

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- А.З.Азамов.** Проблема Варинга для девяти почти пропорциональных кубов.....425
- С.И.Исроилов, С.М.Аслонов.** О вещественных минимальных классах аппроксимации полугрупп с линейным порядком431
- М.Ш.Шабозов, Ш.С.Шоинбекова.** О наилучших совместных приближениях одного класса аналитических функций в пространстве Харди $H_{q,\rho}$, ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$)438
- М.А.Абдухаминов.** О задаче наилучшего совместного полиномиального приближения дифференцируемых периодических функций в L_2445
- С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов.** Об одном функциональном пространстве со степенными весами во всем пространстве.....451
- Н.Раджабов, М.И.Мамадалиев.** К теории одного класса переопределённой системы интегральных уравнений Вольтерра с двумя суперсингулярными линиями458
- О.И.Меликов.** Об одной системе модельных дифференциальных уравнений второго порядка с одной сингулярной точкой, когда корни соответствующего характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными.....470

ИНФОРМАТИКА

- Н.О.Косимова.** О сравнении двух цифровых портретов текста480

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Б.Дж.Гулбоев, З.Б.Шерматова.** Пределы распространения волны фильтрационного горения водородо-воздушной смеси при наличии теплопотерь и диффузии компонентов487

АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, С.Н.Сафаров, А.А.Сатторзода.** Определение физических свойств потенциально опасного астероида 2009 ХО по наблюдениям в Гиссарской астрономической обсерватории494

ФИЗИКА

- С.Дж.Гафуров.** Влияние УФ-света разной длины волны на кинетику фотомеханической деструкции диацетатцеллюлозы501

ФИЗИКА

- Ш.Ш.Азимов, В.Н.Петухов, Т.А.Хасанов, А.Н.Лакаев.** Динамика акустической эмиссии в ходе реакции термического разложения гидрокарбоната аммония506

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А.Бадалов, З.И.Авезов, Ф.Дж.Саломов, Ф.М.Мирзоев. Кинетика процесса дегидратации кристаллогидрата уранилацетата.....512

Д.О.Давлатов, Р.Дж.Акрамзода, М.М.Тагоев, Ш.Б.Назаров, А.П.Тагаев. Термодинамический анализ реакций, протекающих при совместном спекании бор- и алюмосиликатных руд Таджикистана с сульфатом натрия.....518

ТЕХНОЛОГИЯ НЕОРГАНИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВ

К.О.Бобоев. Кинетика процесса выщелачивания урансодержащей руды месторождения «Октябрьский» Таджикистана523

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Н.С.Арабзода. Влияние добавки из МКЦ, РП и ГС+МЭА на физико-механические свойства и показатель стекания ЩМА.....528

ЭКОЛОГИЯ

М.З.Ахмедов. Физико-химические основы очистки вод от радионуклидов535

МИНЕРАЛОГИЯ

Ф.А.Файзиев. Зональность оруденения в серебряных и серебросодержащих месторождениях Северного и Центрального Таджикистана.....539

БОТАНИКА

П.А.Курбонова. Дополнения к флоре стрептофитовых водорослей (Streptophyta) водоёмов Таджикистана.....546

БИОХИМИЯ

М.А.Бабаджанова, А.К.Сайфудинов, К.А.Алиев. Кинетин – аллостерический эффектор ферментов мультиферментного комплекса цикла Кальвина из листьев хлопчатника.....551

CONTENTS

MATHEMATICS

- A.Z.Azamov.** Waring's problem for nine almost proportional cubes.....425
- S.I.Isroilov, S.M.Aslonov.** On real minimal approximation classes of semigroups with linear order.....431
- M.Sh.Shabozov, Sh.S.Shoinbekova.** On the best simultaneous approximation of one class of analytical functions in the Hardy space $H_{q,\rho}$, ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$).....438
- M.A.Abduhaminov**
On the problem of the best joint polynomial approximation of differentiable periodic functions in L_2 445
- S.A.Iskhokov, B.A.Rakhmonov.** About of a one functional space with power weights in the whole space451
- N.Rajabov, M.I.Mamadaliyev.** To theory of one class over-determined system volterra type integral equation with super-singular lines.....458
- O.I.Melikov.** About on system of second-order model differential equations with one singular point, when the roots of the corresponding characteristic equation are complex-conjugative470

INFORMATICS

- N.O.Kosimova.** About comparing two digital portraits of text480

MATHEMATICAL PHYSICS

- B.J.Gulboev, Z.B.Shermatova.** The limits of the propagation of the filtration combustion wave of the hydrogen-air mixture in the presence of heat loss and diffusion of components487

ASTRONOMY

- G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, S.N.Safarov, A.A.Sattorzoda.** Determination of the physical properties of potentially hazardous asteroid 2009 XO from observations at the Gissar astronomical observatory494

PHYSICS

- S.J.Gafurov.** Influence of UV light of different wave length on kinetiku of photomechanical destruction diacetate cellulose.....501
- S.S.Azimov, V.N.Petukhov, T.A.Khasanov, A.N.Lakaev.** Dynamics of acoustic emission during the thermal decomposition of ammonium hydrogen carbonate506

PHYSICAL CHEMISTRY

- A.Badalov, Z.I.Avezov, F.J.Salomov, F.M.Mirzoev.** Kinetics of the dehydration process uranyl acetate crystal hydrate512
- D.O.Davlatov, R.J.Akramzoda, M.M.Tagoev, Sh.B.Nazarov, A.P.Tagaeov.** Thermodynamic analysis of reactions occurring during the joint sintering of boron and aluminosilicate ores of Tajikistan with sodium sulfate.....518

TECHNOLOGY OF INORGANIC SUBSTANCES

K.O.Boboev. Kinetics of the leaching process of uranium-containing ore of "Oktyabrskiy" deposit of Tajikistan523

CHEMICAL TECHNOLOGY

N.S.Arabzoda. Influence of addition from MCC, RP and GS + MEA on physical and mechanical properties and flow rating indicator of SMA.....528

ECOLOGY

M.Z.Akhmedov. Physico-chemical basis of water purification from radionuclides535

MINERALOGY

F.A.Fayziev. Zoning of mineralization in silver and silver-bearing deposits of Northern and Central Tajikistan539

BOTANY

P.A.Kurbonova. Addition dates to the flora of streptophyta algae of the water bodies of Tajikistan546

BIOCHEMISTRY

M.A.Babadzhanova, A.K.Saifudinov, K.A.Aliyev. Kinetin is an allosteric effector of enzymes of the Calvin cycle multienzyme complex from cotton leaves551

УДК 511.325

А.З.Азамов

ПРОБЛЕМА ВАРИНГА ДЛЯ ДЕВЯТИ ПОЧТИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ КУБОВ

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 13.04.2022 г.)

При $N \geq N^{\frac{3}{10}+\varepsilon}$, N – достаточно большое натуральное число доказана асимптотическая формула для количества представления N в виде

$$x_1^3 + \dots + x_9^3 = N, \quad |x_i - (\mu_i N)^{\frac{1}{3}}| \leq H, \quad i = \overline{1, 9},$$

где μ_1, \dots, μ_9 — положительные фиксированные числа, и $\mu_1 + \dots + \mu_9 = 1$.

Ключевые слова: проблема Варинга, почти пропорциональные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма.

Аддитивные задачи с почти пропорциональными слагаемыми сформулировал и впервые изучил английский математик Мейтленд Райт в тридцатые годы прошлого века. К аддитивным задачам, которые он исследовал с почти пропорциональными слагаемыми, относятся теорема Лагранжа о представлении натуральных чисел суммой не более четырёх квадратов натуральных чисел, и её обобщение, предложенное Варингом [1] в 1770 г., которое утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нём базис конечного порядка $G(n)$, то есть каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_r^n = N, \quad (1)$$

где x_1, x_2, \dots, x_r – натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированную величину $G(n)$, называемую порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди. Мейтленд Райт [2–4] исследуя проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми, в частности доказал:

- если $\gamma, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ – произвольные положительные числа, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1$, $N = 2^{\xi} N_1$, N_1 – нечётное целое число, $N_1 > N_0 = N_0(\gamma, \mu_1, \dots, \mu_4)$, и выполняется условие

$$|x_i^2 - \mu_i N| \leq \gamma \mu_i N, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

Адрес для корреспонденции: Азамов Аслиддин Замонович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики им. А.Джураева. E-mail: asliddinkhon@mail.ru

тогда число N представимо в виде

$$N = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2;$$

• пусть μ_1, \dots, μ_r – фиксированные положительные числа, $\mu_1 + \dots + \mu_r = 1$, $r \geq r_0$,

$$0 < \beta < \alpha = \min\left(\frac{r-4}{4(r-3)}, \frac{r-2}{2(r-1)}\right), \quad \gamma = \frac{r}{k} - 1 - (r-1)\beta,$$

$I(N)$ – число решений уравнения (1) относительно x_1, \dots, x_r с условием $|x_i^n - \mu_i N| \leq A_i N^{1-\beta}$, тогда справедлива асимптотическая формула

$$I(N) = \frac{c \left(\prod \mu_i\right)^{\alpha-1}}{n^r \Gamma(r)} \mathfrak{S}(N) N^\gamma + O(N^{\gamma-d}),$$

где $c = c(A_1, \dots, A_r)$ – абсолютная постоянная, $d = d(r, \beta) > 0$.

Аддитивные задачи с почти равными слагаемыми являются частным случаем аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми, так как при $\mu_1 = \dots = \mu_r$ аддитивная задача с почти пропорциональными слагаемыми превращается в задачу с почти равными слагаемыми.

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon \tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α , для которых $q \leq P$, $P < Q$ через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α . $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Для произвольного фиксированного n поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^n),$$

в больших дугах было исследовано З.Х.Рахмоновым и его учениками в работах [5–8]. Воспользовавшись результатами этих работ, были решены следующие аддитивные задачи с почти равными слагаемыми:

- проблема Варинга с почти равными слагаемыми в случаях $n = 3, 4, 5$, точнее были найдены [8,9], асимптотические формулы для количества решений диофантова уравнения (5), с условиями

$$\left| x_i - \left(\frac{N}{2^n + 1}\right)^{\frac{1}{n}} \right| \leq H, \quad i = 1, \dots, 2^n + 1, \quad H \geq N^{\frac{1}{n} - \theta(n) + \varepsilon};$$

где

$$\theta(3) = \frac{1}{30}, \quad \theta(4) = \frac{1}{108}, \quad \theta(5) = \frac{1}{340};$$

• обобщение [5,6,10] тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде

$$p_1 + p_2 + m^n = N,$$

при $n = 2, 3, 4$ в простых числах p_1, p_2 и натурального m , с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| m^n - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{1-\theta(n)} \mathcal{L}^n,$$

соответственно при

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \quad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \quad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

В этой работе доказывается асимптотическая формула в проблеме Варинга для девяти почти пропорциональных кубов.

Теорема 1. Пусть N – достаточно большое натуральное число, μ_1, \dots, μ_9 – положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию

$$\mu_1 + \dots + \mu_9 = 1,$$

$I(N, H)$ – число представлений N суммой девяти кубов чисел $x_i, i = \overline{1, 9}$ с условиями

$$|x_i - (\mu_i N)^{\frac{1}{3}}| \leq H, \quad i = \overline{1, 9}.$$

Тогда при $H \geq N^{\frac{3}{10} + \varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула

$$I(N, H) = \mathfrak{B}(N) \mathfrak{S}(N) \frac{H^8}{N^{\frac{2}{3}}} + O\left(\frac{H^8}{N^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}^8}\right),$$

где $\mathfrak{B}(N)$ – абсолютная постоянная являющаяся значением особого интеграла, $\mathfrak{S}(N)$ – особый ряд, сумма которого превосходить некоторое число $c(N) > 0$.

Далее воспользуемся следующими обозначениями:

$$\gamma_n(\lambda; x, y) = \int_{-0.5}^{0.5} e\left(\lambda \left(x - \frac{y}{2} + u\right)^n\right) du, \quad S_n(a, q) = \sum_{m=1}^q e\left(\frac{am^n}{q}\right).$$

Теорема 1 доказывается круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова, используя

- асимптотическую формулу для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_3(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг (следствие 0.1 леммы 1);
- нетривиальную оценку для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_3(\alpha; x, y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров (следствие 0.2 леммы 1);
- обобщение теоремы Хуа Ло-кена для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_3(\alpha; x, y)$, а именно правильные по порядку оценки интегралов по периоду от восьмой степени модуля этих сумм (лемма 2);
- нетривиальную оценку для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_3(\alpha; x, y)$ в малых дугах (лемма 3).

Лемма 1. [5]. Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ и $\lambda \geq 0$, тогда при $\{n\lambda x^{n-1}\} \leq \frac{1}{2q}$, имеет место

формула

$$T_n(\alpha, x, y) = \frac{S_n(a, q)}{q} T_n(\lambda; x, y) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T_n(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2 \leq k \leq n} \left(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{1-\frac{n}{k}} q^{-\frac{1}{n}} \right).$$

Следствие 0.1. Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, тогда имеет место соотношение

$$T_n(\alpha, x, y) = \frac{y}{q} S_n(a, q) \gamma_n(\lambda; x, y) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Следствие 0.2. Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$, тогда имеет место оценка

$$T_n(\alpha; x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2 \leq k \leq n} \left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{1-\frac{1}{k}} q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}} \right).$$

Лемма 2. При $x \geq x_0 > 0$, $\sqrt{x} < y \leq 0,01x$ имеет место оценка

$$\int_0^1 |T_3(\alpha; x, y)|^8 d\alpha \ll y^{5+\varepsilon}.$$

Лемма 3. Пусть $x \geq x_0 > 0$, α – вещественное число, $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$, тогда при $\sqrt{x} < y \leq 0,01x$ имеет место оценка

$$T_3(\alpha; x, y) \leq 6y^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{q} + \frac{q}{y^3} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Поступило 13.04.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Waring E.M. Meditationes algebraicae. – Cambridge, 1770.
2. Wright E.M. The representation of a number as a sum of four 'almost proportional' squares. – The Quarterly Journal of Mathematics, 1936, v. 7, Is. 1, pp. 230–240.
3. Wright E.M. Proportionality conditions in Waring’s 7problem. – Mathematische Zeitschrift, 1934, v. 38, pp. 730-746.
4. Wright E.M. An extension of Waring’s problem. – Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A 232 1-26 (1933), Zbl 0006.39602
5. Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2003, т. 74, вып. 4, с. 564-572.
6. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2014, т. 95, вып. 3, с. 445-456.
7. Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля. – Ученые записки Орловского университета, серия естественные, технические и медицинские науки, 2012, 6, ч. 2, с. 194-203.
8. Рахмонов З.Х., Назрублов Н.Н., Рахимов А.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения. – Чебышевский сборник, 2015, т. 16, В. 1(53). с. 232-247.
9. Азамов А.З., Рахмонов З.Х. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми. – ДАН РТ, 2011, т. 54, №3, с. 165-172.
10. Рахимов А.О., Рахмонов Ф.З. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми. – Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Изд.: Саратовский НИГУ им. Н.Г.Чернышевского, ISSN: 1810-4134, 2016, №8, с. 87-89.

А.З.Азамов

МУАММОИ ВАРИНГ БАРОИ НҶҲ КУБҶОИ ҚАРИБ МУТАНОСИБ

Институти математикаи ба номи А. Ҷўраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Ҳангоми $H \geq N^{\frac{3}{10}+\varepsilon}$, N – адади кифоя калони натуралӣ барои микдори тасвирҳои N дар намуди

$$x_1^3 + \dots + x_9^3 = N, \quad |x_i - (\mu_i N)^{\frac{1}{3}}| \leq H, \quad i = \overline{1, 9},$$

μ_1, \dots, μ_9 – адади мусбати қайдкардашуда ва $\mu_1 + \dots + \mu_9 = 1$, формулаи асимптотӣ исбот карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: муаммои Варинг, ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб, суммаи кӯтоҳи тригонометрӣ.

A.Z.Azamov

WARING'S PROBLEM FOR NINE ALMOST PROPORTIONAL CUBES

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan

For $H \geq N^{\frac{3}{10} + \varepsilon}$, N a sufficiently large natural number, we prove an asymptotic formula for the number of representation N in the form

$$x_1^3 + \dots + x_9^3 = N, \quad |x_i - (\mu_i N)^{\frac{1}{3}}| \leq H, \quad i = \overline{1, 9},$$

where μ_1, \dots, μ_9 – positive fixed numbers, and $\mu_1 + \dots + \mu_9 = 1$.

Key words: Waring's problem, almost proportional terms, short exponential sums.

УДК 512.519.4

С.И.Исроилов, С.М.Аслонов*

**О ВЕЩЕСТВЕННЫХ МИНИМАЛЬНЫХ КЛАССАХ АППРОКСИМАЦИИ
ПОЛУГРУПП С ЛИНЕЙНЫМ ПОРЯДКОМ***Российско-Таджикский (Славянский) университет,***Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана А.Х.Табари 12.05.2022 г.)*

В работе исследуются условия аппроксимируемости и отделимости линейно упорядоченных (л.у.) полугрупп в подполугруппы группы вещественных чисел с естественным порядком. Найден класс полугрупп, делимый на подгруппы группы вещественных чисел. Им оказался класс инверсных коммутативных л.у. полугрупп, максимальные подгруппы которых без кручения и не имеют аномальных пар. Класс всех простых подгрупп группы вещественных чисел является минимальным классом аппроксимации для класса инверсных коммутативных л.у. полугрупп.

Ключевые слова: *полугруппа, группа, аппроксимация, отделимость, упорядоченность, минимальный класс, гомоморфизмы, естественный порядок, сопряженность, идемпотентность, выпуклые идеалы, максимальные подгруппы.*

Пусть A – некоторая алгебра и K – некоторый класс алгебр. Алгебра A называется аппроксимируемой в классе K относительно равенства (порядка), если для любых элементов $a, b \in A$, $a \neq b$ ($a \not\leq b$) существует гомоморфизм φ алгебры A на некоторую алгебру из K такой, что $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, ($\varphi(a) \not\leq \varphi(b)$). Алгебра A называется отделимой от подалгебры, если для любого элемента $x \in A$ и подалгебры B из A , $x \notin B$ существует гомоморфизм φ такой, что $\varphi(x) \notin \varphi(B)$. Когда K – класс конечных алгебр, тогда A называется финитно аппроксимируемой алгеброй [1].

Класс T называется классом аппроксимации для класса K , если каждая алгебра из K аппроксимируема в классе T . Класс T называется классом точной аппроксимации для класса K , если для каждой полугруппы $A \in K$ и различных элементов $a, b \in A$ найдется такой гомоморфизм φ полугруппы A на некоторую полугруппу из T , что $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Замечание. Если каждая полугруппа из класса S может быть вложена в некоторую полугруппу из класса T , то будем обозначать $S \prec T$. Очевидно, что если S_1 – класс аппроксимации для класса S и $S_1 \prec T_1$, то и T_1 – класс аппроксимации для класса S .

Адрес для корреспонденции: Исроилов Сайфуддин. 734031, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М.Турсунзода, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: Isroilov48@mail.ru;
Аслонов Сорбон Мирзомуддинович. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет. E-mail: sorbon.aslonov@mail.ru

Определение. Класс K_2 называется минимальным классом аппроксимации для класса K , если выполнены условия: 1) K_2 является классом аппроксимации для класса K ; 2) если K' класс аппроксимации для K и $K' \prec K_2$, то $K_2 \subset K'$.

М.М.Лесохиным в работе [2] поставлены следующие вопросы:

- 1) каковы те алгебры, которые аппроксимируемы в определённом классе алгебр K ?
- 2) нельзя ли найти такой минимальный класс T , чтобы любая алгебра из K была аппроксимируема в классе T ?
- 3) каковы классы точной аппроксимации для K ?

Изучению поставленных выше задач посвящено много исследований, в том числе, в работах [2-9] найдены определённые классы аппроксимации K , минимальные классы аппроксимации для классов периодических, вполне регулярных, рестриктивных, нильпотентных, инверсных, естественно линейно упорядоченных, архимедово линейно упорядоченных и некоторых других классов полугрупп.

В данной работе исследуются вопросы аппроксимации для некоторых классов линейно упорядоченных полугрупп и определяются минимальные и точные классы аппроксимации. В этих классах аппроксимация осуществляется относительно различных предикатов (равенства, порядка, делимости, сопряженности и вхождения элементов в подполугруппы и выпуклые идеалы) с помощью у-гомоморфизмов в мультипликативной и аддитивной группах вещественных чисел с естественным порядком.

На мультипликативной полугруппе R_+^* – неотрицательных вещественных чисел и её подмножествах в качестве порядка принимаем отношение естественного (обычного) линейного порядка. Число 0 в R_+^* считаем наименьшим элементом. Обозначим через $G(R_+^*)$ множество всех подгрупп и подгрупп с нулём из R_+^* , нуль в которых является наименьшим элементом.

Пусть A – некоторая упорядоченная полугруппа. Совокупность всех у-гомоморфизмов полугруппы A на полугруппы из $G(R_+^*)$ обозначим через Φ .

Лемма 1. Пусть A – некоторая линейно упорядоченная (л.у.) полугруппа. Если A аппроксимируема относительно вхождения элемента в выпуклые подполугруппы A гомоморфизмами из Φ , то всякий идеал полугруппы A выпуклый и является изолированным идеалом.

Доказательство. Пусть \mathcal{J} – любой идеал полугруппы A . Для выпуклости идеала \mathcal{J} достаточно показать, что для любых элементов $a \in A$, $x \in \mathcal{J}$ из $a < x$ следует, что $a \in \mathcal{J}$. Пусть $a \in A$ и существует $x \in \mathcal{J}$ такой, что $a < x$ и $a \notin \mathcal{J}$. Тогда по условию существует гомоморфизм $\varphi \in \Phi$, такой что $\varphi(a) \notin \varphi(\mathcal{J})$ и $\varphi(a) < \varphi(x)$. Так как в полугруппе $\varphi(A)$, кроме нуля, других собственных идеалов не существует, то $\varphi(\mathcal{J}) = 0$ и $\varphi(a) < \varphi(x) = 0$. С другой стороны, $\varphi(a) > 0$, так как 0 является наименьшим элементом полугруппы $\varphi(A)$. Следовательно, $\varphi(a) = 0$ и $\varphi(a) \in \varphi(\mathcal{J})$,

что противоречит предположению. Значит \mathcal{J} выпуклый и, более того, является порядковым идеалом полугруппы A .

Пусть \mathcal{J} выпуклый идеал полугруппы A и $a \in A$ такой, что $a \notin \mathcal{J}$. Согласно условию, существует $\varphi \in \Phi$ такой, что $\varphi(a) \notin \varphi(\mathcal{J})$. Тогда $\varphi(\mathcal{J}) = 0$ и $\varphi(a) > 0$. Если $a^k \in \mathcal{J}$ для некоторого натурального $k > 1$, то $\varphi(a^k) = 0$. В силу того, что нуль присоединён внешним образом, имеем $\varphi(a) = 0$ и $\varphi(a) \in \varphi(\mathcal{J})$, что противоречит предположению. Следовательно, $a^k \notin \mathcal{J}$ для любого $k > 1$ и \mathcal{J} – является выпуклым изолированным идеалом полугруппы A (см. [11], стр.427).

Лемма 2. Если л.у. полугруппа A аппроксимируема относительно вхождения элемента в выпуклые подполугруппы гомоморфизмами из Φ , то подполугруппа E – идемпотентов полугруппы A естественно линейно упорядочена ($e \leq f \Leftrightarrow e \cdot f = e$) и аппроксимируема в полугруппе $\{0,1\}$.

Доказательство. Для любых $e, f \in E$ имеем $e \notin [f]$ или $f \notin [e]$. Тогда по условию существует φ из Φ такой, что $\varphi(e) \notin \varphi([f])$ или $\varphi(f) \notin \varphi([e])$ и $\varphi(e) \neq \varphi(f)$. Если $e < f$, то $ef = e$ и E имеет естественный порядок. Допустим, что $ef \neq e$. Тогда $ef \notin [e]$ и существует $\varphi \in \Phi$ такой, что $\varphi(ef) \notin \varphi([e])$ и $\varphi(ef) \neq \varphi(e)$. Так как в $\varphi(A)$ имеется только два идемпотента $0,1$ такие, что $0 < 1$, то $\varphi(e) < \varphi(f)$ и $\varphi(e) = 0$. Тогда $\varphi(e) \square \varphi(f) = 1$, что противоречит условию $\varphi(e) \neq \varphi(f)$.

Будем говорить, что два элемента a, b упорядоченной полугруппы A образуют аномальную пару, если для любого натурального n

$$a^n < b^{n+1} \text{ и } b^n < a^{n+1} \text{ или } a^n > b^{n+1} \text{ и } b^n > a^{n+1} \text{ (см.[10]).}$$

Можно заметить, что элементы a, b одновременно или положительны, или отрицательны.

Теорема 1. Пусть A – произвольная линейно упорядоченная полугруппа. Для того чтобы полугруппа A была аппроксимируема относительно вхождения элемента в выпуклые подполугруппы гомоморфизмами из Φ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) A – инверсная коммутативная полугруппа;
- 2) подполугруппа E – идемпотентов полугруппы A естественно л.у. полугруппа;
- 3) максимальные подгруппы A_e полугруппы A без кручения и не имеют аномальных пар.

Доказательство. Необходимость. Заметим, что из аппроксимируемости относительно вхождения элемента в подполугруппы A следует аппроксимируемость полугруппы A относительно равенства. Действительно, если для любых элементов a, b из A , $a \in [b]$ и $b \in [a]$, то существуют натуральные числа m, n такие, что $a = b^m$ и $b = a^n$. Следовательно, $a = a^{mn}$, $b = b^{mn}$ и $[a] = [b]$ является циклической группой конечного порядка. Если $a \neq b$, то или $a \notin [b]$ или $b \notin [a]$. По условию имеем, что $a \cdot b^{-1} \neq e$ и $\varphi(a \cdot b^{-1}) \notin \varphi([e])$, то есть $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Коммутативность полугруппы A следует из того, что все подполугруппы $\varphi(A)$ коммутативны (см. [3]). Согласно лемме 1, все идеалы полугруппы A выпуклые и, кроме того, все идеалы изолированы. Тогда из ([11], стр.427) следует, что A является вполне регулярной полугруппой. В силу коммутативности полугруппы A имеем, что A – инверсная полугруппа.

Условие 2) следует из леммы 2.

3) Пусть $a \neq e$ элемент конечного порядка и $a \in A_e$ ($e \in E, A_e$ – максимальная подгруппа A). Тогда найдётся такое число n , что $a^n = e$. Так как $a \notin [e]$, то существует u -гомоморфизм $\varphi \in \Phi$ такой, что $\varphi(a) \notin \varphi[e]$ и $\varphi(a) \neq \varphi(e)$. С другой стороны, из $\varphi(a^n) = \varphi(e)$ следует, что $\varphi(a) = \varphi(e)$, что противоречит нашему предположению. Тогда полугруппа A_e – без кручения и строго упорядочена. Поскольку все подполугруппы и группы из $G(R_+^*)$ коммутативны, то согласно работе [3], полугруппа A коммутативна и имеет свойством сокращения. Из работы [10] следует, что при гомоморфизмах в R_+ – аддитивную группу вещественных чисел два элемента из A имеют один и тот же образ, когда они образуют аномальную пару.

Достаточность. Пусть A удовлетворяет условиям теоремы. Рассмотрим любую подполугруппу H группы A , где $a \in A$ и $a \notin H$. Если подполугруппа H и элемент a принадлежат различным максимальным подгруппам A_e ($e \in E$), то по лемме 2 полугруппа A аппроксимируема в полугруппе $\{0,1\}$ и $\varphi(a) \notin \varphi(H)$.

Пусть $a \in A_e, a \in H$ и $A_e \cap H \neq \emptyset$, (A_e – максимальная подгруппа из A с единицей e). Тогда $H \cap A_e \subseteq A_e$ и $a \notin A_e \cap H$. Согласно условию 3), нетривиальные максимальные группы A_e полугруппы A без кручения, по теореме Гёльдера [12, стр.74] изоморфны подгруппе группы вещественных чисел с естественным порядком. Следовательно, $\varphi(a) \notin \varphi(H \cap A_e)$. Продолжим гомоморфизм φ до гомоморфизма ψ всей полугруппы A следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(xe), & \text{если } x \in A_f, e \leq f \\ 0, & \text{если } x \in A_g, g < e, \end{cases}$$

где $e, f, g \in E$ и A_f, A_g – максимальные подгруппы полугруппы A . Отображение ψ является гомоморфизмом полугруппы A в некоторую подгруппу полугруппы R_+^* с нулём такую, что $\psi(a) \notin \psi(H)$. Кроме того, ψ сохраняет порядок. Действительно, если $x \leq y$ и $x \in A_g, y \in A_f$, то $g \leq f$. Тогда $gf = g, xg \leq yg$ и $xg, yg \in A_g$. Отсюда $\psi(x) = \varphi(xg) \leq \varphi(yg) = \psi(y)$. Остальные случаи проверяются аналогично.

Следствие 1. Пусть A произвольная л.у. полугруппа. Если полугруппа A аппроксимируема относительно вхождения элемента в выпуклые подполугруппы гомоморфизмами из Φ , тогда имеем следующие выводы:

- 1) полугруппа A аппроксимируема относительно делимости элементов;
- 2) полугруппа A аппроксимируема относительно регулярной сопряженности элементов;
- 3) полугруппа A аппроксимируема относительно вхождения элемента в выпуклые идеалы.

Обозначим через K класс инверсных коммутативных л.у. полугрупп. Согласно лемме 2, подполугруппа E – идемпотентов инверсных полугрупп естественно линейно упорядочена и финитно аппроксимируема.

Теорема 2. Пусть $A \in K$. Для того, чтобы класс полугрупп T был классом аппроксимации для K , необходимо и достаточно, чтобы каждая подпрямо неразложимая группа с внешне присоединенным нулем могла быть вложена в некоторую полугруппу из класса T .

Доказательство. Согласно работе [2] подпрямо неразложимыми полугруппами из класса K будут лишь подпрямо неразложимые группы и группы с нулём. Тогда, согласно замечанию, класс T^0 – всех подпрямо неразложимых полугрупп из K ($T^0 \prec T$) является классом аппроксимации.

Согласно теореме 1 л.у. полугруппы, аппроксимируемые относительно вхождения элемента в выпуклые подполугруппы A гомоморфизмами из Φ , раскладываются в линейную связку максимальных коммутативных подгрупп A_e ($e \in E$) без кручения и по работе [10] не имеют аномальных пар. Тогда по теореме Гёльдера (см.[12], стр.74) максимальные подгруппы A_e ($e \in E$) у – изоморфны некоторой подгруппе аддитивной группы вещественных чисел с естественным порядком. Эти подгруппы являются архимедово л.у. группами, не имеющими элементов конечного порядка.

Обозначим через $G(R_+)$ – все подгруппы аддитивной группы вещественных чисел.

Теорема 3. Пусть K – класс всех л.у. полугрупп. Класс $G(R_+)$ является минимальным классом аппроксимации для класса K .

Доказательство. По определению класса, если T класс аппроксимации K , то класс T' ($T \prec T'$) также является классом аппроксимации для K . Все подгруппы аддитивной группы вещественных чисел R_+ с естественным порядком являются простыми архимедовыми подгруппами без кручения, следовательно, класс подгрупп $G(R_+)$ является минимальным классом аппроксимации для K .

Следствие 2. Пусть K – класс л.у. коммутативных идемпотентных полугрупп. Для того, чтобы класс T был классом аппроксимации для K , необходимо и достаточно, чтобы некоторая полугруппа из T содержала подполугруппу, изоморфную мультипликативной полугруппе $\{0,1\}$.

Следствие 3. Пусть K – класс всех л.у. коммутативных идемпотентных полугрупп. Класс всех полугрупп изоморфных полугруппе $\{0,1\}$ является классом точной аппроксимации для K .

Поступило 19.05.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мальцев А.И. О гомоморфизмах на конечные группы. – Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1958, т. 18, с. 19-60.
2. Лесохин М.М. О гомоморфных представлениях полугрупп. – Извест. вузов, Математика, 1965, №5(48), с. 80-85.
3. Лесохин М.М. О гомоморфизмах на регулярные полугруппы. – Сиб. мат. Журн, 1963, (Т) IV, №6, с. 1431-1432.
4. Лесохин М.М. Об аппроксимации полугрупп относительно предикатов. – Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1970, (Т) 404, с. 191-219.
5. Исроилов С.И. Минимальные классы аппроксимации некоторых упорядоченных алгебраических систем. – Современные проблемы математики и её преподавания. Уч. зап, ЧГУ, 2014, ч.1, №2(29), с.302-303.
6. Исроилов С.И., Аслонов С.М. О минимальных классах представлений некоторых алгебраических систем. – Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа. Мат-лы науч-теорет. конф, посвящ. 75-летию проф. Сатторова А., ТНУ, Душанбе, 2 апреля 2016 г., с. 54-56.
7. Исроилов С.И. О положительных вещественных гомоморфизмах упорядоченных полугрупп. – Вестник ТНУ, сер. естест. наук, 2017, №1/5, с. 52-55.
8. Исроилов С.И. О минимальных архимедовых классах аппроксимации упорядоченных полугрупп. – Современные проблемы математики и ее приложений. Матер. междунар. научной конф. посвящ. 70-летию Академика Илолова М. Душанбе 14 марта 2018 г, с. 37-38.
9. Исроилов С.И., Аслонов С.М. О гомоморфных представлениях класса архимедовых положительно упорядоченных полугрупп. – Современные проблемы и приложения алгебры теории чисел и математического анализа. Мат-лы междунар. конф., посвящ. 60-летию академика АН РТ Рахмонова З.Х. и гл корр. АН РТ Исхокова С.А. – Душанбе, 13 декабря 2019 г., с. 215-218.
10. Алимов Н.Г. Об упорядоченных полугруппах. – Изв. АН СССР, сер. матем, 1950, т. 14, с. 569-576.
11. Ляпин Е.С. Полугруппы. – М.: Физматгиз, 1960, 592 с.
12. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. – М.: 1965, 342с.

С.И.Исроилов, С.М.Аслонов*

ДАР БОРАИ СИНФИ МИНИМАЛИИ ҲАҚИҚӢ НАЗДИКШАВИИ НИМГУРӢХӢ БО ТАРТИБИ ХАТӢ

Донишгоҳи Славянии Россия ва Тоҷикистон,

**Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ*

Дар мақола шартҳои наздикшавандагии нимгурӯҳҳои хаттӣ тартибнок ба зергурӯҳҳои гурӯҳи ададҳои ҳақиқӣ нисбат ба тартиби муқарарӣ тадқиқ карда шудааст. Ин синфи нимгурӯҳҳои инверсияе мебошад, ки тартиби элементҳои гурӯҳҳои максималиашон беохир буда, ҷуфтҳои элементҳои аномалиро надоранд. Синфи зергурӯҳҳои содаи гурӯҳи ададҳои ҳақиқӣ, бо тартиби муқарарӣ, барои синфи нимгурӯҳҳои инверсӣ синфи минималии наздикшавиро ташкил медиҳад.

Калимаҳои калидӣ: *нимгурӯҳ, гурӯҳ, наздикшаванда, ҷудошаванда, тартиб, синфи минималӣ, гомоморфизм, тартиби табиӣ, ҳамҷуфт, идемпотенти, идеалҳои барҷаста, зергурӯҳҳои максималӣ.*

S.I.Isroilov, S.M.Aslonov*

**ON REAL MINIMAL APPROXIMATION CLASSES OF SEMIGROUPS WITH
LINEAR ORDER***Russian-Tajik (Slavonic) University,***Tajik State Pedagogical University named after S.Aini*

This article deals with conditions of approximability and separability of l.u. semigroups into sub-semigroups of a group of real numbers with natural order. A class of semigroups separated into subgroups of the group of real numbers is found as well as in the article. It turned out to be a class of inverse commutative l.u. semigroups whose maximal subgroups don't have anomalous pairs. The class of all simple subgroups of the group of real numbers is the minimal approximation class for the class of inverse commutative l.u. semigroups.

Key words: *semigroup, group, approximation, separability, orderliness, minimal class, homomorphisms, natural order, conjugacy, idempotence, convex ideals, maximal semigroups.*

УДК 517.5

Академик НАН Таджикистана М.Ш.Шабозов, Ш.С.Шоинбекова*

О НАИЛУЧШИХ СОВМЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

$$H_{q,\rho}, (1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq 1)$$

Институт математики им. А.Джусраева НАН Таджикистана,

*Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева

В пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $(1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq 1)$ найдены точные неравенства между наилучшими совместными полиномиальными приближениями функции и ее промежуточными производными. Даны некоторые приложения найденных неравенств в экстремальных задачах теории приближения аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству $H_{q,\rho}$.

Ключевые слова: наилучшее совместное приближение, пространство Харди, верхняя грань, модуль гладкости.

1. Введение. Экстремальные задачи, связанные с наилучшим полиномиальным приближением аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди H_q , $(1 \leq q \leq \infty)$, ранее рассмотрены, например, в работах [1-9]. В данной работе изучается более общая задача: требуется найти верхние грани наилучших совместных полиномиальных приближений аналитических в круге функций и их производных в пространстве $H_{q,\rho}$, $(1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq 1)$.

Введем необходимые обозначения и понятия. Всюду далее \mathbb{N} , \mathbb{Z}_+ , \mathbb{C} – соответственно, множество натуральных, целых неотрицательных и комплексных чисел.

Пусть $U_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$, $0 < \rho \leq 1$ – открытый круг радиуса ρ , $U_1 := U$ – единичный круг; $A(U_\rho)$ – множество функций, аналитических в круге U_ρ .

Напомним, что функция $f(z) \in A(U_\rho)$ принадлежит банахову пространству H_q , если

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} M_q(f, \rho) < \infty, M_q(f, \rho) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}.$$

При этом норма функции $f(z) \in H_q$ реализуется на ее угловых граничных значениях $f(e^{it})$ [11, 12].

Обозначим через $H_{q,\rho}$, $0 < \rho \leq 1$ пространство Харди аналитических в круге U_ρ функций $f(z)$, для которых

$$\|f(z)\|_{q,\rho} := \|f(z)\|_{H_{q,\rho}} = \|f(\rho z)\|_{H_q} < \infty.$$

Производную r -го порядка функции $f(z)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho e^{it}$ обозначим через $f_a^{(r)}(z), r \in \mathbb{N}$. При этом

$$f_a^{(1)}(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial t} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = f'(z)zi$$

и при $r \geq 2, f_a^{(r)}(z) = \{f_a^{(r-1)}(z)\}_a^1$.

Под $H_{q,a}^{(r)}$ понимаем класс функций $f \in A(U)$, у которых $f_a^{(r)}(z) \in H_q$. Структурные свойства функции $f \in H_{q,a}^{(r)}$ характеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности

$$\omega(f_a^{(r)}, t)_q := \sup \{ \| f_a^{(r)}(e^{i(+h)}) - f_a^{(r)}(e^{i(\cdot)}) \|_q : |h| \leq t \}$$

граничных значений $f_a^{(r)}(e^{it})$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторого усредненного значения величины $\omega(f_a^{(r)}, t)_q$.

Пусть \mathcal{P}_n – множество комплексных алгебраических полиномов степени не выше n .
Равенством

$$E_{n-1}(f)_q := \inf \{ \| f - p_{n-1} \|_q : p_{n-1} \in \mathcal{P}_n \}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in H_q$ в пространстве H_q .

Пусть $\Phi(t)$ – положительная неубывающая выпуклая вниз при $t > 0$ функция, $\lim_{t \rightarrow 0+} \Phi(t) = \Phi(0) = 0$. Определим классы функций $f \in A(U)$ посредством мажоранты Φ :

$$W_{q,a}^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in H_{q,a}^{(r)} : \int_0^u \omega(f_a^{(r)}, t)_q dt \leq \Phi(u), 0 < u \leq 2\pi \right\}.$$

Поскольку для $H_{q,a}^{(r)}$ наравне с функциями f и $f_a^{(r)}$ все промежуточные производные $f_a^{(s)} (s = \overline{1, r-1})$ также принадлежат пространству H_q , то представляет интерес отыскание точных значений совместных приближений

$$E_{n-s-1}(f_a^{(s)})_q := \inf \{ \| f_a^{(s)} - p_{n-1,a}^{(s)} \|_q : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \} \tag{1}$$

на некотором подмножестве функций $\mathcal{M} \subseteq H_q^{(r)}$, где $n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq q < \infty$. Иными словами, требуется найти точное значение экстремальной величины

$$\mathcal{E}_{n-s-1}^{(s)}(\mathcal{M})_q := \sup \{ E_{n-s-1}(f^{(s)})_q : f \in \mathcal{M} \}. \tag{2}$$

2. Предварительные результаты. Из работы Л.В.Тайкова [14, следствие 2] следует, что для любой функции $f \in H_{q,a}^{(r)}$ справедливы неравенства

$$E_{n-1}(f)_q \leq n^{-r} E_{n-1}(f_a^{(r)})_q, \tag{3}$$

и равенства достигаются на функциях $f_0(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$.

В следующей теореме приведем обобщение неравенства (3).

Теорема 1. Пусть $f \in H_{q,a}^{(r)} (r \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq q < \infty)$. Тогда для любых $n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_{q,\rho} \leq \frac{\rho^n}{n^{r-s}} E_{n-1}(f_a^{(r)})_{q,\rho}, \tag{4}$$

и равенства в (4) достигается на функциях $f_0(z) = z^n \in H_{q,a}^{(r)} (n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s)$.

Доказательство. Пусть $P_{n-1}(f_a^{(r)}, z)$ – полином наилучшего приближения производной $f_a^{(r)}$ в норме пространства H_q :

$$E_{n-1}(f_a^{(r)})_q = \|f_a^{(r)} - P_{n-1}(f_a^{(r)}, \cdot)\|_q.$$

Положим

$$R(z) := R(f_a^{(r)}, z) = f_a^{(r)}(z) - P_{n-1}(f_a^{(r)}, z).$$

Тогда непосредственным вычислением для любых $s = 0, 1, \dots, r-1$ получаем

$$f_a^{(s)}(\rho e^{it}) - Q_{(n-1)}^{(s)}(\rho e^{it}) = \frac{\rho^n e^{int}}{2\pi i^s} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-r)\theta} R(e^{i(t+\theta)}) G_r(\theta) d\theta, \tag{5}$$

где

$$Q_{n-1,a}^{(s)}(z) = \sum_{k=s}^{r-1} (ik)^s c_k z^{k-s} + \sum_{k=r}^{n-1} (ik)^s c_k z^{k-s} \left[1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^r \rho^{2(n-k)} \right]$$

– некоторый полином, линейно зависящий от функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in H_{q,a}^{(r)}$, а ядро

$$G_r(\theta) := \left\{ \frac{1}{n^{r-s}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{(n+k)^{r-s}} \cos k\theta \right\}. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что числовая последовательность $\{\rho^k / (n+k)^{r-s}\}$ является выпуклой вниз и ее общий член стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Но тогда в силу теоремы 1.5 [13, с.294] функция $G_r(t)$ является неотрицательной и интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$ функцией. Очевидно

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_r(t) dt = \frac{1}{n^{r-s}}. \tag{7}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского к правой части (5) и учитывая (7), получаем

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_{q,\rho} \leq \rho^n \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |R(e^{i(t+\theta)})| |G_r(\theta)| d\theta \right)^q dt \right\}^{1/q} \leq \rho^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G_r(\theta)| d\theta \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |R(e^{it})|^q dt \right)^{1/q} = \frac{\rho^n}{n^{r-s}} \|R\|_q,$$

и поскольку $\|R\|_q := E_{n-1}(f_a^{(r)})_q$, то окончательно имеем

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_{q,\rho} \leq \rho^n n^{-(r-s)} E_{n-1}(f_a^{(r)})_q$$

и неравенство (4) доказано. Непосредственным вычислением легко убедиться, что неравенство (4) для функции $f_0(z) = z^n$ обращается в равенство, чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Проведя аналогичные рассуждения, получаем

$$\|f_a^{(s)} - T_{n-1}(f_a^{(s)})\|_{q,\rho} \leq \rho^n n^{-(r-s)} \|f_a^{(r)} - T_{n-1}(f_a^{(r)})\|_q, \tag{8}$$

где $T_{n-1}(f, z)$ – частная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда Тейлора функции $f \in A(U)$. Легко проверить, что неравенство (8) превращается в равенство также для функции $f_0(z) = z^n$. Из неравенств (4) и (8) вытекает

Следствие 1. При любых $n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s, 1 \leq q < \infty, 0 < \rho \leq 1$ справедливы равенства

$$\sup_{f \in H_q^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f_a^{(s)})_{q,\rho}}{E_{n-1}(f_a^{(r)})_q} = \frac{\rho^n}{n^{r-s}}, \tag{9}$$

$$\sup_{f \in H_q^{(r)}} \frac{\|f_a^{(s)} - T_{n-1}(f_a^{(s)})\|_{q,\rho}}{\|f_a^{(r)} - T_{n-1}(f_a^{(r)})\|_q} = \frac{\rho^n}{n^{r-s}}. \tag{10}$$

Через $W_a^{(r)}H_q (r \in \mathbb{Z}_+, W_a^{(0)}H_q = H_q)$ обозначим множество функций $f \in H_{q,a}^{(r)}$, у которых $\|f_a^{(r)}\|_q \leq 1$.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 2. Для любых чисел $n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$ при любых $1 \leq q < \infty, 0 < \rho \leq 1$ справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_a^{(r)}H_q)_{q,\rho} = \sup \{ E_{n-1}(f_a^{(s)})_{q,\rho} : f \in W_a^{(r)}H_q \} = \frac{\rho^n}{n^{r-s}}. \tag{11}$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in W_a^{(r)}H_q$ имеем $E_{n-1}(f_a^{(r)})_q \leq \|f_a^{(r)}\|_q \leq 1$, а потому из неравенства (4) сразу следует оценка сверху величины в левой части равенства (11):

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_a^{(r)}H_q)_{q,\rho} \leq \frac{\rho^n}{n^{r-s}}. \tag{12}$$

Для функции $g(z) = \frac{z^n}{n^r}$ имеем

$$g_a^{(s)}(z) = \frac{i^s z^n}{n^{r-s}}, \quad g_a^{(r)}(z) = i^r z^n,$$

и так как $E_{n-1}(g_0^{(s)})_{q,\rho} = \frac{\rho^n}{n^{r-s}}$ и $\|g_a^{(r)}\| = 1$, то функция $g \in W_a^{(r)}H_q$, а потому запишем

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_a^{(r)}H_q)_{q,\rho} \geq E_{n-1}(g_a^{(s)})_{q,\rho} = \frac{\rho^n}{n^{r-s}} \tag{13}$$

Требуемое равенство (11) получаем из сопоставления неравенств (12) и (13). Теорема 2 доказана.

3. Основные результаты. Приводим некоторые применения неравенства (4) и обобщим некоторые результаты работы [10].

Теорема 3. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ при любых $1 \leq q \leq \infty$ и $0 < \rho \leq 1$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_{q,\rho} \leq \frac{\rho^n}{4n^{r-s-1}} \int_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_q dt \tag{14}$$

и знак равенства в (14) достигается для функции $f_0(z) = z^n$.

Доказательство. В [10] доказано, что при любых $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы неравенства

$$E_{n-1}(f)_q \leq \frac{1}{4n^{r-1}} \int_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_q dt. \tag{15}$$

Знак равенства в (15) достигается на функцию $f_0(z) = z^n$. Полагая в (15) сначала $r = 0$ и в полученном неравенстве, заменив функцию f на производную $f_a^{(r)}$, будем иметь

$$E_{n-1}(f_a^{(r)})_q \leq \frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_q dt. \tag{16}$$

Теперь из неравенства (4), учитывая (16), получаем

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_{q,\rho} \leq \frac{\rho^n}{n^{r-s}} E_{n-1}(f_a^{(r)})_q \leq \frac{\rho^n}{4n^{r-s-1}} \int_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_q dt$$

и неравенство (14) доказано. Докажем точность неравенства (14). Для функции $f_0(z) = z^n$ при любом $s = 0, 1, \dots, r$ имеем

$$f_{0,a}^{(s)}(z) = (in)^s z^n, E_{n-1}(f_{0,a}^{(s)})_{q,\rho} = n^s \rho^n, \tag{17}$$

$$\int_0^{\pi/n} \omega(f_{0,a}^{(r)}, t)_q dt = 4n^{r-1},$$

пользуясь которыми получаем

$$\frac{\rho^n}{4n^{r-s-1}} \int_0^{\pi/n} \omega(f_{0,a}^{(r)}, t)_q dt = \frac{\rho^n}{4n^{r-s-1}} \cdot 4n^{r-1} = n^s \rho^n = E_{n-1}(f_{0,a}^{(s)})_{q,\rho},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Доказанная теорема позволяет найти точное значение экстремальной задачи (2) для класса $W_{q,a}^{(r)}(\Phi)$.

Теорема 4. Если для любых чисел $\lambda \in (0,1)$ и $t \in (0, \pi]$ выполняются неравенства

$$2\sin^2 \frac{\pi}{4} \lambda \leq \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)} \leq \frac{\lambda}{\pi/2 - (\pi/2 - 1)\lambda}, \tag{18}$$

то

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{q,a}^{(r)}(\Phi))_{q,\rho} = \frac{\rho^n}{4n^{r-s-1}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{19}$$

Доказательство данной теоремы повторяет схему доказательства аналогичного утверждения для периодических функций класса $L_2^{(r)}[0, 2\pi]$, а потому по понятным причинам здесь не приводится.

Поступило 03.05.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1967, т.1, №2, с.155-162.
2. Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций. – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, т.22, №5, с.631-640.
3. Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшее приближение в смысле А.Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций. – Матем. заметки, 1986, т.40, №3, с.341-351.
4. Вакарчук С.Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения. – Матем. заметки, 2002, т.72, №5, с.665-669.
5. Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости. – Укр. матем. журн., 2004, т.56, 9, с.1155-1171.
6. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 . – Матем. заметки, 2000, т.68, 5, с.796-800.

7. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций. – Докл. РАН, 2002, т.382, №6, с.747-749.
8. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге. – Матем. сборник, 2010, т.201, №8, с.3-22.
9. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М., Изд-во МГУ, 1976.
10. Тайков Л.В. Некоторые точные неравенства в теории приближения функций. – Analysis Mathematica, 1976, №2, с.77-85.
11. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1964, 440 с.
12. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.: Гостехиздат, 1950, 336 с.
13. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965, т.1, 616 с.
14. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1977, т.22, №2, с.155-162.

М.Ш.Шабозов, Ш.С.Шоинбекова*

ОИД БА НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ЯҚЗОЯИ ЯҚ СИНФИ ФУНКСИЯҲОИ АНАЛИТИКӢ ДАР ФАЗОИ ХАРДИ $H_{q,\rho}$, ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$)

*Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви, Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,
Донишгоҳи давлатии Хоруғ ба номи М.Назаршоев

Дар фазоҳои Харди $H_{q,\rho}$, ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$) нобаробариҳои аниқ байни бузургии наздиккунии беҳтарини яқзои функсия ва ҳосилаҳои пайдарпаи он ёфта шудааст. Татбиқи нобаробариҳои исботшуда ба баъзе масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии беҳтарини функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ, ки ба фазои Хардӣ тааллуқ доранд, дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарини яқзо, фазои Харди, сарҳади болоӣ, модули суфтагӣ.

M.Sh.Shabozov, Sh.S.Shoinbekova*

ON THE BEST SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF ONE CLASS OF ANALYTICAL FUNCTIONS IN THE HARDY SPACE $H_{q,\rho}$, ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$)

*A.D.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan,
M.Nazarshoev Khorog state university

In the Hardy spaces $H_{q,\rho}$, ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$) the sharp inequality between the best simultaneous polynomial approximation of a function and its intermediate derivatives was found. Some applications of the obtained inequalities in the extremal problems of the theory of approximation of analytic functions in the disk belonging to the space of Hardy $H_{q,\rho}$, was given.

Key words: best joint approximation, Hardy space, upper bound, modulus of smoothness.

УДК 517.5

М.А.Абдухаминов

О ЗАДАЧЕ НАИЛУЧШЕГО СОВМЕСТНОГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В L_2

Технологический университет Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 25.02.2022 г.)

В работе решена экстремальная задача нахождения точной верхней грани наилучших совместных приближений самой функции и ее промежуточных производных на некоторых классах функций из L_2 , характеристика гладкости старшей производной которых ограничена сверху заданной мажорантой.

Ключевые слова: *наилучшее приближение, верхняя грань, характеристика гладкости, мажоранта.*

1. В недавно опубликованных статьях [1, 2] получены некоторые точные неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и специальной характеристикой гладкости функций, впервые рассмотренных в работе К.В.Руновского [3], и более подробные свойства которых изучено С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [4]. Здесь, пользуясь одним результатом из [4], мы находим точное значение величины наилучшего совместного приближения функций и ее промежуточных производных одного класса функций.

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых по Лебегу 2π -периодических функций с конечной нормой

$$\|f\| := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Обозначим через

$$\Delta_h^m f(x) := \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kh)$$

– конечную разность m -го порядка функции $f \in L_2$ в точке x с шагом h и равенством

$$\omega_m(f, t) := \sup \left\{ \|\Delta_h^m f(\cdot)\| : |h| \leq t \right\}, \quad t > 0, \quad (1)$$

определим, как обычно, m -й модуль непрерывности функции $f \in L_2$.

Следуя [3], под усредненной характеристикой гладкости функции $f \in L_2$ будем понимать величину

Адрес для корреспонденции: *Абдухаминов Мунъим Абдумамадович. 734061, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Н.Карбаева, 63/3, Технологический университет Таджикистан. E-mail: abduatinov@mail.ru*

$$\Lambda_m(f, t) := \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^m f(\cdot)\|^2 dh \right)^{1/2}, \tag{2}$$

где $t > 0$. Из (2) и (1) следует, что при $t > 0$ справедливо неравенство

$$\Lambda_m(f, t) \leq \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^2(f, h) dh \right) \leq \omega_m(f, t). \tag{3}$$

Символом $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых $(r-1)$ -го производные при $r \in \mathbb{N}$ абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка принадлежат пространству L_2 . Через \mathcal{S}_{2n-1} обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Для произвольной функции $f \in L_2$ с формальным разложением в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

величина ее наилучшего приближения элементами подпространства \mathcal{S}_{2n-1} равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &:= \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{S}_{2n-1} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

– частная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда Фурье функции f , а $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$.

Напомним, что под неравенством типа Джексона-Стечкина понимают неравенство, в котором величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается сверху через некоторую характеристику гладкости самой функции или ее производной заданного порядка.

Условимся в дальнейшем в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям из класса $L_2^{(r)}$ заранее предполагать, что $f \neq const$.

Легко заметить, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, при любом $s = 0, 1, \dots, r$ имеет место равенство

$$E_{n-1}(f^{(s)}) = \|f^{(s)} - S_{n-1}(f^{(s)})\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} c_k(f) \right\}^{1/2}. \tag{5}$$

В [5, с.127] доказано, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любом $s = 1, 2, \dots, r-1, r \in \mathbb{N}, r \geq 2$ имеет место следующее неравенство типа Колмогорова

$$\| (f^{(s)}) \| \leq \| f \|^{1-s/r} \cdot \| f^{(r)} \|^{s/r}. \tag{6}$$

Из этого неравенства, в частности, вытекает, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ ее промежуточные производные $f^{(s)}, s = 1, 2, \dots, r-1, r \in \mathbb{N}, r \geq 2$ принадлежат пространству L_2 , а потому определенный интерес представляет поведение величины $E_{n-1}(f^{(s)})$ – совместного приближения функции и ее промежуточных производных на некотором подклассе функций $\mathfrak{M}^{(r)} \subseteq L_2^{(r)}$ или на самом классе $L_2^{(r)}$. Другими словами, для множества $\mathfrak{M}^{(r)} \subseteq L_2^{(r)}$ требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup \{ E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \}. \tag{7}$$

Для решения задачи (7) нам понадобится точное неравенство между величиной $E_{n-1}(f^{(s)})$ и усредненной характеристикой гладкости $\Lambda_m(f, t)$. Положим

$$\mathcal{J}_{k,m}(t) := \left(\frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos kh)^m dh \right)^{1/2}, \tag{8}$$

где $k, m \in \mathbb{N}$ и $t > 0$. Очевидно, что при любых $k, m \in \mathbb{N}$ и $t > 0$

$$\mathcal{J}_{k,m}(t) = \mathcal{J}_{1,m}(kt). \tag{9}$$

В [1, с.452] доказано, что при любых $m, n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < t \leq 2\pi$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)}, t/n)} = \frac{1}{2^{m/2} \mathcal{J}_{1,m}(t)} \tag{10}$$

и, в частности, из (10) при $t = \pi$ следует, что

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)}, \pi/n)} = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}},$$

где C_{2m}^m – биномиальный коэффициент. Используя определение характеристики гладкости (2), рассмотрим следующий класс функций.

Пусть $\Phi(u)$, где $0 \leq u \leq 2\pi$, есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Функцию Φ будем называть мажорантой. Символом $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные r -го порядка удовлетворяют условию $\Lambda_m(f^{(r)}, u) \leq \Phi(u)$, и $u \in (0, 2\pi]$.

В принятых обозначениях имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, функция $\mathcal{J}_{1,m}$ определяется формулами (8) и (9). Если для произвольных $\tau \in (0, 2\pi]$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта Φ удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Phi(\tau)}{\Phi(\pi/n)} \geq \sqrt{\frac{2^m}{C_{2m}^m}} \cdot \mathcal{J}_{1,m}(n\tau), \tag{11}$$

то справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)) = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{12}$$

Доказательство. Из соотношения (10) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ получаем неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{2^{m/2} \mathcal{J}_{1,m}(t)} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Lambda_m(f^{(r)}, t/n).$$

Полагая в полученном неравенстве $t = \pi$ и имея ввиду, что $2^{m/2} \mathcal{J}_{1,m}(\pi) = \sqrt{C_{2m}^m}$ [1, с.454], получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \Lambda_m\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right).$$

Используя определение класса $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$, отсюда получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (12):

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)) \leq (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-(r-s)} \cdot \Phi(\pi/n). \tag{13}$$

Теперь заметим, что при доказательстве теоремы 5 из [4] было показано, что если при выполнении ограничения (11) тригонометрический полином $T_n \in \mathcal{T}_{2n+1}$, удовлетворяет условию

$$\|T_n\| \leq (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-r} \cdot \Phi(\pi/n), \tag{14}$$

то полином T_n является элементом класса $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$. Принимая этот факт во внимание, введем в рассмотрение функцию

$$f_0(x) = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-r} \cdot \Phi(\pi/n) \cos nx.$$

Для этой функции выполняется условие (14) со знаком равенства

$$\|f_0\| = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-r} \cdot \Phi(\pi/n),$$

а потому $f_0 \in W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$. Кроме того, так как

$$f_0^{(s)}(x) = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-(r-s)} \cdot \Phi(\pi/n) \cos\left(\pi n + \frac{s\pi}{2}\right)$$

и в силу равенства (5)

$$E_{n-1}(f_0^{(s)}) = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-(r-s)} \cdot \Phi(\pi/n), \tag{15}$$

то, пользуясь равенством (15), получаем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)) \geq E_{n-1}(f_0^{(s)}) = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-(r-s)} \cdot \Phi(\pi/n). \quad (16)$$

Сопоставляя оценку сверху (13) с оценкой снизу (16), получаем требуемое равенство (12).

Известно [4, с.230], что множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (11), не пусто.

Этому ограничению удовлетворяет, например, функция $\Phi^*(u) := u^{\alpha/2}$, где $\alpha := \frac{2^{2m}}{C_{2m}^m} - 1$. Теорема

доказана.

Поступило 25.02.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шабозов М.Ш. Неравенство между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 . – Матем. заметки, 2021, т.110, №3, с.450-458.
2. Шабозов М.Ш., Абдухаминов М.А. Некоторые неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве L_2 . – Изв. вузов. Математика, 2021, №10, с.78-91.
3. Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p , $0 < p < 1$. – Матем. сб., 1994, т.185, №8, с.81-102.
4. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций. – Матем. заметки, 2016, т.99, №2, с.215-238.
5. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1978, 424 с.

М.А.Абдухаминов

ОИД БА МАСЪАЛАИ НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ҲАМЧОЯИ ПОЛИНОМИАЛИИ ФУНКСИЯҲОИ ДАВРИИ ДИФФЕРЕНСИРОНИДАШАВАНДА ДАР L_2

Донишгоҳи технологии Тоҷикистон

Дар мақола масъалаи экстремалии ёфтани сарҳади саҳеҳи наздиккунии беҳтарини функция ва ҳосилаҳои он барои баъзе синфи функцияҳо, ки характеристикаи суфтаи ҳосилаи тартиби калонтаринашон аз боло ба воситаи мажорантаи додашуда маҳдуд аст, ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин, сарҳади болоӣ, характеристикаи суфтагӣ, мажоранта.

M.A.Abduhaminov

**ON THE PROBLEM OF THE BEST JOINT POLYNOMIAL APPROXIMATION OF
DIFFERENTIABLE PERIODIC FUNCTIONS IN L_2** *Technological University of Tajikistan*

The paper solves the extremal problem of finding the least upper bound of the best joint approximations of the function itself and its intermediate derivatives on some classes of functions from L_2 , the smoothness characteristic of which is bounded from above by a given majorant.

Key words: *best approximation, upper bound, characteristic of smoothness, majorant.*

УДК 517.957

Член-корреспондент НАН Таджикистана С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов

ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СО СТЕПЕННЫМИ ВЕСАМИ ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

В работе изучаются свойства одного весового пространства дифференцируемых функций многих переменных, определенных во всём евклидовом пространстве. В частности, доказываются плотность класса бесконечно дифференцируемых финитных функций и эквивалентность двух разных норм в этом пространстве.

Ключевые слова: функциональное пространство, степенной вес, эквивалентность норм, плотность финитных функций.

1. В работе авторов [1], с целью изучения однозначной разрешимости вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов во всём пространстве с несогласованным степенным вырождением на бесконечности, было введено функциональное пространство \mathbb{H}_+ с конечной нормой

$$\|u; \mathbb{H}_+\| = \left\{ \sum_{j \in J} \|u; V_{2; \alpha_j}^j(\mathbb{R}^n)\|^2 \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где J – некоторое конечное число целых неотрицательных чисел, α_j , $j \in J$, – вещественные числа,

$$\|u; V_{2; \alpha_j}^j(\mathbb{R}^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=j} \int d^{2\alpha_j}(x) |u^{(k)}(x)|^2 dx + \int d^{2(\alpha_j+j)}(x) |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2},$$

$d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$. В наших обозначениях \mathbb{R}^n – n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ – длина мультииндекса k , $u^{(k)}(x)$ – обобщённая в смысле С.Л.Соболева производная функции $u(x)$ мультииндекса k . Для удобства записи в формуле (1) и далее во всех интегралах по всему пространству \mathbb{R}^n мы опускаем символ \mathbb{R}^n . В этой работе мы изучим функциональное пространство, частным случаем которого является пространство \mathbb{H}_+ .

Пусть r – натуральное, p – вещественное числа, $1 \leq p < \infty$ и J – некоторое подмножество множества $\{1, 2, \dots, r\}$, причём $r \in J$. Пусть каждому $j \in J$ сопоставлено в соответствие вещественное число α_j и $\delta = \min_{j \in J} (\alpha_j + j)$. Вводим пространство $\mathbb{B}_{p, J, \bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n)$ комплекснозначных

Адрес для корреспонденции: Исхоков Сулаймон Абунасрович, Рахмонов Бахтовар Абдуганиевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: sulaimon@mail.ru, Bakhtovar-1989@mail.ru.

функций $u(x)$, определённых во всём n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные до порядка r включительно, с конечной нормой

$$\begin{aligned} & \|u; \mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n)\| = \\ & = \left\{ \sum_{j \in J} \sum_{|k|=j} \int d^{p\alpha_j}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx + \int d^{p\delta}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно пространство \mathbb{H}_+ является частным случаем пространства $\mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n)$. Пространство $\mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n)$ тесно связано с пересечением пространств $V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n)$, $j \in J$, которое определяется равенством

$$\bigcap_{j \in J} V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \mid u \in V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n), \forall j \in J \right\}.$$

В этом пространстве зададим следующую норму

$$\left\| u; \bigcap_{j \in J} V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n) \right\| = \max_{j \in J} \|u; V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n)\|. \quad (3)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \|u; V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n)\| = \\ & = \left\{ \sum_{|k|=j} \int d^{p\alpha_j}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx + \int d^{p(\alpha_j+j)}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пространства вида $V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n)$ изучены во многих работах, среди которых отметим [2-5].

Ниже мы будем пользоваться следующей известной теоремой вложения этих пространств.

Теорема 1. Пусть s – натуральное и β – вещественное числа. Тогда для любого натурального $t \in [1, s]$ справедливо вложение

$$V_{p;\beta-t}^{s+t}(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_{p;\beta}^s(\mathbb{R}^n). \quad (5)$$

Вводим также пространство Л.Д.Кудрявцева $W_{p,\alpha}^m(\mathbb{R}^n)$ с конечной нормой

$$\|u; W_{p,\beta}^m(\mathbb{R}^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=m} \int d^{p\beta}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx + \int_{K_R} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

где K_R – шар радиуса $R > 0$ с центром в начале координат. Пространство $W_{p,\alpha}^m(\mathbb{R}^n)$ введено Л.Д.Кудрявцевым в работе [6] и далее изучено в работах [7]–[10]. Сформулируем некоторые нужные нам свойства этого пространства, которые имеются в работе [2].

Теорема 2. 1) если $\beta \geq n/p - 1$, то $\dot{W}_{p,\beta}^m(\mathbb{R}^n) = W_{p,\beta}^m(\mathbb{R}^n)$, то есть множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $W_{p,\beta}^m(\mathbb{R}^n)$;

2) если $\beta > n/p - 1$, то $\dot{W}_{p,\beta}^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{p,\beta+m}(\mathbb{R}^n)$;

3) если же $\beta \leq n/p - 1$, то $W_{p,\beta}^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{p,\beta+m,\varkappa}(\mathbb{R}^n)$, где $\varkappa = 1$, когда $n/p - \beta \in \{1, 2, \dots, m\}$, и $\varkappa = 0$ в противном случае.

Здесь в этой теореме и далее $L_{p,\gamma,\varkappa}(\mathbb{R}^n)$ – функциональное пространство с конечной нормой

$$\|u; L_{p,\gamma,\varkappa}(\mathbb{R}^n)\| = \left\{ \int d^{\gamma p}(x) [1 - \ln d(x)]^{-\varkappa p} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Пространство $L_{p,\gamma,\varkappa}(\mathbb{R}^n)$ при $\varkappa = 0$ обозначается через $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n)$.

Теперь переходим к изучению свойств пространства $\mathbb{B}_{p,J,\vec{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n)$. Из множества J выделим подмножество основных индексов, которого обозначим через I . Для удобства записи число r обозначим через i_0 и положим $i_0 \in I$. Пусть J_0 – множество всех $j \in J$ таких, что $\alpha_{i_0} + i_0 - j \leq \alpha_j$. Тогда через i_1 обозначим наибольший элемент множества $J \setminus (J_0 \cup \{r\})$, удовлетворяющий условию $\alpha_{i_0} + i_0 - i_1 > \alpha_{i_1}$, и определим множество J_1 всех $j \in J \setminus (J_0 \cup \{i_0\})$ таких, что $\alpha_{i_1} + i_1 - j \leq \alpha_j$. Далее, поступая с i_1 так же как с i_0 , определим элемент $i_2 \in J \setminus (J_0 \cup J_1 \cup \{i_0\})$. Продолжая этот процесс до завершения, определим множество $I = \{i_0, i_1, \dots, i_N\}$.

В пространстве $\mathbb{B}_{p,J,\vec{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n)$ вводим новую норму

$$\|u; \mathbb{B}_{p,J,\vec{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n)\|^* = \left\{ \sum_{m=0}^N \sum_{|k|=i_m} \int d^{p\alpha_{i_m}}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx + \int d^{p\delta_0}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad (6)$$

где $\delta_0 = \min_{m=0,N} (\alpha_{i_m} + i_m)$.

Теперь сформулируем основной результат нашей работы:

Теорема 3. При всех $p \in [1, +\infty)$ и всех вещественных $\alpha_j, j \in J$, справедливы утверждения:

1) множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в пространстве $\mathbb{B}_{p,J,\vec{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n)$ и справедливо вложение

$$\mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n) \rightarrow \bigcap_{j \in J} V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n); \tag{7}$$

2) нормы (2) и (6) эквивалентны в пространстве $\mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n)$;

3) если для m_1 из равенства $\delta_0 = \min_{m=0,N}(\alpha_{i_m} + i_m) = \alpha_{i_{m_1}} + i_{m_1}$ выполняется условие $n/p - \alpha_{i_{m_1}} \notin \{1, 2, \dots, i_{m_1}\}$, то с точностью до эквивалентности норм имеет место равенство

$$\mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{m=0}^N V_{p;\alpha_{i_m}}^{i_m}(\mathbb{R}^n). \tag{8}$$

Доказательство. Для доказательства п. 1) заметим, что $d^{\alpha_j+j}(x) \leq d^\delta(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n, j \in J$ и поэтому из (2), (3), (4) следует

$$\left\| u; \bigcap_{j \in J} V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n) \right\| \leq \| u; \mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n) \|, \tag{9}$$

что и означает вложение (6).

Переходим к доказательству п. 2). Вложение (5) теоремы 1 в терминах пространств $V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n), j \in J$, означает, что

$$\left\| u; V_{p;\alpha_i}^i(\mathbb{R}^n) \right\| \leq M \left\| u; V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n) \right\|, \tag{10}$$

если $i \leq j, \alpha_j + j - i \leq \alpha_i$. По определению для всех $j \in J_0$ выполняется неравенство $\alpha_{i_0} + i_0 - j \leq \alpha_j$. Поэтому из (10) для всех $j \in J_0$ следует

$$\left\| u; V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n) \right\| \leq M \left\| u; V_{p;\alpha_{i_0}}^{i_0}(\mathbb{R}^n) \right\|.$$

Аналогично, для всех $j \in J_1$ доказывается неравенство

$$\left\| u; V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n) \right\| \leq M \left\| u; V_{p;\alpha_{i_1}}^{i_1}(\mathbb{R}^n) \right\|.$$

Продолжая этот процесс до завершения, получаем: для любого $j \in J \setminus I$ найдется такое $i_m \in I$, что

$$\left\| u; V_{p;\alpha_j}^j(\mathbb{R}^n) \right\| \leq M \left\| u; V_{p;\alpha_{i_m}}^{i_m}(\mathbb{R}^n) \right\|.$$

В силу этого неравенства из (2) и (6) следует

$$\| u; \mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n) \|^* \leq \| u; \mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n) \| \leq M \| u; \mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n) \|^*,$$

то есть нормы (2) и (6) эквивалентны в пространстве $\mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n)$.

Для доказательства п. 3) теоремы 3 сначала отметим, что $d^{\alpha_i_m + i_m}(x) \leq d^{\delta_0}(x)$ при $m = \overline{0, N}$, $x \in \mathbb{R}^n$ и поэтому из неравенства (9) следует

$$\left\| u; \bigcap_{m=0}^N V_{p;\alpha_i_m}^{i_m}(\mathbb{R}^n) \right\| \leq \left\| u; \mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n) \right\|. \tag{11}$$

Для доказательства обратного неравенства отметим, что

$$\begin{aligned} \left\| u; \mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n) \right\|^* &\leq M \max_{m=0, N} \left\{ \sum_{|k|=i_m} \int d^{p\alpha_i_m}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p} + \\ &+ \left\{ \int d^{p\delta_0}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \end{aligned} \tag{12}$$

где M – положительная постоянная.

Согласно теореме 2, при условии $n/p - \beta \notin \{1, 2, \dots, m\}$ имеет место неравенство

$$\left\| u; L_{p,\beta+m}(\mathbb{R}^n) \right\| \leq M \left\| u; W_{p,\beta}^m(\mathbb{R}^n) \right\|, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Так как $n/p - \alpha_{i_{m_1}} \notin \{1, 2, \dots, i_{m_1}\}$ и $\delta_0 = \alpha_{i_{m_1}} + i_{m_1}$, то, используя это неравенство, имеем

$$\left\{ \int d^{p\delta_0}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p} = \left\| u; L_{p,\alpha_{i_{m_1}}+i_{m_1}}(\mathbb{R}^n) \right\| \leq M \left\| u; W_{p,\alpha_{i_{m_1}}}^{i_{m_1}}(\mathbb{R}^n) \right\|,$$

где $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Следовательно

$$\left\{ \int d^{p\delta_0}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq M_1 \max_{m=0, N} \left\| u; V_{p;\alpha_i_m}^{i_m}(\mathbb{R}^n) \right\|.$$

Отсюда и из (12) в силу (3) следует

$$\left\| u; \mathbb{B}_{p,J,\bar{\alpha}}^r(\mathbb{R}^n) \right\|^* \leq M \left\| u; \bigcap_{m=0}^N V_{p;\alpha_i_m}^{i_m}(\mathbb{R}^n) \right\|. \tag{13}$$

Неравенства (11) и (13) означают, что равенство (8) имеет место с точностью до эквивалентности норм.

Теорема 3 доказана.

Поступило 06.04.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Исоқов С.А., Раҳмонов Б.А. Вариационная задача Дирихле, связанная с некоэрцитивной формой во всем пространстве. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2018, №2, с.17-25.
2. Мирошин Н.В. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением. – Труды Математического института РАН, 1992, т.194, с.179-195.
3. Бойматов К.Х. О плотности финитных функций в весовых пространствах. – ДАН СССР, 1989, т.307, №6, с.1296-1299.
4. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980.
5. Исоқов С.А. О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений. – Дифференц. уравнения, 1995, т. 31, №4, с.641-653.
6. Кудрявцев Л.Д. Теоремы вложения для классов функций, определенных на неограниченных областях. – ДАН СССР, 1963, т.153, №3, с.530-532.
7. Пиголкина Т.С. О плотности финитных функций в весовых классах. – Мат. заметки, 1967, т.2, №1, с.53-60.
8. Никольский Ю.С. Поведение на бесконечности функций с заданными в L_p дифференциально-разностными свойствами. – Тр. МИАН СССР, 1974, т.131, с.182-198.
9. Рыболов Ю.С. О краевой задаче в полупространстве с граничным условием на бесконечности. – Дифференц. уравнения, 1979, т.15, №12, с.2193-2204.
10. Успенский С.В. О теоремах вложения для весовых классов. – Тр. МИАН СССР, 1961, т.50, с.282-303.

С.А.Исоқов, Б.А.Раҳмонов

**ОИД БА ЯК ФАЗОИ ФУНКЦИОНАЛӢ БО ВАНЗӢОИ ДАРАЧАГӢ
ДАР ТАМОМИ ФАЗО**

Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола ҳосиятҳои як фазои вазндори функсияҳои бисёртағирёбандаи дифференсиронидашавандаи дар тамоми фазои евклидӣ муайяншуда омӯхта шудааст. Аз он чумла, дар ин фазо зичии маҷмӯи функсияҳои беохир дифференсиронидашавандаи финитӣ ва эквивалент будани меъёрҳои гуногун исбот карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: фазои функционалӣ, вазни дараҷагӣ, эквивалентии нормаҳо, зичии функсияҳои финитӣ.

S.A.Iskhokov, B.A.Rakhmonov

**ABOUT OF A ONE FUNCTIONAL SPACE WITH POWER WEIGHTS IN THE
WHOLE SPACE***A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan*

The properties of one weighted space of differentiable functions of several variables defined in the whole Euclidean space are study. In particular, prove the density of the class of infinitely differentiable finite functions and equivalence of two different norms in the space.

Key words: *function space, power weight, equivalence of norms, density of finite functions.*

УДК 517.962

Академик НАН Таджикистана Н.Раджабов,

М.И.Мамадалиев

К ТЕОРИИ ОДНОГО КЛАССА ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ДВУМЯ СУПЕРСИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ

Таджикский национальный университет

В работе для системы (1) в зависимости от того, какое из уравнений в ней является основным, при выполнении соответствующих условий совместности найдено многообразие решений данной системы через одну произвольную постоянную. Изучены все возможные случаи. Выделены случаи, когда система (1) имеет единственное решение. В случае, когда общее решение содержит одну произвольную постоянную, ставятся и исследуются граничные задачи типа Коши.

Ключевые слова: *переопределённая система интегральных уравнений, интегральные представления, многообразия решений.*

Через D обозначим прямоугольник $D = \{(x, y) : a < x < a_0, b < y < b_0\}$. Соответственно обозначим $\Gamma_1 = \{a < x < a_0, y = b\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, b < y < b_0\}$.

В области D рассмотрим следующую переопределённую систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x, y) + \lambda \int_a^x \frac{\varphi(t, y)}{(t-a)^\alpha} dt = f(x, y) \\ \varphi(x, y) + q \int_b^y [\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)] \frac{\varphi(x, s)}{(s-b)^\beta} ds = g(x, y) \end{cases}, \quad (1)$$

где λ, q – заданные постоянные, $f(x, y)$, $g(x, y)$ – заданные функции на D , $\varphi(x, y)$ – искомая функция, $\alpha = \text{const} > 1$, $\beta = \text{const} > 1$, $\omega_b^\beta(y) = [(\beta-1)(y-b)^{\beta-1}]^{-1}$

Решение системы интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $\varphi(x, y) \in C(\bar{D})$, $\varphi(a, y) = 0$ с асимптотическим поведением

$$\varphi(x, y) = o\left[(x-a)^{\delta_1}\right], \quad \delta_1 > \alpha - 1 \text{ при } x \rightarrow a$$

$\varphi(x, b) = 0$ с асимптотическим поведением

$$\varphi(x, y) = o[(y-b)^{\delta_2}], \delta_2 > 2\beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b.$$

Проблеме исследования переопределенной системы интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярными и суперсингулярными линиями посвящены работы [1-4]. Проблеме исследования переопределенной системы дифференциальных уравнений и вырождающихся дифференциальных уравнений посвящены [5-15].

Определение. Будем говорить, что в системе (1) основным уравнением является первое уравнение системы (1). Если сначала находим решение первого уравнения этой системы, то после подчиняем его второму уравнению. Будем говорить, что второе уравнение системы (1) является основным уравнением системы (1). Если сначала находим решение второго уравнения этой системы, то после подчиняем его первому уравнению.

Пусть основным уравнением системы (1) является первое уравнение.

Тогда, согласно [4], решение первого уравнения системы (1) при $\lambda < 0$, выражается формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \exp[\lambda \omega_a^\alpha(x)] C_1(y) + f(x, y) - \\ &- \lambda \int_a^x \exp[\lambda(\omega_a^\alpha(x) - \omega_a^\alpha(t))] \frac{f(t, y)}{(t-a)^\alpha} dt \equiv \\ &\equiv \exp[\lambda \omega_a^\alpha(x)] C_1(y) + K_1(f), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\omega_a^\alpha(x) = [(\alpha - 1)(x - a)^{\alpha - 1}]^{-1}$, $C_1(y)$ – произвольная функция точек Γ_2 .

Найденное решение первого уравнения из формулы (2) подставляем во второе уравнение системы (1), после некоторых преобразований, для нахождения неизвестной функции $C_1(y)$ получим следующее равенство

$$\begin{aligned} C_1(y) + q \int_b^y [\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)] \frac{C_1(s)}{(s-b)^\beta} ds = \\ = \exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] (g(x, y) - f(x, y)) + \\ + \lambda \int_a^x \exp[-\lambda \omega_a^\alpha(t)] \frac{f(t, y)}{(t-a)^\alpha} dt - q \int_b^y \exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] \frac{f(x, s)}{(s-b)^\beta} + \\ + \lambda q \int_b^y [\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)] \left[\int_a^x \exp[-\lambda \omega_a^\alpha(t)] \frac{f(t, s)}{(t-a)^\alpha} dt \right] \frac{ds}{(s-b)^\beta}. \end{aligned} \tag{3}$$

В силу независимости левой части этого выражение от x , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] (g(x, y) - f(x, y)) \right] + \lambda \exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] \frac{f(x, y)}{(x-a)^\alpha} - \\ & - q \int_b^y \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] f(x, s)}{(s-b)^\beta} \right] ds + \\ & + \lambda q \int_b^y [\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)] \left[\exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] \frac{f(x, s)}{(x-a)^\alpha} \right] \frac{ds}{(s-b)^\beta} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \lambda \left[\exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] (x-a)^{-\alpha} \left[f(x, y) + q \int_b^y [\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)] \frac{f(x, s)}{(s-b)^\beta} ds \right] \right] = \\ & = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] (g(x, y) - f(x, y)) \right] + \\ & + q \frac{\partial}{\partial x} \int_b^y \frac{\exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] f(x, s)}{(s-b)^\beta} ds. \end{aligned} \tag{4}$$

Принимая во внимание тождество (4), равенство (3) запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} & C_1(y) + q \int_b^y [\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)] \frac{C_1}{(s-b)^\beta} ds = \\ & = \exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] (g(x, y) - f(x, y)) - \\ & - q \int_b^y \exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] \frac{f(x, s)}{(s-b)^\beta} ds - \\ & - \int_a^x \frac{\partial}{\partial t} \left[\exp[-\lambda \omega_a^\alpha(t)] (g(t, y) - f(x, y)) \right] + \\ & + q \int_b^y \exp[-\lambda \omega_a^\alpha(t)] \frac{f(t, s)}{(s-b)^\beta} ds. \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь заметим, что решение вида (2), было найдено при предположении, что $f(x, y)$ непрерывна по переменной x , $f(a, y) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x, y) = o \left[\exp[\lambda \omega_a^\alpha(x)] (x-a)^{\delta_2} \right], \quad \delta_2 > \alpha - 1. \tag{6}$$

В силу условия (6) $\left[\exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] f(x, y) \right]_{x=a} = 0$.

Далее пусть существует предел

$$\left[\exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] f(x, y) \right]_{x=a} = E(y). \tag{7}$$

Тогда равенство (7) принимает вид

$$C_1(y) + q \int_b^y \left[\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s) \right] \frac{C_{1(s)}}{(s-b)^\beta} ds = E(y). \tag{8}$$

Таким образом для нахождения неизвестной функции $C_1(y)$ получили одномерное интегральное уравнение типа Вольтерра с левой сверхсингулярной точкой, теория которой построена в [4]. Согласно [4], когда в (8) $q < 0$, $E(y) \in C(\bar{\Gamma}_2)$, $E(b) = 0$ с асимптотическим поведением

$$E(y) = o \left[\exp[-\sqrt{|q|} \omega_b^\beta(y)] (y-b)^{\delta_3} \right], \delta_3 > \beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b. \tag{9}$$

Тогда решение интегрального уравнения (8) даётся формулой

$$C_1(y) = \exp[-\sqrt{|q|} \omega_b^\beta(y)] C_1^0 + E(y) - \frac{|q|}{2} \int_b^y \left\{ \exp[-\sqrt{|q|} (\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))] - \exp[\sqrt{|q|} (\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))] \right\} \frac{E(s)}{(s-b)^\beta} ds \equiv K_2[C_1^0, E(y)],$$

где C_1^0 – произвольная постоянная.

Подставляя найденное значение $C_1(y)$ в формулу (2), находим решение системы (1) в этом случае

$$\varphi(x, y) = \exp[\lambda \omega_a^\alpha(x)] K_2[C_1^0, E(y)] + K_1(f(x, y)). \tag{10}$$

В правой части равенства (4), выполняя операцию дифференцирования, будем иметь

$$\begin{aligned} & \lambda q (x-a)^\alpha \exp[\lambda \omega_a^\alpha(x)] \int_b^y \left[\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s) \right] \frac{f(x, s)}{(s-b)^\beta} ds = \\ & = -\lambda g(x, y) - (x-a)^\alpha \frac{\partial}{\partial x} [g(x, y) - f(x, y)] + \\ & + q \int_b^y \frac{f(x, s) + (x-a)^\alpha \frac{\partial f(x, s)}{\partial x}}{(s-b)^\beta} ds. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом доказана

Теорема 1. Пусть в системе интегральных уравнений (1) $\lambda < 0$, $q < 0$, и основным уравнением является первое уравнение системы (1), $f(x, y)$ – непрерывно по переменной $x \in \bar{\Gamma}_1$, $f(a, y) = 0$ с асимптотическим поведением (6). Кроме того, пусть существует предел вида (7), причем $E(b) = 0$ с асимптотическим поведением (9). Функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ удовлетворяют условию совместности (11). Тогда любое решение системы (1) из класса $C(\bar{D})$, обращающееся в нуль на Γ_1 и Γ_2 , даётся формулой (10), где C_1^0 – произвольная постоянная.

Замечание 1. Решение вида (10) обладает следующим свойством.

$$\left[\exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] \varphi(x, y) \right]_{x=a} = K_2 [C_1^0, E(y)]. \tag{12}$$

Умножая обе стороны равенства (12) на $\exp[\sqrt{|q|} \omega_b^\beta(y)]$, после перехода к пределу при $y \rightarrow b$, получим

$$\left[\exp[\sqrt{|q|} \omega_b^\beta(y)] \left[\exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] \varphi(x, y) \right]_{x=a} \right]_{y=b} = C_1^0. \tag{13}$$

Теперь допустим, что в интегральном уравнении (8) $q > 0$. Тогда, если решение интегрального уравнения (8) существует, то оно даётся формулой

$$C_1(y) = E(y) + \sqrt{q} \int_b^y \sin[\sqrt{q}(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))] \frac{E(s)}{(s-b)^\beta} ds \equiv K_2 [E(y)]. \tag{14}$$

Это решение получено при предположении, что $E(y) \in C(\bar{\Gamma}_2)$, $E(b) = 0$ с асимптотическим поведением

$$E(y) = o[(y-b)^{\delta_4}], \delta_4 > \beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b. \tag{15}$$

Подставляя найденное значение $C_1(y)$ в формулу (2), получим решение системы (1) в этом случае

$$\varphi(x, y) = \exp[\lambda \omega_a^\alpha(x)] K_2 [E(y)] + K_1 [f(x, y)]. \tag{16}$$

Итак доказана

Теорема 2. Пусть в системе интегральных уравнений (1) $\lambda < 0$, $q > 0$ и существует предел вида (7), причем $E(b) = 0$ с асимптотическим поведением (15). Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(a, y) = 0$ с асимптотическим поведением (6). Функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ удовлетворяют условию совместности (11). Тогда система интегральных уравнений (1) имеет единственное решение, которое даётся формулой (16).

Замечание 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда любое решение системы (1) на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическими поведением:

$$\varphi(x, y) = o\left[\exp\left[\lambda\omega_a^\alpha(x)\right]\right], \text{ при } x \rightarrow a$$

$$\varphi(x, y) = o\left[\exp\left[\sqrt{|q|}\omega_b^\beta(y)\right]\right] \text{ при } x \rightarrow b.$$

Интегральное представление (10), его свойства (13) дают возможность для системы (1) при $\lambda < 0, q < 0$ ставить и исследовать следующую краевую задачу:

Задача N_1 . Требуется найти решение системы (1) при $\lambda < 0, q < 0$ по граничным условиям:

$$\left[\exp\left[\sqrt{|q|}\omega_b^\beta(y)\right] \left[\exp\left[-\lambda\omega_a^\alpha(x)\right] \varphi(x, y) \right]_{x=a} \right]_{y=b} = E_1,$$

где E_1 – заданная постоянная.

Решение задачи N_1 . Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда, используя интегральное представление (10), его свойства (13), находим $C_1^0 = F$. Подставляя это значение C_1^0 в интегральное представление (10), находим решение задачи N_1 в виде

$$\varphi(x, y) = \exp\left[\lambda\omega_a^\alpha(x)\right] K_2[F, E(y)] + K_1[f(x, y)]. \tag{17}$$

Итак доказана

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда задача N_1 имеет единственное решение, которое даётся формулой (17).

Теперь допустим, что основным уравнением является второе уравнение системы (1). Тогда при $q < 0$ решение второго уравнения системы (1), согласно [4], даётся формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \exp\left[-\sqrt{|q|}\omega_b^\beta(y)\right] C_2(x) + g(x, y) - \\ &- \frac{|q|}{2} \int_b^y \left\{ \exp\left[-\sqrt{|q|}(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))\right] - \exp\left[\sqrt{|q|}(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))\right] \right\} \frac{g(x, s)}{(s-b)^\beta} ds \equiv \\ &\equiv \exp\left[-\sqrt{|q|}\omega_b^\beta(y)\right] C_2(y) + K_3[g(x, y)], \end{aligned} \tag{18}$$

где $C_2(x)$ – произвольная функция точек Γ_1 . Решение вида (18) получено, при предположении, что $g(x, y) \in C(\bar{D})$, $g(x, b) = 0$ с асимптотическим поведением

$$g(x, y) = o\left[\exp\left[-\sqrt{|q|}\omega_b^\beta(y)\right](y-b)^{\delta_6}\right], \delta_6 > \beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b. \tag{19}$$

Если $q > 0$, тогда, согласно [1], решение второго интегрального уравнения системы (1) даётся формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = g(x, y) + \\ + \sqrt{q} \int_b^y \sin \left[\sqrt{q} (\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)) \right] \frac{g(x, s)}{(s-b)^\beta} ds \equiv K_4 [g(x, y)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение вида (20) получено при предположении, что $g(x, y) \in C(\bar{D})$, $g(x, b) = 0$ с асимптотическим поведением

$$g(x, y) = o \left[(y-b)^{\delta_6} \right], \quad \delta_6 > \beta - 1 \text{ при } y \rightarrow b. \quad (21)$$

Теперь при $q < 0$ решение вида (18), подчиняя первому уравнению системы (1), после некоторых преобразований, для определения $C_2(x)$, получим следующее тождество

$$\begin{aligned} C_2(x) + \lambda \int_a^x \frac{c_2(t)}{(t-a)^\alpha} dt = (f(x, y) - g(x, y)) \exp \left[\sqrt{|q|} \omega_b^\beta(y) \right] - \\ - \lambda \int_a^x \frac{\exp \left[\sqrt{|q|} \omega_b^\beta(y) \right] g(t, y)}{(t-a)^\alpha} dt + \\ + \frac{|q|}{2} \left[\int_b^y \exp \left[\sqrt{|q|} \omega_b^\beta(s) \right] \left[g(x, s) - \lambda \int_a^x \frac{g(t, s)}{(t-a)^\alpha} dt \right] \frac{ds}{(s-b)^\beta} \right]. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} C_2(x) + \lambda \int_a^x \frac{C_2(t)}{(t-a)^\alpha} dt = \\ = \exp \left[\sqrt{|q|} \omega_b^\beta(y) \right] \left[f(x, y) - g(x, y) - \lambda \int_a^x \frac{g(t, y)}{(t-a)^\alpha} dt \right] + \\ + \frac{|q|}{2} \int_b^y \exp \left[\sqrt{|q|} \omega_b^\beta(s) \right] \left[g(x, s) - \lambda \int_a^x \frac{g(t, s)}{(t-a)^\alpha} dt \right] \frac{ds}{(s-b)^\beta}. \end{aligned} \quad (22)$$

В силу того, что левая часть этого тождества не зависит от переменной y имеем

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\exp \left[\sqrt{|q|} \omega_b^\beta(y) \right] \left[f(x, y) - g(x, y) - \lambda \int_a^x \frac{g(t, y)}{(t-a)^\alpha} dt \right] \right] +$$

$$+\frac{|q|}{2} \exp\left[\sqrt{q}\omega_b^\beta(y)\right] \left[g(x,y) - \lambda \int_a^x \frac{g(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt \right] (y-b)^\beta = 0. \tag{23}$$

Принимая во внимание равенство (23), равенство (22) запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} & C_2(x) + \lambda \int_a^x \frac{C_2(t)}{(t-a)^\alpha} dt = \\ & = \exp\left[\sqrt{|q|}\omega_b^\beta(y)\right] \left[f(x,y) - g(x,y) - \lambda \int_a^x \frac{g(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt \right] - \\ & - \int_b^y \frac{\partial}{\partial s} \left[\exp\left[\sqrt{|q|}\omega_b^\beta(s)\right] \left[f(x,s) - g(x,s) - \lambda \int_a^x \frac{g(t,s)}{(t-a)^\alpha} dt \right] \right] ds. \end{aligned} \tag{24}$$

Замечая, что в силу условия (19)

$$\left(g(x,y) \exp\left[\sqrt{|q|}\omega_b^\beta(y)\right] \right)_{y=b} = 0,$$

увидим, что, если существует предел

$$\left[f(x,y) \exp\left[\sqrt{|q|}\omega_b^\beta(y)\right] \right]_{y=b} = f(x), \tag{25}$$

тогда равенство (24) принимает вид

$$C_2(x) - \lambda \int_a^x \frac{C_2(t)}{(t-a)^\alpha} dt = f(x). \tag{26}$$

Таким образом, в этом случае задача свелась к нахождению одномерного сверхсингулярного интегрального уравнения Вольтерра с левой фиксированной суперсингулярной точкой, теория которой построена в [4].

Согласно [4], когда $\lambda > 0$, если решение интегрального уравнения (26) существует, тогда оно даётся формулой

$$\begin{aligned} C_2(x) &= \exp\left[-\lambda\omega_a^\alpha(x)\right] C_2^0 + f(y) + \\ & + \lambda \int_a^x \exp\left[\lambda(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))\right] \frac{f(t)}{(t-a)^\alpha} dt \equiv \\ & \equiv \exp\left[-\lambda\omega_a^\alpha(x)\right] C_2^0 + K_4(f). \end{aligned} \tag{27}$$

Решение вида (27) существует, если $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x) = o\left[\exp\left[-\lambda\omega_a^\alpha(x)\right](x-a)^{\delta_7}\right], \delta_7 > \alpha - 1 \text{ при } x \rightarrow a. \tag{28}$$

Подставляя это значение $C_2(x)$ в интегральное представление (18), получим решение системы (1) в этом случае

$$\varphi(x, y) = \exp\left[-\sqrt{|q|}\omega_b^\beta(y)\right]\left[\exp\left[-\lambda\omega_a^\alpha(x)\right]C_2^0 + K_4(f)\right] + K_3[g(x, y)]. \tag{29}$$

Итак, доказана

Теорема 4. Пусть в системе интегральных уравнений (1) основным уравнением является второе уравнение и $q < 0, \lambda > 0$. Функция $g(x, y) \in C(\bar{D})$, $g(x, b) = 0$ с асимптотическим поведением (19). Кроме того, пусть существует предел вида (25), причем $f(b) = 0$ с асимптотическим поведением (28). Функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ удовлетворяют условию совместности (26). Тогда любое решение системы (1) из класса $C(\bar{D})$, обращающиеся в нуль на Γ_1 и Γ_2 даётся формулой (29), где C_2^0 – произвольная постоянная.

Замечание 2. Решение вида (29) обладает следующим свойством

$$\left[\varphi(x, y)\exp\left[\sqrt{|q|}\omega_b^\beta(y)\right]\right]_{y=b} = \exp\left[-\lambda\omega_a^\alpha(x)\right]C_2^0 + K_4(f).$$

Отсюда

$$\left\{\exp\left[\lambda\omega_a^\alpha(x)\right]\left[\varphi(x, y)\exp\left[\sqrt{|q|}\omega_b^\beta(y)\right]\right]_{y=b}\right\}_{x=a} = C_2^0. \tag{30}$$

Теперь допустим, что в интегральном уравнении (26) $\lambda < 0$. В этом случае, если решение уравнение (26) существует, тогда, согласно [4], она даётся формулой

$$C_2(x) = K_4(f). \tag{31}$$

Решение вида (31) существует, если $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x) = o\left[(x-a)^{\delta_8}\right], \delta_8 > \alpha - 1 \text{ при } x \rightarrow a. \tag{32}$$

Подставляя найденное значение $C_2(x)$ в формулу (18), находим решение системы интегральных уравнений (1) в этом случае:

$$\varphi(x, y) = \exp\left[-\sqrt{|q|}\omega_b^\beta(y)\right]K_4(f) + K_3[g(x, y)]. \tag{33}$$

Таким образом доказана

Теорема 5. Пусть в системе интегральных уравнений (1) $q < 0, \lambda < 0$ и основным уравнение системы (1) является второе уравнение. Кроме того, пусть существует предел вида (25), причем $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (28). Функция $g(x, y)$ удовлетворяет следующим

условиям: $g(x, y) \in C(\bar{D})$, $g(x, b) = 0$ с асимптотическим поведением (21). Функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ удовлетворяют условию совместности (23). Тогда единственное решение системы интегральных уравнений (1) даётся формулой (33).

Пусть $q > 0$, λ – любое. В этом случае решение второго уравнения системы (1) даётся формулой (20). Подставляя это значение $\varphi(x, y)$ в первое уравнение системы (1), получим

$$\begin{aligned} g(x, y) + \sqrt{|q|} \int_b^y \sin \left[\sqrt{q} (\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)) \right] \frac{g(x, s)}{(s-b)^\beta} ds + \\ + \lambda \int_a^x \left[g(t, y) + \sqrt{|q|} \int_b^y \sin \left[\sqrt{q} (\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)) \right] \frac{g(t, s)}{(s-b)^\beta} ds \right] \\ = f(x, y). \end{aligned} \quad (34)$$

Итак, доказана

Теорема 6. Пусть в системе интегральных уравнений (1) $q > 0$ и основным уравнением является второе уравнение системы (1). Пусть функцию $g(x, y) \in C(\bar{\Gamma})$, $g(x, b) = 0$ с асимптотическим поведением (21), $g(a, y) = 0$ с асимптотическим поведением

$$g(x, y) = o \left[(x-a)^{\delta_0} \right], \quad \delta_0 > \alpha - 1.$$

Функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ между собой связаны формулой (34). Тогда единственное решение системы (1) из класса $C(\bar{D})$, которое обращается в нуль в Γ_1 и Γ_2 , даётся формулой (20).

Поступило 20.04.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджабов Н. Переопределенная линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверхсингулярные интегральные уравнения типа Вольтерра третьего рода с логарифмическими ядрами и их приложения. – Душанбе: изд. ТНУ, 2021, 317 с.
2. Раджабов Н. Граничные задачи для одного класса переопределенных систем интегральных уравнений Вольтерра с двумя сингулярными линиями. Мат.-лы республ. Науч.-прак. Конф. «Современные проблемы, прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества». – Худжанд, 2021, С.140-141.
3. Раджабов Н. Переопределенная линейная система двух интегральных уравнений Вольтерровского типа с двумя фиксированными граничными сингулярными линиями в ядре. Мат.-лы междунар. Науч. Конф. «Современные проблемы математики и физики», посвящу. 70-летию чл. -корр. АН РБ К.Б.Сабитова (12-15 сентября 2021 г. Стерлитамак), 2021, с. 85-90.
4. Rajabov N. Volterra Type Integral Equation with Boundary and interior fixed singularity and supersingularity kernels and Their Application. – Dushanbe, Tajik State University «Irfon», 2010, 295 p.

5. Раджабов Н. Переопределенная линейная система трех интегральных уравнений вольтерровского типа с тремя сингулярными областями. – Известия НАН Таджикистана, 2021, №3(184), с. 46-61.
6. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболе-гиперболического типа. – М.: Наука 2016, 271 с.
7. Сабитов К.Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: «Высшая школа», 2005, 670 с.
8. Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. – Акт обе, 2018, 463 с.
9. Михайлов Л. Г. Интервальные уравнения с ядром однородной степени -1. – Душанбе Изд-во «Дониш», 1966, 47с.
10. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. – Изд-во АН Тадж. ССР, Душанбе, 1963.
11. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. – Ташкент: ФАН, 1979, 240 с.
12. Салахиддинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. – Ташкент: Universidad, 2005, 224 с,
13. Вирченко Н. А, Шамсиддинов Ф. М. Об одном линейном гиперболическом уравнении второго порядка со сверхсингулярными коэффициентами – ДАН Украины , 2004, №4, с. 7-12.
14. Tasmambetov Zh.N., Zhakhina R.U. Solution of degenerate Hyper geometric system of Horn consenting of three equations. – Abstracts of VI congress of the Turkic world Mathematical Society, October 2-5, 2017, Kazakhstan, p. 137.
15. Tasmambetov Zh.N., Talipova M. Zh. Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system. – Abstracts of VI congress of the Turkic world Mathematical Society, October 2-5, 2017, Kazakhstan, p. 138.

Н.Рачабов, М.И.Мамадалиев

ДАР БОРАИ ЯК СИНФИ СИСТЕМАИ БАРЗИЁД МУАЯНШУДАИ МУОДИЛАҶОИ ИНТЕГРАЛИИ ВОЛТЕРРА БО ДУ ХАТИ СУПЕРСИНГУЛЯРӢ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола як синфи системаи барзиёд муаяншудаи муодилаи интегралӣ намуди Волтерра бо ядроҳои суперсингулярӣ, вобаста аз он ки муодилаи асосӣ, муодилаи якуми системаи (1), ё ин ки муодилаи дуҷуми системаи (1) мебошад ва вобаста аз аломати параметрҳои дар система (1) ҷойгир шуда, омӯхта шудааст.

Тасвирҳои интегралӣ дар ҳамаи ҳолатҳо ёфта шудаанд. Дар ҳолатҳое, ки ҳалли умумии яке аз муодилаҳои системаи (1), як функцияи ихтиёрии аз як тағйирёбанда вобаста бударо дар бар мегирад, барои ёфтани ин функцияҳо, ки аз як тағйирёбандаи x ё ин ки тағйирёбандаи y вобаста аст, масъала боз ба ёфтани ҳалли муодилаҳои якченака бо ядроҳои суперсингулярӣ оварда мешаванд, ки онҳо дар асоси натиҷаҳои пештар ҳосил шуда, ҳалли умумии онҳо ёфта мешаванд.

Калимаҳои калиди: системаи барзиёд муайянишудаи муодилаҳои интегралӣ, тасвирҳои интегралӣ, бисёршаклаи ҳалҳо.

N.Rajabov, M.I.Mamadaliyev

**TO THEORY OF ONE CLASS OVER-DETERMINED SYSTEM VOLTERRA TYPE
INTEGRAL EQUATION WITH SUPER-SINGULAR LINES**

Tajik National University

In this work Volterra type overdetermined System Integral Equation with two fixed super-singular lines in depend when integral equation in system is appear fundamental equation, found, solution system integral equation are investigated. In the case, when solution first or second equation in system (1) contain arbitrary function one variables by x or by y , substitute obtained solution to second equation, for determined joint condition, we obtained one dimensional Volterra type integral equation with super-singular point. Investigate property obtained solution. In the case, when, general solution, contain arbitrary constant, stand and investigate Cauchy type problems.

Key words: *overdetermined system integral equation, singular kernels integral representation, manifold solution.*

УДК 517.956

О.И.Меликов

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ МОДЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ, КОГДА КОРНИ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЯВЛЯЮТСЯ КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫМИ

*Таджикский национальный университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Илоловым 16.12.2021 г.)*

В работе исследована линейная система модельных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с левой граничной сингулярной точкой, когда корни соответствующих характеристических уравнений являются комплексно-сопряженными. В рассматриваемом случае находится многообразие решений системы модельных дифференциальных уравнений второго порядка с одной сингулярной точкой через правые части уравнений и четыре произвольных постоянных.

Ключевые слова: *линейные системы дифференциальных уравнений второго порядка, сингулярная точка, интегральные представления решений, модельный случай.*

Исследованию систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с левой граничной сингулярной точкой посвящены работы [1, 2], где изучены системы обыкновенных дифференциальных уравнений, когда корни соответствующих характеристических уравнений являются вещественными и разными, вещественными и равными.

Изучению системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с одной сингулярной точкой, когда корни соответствующего характеристического уравнения являются вещественными и равными посвящена работа [3].

В работах [4,5] исследованы системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с левой граничной сингулярной точкой в случае, когда корни одного характеристического уравнения положительные, а корни другого характеристического уравнения отрицательные, также корни одного характеристического уравнения положительные, а корни другого характеристического уравнения отрицательные.

Работа [6] посвящена нахождению общего решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с граничной слабо-сингулярной точкой.

Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с внутренней сингулярной точкой исследовано в работе [7], где найдено общее решение, зависящее от характеристических уравнений третьего порядка.

Адрес для корреспонденции: Меликов Орифджон Исокович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: orif_melikov@mail.ru

В работах [8,9] исследованы переопределенные системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией, также с одной слабо-сингулярной и двумя сверх-сингулярными линиями.

В данной работе исследована система обыкновенных дифференциальных уравнений, когда корни соответствующих характеристических уравнений являются комплексно-сопряженными.

Пусть $\Gamma = \{x : a < x < b\}$ – множество точек на вещественной оси. На Γ рассмотрим линейную модельную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида:

$$\begin{cases} y_1''(x) + \frac{a_1 y_1'(x) + a_2 y_2'(x)}{x-a} + \frac{a_3 y_1(x) + a_4 y_2(x)}{(x-a)^2} = \frac{f_1(x)}{(x-a)^2}, \\ y_2''(x) + \frac{b_1 y_1'(x) + b_2 y_2'(x)}{x-a} + \frac{b_3 y_1(x) + b_4 y_2(x)}{(x-a)^2} = \frac{f_2(x)}{(x-a)^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где a_i, b_j ($1 \leq i, j \leq 4$) – заданные постоянные, $f_j(x)$ – заданные непрерывные функции, $y_j(x)$ ($j=1,2$) – искомые функции.

Пусть коэффициенты системы уравнений (1) между собой связаны равенствами

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2, a_3 + b_3 = a_4 + b_4.$$

Тогда, сложив первое и второе уравнения, в системе уравнений (1) получим:

$$\begin{aligned} (y_1(x) + y_2(x))'' + \frac{(a_1 + b_1)y_1'(x)}{x-a} + \frac{(a_2 + b_2)y_2'(x)}{x-a} + \frac{(a_3 + b_3)y_1(x)}{(x-a)^2} + \\ + \frac{(a_4 + b_4)y_2(x)}{(x-a)^2} = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{(x-a)^2}. \end{aligned}$$

Введём новую неизвестную функцию

$$z(x) = y_1(x) + y_2(x).$$

Далее, обозначая

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

приходим к решению следующего дифференциального уравнения второго порядка

$$z''(x) + \frac{A}{x-a} z'(x) + \frac{B}{(x-a)^2} z(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^2}, \quad (2)$$

где $A = a_1 + b_1$, $B = a_3 + b_3$.

Однородному дифференциальному уравнению (2) соответствует характеристическое уравнение вида

$$\lambda^2 + (A-1)\lambda + B = 0. \tag{3}$$

Уравнению (3) соответствуют следующие комплексные корни

$$\lambda_1 = \frac{1-A+i\sqrt{\Delta}}{2} = A_1 + iB_1, \quad \lambda_2 = \frac{1-A-i\sqrt{\Delta}}{2} = A_1 - iB_1,$$

где

$$A_1 = \frac{1-A}{2}, \quad B_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2},$$

$$(A-1)^2 < 4B, \quad \Delta = 4B - (A-1)^2.$$

В этом случае функции

$$z_1(x) = (x-a)^{\frac{1-A}{2}} \cos \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \ln(x-a) \right],$$

$$z_2(x) = (x-a)^{\frac{1-A}{2}} \sin \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \ln(x-a) \right],$$

будут частными решениями соответствующего однородного дифференциального уравнения (2). Следовательно, общее решение однородного дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$z(x) = (x-a)^{\frac{1-A}{2}} \left\{ C_1 \cos \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \ln(x-a) \right] + C_2 \sin \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \ln(x-a) \right] \right\}. \tag{4}$$

Используя метод вариации произвольных постоянных, частное решение неоднородного уравнения (2) будем искать в виде

$$z(x) = (x-a)^{A_1} \left\{ \cos [B_1 \ln(x-a)] C_1(x) + \sin [B_1 \ln(x-a)] C_2(x) \right\}. \tag{5}$$

Дифференцируя дважды равенство (5) и подставляя полученные равенства в (3), произвольные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находим в виде:

$$C_1(x) = -\int_a^x \frac{\sin [B_1 \ln(x-a)] f_1(t)}{B_1 (t-a)^{A_2+1}} dt + C_3,$$

$$C_2(x) = \int_a^x \frac{\cos [B_1 \ln(x-a)] f_1(t)}{B_1 (t-a)^{A_2+1}} dt + C_4.$$

Подставляя значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (5), после некоторых упрощений получим

$$z(x) = (x-a)^{A_1} \left\{ \cos [B_1 \ln(x-a)] C_3 + \sin [B_1 \ln(x-a)] C_4 \right\} +$$

$$+ \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{A_1} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{f_1(t) + f_2(t)}{t-a} dt, \quad (6)$$

где $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

Решение вида (6) при $A_1 > 0$ существует, если выполнены условия: $f_j(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f_j(a) = 0$ ($j = 1, 2$) с асимптотическим поведением

$$f_j(x) = o \left[(x-a)^{\delta_1} \right], \quad \delta_1 > A_1 \text{ и при } x \rightarrow a.$$

Далее из равенства $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$ следует

$$y_2(x) = z(x) - y_1(x).$$

Подставляя значение $y_2(x)$ в первое уравнение системы уравнений (1), для определения неизвестной функции $y_1(x)$ получим уравнение вида

$$\begin{aligned} y_1''(x) + \frac{a_1 y_1'(x) - a_2 y_1(x)}{x-a} + \frac{a_3 y_1(x) + a_4 y_1(x)}{(x-a)^2} = \\ = \frac{f_1(x) + f_2(x) - a_4 z(x)}{(x-a)^2} - \frac{a_2 z'(x)}{x-a}. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее обозначим

$$F_1(x) = f(x) - a_4 z(x) - a_2 z'(x)(x-a).$$

Вместо функции $z(x)$, подставляя её значение из равенства (6), после некоторых преобразований приходим к следующему равенству

$$\begin{aligned} F_1(x) = f(x) - \\ - (x-a)^{A_1} \left\{ (a_4 + a_2(A_1 C_3 + B_1 C_4)) \cos [B_1 \ln(x-a)] + \right. \\ \left. + (a_4 + a_2(A_1 C_4 - B_1 C_3)) \sin [B_1 \ln(x-a)] \right\} - \\ - \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{A_1} \left[(a_4 + A_1 a_2) \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \right] + \\ + a_2 B_1 \cos \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{f_1(t) + f_2(t)}{(t-a)} dt. \end{aligned}$$

Введём обозначения:

$$A_2 = a_4 + a_2 (A_1 C_3 + B_1 C_4), \quad B_2 = a_4 + a_2 (A_1 C_4 - B_1 C_3), \quad A_3 = a_4 + A_1 a_2, \quad B_3 = a_2 B_1.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} F_1(x) = & (x-a)^{A_1} \left\{ (a_4 + a_2 (A_1 C_3 + B_1 C_4)) \cos [B_1 \ln(x-a)] - \right. \\ & \left. - (x-a)^{A_1} \left\{ A_2 \cos [B_1 \ln(x-a)] + B_2 \sin [B_1 \ln(x-a)] \right\} - \right. \\ & \left. - \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{A_1} \left[A_3 \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \right] + \right. \\ & \left. + B_3 \cos \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \right\} \frac{f_1(t) + f_2(t)}{(t-a)} dt. \end{aligned}$$

Следовательно, решение системы уравнений (1) сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка вида

$$y_1''(x) + \frac{a_1 - a_2}{x-a} y_1'(x) + \frac{a_3 - a_4}{(x-a)^2} y_1(x) = \frac{F_1(x)}{(x-a)^2}. \tag{8}$$

Однородному дифференциальному уравнению (8) соответствует характеристическое уравнение

$$\mu^2 + (A-1)\mu + B = 0. \tag{9}$$

В случае, когда корни характеристического уравнения (1) являются комплексно-сопряжёнными, функции

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (x-a)^{\frac{1-A}{2}} \cos \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \ln(x-a) \right], \\ y_2(x) &= (x-a)^{\frac{1-A}{2}} \sin \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \ln(x-a) \right] \end{aligned}$$

будут частными решениями однородного дифференциального уравнения (8). Соответственно общее решение однородного уравнения (8) выражается равенством:

$$y_1(x) = (x-a)^{\frac{1-A}{2}} \left\{ C_3 \cos \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \ln(x-a) \right] + C_4 \sin \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \ln(x-a) \right] \right\}.$$

Используя метод вариации произвольных постоянных, решение неоднородного уравнения (8) будем искать в виде:

$$y_1(x) = (x-a)^{A_1} \left\{ \cos[B_1 \ln(x-a)] C_3(x) + \sin[B_1 \ln(x-a)] C_4(x) \right\}. \quad (10)$$

Откуда произвольные функции $C_3(x)$ и $C_4(x)$ определяются из равенств:

$$C_3(x) = -\int_a^x \frac{\sin[B_1 \ln(x-a)] F_1(t)}{B_1(t-a)^{A_2+1}} dt + C_3^0,$$

$$C_4(x) = \int_a^x \frac{\cos[B_1 \ln(x-a)] F_1(t)}{B_1(t-a)^{A_2+1}} dt + C_4^0.$$

Подставляя значения $C_3(x)$ и $C_4(x)$ в решение вида (10), находим общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений в явном виде:

$$y_1(x) = (x-a)^{A_1} \left\{ C_3 \cos[B_1 \ln(x-a)] + C_4 \sin[B_1 \ln(x-a)] + \right.$$

$$\left. + \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{A_1} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{f_1(t) + f_2(t)}{t-a} dt - \right.$$

$$\left. - \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{A_1} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] (t-a)^{A_1-1} \left[A_2 \cos[B_1 \ln(x-a)] + \right. \right.$$

$$\left. \left. + B_2 \sin[B_1 \ln(x-a)] \right] dt - \right.$$

$$\left. - \int_a^x \frac{f(\tau) d\tau}{\tau-a} \int_a^x \left(\frac{x-a}{\tau-a} \right)^{A_1} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{\tau-a} \right) \right] \left[A_3 \sin \left[B_2 \ln \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right) \right] \right] + \right.$$

$$\left. + B_3 \cos \left[B_1 \ln \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right) \right] \frac{dt}{t-a}, \right. \quad (11)$$

$$y_2(x) = (x-a)^{A_1} \left\{ \cos[B_1 \ln(x-a)] C_1 + \sin[B_1 \ln(x-a)] C_2 \right\} +$$

$$+ \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{A_1} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{f_1(t) + f_2(t)}{t-a} dt -$$

$$- (x-a)^{A_1} \left\{ C_3 \cos[B_1 \ln(x-a)] - C_4 \sin[B_1 \ln(x-a)] \right\} -$$

$$- \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{A_1} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{f_1(t) + f_2(t)}{t-a} dt +$$

$$+ \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{A_1} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] (t-a)^{A_1-1} \left[A_2 \cos[B_1 \ln(x-a)] \right] -$$

$$\begin{aligned}
 & -B_2 \sin [B_1 \ln (x-a)] dt + \\
 & + \int_a^x \frac{f(\tau) d\tau}{\tau-a} \int_a^x \left(\frac{x-a}{\tau-a}\right)^{A_1} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right] \left[A_3 \sin \left[B_2 \ln \left(\frac{t-a}{\tau-a}\right)\right] \right] - \\
 & - B_3 \cos \left[B_1 \ln \left(\frac{t-a}{\tau-a}\right)\right] \frac{dt}{t-a}, \tag{12}
 \end{aligned}$$

где C_3, C_4 – произвольные постоянные, $f_1(t), f_2(t)$ – заданные непрерывные функции.

Теорема 1. Пусть в системе уравнений (1) постоянные a_i, b_j ($1 \leq i, j \leq 4$) между собой связанными равенствами $a_1 + b_1 = a_2 + b_2, a_3 + b_3 = a_4 + b_4$, в характеристических уравнениях (3) и (10) постоянные $A = a_1 + b_1, B = a_3 + b_3$ такие, что $A_1 = \frac{1-A}{2} > 0, \Delta_1 = 4B - (A-1)^2$. Кроме того, постоянные A, B такие, что корни характеристических уравнений (3) и (9) комплексно-сопряженные, функции $f_j(x) \in C(\bar{\Gamma}), f_j(a) = 0$ ($j = 1, 2$) с асимптотическими поведением

$$f_j(x) = o[(x-a)^{\delta_1}], \delta_1 > A_1, \text{ при } x \rightarrow a.$$

Тогда решение системы уравнений (1) из класса $C(\bar{\Gamma}) \cap C^2(\Gamma)$ выражается равенствами (11) и (12), где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Теорема 2. Пусть в системе уравнений (1) постоянные a_i, b_j ($1 \leq i, j \leq 4$) связаны между собой связанными равенствами $a_1 + b_1 = a_2 + b_2, a_3 + b_3 = a_4 + b_4$ в характеристических уравнениях (3) и (11) постоянные $A = a_1 + b_1, B = a_3 + b_3$ такие, что $A_1 = \frac{1-A}{2} < 0, \Delta_1 = 4B - (A-1)^2$. Кроме того, постоянные A и B такие, что корни характеристических уравнений (3) и (9) комплексно-сопряженные, функции $f_j(x) \in C(\bar{\Gamma}), f_j(a) = 0$ ($j = 1, 2$) с асимптотическими поведением

$$f_j(x) = o[(x-a)^\varepsilon], \varepsilon > 0, \text{ при } x \rightarrow a.$$

Тогда решение системы уравнений (1) из класса $C^2(\Gamma)$ выражается равенствами:

$$\begin{aligned}
 y_1(x) &= (x-a)^{-|A_1|} \{ C_3 \cos [B_1 \ln(x-a)] + C_4 \sin [B_1 \ln(x-a)] + \\
 & + \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{|A_1|} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right] \frac{f_1(t) + f_2(t)}{t-a} dt -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{|A_1|} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] (t-a)^{A_1-1} \left[A_2 \cos [B_1 \ln (x-a)] + \right. \\
& \quad \left. + B_2 \sin [B_1 \ln (x-a)] \right] dt - \\
& -\int_a^x \frac{f(\tau) d\tau}{\tau-a} \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{|A_1|} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \left[A_3 \sin \left[B_2 \ln \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + B_3 \cos \left[B_1 \ln \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right) \right] \right] \frac{dt}{t-a}, \\
y_2(x) &= (x-a)^{-|A_1|} \left\{ \cos [B_1 \ln (x-a)] C_1 + \sin [B_1 \ln (x-a)] C_2 \right\} + \\
& + \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{|A_1|} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{f_1(t) + f_2(t)}{t-a} dt - \\
& - (x-a)^{-|A_1|} \left\{ C_3 \cos [B_1 \ln (x-a)] - C_4 \sin [B_1 \ln (x-a)] \right\} - \\
& - \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{|A_1|} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{f_1(t) + f_2(t)}{t-a} dt + \\
& + \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{|A_1|} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] (t-a)^{A_1-1} \left[A_2 \cos [B_1 \ln (x-a)] - \right. \\
& \quad \left. - B_2 \sin [B_1 \ln (x-a)] \right] dt + \\
& + \int_a^x \frac{f(\tau) d\tau}{\tau-a} \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{|A_1|} \sin \left[B_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \left[A_3 \sin \left[B_2 \ln \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right) \right] - \right. \\
& \quad \left. - B_3 \cos \left[B_1 \ln \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right) \right] \right] \frac{dt}{t-a},
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Поступило 29.12.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджабов, Н., Меликов О.И. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с левой граничной сингулярной точкой. – Мат-лы междунар. научной конф., посвящ.

- 70-летию образования ТНУ и 80-летию академика АН Республики Таджикистан, д.ф.-м.н., проф. Раджабова Н. (Душанбе, 25-26 сентября 2018 г.), с. 195-200.
2. Меликов О.И. Исследование общей системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с левой граничной сингулярной точкой. – Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2017, № 1-1, с. 19-25.
 3. Раджабов Н., Меликов О.И. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с одной сингулярной точкой, когда корни соответствующего характеристического уравнения являются вещественными и равными. – Вестник Таджикского национального университета (Серия естественных наук), 2021, № 3, с.77-92.
 4. Раджабов Н., Меликов О.И. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с левой граничной сингулярной точкой в случае, когда корни одного характеристического уравнения положительные, а корни другого характеристического уравнения отрицательные. – Мат-лы республ. науч.-практ. конф. «Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества», Худжанд, 2021, с.143-145.
 5. Раджабов Н., Меликов О.И. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с одной сингулярной точкой, когда корни соответствующего характеристического уравнения являются вещественными и равными. – Душанбе, 2021, с.77-91.
 6. Олимов А.Г., Дадоджанова М.Я. Интегральное представление и задача типа Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с граничной слабо-сингулярной точкой. – Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2018, № 1, с. 11-16.
 7. Олимов А.Г. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с внутренней сингулярной точкой. – Ученые записки Худжанского государственного университета им. академика Б.Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки, 2019, т.50, № 3, с.20-25.
 8. Шоймкулов Б.М. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной слабой сингулярной и двумя сверх сингулярных линий. – Вестник Пермского университета (Математика. Механика. Информатика), 2020, № 4(51), с. 24-28.
 9. Шоймкулов Б.М. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией. – Вестник Пермского университета (Математика. Механика. Информатика), 2021, № 2(53), с. 5-9.
 10. Раджабов Н., Кодиров Д.А. К теории одного класса вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Серия естественных наук, 2019, № 2, с. 5-9.

О.И.Меликов

**ДАР БОРАИ ЯК СИСТЕМАИ МОДЕЛИИ МУОДИЛАҲОИ
ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ТАРТИБИ ДУЮМ БО ЯК НУҚТАИ СИНГУЛЯРӢ, ДАР
ҲОЛАТЕ, КИ РЕШАҲОИ МУОДИЛАҲОИ ХАРАКТЕРИСТИКӢ КОМПЛЕКСӢ-
ҲАМРОҲ ШУДААНД**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола системаи хатии муодилаҳои дифференсиалии одии моделии тартиби дуюм бо нуқтаи сингулярии сарҳадии чап, дар ҳолате, ки решаҳои муодилаи характеристикӣ комплексӣ-ҳамроҳшуда мебошанд, омӯхта шудааст.

Дар ҳолати мазкур бисёршаклии ҳалҳои системаи муодилаҳои моделии муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюм бо як нуқтаи сингулярӣ дар ҳолати решаҳои муодилаҳои мувофиқи характеристикӣ ҳамроҳшудаи комплексӣ будан ба воситаи тарафи рости муодилаҳо ва чор доимии ихтиёрӣ ёфта мешавад.

Калимаҳои калидӣ: системаи муодилаҳои хатии дифференсиалии тартиби дуюм, нуқтаи сингулярӣ, тасвирҳои интегралӣ ҳалҳо, ҳолатимодели.

O.I.Melikov

**ABOUT ON SYSTEM OF SECOND-ORDER MODEL DIFFERENTIAL
EQUATIONS WITH ONE SINGULAR POINT, WHEN THE ROOTS OF THE
CORRESPONDING CHARACTERISTIC EQUATION
ARE COMPLEX-CONJUGATIVE**

Tajik National University

In this paper, a linear system of second-order model ordinary differential equations with a left boundary singular point, when the roots of the corresponding characteristic equations are complex conjugate is study. In the case under consideration, the manifold of solutions of a system of second-order model differential equations with one singular point is found through the right-hand sides of the equations and four arbitrary constants.

Key words: linear systems of second-order differential equations, singular point, integral representations of solutions, model case.

УДК 81'322::519.25

Н.О.Косимова

О СРАВНЕНИИ ДВУХ ЦИФРОВЫХ ПОРТРЕТОВ ТЕКСТА

*Технологический университет Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 18.05.2022 г.)*

Для 10 случайным образом выбранных текстов (5 авторов по двум произведениям от каждого) формируются по два цифровых портрета, основанных на распределении частотности буквенных униграмм и биграмм. С помощью специфической формулы вычисляются две таблицы 45 парных расстояний между текстами отдельно для униграмм и биграмм. На данных этих двух таблиц составляется новая, по которой можно сравнивать перспективность их применения для целей распознавания однородных текстов

Ключевые слова: текст, цифровой портрет, расстояния, сравнения, перспективность применения.

1. Введение. Согласно Рудману¹, современный исследователь может использовать около тысячи разнообразных признаков текста, и каждому из них будут соответствовать те или иные особенности авторского стиля. В этой связи представляет интерес без привлечения каких-либо сложных процедур заранее выявлять предварительные статистические закономерности, позволяющие отдавать определенные предпочтения более эффективным признакам текста в сравнении с другими.

Коллекция текстов. Наше предварительное исследование осуществлялось на примере модельной коллекции текстов, в состав которой включены десять произведений художественной литературы на русском языке пяти авторов, творивших в XIX и XX вв. Соответствующие данные (с заключёнными в скобках принятой нами аббревиатурой и сведениями о размерах произведений в словоупотреблениях) приводятся далее:

- М.Булгаков «Белая гвардия» (Б1, 67959) и «Жизнь господина де Мольера» (Б2: 49431);
- Ф.Достоевский «Бедные люди» (Д1, 41137) и «Село Степанчиково и его обитатели» (Д2, 63744);
- Н.Гоголь «Петербургские повести» (Г1, 67121) и «Мертвые души» (Г2, 75025);
- Л.Толстой «Казачьи» (ЛТ1, 42571) и «Хаджи-Мурат» (ЛТ2, 34180);
- И.Тургенев «Отцы и дети» (Т1, 51988) и «Дым» (Т2, 48422).

Цифровой портрет текстов. Каждое произведение модельной коллекции было охарактеризовано по отдельности двумя (одними и теми же) совокупностями E_1 и E_2 текстовых элементов – распределениями частотностей буквенных униграмм и биграмм. В русском языке число униграмм равно $m_1 = 33$, а биграмм – $m_2 \leq 33^2 = 1089$. Располагая эти элементы в алфавитном (лексикографическом)

Адрес для корреспонденции: Косимова Нулуфар Олимджоновна, 734061, Республика Таджикистан, г. Душанбе, Технологический университет Таджикистана, ул. Н.Карабаева, 63/3, E-mail: nilufar_k@inbox.ru

¹ Rudman J. The state of authorship attribution studies: Some problems and solutions. – Computers and Humanities, 1998, v. 31, p. 351-365.

ческом) порядке и замещая их порядковыми номерами, получим в табличном виде специфическое распределение частот встречаемости униграмм (при $m = m_1$) и биграмм (при $m = m_2$):

$$\begin{array}{l} \bar{N}: 1 \quad 2 \dots m, \\ P: \lambda_1 \quad \lambda_2 \dots \lambda_m. \end{array} \quad (1)$$

По виду обе таблицы в форме (1) совпадают, однако при $m = m_1$ её следует применять к описаниям текстов на основе униграмм, а при $m = m_2$ на основе биграмм. Соответственно этому вторую строку таблицы следует воспринимать как относительные частотности униграмм и биграмм в пределах конкретного произведения, причём

$$\lambda_k \geq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1.$$

Таблицу (1) с двумя дополнительными условиями на λ_k , как и в [1], будем называть **цифровым портретом текста** на основе λ_k . В равной мере мы будем использовать и другую (эквивалентную) формулировку, представляя цифровой портрет также в виде дискретной функции [2]

$$F(s) = \sum_{k=1}^s \lambda_k \quad (s = 1, \dots, m). \quad (2)$$

Расстояние между цифровыми портретами текстов. Пусть T_1, T_2 – произвольная пара текстов, характеризуемых на основе единого алфавита, и пусть

$$F^{(\alpha)}(s) = \sum_{k=1}^s \lambda_s^{(\alpha)} - \quad (3)$$

соответствующие им дискретные функции, $\alpha = 1, 2$ и $s = 1, \dots, m$.

Определение 1. Расстоянием между текстами T_1 и T_2 называется положительное число $\rho(T_1, T_2)$, определяемое по формуле

$$\rho(T_1, T_2) = \sqrt{m/2} \max_s |F^{(1)}(s) - F^{(2)}(s)|, \quad (4)$$

то есть расстояние между двумя текстами вычисляется как максимальное расстояние по оси ординат между их дискретными функциями $F^{(1)}(s)$ и $F^{(2)}(s)$, помноженное на весовой коэффициент $\sqrt{m/2}$, см.[2, 3].

2. Расстояния между текстами на основе униграмм, обозначаемые через $\rho^*(T_1, T_2)$, вычисляются по формуле (4).

Таблица 1

Таблица расстояний $\rho^{**}(T_1, T_2)$ (на основе униграмм)

	Б1	Б2	Д1	Д2	Г1	Г2	ЛТ1	ЛТ2	Т1	Т2
Б1										
Б2	0.0305									
Д1	0.0832	0.1027								
Д2	0.0655	0.0856	0.0274							
Г1	0.0375	0.0502	0.0672	0.0437						
Г2	0.0394	0.0521	0.0621	0.0443	0.0204					
ЛТ1	0.0417	0.0642	0.0797	0.0761	0.0652	0.0556				
ЛТ2	0.0393	0.0431	0.0790	0.0651	0.0627	0.0532	0.0349			
Т1	0.0645	0.0486	0.1040	0.0862	0.0561	0.0534	0.0618	0.0382		
Т2	0.0344	0.0363	0.0903	0.0679	0.0374	0.0397	0.0594	0.0529	0.0353	

В табл. 1 (в соответствии с примененной ранее аббревиатурой) по столбцам и строкам указаны названия произведений коллекции. В 45-и ячейках таблицы, на пересечении строк и столбцов, выписаны значения расстояний между соответствующими текстами. Серым цветом отмечены расстояния между двумя произведениями одного автора, бесцветными – ячейки между текстами различных авторов.

Нашему интуитивному представлению о том, что тексты одного автора “однородны” между собой, а тексты разных авторов – “неоднородны” (см.[3]), можно было бы сопоставить математическую модель, в которой “однородные” тексты располагались на близких расстояниях в специально подобранных пространствах, а “неоднородные” – на большем удалении друг от друга. Если такая ситуация имела бы место, то можно было бы заключить об особо удачном подгоне математической модели к решению задачи распознавания авторов и их сочинений. Однако на практике подобные случаи являются исключениями.

Для изучения табл. 1 перенесем в порядке возрастания все её расстояния на вещественную ось OR , которая предстанет в виде 3-х частей:

- 1-я, расположенная в интервале $[0.0204, 0.0353]$, будет содержать 5 однородных ячеек серого цвета;
- 2-я, расположенная в интервале $(0.0344, 0.1040]$, будет содержать 40 не однородных ячеек белого цвета;
- 3-я часть будет содержать всего лишь одно расстояние – 0.0344. Вообще говоря, это - однородное расстояние серого цвета. К неоднородным оно не относится.

Полученные данные позволяют сделать следующие выводы. Поскольку интервалы однородных и неоднородных ячеек, по существу, пересекаются только в одной точке **0.0344**, то именно в ней обнаруживается единственное нарушение совпадения интуиции с нашей гипотезой “однородности”. В коллекции это проявляется в том, что расстояние между ЦП произведений М.Булгакова (Б1) и И.Тургенева (Т2) меньше, чем между собственными произведениями (Т1) и (Т2) И.Тургенева.

Вывод 1. Обозначая через \aleph^1 и \aleph^2 числа точного совпадения нашей интуиции и высказанных соображений об одном авторе и “неоднородности” текстов разных авторов, причём $\aleph \leq \aleph^1 + \aleph^2$ и \aleph – число всевозможных пар произведений (в нашем случае их 45), мы можем оценивать факт

использования формулы расстояний (4) на основе униграмм вполне приемлемым для последующих исследовательских целей величиной

$$c_1 = (\aleph^1 + \aleph^2) / \aleph. \quad (5)$$

В нашем случае $\aleph^1 = 4$ и $\aleph^2 = 40$ и $c_1 = 44/45 = 0.98$ – уровень совпадения интуиции и гипотезы однородности.

3. Расстояния между текстами на основе биграмм, обозначаемые через $\rho^{**}(T_1, T_2)$, также вычисляются по формуле (4).

Таблица 2

Таблица расстояний $\rho^{**}(T_1, T_2)$ на основе биграмм

	Б1	Б2	Д1	Д2	Г1	Г2	ЛТ1	ЛТ2	Т1	Т2
Б1										
Б2	0.2971									
Д1	0.4857	0.6040								
Д2	0.3897	0.5084	0.2244							
Г1	0.2478	0.3006	0.3925	0.2558						
Г2	0.2275	0.3252	0.3644	0.2566	0.1173					
ЛТ1	0.2723	0.4013	0.4579	0.4589	0.3992	0.3364				
ЛТ2	0.2798	0.3415	0.4818	0.3991	0.3600	0.3169	0.2256			
Т1	0.3991	0.3242	0.5974	0.5086	0.3545	0.3228	0.3756	0.2278		
Т2	0.2282	0.2263	0.5188	0.4152	0.2452	0.2825	0.3509	0.3080	0.2451	

И для табл. 2 отметим, что значения расстояний в серых ячейках заключены в пределах [0.1173, 0.2971], а в бесцветных – в пределах [0.2263, 0.6040], причём общими для них (их пересечениями) оказываются расстояния 0.2478 (Б1-Г1), 0.2275 (Б1-Г2), 0.2723 (Б1-ЛТ1), 0.2798 (Б1-ЛТ2), 0.2282 (Б1-Т2), 0.2263 (Б2-Т2), 0.2558 (Д1-Г1), 0.2566 (Д2-Г2), 0.2452 (Г1-Т2), 0.2825 (Г2-Т2), 0.2278 (ЛТ2-Т1).

Исходя из этого, можно сделать следующие выводы:

- расстояние между ЦП произведений М.Булгакова (Б1) и Н.Гоголя (Г1) меньше, чем между собственными произведениями (Б1) и (Б2) М.Булгакова ($0.2478 < 0.2971$), то есть произведения (Б1) и (Г1) оказались более однородными, нежели собственные;
- расстояние между ЦП произведений М.Булгакова (Б1) и Н.Гоголя (Г2) меньше, чем между собственными произведениями (Б1) и (Б2) М.Булгакова ($0.2275 < 0.2971$) и здесь та же картина, что и в предыдущем пункте;
- расстояние между ЦП произведений М.Булгакова (Б1) и Л.Толстого (ЛТ1) меньше, чем между собственными произведениями (Б1) и (Б2) М.Булгакова ($0.2723 < 0.2971$);
- расстояние между ЦП произведений М.Булгакова (Б1) и Л.Толстого (ЛТ2) меньше, чем между собственными произведениями (Б1) и (Б2) М.Булгакова ($0.2798 < 0.2971$);
- расстояние между ЦП произведений М.Булгакова (Б1) и И.Тургенева (Т2) меньше, чем между собственными произведениями (Б1) и (Б2) М.Булгакова ($0.2282 < 0.2971$);

- расстояние между ЦП произведений М.Булгакова (Б2) и И.Тургенева (Т2) меньше, чем между собственными произведениями (Б1) и (Б2) М.Булгакова ($0.2263 < 0.2971$) и меньше, чем расстояние между собственными произведениями (Т1) и (Т2) И.Тургенева ($0.2263 < 0.2451$);
- расстояние между ЦП произведений Л.Толстого (ЛТ2) и И.Тургенева (Т1) меньше, чем между собственными произведениями (Т1) и (Т2) И.Тургенева ($0.2278 < 0.2451$).

Относительно общих расстояний 0.2558 (Д1-Г1), 0.2566 (Д2-Г2), 0.2452 (Г1-Т2), 0.2825 (Г2-Т2) можно сделать следующие выводы:

- расстояние между ЦП произведений Ф.Достоевского (Д2) и Н.Гоголя (Г1) больше, чем расстояния между собственными произведениями (Д1) и (Д2) Ф.Достоевского ($0.2558 > 0.2244$) и собственными произведениями (Г1) и (Г2) Н.Гоголя ($0.2558 > 0.1173$);
- расстояние между ЦП произведений Ф.Достоевского (Д2) и Н.Гоголя (Г2) больше, чем расстояния между собственными произведениями (Д1) и (Д2) Ф.Достоевского ($0.2566 > 0.2244$) и собственными произведениями (Г1) и (Г2) Н.Гоголя ($0.2566 > 0.1173$);
- расстояние между ЦП произведений Н.Гоголя (Г1) и И.Тургенева (Т2) больше, чем расстояния между собственными произведениями (Г1) и (Г2) Н.Гоголя ($0.2452 > 0.1173$) и собственными произведениями (Т1) и (Т2) И.Тургенева ($0.2452 > 0.2451$);
- расстояние между ЦП произведений Н.Гоголя (Г2) и И.Тургенева (Т2) больше, чем расстояния между собственными произведениями (Г1) и (Г2) Н.Гоголя ($0.2825 > 0.1173$) и собственными произведениями (Т1) и (Т2) И.Тургенева ($0.2825 > 0.2451$).

Обработывая табл. 2 по той же схеме, что и табл. 1, получим, что все 45 расстояний на вещественной оси OR разделятся на 3 части:

- 1-я, расположенная в интервале $[0.1173, 0.2971]$ будет содержать 5 однородных ячеек серого цвета;
- 2-я, расположенная в интервале $[0.2263, 0.6040]$, будет содержать 40 не однородных ячеек белого цвета;
- 3-я часть будет содержать пересечение $[0.2263, 0.2971]$ двух первых интервалов и, по существу, содержать ячейки с нарушениями совпадений между интуицией и нашей гипотезой однородности.

Полученные данные позволяют сделать следующий

Вывод 2. В случае распознавания на основе биграмм полученные данные показывают, что, в сравнении с таблицей расстояний для униграмм, таблица для биграмм *отвечает нашей интуиции в меньшей мере относительно нарушений однородностей и неоднородностей произведений.*

В обозначениях, принятых в выводе 1, устанавливается $\aleph^1 = 4$, $\aleph^2 = 30$ и, согласно формулы (5), получаем количественную оценку

$$c_2 = (\aleph^1 + \aleph^2) / 45 = \frac{(4 + 29)}{45} = 0.73.$$

З а к л ю ч е н и е

Таким образом, предложенная методика полезна для выявления и сравнения похожих текстов. Данная методика также может быть эффективно использована для изучения текстов других авторов.

В дальнейшем планируется продолжить изучение комплекса вопросов формирования и исследования пригодности цифровых портретов (ЦП) на основе распределения частотности различных алфавитных элементов текста для распознавания однородности текстов одного языка, однородности оригинала текста и его перевода, однородности текстов одного автора и т.д. Цифровые портреты будут сформированы на основе распределения частотности буквенных униграмм, буквенных биграмм, буквенных триграмм, частотности длин слов в предложениях, частотности длин предложений в абзаце, частотности длин абзацев в тексте.

Актуальность подобных работ связана с определением особых характеристик текста, которые, не будучи подконтрольны своим создателям, содержат в себе косвенную информацию об авторском стиле и даже индивидуальных качествах автора. Многочисленные научные публикации во всех высокоразвитых странах показывают особую роль данной проблематики, её непосредственное влияние на развитие науки и техники, на прогресс в сфере искусственного интеллекта, на широкомасштабные приложения в мировой экономике.

Данная работа велась под руководством академика НАН Таджикистана – Усманова Зафара Джураевича.

Поступило 25.05.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Усманов З.Д. Классификатор дискретных случайных величин. – ДАН РТ, 2017, т.60, № 7-8, с. 291-300.
2. Усманов З.Д. Алгоритм настройки кластеризатора дискретных случайных величин. – ДАН РТ, 2017, т.60, № 9, с. 392-397.
3. Усманов З.Д. Оценка эффективности применения -классификатора для атрибуции печатного текста. – ДАН РТ, 2020, т.63, № 3-4, с.172-179.

Н.О.Косимова

ОИД БА МУҚОИСАИ ДУ ПОРТРЕТИ РАҚАМИИ МАТН

Донишгоҳи технологии Тоҷикистон

Барои 10 матни тасодуфан интихобшуда (5 муаллиф, ду асар аз ҳар як муаллиф), ду портрети рақамӣ дар асоси тақсимои басомади униграммаҳои алифбо ва биграммҳо ташкил карда шуданд. Бо истифода аз формулаи мушаххас, ду ҷадвали масофаи 45 ҷуфт байни матнҳо барои униграммҳо ва биграммҳо алоҳида ҳисоб карда мешаванд. Дар асоси маълумоти ин ду ҷадвал, ҷадвали нав тартиб дода мешавад, ки мувофиқи он дурнамои истифодаи онҳоро бо мақсади шинохтани матнҳои яхела муқоиса кардан мумкин аст.

Калимаҳои калидӣ: *матн, портрети рақамӣ, масофа, муқоиса, дурнамои татбиқ.*

N.O.Kosimova

ABOUT COMPARING TWO DIGITAL PORTRAITS OF TEXT

Technological University of Tajikistan

For 10 randomly selected texts (5 authors, two works from each), two digital portraits are formed, based on the distribution of the frequency of alphabetic unigrams and bigrams. Using a specific formula, two tables of 45 pairwise distances between texts are calculated separately for unigrams and bigrams. Based on the data of these two tables, a new one is compiled, according to which it is possible to compare the prospects of their use for the purpose of recognizing homogeneous texts.

Key words: *text, digital portrait, distances, comparisons, application prospects.*

УДК 536.46

Б.Дж.Гулбоев, З.Б.Шерматова*

ПРЕДЕЛЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ ВОДОРОДО-ВОЗДУШНОЙ СМЕСИ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОПТЕРЬ И ДИФФУЗИИ КОМПОНЕНТОВ

*Российско-Таджикский (Славянский) университет,***Таджикский национальный университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.И.Илоловым 25.02.2022 г.)*

В работе исследовано влияние явлений теплопотерь и диффузии компонентов смеси на пределы распространения волны фильтрационного горения водородо-воздушной смеси. Получены кривые зависимости скорости вдува от радиуса трубки при различных концентрациях водорода в смеси, ниже которых распространение волны невозможно. Результаты, в частности, находятся в удовлетворительном согласии с ранее проведёнными исследованиями.

Ключевые слова: *предел распространения волны, скорость вдува, скорость волны, равновесная температура, водородо-воздушная смесь, коэффициенты диффузии и теплопотерь, радиус трубки.*

Теоретические и экспериментальные исследования пределов распространения волны фильтрационного горения газов (ФГГ) впервые были проведены в работе [1]. В этой работе было установлено, что одним из определяющих параметров системы (пористая среда и смеси газов), влияющих на пределы горения, является скорость вдува свежей смеси. Были найдены критические значения скорости вдува, при которых невозможно распространение волны ФГГ. Изучению вопросов о пределе распространения волны ФГГ были посвящены также работы [2-5], где в [2] в рамках тепловой однотемпературной модели ФГГ исследовалась неустойчивость стационарного фронта горения газа в инертной пористой среде в неадиабатическом режиме.

Отметим, что рассмотренная в [1] математическая модель не содержит коэффициентов диффузии компонентов смеси и поэтому не позволяет выяснить влияние эффектов диффузии компонентов на пределы распространения волны фильтрационного горения водородо-воздушной смеси. Для учёта этих эффектов в [4] разработана математическая модель, состоящая из уравнений распространения тепла в инертной пористой среде и газе, переноса массы компонентов смеси, сохранения полного количества вещества в потоке и уравнение состояния идеального газа. Рассматриваемая математическая модель отличается от предыдущих моделей описания фильтрационного горения газов в инертной пористой среде тем, что вместо уравнения неразрывности недостающего компонента и смеси газов в целом используются уравнения неразрывности для каждого компонента газовой смеси.

Адрес для корреспонденции: Гулбоев Бахтиёр Джуракулович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М.Турсунзода, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: bakhtiyor-2012@mail.ru

В настоящей работе предпринято теоретическое исследование пределов распространения волны фильтрационного горения водородо-воздушной смеси в режиме низких скоростей на основе разработанной математической модели ФГГ [4]

$$\begin{aligned}
 (\rho_{10}c_p(u_{10} - U) - \rho_2c_2U) \frac{d(T - T_0)}{dx} &= (\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2) \frac{d^2(T - T_0)}{dx^2} + \rho_1QJ + \alpha_0(T_0 - T), \\
 \rho_{10}(u_{10} - U) \frac{d\eta_{1(i)}}{dx} &= \rho_1D_{1(i)} \frac{d^2\eta_{1(i)}}{dx^2} + \rho_1J\zeta_{1(i)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k, \\
 J &= \eta_{1(k_*)} k_0 \exp(-E / RT), \quad \rho_1T = \rho_{10}T_0, \quad \zeta_{1(i)} = \frac{g_{1(i)}(v''_{1(i)} - v'_{1(i)})}{g_{1(k_*)}(v''_{1(k_*)} - v'_{1(k_*)})}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь T – температура среды; $\eta_{1(i)}$ – массовая концентрация i -го компонента газовой смеси; $\eta_{1(k_*)}$ – массовая концентрация недостающего компонента; u_{10} – скорость потока газа в порах; ρ_1, c_p – приведенная плотность и теплоёмкость смеси газов соответственно; ρ_2, c_2 – те же величины для пористой среды; λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности газа и пористой среды; α_1, α_2 – объёмные содержания газа и пористой среды; Q – тепловой эффект реакции; J – скорость химической реакции; E – энергия активации; R – универсальная газовая постоянная; k_0 – предэкспонент; $v'_{1(i)}, v''_{1(i)}$ – стехиометрические коэффициенты исходных и конечных веществ соответственно; $g_{1(i)}$ – молекулярные веса компонентов газовой смеси; T_0 – температура внешней среды; ρ_{10} – приведённая плотность исходной смеси газов; $D_{1(i)}$ – коэффициент диффузии i -го компонента газовой смеси, α_0 – коэффициент теплопотерь в окружающее пространство.

В работе [4] в результате интегрирования уравнение энергии системы (первое уравнение системы (1)) от $-\infty$ до $+\infty$ получено соотношение для стационарной скорости волны

$$\begin{aligned}
 (u_{10} - U)^2 &= k_0 \exp\left(-\frac{1}{\beta}\right) \frac{\gamma\lambda_1\Delta H}{\rho_{10}^0 c_p u_\phi a_4} \cdot \frac{T_0}{T_e} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{Le_{eff(2)} u_\phi a_4}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\eta_{1(2)0}}{1 + \frac{\gamma}{Le_{eff(1)} u_\phi a_4}} - \right. \\
 &\quad - \frac{\eta_{1(2)0}}{1 + \frac{\gamma}{Le_{eff(2)} u_\phi a_4}} + \frac{9}{8} \cdot \frac{\eta_{1(2)0}}{1 + \frac{\gamma}{Le_{eff(3)} u_\phi a_4}} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\eta_{1(2)0}}{1 + \frac{\gamma}{Le_{eff(2)} u_\phi a_4} + \frac{\gamma}{Le_{eff(1)} u_\phi a_4}} + \\
 &\quad \left. + \frac{\eta_{1(2)0}}{1 + \frac{2\gamma}{Le_{eff(2)} u_\phi a_4}} - \frac{9}{8} \cdot \frac{\eta_{1(2)0}}{1 + \frac{\gamma}{Le_{eff(2)} u_\phi a_4} + \frac{\gamma}{Le_{eff(3)} u_\phi a_4}} \right] \frac{(u_{10} - U)\alpha_0(T_e - T_0)(k_1 - k_2)H}{Q\eta_{1(2)0}\rho_{10}k_1k_2},
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где $Le_{eff(i)} = \frac{Le_i}{\Lambda}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), $\Lambda = 1 + \frac{\alpha_2 \lambda_2}{\alpha_1 \lambda_1}$, $Le_i = \frac{D_{1(i)} \rho_{10} c_p}{\alpha_1 \lambda_1}$, $u_\varphi = 1 - \frac{\varphi}{u_0 - 1}$, $\varphi = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_{10} c_p}$,

$$u_0 = \frac{v_{10}}{U}, \quad \beta = \frac{RT_e}{E}, \quad \gamma = \frac{RT_e^2}{E(T_e - T_0)}, \quad H = \sqrt{1 + \frac{4\Delta}{\left(1 - \frac{u_0}{1 + \varphi}\right)^2}}, \quad k_1 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_3}}{2},$$

$$k_2 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_3}}{2}, \quad a_1 = \frac{\rho_{10} c_p (v_{10} - U) - \rho_2 c_2 U}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2}, \quad a_3 = \frac{\alpha_0}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2},$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha_0 (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2)}{\rho_{10} c_p (v_{10} - U) - \rho_2 c_2 U}} \right], \quad \Delta = \frac{\alpha_0 (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2)}{U^2 (\rho_{10} c_p + \rho_2 c_2)^2}, \quad T_e = T_0 + \frac{Q \eta_{1(2)0}}{c_p u_\varphi H}, \quad \alpha_0 = \frac{2\alpha_w}{R_w}, \text{ где}$$

α_w – коэффициент теплоотдачи стенки, R_w – радиус трубки.

Отметим, что в [4] было проведено теоретическое исследование влияния тепловых потерь на основные характеристики волны фильтрационного горения газов в случае, когда коэффициенты диффузии компонентов считаются равными коэффициенту температуропроводности. При этом все коэффициенты диффузии предполагались равными между собой, и в расчётах скорости волны использовалось значение коэффициента диффузии недостающего компонента газовой смеси. Заметим, что при горении водородо-воздушной смеси недостающим компонентом считается концентрация кислорода. В отличие от [4] в данной работе, во-первых, исследуются пределы распространения волны горения, во-вторых, коэффициенты диффузии компонентов смеси различные, причём рассматривается два случая: зависимость коэффициентов диффузии компонентов от начальной и равновесной температуры пористой среды и смеси газов

$$D = D_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\alpha-1}, \tag{3}$$

где D_0 – коэффициент диффузии газа при нормальных условиях, α – индивидуальный показатель для каждого газа (см. табл.).

Таблица

Значение коэффициентов диффузии компонентов газовой смеси и показателя α

№	Компонент смеси	Коэффициент диффузии, м ² /с (D_0)	Значение показателя α
1.	Водород	6.5·10 ⁻⁵	1.7
2.	Кислород	1.81·10 ⁻⁵	1.92
3.	Пар воды	2.77·10 ⁻⁵	1.8

Для выяснения степени влияния диффузии компонентов на пределы распространения волны горения проведено сравнение расчётов скорости волны в случае пренебрежения коэффициентами диффузии компонентов ($D_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)), при которых соотношение (2) получит более простой вид

$$(v_{10} - U)^2 = k_0 \exp\left(-\frac{1}{\beta}\right) \frac{\gamma \lambda_1 \Lambda H}{\rho_{10}^0 c_p u_\phi a_4} \cdot \frac{T_0}{T_e} - \frac{(v_{10} - U) \alpha_0 (T_e - T_0) (k_1 - k_2) H}{Q \eta_{1(2)0} \rho_{10} k_1 k_2}.$$

Объёмный коэффициент теплопотерь определяется как отношение площади боковой поверхности образца на его объём. В данном случае рассматривается образец цилиндрической формы (трубка) с теплоотдачей стенки α_w с единицы поверхности и радиусом основания R_w . В этом случае объёмный коэффициент теплопотерь выражается в виде

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_w S_y}{V_y} = \frac{2\alpha_w \pi R_w h}{\pi R_w^2 h} = \frac{2\alpha_w}{R_w}, \quad \frac{Bm}{m^3 K}. \quad (4)$$

Как видно из (4), объёмный коэффициент теплопотерь α_0 зависит от радиуса основания трубки R_w и теплоотдачи стенки α_w . В данной работе рассматривается влияние теплопотерь на пределы распространения волны горения при трёх значениях радиуса основания трубки R_w : 32, 7.5, 2.25 мм, для которых в [1] проведены экспериментальные исследования пределов распространения волны фильтрационного горения водородо-воздушной смеси. Значение коэффициента теплоотдачи стенки α_w , в соответствии с [5], принято $50 \text{ Bm} / (\text{m}^2 \text{K})$. При указанных значениях радиуса трубки и коэффициента теплоотдачи стенки объёмный коэффициент теплопотерь α_0 соответственно будет равен: 3125; 13333; 44444 $\text{Bm} / (\text{m}^3 \text{K})$.

На рис. 1а приводятся кривые зависимости скорости волны от скорости ддува 65%-й водородо-воздушной смеси при радиусе трубки 0.032 м, рассчитанные по соотношению (2) в трёх случаях: зависимость коэффициентов диффузии от равновесной температуры (кривая 1), значение коэффициентов диффузии при нормальных условиях (кривая 2) и пренебрежение коэффициентами диффузии (кривая 3). Из рис. 1а видно, что влияние коэффициентов диффузии на скорость волны практически отсутствует. При уменьшении радиуса трубки до 0.00225 м эффекты диффузии также не проявляются. Незначительное влияние можно наблюдать при учёте комбинации коэффициентов диффузии, то есть когда учитывается влияние одного или двух коэффициентов при отсутствии других. Однако и в этом случае наиболее влияющего на скорость волны диффузии какого-либо компонента смеси не обнаружено. Кроме того, заметим, что критическая скорость ддува равна 0.4 м/с (рис. 1а), как в [1].

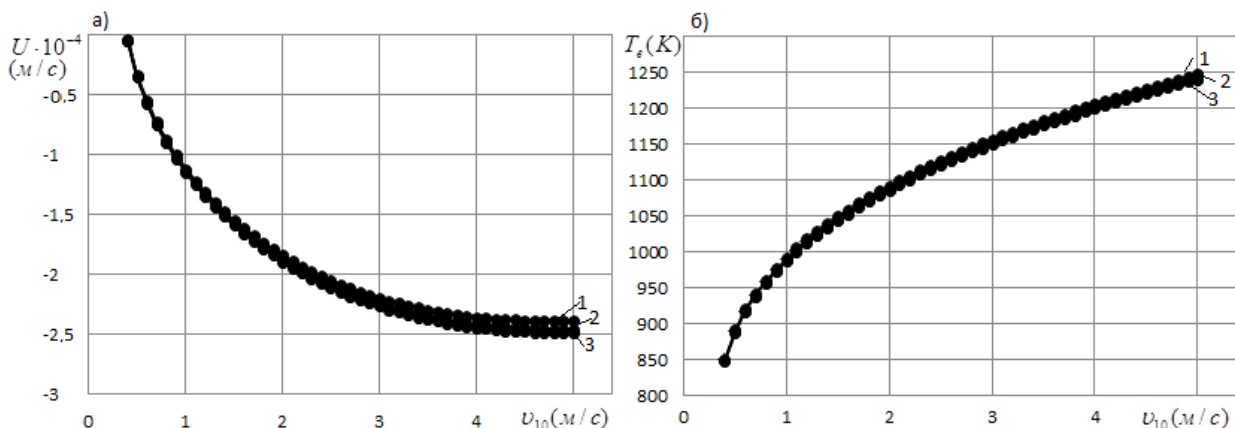


Рис. 1. Кривые зависимости скорости волны (а) и равновесной температуры (б) от скорости вдува 65%-й водородо-воздушной смеси при радиусе трубки $R_w = 0.032$ м в трёх случаях: 1 – зависимость коэффициентов диффузии от равновесной температуры; 2 – значения коэффициентов диффузии при нормальных условиях; 3 – пренебрежение коэффициентами диффузии.

На рис. 2а приводятся кривые зависимости скорости волны от скорости вдува для горения 65%-й водородо-воздушной смеси при варьировании радиуса трубки R_w . Расчёты произведены по соотношению (2) с учётом коэффициентов диффузии при нормальных условиях. Из рис. 2а видно, что при увеличении теплотеря скорость волны горения уменьшается против потока. А также из рис. 2а видно, что существует минимальное критическое значение скорости вдува, для каждого фиксированного значения коэффициента теплотеря, ниже которого распространение волны горения невозможно. Эти выводы согласуются с теоретическими и экспериментальными выводами работы [1]. На рис. 2б приводятся кривые изменения равновесной температуры пористой среды и смеси газов при варьировании радиуса трубки, соответствующие скоростям волны на рис. 2а.

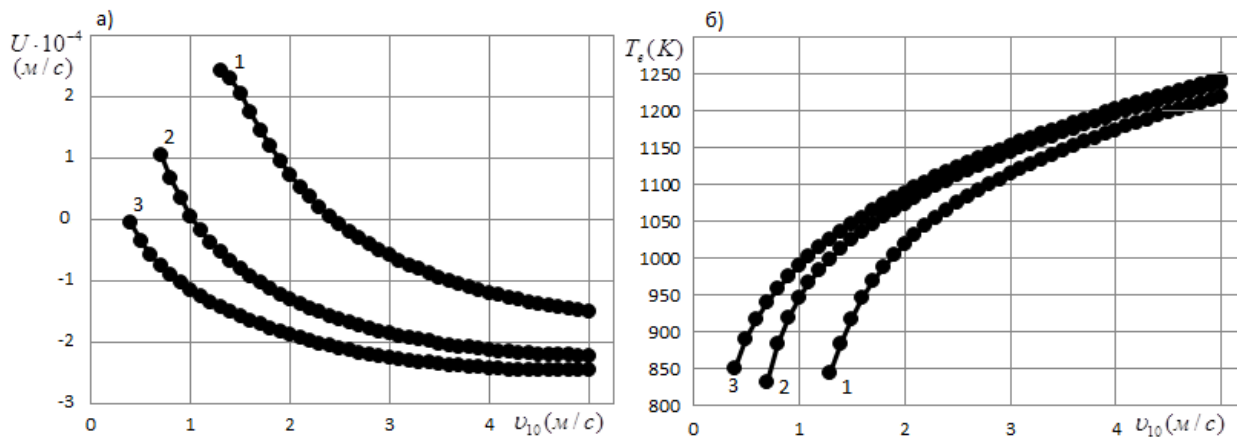


Рис. 2. Кривые зависимости скорости волны (а) и равновесной температуры (б) от скорости вдува 65%-й водородо-воздушной смеси при варьировании радиуса трубки R_w : 1 – 0.00225 м; 2 – 0.0075 м; 3 – 0.032 м.

На рис. 3 приводятся кривые зависимости скорости вдува от радиуса трубки при различных концентрациях водорода в смеси рассчитанные по соотношению (2). Все точки кривых относятся к критическим значениям скорости вдува v_{10}^* . Для точек, лежащих ниже соответствующих кривых, невозможно найти значение скорости волны по соотношению (2). Как видно из рис. 3, для нижнего

концентрационного предела критическая скорость приблизительно равна 0.1 м/с , для каждого радиуса трубки из интервала - от 2.25 до 32 мм . Для верхнего концентрационного предела критическая скорость обратно пропорциональна радиусу трубки и при приближении значения радиуса трубки к критическому радиусу 2.25 мм [1], критическая скорость резко возрастает. Отсюда следует, что на пределы распространения волны, наряду со скоростью вдува, влияет и концентрация водорода в смеси.

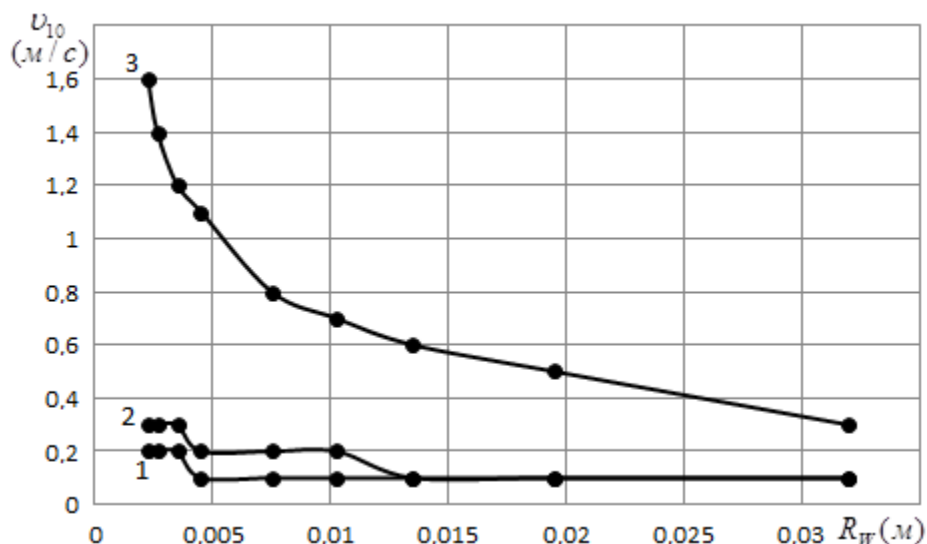


Рис. 3. Кривые зависимости скорости вдува от радиуса трубки при различных концентрациях водорода в смеси: 1 – 4%; 2 – 29%; 3 – 65%.

В ы в о д ы

Полученные результаты по выбранной математической модели ФГГ, в частности, подтверждают выводы теоретического и экспериментального исследования других авторов, что свидетельствует о правильности модели.

Получены критические кривые зависимости скорости вдува от радиуса трубки, соответствующие различным концентрациям водорода в смеси, показывающие области (выше кривых) распространения волны ФГГ при наличии теплопотерь.

Для нижнего концентрационного предела водорода критическая скорость приблизительно равна 0.1 м/с , для каждого радиуса трубки из интервала – от 2.25 до 32 мм . Для верхнего концентрационного предела критическая скорость обратно пропорциональна радиусу трубки.

Расчёты показывают, что коэффициенты диффузии не влияют на критическую скорость вдува при каждом фиксированном коэффициенте теплопотерь.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Потытняков С.И., Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. Влияние теплопотерь на распространение стационарных волн при фильтрационном горении газов. – Физика горения и взрыва, 1984, т.20, №1, с. 19-26.
2. Kabilov M.M. Instability of the front of filtration combustion of gases in the nonadiabatic regime. – Combustion, Explosion, and Shock Waves, 2012, v. 48, №2, pp. 136-143.

3. Ripoll N., Silvestre C., Paredes E., Toledo M. Hydrogen production from algae biomass in rich natural gas-air filtration combustion. – International journal of hydrogen energy, 2017, v. 42, №8, pp. 5513-5522.
4. Кабилов М.М., Гулбоев Б.Дж. Влияние теплотерь и диффузии компонентов газовой смеси на распространение волны горения в инертной пористой среде. – Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2014, №4(157), с. 59-67.
5. Какуткина Н.А., Коржавин А.А., Намятов И.Г., Рычков Д.А. Закономерности распространения пламени через насадку коммуникационных огнепреградителей. – Физика горения и взрыва, 2007, т.43, №4, с. 23-37.

Б.Ч.Гулбоев, З.Б.Шерматова*

САРҲАДҲОИ ПАҲНШАВИИ МАВЧИ СЌЗИШИ ФИЛТРОНАИ ОМЕХТАИ ГИДРОГЕНУ ҲАВО БО НАЗАРДОШТИ ГАРМИГУЗАРОНӢ ВА КОЭФФИЦИЕНТҲОИ ДИФФУЗИЯИ КОМПОНЕНТҲО

Донишгоҳи (Славянии) Россия ва Тоҷикистон,

**Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола таъсири гармигузаронӣ ва коэффисиентҳои диффузияи компонентҳо ба сарҳадҳои паҳншавии мавчи сӯзиши филтронаи гидрогену ҳаво таҳқиқ карда шудааст. Хатҳои қачӣ вобастагии суръати ҳаводиҳӣ аз радиуси кубурча хангоми киматҳои гуногуни гидроген дар омехта сохта шудааст, ки барои нуқтаҳои поён аз хатҳои қач қойгиршуда, паҳншавии мавчи сӯзиш қой надорад. Натиҷаҳои гирифта шуда, дар ҳолати хусусӣ, бо натиҷаҳои таҳқиқотҳои пештар гузаронида шуда, қаноатманд дуруст меоянд.

Калимаҳои калидӣ: сарҳадҳои паҳншавии мавчи сӯзиш, суръати ҳаводиҳӣ, суръати мавч, температураи баробарӣ, омехтаи гидрогену ҳаво, коэффисиентҳои диффузия ва гармигузаронӣ, радиуси кубурча.

B.J.Gulboev, Z.B.Shermatova *

THE LIMITS OF THE PROPAGATION OF THE FILTRATION COMBUSTION WAVE OF THE HYDROGEN-AIR MIXTURE IN THE PRESENCE OF HEAT LOSS AND DIFFUSION OF COMPONENTS

Russian-Tajik (Slavonic) University,

**Tajik National University*

In this work the influence of heat loss phenomena and diffusion of the mixture components to the limits of the propagation of the filtration combustion wave of the hydrogen-air mixture is investigated. Curves of the dependence of the injection velocity on the tube radius at different concentrations of hydrogen in the mixture, below which wave propagation is impossible, are obtained. The results, in particular, are in satisfactory agreement with previous studies.

Key words: the limit of wave propagation, injection speed, wave speed, equilibrium temperature, hydrogen-air mixture, diffusion coefficients and heat loss, tube radius.

УДК 523. 532

Член-корреспондент НАН Таджикистана Г.И.Кохирова,

А.М.Буриев, С.Н.Сафаров, А.А.Сагторзода

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОТЕНЦИАЛЬНО ОПАСНОГО
АСТЕРОИДА 2009 ХО ПО НАБЛЮДЕНИЯМ В ГИССАРСКОЙ
АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ***Институт астрофизики НАН Таджикистана*

Представлены результаты фотометрических наблюдений потенциально опасного астероида (438908) 2009 ХО, проведенных на телескопе АЗТ-8 Гиссарской астрономической обсерватории Института астрофизики НАНТв период его сближения с Землей в мае 2020 г. Измерен видимый блеск астероида в фильтрах BVRI, в результате его конвертации в абсолютный блеск получена величина $H=20.39^m \pm 0.05$ в фильтре V. Это значение близко к эфемеридному абсолютному блеску. Построены кривые блеска и показано, что в период мониторинга блеск астероида существенно не изменялся. Показатели цвета соответствуют астероидам M-типа, металлическим по составу и со средним альбедо 0.20. Оценки диаметра составляют 0.35 ± 0.09 км и 0.27 ± 0.04 км при альбедо 0.14 и 0.20, соответственно, что согласуется с имеющимися данными. Сближение с Землей в 2020 г. не оказало существенного влияния на физические характеристики астероида.

Ключевые слова: астероид, наблюдения, фотометрия, блеск, кривая блеска, диаметр, показатели цвета.

На текущий момент среди почти 29 тысяч открытых астероидов, сближающихся с Землей (АСЗ), 2413 объектов классифицируются как потенциально опасные для Земли (ПОА) [1]. К группе ПОА относятся астероиды, орбиты которых в настоящую эпоху сближаются с орбитой Земли до расстояний, меньших или равных 0.05 а.е. (около 7.5 млн. км), и их абсолютный блеск не превышает 22^m . Предполагая альбедо 0.14, тела с яркостью свыше 22^m имеют размеры менее 140 м, и их столкновение с Землей не приведет к значительным разрушительным последствиям. Среди ПОА большинство тел имеют размеры от 140 м до 1 км, 156 объектов имеют размеры порядка одного км и выше, столкновение с телами таких размеров уже может обусловить глобальную катастрофу на Земле. Таким образом, группа ПОА потенциально может воздействовать на Землю, в связи с чем наблюдения и определение динамических и физических свойств ПОА относится к актуальным задачам современной астрономии. Особое место здесь отводится изучению состава и структуры астероидов, уточнению их размера, поскольку именно этими характеристиками определяются последствия их возможных столкновений с Землей. Такие данные необходимы для разработки стратегий предупреждения столкновений и смягчения последствий ударов.

Адрес для корреспонденции: Кохирова Гулчехра Исроиловна, Буриев Анварджон Махмадалиевич. 736063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/5, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: kokhirova2004@mail.ru, anvar10@mail.ru

Наблюдения потенциально опасного астероида 2009 ХО и результаты

АСЗ (438908) 2009 ХО открыт в 2009 г. [1]. Минимальное межорбитальное расстояние астероида с Землей $MOID = 0.001833$ а.е. [1] и он может сближаться с Землей до расстояний порядка 275 тысяч км. Абсолютный блеск астероида в полосе V составляет $H=20.65$ звездных величин, предполагая, что оптическое альbedo равно 0.2, диаметр астероида оценен как 0.24 км [2]. В соответствии с $MOID$ и размером, 2009 ХО был включен в группу ПОА [1].

Изучение эволюции орбиты показало, что в 2000-2091 гг. астероид приближался и сблизится с Землей на различных расстояниях 11 раз [1]. В ночь с 7 на 8 мая 2020 г. произошел очередной близкий подход ПОА 2009 ХО к Земле, во время которого он пролетел мимо Земли со скоростью свыше 21.8 км/с на расстоянии менее 0.022 а.е. (3.3 млн. км) [1].

Сближение астероида с Землей обусловило благоприятные условия для наблюдений этого явления. Мониторинг объекта проведен с 20 по 23 мая 2020г. на телескопе АЗТ-8 Гиссарской астрономической обсерватории (ГисАО) Института астрофизики НАНТ. Рефрактор светосилой $D/F=700$ мм/2820 мм снабжен ПЗС камерой CCD FLI ProLine PL09000 со следующими характеристиками: FOV 44'x44', масштаб 1.75 arcsec/pixel. За период наблюдений получено 1089 снимков в фильтре R , 30 снимков в фильтрах BVI , всего 1119 кадров с экспозициями 5-60 секунд, изображение ПОА 2009 ХО приведено на рис. 1.



Рис. 1. Изображение ПОА 2009 ХО, 22 мая 2020 г., экспозиция 50 сек., АЗТ-8 ГисАО.

Первичная обработка кадров проведена с использованием кадров “flat”, “dark” и “bias”, полученных во время наблюдений и необходимых для учета неравномерности поля, темнового тока и ошибок матрицы. Фотометрическая обработка изображений выполнена по стандартной процедуре с помощью программного пакета (ПП) АПЕКС-II [3]. Программа выполняет калибровку кадров, идентификацию изображений звёзд и объектов и отождествление звёзд с заданными каталогами. Видимые звездные величины астероида определены с использованием звезд сравнения из каталога APASS, для которых блеск определен с точностью равной 0.03^m [4]. Средние значения видимых звездных величин объекта в фильтрах $BVRI$ даны в табл. 1. Кривые блеска в фильтре R астероида 2009 ХО представлены на рис. 2, где по оси ординат отложены видимые звездные величины m и по оси абсцисс – даты наблюдений в юлианских днях.

Таблица 1

Видимые звездные величины ПОА 2009 ХО по наблюдениям в ГисАО в 2020 г.

май (UT), 2020 г.	B	V	R	I
20.1909	-	-	16.42±0.07	-
21.2091	-	-	16.45±0.03	-
22.1914	17.56±0.02	16.83±0.05	16.42±0.06	15.88±0.07
23.1171	-	-	16.42±0.03	-

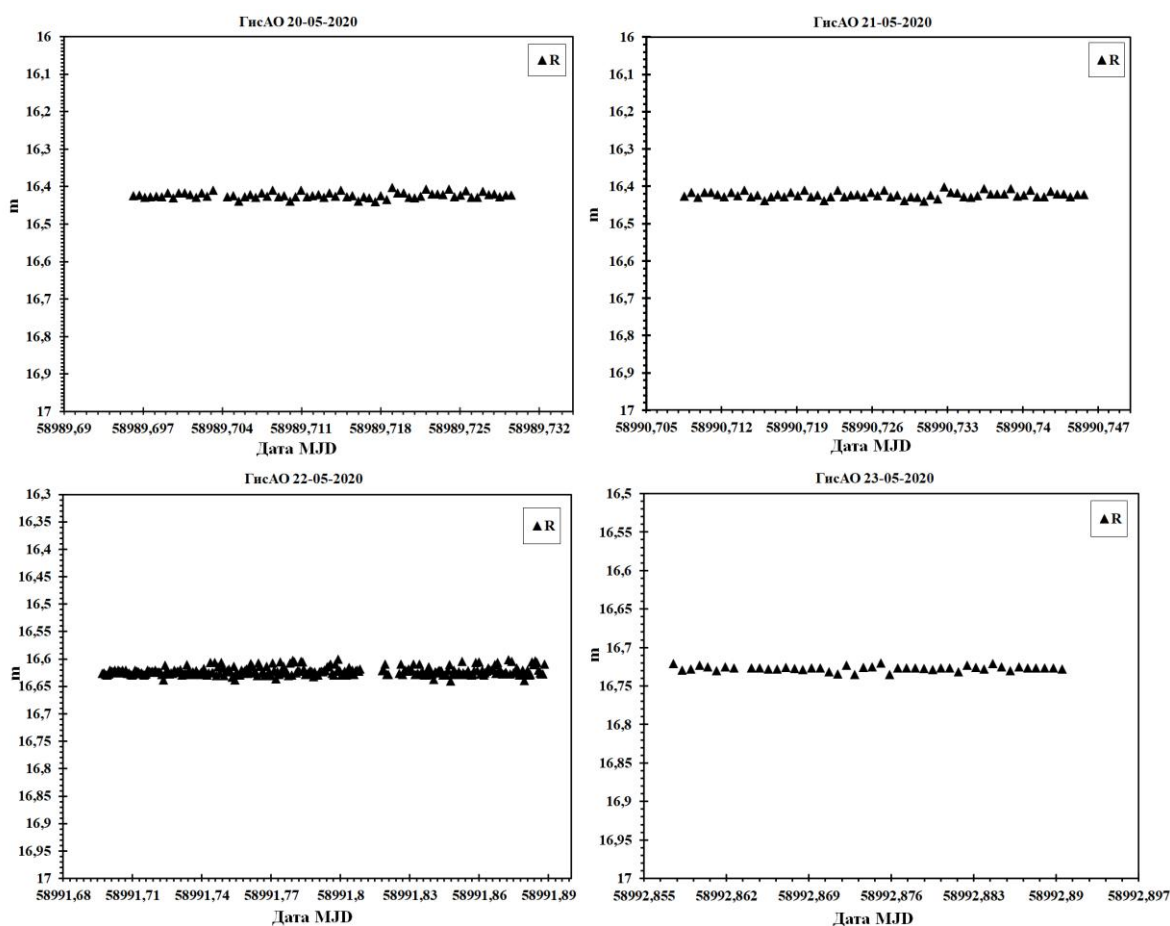


Рис. 2. Кривые блеска в полосе R астероида 2009 ХО по наблюдениям в ГисАО.

Для оценки диаметра необходимо определить абсолютный блеск объекта. Видимые звездные величины астероидов m конвертируются в абсолютные величины H по следующей полуэмпирической формуле, учитывающей изменение блеска в диапазоне фазовых углов от 0 до 120 град. [5]:

$$H = m - 5 \log(r\Delta) + 2.5 \log[(1 - G)\Phi_1 + G\Phi_2],$$

$$\Phi_i = \exp\left[-A_i \left\{ \operatorname{tg}(\beta / 2) \right\}^{B_i}\right], \quad i = 1, 2,$$

где β – фазовый угол (ph) объекта, G – параметр наклона, найденный лишь для небольшого числа астероидов, для остальных принято значение $G=0.15$; Φ_1, Φ_2 – функции угла фазы, $A_1=3.33, A_2=1.87, B_1=0.63$ и $B_2=1.22$ – коэффициенты, значения которых приведены в работе [6].

В табл.2 приведены средние значения (за ночь) абсолютных звездных величин астероида 2009 ХО в четырех фильтрах. Зависимость абсолютных звездных величин астероида от даты наблюдений приведена на рис. 3. Абсолютный блеск в фильтре V составил $H=20.40 \pm 0.05$ и эта величина близка к эфемеридному значению в том же фильтре $H=20.65^m$ [1]. В период мониторинга абсолютный блеск в полосе R находился в диапазоне от 19.99 ± 0.03 до 20.13 ± 0.01 , как видно, существенных изменений в нем не выявлено.

Таблица 2

Абсолютный блеск H и показатели цвета астероида 2009 ХО по наблюдениям в ГисАО в 2020 г.

май (UT), 2020 г.	B	V	R	I	B-V	V-R	R-I	B-R
20.1909	-	-	20.13 ± 0.01	-	-	-	-	-
21.2091	-	-	20.08 ± 0.03	-	-	-	-	-
22.1914	20.94 ± 0.02	20.40 ± 0.05	20.00 ± 0.06	19.55 ± 0.07	0.55	0.40	0.55	0.94
23.1171	-	-	19.99 ± 0.03	-	-	-	-	-

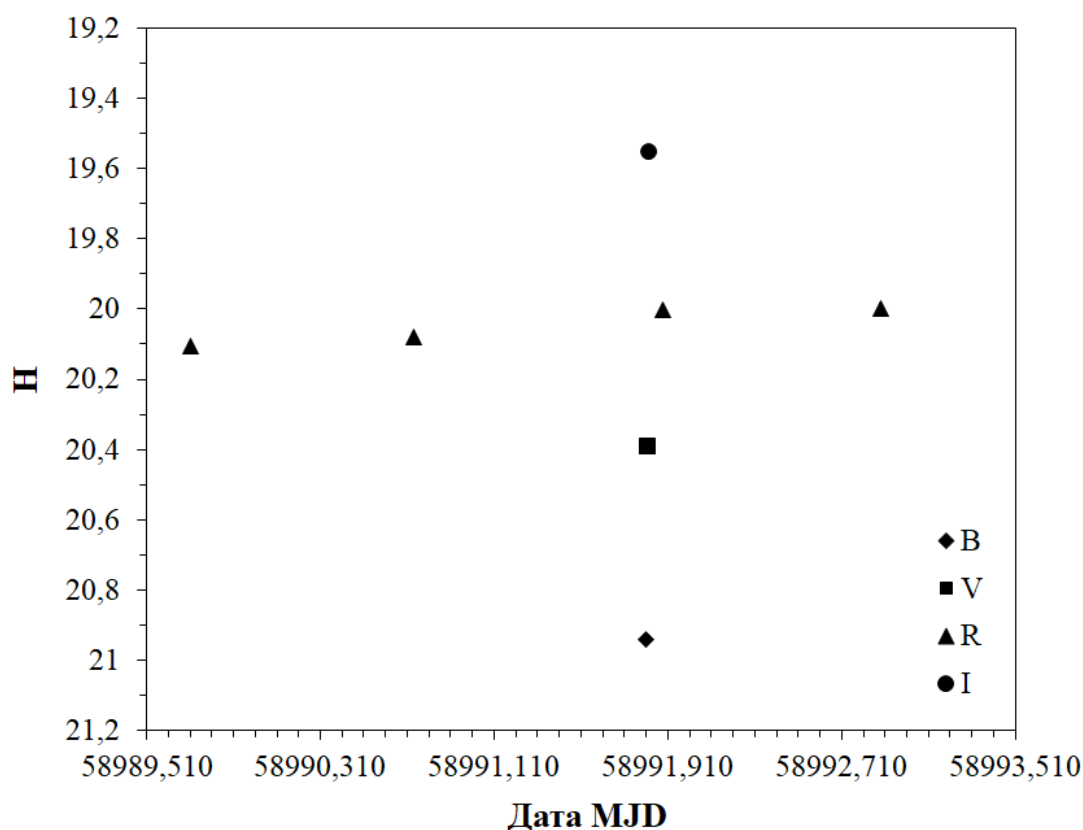


Рис. 3. Абсолютные звездные величины (средние значения) в четырех фильтрах астероида 2009 ХО по наблюдениям в ГисАО в 2020 г.

Показатель цвета наряду с альбедо и спектральным типом является важной физической величиной, позволяющей определить принадлежность астероида к какому-либо таксономическому классу и на этой основе предположить его минералогический состав. Многоцветные наблюдения астероида 2009 ХО в ГисАО позволили оценить показатели его цвета. Величины показателей цвета $B-V$, $V-R$, $R-I$, $B-R$ астероида приведены в табл. 2. В статье [7] приводится диаграмма расположения различных

популяций малых тел в соответствии с показателями цвета B-V и V-R, где таксономическая классификация астероидов дана по Д.Толену [8]. Сопоставляя с этой диаграммой полученные в настоящей работе показатели цвета, можно отнести астероид 2009 XO к спектральному классу X, включающему астероиды E-, M- и P- типов [8]. Мы считаем, что 2009 XO относится к M-типу, а именно, он является астероидом металлического (железо, никель) состава со средним альбедо – свыше 10% и менее 30%.

Эффективный диаметр астероида D вычислен по следующему эмпирическому соотношению, принятому для оценки размеров астероидов [9]:

$$D = \frac{1329}{\sqrt{p_v} \cdot 10^{0.2H}},$$

где p_v – геометрическое альбедо астероида, H – абсолютная звездная величина в каком-либо фильтре. Альбедо 2009 XO не измерено, поэтому для p_v мы использовали два значения – 0.14, принятое в базе данных [1] для оценки размера AC3 с неизвестным альбедо, и 0.20 [2]. Оценки диаметра астероида по измерениям в фильтре R приведены в табл. 3 и в среднем находятся в диапазоне 0.35 ± 0.09 км и 0.27 ± 0.04 при альбедо 0.14 и 0.20 соответственно. Как отмечено выше, доподлинно размер объекта не установлен, имеется оценка 0.24 км [2], по другим данным диаметр оценен в интервале 0.20-0.44 км, среднее значение 0.32 км [10]. Наши оценки укладываются в имеющиеся данные по размеру объекта. Но требуется дальнейшее уточнение альбедо и размера астероида.

Таблица 3

Оценка диаметра астероида 2009 XO по наблюдениям ГисАО в 2020 г.

май (UT), 2020 г.	r , а.е.	Δ , а.е.	ph , град.	H_R , зв.вел.	D , км ($p_v=0.14$)	D , км ($p_v=0.20$)
20.1909	1.113	0.102	7.684	20.13±0.01	0.27±0.01	0.33±0.08
21.2091	1.122	0.110	7.680	20.08±0.03	0.28±0.03	0.34±0.01
22.1914	1.128	0.117	7.776	20.00±0.06	0.29±0.04	0.35±0.04
23.1171	1.136	0.125	7.950	19.99±0.03	0.29±0.02	0.35±0.04

З а к л ю ч е н и е

В результате наблюдений потенциально опасного астероида 2009 XO, выполненных в Гиссарской астрономической обсерватории ИА НАНТ в период его сближения с Землей в мае 2020 г.:

- измерен видимый блеск в фильтрах $BVRI$, построены кривые блеска в фильтре R по наблюдениям четырех ночей;
- определен абсолютный блеск в V -фильтре $H=20.40^m \pm 0.05$, его величина близка к эфемеридному значению [1];
- выявлено отсутствие значительных изменений блеска;
- оценены показатели цвета и сделано предположение о принадлежности астероида к M-типу [8], включающему астероиды металлического состава со средним альбедо в интервале 10-30%;
- средняя оценка диаметра составила 0.35 ± 0.09 км и 0.28 ± 0.04 при альбедо 0.14 и 0.20 соответственно, что согласуется с имеющимися данными по размеру астероида [2].

Проведенное исследование показало, что сближение астероида с Землей в мае 2020 г. не привело к значительным изменениям данных по его физическим свойствам. Поскольку астероид 2009 ХО в ближайшем будущем еще не раз сближится с Землей, необходимы дальнейшие наблюдения с целью контроля его физических характеристик, а также для уточнения альбедо и диаметра.

Поступило 07.07.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. CNEOS (Center of Near Earth Object Studies), <https://cneos.jpl.nasa.gov>, 2022.
2. Taylor et al. Arecibo Radar Observations of 14 High-Priority Near-Earth Asteroids in CY2020 and January 2021, <https://www.naic.edu/~pradar/Taylor-R3037-HighPriority-2020.pdf>, 2022.
3. Девяткина А.В., Горшанов Д.Л., Куприянов В.В., Верещагина И.А. Программные пакеты «АПЕКС-I» и «АПЕКС-II» для обработки астрономических ПЗС-наблюдений. – Астрон. вестник, 2010, № 1, с. 74-87.
4. Henden A.A., Templeton M., Terrell D., Smith T.C., Levine S., Welch D. VizieR Online Data Catalog. – AAVSO Photometric All Sky Survey (APASS) DR9, 2016.
5. Bowell E., Napke B., Domingue D. Application of photometric models to asteroids. – In Asteroids. Ed. Binzel R.P., Gehrels T., Matthews M.S., Tucson, - Univ. of Arizona Press, 1989, pp. 524-556.
6. Penttila A., Shevchenko V.G., Wilkman O., Muinonen K. H, G1, G2 photometric phase function extended to low-accuracy data. – Planet. Space Sci, 2016, v. 123, pp. 117-125.
7. Jewitt D. Color systematics of comets and related bodies. – The Astron. J., 2015, v. 150:201, 18 p.
8. Tholen D.J. Asteroid Taxonomy from Cluster Analysis of Photometry. – Ph.D. Thesis, Univ. of Arizona, 1984, 167 p.
9. Harris A.W. On the Slow Rotation of Asteroids. – Icarus, 2002, v. 156, № 1, pp. 184-190.
10. Verysmall Apollo-class Asteroid, <https://www.spacereference.org>, 2022.

Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, С.Н.Сафаров, А.А.Сагторзода

МУАЙЯН КАРДАНИ ХУСУСИЯТҲОИ ФИЗИКИИ АСТЕРОИДИ ЭҲТИМОЛАН ХАТАРНОКИ 2009 ХО АЗ РЎИ МУШОҲИДАҲОИ РАСАДҲОНАИ АСТРОНОМИИ ҲИСОР

Институти астрофизикаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Натиҷаҳои мушоҳидаҳои фотометрии астероиди эҳтимолан хатарноки (438908) 2009 ХО, ки дар телескопи АЗТ-8-и Расадхонаи астрономии Ҳисори Институти астрофизикаи АМИТ моҳи майи соли 2020 ҳангоми ба Замин наздикшавиаш гузаронида шуд, нишон дода шудааст. Дурахшонии намоёни астероид дар филтрҳои BVRI чен карда шуда дар натиҷаи табдилдиҳи ба дурахшонии мутлақ қимати $H=20.39^m \pm 0.05$ дар филтри V ба даст оварда шуд. Қимати дурахшонии мутлақи астероид ба маълумоти эфемеридави мутобиқат мекунад. Ҳагги қачи дурахшонӣ сохта шуда ва нишон медиҳад, ки дурахшонии астероид дар давоми мушоҳида тағйир намеёбад. Нишондиҳандаи ранги астероиди эҳтимолан хатарноки 2009 ХО ба астероидҳои навъи -M мувофиқат мекунад, ки тарқибашон

металлӣ буда, албедои онҳо ба ҳисоби миёна ба 0.20 баробар аст. Қимати диаметр тақрибан 0.35 ± 0.09 км ва 0.27 ± 0.04 км бо албедои 0.14 ва 0.20 ҳисоб шудааст, ки ин ба маълумоти мавҷудбуда мувофиқ аст. Наздикшавӣ астероид ба Замин дар соли 2020 ба хусусиятҳои физикии он таъсири ҷиддӣ нарасонид.

Калимаҳои калидӣ: астероид, мушоҳидаҳо, фотометрия, дурахшонӣ, хатти қачи дурахшонӣ, диаметр, нишондиҳандаи ранг.

G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, S.N.Safarov, A.A.Sattorzoda

DETERMINATION OF THE PHYSICAL PROPERTIES OF POTENTIALLY HAZARDOUS ASTEROID 2009 XO FROM OBSERVATIONS AT THE GISSAR ASTRONOMICAL OBSERVATORY

Institute of Astrophysics of the National Academy of Sciences of Tajikistan

In this paper the results of photometric observations of potentially hazardous asteroid (438908) 2009 XO carried out by telescope AZT-8 at the Hissar Astronomical Observatory of the Institute of Astrophysics of NAST during its approach to the Earth in May 2020 are presented. The apparent and absolute brightness of the asteroid were measured, the absolute magnitude $H=20.39^m \pm 0.05$ in V band is close to the ephemeris value. Light curves are plotted and it is shown that the brightness of the asteroid did not change significantly during the monitoring period. Color indices correspond to asteroids of M-type that have metallic composition and average albedo 0.20. The diameter estimations are 0.35 ± 0.09 km and 0.28 ± 0.04 km with albedo 0.14 and 0.20, respectively, which is consistent with the available data. The approach to the Earth in 2020 did not cause significant change in the physical properties of asteroid.

Key words: asteroid, observations, photometry, magnitude, light curve, diameter, color indices.

УДК 541.64: 539.2

С.Дж.Гафуров

**ВЛИЯНИЕ УФ-СВЕТА РАЗНОЙ ДЛИНЫ ВОЛНЫ НА КИНЕТИКУ
ФОТОМЕХАНИЧЕСКОЙ ДЕСТРУКЦИИ ДИАЦЕТАТЦЕЛЛЮЛОЗЫ***Таджикский национальный университет**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Т.С.Салиховым 06.01.2022 г.)*

Проведено исследование влияния предварительного УФ-облучения с разными длинами волн ($\lambda_1=254$ и $\lambda_2=365$ нм) на молекулярную массу (ММ) и разрывную прочность диацетатацеллюлозы (ДАЦ). Показано, что предварительное облучение ДАЦ УФ-светом разных длин волн приводит к различным степеням потери прочности образцов на разрыв.

Ключевые слова: полимер, радиация, фотодеструкция, молекулярная масса, прочность.

При эксплуатации или хранении полимерные материалы стареют, что проявляется в неблагоприятном изменении комплекса их свойств. Старение полимеров может быть следствием как физических процессов, например, самопроизвольной кристаллизации, так и химических, из которых наибольшее значение имеют структурирование и деструкция полимера.

Различают физическую и химическую деструкцию полимеров. Физическая деструкция протекает под действием теплоты, света, излучений высокой энергии, при механическом воздействии и, соответственно, называется термической, фотохимической, радиационной, механохимической деструкциями. При старении полимеров в реальных условиях деструкция обычно вызывается действием нескольких факторов, что, как правило, приводит к увеличению скорости этого процесса [1]. УФ-излучение является наиболее распространенным фактором, который вызывает фотодеструкцию полимеров.

Существует ряд работ, посвящённых влиянию монохроматического УФ-света на физико-механические свойства полимеров, касающиеся их эксплуатационных свойств [2-5]. Известно [6-8], что в зависимости от длины волны УФ-света в полимерах происходят различные деструкционные процессы, отличающиеся по своему механизму. Так, в [9] установлено, что полиэтилентерефталат (ПЭТФ) сильнее разрушается под действием света с длиной волны $\lambda=314$ нм. Показано, что кванты УФ-света с большой энергией снижают прочность ПЭТФ слабее, чем кванты с меньшей энергией.

Для прояснения этого вопроса нами проведено исследование процесса фотопревращения ДАЦ в условиях действия монохроматического света с длинами волн $\lambda_1=254$ нм и $\lambda_2=365$ нм. Источником света λ_1 служила лампа ДБ-30, так как 80 % энергии, излучения которой приходится на эту длину волны, а свет с λ_2 выделяли от излучения лампы ПРК-7 с помощью комбинации стеклянного светофильтра УФС-5, а также жидкостного светофильтра СЗС-23. Путём варьирования интенсивности падающего света были достигнуты условия равной поглощенной энергии ($15 \text{ Дж/м}^2 \text{ с}$) независимо

Адрес для корреспонденции: Гафуров Сафархон Джурахонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: gafurovs.d@mail.ru

от длины волны УФ-света. Интенсивность излучения оценивалась непосредственно на месте нахождения образца с помощью термоэлектрического актинометра АТ-50.

Светостойкость полимера оценивали по зависимости молекулярной массы и разрывной прочности образцов от времени предварительного облучения. Величину молекулярной массы образцов измеряли вискозиметрически с помощью вискозиметра ВПЖ-1. Величину разрывной прочности образцов плёнок типа двойной лопаты определяли на разрывной машинке ИР 5062-0,5 со скоростью растяжения 2×10^{-4} м/с с одновременной регистрацией диаграммы растяжения.

Результаты опытов представлены на рис. 1. в виде зависимости молекулярной массы ДАЦ от времени облучения.

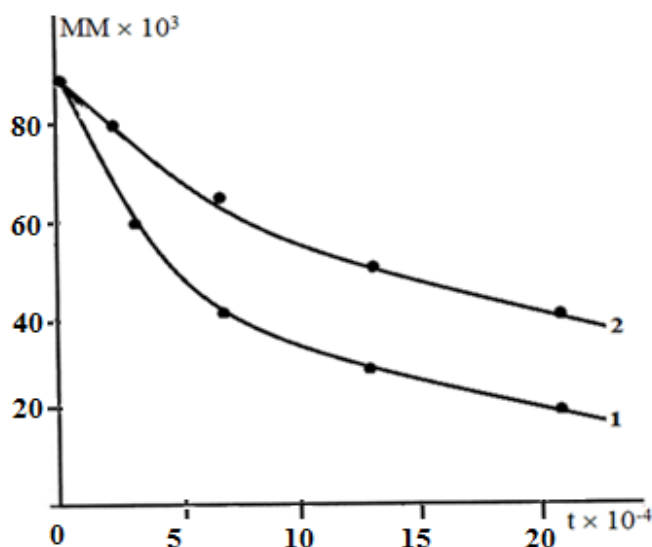


Рис. 1. Зависимость молекулярной массы ДАЦ от времени облучения светом: 1 – 254 нм; 2 – 365 нм.

Видно, что молекулярная масса образцов для обоих случаев предварительного облучения уменьшается со временем облучения t . Причем молекулярная масса образцов, облученных светом 254 нм, падает значительно быстрее, чем у образцов, облученных светом 365 нм. Так, например, после 60 часов облучения, если молекулярная масса образцов, облученных УФ-светом 254 нм падает на 75%, то в образцах, облученных светом с 365 нм она падает на 47%. Из этих результатов вытекает, что эффективность воздействия квантов УФ-света при фотостарении образцов существенно зависит от длины волны поглощенных квантов УФ-облучения.

Также для объяснения результатов опытов в качестве характеристики светостойкости рассмотрим величину степени радиационного разрушения образцов ДАЦ $P=1-\sigma/\sigma_0$, где σ и σ_0 – соответственно разрывные напряжения облученного и исходного образцов.

На рис. 2 представлены зависимости степени радиационного разрушения P от времени предварительного облучения t образцов плёнок ДАЦ.

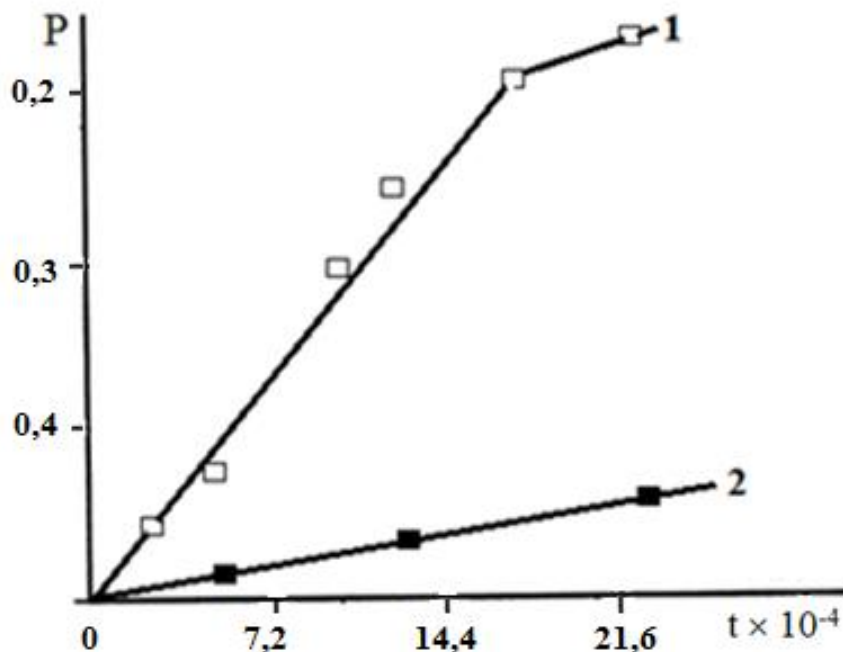


Рис. 2. Зависимость степени радиационного разрушения ДАЦ от времени предварительного облучения светом: 1 – 254 нм; 2 – 365 нм.

Видно, что, во-первых, зависимости $P=f(t)$ в обоих случаях длин волн УФ-света являются строго линейными, во-вторых, углы наклонов зависимостей для двух случаев существенно отличаются друг от друга: при предварительном облучении светом 254 нм скорость нарастания степени радиационного разрушения (тангенс угла наклона) существенным образом (примерно в 5 раз) превосходит таковую для случая облучения светом 365 нм.

На основании проведенных опытов можно оценить эффективность действия квантов УФ-света разной длины волны на фотодеструкционные процессы в ДАЦ. Оценка эффективности действия квантов УФ-света с длинами волн $\lambda_1=254$ нм и $\lambda_2=365$ нм нами проведена путем вариации интенсивности падающего на образец света при суммарном времени предварительного облучения в 40 часов. Результаты опытов приведены в таблице.

Таблица

Зависимости степени радиационного разрушения образцов плёнок ДАЦ от интенсивности падающего излучения

Полимер (ДАЦ)	$j_{\text{погл.}}=15 \text{ Дж/м}^2$							
	$\lambda_1=254 \text{ нм}$				$\lambda_2=365 \text{ нм}$			
P	0.2	0.3	0.6	0.8	0.85	0.1	0.13	0.18
$j_{\text{пад.}}$	20	25	30	50	70	50	70	90

Из таблицы видно, что зависимости P от j для исследованных образцов при разных λ резко отличаются. Эти зависимости характеризуют эффективность влияния квантов УФ-света и можно предположить, что она должна качественно коррелировать с квантовым выходом процесса фотохимического распада полимера. При сопоставлении dP/dj можно увидеть, что при поглощении света с $\lambda_1=254$ нм эффективность воздействия квантов примерно в 6 раз больше, чем при поглощении света с $\lambda_2=365$ нм. Из этих результатов можно предположить, что наблюдаемая зависимость P от λ связана с

тем, что фотохимические процессы в полимере при воздействии квантов разной энергии протекают с разными скоростями.

З а к л ю ч е н и е

Полученные результаты показывают, что различие в изменениях P в процессе фотодеструкции для изученных образцов под действием квантов УФ-облучения разной энергии обусловлены не только влиянием различных факторов внешней среды, но поглощательной способностью полимера. Воздействие УФ-излучения разной длины волны приводит к существенно различным скоростям протекания фотохимических реакции в полимере.

Поступило 19.01.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Семчиков Ю.Д. Высокомолекулярные соединения. – М.: Academia, 2005, 499 с.
2. Ренби Б., Рабек Я. Фотодеструкция, фотоокисление, фотостабилизация полимеров. – М.: Мир, 1988, 675 с.
3. Гафуров С.Дж., Бобоев Б.Т., Истамов Ф.Х. Оценка эффективности фотодеструкции полиэтилентерефталата квантов УФ-излучения разной длиной волны. – Прикладная физика, 2020, № 1, с.32-35.
4. Гафуров С.Дж., Бобоев Б.Т., Истамов Ф.Х. Влияние длины волны УФ-света на кинетику фотодеструкции полистирола. – ДАН РТ, 2018, т.61, №4, с.360-365.
5. Дадаматов Х.Д., Бобоев Т.Б., Бердиев А.Э. Светостабилизация поликапроамидных волокон в условиях действия монохроматической ультрафиолетовой радиации. – ДАН РТ. 2015, т.58, №6, с.515-520.
6. Дадаматов Х.Д., Бобоев Т.Б., Назруллаев Б.Н. Фотомеханическая деструкция капроновых волокон под действием квантов различной энергии. – ДАН ТаджССР, 1981, т.24, №7, с.422-425.
7. Куренков В.Ф. Химия и физика высокомолекулярных соединений: учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. – Казань: Инновационно-издательский дом «Бутлеровское наследие», 2009. – 292 с.
8. Архиреев В.П. Старение и стабилизация полимеров: учеб. пособие. – Казань: Казан. гос. технолог. ун-т, 2002, 88 с.
9. Stefenson C.V., Voses B.C., Coburn W.C., Wilcox W.S. Degradation of physical properties. – J. of Polym. Sci, 1961, v.55, pp.451-464.

С.Ч.Гафуров

ТАЪСИРИ НУРИ УБ ДАРОЗИИ МАВЧИ ГУНОГУН БА КИНЕТИКАИ ВАЙРОНШАВИИ ФОТОМЕХАНИКИИ ДИАТСЕТАТСЕЛЛЮЛОЗА

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Таҳқиқи таъсири нурборонкунии пешакӣ тавассути нури УБ бо дарозии мавҷи гуногун ($\lambda_1=254$ нм ва $\lambda_2=365$ нм) ба массаи молекулавӣ (ММ) ва ба кандашавӣ устувор будани диатсетата-селлюлоза (ДАС) гузаронида шуд. Нишон дода шуд, ки нурборонкунии пешакӣ ДАС тавасути нури

УБ дарозихои мавҷи гуногун ба дараҷаҳои гуногуни талафи устувории намунаҳо ба кандашавӣ оварда мерасонад.

Калимаҳои калидӣ: полимер, радиатсия, фотовайроншавӣ, массаи молекулавӣ, устуворӣ.

S.J.Gafurov

INFLUENCE OF UV LIGHT OF DIFFERENT WAVE LENGTH ON KINETICS OF PHOTOMECHANICAL DESTRUCTION DIACETATE CELLULOSE

Tajik National University

A study of the effect of preliminary UV irradiation with different wavelengths ($\lambda_1 = 254$ nm and $\lambda_2 = 365$ nm) on the molecular weight (MW) and tensile strength of cellulose diacetate (DAC) has been carried out. It is shown that preliminary irradiation of DAC with UV light of different wavelengths leads to different degrees of loss of tensile strength of the samples.

Key words: polymer, radiation, photodestruction, molecular weight, strength.

УДК 544.3-971.4

Ш.Ш.Азимов, В.Н.Петухов, Т.А.Хасанов, А.Н.Лакаев

**ДИНАМИКА АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ В ХОДЕ РЕАКЦИИ
ТЕРМИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ГИДРОКАРБОНАТА АММОНИЯ***Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Т.Х.Салиховым 09.07.2022 г.)*

Приведены результаты исследования процесса термического разложения гидрокарбоната аммония методом акустической эмиссии. Экспериментально определены последовательные изменения в активности акустической эмиссии, соответствующие стадиям выхода продуктов реакции.

Ключевые слова: акустическая эмиссия, гидрокарбонат аммония, химическая реакция разложения, вода, углекислый газ, аммиак.

Гидрокарбонат и карбонат аммония, благодаря эндотермическому эффекту при их термическом разложении, широко используются там, где необходимо быстро и существенно понизить температуру продуктов сгорания топлива, например при срабатывании пиропатронов в надувных спасательных плотках, а также где нужно образовать газовую среду, препятствующую горению, то есть входят в состав огнетушителей.

Термолизу гидрокарбоната и карбоната аммония посвящено крайне ограниченное количество публикаций, что сужает возможности в составлении соответствующего литературного обзора.

В одной из немногих работ, посвященных данной теме [1], авторы, опираясь на экспериментальные термолитические данные, полученные с использованием современного термического анализатора Netzsch STA-449C “Jupiter”, детализировали кинетику термодеструкции карбоната аммония (КА), гидрокарбоната аммония (ГКА) и определили число стадий процесса путем аппроксимаций кривых дифференциальной сканирующей калориметрии (ДСК) и дифференциальной термогравиметрии (ДТГ).

Эти выводы, основанные на математических расчетах, послужили поводом для нашего экспериментального исследования, цель которого детализировать процесс и найти взаимосвязь стадий термодеструкции ГКА и параметров акустической эмиссии (АЭ).

В силу несимметричности кривых ДСК и ДТГ, авторы получили наибольшее совпадение с кривой ДСК суперпозицией трех гауссианов, сдвинутых относительно друг друга по температуре. Поскольку продуктов реакции разложения ГКА тоже три (вода, аммиак и углекислый газ), авторы предположили, что гауссианы соответствуют этим веществам и отражают кинетику их выхода. Согласно выводам авторов, процесс термодеструкции ГКА происходит последовательно: сначала выделяется вода, а высвобождающиеся «углекислый газ и аммиак могут быть абсорбированы на оставшихся кристаллах» исходного вещества. Далее идет выделение углекислого газа и, в последнюю очередь, аммиака. По нашему мнению, допущение о том, что выход каждого из продуктов реакции про-

Адрес для корреспонденции: Азимов Шавкат Шукурович. 734063, Республика Таджикистан, пр. Айни, 299/1, Физико-технический институт НАНТ. E-mail: sazimov@tajik.net

исходит по нормальному распределению, то есть симметрично относительно температуры, противоречит правилу Вант-Гоффа, согласно которому скорость большинства реакций возрастает с повышением температуры. Вместе с тем, выдвинутое авторами предположение о стадийности процесса термодеструкции представляется не лишним основанием и послужило поводом для интерпретации экспериментальных данных АЭ в рамках предложенной модели динамики реакции разложения ГКА.

В таблице представлены три параметра, полученные в результате обработки приведенных в [1] плюс четвертый параметр – данные АЭ, полученные в ходе наших экспериментов. Это – номера стадий разложения ГКА; температура, соответствующая максимуму выхода каждого из продуктов реакции (границы стадий разложения ГКА, °С); вычисленная относительная потеря массы ГКА (Δm , %) и относительная сумма событий АЭ (Σ АЭ, %).

Таблица

Стадии разложения ГКА	Границы стадий разложения ГКА, °С	Δm ГКА, %	Σ АЭ, %
1	94.6	14.1	0
2	115.9	34.5	64
3	129.3	34.0	16
4	159	17.4	20

На рис. 1 показана кривая ДТГ для ГКА с тремя гауссианами: 1, 2, 3 и 4 – характерные стадии выхода продуктов реакции, ограниченные температурами максимального выхода каждого продукта.

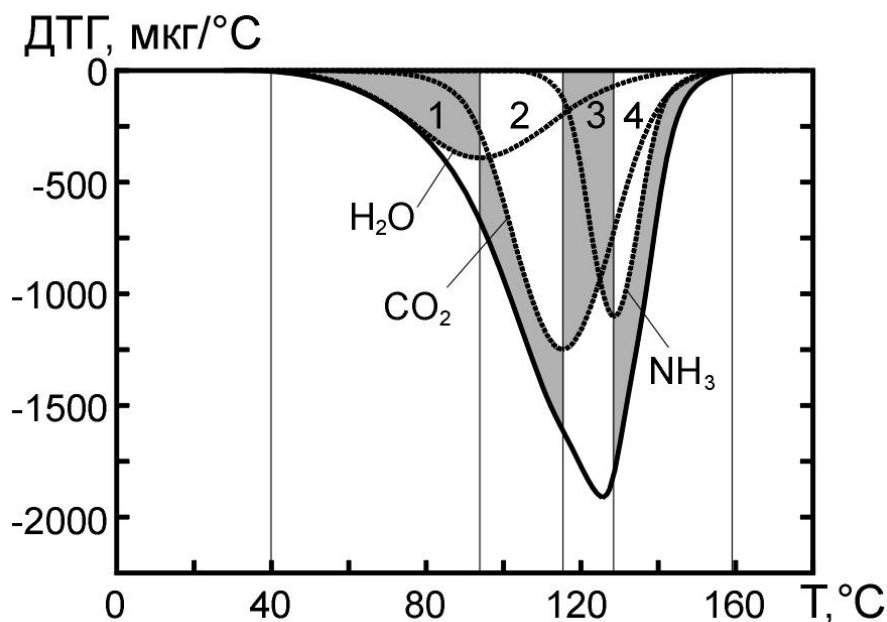


Рис. 1. Аппроксимация ДТГ гидрокарбоната аммония гауссианами для H_2O , CO_2 и NH_3 по [1].

Схема эксперимента

На рис. 2 приведена схема экспериментальной установки. Навеска в 70 мг кристаллов ГКА в стеклянной кювете, погруженная вместе с горячим спаем дифференциальной термопары медь-константан в минимальное количество вакуумного масла ВМ-1, устанавливалась на плоскую поверхность кварцевого волновода, верхней частью входящего в электропечь. К нижней части волновода прижимался датчик акустической эмиссии. Сигналы АЭ, а также данные о температуре поступали в

цифровую регистрирующую систему PCI-2 (РАС, США). Снизу осуществлялась подсветка содержимого кюветы, а сверху через стеклянное окошко производилась видеозапись процесса. Постоянство мощности нагрева печи обеспечивалось стабилизированным переменным напряжением.

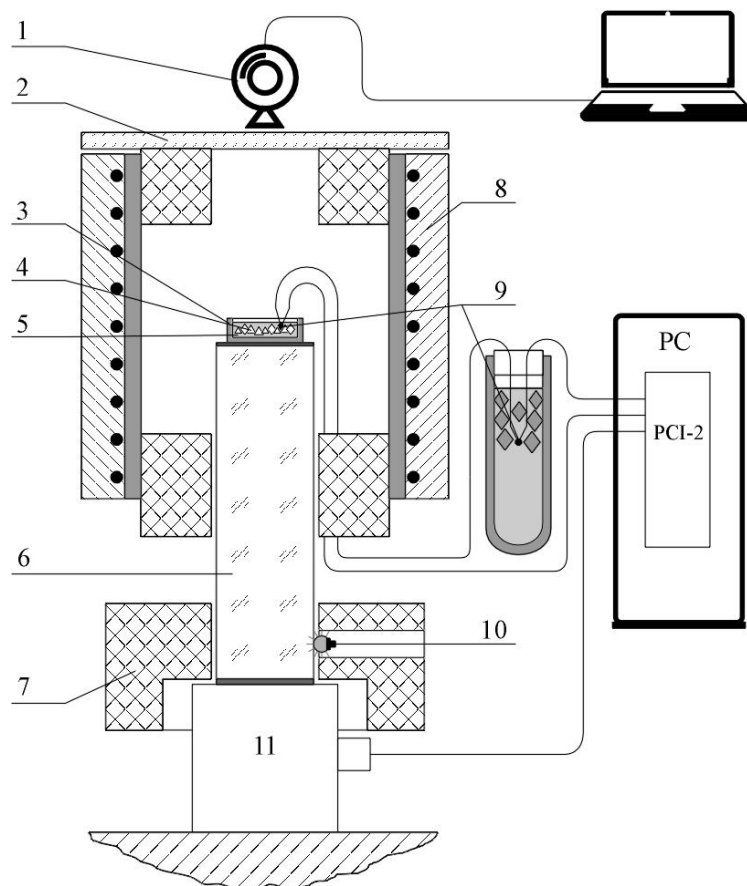


Рис. 2. Схема экспериментальной установки: 1 – видеокамера; 2 – стеклянное окошко; 3 – стеклянная кювета; 4 – кристаллы ГКА; 5 – вакуумное масло ВМ-1; 6 – кварцевый волновод; 7 – фторопластовое термоизоляционное кольцо; 8 – электрическая печь; 9 – дифференциальная термopара; 10 – подсветка; 11 – датчик АЭ.

Реакция термодеструкции ГКА протекает по формуле



Причем ГКА крайне неустойчив на открытом воздухе и легко разлагается на воду, углекислый газ и аммиак уже при 36 - 70°C. Поэтому было необходимо предотвратить его преждевременный самораспад под воздействием воздуха и влаги. Для этого потребовалось поместить кристаллы ГКА в среду, которая:

- защищает исследуемое вещество от воздействия воздуха и влаги;
- химически инертна;
- хорошо проводит звуковые волны;
- достаточно термостойка в требуемом диапазоне температур (20–150°C).

В качестве такой защитной среды использовалось вакуумное масло ВМ-1, отвечающее вышеперечисленным требованиям.

С учетом недостатков, присущих образцам КА в виде таблеток, использованных в работе [5], а именно накопление механических напряжений в процессе прессования и потеря акустического контакта вследствие разрыхления, что в полной мере также присуще таблеткам из ГКА, мы использовали кристаллы только в свободном, т.е. нетаблетированном состоянии.

Акустическая эмиссия возникает вследствие дискретного перестроения структуры вещества и генерируется в ходе многих химических реакций, поэтому этот метод применим для выявления кинетики их протекания [2–5].

На рис. 3 показаны наиболее приближенные к усредненным по 30-и опытам временные зависимости температуры (сплошной линией), суммарного счета событий (ступеньками) и активности АЭ (точками) при нагревании образцов ГКА с постоянной скоростью $\sim 10^\circ\text{C}/\text{мин}$. В экспериментах с АЭ были соблюдены идентичные с [1] условия по исходному количеству ГКА (± 1 мг) и скорости нагрева ($\pm 0.1^\circ\text{C}/\text{мин}$). Пунктиром показан рост температуры при отсутствии исследуемого вещества (фоновый эксперимент).

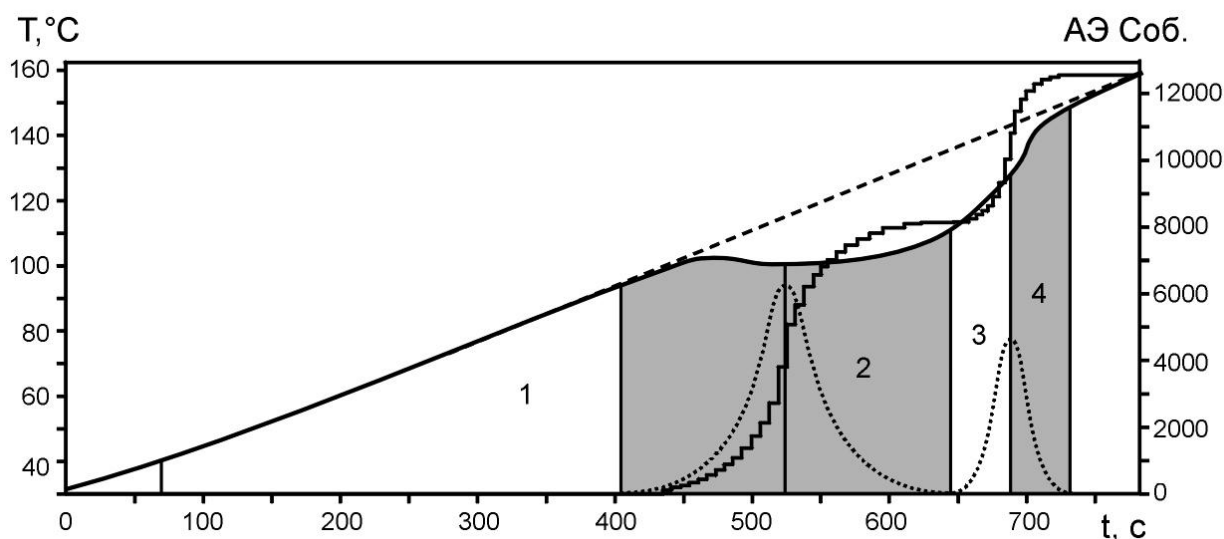


Рис 3. Графики температуры ($^\circ\text{C}$), суммарного счета АЭ (события) и активности АЭ (события/ Δt) от времени t (сек.) для 70 мг ГКА.

На данном рисунке вертикальными линиями отмечены границы характерных участков выхода продуктов реакции по [1], соответственно воды, углекислого газа и аммиака (см. рис. 1), а также максимумы активности АЭ. Можно видеть, что на момент максимального выхода воды (конец характерного участка 1) АЭ отсутствует. Она начинается и достигает максимальной активности в процессе закипания и испарения воды (характерный участок 2). Заметим, что оба эти процесса настолько энергоемкие, что становится заметным эндотермический эффект реакции, то есть температура в объеме вещества снижается, несмотря на то, что нагрев печи продолжается. Активность АЭ проходит через максимум и постепенно затухает по мере завершения процессов кипения и парообразования воды. Затем температура вещества вновь начинает медленно расти, поскольку эндотермический эффект реакции ослабевает. На этой стадии, согласно [1], преобладающим становится высвобождение углекислого газа. Процесс выделения CO_2 набирает силу и достигает максимума на границе участков 2–3. На участке 3 осуществляется выход половины аммиака и оставшейся половины углекислого газа, при

этом вновь нарастает активность АЭ. И, наконец, наступает 4-я стадия, когда вещество заканчивается. Процесс накопления событий АЭ также идет на убыль, хотя суммарное количество событий АЭ на этой стадии составляет существенную долю (20%). Когда весь ГКА разложился (реакция завершилась), скорость роста температуры возвращается к уровню, предшествующему началу реакции, при этом АЭ прекращается.

На рис. 4 для иллюстрации показаны три видеокадра в начале, в середине (бурное кипение) и в конце эксперимента, когда вещество полностью разложилось.



Рис. 4. Видеокадры с кристаллами ГКА в начале, в середине и в конце эксперимента

З а к л ю ч е н и е

Методом акустической эмиссии исследован процесс термического разложения гидрокарбоната аммония.

Проведен анализ выхода по стадиям продуктов реакции: воды, углекислого газа и аммиака. Показано, что процесс генерации АЭ также носит стадийный характер, проведено сопоставление этих стадий, а именно:

1. Первая стадия роста общего счета АЭ с переходом в насыщение соответствует выходу воды, ее закипанию и испарению. При этом наблюдается максимальное проявление эндотермического эффекта.

2. Вторая стадия роста общего счета АЭ соответствует выходу углекислого газа, максимум активности АЭ приходится на границу 3 и 4 участков, когда выделяется максимум аммиака и вторая половина углекислого газа.

3. Третья стадия накопления событий АЭ характеризуется затухающим процессом генерации АЭ по мере исчерпания термически разлагаемого вещества.

Поступило 23.07.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Авдин В.В., Кириллов В.В., Лымарь А.А. Термолиз карбоната и гидрокарбоната аммония как твердых охладителей продуктов сгорания топлива. – Вестник ЮУрГУ. Серия «Химия», 2011, вып. 5, № 12, с. 36-39.
2. Betteridge D., Joslin M.T., Lilley T. Acoustic emission of chemical reactions. – Analytical Chemistry, 1981, v. 53, № 7, pp. 1064-1073.

3. Brock I.H., Lee O., Soulsbury K.A., Wentzell P.D., Sibbald D.B., Wade A.P. Toolbox for chemical acoustic emission data acquisition and analysis. – Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 1992, № 12, pp. 271-290.
4. Wentzell P.D., Wade A.P. Chemical acoustic emission analysis in the frequency domain. – Analytical Chemistry, 1989, v. 61, pp. 2638-2642.
5. Сакиев С.Н., Расулов С.Н., Лақаев А., Чориев Ф.Х. Акустическая эмиссия при термическом разложении монокристаллов и порошков. – ДАН РТ, 2006, т.49, № 3, с. 239-243.

Ш.Ш.Азимов, В.Н.Петухов, Т.А.Ҳасанов, А.Н.Лақаев

ДИНАМИКАИ ЭМИССИЯИ АКУСТИКӢ ҲАНГОМИ РЕАКСИЯИ ТАҶЗИЯИ ГАРМИИ ГИДРОКАРБОНАТИ АММОНИЙ

Институту физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Натиҷаҳои тадқиқи раванди таҷзияи гармии гидрокарбонати аммоний бо усули эмиссияи акустикӣ оварда шудаанд. Тағйироти пайдарпай дар фаълнокии эмиссияи акустикӣ, ки ба марҳилаҳои баровардани маҳсулоти реаксия мувофиқанд, ба таври таҷрибавӣ муайян карда шуданд.

Калимаҳои калидӣ: эмиссияи акустикӣ, гидрокарбонати аммоний, реаксияи химиявии таҷзия, об, гази карбон, аммиак.

S.S.Azimov, V.N.Petukhov, T.A.Khasanov, A.N.Lakaev

DYNAMICS OF ACOUSTIC EMISSION DURING THE THERMAL DECOMPOSITION OF AMMONIUM HYDROGEN CARBONATE

S.U.Umarov's Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The results of the study of the process of thermal decomposition of ammonium hydrogen carbonate by the method of acoustic emission are presented. Successive changes in acoustic emission activity corresponding to the stages of the reaction products release are determined experimentally.

Key words: acoustic emission, ammonium hydrogen carbonate, decomposition chemical reaction, water, carbon dioxide, ammonia.

УДК 544.452:544.47:661.856

Член-корреспондент НАН Таджикистана А.Бадалов*,

З.И.Авезов, Ф.Дж.Саломов, Ф.М.Мирзоев

**КИНЕТИКА ПРОЦЕССА ДЕГИДРАТАЦИИ КРИСТАЛЛОГИДРАТА
УРАНИЛАЦЕТАТА****Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими,**Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности**НАН Таджикистана*

Методом тензиметрии изучена кинетика процесса дегидратации кристаллогидрата уранилацетата – $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$ в интервале температур 370-392 К. Предложен способ, позволяющий по изменению числа молекул газов в объеме системы при изотермических условиях, установить кинетические особенности ступеней процесса дегидратации образца.

Ключевые слова: уранилацетат, дегидратация, кинетика, тензиметрия.

В продолжение серии работ [1-3], посвящённых изучению термических и термодинамических свойств соединений f-элементов, в настоящей работе приведены результаты исследования особенности кинетики процесса дегидратации кристаллогидрата уранилацетата – $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$ при разных температурах. Согласно литературным данным, кристаллогидрат уранилацетата дегидратируется до температуры 373 К и разлагается при температурах свыше 500 К. Проведённые нами исследования методом тензиметрии [4,5] в равновесных условиях показали, что процесс парообразования объекта в изученном интервале температур (300-500 К) состоит из трёх стадий. Первые две стадии процесса парообразования, которые протекают в интервале температур 300-390 К, соответствуют процессу дегидратации $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$, третья – термическому разложению $UO_2(CH_3COO)_2$. Первая стадия процесса дегидратации кристаллогидрата протекает в интервале температуры 300-360 К по схеме $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O \rightarrow UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 1.5H_2O + 0.5H_2O_{(пар)}$ (1), а вторая стадия – протекает в интервале температур 360-390 К по схеме $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 1.5H_2O \rightarrow UO_2(CH_3COO)_2 + 1.5H_2O_{(пар)}$ (2).

Изучение кинетических особенностей процесса дегидратации $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$ проведено в интервале температур (370-392) К. Эксперименты проведены путём измерения изменения давления в системе при заданной температуре через короткие промежутки времени (от 5 и более минут) до перехода кривых парообразования в области замедления скорости процесса и приближения к равновесному состоянию. Графики изменения давления пара (Р, мм рт. ст.) во времени (τ, минут) в изотермических условиях (рис.1) показывают, что процесс изменения давления пара в системе во времени при температуре Т=379 К состоит из трех периодов: начальный (I) соответствует интервалу времени 0-60 мин., главный (II) интервал 60-150 мин. и конечный (III) интервалу 150-450 мин. (соответствен-

Адрес для корреспонденции: Бадалов Абдулхайр. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. ак. Радабодовых, 10, Таджикский технический университет. E-mail: badalovab@mail.ru

но на графике I, II и III) и далее постепенно приближаются к равновесному состоянию (прямая линия). По характеру графиков можно утверждать, что процесс парообразования наиболее интенсивно протекает в промежутке времени 220-250 мин.

Давление пара ступеней процесса дегидратации мало, и для дальнейших расчетов использовано уравнение идеального газа. В этой связи нами использован переход от давления пара (P) к числу молекул в единице объема ($n=P/kT$) [6-8]. В табл. 1 приведены кинетические параметры для T=379 К.

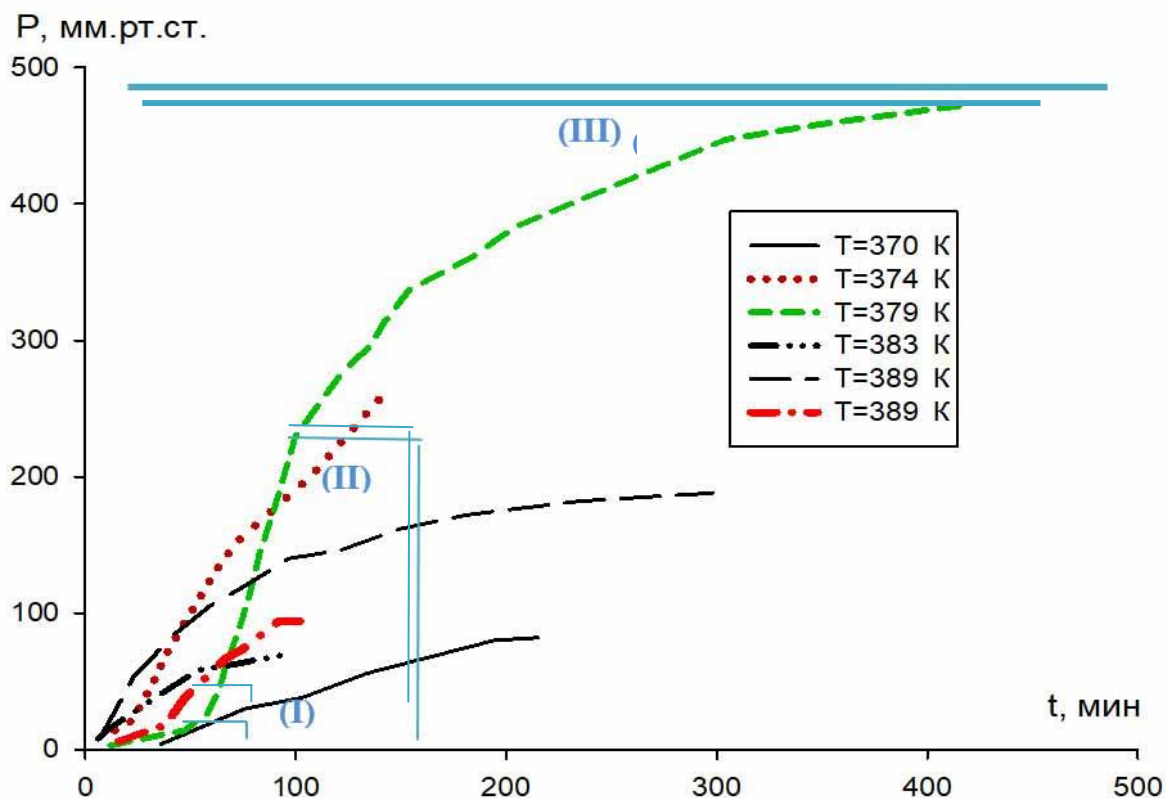


Рис. 1. Кривые кинетики процесса парообразования $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$.

Таблица 1

Экспериментальные данные и кинетические параметры процесса дегидратации при T=379 К

τ , мин	P, Па	n , 10^{23} м^{-3}	$\ln(n)$	$\tau \cdot 10^2$, с	τ , мин	P, Па	n , 10^{23} м^{-3}	$\ln(n)$	$\tau \cdot 10^2$, с
12	399.9	0.0764	52.69	7.2	122	36791	7.0343	57.21	73.2
47	1866	0.3568	54.23	28.2	136	39590	7.5695	57.29	81.6
58	3466	0.6626	54.85	34.8	142	41723	7.9773	57.34	85.2
64	5999	1.1469	55.40	38.4	154	44922	8.5890	57.41	92.4
67	8398	1.6057	55.74	40.2	184	48121	9.2007	57.48	110.4
73	11597	2.2173	56.06	43.8	204	51054	9.7614	57.54	122.4
78	15063	2.8800	56.32	46.8	304	59585	11.3925	57.69	182.4
83	19195	3.6700	56.56	49.8	348	61051	11.6729	57.72	208.8
89	22928	4.3837	56.74	53.4	416	62918	12.0297	57.75	249.6
100	30659	5.8619	57.03	60.0					

Обработка экспериментальных данных была проведена с помощью программного обеспечения Microcal Origin 6.0. На рис. 2, в качестве примера, приведена кривая зависимость числа молекул

паров воды в единице объема ($n(t)$) от времени для кристаллогидрата $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$ при $T=379$ К.

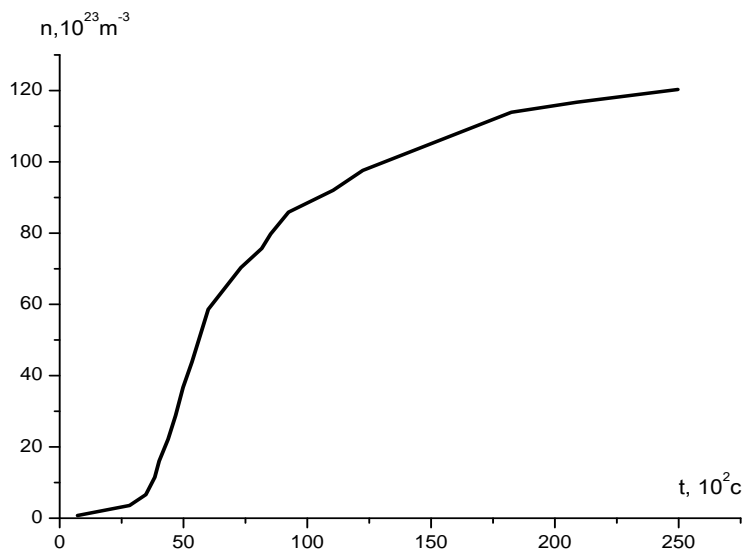


Рис. 2. Зависимость числа молекул паров воды в единице объема от времени для кристаллогидрата $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$ при $T=379$ К.

На дифференциальных кривых (dn/dt) при различных температурах (рис. 3) явно выделяются стадии процесса дегидратации кристаллогидрата.

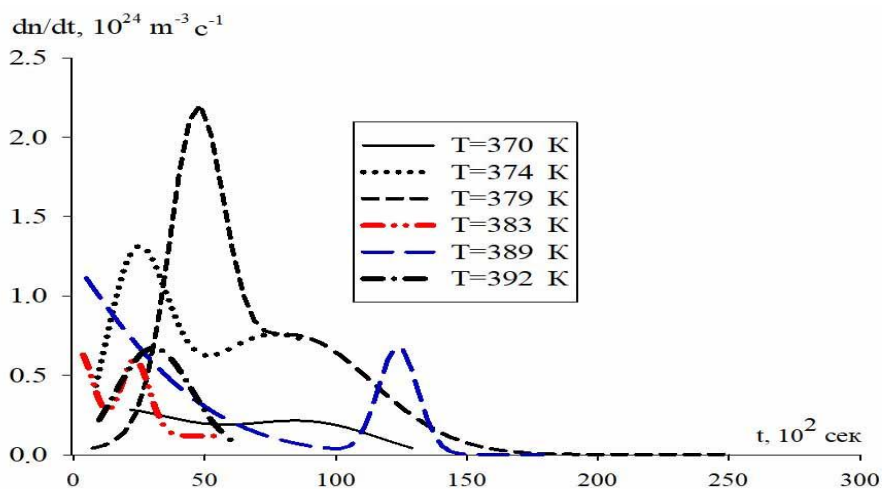


Рис. 3. Дифференциальные кривые дегидратация кристаллогидрата $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$ при различных температурах.

Для более детального изучения ступеней процесса дегидратации выделен дифференциальный кривой для температуры 379 К (рис. 4).

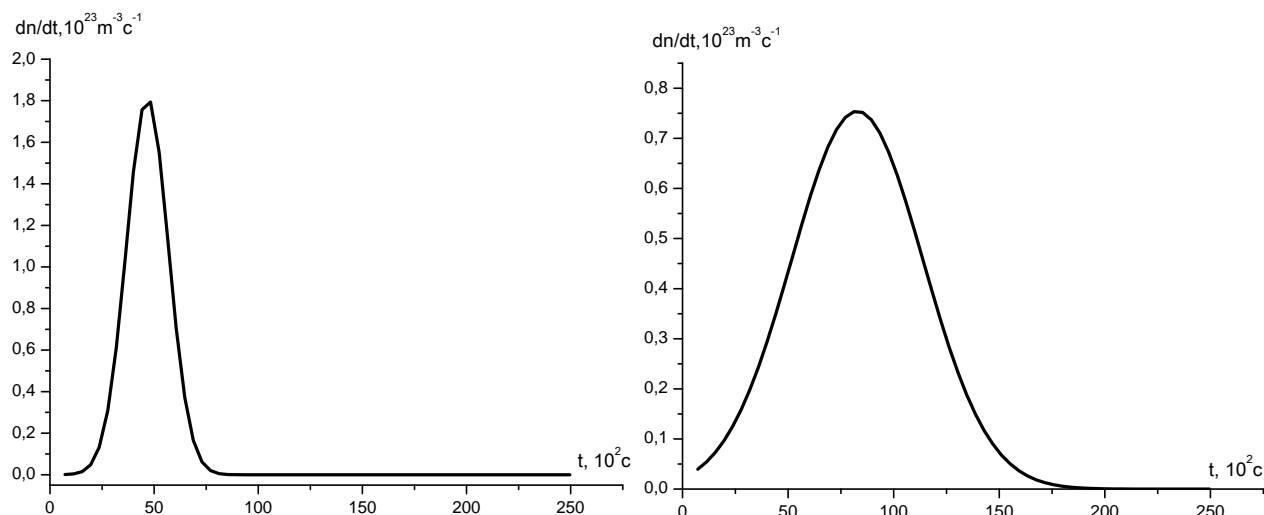


Рис. 4. Дифференциальные кривые второй (а) и третьей (б) ступеней процесса дегидратации кристаллогидрата при температуре 379 К.

Для обработки и анализа пиков, которые имеют почти гауссово распределение, мы в программе Microcal Origin 6.0 использовали командной строкой «Analysis»-«Fit-Multi»-«peaks»-«Gaussian». После выполнения этих команд программой выдаются количественные результаты, путём измерения площади под кривой (A), при полуширине ($W=(\Delta T_c-\Delta T_0)/2$), центре (C), сдвиге (ΔT_0) и высоте пика (h). В табл. 2 приведено значение этих параметров.

Таблица 2

Численные значения параметры полос

Пик	Площадь	Центр, с	Ширина, с	Высота, м ⁻³
1	449.73	46.651	18.919	18.828
2	558.96	77.816	58.212	7.6614

Анализ кривых кинетики процесса дегидратации кристаллогидрата $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$ показывает следующие особенности:

- при температуре $T=370$ К процесс парообразования из кристаллогидрата $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$ протекает без явного проявления главного периода;
- охлаждение и повторный нагрев образца при $T=374$ К показывают, что кривая кинетики имеет все характерные три периода процесса;
- при более высоких температурах (379 и 383 К) кривые кинетики показывают, что продолжительность времени начального периода и переход главного в конечный период сокращается;
- при высоких температурах (389 и 392 К) кривые кинетики состоят только из главного (II) и конечного периодов (III);
- процесс парообразования из кристаллогидрата $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$ с наибольшей интенсивностью протекает при $T=379$ К;
- переход кривых кинетики в области конечного периода, возможно, связан не с завершением самого процесса и переходом в диффузионную область, которая становится доминирующей.

Таким образом, показано, что примененный нами подход обработки экспериментальных данных по кинетике процесса парообразования путем определения числа молей пара во времени при

изотермических условиях, позволяет более наглядно выделять ступени процесса дегидратации кристаллогидрата уранилацетата.

Поступило 24.11.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Хамидов Ф.А., Мирсаидов У.М., Бадалов А. Термическое разложение нитратов тория(IV) и урана (VI). – ДАН РТ, 2014, т. 57, №4, с.304-308.
2. Khamidov F.A., Mirsaidov I.U., Badalov A. Systematic analysis of enthalpy of the actinide oxides formation. – XX International conference on chemical thermodynamics in Russia, Nizhni Novgorod, 2015, p. 84.
3. Мирсаидов У.М., Саломов Ф.Д., Азизов О.А., Бадалов А. Сравнительный анализ термических и термодинамических свойств соединений уранила. – Мат-лы. респ. науч.-практ. конф. «Современные проблемы физики конденсированного состояния и ядерной физики». – Душанбе: ТНУ, 2020, с.185.
4. Мирсаидов И.У., Саломов Ф.Д., Низомов З. и др. Процессы дегидратации и термического разложения кристаллогидрата уранилацетата. – Мат-лы. респ. науч.-практ. конф. “Проблемы современной физики в свете индустриализации Республики Таджикистан”. – Худжанд, 2020, с.33-35.
5. Мирсаидов У.М., Саломов Ф.Д., Азизов О.А., Бадалов А. Кинетические особенности процесса парообразования кристаллогидрата уранилацетата. – Мат-лы респуб. науч.-практ. конф. «Современные проблемы физики конденсированного состояния и ядерной физики». – Душанбе, ТНУ, 2020, с. 182-185.
6. Жарский И.М., Новиков Г.И. Физические методы исследования в неорганической химии. – М.: Высшая школа, 1988, 271 с.
7. Низомов З., Бадалов А., Мирзоева Ш.Б., Шамсуллоев М. Новая методика обработки результатов тензиметрических исследований процесса дегидратации кристаллогидратов. – Вестник Таджикского национального университета (научный журнал), серия естественных наук. – Душанбе, 2006, вып. 2(28), с.81-84.
8. Суворов А.В. Термодинамическая химия парообразного состояния. – Л.: Химия, 1970, 208 с.

А.Бадалов*, З.И.Авезов, Ф.Ч. Саломов, Ф.М.Мирзоев

КИНЕТИКА И ПРОЦЕССЫ ДЕГИДРАТАЦИИ КРИСТАЛЛОГИДРАТА УРАНИЛАЦЕТАТА

**Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ,
Агентии амнияти химиявӣ, бактериологӣ, радиационӣ ва ядроии АМИТ*

Бо методи тензометри кинетикаи протсессии дегидротатсияи кристаллогидрати уранилацетат – $UO_2(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$ дар интервали ҳарорати 370-392 К омӯхта шудааст. Усулҳои кинетикӣ пешниҳод карда шудааст, баъри муайян намудани ҳислатҳои кинетикӣ дараҷаи протсессии дегидротатсияи намуна аз

руи тағйирёбии шумораи молекулаҳо дар ҳаҷми система дар шароитҳои изотермӣ пешниҳод карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: уранилацетат, дегидрататсия, кинетика, тензиметрия.

A.Badalov*, Z.I.Avezov, F.J.Salomov, F.M.Mirzoev

KINETICS OF THE DEHYDRATION PROCESS URANYL ACETATE CRYSTAL HYDRATE

**M.S.Osimi Tajik Technical University,
Agency for Chemical, Biological, Radiation and Nuclear Safety
of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

The kinetics of the dehydration process by tensimetry uranyl acetate crystalline hydrate – $\text{UO}_2(\text{CH}_3\text{COO})_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ in the range temperatures 370-392 K was studied. A method has been proposed that allows the change in the number of gas molecules in the volume of the system under isothermal conditions to establish kinetic features of the steps of the sample dehydration process.

Key words: uranyl acetate, dehydration, kinetics, tensimetry.

УДК [553.08+536.722+536.421.5](575.3)

Д.О.Давлатов, Р.Дж.Акрамзода, М.М.Тагоев, Ш.Б.Назаров, А.П.Тагаев

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕАКЦИЙ, ПРОТЕКАЮЩИХ ПРИ СОВМЕСТНОМ СПЕКАНИИ БОР- И АЛЮМОСИЛИКАТНЫХ РУД ТАДЖИКИСТАНА С СУЛЬФАТОМ НАТРИЯ

*Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 05.01.2022 г.)*

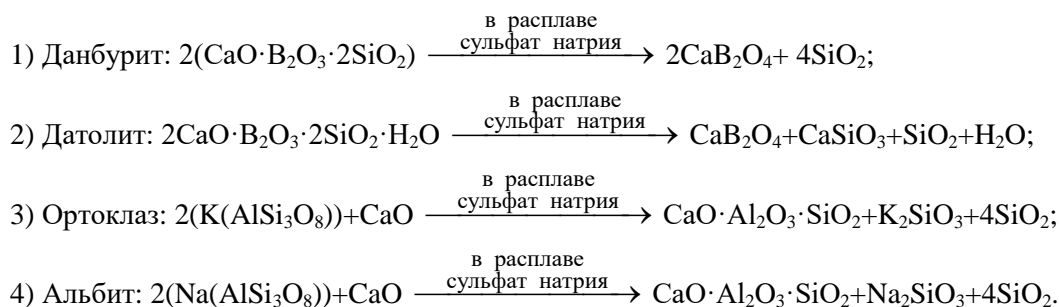
В статье приведены результаты термодинамических расчётов реакций, протекающих при совместном спекании нефелиновых сиенитов Турпи и боросиликатов месторождения Ак-Архар в присутствии сульфата натрия. Определены термодинамические характеристики минералов, входящих в состав бор- и алюмосиликатного сырья.

Ключевые слова: боросиликатная руда, нефелиновые сиениты, энтальпия, энтропия, энергия Гиббса, спекание.

Борсодержащие руды Ак-Архарского месторождения на Памире и нефелиновые сиениты месторождения Турпи в Раштском районе являются важным местным сырьевым ресурсом для Республики Таджикистан. Несмотря на пониженное содержание бора и алюминия, эти виды сырья содержат полезные компоненты и позволяют, в зависимости от выбора метода переработки, получать попутно с глинозёмом и борсодержащими соединениями также соду, поташ, цемент, серную кислоту, полевошпатовые материалы для фарфорового производства, железистые пигменты, удобрения, коагулянты для очистки воды, жидкое стекло и др. [1-7].

Основными рудообразующими минералами боросиликатных руд месторождения Ак-Архар являются: данбурит – $\text{CaO} \cdot \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$, датолит – $2\text{CaO} \cdot \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$, пироксены – $\text{CaO} \cdot \text{FeO} \cdot 2\text{SiO}_2$, гранат – $3\text{CaO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2$, кальцит – CaCO_3 , и в меньшей мере присутствует гидроборатит – $\text{CaO} \cdot \text{MgO} \cdot 3\text{B}_2\text{O}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, глинистые минералы (гидрослюда – $(\text{Na})\text{Al}_2(\text{AlSi}_3)\text{O}_{10}[(\text{OH})_2 \cdot \text{H}_2\text{O}]$), кварц – SiO_2 . Основные минералы нефелиновых сиенитов Турпи: нефелин ($(\text{Na},\text{K})_2\text{O} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$); альбит ($\text{Na}[\text{AlSi}_3\text{O}_8]$); микроклин ($\text{K}[\text{AlSi}_3\text{O}_8]$); биотит ($\text{K}(\text{Fe},\text{Mg})_3[\text{OH}]_2(\text{Al},\text{Fe})\text{Si}_3\text{O}_{10}$) и кальцит [3, 5, 6].

При разложении минералов, входящих в состав бор- и алюмосодержащих руд, возможно протекание следующих реакций:



Адрес для корреспонденции: Давлатов Дилшод Облокулович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: d-dilshod92@mail.ru

Основными функциями, характеризующими состояние системы, являются следующие термодинамические характеристики: энтальпия, энтропия и энергия Гиббса. Термодинамическое обоснование спекания и протекающих при этом реакций проведено с использованием следующих уравнений:

$$\Delta H_p^0 = \sum \Delta_f H_{\text{кон.продукт}}^0 - \sum \Delta_f H_{\text{исх. вещ-во}}^0,$$

$$\Delta S_p^0 = \sum \Delta S_{\text{кон.продукт}}^0 - \sum \Delta S_{\text{исх. вещ-во}}^0,$$

$$\Delta G_p^0 = \Delta H_p^0 - T \Delta S_p^0.$$

Значения термодинамических характеристик компонентов рассматриваемых систем приведены в табл.1.

Результаты расчёта термодинамических характеристик предполагаемых реакций (1)-(4) в исследуемых системах приведены в табл.2.

При расчетах использованы справочные значения стандартных термодинамических характеристик. Наиболее благоприятный интервал температур для совместного спекания исходных бор- и алюмосиликатных руд в присутствии сульфата натрия находится в пределах от 923 до 1223 К, так как при более низких температурах скорость реакции замедляется, а при более высоких – процесс протекает быстрее.

Таблица 1

Термодинамические характеристики веществ

№	Вещество	$\Delta_f H_{298}^0$, кДж/моль	S_{298}^0 , Дж/моль·град
1	Данбурит ($\text{CaO} \cdot \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$) или $\text{CaB}_2\text{Si}_2\text{O}_{8\text{кр}}$	-3882.75	154.8
2	Датолит ($2\text{CaO} \cdot \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2 \cdot \text{H}_2$) или $\text{CaBSiO}_4(\text{OH})_{\text{кр}}$	-2465.60	110.0
3	Пироксены ($\text{CaO} \cdot \text{FeO} \cdot 2\text{SiO}_2$) или $\text{CaFeSi}_2\text{O}_{6\text{кр}}$	-2849.30	166.5
4	Гранат ($3\text{CaO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2$) или $\text{Ca}_3\text{Fe}_2(\text{SiO}_4)_3\text{кр}$	-5806.56	341.0
5	Нефелин $\text{NaAlSi}_3\text{O}_8$	-2092.98	124.35
6	Альбит $\text{NaAlSi}_3\text{O}_8$	-3938.85	207.40
7	Микроклин KAlSi_3O_8	-3978.14	214.22
8	Ортоклаз $\text{K}(\text{AlSi}_3\text{O}_8)$	-3923.7	219.6
9	CaB_2O_4	-2031.08	105
10	CaSiO_3	-1635.2	80.75
11	$\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2$	-3295.3	144.7
12	Na_2SiO_3	-1563.5	113.8
13	K_2SiO_3	-1581.33	146.14
14	Na_2SO_4	-1389.5	149.5
15	CaO	-635.08	38
16	H_3BO_3 (р)	-1094.00	88.7
17	CO_2 газ	-393.50	213.6
18	H_2O ж	-285.84	70.0
14	SiO_2 кр	-905.40	43.5

Таблица 2

Термодинамические характеристики рассматриваемых реакций

№ реакции	ΔH_{923}^0 , кДж/моль	ΔS_{923}^0 , Дж/моль·град	ΔG_{923}^0 , кДж/моль
1	81.47	75	12.51
2	-2391.4	189.25	-2566.8
3	-1285.8	-12.36	-1274.1
4	31.6	-20.3	50.33

Как видно из данных табл.2, судя по значениям энергии Гиббса, при стандартных условиях термодинамическую вероятность самопроизвольного протекания имеют реакции (2) и (3). Вероятности протекания процессов (1) и (4) способствуют энтальпийный и энтропийный факторы. Для реакции (2) доминирующим является энтальпийный фактор при отрицательном влиянии энтропийного фактора.

Для реакции (1) – данбурита рассчитаны термодинамические характеристики:

$$\begin{aligned}\Delta H_p^0 &= [2 \cdot \Delta H^0(\text{CaB}_2\text{O}_4) + 4 \cdot \Delta H^0(\text{SiO}_2)] - (2 \cdot \Delta H^0(\text{CaO} \cdot \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2)) = \\ &= [2 \cdot (-2031,08) + 4 \cdot (-905,4)] - (2 \cdot (-3882,75)) = [(-4062,16) + (-3621,6)] - 7765,5 = \\ &= (-7683,76) - (-7765,56) = 81,74 \text{ кДж/моль.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta S_p^0 &= [2 \cdot \Delta S^0(\text{CaB}_2\text{O}_4) + 4 \cdot \Delta S^0(\text{SiO}_2)] - 2 \cdot \Delta S^0(\text{CaO} \cdot \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2) = [(2 \cdot 105 + 4 \cdot 43,5) - 2 \cdot 154,8] = \\ &= (210 + 174) - 309,6 = 384 - 309,6 = 75 \text{ Дж/моль·град}\end{aligned}$$

$$\Delta G_{1123 \text{ К}}^0 = \Delta H_p^0 - T \Delta S_p^0 = 81,74 - 1223 \cdot 75 = 81,74 - 91725 = -91643,26 \text{ Дж/моль} = 91,643 \text{ кДж/моль}$$

Значение энергии Гиббса процесса (1) указывает на термодинамическую невозможность протекания его при стандартных условиях. Повышение температуры способствует протеканию этого процесса, но для (4) в большей степени, в силу большего значения энтропийного фактора.

В табл.3 приведены результаты влияния температуры на значения энергии Гиббса рассматриваемых процессов. Как видно из табл.3 и рис., повышение температуры способствует протеканию всех рассматриваемых процессов, за исключением реакции (4). Значение этой температуры определено по формуле: $\Delta G_p^0 = \Delta H_p^0 - T \Delta S_p^0$.

На основе изменения энтальпии и энтропии реакций были рассчитаны изменения энергии Гиббса в интервале температур 923-1223 К (табл.3) и построен график зависимости ΔG от температуры (рис.).

Таблица 3

Значения энергии Гиббса (ΔG^0 , кДж/моль) при различных температурах

№ реакции	ΔG_{923}^0	ΔG_{1023}^0	ΔG_{1123}^0	ΔG_{1173}^0	ΔG_{1223}^0
1	12.51	5.015	-2.47	-6.23	-9.98
2	-2566.8	-2584.9	-2603.9	-2613.3	-2622.7
3	-1274.1	-1273.16	-1271.92	-1271.32	-1270.69
4	50.33	52.36	54.39	55.31	56.32

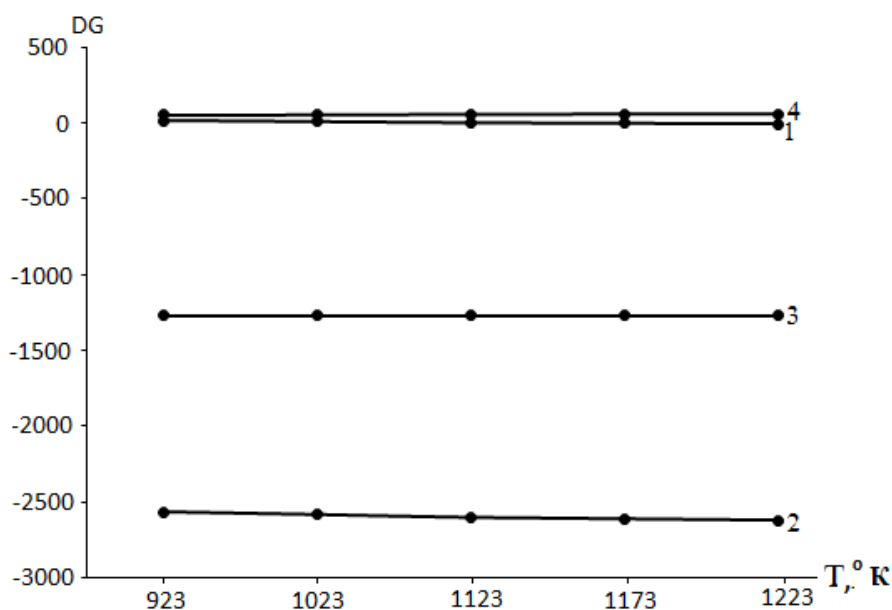


Рис. Зависимости ΔG от температуры разложения минералов бор- и алюмосодержащей руды: 1 – данбурит, 2 – датолит, 3 – ортоклаз, 4 – альбит.

Поступило 12.01.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирсаидов У.М., Сафиев Х. Комплексная переработка низкокачественного алюминийсодержащего сырья. – Душанбе: Дониш, 1998, 238 с.
2. Мирзоев Б., Азизов Б.С., Сафиев Х. Термодинамический анализ процесса хлорирования минералов, входящих в состав нефелиновых сиенитов месторождения Турпи. – Изв. АН ТаджССР. Отд. физ.-мат., хим. и геол. наук, 1992, №1, с.64-66.
3. Мирсаидов У.М., Курбонов А.С., Маматов Э.Д. Кислотное разложение боросиликатных руд. – Душанбе: Дониш, 2015, 90 с.
4. Курбонов А.С., Маматов Э.Д., Машаллах Сулаймони Б.А., Мирсаидов У.М. Разложение исходного данбурита азотной кислотой. – ДАН РТ, 2010, т.52, №12, с.865-869.

Д.О.Давлатов, Р.Дж.Акрамзода, М.М.Тағоев, Ш.Б.Назаров, А.П.Тағаев

ТАҲЛИЛИ ТЕРМОДИНАМИКИИ РЕАКСИЯҲОИ ҲАНГОМИ ЯКЧОЯ ГУДОХТАНИ МАЪДАНҲОИ БОР- ВА АЛЮМОСИЛИКАТҲОИ КОНҲОИ ТОҶИКИСТОН БО СУЛФАТИ НАТРИЙ

Институти кимиё ба номи В.И.Никитин Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола натиҷаҳои ҳисобҳои термодинамикии ҳангоми коркарди якҷояи нефелинҳои сиенитии Турпи ва боросиликатҳои кони Ак-Архар дар иштироки сулфати натрий оварда шудааст.

Тавсифи термодинамикии маъданҳое, ки дорои ашӯи хоми бор- ва алюмосиликатӣ мебошанд, муайян карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: маъдани боросиликатӣ, нефелинҳои сиенитӣ, энталпия, энтропия, энергияи Гиббс, ғудохтан.

D.O.Davlatov, R.J.Akramzoda, M.M.Tagoev, Sh.B.Nazarov, A.P.Tagayev

**THERMODYNAMIC ANALYSIS OF REACTIONS OCCURRING DURING THE
JOINT SINTERING OF BORON AND ALUMINOSILICATE ORES OF
TAJIKISTAN WITH SODIUM SULFATE**

VI.Nikitin Institute of Chemistry of National academy of sciences of Tajikistan

In this article the results of thermodynamic calculations of the reactions occurring during the joint sintering of Turpi nepheline syenites and borosilicates of the Ak-Arkhar deposit in the presence of sodium sulfate are presented. The thermodynamic characteristics of minerals that contain boron and aluminosilicate raw materials have been determined.

Key words: borosilicate ore, nepheline syenites, enthalpy, entropy, Gibbs energy, sintering.

УДК 546.273

К.О.Бобоев

**КИНЕТИКА ПРОЦЕССА ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ УРАНСОДЕРЖАЩЕЙ РУДЫ
МЕСТОРОЖДЕНИЯ «ОКТЯБРЬСКИЙ» ТАДЖИКИСТАНА***Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности**НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 24.01.2022 г.)*

В статье приведены результаты изучения кинетики процесса выщелачивания урансодержащей руды месторождения «Октябрьский» Республики Таджикистан. Определены оптимальные параметры выщелачивания урансодержащей руды. Вычислена величина кажущейся энергии активации, равная 15.37 кДж/моль. Проведенные исследования раскрывают механизм сернокислотного разложения урановых руд месторождения «Октябрьский».

Ключевые слова: уран, руда, месторождение, «Октябрьский», выщелачивание, серная кислота, кинетика, энергия активации, технологическая схема.

В решении проблем минерального сырья особая роль принадлежит химической технологии. Поиск путей переработки местного сырья для Таджикистана является актуальной задачей. Пути переработки местного сырья, в том числе урансодержащих руд, отражены и обсуждены в работах [1].

От качественной переработки урансодержащих руд зависит решение ряда задач [2].

В Таджикистане имеется ряд месторождений урансодержащих руд [3]. Ранее в работе [4] была изучена переработка урановых руд методами кислотного и карбонатного выщелачивания. Найденны оптимальные параметры извлечения концентратов закись – окись урана U_3O_8 . Изучена кинетика процесса извлечения урана при различных температурах. Определены значения энергии активации процессов разложения урановых руд. Величины энергии активации свидетельствуют о протекании процесса в диффузионной области [5].

Разработаны принципиальные технологические схемы переработки урановых руд Таджикистана [5].

Изучены получения U_3O_8 из отходов урановой промышленности. На примере отходов «Карта 1-9» г. Бустон Таджикистана показана перспективность вторичной переработки отходов урана. Предложена технологическая схема переработки отходов урановой промышленности [6]. Также изучена кинетика сернокислотного разложения урановых руд месторождения «Северный Таджикистан», значения энергии активации процесса разложения которых свидетельствуют о протекании процесса в кинетической области [7].

Адрес для корреспонденции: Бобоев Комрон Одилевич. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАНТ.
E-mail: boboyev.komron@bk.ru

В настоящей работе изучена кинетика разложения урансодержащих руд месторождения «Октябрьский» Таджикистана и разработана принципиальная технологическая схема переработки этих руд.

Урановое месторождение «Октябрьский» Таджикистана представляет собой традиционную руду, характерную для Республики Таджикистан [7].

Минералогический состав руды определен рентгенофазовым анализом на приборе ДРОН-3 (модернизированный) с цифровой обработкой на медном аноде (35 кВ и 20 мА) и никелевым фильтром. В руде присутствуют такие минералы как пирит, уранинит, альбит, сфен, каолинит, уранофан, кварц.

Анализ минералогического состава руд месторождения «Октябрьский» показал, что уран в рудах находится в виде уранинита и уранофана. Так как уран в них содержится в виде четырёх и шестивалентного, руды могут подвергаться как кислотному, так и карбонатному выщелачиванию. Поскольку руда месторождения «Октябрьский» в значительном количестве содержит кварц, поэтому кислотный способ выщелачивания даёт более высокую степень извлечения урана по сравнению с карбонатным способом. В этом способе относительно дешёвым растворителем является серная кислота.

В табл. 1 показана степень извлечения урана в зависимости от концентрации серной кислоты при температуре 60°C, продолжительности процесса 1 час и объёме 1 мл.

Таблица 1

Зависимость степени извлечения урана от концентрации серной кислоты

Концентрация H ₂ SO ₄ , %	10	20	30	40	50
Соотношение Т: Ж	1:2	1:2	1:2	1:2	1:2
Степень извлечения урана, %	33.2	50.1	63.1	65.3	66.6

Результаты изучения процесса выщелачивания урана в сернокислотной среде показали, что растворимость урана достигает оптимального значения при концентрации серной кислоты 30%. Дальнейшее увеличение концентрации серной кислоты при выщелачивании не оказывает значительного влияния на процесс растворения. Наивысшая степень извлечения урана (66.6%) из руды достигается за 1 час в сернокислом растворе с добавкой азотной кислоты.

В табл. 2 показана степень извлечение урана в зависимости от температуры при концентрации серной кислоты 30% и продолжительности процесса 1 час.

Как видно из табл. 2, при увеличении температуры степень извлечения урана также увеличивается. В диапазоне от 60 до 80°C степень извлечения достигает от 63 до 69% и при дальнейшем увеличении температуры остается неизменной.

Также была изучена зависимость степени извлечения урана от продолжительности процесса. После 1.5 часов выщелачивания степень извлечение урана достигает до 75.5% и далее не меняется.

Таблица 2

Степень извлечения урана в зависимости от температуры при концентрации серной кислоты 30%, продолжительности процесса 1 час и соотношении Т:Ж 1:2

Температура, °С	30	40	50	60	70	80	90
Степень извлечения урана, %	25.4	45.3	56.7	63.1	65.3	68.8	69.1

Таблица 3

Степень извлечения урана в зависимости от продолжительности процесса при температуре 80°С и концентрации серной кислоты 30%

Продолжительность процесса, ч	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
Степень извлечения урана, %	60.0	68.8	75.7	75.7	75.7

Кинетика процесса разложения урансодержащих руд месторождения «Октябрьское» при оптимальной концентрации серной кислоты 30% в интервале температур 303-353 К исследовалась в изотермических условиях.

Таблица 4

Кинетика разложения урана из руды при концентрации серной кислоты 30%

Температура, °С	Продолжительность процесса, ч				
	0.5	1	1.5	2	2.5
30	18.6	25.4	44.5	44.5	44.5
40	25.7	45.3	55.7	55.7	55.7
50	37.6	56.7	63.1	63.1	63.1
60	44.5	63.1	65.3	65.3	65.3
70	55.7	65.3	66.8	66.8	66.8
80	60.0	68.8	75.7	75.7	75.7

Как видно из рис.1, с увеличением температуры от 303 К до 353 К и времени степень извлечение урана в раствор возрастает.

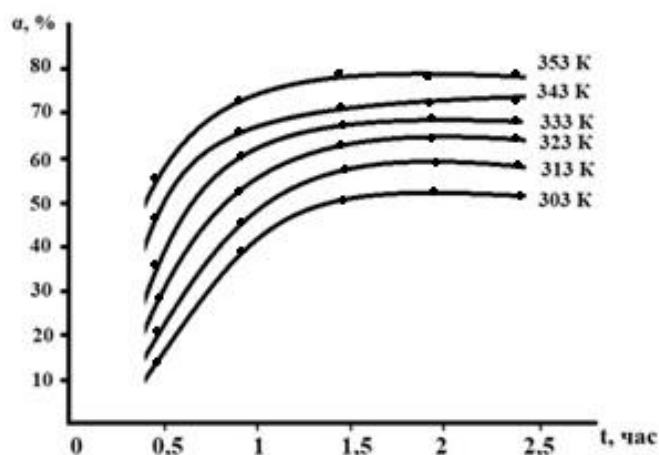


Рис. 1. Кинетические кривые выщелачивания урансодержащих руд месторождения «Октябрьское» при соотношении Т:Ж 1:2.

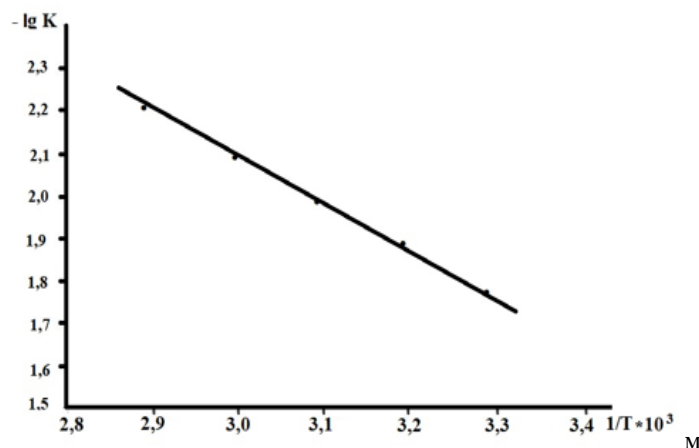


Рис. 2. Зависимость $\lg K$ от обратной абсолютной температуры при серноокислотном разложении руды месторождения «Октябрьский».

Как видно из рис. 2, точки удовлетворительно укладываются на прямую линию, по наклону которой вычислена величина кажущейся энергии активации, равная 15,37 кДж/моль. Численное значение энергии активации и зависимость скорости реакции от температуры и продолжительности процесса выщелачивания свидетельствуют о его протекании в диффузионной области.

Проведенные исследования раскрывают механизм серноокислотного разложения урановых руд месторождения «Октябрьский». Значения кинетических характеристик дают возможность выбора рационального режима осуществления процесса серноокислотного разложения руды месторождения «Октябрьский». Выявлены степени перехода урана в раствор в зависимости от концентрации серной кислоты, температуры и продолжительности процесса. Определены оптимальные параметры выщелачивания: концентрация серной кислоты 30% при соотношении твердого к жидкому 1:2, температура процесса 80°C и продолжительность процесса 90 минут, при которых степень извлечения урана достигает 75,7%.

Составлены кинетические кривые процесса разложения урансодержащих руд месторождения «Октябрьский» при оптимальной концентрации серной кислоты 30% в интервале температур 303-353 К в изотермических условиях. Вычислена величина кажущейся энергии активации, равная 15,37 кДж/моль. Численное значение энергии активации и зависимость скорости реакции от температуры и продолжительности процесса выщелачивания свидетельствуют о его протекании в диффузионной области.

Поступило 24.01.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шумилин М.В., Алискеров В.А., Денисов М.Н., Заверткин В.Л. Бизнес в ресурсодобывающих отраслях: справочник. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2001, 268 с.
2. Кусевич В.И., Алискеров В.А., Григорьева М.В., Донилянц С.А., Заверткин В.Л. К вопросу глубокой и комплексной переработки минерального сырья. – Минеральные ресурсы России. Экономика и управление, 2013, № 2, с.55-59.

3. Быховский Л.З., Воропаев В.И. Комплексная оценка месторождений – основа рационального использования минерально-сырьевых ресурсов. – Минеральные ресурсы России. Экономика и управление, 2004, № 2, с.16-21.
4. Хакимов Н., Назаров Х.М., Мирсаидов И.У. Физико-химические и технологические основы получения урановых концентратов из отходов гидрометаллургических заводов и технических вод. – Душанбе: Дониш, 2012, 120 с.
5. Разыков З.А., Гусаков Э.Г., Марущенко А.А. Урановые месторождения Таджикистана. – Худжанд: ООО «Хуросон», 2001, 212 с.
6. Ходжаев С.К., Назаров Х.М., Бахромов С.М., Мирсаидов У.М. Кинетика выщелачивания урансодержащих руд месторождения «Центральный Таджикистан». – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2018, т.61, № 4, с.388-391.
7. Мирсаидов У.М., Хакимов Н., Назаров Х.М., Камалов Д.Д. Пути повышения извлечения урана из Гафуровского и Чкаловского хвостохранилищ на стадии выщелачивания. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2005, т.48, №7, с.103-109.

К.О.Бобоев

КИНЕТИКА И РАВАНДИ ИШҚОРОНИИ МАЪДАНИ УРАНДОРИ КОНИ «ОКТЯБРСКИЙ»-И ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН

Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии АМИТ

Дар мақола натиҷаҳои омӯзиши кинетикаи раванди ишқоронии маъдани урандори кони «Октябрский»-и Ҷумҳурии Тоҷикистон, оварда шудааст. Параметрҳои оптималии ишқоронии маъдани урандор муайян карда шудаанд. Энергияи фаълосозии раванд ҳисоб карда шудааст, ки ба 15,37 кҶ/мол баробар аст. Тадқиқотҳои гузаронидашуда механизми ишқоронии маъданҳои урани кони Октябрский бо кислотаи сульфатро ошкор мекунад.

Калимаҳои калидӣ: уран, маъдан, кон, «Октябрский», ишқоронӣ, кислотаи сульфат, кинетика, энергияи фаългардонӣ, схемаи технологӣ.

К.О. Boboev

KINETICS OF THE LEACHING PROCESS OF URANIUM-CONTAINING ORE OF "OKTYABRSKIY" DEPOSIT OF TAJIKISTAN

Chemical, biological, radiological and nuclear safety and security agency of NAS Tajikistan

In this article the results of studying the kinetics of the leaching process of uranium-containing ore from the Oktyabrskiy deposit of the Republic of Tajikistan are presents. The optimal parameters for leaching uranium ore have been determined. The apparent activation energy is calculated, which is 15,37 kJ/mol. The conducted studies reveal the mechanism of sulfuric acid decomposition of uranium ores of the Oktyabrskiy deposit.

Key words: uranium, ore, deposit, "Oktyabrskiy", leaching, sulfuric acid, kinetics, activation energy, technological scheme.

УДК 625.85

Н.С.Арабзода

**ВЛИЯНИЕ ДОБАВКИ ИЗ МКЦ, РП И ГС+МЭА НА
ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ПОКАЗАТЕЛЬ СТЕКАНИЯ ЩМА***Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими**(Представлено академиком НАН Таджикистана Д.Х.Халиковым 16.12.2021 г.)*

В работе приведены результаты исследования влияния добавки из микрокристаллической целлюлозы из отходов хлопковой промышленности и порошка резины из изношенных шин, а также адгезионно-пластифицирующей добавки госсиполовой смолы с моноэтаноламином из отходов масложиркомбината и аммиачного производства на физико-механические свойства щебеночно-мастичного асфальтового бетона (ЩМА). Показано, что названные добавки значительно улучшают физико-механические свойства ЩМА для устройства покрытия дорог в условиях жаркого климата, характерного для Республики Таджикистан.

Ключевые слова: *щебеночно-мастичный асфальтобетон, смола, моноэтаноламин, микрокристаллическая целлюлоза, резиновый порошок, добавка, свойства.*

В республике Таджикистан за последние годы при устройстве покрытий автомобильных дорог в городских условиях частично используется щебеночно-мастичный асфальтобетон. Принципы проектирования составов смесей и технология устройства слоев из них апробированы в процессе опытно-производственных работ. Особенно можно отметить, что в 2014 году с участием автора был построен опытный участок с покрытием из ЩМА-15 на повороте к г. Гиссар длиной 1.6 км. При контроле качества покрытий после 6 лет эксплуатации оно имеет высокие показатели шероховатости, сцепления с колесом автомобиля, на нем не образовались трещины, наплывы, волны, что свидетельствует о качестве материала и обусловлено его специфическими транспортно-эксплуатационными показателями, включая комфортабельные и безопасные ездовые свойства, сопротивляемость внешним воздействиям.

С учётом положительных эксплуатационных преимуществ покрытий из ЩМА [1-4] в сравнении с традиционными асфальтобетонами, Министерством транспорта Республики Таджикистан принято решение о расширенном применении щебеночно-мастичного асфальтобетона на городских и областных дорогах республики при условии обязательного научно-технического сопровождения строительства. За истекший период во всём мире накоплен богатый опыт применения щебеночно-мастичного асфальтобетона при устройстве верхних слоев дорожных покрытий с шероховатой поверхностью. Исходя из этого, разработка оптимальных составов щебеночно-мастичных асфальтовых бетонов с добавкой различного характера действия с целью применения его в различных условиях эксплуатации является актуальной.

Адрес для корреспонденции: Арабзода Нурали Сайвали. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. акад. Раджабовых, 10, Таджикский технический университет. E-mail: srivakn@mail.ru

Научные опыты и практика применения ЩМА показывают, что они характеризуются повышенным содержанием щебня и вяжущего битума для удержания горячего битума на поверхности зерен щебня во время транспортирования и укладки в их состав вводят специальные стабилизирующие добавки. Вид и свойства стабилизирующих добавок имеют большое значение для обеспечения эксплуатационных качеств смеси.

В качестве стабилизирующих добавок для смесей ЩМА используются волокна целлюлозы. Целлюлозы являются природными полимерами и на их основе находят широкое применение добавки: VIATOR, TOPCEL, ГАСЦЕЛ, МКЦ [2-4], и др. МКЦ, в отличие от других добавок, получают на основе переработки отходов местного хлопка-сырца.

По мнению [5], применение различных стабилизирующих добавок в ЩМАС с постоянным составом не приводит к значительным изменениям физико-механических свойств материала, кроме показателя стекания. По их мнению, армирующие и адгезионно-пластифицирующие добавки в комплексе со стабилизирующими добавками создают в щебеночно-мастичной асфальтобетонной смеси (ЩМАС) однородную структуру. В качестве порошковой минеральной и полимерной добавки в работах авторов [5,6] был использован порошок воллостонита и резиновый порошок, где воллостонит в составе смесей из щебеночно-мастичных асфальтовых бетонов играет роль микроарматуры, а порошок резины создает развитую систему центров эластичности, способствующей улучшению структурно-механических свойств, при этом повышаются прочностные характеристики дорожных покрытий.

С этой целью на основе существующих опытов [1-6] подбора составов и применения ЩМА, нами исследован состав смесей ЩМА с добавками различных функциональных назначений на основе местного сырья и отходов промышленности, а также вторичного сырья промышленности.

Исследование и анализ влияния комплексной добавки на основе МКЦ+РП и ГС+МЭА в лабораторных условиях на физико-механические свойства ЩМА складывались из определения стандартных характеристик показателей прочности и сдвигоустойчивости образцов, изготовленных по методике ГОСТ 31015-2002 и ГОСТ 12801-98. Для этого была приготовлена и испытана серия составов смеси с разным количеством добавок. Количество добавок было выбрано, исходя из рекомендаций работ [2-6].

Научные опыты и практика применения ЩМА в дорожном строительстве показывают, что смеси из ЩМА при производстве должны быть устойчивыми к расслаиванию в процессе транспортировки и загрузки - выгрузки. Устойчивость к расслаиванию определялась по показателю стекания вяжущего согласно ГОСТ 31015-2002. Результаты испытаний приведены в табл. 1.

Таблица 1

Показатель стекания битума

Наименование показателя	ГОСТ 31015-2002	ТОРСЕЛ	МКЦ	РП	МКЦ+РП	МКЦ+РП+(ГС+МЭА)
Содержание волокна в смеси, %	0.2-0.5	0.30	0.45	0.52	0.62	0.45
Содержание битума в смеси, %	6.5-7.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5
Показатель стекания вяжущего, % по массе	не более 0.20	0.09	0.08	0.25	0.17	0.10

Анализ данных табл. 1 показывает, что ЩМАС с добавкой порошка из резины имеет более высокий показатель стекания, исходя из регламентов стандарта по ЩМАС, смесь имеет недостаточную устойчивость к расслаиванию в процессе транспортирования и загрузки-выгрузки, определяемую по показателю стекания вяжущего в соответствии с ГОСТ 31015-2002. Из данных, приведенных в табл. 1, следует, что после введения в ЩМАС дополнительно к резиновому порошку волокнистой стабилизирующей добавки из МКЦ показатель стекания соответствует требованиям ГОСТ 31015-2002. По мнению авторов [5,6], в практике иногда стабилизирующие добавки в некотором смысле не обеспечивают однородность ЩМАС, оцениваемую по коэффициенту вариации показателя предела прочности при сжатии при температуре 50°C и по значениям средней плотности становится низкой, что снижает длительную водостойкость и долговечность покрытия из ЩМА. С этой целью в практике в смеси асфальтовых бетонов вводят адгезионно-пластифицирующую добавку (в нашем случае из госсиполовой смолы и моноэтаноламина в комплексе ГС+МЭА), получаемую из местных отходов промышленности, что является эффективным [8].

На основе работ авторов [4-9] нами были разработаны составы смесей, технология приготовления и применения добавки в составе исследуемых смесей ЩМА.

Смеси из ЩМА-10 и ЩМА-15 изготовлены и испытаны по стандартным методикам согласно ГОСТ 12801-98 непрерывно гранулометрического состава, подобранного в соответствии с ГОСТ 31015-2002.

Была изготовлена серия образцов смесей ЩМА со следующими составами добавок:

- ЩМАС-10: №1-МКЦ; №2-МКЦ+РП; №3-МКЦ+РП+ГС+МЭА;
- ЩМАС-15: №1-МКЦ; №2-МКЦ+РП; №3-МКЦ+РП+ГС+МЭА.

Минеральный состав ЩМА:

для ЩМАС-10:

- щебень из гранита фракции 5-10 мм – 65%;
- отсев дробленого гранита 0-5 мм – 21%;
- известковый минеральный порошок – 14%;
- битум – 6% от массы минеральной части асфальтобетона;

для ЩМАС-15:

- щебень из гранита фракции 10-15 мм – 41%;
- гранит фракции 5-10 мм – 30%;

- отсев гранита 0-5 мм – 15%;
- известковый минеральный порошок – 14%;
- битум – 5.5% от массы минеральной части;
- добавка из ГС+МЭА с шагом 1% путем замены битума.

- порошок резины совместно со стабилизирующей добавкой из МКЦ – 0.43% принимали сверх массы минеральной части исследуемых смесей ЩМА, где соотношение МКЦ/РП составляло 1:2.

Для обеспечения постоянного гранулометрического состава исследуемых смесей минеральные материалы предварительно просеивались, а затем для каждой партии смеси из этих отдельных фракций составлялись минеральные части смеси.

Для получения смесей ЩМАС №1 минеральные материалы загружали вручную в смеситель и перемешивали, далее загружали минеральный порошок и стабилизирующую добавку из МКЦ и перемешивали.

Для получения смесей ЩМАС №2 минеральные материалы загружали вручную в смеситель и перемешивали, далее загружали минеральный порошок и добавки из МКЦ и резинового порошка и перемешивали.

Для получения смесей ЩМАС №3 минеральные материалы загружали вручную в смеситель и перемешивали, далее загружали минеральный порошок и стабилизирующую добавку из МКЦ вместе с РП и перемешивали. Для повышения однородности смеси помещали в разогретый до 155°C битум. Предварительно было добавлено требуемое количество адгезионной добавки ГС+МЭМ [8-9]. Результаты исследований приведены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

Показатели физико-механических свойств ЩМАС-10

№ п/п	Наименование показателей	Значения показателей			
		для ЩМАС №1	для ЩМАС №2	для ЩМАС №3	по ГОСТ 31015-2002
1	Средняя плотность, г/см ³	2.41	2.38	2.41	-
2	Водонасыщение, в % по объему	1.77	1.84	1.70	1.0-4.0
3	Пористость минеральной части, %	16.65	16.58	16.28	15-19
4	Остаточная пористость, %	2.20	2.60	2.15	1.5-4.5
5	Предел прочности при сжатии, МПа при температуре 20°C	4.12	4.32	4.60	не менее 2.7
	при температуре 50°C	1.49	1.65	1.81	не менее 0.75
6	Коэффициент теплоустойчивости (R_{50}/R_{20})	0.36	0.38	0.39	не менее 0.27
7	Коэффициент внутреннего трения	0.94	0.96	0.98	не менее 0.93
8	Сцепление при сдвиге, МПа	0.25	0.27	0.29	не менее 0.18
9	Однородность смеси: коэффициент вариации предела прочности при сжатии при температуре 50°C, МПа	0.15	0.15	0.14	не более 0.16
10	Расхождение по значениям средней плотности	0.028	0.032	0.02	не более 0.03 г/см ²

Таблица 3

Показатели физико-механических свойств ЩМАС-15

№ п/п	Наименование показателей	Значения показателей			
		для ЩМАС №1	для ЩМАС №2	для ЩМАС №3	по ГОСТ 31015-2002
1	Средняя плотность, г/см ³	2.40	2.39	2.42	-
2	Водонасыщение, в % по объему	2.17	2.14	2.07	1.0-4.0
3	Пористость минеральной части, %	16.55	16.68	16.40	15-19
4	Остаточная пористость, %	2.10	2.30	2.01	1.5-4.5
5	Предел прочности при сжатии, МПа при температуре 20°C	4.20	4.35	4.50	не менее 2.7
	при температуре 50°C	1.48	1.63	1.78	не менее 0.75
6	Коэффициент теплоустойчивости (R_{50}/R_{20})	0.35	0.38	0.40	не более 0.3
7	Коэффициент внутреннего трения	0.94	0.97	0.99	не менее 0.93
8	Сцепление при сдвиге, МПа	0.23	0.26	0.28	не менее 0.18
9	Однородность смеси: коэффициент вариации предела прочности при сжатии при температуре 50°C, МПа	0.15	0.17	0.14	не более 0.16
10	Расхождение по значениям средней плотности	0.03	0.04	0.02	не более 0.03 г/см ²

При сравнении показателей свойств исследуемых смесей видно, что смеси с добавками в комплексе имеют лучшие физико-механические характеристики. Так, например, предел прочности при сжатии образцов с добавкой МКЦ+РП при температуре 20°C возрастает на 11% в сравнении с добавкой только МКЦ. Кроме этого, из табл. 2 и 3 видно, что образцы с добавками в комплексе МКЦ+РП и ГС+МЭА имеют лучшие характеристики при температуре 50°C. Однако в практике предел прочности при одноосном сжатии битумосодержащих материалов в жарких условиях эксплуатации не отражает реальных условий их работы, что зачастую приводит к образованию пластических деформаций. Исходя из вышеизложенного, нами был дополнительно определен показатель сдвиговых характеристик исследуемых образцов ЩМАС.

Из данных табл. 1 и 2 следует, что сцепление при сдвиге у образцов щебеночно-мастичного асфальтобетона с комплексной добавкой МКЦ+РП и ГС+МЭА оказалось на 17% выше, чем у образцов ЩМА с добавкой из микрокристаллической целлюлозы. Коэффициент внутреннего трения образцов ЩМА с добавкой МКЦ+РП и ГС+МЭА на 7% выше, чем у образцов ЩМА без добавки из ГС+МЭА.

В ы в о д ы

1. Использование резинового порошка, получаемого при переработке изношенных автомобильных шин, в качестве структурирующей и ГС+ МЭА из отходов переработки местного сырья при производстве масла и аммиака в качестве адгезионно-пластифицирующей добавки для производства щебеночно-мастичного асфальтобетона позволяет получить асфальтобетон с высокими физико-механическими характеристиками.

2. Данные, приведённые в табл. 2 и 3, показывают, что коэффициенты теплоустойчивости (R_{50}/R_{20}) образцов исследуемых смесей ЩМА с добавками имеют более высокие значения, чем у исследуемых образцов без добавки. Особенно здесь можно отметить, что наибольшее преимущество имеют образцы ЩМА с адгезионно-пластифицирующей добавкой.

3. Повышение сдвиговых характеристик асфальтовых бетонов позволяет предполагать более длительные сроки службы покрытий автомобильных дорог. Применение добавки из микрокристаллической целлюлозы, резинового порошка и ГС+МЭА позволяет улучшить коэффициент внутреннего трения и сцепления при сдвиге образцов ЦМА, что должно повысить сдвиговую устойчивость дорожных покрытий при высоких температурах.

Поступило 16.12.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Оев С.А., Оев А.М. Щебеночно-мастичный асфальтобетон – эффективный материал для дорожных покрытий. – Вестник Таджикского технического университета, 2014, №1, с. 97-100.
2. Оев С.А., Сайрахмонов Р.Х., Исмоилов Л.С., Умаров С.С., Акрамов А.М. Совместное влияние волластанита и микрокристаллической целлюлозы на свойства щебеночно-мастичного асфальтобетона. – Вестник Таджикского технического университета, 2015, №1(29), с. 98-100.
3. Сайрахмонов Р.Х., Умаров С.С. Повышение адгезионных свойств битумов путем применения комплексной добавки. – Вестник Таджикского национального университета, 2016, № 1(110), с. 78-80.
4. Сайрахмонов Р.Х., Оев С.А. Повышение физико-механических свойств щебеночно-мастичного асфальтобетона на основе поверхностно-активной и стабилизирующей добавки. – Вестник Санкт-Петербургского инженерно-строительного университета, 2016, №1(215), с. 48-52.
5. Соломенцев А.Б. Классификация и номенклатура модифицирующих добавок для битумов. – Наука и техника дорожной отрасли, 2008, №1, с. 14-15.
6. Соломенцев А.Б., Баранов И.А. Оценка битум-удерживающей способности стабилизирующих добавок для щебеночно-мастичного асфальтобетона в асфальтовяжущем строительстве и рекомендации, 2010, №4(30), с.53-58.
7. Соломенцев А.Б., Баранов И.А. Влияние добавки УНИРЕМ-001 на свойства асфальтовяжущего и щебеночно-мастичного асфальтобетона. Мат-лы 5-й Всероссийской науч.-практ. конф. Сб. тез. докл. – Бийск: Изд-во БТИ Алт. ГТУ им. И.И.Ползунова, с. 159-164.
8. Сайрахмонов Р.Х., Умаров С.С. и др. Повышение адгезионных свойств битума путем применения комплексной добавки. – Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2016, № 1-1 (192), с.181-185.
9. Асад Т., Юнусов М.Ю., Умаров С.С., Сайрахмонов Р.Х. Теоретические аспекты, экспериментальные исследования эффективности применения комплексной добавки различного функционального назначения в составе дорожных битумов. – Политехнический вестник. Серия инженерные исследования, 2020, №1 (49), с.123

Н.С.Арабзода

ТАЪСИРИ ИЛОВАГИҲО АЗ СМК, ХР ВА ҚГ+МЭА БА ХОСИЯТҲОИ ФИЗИКАВӢ-МЕХАНИКИИ АСФАЛТОБЕТОНҲОИ ШАҒАЛИЮ-МАСТИКӢ

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ

Дар кори маскур хусусиятҳои физикавӣ-механикии омехтаҳои бетони асфалтии шағалию-мастикӣ бо истифодаи иловаҳои стабилизатсионӣ, селлюлозаи микрокристаллӣ (СМК) аз боқимондаи коркарди пахтаи маҳаллӣ, иловаи полимерӣ, хокаи резина (ХР) аз балонҳои истифодакардашуда ва иловагии пластифитсионӣ, адгезионӣ аз қатронҳои госсипол ва моноэтаноламин (ҚГ+МЭА) омӯхта шудааст. Нишон дода шудааст, ки истифодаи иловаҳои дар боло зикршуда дар таркиби битум ва асфалти бетонӣ хосиятҳои физикӣ ва механикии онҳоро хеле зиёд мекунад.

Калимаҳои калидӣ: асфалтобетони шағалию-мастикӣ, қатрон, селлюлозаи микрокристаллӣ, моноэтаноламин, хокаи резина, иловагӣ, хосият.

N.S.Arabzoda

INFLUENCE OF ADDITION FROM MCC, RP AND GS + MEA ON PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES AND FLOW RATING INDICATOR OF SMA

M.S.Osimi Tajik Technical University

In the paper the results of a study of the effect of microcrystalline cellulose additives (MCC) from cotton industry waste and rubber powder (RP) from worn-out tires, as well as an adhesive-plasticizing additive of gossypol resin with monoethanolamine (GS + MEA) from oil-and-fat plant waste and ammonia production on physical -mechanical properties of crushed stone-mastic asphalt concrete (SMA) are presents. It is shown that these additives significantly improve the physical and mechanical properties of SMA for road paving in hot climates, typical for the Republic of Tajikistan.

Key words: crushed stone-mastic asphalt concrete, resin, monoethanolamine, microcrystalline cellulose, rubber powder, additive, properties.

УДК 556.114.679+623.454.862

М.З.Ахмедов

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОЧИСТКИ ВОД ОТ РАДИОНУКЛИДОВ*Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности**НАН Таджикистана**(Представлена академиком НАН Таджикистана У.М. Мирсаидовым 04.04.2022 г.)*

В статье приведены результаты коагулирования вод, содержащих радиоактивную взвесь, железо-алюминий содержащим коагулянт с последующей очисткой от радионуклидов сорбентами из скорлупы грецкого ореха, шишек сосны и арчи. Разработана принципиальная технологическая схема очистки речных вод от радионуклидов.

Ключевые слова: *радионуклиды, уран, очистка, сорбент, скорлупа урюка, шишки сосны, шишки арчи.*

Природные воды могут содержать радиоактивные вещества (РВ) за счёт пород, содержащих радиоактивные элементы (уран, радий, торий и др.). Воды также загрязняются РВ при попадании в них стоков от промышленных, исследовательских предприятий и медицинских учреждений, использующих радиоактивные препараты [1-3].

Радиоактивному загрязнению подвергаются также различные водные ресурсы, которые являются наиболее уязвимыми звеньями биосферы [4-6].

Наиболее эффективное удаление РВ из вод осуществляется аэрацией, сорбцией, мембранной фильтрацией [5, 6]. Наибольшая эффективность при очистке вод от РВ и продуктов их распада достигается при особом комбинировании методов и оборудования в различных вариантах [5, 6]. Достаточно высокую эффективность снижения концентрации РВ в воде показала аэрация (продувание воздухом) воды [6].

В настоящей работе изучены различные сорбенты из местных сырьевых материалов для очистки вод от радионуклидов, а также показана эффективность полученных коагулянтов для удаления из воды радиоактивной взвеси.

Для исследования выбран коагулянт, полученный из алюмосиликатных руд разложением соляной кислотой [7].

По методикам работы [8] получен железо-алюминиевый коагулянт из нефелиновых сиенитов для очистки радиоактивной взвеси вод реки Сасык-Сай г. Истиклол.

Коагулирующие способности железо-алюминиевого коагулянта изучены методом пробного коагулирования при осветлении воды реки Сасык-Сай. Мутность вод составляла 200-500 мг/л (весенний период), рН=7.8-8.7, температура – 20-25°C. Коагулирующая способность исследуемого коагулянта сравнивалась с коагулянтом Na₂SO₄.

Адрес для корреспонденции: *Ахмедов Матин Зафарджонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по ХБРЯ безопасности НАНТ. E-mail: m.akhmedov@cbrn.tj*

Кривые скорости осаждения радиоактивной взвеси для железо-алюминиевого коагулянта при температуре 20°C и pH=7.8 приведены на рис.1.

Как свидетельствуют приведённые данные, исследуемый коагулянт при дозе в два раза меньшей, чем сернокислый алюминий, находится практически на одном уровне по осветлению воды.

После очистки воды коагулянтном изучена сорбция радионуклидов из воды местными сорбционными материалами. Содержание урана в воде после коагуляции составило от 20 до 50 мг/л.

В работах [9, 10] предложен способ выделения урана из шахтных вод, где в качестве сорбента используют абрикосовую скорлупу, с последующей десорбцией уранового концентрата. Необходимое количество скорлупы (2000 г) помещают в сорбционную колонку и через неё постоянно пропускают определённый объём подкисленного серной кислотой раствора ($V=1$ л/мин) шахтной воды, содержащей уран. Однако, указанный способ менее эффективен и ограничивается только абрикосной скорлупой.

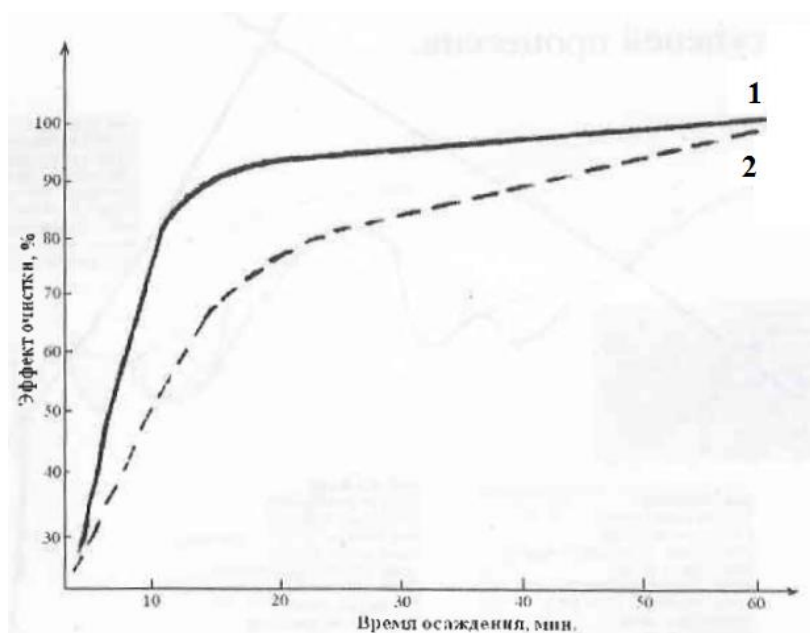


Рис. 1. Кривые скорости осаждения коагулированной взвеси для коагулянтов: железо-алюминиевый коагулянт (1), сернокислый алюминий (2).

В настоящей работе предложен эффективный сорбент из различных местных сырьевых материалов: скорлупы грецкого ореха, шишек сосны и арчи в соотношениях 1:1:1.

Поставленная цель достигается тем, что вместо скорлупы урюка (абрикоса), в адсорбционную колонку помещают измельчённую до размеров 1.0-2.0 мм смесь сорбционного материала в соотношении 1:1:1. Общий вес 2100 г, по 700 г скорлупы грецкого ореха, шишек сосны и арчи.

Смесь сорбционного материала помещают в колонку и через неё пропускают определённый объём подкисленного серной кислотой раствора с содержанием урана 20-50 мг/л.

Затем протекает процесс сорбции, который контролируется содержанием урана на выходе сорбционной колонны. Время сорбции 12-14 часов. После протекания процесса сорбции адсорбент выжигают до полного выгорания при температуре 250-400°C в печах. Урансодержащие огарки выщелачивают серной кислотой с добавлением окислителей. После выщелачивания массу фильтруют,

получая фильтрат сульфата урана. Далее уран из раствора осаждают аммиачной водой, получают закись-окись урана, которую сушат при температуре 100-150°C в вакууме. Выход продукта 90-97%.

Таким образом, предлагаемый способ переработки шахтных и дренажных урансодержащих вод позволяет использовать смесь доступных местных сырьевых материалов и выделить ценный продукт U_3O_8 и тем самым предотвратить загрязнение водного бассейна радионуклидами.

Принципиальная технологическая схема извлечения урана из вод реки Сасык-Сай г. Истиклол представлена на рис. 2.

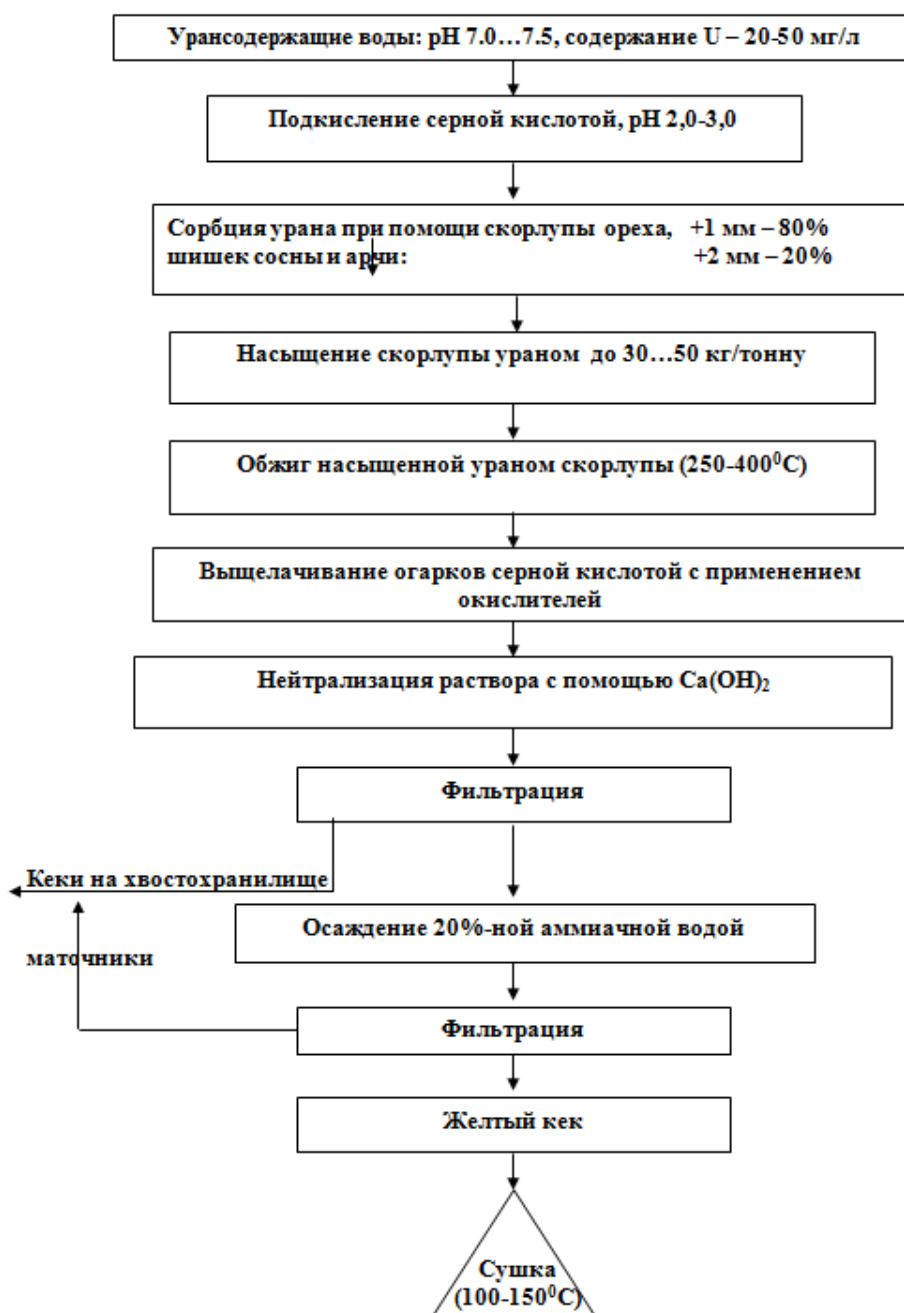


Рис. 2. Принципиальная технологическая схема очистки вод от радионуклидов.

Поступило 06.04.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Старков В.Г., Мигунов В.И. Радиационная экология. – Тюмень, ФГУ ИПП, 2003, 304 с.
2. Смирнов Р.Д. Сорбционная очистка воды. – Л.: Химия, 1982, 168 с.
3. Кузнецов Ю.В., Шебетковский С.М., Трусов В.И. Основы очистки воды от радиоактивных загрязнений. – М.: Энергоатомиздат, 1974, 366 с.
4. Коростелёв Д.П. Обработка радиоактивных вод и газов на АЭС. – М.: Энергоатомиздат, 1988, 152 с.
5. Пушкарёв В.В., Никифоров А.Ф. Сорбция радионуклидов солями гетерополикислот. – М.: Энергоатомиздат, 1982, 112 с.
6. Мигалатый Е.В., Никифоров А.Ф., Аникин Ю.В. Физико-химические процессы очистки воды. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2004, 160 с.
7. Мирсаидов У.М., Сафиев Х.С. Комплексная переработка низкокачественного алюминийсодержащего сырья. – Душанбе: Дониш, 1998, 238 с.
8. Мирсаидов У.М., Сафиев Х.С. Коагулянты для очистки воды из сырьевых материалов Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2003, 39 с.
9. Мирсаидов И.У. Физико-химические основы получения урановых концентратов из отходов и сырьевых материалов. – Душанбе: Дониш, 2014, 107 с.
10. Хакимов Н., Мирсаидов И.У., Баротов Б.Б., Назаров Х.М. Извлечение урана из шахтных и технических вод отходов урановой промышленности. – ДАН РТ, 2007, т.50, №8, с.703-706.

М.З.Ахмедов

**АСОСҶОИ ФИЗИКАВИЮ ХИМИЯВИИ ТОЗА НАМУДАНИ ОБҶО АЗ
РАДИОНУКЛИДҶО**

*Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаҳои коагулятсияи обҳои дорои омехтаи радиоактиви буда бо коагулянти оҳану алюминий дошта ва минбаъд тоза кардани он аз радионуклидҳо тавассути сорбентҳо аз пӯчоқи чормағз, чалғӯзаи санавбар ва арча оварда шудааст. Нақшаи принципалии технологияи аз радионуклидҳо тоза кардани оби дарёҳо таҳия карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: радионуклидҳо, уран, тозакунии, сорбент, пӯчоқи зардолу, чалғӯзаи санавбар, чалғӯзаи арча.

M.Z.Akhmedov

**PHYSICO-CHEMICAL BASIS OF WATER PURIFICATION FROM
RADIONUCLIDES**

*Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety and Security Agency
of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

In this article the results of coagulation of waters containing a radioactive suspension with iron-aluminum containing coagulant, followed by purification from radionuclides by sorbents from walnut shells, pine cones and juniper are presents. A basic technological scheme for the purification of river waters from radionuclides has been developed.

Key words: radionuclides, uranium, purification, sorbent, apricot shell, pine cones, juniper cones.

УДК 549.454.2

Ф.А.Файзиев

ЗОНАЛЬНОСТЬ ОРУДЕНЕНИЯ В СЕРЕБРЯНЫХ И СЕРЕБРОСОДЕРЖАЩИХ МЕСТОРОЖДЕНИЯХ СЕВЕРНОГО И ЦЕНТРАЛЬНОГО ТАДЖИКИСТАНА

*Таджикский национальный университет**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана А.Р.Файзиевым 29.03.2022 г.)*

В статье рассматриваются различные формы проявления рудной зональности в серебряных и серебросодержащих месторождениях и рудопроявлениях Северного и Центрального Таджикистана. К ним относятся минералогическая зональность, зональность размещения типов руд и продуктов околорудного метасоматоза, температурная, геохимическая, структурная, вторичная зональность. Однако во всех объектах наиболее четко выделяются минералогическая и геохимическая зональность. Эти особенности руд можно использовать в качестве поисковых критериев и вести целенаправленные поиски на серебряное оруденение.

Ключевые слова: *зональность, серебряные и серебросодержащие месторождения, минеральная ассоциация, месторождение, рудное поле, минерал, оруденение.*

На серебряных и серебросодержащих месторождениях и рудопроявлениях Северного и Центрального Таджикистана выявлены региональные и локальные факторы контроля оруденения. Нами были опубликованы сведения о формационном, структурном, геотектоническом и литолого-стратиграфическом контроле оруденения [1-4].

Вопросы проявления зональности оруденения на серебросодержащих полиметаллических и серебряных месторождениях Северного и Центрального Таджикистана рассматривались рядом исследователей [1, 4-8]. В целом, в серебряных и серебросодержащих месторождениях проявляются различные виды зональности: минералогическая, зональность размещения типов руд и продуктов околорудного метасоматоза, температурная, геохимическая, структурная, вторичная зональность и т.д.

На месторождении Замбарак Л.М.Лурье [5] выявлены некоторые черты вертикальной минералого-геохимической зональности, отражающей эволюционный характер развития рудного процесса. Рудные тела, по данным этого исследователя, сложены тремя парагенетическими ассоциациями: кварц-сульфидной, карбонат-сульфидной и барит-сульфидной. Кварц-сульфидная ассоциация слагает глубокие части рудных тел, где развит преимущественно вкрапленный и прожилково-вкрапленный тип оруденения. Ведущим жильным минералом является кварц, в подчиненном количестве – серицит, хлорит и сидерит. Рудные минералы состоят из пирита, галенита и сфалерита. В незначительных количествах отмечаются халькопирит, блеклая руда, арсенопирит. Для галенита характерны относи-

Адрес для корреспонденции: Файзиев Фотех Абдувакилович. 7734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: foteh81@mail.ru

тельно низкие содержания серебра (сотые и первые десятые доли процента), сурьмы (сотые доли процента) и висмута (следы и тысячные доли %). Сфалерит из этой ассоциации маложелезистый (1.54-3.35%), постоянно в нём присутствуют кадмий (от 0.33 до 0.5 %) и медь (сотые доли %). В средних частях рудных тел получает развитие карбонат-сульфидная ассоциация. Ведущими жильными минералами являются карбонаты – мангансидерит, олигонит (от 30 до 70% общей массы руд), в подчиненном количестве манганкальцит и кальцит, а в незначительном отмечаются кварц, хлорит, гидрослюда и барит. Среди рудных минералов преобладает галенит, в подчиненном количестве сфалерит, резко уменьшается роль пирита. Заметны содержания в рудах халькопирита, особенно характерно появление сульфосолей – тетраэдрита, бурнонита и немногочисленных выделений серебрясодержащих минералов (полибазит, миаргирит). Сфалерит данной ассоциации характеризуется невысоким содержанием железа (0.7-1.0%), меди (0.03-0.005%). Увеличивается роль кадмия в сфалерите (от 0.33 до 1.2%). Для галенита типичны повышенные количества серебра и сурьмы (десятые доли, реже 1-3%). Барит-сульфидная ассоциация развита в верхних частях рудных тел. Ведущее значение имеют галенит и барит при незначительной роли других минералов: кальцита, клейофана, халькопирита, тетраэдрита. На самых верхних горизонтах количество галенита уменьшается, и рудные тела представлены главным образом гнездами и жилами барита. Для барита типично содержание стронция от 0.74 до 1.80%. Галенит серебрясодержащий (1-3%). Сфалерит – безжелезистый (клейофан), но кадмиевый (до 1.40%).

На Канджолском рудном поле наблюдается как латеральная, так и вертикальная зональность. С юго-запада на северо-восток поперек Талдыканской брахиантиклинали серебро-золоторудная минерализация (месторождение Школьное) через кварц-халькопиритовую сменяется на серебро-полиметаллическую (месторождение Канджол). Далее в северо-восточной части находится серебро-золоторудная минерализация (Четсу) в интрузивных породах, а затем в самом конце рудного поля, к замку Кураминской антиклинали в песчано-сланцевых образованиях ордовика-силура размещена серебро-золоторудная минерализация (Караулхана).

Горизонтальная зональность в распределении оруденения наблюдается не только на площади рудного поля и месторождения, но и в пределах отдельных участков. На участке I месторождения Канджол, который размещается в пределах слабоденудированного блока, развита золото-кварц-адуляр-карбонатная ассоциация с блеклой рудой, содержащей эмульсионную вкрапленность тонкодисперсного кюстелита. Ближе к разлому «Аметистовая жила» в секущих северо-восточных разрывных нарушениях появляются золото-серебро-полиметаллические жилы, сложенные в основном галенитом. Непосредственно в разломе развиты кварц-гематитовые жилы.

Вертикальная геохимическая зональность выражена и в отношении основных элементов на месторождении Канджол. В пределах второго участка развиты преимущественно кварц-пиритовые, золото-серебро-полиметаллические, золото-кварц-карбонатные жилы и жилы типа вторичных кварцитов. Рудные тела участка вскрыты через 50 м на четырех горизонтах. Серебро-золотое отношение уменьшается по рудному телу №6 с глубиной до горизонта штольни №28, то же происходит со свинцово-цинковым отношением. Медно-висмутовое отношение растёт, содержание кадмия до горизонта

штольни №28 увеличивается, ниже горизонта штольни опять растет количество серебра, достигая максимума по скважине №16.

Вертикально на глубину (от блокирующей поверхности липаритовых порфиров оясайской свиты верхнего карбона) галенитовый тип руд (0-150 м) сменяется галенит-сфалеритовым (100-300 м), наложенным на кварц-халькопиритовый (медно-висмутовый) и распространенным в интервале 200-500 м. Судя по развитию кварц-гематитовых жил в разломе Аметистовая жила и кварцево-гематитовым прожилкам, вскрытым скважиной на глубинах 400-700 м, ниже (400-700 м) сменяется на кварц-гематитовую ассоциацию.

В отношении распределения серебра на Канджоле наблюдается минералогическая зональность [3]. На верхних горизонтах месторождения минералами-концентраторами серебра являются пираргирит, Ag-содержащий тетраэдрит, кюстелит (1450 м), на горизонте штольни 7 Ag-содержащий тетраэдрит (1322 м) и ниже – серебросодержащий галенит и халькопирит.

На серебро-золоторудном месторождении Школьное отмечена гипогенная обратная и прямая зональности оруденения [9]. В северо-западной части установлена закономерная смена на глубину кварц-пиритовой ассоциации (0-150 м) кварц-карбонатной продуктивной (150-500 м) и еще ниже – кварц-полиметаллической. По простиранию жильной зоны на участке Алтын-Тепе смена кварц-пиритовой ассоциации, расположенной в висячем боку редкометалльного разлома, кварц-карбонатной и далее на юго-восток кварц-флюоритовой. Таким образом, как на глубину, так по простиранию в пределах месторождения выявляется смена ранних минеральных ассоциаций более поздними, что, по данным этого автора указывает на обратную зональность, сформированную при повторных тектонических разрывах, развивающуюся на фоне общего поднятия района.

Прямая зональность отложения кварц-карбонатных серебро-золоторудных жил предопределяет многоярусное строение по падению рудных зон и выражается чередованием промышленно рудных на безрудные. Верхний ярус представлен кварц-фрейбергит-пираргиритовым типом, нижний – преимущественно кварц-пираргиритовым. На верхнем ярусе руды имеют метаколлоидную текстуру, тогда как в нижнерудном уровне развиты преимущественно текстуры пересечения.

Зональность в размещении минеральных ассоциаций наблюдается в пределах отдельных месторождений Зарнисорского рудного узла. На основании имеющихся данных [10] и полученных нами материалов установлено: 1) на ряде месторождений рудного узла (Северный Зарнисор, Мышиккол и др.) в приповерхностных частях галенит преобладает над сфалеритом; 2) на нижних частях месторождений Перевальное, Мышиккол и Северный Зарнисор устанавливается относительное увеличение магнетита; 3) на Мышикколе и Перевальном в верхних горизонтах преобладает гематит, содержания которого с глубиной понижаются; 4) на месторождении Перевальное выявлено зональное строение рудных тел, выражающееся в преобладании во внешних частях гематита, сменяющегося к центру галенитом, а затем галенитом и сфалеритом; 5) для Ташбулака установлена структурная зональность. Вблизи крупных разрывных рудоподводящих структур размещаются кварц-флюоритовая, галенит-блеклорудная и кварц-гематитовая ассоциации. В удалении от них появляются преимущественно магнетитовая, халькопирит-пиритовая и сфалерит-галенитовая ассоциации. И в наибольшем удале-

нии обычно отлагается сфалерит-галенитовая ассоциация; б) на отдельных месторождениях проявляется вертикальная зональность для Ag, Bi, Cd, Cu, Sb и Hg.

В пределах Кансайского рудного поля отчетливо проявляется зональность оруденения, вызванная прерывистым поступлением растворов разного состава на фоне вспышек трещинообразования [2]. Горизонтальная зональность оруденения выражается в том, что в восточной части рудного поля на ранних стадиях минералообразования проявились интенсивные деформации в зоне контакта известняков с гранитоидами и здесь кристаллизовались минеральные ассоциации первой стадии минерализации - скарново-силикатная с магнетитом и сульфидами. В западном направлении разрывы проявлялись все позднее и соответственно были выполнены более поздними минеральными ассоциациями – скарново-водно-силикатно-сульфидными; кварц-карбонат-сульфидными; кварц-барит-флюорит-кальцитовыми.

Изучение рудных тел и окаймляющих их первичных ореолов даола позволило А.М.Еникееву [11] выделить в Кансайском рудном поле вертикальную зональность оруденения. Она обусловлена изменением с глубиной свинцово-серебряных руд на свинцово-цинковые и цинково-медно-железные с висмутом, мышьяком и золотом или медно-молибден-вольфрамовые. Он считает, что все типы оруденения являются продуктами проявления единого процесса рудообразования.

На месторождении Мирхант отчетливо проявлена минеральная зональность [1]. К приповерхностной части месторождения до глубины 1230 м локализована зона развития кальцит-гематит-сульфидной стадии. Температура минералообразования этой стадии, по данным гомогенизации газовой-жидких включений, в кальцитах происходила в широких пределах температур (от 220 до 65°C). Эта зона на северо-западе имеет широкое распространение и окаймляет сверху продуктивную карбонат-сульфидно-сульфосольную стадию. Кристаллизация минералов второй стадии происходила в диапазоне температур 350-150°C. В северо-западной части месторождения комплекс минералов этой стадии встречается на глубине 1230 м и уходит ниже 1000 м, а на юго-востоке они распространены по вертикали сверху вниз от 1400 до 1275 м. В центральной части месторождения карбонат-сульфидно-сульфосольная стадия имеет максимальную вертикальную мощность и составляет 310 м. Ранняя кварц-сульфидная стадия в юго-восточной части месторождения распространена с гипсометрического уровня 1280 м над уровнем моря. Кристаллизация минералов этой стадии протекала из бикарбонатно-сульфатных (с подчиненным значением хлора) растворов низкой концентрации в пределах температур 430-200°C. Эта зона прослежена по вертикали наклонными скважинами до глубины 1000 м. Далее она уходит в глубину.

Геохимическая зональность связана с изменением степени сульфидности руд. С юго-востока на северо-запад содержание серы постепенно снижается от 40 до 1% и менее. Одновременно уменьшается в среднем содержание свинца, цинка и серебра, увеличивается концентрация ртути, никеля, ванадия, кобальта и др.

Для получения ряда вертикальной геохимической зональности рудных тел М.М.Мамадвафоевым и М.Д.Джанобиловым [8] вычислены величины показателей зональности, отражающие относительное накопление элемента на каждом из горизонтов штолен. По этим авторам и нашим данным следует, что в рудном теле 1 максимальное относительное накопление серебра и оло-

ва наблюдается на поверхности месторождения, цинка и свинца – на уровне горизонта штольни 5, а золота и мышьяка – на самом нижнем горизонте. По результатам полученных показателей был составлен следующий вертикальный ряд элементов-индикаторов оруденения: (Ag, Sn) - (Zn, Pb) - (Au, As).

В серебряных и серебросодержащих месторождениях ещё одним из видов минеральной зональности является сульфатно-сульфидная [12, 13]. Этот вид зональности в основном наблюдается в ряде месторождений Карамазара (Большой Канимансур, Канджол, Школьное, Зарнисор, Кансай, Такели и др.). Суть этого типа зональности заключается в том, что в нижних частях месторождений находится сульфат кальция – ангидрит. На смену ангидриту примерно в средних частях рудных тел приходят Na-алунит и K-алунит, а они в свою очередь сменяются баритом в приповерхностных частях [12].

Каждому сульфатному минералу характерен парагенный ему сульфид, который близок по содержанию катионов и анионов. Так, для ангидрита типичным парагенным минералом является пирит, так как он имеет наиболее легкие катионы и поэтому им характерно максимальное содержание сульфатного или сульфидного аниона. В приповерхностной части наблюдается обычный парагенезис – барит из сульфатов, а галенит из сульфидов. Этот парагенезис столь обычный, что в пределах Карамазара выделена самостоятельная барит-галенитовая ассоциация [14]. Между этими парагенными минералами, примерно в средней части месторождений, находятся с одной стороны сульфаты (Na-алунит и K-алунит), а с другой стороны сульфиды – халькопирит и сфалерит.

Снизу вверх, как в сульфатных, так и в сульфидных минералах, уменьшается содержание аниона, который обратно пропорционален их атомным весам [12]. Так, в сульфатах от 70.59% для ангидрита, через 61.6% для алунита до барита 41.2%. В сульфидах содержание аниона серы от 53.45% в пирите, 34.9% в халькопирите, 32.94% в сфалерите, до 13.4% в галените. Чем ближе к поверхности, тем, как правило, отлагаются минералы с более тяжелыми металлами – от кальция, натрия, калия до бария в сульфатах, и от железа, меди, цинка до свинца и серебра в сульфидах. Соответственно в этом ряду происходит увеличение атомного веса катиона от ранних минералов к более поздним – от 55.85 для железа в пирите до 207.19 для свинца в галените. Однако, в случае разных катионов, относительная плотность решетки будет уменьшаться, так как катионы в этом ряду имеют различные размеры. В последовательном ряду сульфидных минералов с различными ведущими катионами относительная плотность решетки от ранних к более поздним постепенно уменьшается от 0.13 у пирита, у халькопирита 0.093, у сфалерита 0.084 до 0.063 у галенита [15].

Вторичная зональность на месторождении Мирхант проявлена слабо. Количество гипергенных минералов постепенно увеличивается от юго-восточного фланга залежи Контактной на северо-запад до штрека 2, появляются халькозин, ковеллин, борнит, самородная медь, самородное серебро, гидроксиды железа. Массивные и прожилково-вкрапленные сульфидные руды затронуты окислением не более чем на 2-3%. Здесь встречаются тонкие прожилки и каймы варламовита на оловосодержащих минералах, корочки церуссита на галените, прожилки скородита в арсенопирите и включения халькозина в тетраэдрите. В рассечках 2, 4, 6, 8 увеличивается количество церуссита и безжелезистого сфалерита.

Установленная зональность оруденения для месторождения Мушистон относится к вторичной [16]. По их данным, линейные продуктивности Sn, Ag, Cu, Zn и Pb по вертикали сверху вниз в целом возрастают, а у As, наоборот, – уменьшается. Таким образом, получается снизу вверх такая зональность оруденения: Sn→Ag→Pb→Cu→Zn→As. В связи с не монотонным изменением с глубиной оруденения этими авторами вычислены величины показателей зональности. Здесь максимальное относительное накопление Pb наблюдается на самом нижнем горизонте, Sn, Cu, Ag – на среднем, а Zn и As – на поверхности месторождения.

Поступило 06.04.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Файзиев А.Р., Файзиев Ф.А. Рудноформационные типы серебряных месторождений Таджикистана. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2015, №3 (160), с. 92-99.
2. Файзиев Ф.А. Зональности оруденения на серебро-полиметаллическом месторождении Мирхант (Центральный Таджикистан). – ДАН РТ, 2011, т. 54, №12, с. 1000-1006.
3. Файзиев Ф.А. Серебряная минерализация на месторождении Канджол (Северный Таджикистан). – Геология и геофизика Юга России, 2019, т. 9, №2, с. 69-82.
4. Файзиев Ф.А. Геотектонический и структурный факторы размещения серебряных и серебросодержащих месторождений Северного и Центрального Таджикистана. – ДНАНТ, 2021, т. 64, № 9-10, с. 588-594.
5. Лурье Л.М. Околорудные изменения и некоторые генетические особенности свинцово-цинкового оруденения Замбаракского месторождения. – М.: Наука, 1969, 144 с.
6. Турлычкин В.М. Канджольское рудное поле. – В кн.: Геология и минеральные комплексы Западного Карамазара. – М.: Недра, 1972, с. 368-382.
7. Моралев Г.В. Минеральные ассоциации, зональность и условия формирования золото-серебряного месторождения Школьное (Канджольское рудное поле), Северный Таджикистан: Автореф. дисс. к. геол.-минер. н. – М., 1993, 28 с.
8. Мамадвафоев М.М., Джанобилов М.Д. О зональности оруденения на касситерит-сереброполиметаллическом месторождении Нижний Кштудак (Центральный Таджикистан). – ДАН РТ, 1999, т. XLII, № 7, с. 57-62.
9. Прокопенко Б.С. Закономерности размещения эндогенной минерализации на одном из месторождений Кураминского хребта. – Изв. АН ТаджССР. Отд. физ.-мат. и геол.-хим. н., 1979, №1 (39), с. 46-51.
10. Мутавалиев А.Т., Дзайнуков А.Б., Файзиев А.Р. Рудоносность и условия размещения полиметаллического оруденения в Зарнисорском рудном узле (Срединный Тянь-Шань). – Научные исследования в Кыргызской Республике, 2015, № 4, с. 34-40.
11. Еникеев А.М. Минерально-геохимические критерии поисков и оценки скрытого полиметаллического оруденения в Кансайском рудном районе (Карамазар). – Зап. Узб. отд. ВМО, 1989, вып. 42, с.97-102.
12. Бадалов С.Т. Об одной из причин вертикальной зональности элементов в эндогенных рудных месторождениях. – Геохимия, 1968, №4, с. 442-447.
13. Файзиев А.Р. Минералогия и условия образования полиметаллического месторождения Большой Канмансур (Срединный Тянь-Шань). – Душанбе: Дониш, 2008, 416 с.

14. Королева Н.Н. Типоморфные минеральные ассоциации висмута, золота, свинца и цинка в эндогенных месторождениях Карамазара. – В кн.: Рудные поля Карамазара, т. 3. – Душанбе: Ирфон, 1975, с. 170-195.
15. Евзикова Н.З. О структурных плотностях минералов. – Минерал. сб. Львовск. ун-та, 1966, № 20, вып. 3, с. 326-340.
16. Мамадвафоев М.М., Бахронов Н., Прокова И.А. и др. О геохимической зональности на оловорудном месторождении Мушистон в Центральном Таджикистане. – ДАН РТ, 1993, №2, с. 129-133.

Ф.А.Файзиев

МИНТАҚАНОКИИ МАЪДАН ДАР КОНҲОИ НУҚРА ВА НУҚРАДОРИ ТОҶИКИСТОНИ ШИМОЛӢ ВА МАРКАЗӢ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола шаклҳои гуногуни зухурёбии минтақанокии маъдан дар кон ва зухуроти нуқраю нуқрадори Тоҷикистони Шимолӣ ва Марказӣ мавриди муҳокима қарор гирифтааст. Ба ин минтақанокиҳои - минералогӣ, ҷойгиршавии навъҳои маъдан ва маҳсулоти метасоматизми наздимаъданӣ, ҳароратӣ, геохимиявӣ, структурӣ, минтақанокии дуумдараҷа дохил мешаванд. Аммо дар ҳамаи объектҳо минтақанокии минералогӣ геохимиявӣ равшантар фарқ карда мешаванд. Ин хусусияти маъданҳоро метавон ҳамчун меъёри ҷустуҷӯи истифода намуд ва кофтукови мақсадноки маъдани нуқраро ба роҳ монд.

Калимаҳои калидӣ: минтақабандӣ, конҳои нуқра ва нуқрадор, ассоциатсияи маъданӣ, кон, майдони маъданӣ, минерал, маъдан.

F.A.Fayziev

ZONING OF MINERALIZATION IN SILVER AND SILVER-BEARING DEPOSITS OF NORTHERN AND CENTRAL TAJIKISTAN

Tajik National University

In this article various forms of manifestation of ore zoning in silver and silver-bearing deposits and ore occurrences of Northern and Central Tajikistan is discussed. These include mineralogical zonality, zonality of placement of types of ores and products of near-ore metasomatism, temperature, geochemical, structural, secondary zonality. However, mineralogical and geochemical zonation is most clearly distinguished in all objects. These features of the ores can be used as search criteria and conduct targeted searches for silver mineralization.

Key words: zoning, silver and silver-bearing deposits, mineral association, deposit, ore field, mineral, mineralization.

УДК 582.26. (584.5)

П.А.Курбонова

**ДОПОЛНЕНИЯ К ФЛОРЕ СТРЕПТОФИТОВЫХ ВОДОРΟΣЛЕЙ
(STREPTORPHYTA) ВОДОЁМОВ ТАДЖИКИСТАНА***Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана Х.Х.Хисориевым 07.01.2022 г.)*

В данном сообщении приводятся новые флористические находки из отдела стрептофитовых водорослей (*Streptophyta*), обнаруженных в Рогунском водохранилище и в водоёмах его окрестностей. Всего обнаружено 19 видов и внутривидовых таксонов стрептофитовых, среди которых 4 вида и одна разновидность (*Cylindrocystis brebissonii* var. *brebissonii* (Menegh. ex Ralfs) de Bary, *Cylindrocystis brebissonii* var. *turgida* Schmidle, *Cylindrocystis crassa* de Bary, *Netrium digitus* (Ehr. ex Bréb. in Ralfs) Itzigs. et Rothe, *Spirotaenia condensata* Brebisson in Ralfs) являются новыми флористическими находками для альгофлоры Таджикистана.

Ключевые слова: альгофлора, дополнения, *Streptophyta*, водоёмы Таджикистана.

В образцах водорослей, собранных в весенне-летний период 2021 г. в Рогунском водохранилище, а также в различных типах водоёмов (лужи, родники и ручьи) окрестностей гг. Оби Гарма и Рогуна обнаружено 19 видовых и внутривидовых таксонов из отдела стрептофитовых (*Streptophyta*) водорослей (табл.). Сбор и камеральная обработка альгологических проб с последующей идентификацией таксонов водорослей проведены по методике сбора и изучения стрептофитовых водорослей [1-3].

Ранее было сообщено [4], что вода в Рогунском водохранилище в первом году его заполнения р. Вахш характеризуется высокой мутностью (10-15 см прозрачности) и относительно низкой температурой воды (11-12°C – весной; 20-22°C – летом).

Как видно из приведенных в таблице данных, всего в исследованных водоёмах обнаружено 19 видовых и внутривидовых таксонов стрептофитовых водорослей, которые относятся к одному классу (*Zygnematomyxaceae*), 3 порядкам (*Desmidiales*, *Zygnematales*, *Spirogyrales*), 7 семействам и 10 родам.

Среди 3 порядков наиболее представителен порядок *Zygnematales*, объединяющий 8 видов и разновидностей, которые составляют 42.1% от общего количества таксонов исследованных водоёмов. Среди 7 семейств стрептофитовых наиболее многообразны по видовому и внутривидовому составу семейства *Zygnemataceae* и *Spirogyraceae*, включающие соответственно 6 видов (31.6%) и 3 вида (21.1%) и одна разновидность.

Адрес для корреспонденции: Курбонова Парвина Абдурахмановна. 734017, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Каримова, 27, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАНТ.
E-mail: parvin-mad@mail.ru

Таблица

Систематический список стрептофитовых водорослей водохранилища Рогун и его окрестностей

Класс	Порядки	Семейства	Роды	Виды и внутривидовые таксоны
Zygnematophyceae	Desmidiiales	Gonatozygaceae Peniaceae	<i>Gonatozygon</i> <i>Penium</i>	<i>Gonatozygon brebissonii</i> <i>Penium didymocarpum</i>
		Closteriaceae	<i>Closterium</i>	<i>Closterium acerosum</i> <i>Closterium gracile</i> <i>Closterium kuetzingii</i>
		Desmidiaceae	<i>Cosmarium</i>	<i>Cosmarium botrytis</i> <i>Cosmarium undulatum</i>
Zygnematales	Zygnemataceae Mesotaeniaceae	<i>Zygnema</i> <i>Cylindrocystis</i>	<i>Zygnema insigne</i> <i>Cylindrocystis brebissonii</i> var. <i>brebissonii</i> <i>Cylindrocystis brebissonii</i> var. <i>turgida</i> <i>Cylindrocystis crassa</i> <i>Mougeotia parvula</i> <i>Mougeotia scalaris</i> <i>Netrium digitus</i> <i>Spirotaenia condensata</i>	
		<i>Mougeotia</i> <i>Netrium</i> <i>Spirotaenia</i>		
	Spirogyrales	Spirogyraceae	<i>Spirogyra</i>	<i>Spirogyra bififormis</i> <i>Spirogyra catenaeformis</i> <i>Spirogyra communis</i> <i>Spirogyra oligocarpa</i>
Всего:	3	7	10	18 (19)

Что касается доли ведущих родов стрептофитовых в сложении альгофлоры исследуемых водоёмов, то из 10 родов особо выделяется род *Spirogyra*, составляющий пятую часть всех обнаруженных стрептофитовых водорослей в районе исследования. По видовому и внутривидовому разнообразию следуют роды *Closterium* (3 вида) и *Cylindrocystis*, содержащий 2 вида и одну разновидность (см. табл.).

Из 19 видов и разновидностей стрептофитовых водорослей 4 вида и одна разновидность (*Cylindrocystis brebissonii*, *Cylindrocystis brebissonii* var. *turgida*, *Cylindrocystis crassa*, *Netrium digitus* и *Spirotaenia condensata*) являются новыми флористическими находками для альгофлоры Таджикистана.

Ниже приведено краткое их биоморфологическое описание, с указанием названия и синонима таксона на латинском и русском языках, конкретные места обнаружения в исследованных водоёмах, экологические особенности, а также общее распространение (ареал) вида, с учетом собственных и литературных данных [1-3,5].

1. *Cylindrocystis brebissonii* (Menegh. ex Ralfs) De Bary – Цилиндрокцистис Бребиссона (= *Closterium cylindrocystis* Kütz.).

Вегетативные клетки цилиндрические, гладкие, прямые, с закруглёнными концами, 20 - 22 мкм длины и 10-12 мкм ширины. Единично, среди нитчаток из родов *Zygnema*, *Ulothrix* и *Spirogyra* в северном побережье водохранилища Рогун и в заросших заводях ручьи Оби Гарм.

Места обитания. В бентосе и в толще воды стоячих водоёмов, типа прудов, озёр, водохранилищ, а также в пойменных, заросших равнинных и предгорных водоёмах; часто среди нитчатых зеленых и харовых водорослей.

Общее распространение (ареал): Широко распространённый в различных типах водоёмов космополитный вид (почти все континенты, кроме Антарктиды).

2. *Cylindrocystis brebissonii* var. *turgidus* Schmidle - Цилиндроцистис Бребиссона разновидность вздутая (= *Cylindrocystis brebissonii* var. *brebissonii* f. *turgida* Kossinsk.). От типового вида отличается более широкими гладкими прямыми вегетативными клетками с широкоцилиндрическими и притуплёнными концами. Вегетативные клетки 34 мкм длины и 17 мкм ширины. Очень редко, среди нитчатых зеленых и стрептофитовых водорослей в сильно заросших заводях и ручьях Дубеда и северного побережья водохранилища Рогун.

Места обитания. В бентосе различных стоячих и сильно заросших водоёмов, а также в торфяных болотах среди нитчатых водорослей.

Общее распространение (ареал): Циркумбореально-атлантико-южно-американо-горносреднеазиатско-судано-малайзийско-австралийский тип ареала. Нередко указывается вместе с типовым видом (*Cylindrocystis brebissonii*) в ряде мест вышеназванных флористических областей.

3. *Cylindrocystis crassa* De Bary – Цилиндроцистис толстый (= *Cylindrocystis crassa* De Bary f. *crassa* Hodgetts).

Вегетативные клетки широкоэллипсоидные, с широкозакруглёнными концами, гладкие, 37 мкм длины и 17 мкм ширины. Очень редко, среди нитчаток из рода *Spirogyra* в заводях ручьёв Оби Гарм.

Места обитания. В бентосе и в толще воды в канавах, прудах, озёрах, водохранилищах, поймах рек, с широкими амплитудами pH, а также в некоторых заросших олиго- и мезотрофных равнинных, предгорных и горных водоёмах;

Общее распространение (ареал): Широко распространённый в различных типах водоёмах вид - субкосмополит (Циркумбореально-атлантико-южноамерикано-пантропико-восточноазиатско-ирано-туранско-гола-нтарктическо-австралийский).

4. *Netrium digitus* (Ehr. ex Bréb. in Ralfs) Itzigs. – Нетриум пальцеподобный (= *Closterium digitus* Ehrenberg; *Closterium lamellosum* Bréb.).

Вегетативные клетки длинно-эллиптические, 190-230 мкм длины, 76-92 мкм ширины. Особи постепенно суживаются к концам и заканчиваются закруглёнными верхушками. Редко среди других нитчатых зеленых и харовых водорослей в северном побережье водохранилища Рогун и в заросших заводях ручьи Оби Гарм. Индикатор мезотрофных водоёмов (β - мезосапроб).

Места обитания. В бентосе и в толще воды в канавах, прудах, озёрах, водохранилищах, поймах рек, с широкими амплитудами pH от 4.0 до 8.0, а также в некоторых заросших высшими водными растениями в олиго- и мезотрофных водоёмах. Нередко в водоёмах предгорных и высокогорных ландшафтов.

Общее распространение (ареал): Широко распространённый в различных типах водоёмов космополитный вид (почти все континенты, кроме Антарктиды).

5. *Spirotaenia condensata* Brébisson in Ralfs – Спиротения стиснутая

Вегетативные клетки длинно-эллиптические, 70-78 мкм длины, 11-12 мкм ширины, слабоизогнутые, к концам слегка суживаются и образуют слизь. Хлоропласты одиночные и слегка спирально

скручены. Единично среди других нитчатых водорослей в северном побережье водохранилища Рогун и в заросших заводях ручьи Дубеда.

Места обитания. Чаще всего в составе бентоса и планктона канав, прудов, озёр, водохранилищ, разных типов болот, реже - в руслах рек.

Общее распространение (ареал): Распространённый субкосмополит (Циркумбореально-атлантико-южноамерикано-неотропико-азиатско-голантар-китический).

Поступило 01.1.2022г

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Паламарь-Мордвинцева Г.М. Флора водорослей континентальных водоёмов Украины. Десмидиевые водоросли. Вып. 1, ч. 1. – Киев, 2003, 353 с.
2. Паламарь-Мордвинцева Г.М. Флора водорослей континентальных водоёмов Украины. Десмидиевые водоросли. Вып. 1, ч. 2. – Київ, 2005, 573 с.
3. Паламарь-Мордвинцева Г.М., Петльований О.А. Флора водорослей Украины. Том 12. Стрептофитовые водоросли. Вып. 1. Родина Мезотениевые (Mesotaeniaceae). – Київ, 2009, 157 с.
4. Худжаев М. Флористические находки зеленых водорослей (Chlorophyta) из Рогунского водохранилища и его окрестностей. – Доклады НАНТ, 2022, т. 65, №5-6, с. 397-401.
5. Дорофеюк Н.И., Цэцэгмаа Д. Коспект флоры водорослей Монголии. – М.: Наука, 2002, 285 с.

П.А.Курбонова

ИЛОВАҶО ДОИРИ ФЛОРАИ ОБСАБЗҶОИ СТРЕПТОФИТИИ (STREPTOPHYTA) МАВЗЕҶОИ ОБИИ ТОҶИКИСТОН

Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани АМИТ

Дар мақола маълумот доир ба бозёфтҳои нави флоравии шубъаи обсабзҳои стрептофитии (Streptophyta) Тоҷикистон, ки дар обанбри Роғун в мавзеҳои обии гирду атрофи он дарёфт гардидаанд, оварда шудааст. Ҳамагӣ 19 намуд ва зернамудҳои ин обсабзҳо муайян карда шуд, ки 4 намуд ва як зернамуди онҳо (*Cylindrocystis brebissonii* var. *brebissonii* (Menegh. ex Ralfs) de Bary, *Cylindrocystis brebissonii* var. *turgida* Schmidle, *Cylindrocystis crassa* de Bary, *Netrium digitus* (Ehr. ex Bréb. in Ralfs) Itzigs. et Rothe, *Spirotaenia condensata* Brebisson in Ralfs) ҳамчун бозёфтҳои нав барои алгофлорай Тоҷикистон ба қайд гирифта шуданд.

Калимаҳои калидӣ: алгофлора, иловаҳо, Streptophyta, мавзеҳои обӣ, Тоҷикистон.

P.A.Kurbonova

**ADDITION DATES TO THE FLORA OF STREPTOPHYTA ALGAE OF THE
WATER BODIES OF TAJIKISTAN***Institute of Botany, Physiology and Genetics of Plants, National Academy of Sciences of Tajikistan*

There are new dates of Streptophyta algae division of the Tajikistan, which were found in Rogun reservoir, and in the surrounding water bodies. Totally 19 species of Streptophyta algae were found, among which 4 species and 1 interspecies (*Cylindrocystis brebissonii* var. *brebissonii* (Menegh. ex Ralfs) de Bary, *Cylindrocystis brebissonii* var. *turgida* Schmidle, *Cylindrocystis crassa* de Bary, *Netrium digitus* (Ehr. ex Bréb. in Ralfs) Itzigs. et Rothe, *Spirotaenia condensata* Brebisson in Ralfs) are marked as a new floristic findings for the algae flora of Tajikistan.

Key words: *algae flora, addition, Streptophyta, water bodies, Tajikistan.*

УДК 577.175.1: 633.511

М.А.Бабаджанова, А.К.Сайфудинов,

член-корреспондент НАН Таджикистана К.А.Алиев

**КИНЕТИН – АЛЛОСТЕРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТОР ФЕРМЕНТОВ
МУЛЬТИФЕРМЕНТНОГО КОМПЛЕКСА ЦИКЛА КАЛЬВИНА ИЗ ЛИСТЬЕВ
ХЛОПЧАТНИКА***Таджикский национальный университет*

В статье приведены экспериментальные данные по изучению влияния различных концентраций кинетина на фосфорibuлокиназную активность мультиферментного комплекса цикла Кальвина из листьев хлопчатника. Фосфорibuлокиназная активность определялась в присутствии различных субстратов: рибозо-5-фосфата и рибулозо-5-фосфата. Полученные результаты свидетельствуют о том, что кинетин является аллостерическим эффектором фосфорibuлокиназы мультиферментного комплекса цикла Кальвина.

Ключевые слова: хлопчатник, кинетин, фосфорibuлокиназная активность, мультиферментный комплекс цикла Кальвина, аллостерический эффектор.

Кинетин является синтетическим фитогормоном, относящимся к группе цитокининов. Цитокинин, наряду с другим фитогормонами, участвует в регуляции множества физиолого-биохимических процессов, включая целые физиологические и морфогенетические программы и регулируя на протяжении всего онтогенеза растений [1,2].

Главной мишенью цитокининов в растительной клетке являются пластиды. Цитокинины способствуют превращению этиопластов в хлоропласты, формированию внутренних мембран и сборке компонентов электрон-транспортной цепи хлоропластов, активации циклического фотофосфорилирования, возрастанию синтеза хлорофилла, синтеза многих ферментов, особенно ключевого фермента фотосинтеза – рибулозобисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы [3-6].

Однако влияние цитокининов на активность ферментов карбоксилирующей фазы фотосинтеза не изучено. Kende и Tavaris в 1968 г. было высказано предположение, что кинетин может выполнять роль аллостерического эффектора [7].

Целью данной работы было исследование действия кинетина *in vitro* на фосфорibuлокиназную активность мультиферментного комплекса цикла Кальвина листьев хлопчатника.

Материал и методы исследования

Объектом исследований служили листья хлопчатника (*Gossypium hirsutum* L.) сорта 108-Ф в фазе 5-6 настоящих листьев.

Хлопчатник выращивали в полевых условиях с соблюдением всех агротехнических мероприятий на экспериментальном участке Института ботаники, физиологии и генетики растений Национальной академии наук Таджикистана (г. Душанбе).

Получение экстракта из листьев хлопчатника подробно описано в работе [8].

Количественное содержание белка определяли с помощью реактива Бенедикта. Калибровочная кривая построена по бычьему сывороточному альбумину.

Определение активности фосфорибулокиназы. Об активности фосфорибулокиназы судили по скорости накопления щелочегидролизуемого фосфора рибулозо-1,5 бисфосфата.

В основу определения активности этого фермента взят метод Гурвитца (Hwrvitz), описанный в работе [9].

Результаты и их обсуждение

Чтобы понять механизм действия экзогенного кинетина на ферментативные активности мультиферментного комплекса цикла Кальвина в экстрактах из листьев хлопчатника цикла Кальвина на рисунке была отображена зависимость фосфорибулокиназной активности от концентрации кинетина при использовании собственного субстрата рибулозо-5-фосфата и рибозо-5-фосфата – субстрата рибозофосфатизомеразы.

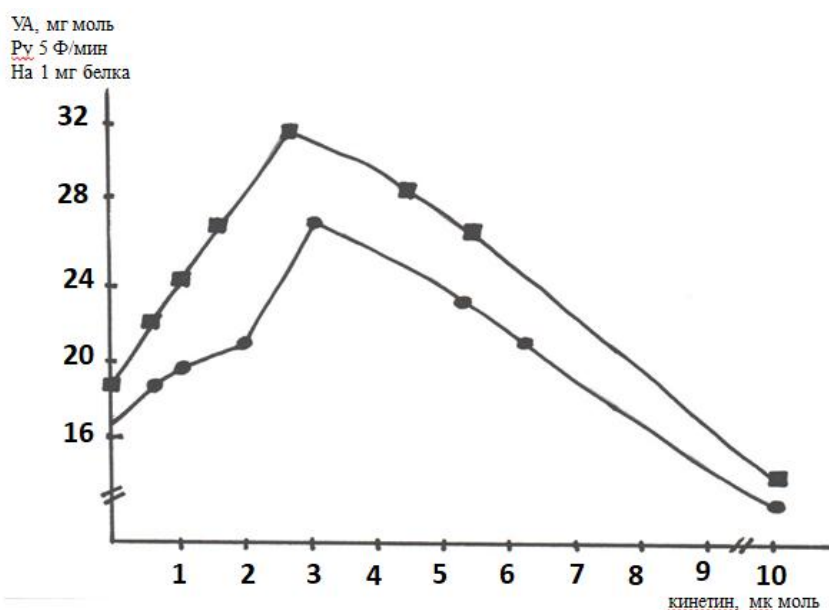


Рис. Зависимость от концентрации кинетина в реакционной среде при использовании различных субстратов фосфорибулокиназной активности мультиферментного комплекса цикла Кальвина в экстракте из листьев хлопчатника сорта 108-Ф, фаза развития растений 5-6 настоящих листьев.

•-•-• - рибулозо-5-фосфат;
□ - □ - рибозо-5-фосфат.

Из представленных на рисунке данных видны различия в форме кривых зависимости от концентрации кинетина в реакционной среде фосфорибулокиназной активности мультиферментного комплекса в присутствии различных субстратов.

Кривая зависимости фосфорибулокиназной активности при использовании собственного субстрата – рибулозо-5-фосфата, была сигмоидной. В пределах концентраций кинетина в реакционной

среде 0.5-2 мкмоль кривая имела лаг-период, при увеличении концентраций кинетина до 3 мкмоль активность фермента резко возрастала. Начиная с содержания кинетина в реакционной среде 4-5 мкмоль фосфорibuлокиназная активность снижалась, а при 10 мкмоль активность фермента ингибировалась. Таким образом, полученные данные соответствуют характеру проявления действия фитогормонов – в низких концентрациях они оказывают активирующее действие, а в высоких – ингибирующее, вызывая даже апоптоз (гибель).

Форма кривой зависимости фосфорibuлокиназной активности от концентрации кинетина в реакционной среде в присутствии рибозо-5-фосфата была совершенно иной – гиперболической на кривой не было лаг-периода, в пределах концентраций кинетина 0,5-3 мкмоль кривая как бы выпрямлялась из-за значительного возрастания ферментативной активности, затем в пределах концентраций кинетина 4-5 мкмоль активность фермента снижалась, а при содержанием 10 мкмоль гормона в реакционной среде ферментативная активность ингибировалась.

Полученные результаты по выпрямлению кинетической кривой дают основание полагать, что кинетин в присутствии рибозо-5-фосфата выполняет роль аллостерического эффектора, вызывающего координированные конформационные изменения в мультиферментном комплексе, ведущие к возрастанию максимальной скорости рибозофосфатизомеразной и фосфорibuлокиназной реакций.

Поступило 23.05.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кулаева О.Н. Цитокинины, их структура и функция. – М.: Наука, 1973, 263 с.
2. Полевой В.В. Фитогормоны. – Л.: ЛГУ, 1982, 249 с.
3. Мокроносов А.Т. Онтогенетический аспект фотосинтеза. – М.: Наука, 1981, 196 с.
4. Муромцев Г.С., Кулаева О.Н., Гамбург К.З., Чкаников Д.И. Регуляторы роста растений. – М.: Агропромиздат, 1987, 384 с.
5. Кефели В.И. Фотоморфогенез фотосинтеза и рост как основа продуктивности растений. – Пушкино: ОНТИ ПНЦ АН СССР, 1991, 133 с.
6. Алиев К.А. Молекулярные механизмы биогенеза фотосинтетического аппарата растений. – Душанбе, «Дониш», 1998, 72 с.
7. Kende H., Tavares JE. – Plant Physiol., 43, № 8, с.1244
8. Мирзорохимов А.К., Бабаджанова М.А., Нарзуллоев М.С., Эсаналиева Ш.А., Нематова Н., Сайфудинов А.К. – ДАН РТ, 2007, т.50, № 8, с.711-715.
9. Кочетов Г.А. Практическое руководство по энзимологии. – М.: Внеш., 1980, 272 с.

М.А.Бабаджанова, А.К.Сайфудинов, А.К.Алиев

КИНЕТИН – ТАЪСИРКУНАНДАИ АЛОСТЕРИКИИ МАЧМУАИ МУЛТИФЕРМЕНТИИ СИКЛИ КАЛВИН ДАР БАРГИ ПАХТА

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақолаи мазкур натиҷаҳо оид ба омӯзиши таъсири концентратсияҳои кинетин ба фаолнокии фосфорibuлокиназаи мултиферменти сикли Калвин дар барги пахта оварда шудааст. Фаолнокии фосфорibuлокиназа дар иштироки субстратҳои гуногун: рибозо-5-фосфат, рибулозо-5-фосфат муайян карда шудааст. Натиҷаҳои бадаст омада аз он шаҳодат медиҳанд, ки кинетин таъсиркунандаи аллостерикии фосфорibuлокиназаи маҷмуаи мултиферменти сикли Кальвин аст.

Калимаҳои калидӣ: пахта, кинетин, фаолнокии фосфорibuлокиназа, маҷмуаи мултиферменти сикли Калвин, фаолнокии аллостерикӣ.

M.A.Babadzhanova, A.K.Saifudinov, K.A.Aliyev

KINETIN IS AN ALLOSTERIC EFFECTOR OF ENZYMES OF THE CALVIN CYCLE MULTIENZYME COMPLEX FROM COTTON LEAVES.

Tajik National University

In this article experimental data on the study of the effect of various concentrations of kinetin on the phosphoribulokinase activity of the Calvin cycle multienzyme complex from cotton leaves are presents. Phosphoribulokinase activity was determined in the presence of various substrates as ribose-5-phosphate and ribulose-5-phosphate. The obtained results indicate that kinetin is an allosteric effector of phosphoribulokinase of the Calvin cycle multienzyme complex.

Key words: cotton, kinetin, phosphoribulokinase activity, multienzyme complex of Calvin cycle, allosteric effector.