программы *Microsoft Excel 2010*.

### Результаты исследований и их обсуждение

Полученные нами данные показали (табл. 1), что на фоне почвенной засухи (50-60% от ППВ) у сорта твёрдой пшеницы Президент происходило незначительное снижение активности СОД в листьях в варианте Zn-ОДЭФК и АСК по сравнению с контрольными растениями (без обработки семян). Однако при обработке семян растворами  $\alpha$ -токоферола активность фермента оставалась на уровне контрольного варианта. Содержание МДА в контрольном варианте и при обработке аскорбиновой кислотой практически оказалось одинаковым, вместе с тем при обработке Zn-ОДЭФК и  $\alpha$ -токоферолом повышалось на 40 и 85.5% соответственно. Активность каталазы во всех вариантах обработки семян по сравнению с контрольным вариантом повышалась в разной степени. Содержание каталазы в варианте Zn-ОДЭФК и  $\alpha$ -ТОК увеличивалось почти в два раза.

В условиях оптимального уровня влажности почвы (75-80% от ППВ) у контрольных растений наблюдалось незначительное снижение активности СОД при замачивании семян в растворах ФАВ. В то же время активность МДА заметно повышалась в варианте при обработке семян аскорбиновой кислотой (на 33%) и Zn-ОДЭФК (на 35%). Наиболее сильное увеличение содержания МДА наблюдалось при обработке семян  $\alpha$ -ТОК (на 120%). Активность каталазы в варианте обработки семян раствором аскорбиновой кислотой оставалась на уровне контроля, а при в варианте с Zn-ОДЭФК и  $\alpha$ -ТОК понижалась на 30%.

У сорта мягкой пшеницы Зафар в условиях почвенной засухи (55-60% от ППВ) активность СОД практически во всех вариантах опыта была на одном уровне. Обработка семян (ФАВ) приводила к снижению активности МДА в варианте с аскорбиновой кислотой и  $\alpha$ -ТОК на 39%, Zn-ОДЭФК на 22%. Вместе с тем каталазная активность в листьях у растений в вариантах с обработкой семян ФАВ повышалась в 2-4 раза. В условиях оптимального водоснабжения (75-80% от ППВ) активность СОД практически оставалась без изменений. Активность МДА, наоборот, во всех вариантах обработки семян с ФАВ значительно снижалась (примерно на 20%). Активность каталазы при обработке семян аскорбиновой кислотой была на одинаковом уровне с контрольным (без обработки) вариантом.

Однако при обработке семян растворами Zn-ОДЭФК и  $\alpha$ -ТОК активность фермента возросла в 3-5 раза.

Таким образом, полученные нами данные показывают, что предпосевная обработка семян ФАВ приводит к существенному изменению функционирования антиоксидантной системы растений. Это особенно заметно по активности СОД и каталазы в листьях. В отдельных случаях происходило 2-3-кратное повышение активности ферментов.

Все это дает основание полагать, что предпосевная обработки семян в дальнейшем положительной влияет на жизнедеятельность растений, в том числе на устойчивость к воздействию стрессоров (в частности, к водному стрессу).

Таблица

Влияние предпосевной обработки семян пшеницы физиологически активными препаратами на активность антиоксидантных ферментов в листьях

Сорт	Варианты опытов		СОД, усл.ед.акт. / г сырой массы	Каталаза, мкмоль H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> / мг. сырой массы мин.	МДА, мкмоль/г сы- рой массы
Президент	Полив	Контроль*	201.8	0.036	1.43
		АСК	199.3	0.036	1.90
		Zn-ОДЭФК	196.5	0.03	2.05
		$\alpha$ -ТОК	200.5	0.03	3.12
	Засуха	Контроль	202.1	0.018	2.22
		АСК	199.5	0.024	2.0
		Zn-ОДЭФК	199.6	0.03	3.11
		$\alpha$ -ТОК	202.3	0.036	4.10
Зафар	Полив	Контроль	203.3	0.024	3.40
		АСК	200.7	0.024	2.71
		Zn-ОДЭФК	203.8	0.06	2.66
		$\alpha$ -ТОК	204.3	0.12	2.7
	Засуха	Контроль	209.8	0.012	4.36
		АСК	208.9	0.03	2.65
		Zn-ОДЭФК	209.7	0.024	3.84
		$\alpha$ -ТОК	209.9	0.048	2.66

Примечание: \* контроль – без обработки семян.

Поступило 26.05.2021 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Давлятназарова З.Б. Механизмы устойчивости растений в условиях абиотического стресса. – Душанбе: Дониш, 2019, 107 с.
2. Радюкина Н.Л. Функционирование антиоксидантной системы дикорастущих видов растений при кратковременном действии стрессоров: Дисс.... д.б.н. – М., 2015, 200 с.
3. Кузнецов Вл.В. Физиологические механизмы адаптации и создание стресс-толерантных растений. Проблемы экспериментальной биологии. – Минск: Технология, 2009, 116 с.
4. Доспехов Б.А. Методика полевого опыта. – М.: Агропромиздат, 1985, 351 с.
5. Giannopolitis C.N., S.K. Ries Superoxide dismutase. I. Occurrence in Higher Plant. – Plant Physiol, 1977, V. 59, pp. 309-314.

6. Kumar, C.N., N. Khonlens Changes in lipid peroxidation and lipolytic and free-radical scavenging enzyme during aging and sprouting of potato (*Solanum tuberosum* L.) seed-tuber. – *Plant Physiol.*, 1993, v. 102, pp. 115-124.
7. Heath R.L., L. Pusker Photoperoxidation in isolated Chloroplast I. Kinetic and Stoichiometry of fatty acid peroxidation. – *Arch. Biochem. Biophys.*, 1968, v. 25, pp. 189-198.
8. Лакин Г.Ф. Биометрия. Учебное пособие для биол. спец. вузов, 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1990, 352 с.

Т.Ш.Авезов, А.Эргашев

**ТАЪСИРИ КОРКАРДИ ТУХМӢ БО МОДДАӢОИ АЗ ЧИӢАТИ ФИЗИОЛОГӢ  
ФАӢОЛ БА ФАӢОЛНОКИИ ФЕРМЕНТӢОИ АНТИОКСИДАНТИИ БАРГИ  
ГАНДУМ ДАР ШАРОИТИ ХУШКИИ ХОК**

*Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани  
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Нишон дода шудааст, ки коркарди дони гандум пеш аз кишт бо маводи зиддиоксидантии  $\alpha$ -ТОК, туршии аскорбинӣ ва Zn-ОДЭФК ба баландшавии қобиляти ба хушки тобоварии навҳои гандуми мулоимдона ва гандуми саҳт оварда мерасонад ва барои беҳтар ташаккулёбии сохтори хӯша мусоидат менамояд.

**Калимаҳои калидӣ:** гандум, зиддиоксидантҳо, хушкии хок, фаъолнокии ферментҳо.

T.Sh.Avezov, A.Ergashev

**EFFECT OF SEED TREATMENT WITH PHYSIOLOGICALLY ACTIVE  
SUBSTANCES ON THE ACTIVITY OF ANTIOXIDANT ENZYMES IN WHEAT  
LEAVES UNDER SOIL DRY CONDITIONS**

*Institute of Botany, Plant Physiology and Genetic, National Academy of Sciences of the Tajikistan*

It was shown that the treatment of seeds before sowing with antioxidants-  $\alpha$ -tocopherol ( $\alpha$ -ТОК), ascorbic acid and Zn-hydroxyethyl phenolic acid (Zn-ODEPK) under soil drought conditions increases the drought resistance of plants of soft and durum wheat varieties and affects the activity of antioxidant enzymes in the leaves.

**Key words:** wheat, antioxidants, soil drought, enzymes activity.

УДК 581.1:577.1

А.К.Сайфудинов, М.А.Бабаджанова

## КИНЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РИБОЗОФОСФАТИЗОМЕРАЗНОЙ АКТИВНОСТИ МУЛЬТИФЕРМЕНТНОГО КОМПЛЕКСА ЦИКЛА КАЛЬВИНА В ЭКСТРАКТАХ ИЗ ЛИСТЬЕВ ХЛОПЧАТНИКА

*Таджикский национальный университет**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана К.Алиевым 25.11.2021 г.)*

Приведены результаты кинетических исследований рибозофосфатизомеразной реакции в мультиферментном комплексе цикла Кальвина в экстрактах из листьев хлопчатника сорта 108-Ф. Изучены зависимость рибозофосфатизомеразной активности мультиферментного комплекса от длительности реакции, количества белка и концентрации рибозо-5-фосфата в реакционной среде. Установлено, что рибозофосфатизомераза относится к аллостерическим ферментам. Сигмоидная форма кривой зависимости скорости реакции от концентрации белка и субстрата свидетельствует о положительном кооперативном взаимодействии между активными центрами субъединиц фермента при связывании субстрата.

**Ключевые слова:** хлопчатник, рибозофосфатизомераза, реакция, скорость, кинетика, мультиферментный комплекс, цикл Кальвина.

В настоящее время не вызывает сомнений, что в клетке ферменты функционируют в различных формах: свободные ферменты, нестабильные ассоциаты, мультиферментные комплексы, метаболонны. Все эти формы ферментов находятся в динамическом равновесии друг с другом, и их соотношение зависит от вида организма, типа клетки и её функционального состояния. Объединение ферментов в комплексы приводит к ряду структурных и функциональных преимуществ в сравнении со свободными формами: эффекту направленного (или туннельного) переноса метаболитов, уменьшению времени перехода, активации физиологических и подавлению нежелательных реакций, координированным регуляторным эффектам [1-5].

Образование ключевыми ферментами цикла Кальвина – рибозофосфатизомеразой, фосфорибулокиназой и рибулозобисфосфат-карбоксилазой/оксигеназой мультиферментного комплекса с молекулярной массой 520 кДа установлено исследованиями Бабаджановой с сотр.[4-7].

Кинетические свойства каждого в отдельности фермента мультиферментного комплекса не исследованы.

Целью данной работы являлось изучение кинетического поведения рибозофосфатизомеразы в мультиферментном комплексе цикла Кальвина в экстрактах из листьев хлопчатника.

### Материал и методы исследования

Объектом для наших экспериментальных исследований служили листья растений хлопчатника (*Gossypium hirsutum* L.) сорта 108-Ф в фазе развития 5-6 настоящих листьев.

Хлопчатник выращивался с соблюдением всех агротехнических мероприятий в полевых условиях на экспериментальном участке Института ботаники, физиологии и генетики растений Национальной академии наук Республики Таджикистан (г.Душанбе).

Получение экстракта из листьев хлопчатника подробно описано в работе [8].

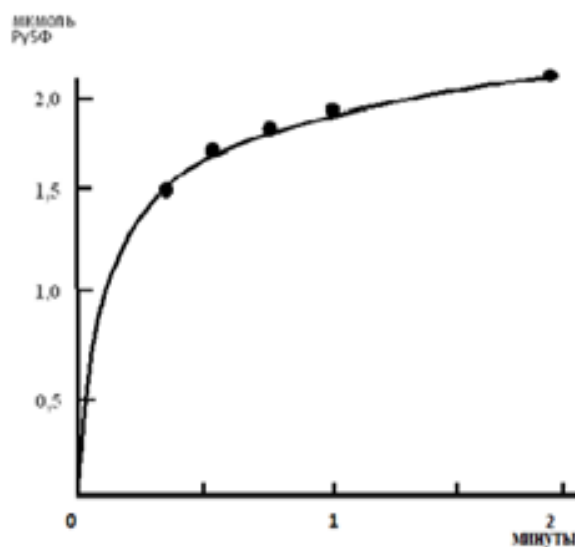
**Количественное содержание белка** определяли с реактивом Бенедикта [9]. Калибровочная кривая построена по бычьему сывороточному альбумину.

**Определение активности рибозофосфатизомеразы** осуществляли по методу Аксельрода и Янга [10].

### Результаты и их обсуждение

Для изучения кинетического поведения рибозофосфатизомеразы в мультиферментном комплексе цикла Кальвина нами было исследовано влияние на активность фермента длительности реакции, количества белка и концентрации рибозо-5-фосфата в реакционной среде.

Результаты изучения зависимости от длительности реакции накопления продукта рибозофосфатизомеразной реакции – рибулозо-5-фосфата приведены на рис. 1.



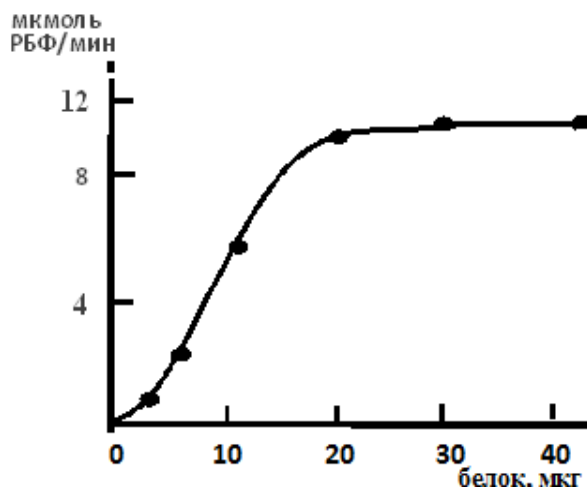
**Рис. 1.** Зависимость от длительности реакции рибозофосфат-изомеразной активности мультиферментного комплекса цикла Кальвина в экстрактах из листьев хлопчатника сорта 108.

Как видно из представленных на рис. 1 данных, в течение продолжительности реакции 0,5 мин достигается настолько высокая скорость реакции, что сразу же начинается загиб кривой зависимости скорости реакции от её длительности, продолжающейся в течение 0,5-2 минут.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что активность рибозофосфатизомеразы настолько высокая, что в течение 0,5 мин фермент превращает почти все имеющиеся молекулы субстрата в продукт и для дальнейшего увеличения скорости реакции необходима большая концентрация субстрата или меньшее количество белка в реакционной среде.

На основании полученных данных в дальнейших исследованиях определение рибозофосфатизомеразной активности мультиферментного комплекса проводили в течение 0.5-1 минуты.

Влияние количества белка в реакционной среде на рибозофосфатизомеразную активность мультиферментного комплекса было изучено нами при концентрации субстрата фермента рибозо-5-фосфата 10 мкмоль/мл (рис. 2).



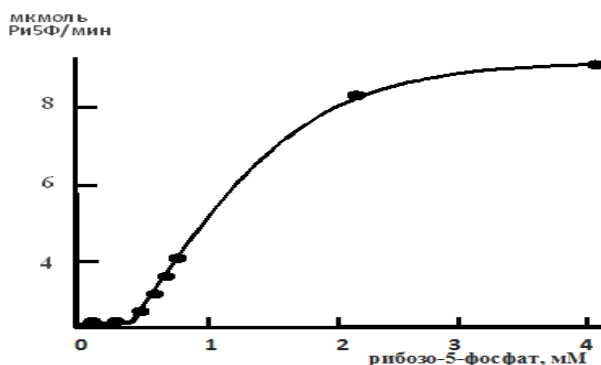
**Рис. 2.** Зависимость активности мультиферментного комплекса цикла Кальвина от количества белка в реакционной среде фосфорилбулокиназной в экстрактах из листьев хлопчатника сорта 108-Ф

Из рис. 2 видно, что кривая зависимости активности рибозофосфатизомеразы от её количества в реакционной среде имела классическую сигмоидную форму. Начальный ход кривой свидетельствовал о том, что в пределах концентраций белка от 0 до 5 мкг при связывании субстрата происходило кооперативное взаимодействие между субъединицами фермента, что приводило к возрастанию сродства фермента к субстрату, вследствие чего скорость реакции увеличивалась.

Количество белка 10 мкг/мл реакционной среды являлось оптимальным, так как дальнейшее увеличение количества белка приводило к загибу кинетической кривой, свидетельствовавшему о снижении скорости рибозофосфатизомеразной активности.

На основании полученных результатов в дальнейших исследованиях нами использовалось 10 мкг белка на 1 мл реакционной среды.

Результаты исследования зависимости ферментативной реакции катализируемой рибозофосфатизомеразой экстракта из листьев хлопчатника сорта 108-Ф от концентрации рибозо-5-фосфата представлены на рис. 3.



**Рис. 3.** Влияние концентрации рибозо-5-фосфата в реакционной среде на рибозофосфатизомеразную активность мультиферментного комплекса цикла Кальвина в экстрактах из листьев хлопчатника сорта 108-Ф.



Как видно из приведенных на рис. 3 данных, кривая зависимости скорости реакции от концентрации субстрата имела очень сложную S-образную форму, то есть сигмоидную, с тремя точками загиба. Как известно [10], преимущества сигмоидной кинетики связаны с улучшением функциональной роли белков в организме, что обусловлено повышением чувствительности ферментов к изменениям концентрации субстратов и метаболических регуляторов.

После первой точки загиба кинетической кривой при концентрации рибозо-5-фосфата 0.5 мМ/мл реакционной среды скорость рибозофосфатизомеразной реакции возрастало пропорционально концентрации субстрата в пределах 0,5-1 мМ.

При увеличении концентрации рибозо-5-фосфата в пределах 1-2 мМ начинался второй загиб кинетической кривой, то есть возрастание скорости рибозофосфатизомеразной реакции не было пропорциональным увеличению концентрации субстрата.

При концентрации субстрата 2 мМ/мл реакционной среды кинетическая кривая зависимости рибозофосфатизомеразной реакции от концентрации субстрата выходила на плато.

На основании полученных результатов, приведенных на рис. 3, оптимальной концентрацией рибозо-5-фосфата для рибозофосфатизомеразы мультиферментного комплекса в экстрактах из листьев хлопчатника сорта 108-Ф являлся 1 мМ или 10 мкмоль/мл реакционной среды.

Полученные данные свидетельствуют, что рибозофосфатизомераза относится к аллостерическим ферментам, хотя ранее его относили к нерегуляторным ферментам.

*Поступило 25.11.2021 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фридрих П. Ферменты: четвертичная структура и надмолекулярные комплексы. – М.: Мир, 1986, 374 с.
2. Курганов Б.И. Принципы интеграции клеточного метаболизма. – Молекуляр.биология, 1986, т. 20, вып. 2, с. 369-386.
3. Ермаков Г.Л. – Биохимия, 1993, т. 58, вып. 5, с. 659-674.
4. Бабаджанова М.А., Насыров Ю.С. Мультиферментный комплекс ключевых ферментов фотосинтеза. – Физиология растений, 1992, т. 39Б, вып. 4, с. 753-759.
5. Бабаджанова М.П., Бабаджанова М.А., Алиев К.А. Онтогенетические изменения ферментативных активностей свободных мультиферментных комплексов цикла Бенсона-Кальвина. – Физиология растений, 2006, т. 51, № 1, с. 38-44
6. Бабаджанова М.А., Мирзорахимов А.К., Бабаджанова М.П., Эсаналиева Ш.А. Онтогенетическая зависимость образования различных мультиферментных комплексов цикла Бенсона-Кальвина в листьях хлопчатника. – Физиология растений, 2010, т. 57, вып. 2, с. 186-191.
7. Бабаджанова М.А., Мирзорахимов А.К., Нарзуллоев М.С., Эсаналиева Ш.А., Ниматова Н., Сайфудинов А.К. Влияние кинетина на активность фосфорibuлокиназы в экстрактах из листьев хлопчатника. – ДАН РТ, 2007, т. 50, № 4, с. 382-385.
8. Кочетов Г.А. Практическое руководство по энзимологии. – М.: Высш. шк., 1980, 272 с.
9. Axelrod B., Jang R. Purification and properties of phosphoribuokinase from alfalfa. – J. Biol. Chem., 1954, v. 209, pp. 847-855.

10. Курганов Б.И. Физико-химические механизмы регуляции активности ферментов. – М.: Наука, 1992, 62 с.

А.Қ.Сайфудинов, М.А.Бобочонова

## ТАҲҚИҚОТҲОИ КИНЕТИКИ РИБОЗОФОСФАТИЗОМЕРАЗАИ КОМПЛЕКСИ МУЛТИФЕРМЕНТҲОИ СИКЛИ КАЛЬВИН ДАР ШИРАИ БАРГИ ПАХТА

*Донишгоҳи милли Тоҷикистон*

Дар мақолаи мазкур натиҷаҳои кинетикии реаксияҳои рибозофосфатизомеразии мултиферментҳои сикли Кальвин дар шираи барги пахтаи навъи 108-Ф оварда шудааст. Омӯзиши рибозофосфатизомеразии фаолнокии маҷмӯаи мултиферменти аз суръати реаксия, миқдори сафеда, ва консентратсияи рибозо-5-фосфат ва муҳити реаксионӣ вобастагӣ дорад.

Муайян карда шудааст, ки рибозофосфатизомераза ба гурӯҳи ферментҳои аллостерикӣ ман-суб аст. Шаклихати қачи сигмоидӣ вобаста аз суръати реаксия, консентратсияи сафеда ва субстрат, шаҳодат аз он медиҳад, ки байни маркази фаъоли ҳиссаҳои ферментҳо алоқаҳои мусбӣ мавҷуд аст.

**Калимаҳои калидӣ:** пахта, рибозофосфатизомераза, реаксия, суръат, кинетика, маҷмӯаи мултиферментӣ, сикли Калвин.

A.K.Sayfudinov, M.A.Babazhanova

## THE KINETIC BEHAVIOR ROBOTFACTORY MULTIENZYME COMPLEX OF CALVIN CYCLE IN EXTRACTS FROM LEAVES OF COTTON LEAVES

*Tajik National University*

The results of kinetic studies robotfactory reactions in a multienzyme complex of Calvin cycle in extracts from cotton leaves of variety 108-F. The dependence robotfactory activity multienzyme complex of reaction time, protein concentration and ribozo-5-phosphate in the reaction medium.

It is established that robotfactory refers to allosteric enzymes. The sigmoid form of the curve of the reaction rate dependence on the protein and substrate concentration indicates a positive cooperative interaction between the active centers of the enzyme subunits.

**Key words:** cotton, robotfactory, reaction, rate, kinetics, multienzyme complex, Calvin cycle.

УДК 616.36

Б.И.Ганиев, С.А.Авезов

## ГИПЕРБИЛИРУБИНЕМИЯ В РАЗВИТИИ ЭНЦЕФАЛОПАТИИ ПРИ ЦИРРОЗЕ ПЕЧЕНИ

*ГУ «Институт гастроэнтерологии Республики Таджикистан»**(Представлено академиком НАН Таджикистана Г.К.Мироджовым 12.01.2022 г.)*

*Изучено значение гипербилирубинемии в развитии печеночной энцефалопатии (ПЭ) у больных циррозом печени (ЦП). Обследованы 27 больных ЦП вирусной этиологии (у 18 – вирус гепатит HBV, а у 9 – вирус гепатит HCV). Содержание билирубина в сыворотке крови у больных ЦП повышается в зависимости от тяжести патологического процесса. В одномерном анализе следующие показатели достоверно ( $p \leq 0.05$ ) были связаны с неблагоприятным прогнозом: ПЭ, гипербилирубинемия, гиперкреатининемия, гипоальбуминемия и снижение протромбинового времени. Данное исследование подтверждает, что содержание билирубина повышается при необратимом нарушении функции печени. Возрастание билирубина в течение времени способствует снижению вероятности выживания. На основании показателей содержания билирубина больных ЦП можно делить на группы с низким или высоким риском летального исхода от печеночной недостаточности с развитием ПЭ.*

**Ключевые слова:** цирроз печени, печеночная энцефалопатия, гипербилирубинемия, выживаемость.

Цирроз печени в зависимости от тяжести поражения органа имеет множественные клинико-биохимические проявления [1]. Одним из важных признаков поражения печени является гипербилирубинемия, которая в большинстве случаев оценивается как холестазный синдром и лечится неадекватно, без особого эффекта и становится причиной летальных исходов. В последние годы некоторые авторы [2, 3] показывают, что гипербилирубинемия при ЦП, наряду с высоким уровнем международного нормализованного отношения (МНО), указывает на обострение хронической печеночной недостаточности. В связи с этим больные нуждаются в срочных реанимационных мероприятиях с последующей трансплантацией печени [4-6]. Взаимосвязь между гипербилирубинемией и риском развития печеночной энцефалопатии при ЦП недостаточно изучена несмотря на то, что по содержанию билирубина в сыворотке крови оценивалась степень недостаточности органа (счет Чайлд-Пью, Модель терминальной стадии заболевания печени (MELD), шкала CLIF-SOFA (Sequential Organ Failure Assessment), шкала SAPS (Simplified Acute Physiology Score) [6-9].

Целью настоящего исследования является выяснение значения гипербилирубинемии при циррозе печени в развитии печеночной энцефалопатии.

---

*Адрес для корреспонденции:* Авезов Сайфулло Абдуллоевич, Ганиев Бехруз Изатуллоевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Маяковского, 2, ГУ «Институт гастроэнтерологии РТ». E-mail: saifullo\_avezov@rambler.ru

### Материалы и методы исследования

Проанализированы истории болезни 27 больных (17 мужчин и 10 женщин, в возрасте 18-75 лет, средний возраст  $44.59 \pm 2.83$ ) ЦП вирусной этиологии. У 18 больных выявлен вирус гепатита В, у 9 – вирус гепатита С. В исследование включены те больные, у которых отмечалось повышение уровня билирубина более чем в 2 раза, но не получавшие в момент наблюдения противовирусную терапию. Больные с подтвержденной или с подозрением на гепатоцеллюлярную карциному (ГЦК) были исключены из исследования. Наблюдение больных продолжалось в течение 48 мес. Интервал времени рассчитывался в месяцах и был зарегистрирован с момента первой регистрации больного до момента развития печеночной недостаточности или летального исхода.

Печеночная энцефалопатия подозревалась при наличии признаков функционального поражения головного мозга: нарушения координации, сонливости, заторможенности у больных с декомпенсацией более 2-ух баллов по системе Чайлд-Пью (СЧП).

Статистическую обработку материала проводили стандартными методами вариационной статистики с помощью статистических пакетов программы STATISTICA 13 (StatSoft, США). Данные представлены в виде среднего значения  $\pm$  стандартное отклонение. Выживаемость больных была рассчитана с помощью метода Каплана-Мейера. Прогностические значения переменных были проанализированы с использованием регрессионной модели Кокса. Корреляционная зависимость была оценена методом Спирмена.

### Результаты исследования и их обсуждение

Установлено, что уровень билирубина в сыворотке крови у больных хроническими заболеваниями печени повышается в зависимости от тяжести патологического процесса. Если при ЦП в стадии компенсации содержание билирубина остается в пределах нормы, при декомпенсации наблюдается гипербилирубинемия. У наших больных ЦП класса А (18%) концентрация билирубина имела тенденцию к увеличению, а у пациентов ЦП класса В (30%) и С (52%) она была достоверно повышена соответственно в 4,6 и 9,2 раза. Причем у 18 наблюдается больных асцит.

Установлено, что средняя продолжительность жизни больных составила  $16.48 \pm 2.82$  месяцев (табл.1). Вероятность выживания больных ЦП с гипербилирубинемией в целом была 37% в течение одного года наблюдения, 29% - в 2 года и 18% в течение 3 лет. Основными причинами смерти были: печеночная недостаточность с развитием печеночной энцефалопатии и кома у 17 пациентов, тяжелые инфекционные осложнения у 3, желудочно-кишечные кровотечения у 4, тромбоз сосудов воротной вены у 1 и неизвестные причины у 3 больных.

Следующие показатели указывали на плохой прогноз при циррозе печени: мужской пол, вирус гепатита В, наличие признаков печеночной энцефалопатии, повышение содержания билирубина и креатинина, снижение сывороточного альбумина и активности протромбинового времени в сыворотке крови ( $p < 0.05$ ).

Таблица 1

## Основные показатели больных циррозом печени

Переменная	Действительный	Иметь в виду	Минимум	Максимум	Стандартное отклонение	Стандартная ошибка
В	27	44.5926	18.00000	75.0000	14.6976	2.82856
ПЖ	27	16.4815	1.00000	58.0000	18.4461	3.54996
ДЗ	27	6.5926	1.00000	15.0000	4.4312	0.85278
Б	27	162.4444	44.00000	370.0000	101.9866	19.62732
К	27	153.1481	80.00000	310.0000	61.4139	11.81911
ПИ	27	54.2593	40.00000	75.0000	7.9304	1.52621
Ал	27	31.9630	25.00000	45.0000	4.8077	0.92524
Ас	27	0.6667	0.00000	1.0000	0.4804	0.09245
ПЭ	27	0.3704	0.00000	1.0000	0.4921	0.09471

Примечание: В – возраст; ПЖ – продолжительность жизни; ДЗ – давность заболевания; Б – содержание билирубина в сыворотке крови, мкмоль/л; К – креатинин крови, ммоль/л; ПИ – протромбиновый индекс; Ал – сывороточный альбумин, г/л; Ас – асцит; ПЭ – печеночная энцефалопатия.

Продолжительность жизни больных ЦП достоверно коррелировала (табл.2) с содержанием билирубина ( $r = -0.707788$ ,  $p < 0.05$ ), креатинина ( $r = -0.494259$ ,  $p < 0.05$ ), протромбинового индекса ( $r = 0.446868$ ,  $p < 0.05$ ) и наличием признаков печеночной энцефалопатии ( $r = -0.511901$ ,  $p < 0.05$ ).

Таблица 2

## Многомерный корреляционный анализ показателей больных циррозом печени

Переменная	Корреляции таблицы (Цирроз и билирубин) Отмеченные корреляции значимы при $p < 0.5000$						
	В	ПЖ	ДЗ	Б	К	ПИ	Ал
В	1.000000	0.025578	0.740863	-0.154392	0.177498	0.116103	-0.331159
ПЖ	0.025578	1.000000	0.046724	-0.707788	-0.494259	0.446868	0.344129
ДЗ	0.740863	0.046724	1.000000	-0.234053	0.027931	-0.019863	-0.332927
Б	-0.154392	-0.707788	-0.234053	1.000000	0.556378	-0.503887	-0.209953
К	0.177498	-0.494259	0.027931	0.556378	1.000000	-0.343286	-0.465412
ПИ	0.116103	0.446868	-0.019863	-0.503887	-0.343286	1.000000	0.377542
Ал	-0.331159	0.344129	-0.332927	-0.209953	-0.465412	0.377542	1.000000
Ас	0.116212	-0.176511	0.132501	0.031402	0.218149	-0.117784	-0.538457
ПЭ	-0.313350	-0.511901	-0.245627	0.650292	0.561892	-0.370490	-0.140290

Примечание: обозначение те же, что в табл. 1.

Наблюдалась положительная корреляция между повышением содержания билирубина и появлением печеночной энцефалопатии. Обратная зависимость наблюдалась между гипербилирубинемией и протромбиновым индексом. Эти данные указывают на то, что уровень билирубина повышается только тогда, когда наблюдаются тяжелые необратимые нарушения функции печени [5, 6].

Линейная ассоциация между уровнем билирубина и признаками ПЭ показывает, что чем выше значение билирубина, тем больше вероятность развития энцефалопатии. Возрастаение билирубина в течение времени способствует снижению вероятности выживания. На основании показателей содержания билирубина больных ЦП можно делить на две группы: с низким или высоким риском развития летального исхода (рис.1). Снижение уровня билирубина свидетельствует об улучшении прогноза, т.е. низкие его уровни явно связаны с лучшей выживаемостью. Высший дискриминационный порог значения билирубина составил более 3-х разового повышения верхней границы нормы (рис.2).

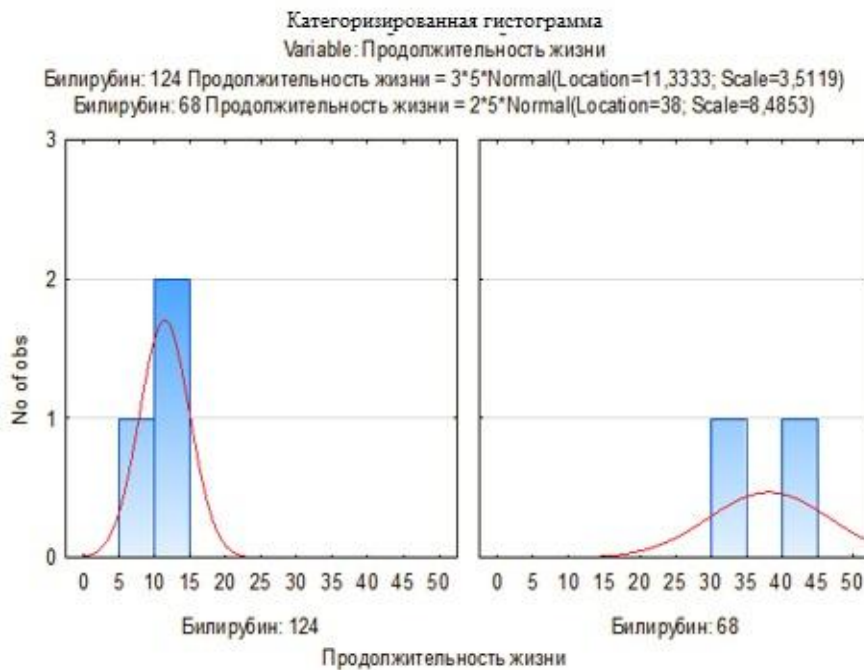


Рис. 1. Содержание билирубина в сыворотке крови и риск летального исхода больных циррозом печени

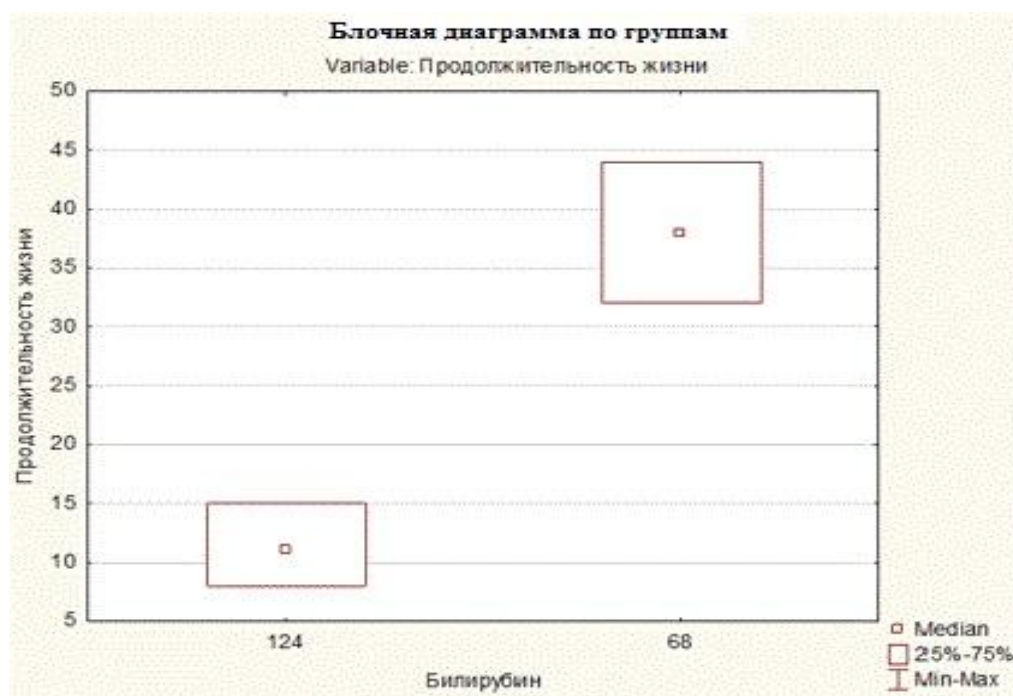


Рис. 2. Пороговое значение содержания билирубина в сыворотке крови и продолжительность жизни больных циррозом печени

Таким образом, полученные нами данные свидетельствуют о том, что содержание билирубина повышается с одновременным необратимым нарушением функции печени. Возрастание уровня билирубина способствует развитию печеночной энцефалопатии, а его снижение вероятность повышения выживаемости. На основании содержания билирубина в сыворотке крови больных ЦП можно выделить группы с низким и высоким риском развития летального исхода от печеночной недостаточности и энцефалопатии.

Поступило 12.01.2022 г.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мироджов Г.К., Авезов С.А., Тухтаева Н.С. и соав. Продолжительность жизни больных и прогностическое значение проявлений и осложнений цирроза печени. – Рос. журн. гастроэнтерол., гепатол. и колопроктол., 2010, т. 20, № 5, с. 27-32.
2. Biselli M., Dall'agata M., Gramenzi A., Gitto S., Liberati C., Brodosi L. et al., A new prognostic model to predict drop-out from the waiting list in cirrhotic candidates for liver transplantation with meld score <18. – Liver Int., 2015, v. 35, pp. 184-191.
3. Rose C.F., Amodio P., Bajaj J.S. et al. Hepatic encephalopathy: Novel insights into classification, pathophysiology and therapy. – J. Hepatol., 2020, v. 73, Issue 6, pp. 1526-1547.
4. Levesque E., Hoti E., Azoulay D. et al. Prospective evaluation of the prognostic scores for cirrhotic patients admitted to an Intensive Care Unit. – J. Hepatol., 2012, v. 56, pp. 95-102.
5. Stravitz R.T., Reuben A., Mizrahi M. et al. Use of the methacetin breath test to classify the risk of cirrhotic complications and mortality in patients evaluated/listed for liver transplantation. – J. Hepatol., 2015, v. 63, pp. 1345-1351.
6. Bajaj J.S. Hepatic encephalopathy: classification and treatment. – J. Hepatol., 2018, v. 68, Issue 4, pp. 838-839.
7. Hansa F., Nicoll A., Le S. et al. Improving assessment of hepatic encephalopathy in outpatient clinics. – J. Hepatol., 2018, v. 68, S732.
8. Hirode G., Vittinghoff E., Wong R.J. Increasing burden of hepatic encephalopathy among hospitalized adults: an analysis of the 2010-2014 National Inpatient Sample. – Dig. Dis, Sci., 2019, v. 64, pp. 1448-1457.
9. Avezov S., Mirojov G. et al. Prevalence, etiological factors, survival rates, lifetime and causes of death of patients with liver cirrhosis in Tajikistan. Transforming Science to Clinical Practice. – APASL Liver Week. Singapore, 2013, p. 255.

Б.И.Ганиев, С.А.Авезов

**ГИПЕРБИЛИРУБИНАМИЯ ДАР РУШДИ ЭНСЕФАЛОПАТИЯ****ДАР БЕМОРОНИ ГИРИФТОРИ СИРРОЗИ ЧИГАР***МД «Пажӯҳишгоҳи гастроэнтерологияи Ҷумҳурии Тоҷикистон»*

Аҳамияти гипербилирубинемия дар рушди энцефалопатияи чигар (ЭЧ) дар беморони сиррози чигар (СЧ) омӯхта шудааст. 27 нафар беморони сиррози этиологияи вирусӣ муоина карда шуданд (18 нафар – гепатити музмини В, 9 нафар – гепатити музмини С). Миқдори билирубин дар зардоби хуни беморони сиррози чигар вобаста ба вазнинии раванди патологӣ фарқ мекунад. Дар таҳлили якҷарафа, тағирёбандаҳои зерин ба таври назаррас ( $p \leq 0,05$ ) бо пешгӯии бад алоқаманд буданд: энцефалопатияи чигарӣ, гипербилирубинемия, гиперкреатининемия, гипоалбуминемия ва кам шудани вақти протромбин. Таҳқиқоти мо тасдиқ мекунад, ки миқдори билирубин бо вайроншавии бебогашти фаъолияти чигар зиёд мешавад. Бо мурури замон афзоиши билирубин ба коҳиши эҳтимолияти зинда мондан мусоидат мекунад. Дар асоси миқдори билирубин, беморони сиррозиро ба гурӯҳҳои тақсими кардан

мумкин аст, ки хатари марги кам ё баланди марг аз норасоии кори чигар бо рушди энцефалопатияи чигарӣ доранд.

*Калимаҳои калидӣ: сиррози чигар, энцефалопатияи чигар, гипербилирубинемия, зиндамонӣ.*

**B.I.Ganiev, S.A.Avezov**

## **HYPERBILIRUBINAMIA IN THE DEVELOPMENT OF ENCEPHALOPATHY IN LIVER CIRRHOSIS**

*State institution "Institute of Gastroenterology of the Republic of Tajikistan*

The importance of hyperbilirubinemia in the development of hepatic encephalopathy (HE) in patients with liver cirrhosis (LC) was studied. 27 patients of the viral etiology LC were examined (18 - chronic hepatitis B, 9 - chronic hepatitis C). The content of bilirubin in blood serum in patients with LC varies depending on the severity of the pathological process. In univariate analysis, the following measures were significantly ( $p \leq 0.05$ ) associated with poor prognosis: HE, hyperbilirubinemia, hypercreatinemia, hypoalbuminemia, and reduced prothrombin time. Our studies confirm that bilirubin levels increase with irreversible impaired liver function. Increasing bilirubin over time helps reduce the likelihood of survival. On the base, the bilirubin content of patients with LC can be divided with a low or high risk of death from liver failure with the development of HE.

**Key words:** *cirrhosis of liver, hepatic encephalopathy, hyperbilirubinemia, survival.*