

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Г.А.Юсупов, М.И.Джангибеков.** Неравенства между наилучшими совместными приближениями в пространстве L_2 и значения n -поперечников некоторых функциональных классов559
- М.О.Акобиршоев, В.Д.Сайнаков.** О наилучшем совместном приближении “углом” в среднем периодических функций двух переменных некоторых классов функций567
- А.Захурбеков.** Верхние грани наилучших совместных приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в $L_2(Q)$ 580
- С.А.Исхоков, А.Е.Куджмуродов, М.Султонзода.** Фредгольмовая разрешимость вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве586
- М.Ф.Абдукаримов, Ф.Р.Исмаилов.** О разрешимости одной смешанной задачи для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом из класса суммируемых с квадратом функций592
- Л.Н.Раджабова.** О явных решениях переопределенной системы интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми граничными линиями601

МЕХАНИКА

- З.Н.Бахромова.** Решение нелинейной задачи о деформации длинной цилиндрической оболочки....610

АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, Х.Г.Асоев.** Динамические и физические свойства кометы C/2020 PV6 (PANSTARRS) по наблюдениям в Гиссарской астрономической обсерватории617

ФИЗИКА

- М.Ш.Имом.** Исследование скоростей счета временных совпадений импульсов γ -п и суммарных совпадений источника ^{252}Cf цифровым методом разделения импульсов627

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Ш.Д.Отаев, С.М.Гаффорзода, Н.М.Джамолов, Д.Х.Мирзоев, А.М.Каюмов.** Сравнительная оценка получения глинозёма и оксида железа из алюмосиликатных руд спеканием с CaCl_2634
- З.Х.Гайбуллаева, Ф.М.Рахимов, Т.Х.Гадоев.** Изучение процесса получения водородсодержащих газов638

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- М.Д.Бобоёров, К.О.Бобоев, Б.Б.Баротов, С.К.Ходжиев, И.Мирсаидзода.** Дифференциально-термический анализ урановых руд Таджикистана643
- А.С.Курбонов, А.П.Тагаев, Р.Дж.Акрамзода, А.С.Давлатов, М.М.Тагоев.** Кинетика разложения боросиликатных руд Таджикистана минеральными кислотами647
- С.М.Бахронов, М.Д.Бобоёров, Б.Б.Баротов, А.Мирзоев, И.Мирсаидзода.** Термодинамический анализ протекающих процессов при разложении урансодержащих руд месторождения «Ганзим»653

ЭКОЛОГИЯ

- М.З.Ахмедов.** Содержание изотопа цезия-137 в почвенном покрове Северного Таджикистана658

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

- Ф.А.Шарифов.** Повышение свойств битума извлечённого из старого асфальтобетона, гудрона растительного масла и комплексной добавки на его основе666

БОТАНИКА

- Х.Х.Хисориев, М.Т.Бобоев, П.А.Курбонова, М.С.Худжаев.** Дополнения к флоре диатомовых водорослей (Bacillariophyta) водоёмов Таджикистана673

ОРНИТОЛОГИЯ

- Х.М.Талбонов.** О двух подвидах обыкновенного скворца – *Sturnus vulgaris* (Finsch, 1901) в Гиссарской долине679

CONTENTS

MATHEMATICS

- A.A.Usupov, M.I.Jangibekov.** Inequalities between the best joint approximations in the space L_2 and the values of n -widths of some functional classes.....559
- M.O.Akobirshoev, V.D.Sainakov.** On the best averaged simultaneous approximation by “angle” of periodic functions of two variables for some class of functions567
- A.Zahurbekov.** Upper bounds of best joint approximation of some classes of periodic functions of two variables by “circular” Fourier sums in $L_2(Q)$580
- S.A.Iskhokov, A.Y.Kudzhmurodov, M.Sultonzoda.** Fredholm solvability of variational Dirichlet problem for degenerate elliptic operators in the hole space586
- M.F.Abdukarimov, F.R.Ismatov.** On the solvability of a mixed problem for a telegraph equation with a variable coefficient from the class of functions summable with a square592
- L.N.Rajabova.** On explicit solutions to a redetermined system of Volterra-type integral equations with singular boundary lines601

MECHANICS

- Z.N.Bakhromova.** Solution of the nonlinear problem on deformation of a long cylindrical shell610

ASTRONOMY

- G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, H.G.Asoev.** Dynamic and physical properties of comet C/2020 PV6 (PANSTARRS) from observations at Hissar astronomical observatory617

PHYSICS

- M.Sh.Imom.** The research of digital analysis of counting rates of time coincidences of γ -n pulses and total coincidences of a ^{252}Cf source by the method of separating pulses of different ionizing radiations.....627

INORGANIC CHEMISTRY

- Sh.D.Otaev, S.M.Gaforzoda, N.M.Jamolov, D.Kh.Mirzoev, A.M.Kayumov.** Comparative assessment of production of aluminum and iron oxides from aluminum silicate ores sintering with CaCl_2634
- Z.H.Gaibullaeva, A.V.Rahimov, N.H.Gadoev.** Studying the process of obtaining hydrogen - containing gases.....638

PHYSICAL CHEMISTRY

- M.D.Boboyorov, K.O.Bobojev, B.B.Barotov, S.K.Khojiev, I.Mirsaidzoda.** Differential thermal analysis of uranium ores in Tajikistan.....643
- A.S.Kurbonov, A.P.Tagayev, R.J.Akramzoda, A.S.Davlatov, M.M.Tagoev.** Kinetics of decomposition of borosilicate ores of Tajikistan with mineraloids647

S.M.Bahronov, M.D.Boboyorov, B.B.Barotov, A.Mirzoev, I.Mirsaidzoda. Thermodynamic analysis of processing processes in decomposition of uranium-containing ores from the Tanzim**653**

ECOLOGY

M.Z.Akhmedov. Content of caesium-137 isotope in the soil cover Northern Tajikistan**658**

CHEMICAL TECHNOLOGY

F.A.Sharifov. Increasing the properties of bitumen extracted from old asphalt concrete, vegetable oil gudron and a complex additive based on it**666**

BOTANY

H.H.Hisoriev M.T.Boboev, P.A.Kurbonova, M.S.Khudzhaev. Addition dates to the flora of Bacillariophyta algae of the water bodies of Tajikistan**673**

ORNITHOLOGY

Kh.M.Talbonov. About two subspecies of the common starling – *Sturnus vulgaris poltaratskyi* Finsch, (1901) in the Gissar valley**679**

УДК 517.5

Г.А.Юсупов, М.И.Джангибеков*

**НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ НАИЛУЧШИМИ СОВМЕСТНЫМИ
ПРИБЛИЖЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2 И ЗНАЧЕНИЯ
 n -ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ**

Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни,

**Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева*

(Представлено академиком НАНТ М.Ш.Шабозовым 06.05.2022 г.)

В работе решена экстремальная задача отыскания точной верхней грани наилучшего совместного приближения периодических функций и их промежуточных производных тригонометрическими полиномами в L_2 на некоторых классах функций, характеристики гладкости g -ых производных которых ограничены сверху заданной мажорантой Φ . Вычислены точные значения n -поперечников некоторых классов функций.

Ключевые слова: *точные неравенства, наилучшее совместное приближение, верхняя грань, экстремальные задачи, характеристика гладкости, модуль непрерывности, неравенства типа Джексона-Стечкина, n -поперечники.*

1. Введение. При решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации как функций действительного, так и функций комплексного переменного часто применяют различные модификации модуля непрерывности (см., например, [1-10]). При этом наиболее важной экстремальной задачей является задача отыскания точной константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина.

В данной работе получены некоторые точные неравенства между наилучшими совместными приближениями периодических функций и их последовательными производными тригонометрическими полиномами и характеристикой гладкости функций $\Lambda_m(f)$, введенной ранее в работе Руновского [3]. Отметим, что некоторые экстремальные задачи, связанные с характеристикой гладкости $\Lambda_m(f)$, изучены в [11-13].

Введем стандартные обозначения: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}$ – множество натуральных, целых неотрицательных, положительных и действительных чисел соответственно. $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ пространство действительных 2π -периодических суммируемых с квадратом функций f с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Адрес для корреспонденции: Юсупов Гулзорхон Амиришоевич. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет. E-mail: g_7777@mail.ru

Через $\Delta_h^m f(x)$ обозначим конечную разность m -го порядка функции $f \in L_2$ в точке x с шагом h :

$$\Delta_h^m f(x) := \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x + (m-k)h).$$

Модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$ определим, как обычно, равенством

$$\omega_m(f, t) := \sup \{ \|\Delta_h^m f(\cdot)\| : |h| \leq t \}. \tag{1}$$

Следуя [3], под усредненной характеристикой гладкости функции $f \in L_2$ будем понимать величину

$$\Lambda_m(f, t) := \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^m f\|^2 dh \right)^{1/2}, \quad t > 0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что для любого $t > 0$ имеет место неравенство

$$\Lambda_m(f, t) \leq \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^2(f, h) dh \right)^{1/2} \leq \omega_m(f, t).$$

Отметим, что основные свойства характеристики гладкости (2) изучены в работе [10].

Пусть $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}[0, 2\pi] (r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} \equiv L_2)$ – множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)} \in L_2$. Через \mathcal{T}_{2n-1} обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$.

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

величина ее наилучшего среднеквадратического приближения элементами подпространства \mathcal{T}_{2n-1} равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &:= \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

– частная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда Фурье функции $f, \rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $a_k(f)$ – косинус-, $b_k(f)$ – синус-коэффициенты ряда Фурье функции f . Также известно, что для функции $f \in L_2^{(r)}$, наряду с функцией f и производной r -го порядка $f^{(r)}$, все ее промежуточные производные $f^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, r-1; r \in \mathbb{N}, r \geq 2$) также принадлежат пространству L_2 . Этот факт, вытекает из следующего неравенства типа Колмогорова для функции $f \in L_2^{(r)}$ (см. [14, с.127]):

$$\|f^{(s)}\| \leq \|f\|^{1-s/r} \cdot \|f^{(r)}\|^{s/r} \quad (s = 1, 2, \dots, r-1; r \in \mathbb{N}, r \geq 2).$$

Простыми вычислениями можно убедиться [13], что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любом $s = 0, 1, \dots, r$ имеет место равенство

$$E_{n-1}(f^{(s)}) = \|f^{(s)} - S_{n-1}(f^{(s)})\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}.$$

Поэтому представляет несомненный интерес изучение поведения величин $E_{n-1}(f^{(s)})$ на самом классе $L_2^{(r)}$ или на некотором ее подклассе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$.

Таким образом, возникает следующая задача: требуется найти точное значение наилучшего совместного приближения класса $\mathfrak{M}^{(r)} \subseteq L_2^{(r)}$:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup \{ E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \}. \quad (4)$$

Для решения задачи (4) нам понадобятся некоторые точные неравенства между величиной $E_{n-1}(f^{(s)})$ и усредненной с заданной весовой функцией характеристикой гладкости $\Lambda_m(f, t)$.

Положим

$$\mathcal{J}_{k,m}(t) := \left(\frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos kh)^m dh \right)^{1/2}, \quad (5)$$

где $k, m \in \mathbb{N}$ и $t > 0$. Легко проверить, что $\mathcal{J}_{k,m}(t) = \mathcal{J}_{1,m}(kt)$.

Введем обозначение $\text{sinct} := \{\sin t / t, \text{ если } t \neq 0; 1, \text{ если } t = 0\}$.

Всюду далее при вычислении верхней грани в соотношениях общего характера по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$ предполагается, что $f \neq \text{const}$. Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$ и $0 < t \leq 3\pi/4$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_1(f^{(r)}, t/n)} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \text{sinct})}}. \quad (6)$$

Доказательство. Равенство (6) является следствием более общего равенства [11]

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)}, t/n)} = \frac{1}{2^{m/2} \mathcal{J}_{1,m}(t)}, \tag{7}$$

верного для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и $0 < t \leq 3\pi/4$, где $\mathcal{J}_{1,m}(t)$ определено равенством (5). Полагая в (7) $m = 1$, заметим, что

$$\mathcal{J}_{1,1}^2(t) = \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos h) dh = 1 - \frac{\sin t}{t} = 1 - \text{sinct}. \tag{8}$$

Здесь введено известное обозначение $\text{sinct} := \frac{\sin t}{t}$.

Учитывая равенство (8), из (7) получаем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_1(f^{(r)}, t/n)} = \frac{1}{\sqrt{2} \mathcal{J}_{1,1}(t)} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \text{sinct})}},$$

откуда и следует равенство (6). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 при $t = \pi/2$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} \cdot E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_1(f^{(r)}, \pi/(2n))} = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}}. \tag{9}$$

2. Точные значения n -поперечников классов функций $W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$ в L_2 . Прежде чем сформулировать основные результаты работы, напомним необходимые понятия и определения. Пусть S – единичный шар в L_2 ; Q – выпуклое центрально-симметричное множество из L_2 ; $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство, $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n ; $\mathcal{L} : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор; $\mathcal{L}^\perp : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(Q; L_2) = \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset Q \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \},$$

$$d_n(Q; L_2) = \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - g\| : g \in \Lambda_n \} : f \in Q \} : \Lambda_n \subset L_2 \},$$

$$\delta_n(Q; L_2) = \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}(f)\| : f \in Q \} : \mathcal{L} L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \},$$

$$d^n(Q; L_2) = \inf \{ \sup \{ \|f\| : f \in Q \cap \Lambda_n \} : \Lambda^n \subset L_2 \},$$

$$\Pi_n(Q; L_2) = \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\| : f \in Q \} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \}$$

называют бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n -поперечниками множества Q в L_2 . Так как L_2 является гильбертовым пространством, то имеют место следующие соотношения между перечисленными n -поперечниками:

$$b_n(Q; L_2) \leq d^n(Q; L_2) \leq d_n(Q; L_2) = \delta_n(Q; L_2) = \Pi_n(Q; L_2). \tag{10}$$

Используя определение характеристики гладкости (2), введем в рассмотрение следующий класс функций. Пусть $\Phi(u)$, где $u \in (0, 2\pi]$, есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Функцию Φ далее назовем мажорантой. Символом $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $\tau \in (0, 2\pi]$ имеет место неравенство $\Lambda_m(f^{(r)}, \tau) \leq \Phi(\tau)$.

Обозначим через t_* величину аргумента функции $\text{sinc}\tau$, при котором она достигает на множестве $(0, 2\pi]$ своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* – наименьший положительный корень уравнения $t = t(4.49 < t_* < 4.51)$ (см., например, [5], [7]). Следуя [5] и [7], полагаем $(1 - \text{sinc}\tau)_* := \{1 - \text{sinc}\tau, \text{ если } 0 \leq \tau \leq t_*, 1 - \text{sinc}t_*, \text{ если } t_* \leq \tau < \infty\}$. Для класса функций $\mathfrak{M} \subset L_2$ обозначим

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть для любых чисел $0 < \tau \leq 2\pi$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта Φ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(\tau)}{\Phi(\pi / (2n))} \geq \left\{ \frac{\pi(1 - \text{sinc}n\tau)_*}{\pi - 2} \right\}^{1/2}. \tag{11}$$

Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} q_{2n-1}(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi); L_2) &= q_{2n}(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi); L_2) = \\ &= E_{n-1}(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)) = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right), \end{aligned} \tag{12}$$

где $q_m(\cdot)$ – любой из перечисленных выше m -поперечников. При этом множество мажорант Φ , удовлетворяющих ограничениям (11), не пусто.

Доказательство. Используя соотношения (6) при $s = 0, f^{(0)} \equiv f$, в котором полагаем $t = \pi/2$, запишем оценку сверху величины наилучшего полиномиального приближения функции $f \in L_2^{(r)}$

$$E_{n-1}(f) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{13}$$

Учитывая определение класса функций $W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$ на основании неравенства (13) и соотношения (11) между n -поперечниками запишем оценки сверху

$$\begin{aligned} q_{2n}(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi); L_2) &\leq q_{2n-1}(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi); L_2) \leq \\ &\leq d_{2n-1}(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi); L_2) \leq E_{n-1}(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)) \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

В силу соотношения (11) для получения соответствующих оценок снизу вышеперечисленных n -поперечников класса $W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$ достаточно оценить снизу его бернштейновский n -поперечник. С этой целью в подпространстве тригонометрических полиномов \mathcal{T}_{2n+1} порядка n зафиксируем шар

$$S_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}.$$

Используя формулу [11]

$$\Lambda_1(f^{(r)}, \tau) = \left\{ 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \mathcal{J}_{1,1}^2(k\tau) \right\}^{1/2},$$

для любого полинома $T_n \in \mathcal{T}_{2n+1}$ получаем

$$\begin{aligned} \Lambda_1(T_n^{(r)}, \tau) &= \left\{ 2 \sum_{k=1}^n k^{2r} \rho_k^2(T_n) \mathcal{J}_{1,1}^2(k\tau) \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq n^{2r} \{2(1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*\}^{1/2} \cdot \|T_n\|. \end{aligned} \tag{15}$$

В силу неравенства (15) и условия (11) для произвольного полинома $T_n \in S_{2n+1}$ при любом $\tau \in (0, 2\pi]$ запишем

$$\begin{aligned} \Lambda_1(T_n^{(r)}, \tau) &\leq n^{2r} \{2(1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*\}^{1/2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \\ &= \left\{ \frac{\pi(1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*}{\pi-2} \right\}^{1/2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \Phi(\tau). \end{aligned}$$

Этим доказано, что $S_{2n+1} \subset W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$. Используя определение бернштейновского n -поперечника и соотношения (10), имеем

$$q_{2n}(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi); L_2) \geq b_{2n}(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi); L_2) \geq$$

$$\geq b_{2n}(S_{2n+1}; L_2) \geq \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \quad (16)$$

Требуемые равенства (12) получаем путем сравнения оценок сверху (14) с оценками снизу (16).

В [9] доказано, что функция $\Phi_*(\tau) = \tau^{1/(\pi-2)}$ удовлетворяет ограничениям (11). Теорема 2 доказана.

Поступило 11.05.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ditzian Z., Totić V. Moduli of Smoothness. – Springer Ser. Comput. Math., 9, Springer, New York, 1997.
2. Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости. – М.: Мир, 1988.
3. Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$. – Матем. сб., 1994, т.185, №8, с. 81-102.
4. Пустовойтов Н.П. Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усредненные разности и многомерная теорема Джексона. – Матем. сб., 1997, т.188, №10, с. 95-108.
5. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций. – Доклады РАН, 2013, т.451, №6, с. 625-628.
6. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π -периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$. – Матем. заметки, 2004, т.76, №6, с. 803-811.
7. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 . – Матем. заметки, 2012, т.92, №4, с. 497-514.
8. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 . – Матем. заметки, 2013, т.94, №6, с. 908-917.
9. Вакарчук С.Б. Обобщенные характеристики гладкости в неравенствах типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 . – Матем. заметки, 2015, т.98, №4, с. 511-529.
10. Юсупов Г.А. О структурных характеристиках функций из L_2 и точных значениях поперечников некоторых классов функций. – ДАН РТ, 2015, т.58, №2, с. 101-105.
11. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций. – Матем. заметки, 2016, т.99, №2, с. 215-238.
12. Шабозов М.Ш. Неравенство между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 . – Матем. заметки, 2021, т.110, №3, с. 450-458.
13. Шабозов М.Ш., Абдухаминов М.А. Некоторые неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве L_2 . – Изв. вузов. Математика, 2021, 10, с. 78-91.

14. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1988, 424 с.

Г.А.Юсупов, М.И.Чангибеков*

НОБАРОБАРИ БАЙНИ НАЗДИККУНИИ ҲАМҶОЯИ БЕҲТАРИН ДАР ФАЗОИ L_2 ВА ҚИМАТҲОИ n -ҚУТРҲОИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ ФУНКЦИОНАЛӢ

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айни,

**Донишгоҳи давлатии Хоруғ ба номи М.Назаршоев*

Дар мақола масъалаи экстремалии ёфтани сарҳади аниқи болии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини функсияҳои даврӣ ва ҳосилаҳои пайдарпайи онҳо ба воситаи бисёрраъзогии тригонометрӣ дар L_2 барои баъзе синфҳои функсияҳо, ки характеристикаи суфтагии ҳосилаи тартиби r -ӯми онҳо аз боло бо мажорантаи додашудаи Φ маҳдуд аст, ҳал карда шудааст. Қиматҳои аниқи n -қутрҳои баъзе синфи функсияҳои ҳисоб карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: *нобаробари аниқ, наздиккунии ҳамҷояи беҳтарин, сарҳади болоӣ, масъалаҳои экстремалӣ, характеристикаи суфтагӣ, модули бефосилагӣ, nobarobari намуди Чексон-Стечкин, n -қутрҳо.*

A.A.Usupov, M.I.Jangibekov*

INEQUALITIES BETWEEN THE BEST JOINT APPROXIMATIONS IN THE SPACE L_2 AND THE VALUES OF n -WIDTHS OF SOME FUNCTIONAL CLASSES

Tajik State Pedagogical University named after S.Aini,

**M.Nazarshoev Khorog State University*

The paper solves the extremal problem of finding the exact upper bound of the best joint approximation of periodic functions and their intermediate derivatives trigonometric polynomials in L_2 on some classes of functions whose r -th derivatives are bounded from above by a given majorant Φ . Exact values of n -widths of some classes of functions are calculated.

Key words: *exact inequalities, best joint approximation, upper bound, extreme tasks, smoothness characteristic, modulus of continuity, Jackson-Stechkin type inequalities, n -widths.*

УДК 517.5

М.О.Акобиршоев, В.Д.Сайнаков

О НАИЛУЧШЕМ СОВМЕСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ “УГЛОМ” В СРЕДНЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Технологический университет Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 29.04.2022 г.)

В метрике L_2 получены точные неравенства между величиною наилучших совместных приближений дифференцируемых 2π -периодических по каждой из переменных функций $f(x,y)$ и их последовательных производных $f^{(\mu,\nu)}(x,y)$ ($\mu = 0, 1, \dots, r$; $\nu = 0, 1, \dots, s$) тригонометрическими “углами” с двойными интегралами, содержащими смешанные модули непрерывности высших порядков старших производных.

Ключевые слова: *наилучшее совместное приближение, тригонометрические “углы”, квазиполином, смешанный модуль непрерывности.*

1. Введение. Целью данной работы является получение результатов, связанных с точными оценками погрешности среднеквадратического совместного приближения функций двух переменных тригонометрическими “углами” и их соответствующими производными. Отметим, что понятие “угол” было введено М.К.Потаповым [1, 2] и в дальнейшем с успехом применялось многими математиками (см., например, [3-9]). При решении экстремальных задач аппроксимации функций двух переменных применение аппарата “углов” в качестве аппроксимирующих подпространств имеют заметные преимущества по сравнению с двумерными полиномами и другими традиционными методами, поскольку именно “углы” дают минимальные оценки погрешности на классах функций и реализуют точные значения квазипоперечников [6-9]. Данная статья продолжает указанную тематику и посвящена использованию одной из характеристик гладкости функций, рассмотренной ранее С.Б.Вакарчуком [10, 11].

Предварительно приводим определения и вспомогательные факты, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m := \text{span}\{u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)\}, \quad V_n := \text{span}\{v_0(y), v_1(y), \dots, v_n(y)\}$$

– их конечномерные подпространства, $U_m \subset X, V_n \subset Y$. Выражение вида

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{\nu=0}^m u_{\nu}(x) \psi_{\nu}(y) + \sum_{\mu=0}^n y_{\mu}(y) \varphi_{\mu}(x),$$

Адрес для корреспонденции: *Акобиршоев Мухиддин Отамишоевич. 734061, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Н.Карабаева, 63/3, Технологический университет Таджикистана. E-mail: muhiddin — ao@mail.ru*

где $\{\varphi_\mu(x)\}_{\mu=0}^n$ и $\{\psi_\nu(y)\}_{\nu=0}^m$ – соответственно произвольные наборы функций из пространств X и Y , назовем обобщенным полиномом, порожденным подпространствами U_m и V_n . Указанные обобщенные полиномы образуют подпространство, которое обозначим

$$G_{m,n} := G(U_m, V_n) = U_m \otimes Y \oplus V_n \otimes X,$$

где операции “ \otimes ” и “ \oplus ” обозначают соответственно декартово произведение и прямую сумму множеств. Пусть $(Z, \|\cdot\|_Z)$ – линейное нормированное пространство, содержащее подпространство $G_{m,n}$. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m,n}(f)_Z &:= \mathcal{E}(f; G_{m,n})_Z = \mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z = \\ &= \inf \{ \|f - g_{m,n}\|_Z : g_{m,n} \in G_{m,n} \} \end{aligned} \tag{1}$$

и если \mathfrak{M} – некоторое множество функций f , то положим

$$\mathcal{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, G_{m,n})_Z = \sup \{ \mathcal{E}_{m,n}(f)_Z : f \in \mathfrak{M} \}. \tag{2}$$

Величина (1) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $G_{m,n}$, а (2) – отклонение множества \mathfrak{M} от $G_{m,n}$ в нормированном пространстве $(Z, \|\cdot\|_Z)$. Пусть \mathcal{L} – линейный оператор, действующий на функцию $f \in \mathfrak{M}$, образ которого принадлежит множеству $G_{m,n}$. Положим

$$\begin{aligned} e(\mathfrak{M}, \mathcal{L})_Z &:= \sup \{ \|f - \mathcal{L}(f)\|_Z : f \in \mathfrak{M} \}, \\ e_{m,n}(\mathfrak{M})_Z &:= e(\mathfrak{M}, G_{m,n})_Z := \inf \{ e(\mathfrak{M}, \mathcal{L})_Z : \mathcal{L}(f) \in G_{m,n} \}. \end{aligned} \tag{3}$$

В этой работе для некоторых центрально-симметричных множеств периодических функций $\mathfrak{M} \subset L_2(Q)$ найдены точные значения величин (2) и (3). Пусть теперь

$$U_{2m+1}^* := \text{span} \{ e^{ipx} \}_{p=-m}^m \subset L_2[0, 2\pi], V_{2m+1}^* := \text{span} \{ e^{iqy} \}_{q=-n}^n \subset L_2[0, 2\pi].$$

Очевидно, что функция

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{|p| \leq m} \psi_p(y) e^{ipx} + \sum_{|q| \leq n} \phi_q(x) e^{iqy}, \quad m, n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

принадлежит подпространству $G(U_{2m+1}^*, V_{2n+1}^*)$. Функции вида (4) называют тригонометрическими “углами” [1, 2] или тригонометрическими квазиполиномами [12]. Пусть $L_2 := L_2(Q), Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ – пространство комплекснозначных 2π -периодических по каждой из переменных функций f , суммируемых с квадратом модуля и конечной нормой

$$\|f\|_2 = \|f\|_{L_2(Q)} = \left(\frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} |f(x,y)|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Для функции $f \in L_2(Q)$ с формальным разложением в двойной ряд Фурье

$$f(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}, \tag{5}$$

где

$$c_{pq}(f) := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x,y) e^{-i(px+qy)} dx dy$$

– двойные коэффициенты Фурье функции $f \in L_2(Q)$, квазиполиномом Фурье порядка (m,n) , $m,n \in \mathbb{N}$ называют выражение

$$\Phi_{m,n}(f; x,y) = \left(\sum_{|p| \leq m} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{|q| \leq n} - \sum_{|p| \leq m} \sum_{|q| \leq n} \right) c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}. \tag{6}$$

Легко проверить, что $\Phi_{m,n}(f)$ принадлежит $G(U_m^*, V_n^*)$. В [13], доказано, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{L_2(Q)} &= \inf \left\{ \|f - g_{m-1,n-1}\|_{L_2(Q)}^2 : g_{m-1,n-1} \in G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*) \right\} = \\ &= \|f - \Phi_{m-1,n-1}(f)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{\substack{|p| \geq m \\ |q| \geq n}} |c_{pq}(f)|^2 = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho_{p,q}^2(f), \end{aligned} \tag{7}$$

где для краткости в последней двойной сумме положено

$$\rho_{p,q}^2(f) := |c_{p,q}(f)|^2 + |c_{-p,q}(f)|^2 + |c_{p,-q}(f)|^2 + |c_{-p,-q}(f)|^2. \tag{8}$$

В частности, из (7) следует, что если $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, то

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{L_2(Q)} = \mathcal{E}_{m-1}^2(f_1)_{L_2[0,2\pi]} \cdot \mathcal{E}_{n-1}^2(f_2)_{L_2[0,2\pi]}, \tag{9}$$

где, как обычно,

$$\mathcal{E}_{\nu-1}^2(g)_{L_2[0,2\pi]} := \inf \{ \|g - T_{\nu-1}\|_{L_2[0,2\pi]}^2 : T_{\nu-1} \in G_{2\nu-1} \}$$

– величина наилучшего среднеквадратического приближения 2π -периодической функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами $G_{2\nu-1} := span \left\{ e^{ijx} \right\}_{j=-(\nu-1)}^{\nu-1}$ порядка $2\nu-1$ в пространстве $L_2[0,2\pi]$.

Через $C^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$, обозначим множество функций $f \in C(Q)$, имеющих в квадрате Q непрерывные частные производные

$$f^{(\mu,\nu)}(x, y) := \partial^{\mu+\nu} f / \partial x^\mu \partial y^\nu, \mu \leq r, \nu \leq s,$$

а через $L_2^{(r,s)} := L_2^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$, – множество функций $f \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$, $r \geq 2, s \geq 2$, у которых частные производные $f^{(r,\nu)}$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu = \overline{0, s-1}$, $f^{(\mu,s)}$, $\mu = \overline{0, r-1}$, $s \in \mathbb{N}$ существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования, частные производные $f^{(r,0)}$, $f^{(0,s)}$ и смешанная производная $f^{(r,s)}$ принадлежат пространству L_2 .

Для произвольной функции $f \in L_2$ определим модуль непрерывности k -го порядка по переменной x и l -го порядка по переменной y

$$\omega_{k,l}(f; t, \tau)_2 := \sup \left\{ \left\| \Delta_{u,v}^{k,l} f(\cdot, \cdot) \right\|_{L_2(Q)} : |u| \leq t, |v| \leq \tau \right\}, \tag{10}$$

где

$$\Delta_{u,v}^{k,l} f(x, y) = \sum_{\nu=0}^k \sum_{\mu=0}^l (-1)^{\mu+\nu} \binom{k}{\nu} \binom{l}{\mu} f(x + \nu u, y + \mu v).$$

Используя равенство (5) и тождество Парсеваля, величину (10) после выполнения некоторых несложных вычислений можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} & \omega_{k,l}^2(f; t, \tau)_2 := \\ & := 2^{k+l} \sup \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \rho_{p,q}^2(f) (1 - \cos pu)^k (1 - \cos qv)^l : |u| \leq t, |v| \leq \tau \right\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Отметим, что ряд экстремальных задач с использованием смешанного модуля непрерывности (11) решен, например, в работах [5, 8].

При решении некоторых задач теории аппроксимации вместо модуля непрерывности (11) иногда удобнее использовать следующую характеристику гладкости функции $f \in L_2$:

$$\begin{aligned} & \Omega_{k,l}(f; t, \tau)_2 = \\ & = \left\{ \frac{1}{t^k \tau^l} \int_0^t \cdots \int_0^t \int_0^\tau \cdots \int_0^\tau \left\| \Delta_{u,v}^{k,l} f(\cdot, \cdot) \right\|^2 du_1 \cdots du_k dv_1 \cdots dv_l \right\}^{1/2}, t, \tau > 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_l)$, а $\Delta_{u,v}^{k,l} := \Delta_{u_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{u_k}^1 \Delta_{v_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{v_l}^1$, (см., например, [10, 11]).

Обозначим $\text{sinct} := (\text{sint}) / t (t \neq 0)$, доопределив данную функцию значением 1 в точке $t = 0$, полагая $\text{sinc}0 := 1$. Используя равенство (5) и тождество Парсеваля, после выполнения некоторых несложных вычислений величину (12) можно записать в следующем явном виде

$$\begin{aligned} \Omega_{k,l}(f;t,\tau)_2 &= 2^{k+l} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |c_{p,q}(f)|^2 (1-\operatorname{sinc}pt)^k (1-\operatorname{sinc}q\tau)^l = \\ &= 2^{k+l} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \rho_{p,q}^2(f) (1-\operatorname{sinc}pt)^k (1-\operatorname{sinc}q\tau)^l, t, \tau > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Заметим, что если функция $f \in L^{(r,s)}$, то, дифференцируя двойной ряд (5) r раз по переменной x и s раз по переменной y в смысле сходимости в L_2 , запишем

$$f^{(r,s)}(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (ip)^r (iq)^s c_{p,q}(f) e^{i(px+qy)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{p,q}(f^{(r,s)}) e^{i(px+qy)},$$

где положено

$$c_{p,q}(f^{(r,s)}) = (ip)^r (iq)^s c_{p,q}(f).$$

Поскольку

$$|c_{p,q}(f^{(r,s)})|^2 = p^{2r} q^{2s} |c_{p,q}(f)|^2,$$

то в силу равенства (8) имеем

$$\rho_{p,q}^2(f^{(r,s)}) = p^{2r} q^{2s} \rho_{p,q}^2(f). \tag{14}$$

Учитывая равенство (14), из (13) для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ получаем

$$\Omega_{k,l}(f^{(r,s)};t,\tau)_2 = 2^{k+l} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2r} q^{2s} \rho_{p,q}^2(f) (1-\operatorname{sinc}pt)^k (1-\operatorname{sinc}q\tau)^l. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь экстремальную задачу об одновременном приближении функций $f \in L_2^{(r,s)}$ и их смешанных частных производных $f^{(\mu,\nu)}$, $0 \leq \mu \leq r$, $0 \leq \nu \leq s$, тригонометрическими “углами” и их соответствующими производными:

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2 = \inf \{ \| f^{(\mu,\nu)} - g_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)} \|_2^2 : g_{m-1,n-1} \in G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*) \}.$$

Как и при доказательстве формулы (7), убедимся, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(\mu,\nu)})_2 &= \| f^{(\mu,\nu)} - \Phi_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)}) \|^2 = \\ &= \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho_{p,q}^2(f^{(\mu,\nu)}) = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} p^{2\mu} q^{2\nu} \rho_{p,q}^2(f), \end{aligned} \tag{16}$$

где функция $\Phi_{m-1,n-1}(g)$ определена равенством (6).

Теорема 1. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq \mu$, $s \geq \nu$ и $(t, \tau) \in (0, 3\pi/4m] \times (0, 3\pi/4n]$ имеет место точное неравенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(\mu,\nu)})_2 &\leq m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)} \times \\ &\times \{2(1-\operatorname{sinc}mt)\}^{-k/2} \{2(1-\operatorname{sinc}n\tau)\}^{-l/2} \Omega_{k,l}(f^{(r,s)};t,\tau)_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Существует функция $f_0 \in L_2^{(r,s)}$, для которой (17) обращается в равенство.

Доказательство. В самом деле, учитывая, что [14]

$$\max\{|\operatorname{sinc}u| : u \geq kv, 0 < kv \leq 3\pi/4\} = \operatorname{sinc}kv,$$

в силу (16) запишем

$$\begin{aligned} \Omega_{k,l}^2(f^{(r,s)};t,\tau)_2 &\geq 2^{k+l} \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} p^{2r} q^{2s} \rho_{p,q}^2(f) (1-\operatorname{sinc}pt)^k (1-\operatorname{sinc}q\tau)^l \geq \\ &\geq 2^{k+l} m^{2(r-\mu)} n^{2(s-\nu)} (1-\operatorname{sinc}mt)^k (1-\operatorname{sinc}n\tau)^l \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} p^{2\mu} q^{2\nu} \rho_{p,q}^2(f) = \\ &= m^{2(r-\mu)} n^{2(s-\nu)} \{2(1-\operatorname{sinc}mt)\}^k \{2(1-\operatorname{sinc}n\tau)\}^l \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(\mu,\nu)})_2, \end{aligned} \tag{18}$$

откуда и вытекает неравенство (17). Для функции $f_0(x,y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r,s)}$ в силу (15) и (16) имеем:

$$\begin{aligned} \Omega_{k,l}^2(f_0^{(r,s)};t,\tau)_2 &= m^{2r} n^{2s} \{2(1-\operatorname{sinc}mt)\}^k \{2(1-\operatorname{sinc}n\tau)\}^l; \\ \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f_0^{(\mu,\nu)})_2 &= m^{2\mu} n^{2\nu}. \end{aligned} \tag{19}$$

Пользуясь этими равенствами, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f_0^{(\mu,\nu)};t,\tau)_2 &= m^{2\mu} n^{2\nu} = \\ &= m^{-2(r-\mu)} n^{-2(s-\nu)} \{2(1-\operatorname{sinc}mt)\}^{-k} \{2(1-\operatorname{sinc}n\tau)\}^{-l} \Omega_{k,l}^2(f_0^{(r,s)};t,\tau)_2, \end{aligned} \tag{20}$$

откуда и следует точность неравенства (17), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Всюду далее при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r,s)}$ предполагается, что $f \neq \operatorname{const}$. Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. В условиях теоремы 1 имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(\mu,\nu)})_2}{\Omega_{k,l}^2(f^{(r,s)};t,\tau)_2} &= \\ &= \{2(1-\operatorname{sinc}mt)\}^{-k/2} \{2(1-\operatorname{sinc}n\tau)\}^{-l/2}. \end{aligned} \tag{21}$$

В частности, из (21) при $t = \pi/(2m), \tau = \pi/(2n), m, n \in \mathbb{N}$ получаем точную константу Джексона-Стечкина в задаче одновременного приближения функции и ее производных $f^{(\mu,\nu)}$ ($\mu = \overline{0, r}, \nu = \overline{0, s}$):

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\Omega_{k,l}(f^{(r,s)}; \pi / (2m), \pi / (2n))_2} = \left\{ \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \right\}^{(k+l)/2}. \quad (22)$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (18) для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ получаем

$$\frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\Omega_{k,l}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2} \leq \{2(1 - \text{sinc}mt)\}^{-k/2} \{2(1 - \text{sinc}n\tau)\}^{-l/2}. \quad (23)$$

С другой стороны, пользуясь равенством (19), запишем оценку снизу величины, стоящей в левой части (21):

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\Omega_{k,l}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2} &\geq \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(\mu,\nu)})_2}{\Omega_{k,l}(f_0^{(r,s)}; t, \tau)_2} = \\ &= \{2(1 - \text{sinc}mt)\}^{-k/2} \{2(1 - \text{sinc}n\tau)\}^{-l/2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Требуемое равенство (21) вытекает из сопоставления оценки сверху (23) с оценкой снизу (24). Равенство (22) из (21) получается непосредственным вычислением. Следствие 1 доказано.

Далее условимся под весовой функцией в прямоугольнике $[0, h] \times [0, \eta]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию $\varphi(t, \tau)$, не эквивалентную нулю на этом же прямоугольнике. Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq \mu$, $s \geq \nu$, $1 < q \leq \infty$, $0 < h \leq 3\pi / (4m)$, $0 < \eta \leq 3\pi / (4n)$, φ – весовая на прямоугольнике $[0, h] \times [0, \eta]$ функция. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\left(\int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{1/q}} = \\ = \left(\int_0^h \int_0^\eta (1 - \text{sinc}mt)^{kq/2} (1 - \text{sinc}n\tau)^{lq/2} \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{-1/q}. \end{aligned} \quad (25)$$

Доказательство. Сначала отметим, что в соотношении (25) для параметра q , удовлетворяющего условию $1 \leq q \leq \infty$, функционал $\|\Omega_{k,l}\|_q$ определен соотношениями

$$\|\Omega_{k,l}\|_q = \begin{cases} \left(\int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty, \\ \max\{\Omega_{k,l}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 : (t, \tau) \in (0, h] \times (0, \eta]\}, & q = \infty. \end{cases}$$

Переходим теперь к доказательству равенства (25). Неравенство (17) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \Omega_{k,l}(f^{(r,s)};t,\tau)_2 \geq \\ & \geq m^{r-\mu}n^{s-\nu} \{2(1-\operatorname{sinc}mt)\}^{k/2} \{2(1-\operatorname{sinc}n\tau)\}^{l/2} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2. \end{aligned} \tag{26}$$

Возведем обе стороны неравенства (26) в степень q , умножим на вес $\varphi(t,\tau)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $[0,h] \times [0,\eta]$. Полученное таким образом неравенство снова возведем в степень $1/q$. В итоге получим

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)};t,\tau)_2 \varphi(t,\tau) dt d\tau \right)^{1/q} \geq 2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2 \times \\ & \times \left(\int_0^h \int_0^\eta (1-\operatorname{sinc}mt)^{kq/2} (1-\operatorname{sinc}n\tau)^{lq/2} \varphi(t,\tau) dt d\tau \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ и из него сразу получаем оценку сверху для экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (25):

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\left(\int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)};t,\tau)_2 \varphi(t,\tau) dt d\tau \right)^{1/q}} \leq \\ & \leq \left(\int_0^h \int_0^\eta (1-\operatorname{sinc}mt)^{kq/2} (1-\operatorname{sinc}n\tau)^{lq/2} \varphi(t,\tau) dt d\tau \right)^{-1/q}. \end{aligned} \tag{27}$$

Оценку снизу той же величины получаем для рассмотренной нами в предыдущей теореме функции $f_0 \in L_2^{(r,s)}$, для которой имеют место равенства (19):

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\left(\int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)};t,\tau)_2 \varphi(t,\tau) dt d\tau \right)^{1/q}} \geq \\ & \geq \frac{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(\mu,\nu)})_2}{\left(\int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,l}^q(f_0^{(r,s)};t,\tau)_2 \varphi(t,\tau) dt d\tau \right)^{1/q}} = \\ & = \frac{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} m^\mu n^\nu}{2^{(k+l)/2} m^r n^s \cdot \left(\int_0^h \int_0^\eta (1-\operatorname{sinc}mt)^{kq/2} (1-\operatorname{sinc}n\tau)^{lq/2} \varphi(t,\tau) dt d\tau \right)^{1/q}} = \end{aligned}$$

$$= \left(\int_0^h \int_0^\eta (1 - \operatorname{sinc} mt)^{kq/2} (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{-1/q}. \tag{28}$$

Равенство (25) получаем из сопоставления оценки сверху (27) с оценкой снизу (28), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Следствие 2. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда, если $\varphi(t, \tau) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(\tau)$, то

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\left(\int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 \varphi_1(t) \varphi_2(\tau) dt d\tau \right)^{1/q}} = \\ = \left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} mt)^{kq/2} \varphi_1(t) dt \right)^{-1/q} \left(\int_0^\eta (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi_2(\tau) d\tau \right)^{-1/q}. \end{aligned} \tag{29}$$

В частности, из (29):

а) при $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv 1; k = l, q = 2/k$ получаем:

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{2^k m^{r-(\mu+k)} n^{s-(\nu+k)} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\left(\int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,k}^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right)^{k/2}} = \\ = \{(mh - \operatorname{Si}(mh))(n\eta - \operatorname{Si}(n\eta))\}^{-k/2}, \end{aligned} \tag{30}$$

где $\operatorname{Si}(u) := \int_0^u \operatorname{sinc} t dt$ – интегральный синус;

б) при $\varphi_1(t) = t, \varphi_2(\tau) = \tau, k = l, q = 2/k$ имеем:

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{4^k m^{r-(\mu+k)} n^{s-(\nu+k)} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\left(\int_0^h \int_0^\eta t\tau \Omega_{k,k}^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right)^{k/2}} = \\ = \{(mh/2)^2 - \sin^2(mh/2)\}^{-k/2} \{(n\eta/2)^2 - \sin^2(n\eta/2)\}^{-k/2}. \end{aligned} \tag{31}$$

2. Решение одной экстремальной задачи. Отметим, что поскольку для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}, r, s \in \mathbb{N}$ ее промежуточные производные $f^{(\mu,\nu)}, 0 \leq \mu \leq r, 0 \leq \nu \leq s$ также принадлежат классу $L_2^{(r,s)}$, то представляет несомненный интерес изучение поведения величины наилучшего совместного приближения $\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2$ на классе $L_2^{(r,s)}$ или на некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r,s)} \subset L_2^{(r,s)}$, то есть при любых $0 \leq \mu \leq r, 0 \leq \nu \leq s$ требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}(\mathfrak{M}^{(r,s)})_2 := \sup\{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r,s)}\}. \tag{32}$$

Всюду далее через $W_{k,l,q}^{(r,s)}(h,\eta;\varphi)$ ($k,l \in \mathbb{N}, r,s \in \mathbb{Z}_+, 0 < q \leq \infty$) обозначим класс функций $f \in L_2^{(r,s)}$, для которых при всех $0 < h,\eta \leq 2\pi$ выполнено неравенство

$$\int_0^{h\eta} \int_0^q \Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)};t,\tau)_2 \varphi(t,\tau) dt d\tau \leq 1. \tag{33}$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема 3. Пусть $k,l \in \mathbb{N}, r,s,\mu,\nu \in \mathbb{Z}_+, r \geq \mu, s \geq \nu, 1 \leq q \leq \infty, 0 < h \leq 3\pi/(4m), 0 < \eta \leq 3\pi/(4n)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}(W_{k,l,q}^{(r,s)}(h,\eta;\varphi))_2 = \\ &= \frac{1}{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu}} \left(\int_0^{h\eta} \int_0^q (1 - \operatorname{sinc} mt)^{kq/2} (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t,\tau) dt d\tau \right)^{-1/q}. \end{aligned} \tag{34}$$

Доказательство. В самом деле из неравенства (27) для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ при любых $m,n \in \mathbb{N}, r,s,\mu,\nu \in \mathbb{Z}_+, r \geq \mu, s \geq \nu, \varphi(t,\tau) \equiv 1$ вытекает, что

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2 \leq 2^{-(k+l)/2} \cdot m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)} \times \\ &\times \frac{\left(\int_0^{h\eta} \int_0^q \Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)};t,\tau)_2 \varphi(t,\tau) dt d\tau \right)^{1/q}}{\left(\int_0^{h\eta} \int_0^q (1 - \operatorname{sinc} mt)^{kq/2} \cdot (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t,\tau) dt d\tau \right)^{1/q}}. \end{aligned} \tag{35}$$

Из (35) для произвольной функции $f \in W_{k,l,q}^{(r,s)}(h,\eta;\varphi)$ получаем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2 \leq \frac{2^{-(k+l)/2} \cdot m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}}{\left(\int_0^{h\eta} \int_0^q (1 - \operatorname{sinc} mt)^{kq/2} \cdot (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t,\tau) dt d\tau \right)^{1/q}},$$

откуда и следует оценка сверху

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}(W_{k,l,q}^{(r,s)}(h,\eta;\varphi)) \leq \\ &\leq \frac{2^{-(k+l)/2} \cdot m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}}{\left(\int_0^{h\eta} \int_0^q (1 - \operatorname{sinc} mt)^{kq/2} \cdot (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t,\tau) dt d\tau \right)^{1/q}}. \end{aligned} \tag{36}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу указанной величины, введем в рассмотрение функцию

$$f_1(x, y) = \frac{2^{-(k+l)/2} m^{-r} n^{-s} e^{i(mx+ny)}}{\left(\int_0^h \int_0^\eta (1 - \operatorname{sinc} mt)^{kq/2} \cdot (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{1/q}}. \quad (37)$$

Для этой функции в силу равенств (15) и (16) имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1, n-1}^{(\mu, \nu)}(f_1^{(\mu, \nu)})_2 &= \\ &= \frac{2^{-(k+l)/2} m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}}{\left(\int_0^h \int_0^\eta (1 - \operatorname{sinc} mt)^{kq/2} \cdot (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{1/q}}; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\left(\int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,l}^q(f_1^{(r,s)}; t, \tau)_2 \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{1/q} = 1. \quad (39)$$

Равенство (39) означает, что функция $f_1 \in W_{k,l,q}^{(r,s)}(h, \eta; \varphi)$, а потому, учитывая равенство (38), запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1, n-1}^{(\mu, \nu)}(W_{k,l,q}^{(r,s)}(h, \eta; \varphi))_2 &\geq \mathcal{E}_{m-1, n-1}^{(\mu, \nu)}(f_1^{(\mu, \nu)}) = \\ &= \frac{2^{-(k+l)/2} m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}}{\left(\int_0^h \int_0^\eta (1 - \operatorname{sinc} mt)^{kq/2} \cdot (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{1/q}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Равенство (34) получаем из сравнения неравенств (36) и (40), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Следствие 3. В условиях теоремы 3 при $k=l$, $q=2/k$, $h=\pi/(2m)$, $\eta=\pi/(2n)$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\varphi=1$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{m-1, n-1}^{(\mu, \nu)} \left(W_{k,k,k/2}^{(r,s)} \left(\frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n} \right) \right)_2 = \{(\pi/2) - \operatorname{Si}(\pi/2)\}^{-k} m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}.$$

Поступило 29.04.2022

ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов М.К. О приближении «углом». – Proc. of the Conf. on Constructive Theory of Function. – Budapesht, 1972, с.371-399.

2. Потапов М.К. Приближение «углом» и теоремы вложения. – *Mathematica Balkanica*, 1972, №2, с.183-198.
3. Томич М. О приближении углом функций с доминирующим модулем гладкости. – *Publ. Inst. Math. Beograd*, 23, №37, с.193-206. – *Mathematica Balkanica*, 1972, №2, с.183-198.
4. Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных. – *Изв. вузов*, 1991, №3, с.14-25.
5. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов. – *Укр. мат. журн.*, 1996, т.48, №3, с.301-308.
6. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных. – *ДАН России*, 2005, т.404, №4, с.406-464.
7. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. О точных значениях квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных. – *Укр. мат. журн.*, 2009, т.61, №6, с.855-864.
8. Shabozov M.Sh., Akobirshoev M.O. Exact estimates of quasiwidths of some classes of differentiable periodic functions of two variables. – *Anal. Math.*, 2009, v.35, №1, 61-72 p.
9. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложения к теории аппроксимации. – *Укр. мат. журн.*, 2011, т.63, №12, с.1579-1601.
10. Vakarchuk S.B. Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2 -approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes. – *East Journal on Approximations*, 2004, v.10, №1-2, pp.27-39.
11. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 . – *Матем. заметки*, 2005, т.78, №5, с.792-796.
12. Брудный Ю.А. Приближение функций n -переменных квазимногочленами. – *Изв. АН СССР. Сер. математика*, 1979, т.34, №3, с.564-583.
13. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2 . – *Чебышевский сб.*, 2019, т.20, вып.2, с.348-365.
14. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 . – *Матем. заметки*, 1976, т.20, №3, с.433-438.

М.О.Акобиршоев, В.Д.Сайнаков

**ОИД БА НАЗДИККУНИИ БЕХТАРИН БА ВОСИТАИ “КУНЧҶО” ДАР
МАЪНОИ МИЁНАИ ФУНКСИЯҶОИ ДАВРИИ ДУ ТАҒЙИРЁБАНДАИ БАЪЗЕ
СИНФИ ФУНКСИЯҶО**

Донишгоҳи технологии Тоҷикистон

Дар фазои L_2 нобаробариҳои аниқ байни бузургии наздиккунии беҳтарини якҷояи функсияи 2π -даврий аз рӯи ҳар як тағйирёбанди $f(x,y)$ ва хусусии он $f^{(\mu,\nu)}(x,y)$ ($\mu = 0, 1, \dots, r$; $\nu = 0, 1, \dots, s$) ба воситаи “кунҷҳои” тригонометрӣ ва интегралҳои дукарата, ки модулҳои омехтаи бифосилагии тартиби олиро дар бар мегиранд, ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии якҷояи беҳтарин, “кунҷҳои” тригонометрӣ, квазиполином, модули бефосилагии омехта.

M.O.Akobirshoev, V.D.Sainakov

**ON THE BEST AVERAGED SIMULTANEOUS APPROXIMATION BY “ANGLE”
OF PERIODIC FUNCTIONS OF TWO VARIABLES FOR SOME CLASS
OF FUNCTIONS**

Technological University of Tajikistan

The sharp inequality between the best simultaneous of differentiable 2π for each variables of functions $f(x,y)$ and their succeeded derivatives $f^{(\mu,\nu)}(x,y)$ ($\mu = 0, 1, \dots, r; \nu = 0, 1, \dots, s$) by trigonometric “angles” with double integrals of mixed module of continuity of higher order of higher derivatives was obtained.

Key words: *the best simultaneous approximation, trigonometric “angle”, quasi-polynomial, mixed module of continuity.*

УДК 517.5

А.Захурбеков

**ВЕРХНИЕ ГРАНИ НАИЛУЧШИХ СОВМЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ
НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ
ПЕРЕМЕННЫХ “КРУГОВЫМИ” СУММАМИ ФУРЬЕ В $L_2(Q)$**

*Таджикский национальный университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 21.04.2022 г.)*

В статье найдены точные верхние грани наилучших совместных приближений некоторых классов двух переменных “круговыми” суммами Фурье, характеризующимися обобщенным модулем непрерывности в гильбертовом пространстве L_2 .

Ключевые слова: комплексный ряд Фурье, обобщенный модуль непрерывности, оператор Лапласа, “круговые” суммы.

1. Введение. В данной работе изучается вопрос нахождения точной оценки верхней грани наилучших совместных приближений периодических классов функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$. Напомним, что $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ двух переменных, 2π -периодических по каждой переменной с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

Пусть функция $f \in L_2$ имеет формальное разложение в двумерный комплексный ряд Фурье

$$f(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} c_{kl}(f) e^{i(kx+ly)}, \quad (1)$$

где коэффициенты $c_{kl}(f)$ определены равенством

$$c_{kl}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, что

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_{k,l}(f)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \rho_{k,l}^2(f),$$

где

Адрес для корреспонденции: Захурбеков Алишер. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: zahurbekov_a94@mail.ru

$$\rho_{k,l}^2(f) = |c_{k,l}(f)|^2 + |c_{-k,l}(f)|^2 + |c_{k,-l}(f)|^2 + |c_{-k,-l}(f)|^2. \quad (2)$$

Для произвольной $R \in \mathbb{N}$ через

$$S_R(f; x, y) = \sum_{0 \leq k^2 + l^2 < R^2} c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)} \quad (3)$$

обозначим “круговые” частичные суммы функции $f \in L_2$. Если через \mathcal{S}_R , $R \in \mathbb{N}$ обозначить множество комплекснозначных полиномов вида

$$p_R(x, y) = \sum_{0 \leq k^2 + l^2 < R^2} a_{k,l} e^{i(kx+ly)},$$

то хорошо известно [2, 3], что наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in L_2$ элементами $p_R \in \mathcal{S}_R$ реализует “круговая” частичная сумма (3). При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_R(f) &:= \inf \{ \|f - p_R\| : p_R \in \mathcal{S}_R \} = \\ &= \|f - S_R(f)\| = \left\{ \sum_{k^2 + l^2 \geq R^2} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $D := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа второго порядка. Определим

$D^r := D(D^{r-1})$, $r \in \mathbb{N}$, $D^0 := E$. Через $L_2^{(r)}(D)$ обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых существуют частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dots$$

и для которых $D^r f \in L_2$. Применяя оператор D^r , $r \in \mathbb{N}$ к ряду (1), в силу линейности этого оператора находим

$$D^r f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{kl}(f) (ik + il)^r e^{i(kx+ly)},$$

а отсюда в силу равенства Парсеваля и соотношения (2) запишем

$$\|D^r f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_{kl}(f)|^2 (k^2 + l^2)^{2r} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f). \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) следует, что

$$\mathcal{E}_R(D^r f) = \left\{ \sum_{k^2 + l^2 \geq R^2} (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (6)$$

Заметим, что при любом $s = 0, 1, \dots, r$; $r \in \mathbb{Z}_+$ из (6) следует формула

$$\mathcal{E}_R(D^s f) = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} (k^2+l^2)^{2s} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{7}$$

Справедлива следующая [1]

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $R \in \mathbb{R}_+$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\mathcal{E}_R(D^s f)}{\mathcal{E}_R(D^r f)} = \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \tag{8}$$

Следуя работе [3], вводим в рассмотрение функцию

$$T(x, u; y, v; h) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-u)} e^{il(y-v)} h^{k^2+l^2}, \tag{9}$$

где $h \in (0, 1)$ и сходимость двойного ряда справа понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2(Q \times Q)$. Пользуясь функцией (9), определим оператор $\mathcal{F}_h : L_2 \rightarrow L_2$ по следующей формуле

$$\mathcal{F}_h(f) := \mathcal{F}_h f(x, y) = \iint_Q f(u, v) T(x, u; y, v; 1-h) dudv, \tag{10}$$

которую назовем оператором обобщенного сдвига. Оператор (10) обладает следующими свойствами:

1. $\mathcal{F}_h(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}_h(f) + \mu \mathcal{F}_h(g)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in L_2$;
2. $\|\mathcal{F}_h(f)\| \leq \|f\|$; 3. $\|\mathcal{F}_h(f) - f\| \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0+$;
4. $\mathcal{F}_h(e^{i(mx+ny)}) = (1-h)^{n^2+m^2} \cdot e^{i(mx+ny)}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Определим теперь разности первого и высших порядков, как и в классическом случае, следующим образом:

$$\Delta_h f = \mathcal{F}_h f - f = (\mathcal{F}_h - E)f,$$

$$\Delta_h^v f := \Delta_h(\Delta_h^{v-1} f) = (\mathcal{F}_h - E)^v f = \sum_{j=0}^v (-1)^{v-j} \binom{v}{j} \mathcal{F}_h^j(f),$$

где

$$\mathcal{F}_h^0 f = Ef = f, \quad \mathcal{F}_h^j f := \mathcal{F}_h(\mathcal{F}_h^{j-1} f), \quad j = \overline{1, v}; \quad v \in \mathbb{N};$$

E – единичный оператор в пространстве L_2 . Равенством

$$\Omega_v(f, t) := \sup \{ \|\Delta_h^v f\| : 0 < h \leq t \}, \quad t \in (0, 1)$$

определим обобщенный модуль непрерывности функции $f \in L_2$.

В [4] для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ доказано, что

$$\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} (1 - (1-t)^{k^2+l^2})^\nu (k^2+l^2)^{2r} \rho_{kl}^2(f). \tag{11}$$

Теорема 2. При любых $\nu, R \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и $h \in (0,1)$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; t)} = \frac{1}{(1 - (1-t)^{R^2})^\nu}. \tag{12}$$

Доказательство. В нашей работе [1] доказано, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, для которых $m^2 + n^2 \geq R^2$, $R \in \mathbb{N}$ и $t \in (0,1)$, имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; t)} = \frac{1}{(1 - (1-t)^{R^2})^\nu}. \tag{13}$$

В левой части равенства введем обозначение $\mathcal{D}^s f = g$. Тогда из того, что $f \in L_2^{(r)}$, следует, что $g \in L_2^{(r-s)}$ и, пользуясь затем равенством (13), получаем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; t)} &= \sup_{g \in L_2^{(r-s)}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(g)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^{(r-s)} g; t)} = \\ &= \frac{1}{(1 - (1-t)^{R^2})^\nu}, \end{aligned}$$

и теорема 2 доказана.

Из доказанной теоремы 2 вытекает следующее

Следствие 1. В условиях теоремы 2, при $t = 1/R^2$, $R \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\sup_{R \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; 1/R^2)} = \sup_{R \in \mathbb{N}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{R^2} \right)^{R^2} \right)^\nu = (1 - e^{-1})^\nu.$$

Как обычно, под весовой функцией $\mu(t)$ на отрезке $[a, b]$ понимаем неотрицательную суммируемую неэквивалентную нулю функцию.

Теорема 3. Пусть $R, \nu \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$, $h \in (0,1)$, $\mu(t)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}. \tag{14}$$

Доказательство. Равенство (14) доказывается точно также, как мы доказали теорема 2, если воспользоваться равенством [1]

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f)}{\left(\int_0^h \Omega_v^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^{vq} \mu(t) dt \right)^{-1/q}.$$

Из равенства (14) вытекает

Следствие 2. В условиях теоремы 3 при $\mu(t) := R^2(1-t)^{R^2-1}$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s-1/q)} \cdot \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_v^q(\mathcal{D}^r f; t) (1-t)^{R^2-1} dt \right)^{1/q}} = \left\{ \frac{vq+1}{[1 - (1-h)^{R^2}]^{vq+1}} \right\}^{1/q}.$$

В частности, полагая здесь $h = 1/R^2$ и переходя к верхней грани по всем $R \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{R \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s-1/q)} \cdot \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int_0^{1/R^2} \Omega_v^q(\mathcal{D}^r f; t) (1-t)^{R^2-1} dt \right)^{1/q}} = \frac{(vq+1)^{1/q}}{(1-e^{-1})^{v+1/q}}$$

и если в полученном равенстве полагать $q = 1/v, v \in \mathbb{N}$, то имеем

$$\sup_{R \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s-v)} \cdot \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int_0^{1/R^2} \Omega_v^{1/v}(\mathcal{D}^r f; t) (1-t)^{R^2-1} dt \right)^v} = \frac{2^v}{(1-e^{-1})^{2v}}.$$

Поступило 28.04.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захурбеков А. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в $L_2(Q)$. – Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2021, т.64, №7-8, с.368-377.
2. Абилов В.А., Абилов М.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, т.55, №7, с.1109-1117.
3. Абилова Ф.В., Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье двух переменных и их приложения. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2018, т.58, №10, с.1596-1603.
4. Shabozov M.Sh., Dzhurakhonov O.A. Upper bounds for approximation of some classes of bivariate functions by triangular Fourier-Hermite sums in the space . – Analysis Mathematica, 2019, v.45, №4, pp.823-840.

А.Захурбеков

**САРҲАДИ БОЛОИИ НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ЯКЧОЯИ БАЪЗЕ
СИНФҲОИ ФУНКСИЯҲОИ ДАВРИИ ДУ ТАҒЙИРЁБАНДА БА ВОСИТАИ
СУММАИ “ДОИРАВИИ” ФУРЬЕ ДАР $L_2(Q)$**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола сарҳади саҳеҳи болоии наздиккунии беҳтарини якҷояи баъзе синфи функцияҳои дутағйирёбанда ба воситаи суммаҳои “доиравии” Фурье дар фазои гилбертии L_2 , ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардашуда тавсиф шудаанд, ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: қатори комплекси Фурье, модули бефосилагии умумишуда, оператори Лаплас, суммаи “доиравӣ”.

A.Zahurbekov

**UPPER BOUNDS OF BEST JOINT APPROXIMATION OF SOME CLASSES OF
PERIODIC FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY “CIRCULAR” FOURIER
SUMS IN $L_2(Q)$**

Tajik National University

In the article the exact upper bounds of the best joint approximation some classes of two variables by “circular” Fourier sums characterized by a generalized modulus of continuity in the Hilbert space L_2 are found.

Key words: complex Fourier series, generalized modulus of continuity, Laplace operator, “circular” sums.

УДК 517.957

Член-корреспондент НАН Таджикистана С.А.Исхоков,

А.Е.Куджмуродов*, М.Султонзода*

ФРЕДГОЛЬМОВАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

*Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана,***Таджикский педагогический институт в г. Пенджикенте*

В работе доказывается фредгольмова разрешимость вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида во всём пространстве. Исследуемые эллиптические операторы имеют ненулевые дифференцируемые младшие коэффициенты и на бесконечности вырождаются степенным образом.

Ключевые слова: эллиптический оператор, степенное вырождение, недивергентный вид, задача Дирихле, фредгольмова разрешимость.

1. Метод исследования разрешимости краевых задач для эллиптических операторов, основанный на элементах теории функций и функционального анализа, хорошо работает если исследуемый оператор изначально задаётся в дивергентной форме. Поэтому с помощью этого метода ранее изучалась разрешимость вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов дивергентного вида во всём пространстве (см., например, [1-4] и имеющуюся в них библиографию). Случай таких операторов недивергентного вида рассматривался в недавней работе авторов [5]. Операторы, рассмотренные в этой работе имели только ненулевые старшие коэффициенты. В отличие от этого здесь мы рассматриваем эллиптические операторы недивергентного вида, которые могут иметь ненулевые младшие коэффициенты.

Евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ обозначим через \mathbb{R}^n . Пусть $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ – мультииндекс, то есть вектор с целыми неотрицательными координатами, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ – длина мультииндекса k и $u^{(k)}(x)$ – обобщённая в смысле С.Л.Соболева производная функции $u(x)$ мультииндекса k . Далее вводим обозначение $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$.

2. Вводим функциональное пространство $W_{2;\alpha,\gamma}^r(\mathbb{R}^n)$, с конечной нормой

$$\|u; W_{2;\alpha,\gamma}^r(\mathbb{R}^n)\| = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[d^{2\alpha}(x) \sum_{|k|=r} |u^{(k)}(x)|^2 + d^{2\gamma} |u(x)|^2 \right] dx \right\}^{1/2}. \quad (1)$$

Адрес для корреспонденции: Исхоков Сулаймон Абунасович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Институт математики НАНТ. E-mail: sulaimon@mail.ru

Для удобства записи также вводим следующую полунорму

$$\|u; L_{2;\alpha}^r(\mathbb{R}^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\mathbb{R}^n} d^{2\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Обозначим через $\dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n)$ замыкание множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме (1), а через

$\left(\dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n)\right)'$ – пространство антилинейных непрерывных функционалов, определённых в

пространстве $\dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n)$, наделённое нормой сопряженного пространства.

В процессе доказательства основных результатов настоящей работы мы также неоднократно будем пользоваться следующей леммой, которая имеется в работе [1].

Лемма 1. Пусть $r > s \geq 0$, и пусть выполнено одно из условий:

- а) $\beta > \theta\alpha + (1-\theta)\gamma$, где $\theta = s/r$;
- б) $\beta + s > \alpha + r$.

Тогда для любого положительного числа ε существует положительное число $K(\varepsilon)$ такое, что

$$\|u; W_{2;\beta;\gamma}^s(\mathbb{R}^n)\| \leq \varepsilon \|u; W_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n)\| + K(\varepsilon) \|u; L_{2;\gamma}(\mathbb{R}^n)\|$$

для всех $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть r – некоторое натуральное число. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u](x) = \sum_{|k| \leq 2r} a_k(x) u^{(k)}(x), \tag{2}$$

первоначально определённый для всех $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Этот оператор в случае нулевых младших коэффициентов, то есть когда $a_k(x) \equiv 0$ при $|k| \leq 2r-1$, был изучен в работе авторов [5]. Здесь же мы предполагаем, что младшие коэффициенты $a_k(x)$, $|k| \leq 2r-1$ отличны от нуля и удовлетворяют некоторым условиям, достаточным для фредгольмовой разрешимости вариационной задачи Дирихле, связанной с оператором (2).

Предположим, что коэффициенты $a_k(x)$, $|k| \leq 2r$ оператора (2) удовлетворяют следующим условиям:

1) для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_\mu\}_{|\mu|=r}$ выполняется следующее условие эллиптичности

$$\operatorname{Re} \sum_{|\mu|=|\nu|=r} (-1)^r a_{\mu+\nu}(x) \zeta_\mu \overline{\zeta_\nu} \geq d^{2\alpha}(x) \sum_{|\mu|=r} |\zeta_\mu|^2,$$

где α, \varkappa_0 – некоторые вещественные числа и $\varkappa_0 > 0$;

II) коэффициенты $a_k(x)$ при $1 \leq |k| \leq r-1$ удовлетворяют условию

$$|a_k(x)| \leq M_1 d^{\alpha + \theta(|k|) + \gamma}(x),$$

где число $\theta(|k|), |k| \leq r-1$, удовлетворяет одному из следующих условий:

а) $r\theta(|k|) > (r - |k|)(\gamma - \alpha)$;

б) $\theta(|k|) > r - |k|$;

III) коэффициенты $a_k(x), r \leq |k| \leq 2r$, имеют все производные до $(|k| - r)$ -го порядка включительно и выполняется неравенство

$$|a_{k'+l'+l''}^{(l')}(x)| \leq M_2 d^{2\alpha + \delta(|l'|)}(x) \quad (|k'| = r, |l'| + |l''| \leq r, |l'| \neq 0),$$

где число $\delta(|l'|)$ удовлетворяет одному из условий

а) $r\delta(|l'|) > (r - |l''|)(\gamma - \alpha)$;

б) $\delta(|l'|) > (r - |l''|)$.

4. Сформулируем две вспомогательные леммы, которые доказываются с помощью леммы 1.

Лемма 2. Пусть выполнены условия I) - III). Тогда существуют положительные числа \varkappa_1, C_0 такие, что

$$\operatorname{Re}(L[u], u)_0 \geq \varkappa_1 \|u; L_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)\|^2 - C_0 \|u; L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^n)\|^2,$$

для всех $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2 и пусть старшие коэффициенты $a_k(x), |k| = 2r$, оператора (2) удовлетворяют следующему условию роста

$$|a_k(x)| \leq M_3 d^{2\alpha}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Тогда найдётся положительное число M_4 такое, что

$$|(L[u], v)_0| \leq M_4 \|u; W_{2,\alpha\gamma}^r(\mathbb{R}^n)\| \|v; W_{2,\alpha\gamma}^r(\mathbb{R}^n)\|$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

5. Пусть λ – комплексное и γ – вещественное числа. Вводим полуторалинейную форму, связанную с оператором (2)

$$B_{\lambda,\gamma}[u, v] = (L[u], v)_0 + \lambda(u, v)_\gamma, \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

где

$$(u, v)_\gamma = \int d^{2\gamma}(x) u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Далее мы изучим разрешимость следующей вариационной задачи Дирихле, связанной с оператором (2).

Задача D. Для заданного функционала $F \in \left(\dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n) \right)'$ требуется найти функцию

$U \in \dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую уравнению

$$B_{\lambda,\gamma}[U, w] = \langle F, w \rangle \quad \forall w \in \dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n).$$

Здесь и далее символом $\langle F, v \rangle$ обозначено значение функционала $F \in \left(\dot{W}_{2;\alpha;\beta}^r(\mathbb{R}^n) \right)'$ на элемент $v \in \dot{W}_{2;\alpha;\beta}^r(\mathbb{R}^n)$.

С целью рассмотрения фредгольмовой разрешимости этой задачи вводим полуторалинейную форму

$$B_{\bar{\lambda},\gamma}^+[V, w] = \overline{(L[w], V)}_0 + \bar{\lambda}(V, w)_\gamma, \quad V, w \in \dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n)$$

и рассмотрим отвечающие ей однородную и формально сопряжённую задачи.

Задача D₀. Найти функцию $U \in \dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую уравнению

$$B_{\lambda,\gamma}[U, w] = 0 \quad \forall w \in \dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n).$$

Задача D*. Для заданного функционала $G \in \left(\dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n) \right)'$ требуется найти функцию

$V \in \dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую уравнению

$$B_{\bar{\lambda},\gamma}^+[U, w] = \langle G, w \rangle \quad \forall w \in \dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n).$$

Задача D₀*. Найти функцию $V \in \dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую уравнению

$$B_{\bar{\lambda},\gamma}^+[U, w] = 0 \quad \forall w \in \dot{W}_{2;\alpha;\gamma}^r(\mathbb{R}^n).$$

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $\gamma > \alpha + r$ и выполнены условия I) - III), (3). Тогда задача D фредгольмова разрешима. Это означает, что:

1) задача D разрешима для тех и только тех F , для которых $\langle F, V \rangle \equiv 0$ на всех функциях $V(x)$, являющихся решениями задачи D_0^* ;

2) размерности пространств решений однородных задач D_0 и D_0^* конечны и равны между собой;

3) задача D_0 имеет отличные от нуля решения лишь для счётного числа значений параметра $\lambda = \lambda_j, j = 1, 2, \dots$, причём $|\lambda_j| \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. При этом сопряжённая однородная задача D_0^* имеет нетривиальные решения при тех же значениях параметра λ , что и задача D_0 .

Доказательство теоремы основано на применении обобщённой теоремы Лакса-Мильграмма (см. [6, теорема 2.0.2]) и следующих двух неравенств

$$\operatorname{Re} B_{\lambda_0, \gamma}[u, u] \geq \varkappa_2 \|u; W_{2; \alpha, \gamma}^r(\mathbb{R}^n)\|^2 \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (4)$$

$$|B_{\lambda, \gamma}[u, v]| \leq (M_4 + |\lambda|) \|u; W_{2; \alpha, \gamma}^r(\mathbb{R}^n)\| \|v; W_{2; \alpha, \gamma}^r(\mathbb{R}^n)\| \quad \forall u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

которые доказываются с помощью лемм 2 и 3. В этих неравенствах $\lambda_0, \varkappa_2, M_4$ - некоторые положительные числа.

Замечание. Если $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_0$, где λ_0 - такое же положительное число как в (4), то для всех $u \in \dot{W}_{2; \alpha; \gamma}^r(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} B_{\lambda, \gamma}[u, u] \geq c_0 \|u; W_{2; \alpha; \gamma}^r(\mathbb{R}^n)\|^2,$$

с помощью которого доказывается, что задача D имеет единственное решение (в этом случае условие $\gamma > \alpha + r$ можно опустить).

Поступило 07.05.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирошин Н.В. Внешняя задача Дирихле для вырождающегося эллиптического оператора. – Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР, 1979, т. 150, с. 198-211.
2. Мирошин Н.В. Спектральные внешние задачи для вырождающегося эллиптического оператора. – Известия вузов. Математика, 1988, №8, с. 47-55.
3. Мирошин Н.В. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением. – Труды Математического института РАН, 1992, т. 194, с. 179-195.
4. Исхоков С.А., Рахмонов Б.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле во всем пространстве, связанной с некоэрцитивной формой. – Уфимский математический журнал, 2020, т.12, №1, с. 13-29.

5. Исхоков С.А., Куджмуродов А.Ё., Султонзода М. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве. – ДАН РТ, 2021, т. 64, №9-10, с. 736-741.
6. Никольский С.М, Лирозкин П.И, Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. – Известия вузов. Математика, 1988, №8, с. 4-30.

С.А.Исхоков, А.Ё.Куджмуродов*, М.Султонзода*

**БА МАЪНОИ ФРЕДГОЛМ ҲАЛШАВАНДАГИИ МАСЪАЛАИ
ВАРИАЦИОНИИ ДИРИХЛЕ БАРОИ ОПЕРАТОРҲОИ ЭЛЛИПТИКИИ
ТАНАЗЗУЛЁБАНДА ДАР ТАМОМИ ФАЗО**

*Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,
Донишқадаи педагогии Тоҷикистон дар ш. Панҷакент

Дар мақола ба маънои Фредголм ҳалшавандагии масъалаи вариационии Дирихле барои оператори эллиптикии намуди ғайридивергентӣ дар тамоми фазо, омӯхта шудааст. Операторҳои таҳқиқшавандаи эллиптикӣ дорои коэффитсиентҳои хурди ғардинульи дифференсиронидашаванда буда дар беохирӣ ба тарзи дараҷагӣ таназзул меёбанд.

Калимаҳои калидӣ: оператори эллиптикӣ, таназзул ёбии дараҷагӣ, намуди ғайридивергентӣ, масъалаи Дирихле, ҳалшавандагӣ ба маънои Фредголм.

S.A.Iskhokov, A.Y.Kudzhmurodov*, M.Sultonzoda*

**FREDHOLM SOLVABILITY OF VARIATIONAL DIRICHLET PROBLEM FOR
DEGENERATE ELLIPTIC OPERATORS IN THE HOLE SPACE**

*A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan,
Tajik pedagogical institute in Penjikent

In the paper, we study the Fredholm solvability of the Dirichlet variational problem for non-divergent form elliptic operator in the hole space. The elliptic operators under investigation have nonzero differentiable lower coefficients and degenerate at infinity as a power.

Key words: elliptic operator, power degeneration, non-divergent form, Dirichlet problem, Fredholm solvability.

УДК 517.958

М.Ф.Абдукаримов, Ф.Р.Исмаатов

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ИЗ КЛАССА СУММИРУЕМЫХ С КВАДРАТОМ ФУНКЦИЙ

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Илоловым 20.04.2022 г.)

В работе исследуется одна смешанная задача для одномерного телеграфного уравнения с переменным коэффициентом, решение которой понимается в обобщённом смысле. Доказана разрешимость рассматриваемой смешанной задачи. Помимо этого обосновано, что решение изучаемой задачи устойчиво по отношению к аддитивному возмущению коэффициента, а также относительно граничных условий.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, переменный коэффициент, смешанная задача, разрешимость, интегральное тождество, устойчивость.

1. Постановка задачи и определение её решения. В прямоугольнике $Q_T = (0 \leq x \leq l) \times (0 \leq t \leq T)$ рассмотрим следующую задачу:

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t) \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

$$u_x(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

в которой $\mu(t) \in L_2[0, T]$, $\varphi(x) \in W_2^1[0, l]$, $\psi(x) \in L_2[0, l]$, $f(x, t) \in L_2(Q_T)$.

Решение смешанной задачи (1) - (3) будем понимать в обобщённом смысле и определим с помощью предложенных в [1] классов $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ и $\widehat{W}_2^2(Q_T)$.

Определение. Решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи (1) - (3) назовем такую функцию $u(x, t)$ из этого класса, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^T u(x, t) L\Phi(x, t) dx dt + \int_0^l [\varphi(x)\Phi_t(x, 0) - \psi(x)\Phi(x, 0)] dx + \\ & + \int_0^T \mu(t)\Phi(0, t) dt = \int_0^l \int_0^T f(x, t)\Phi(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (4)$$

для любой пробной функции $\Phi(x, t)$ из класса $\hat{W}_2^2(Q_T)$, подчиненной условиям $\Phi_x(0, t) = \Phi_x(l, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$ и условиям $\Phi(x, T) = \Phi_t(x, T) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq l$.

2. Краткая историческая справка и актуальность полученных результатов. Прежде чем начать исследование сформулированной нами задачи отметим, что сходные вопросы, касающиеся разрешимости слабо обобщённых решений гиперболических уравнений, рассматриваются также в [2, с.163-165]. В [3, с. 232] теорема единственности доказывается при выполнении некоторых дополнительных условий на гладкость коэффициента, а в [4-6] – для ограниченного и измеримого коэффициента. Если коэффициент не зависит от переменной t , то для доказательства теоремы единственности можно использовать спектральный метод, предложенный в [7]. Аналогичная задача была рассмотрена также в [8-10] для случаев, когда на границах заданы условия Дирихле или Неймана.

Следует отметить, что с задачей граничного управления процессом, описываемым гиперболическими уравнениями, связаны многие практические задачи, в частности, задачи акустики, управление давлением нефти и газа в трубопроводе и т.п. Ввиду этого изучение таких задач управления является одной из актуальных с точки зрения возможных её приложений. Полученные в работе результаты будут использованы для исследования соответствующей задачи граничного управления для рассматриваемого уравнения. Обзор по теории задач граничного управления можно найти в [11].

3. Вспомогательные утверждения. Из тождества (4) и схемы рассуждений, приведённых в работе [7], вытекает следующее

Утверждение. Пусть $q(x, t)$ есть нулевой элемент класса $L_2(Q_T)$. Тогда для любого $T > 0$ смешанная задача (1)-(3) может иметь только одно обобщенное решение из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$.

Используем ниже обозначение $\underline{\mu}(t)$ для продолженной тождественным нулем на значения $t < 0$ функции $\mu(t)$.

Лемма 1. Пусть $T \leq 2l$. Тогда единственное решение $u(x, t)$ из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи (1)-(3), у которой $\varphi(x) \equiv 0$ на сегменте $[0, l]$, $\psi(x)$, $q(x, t)$ являются нулевыми элементами класса L_2 соответственно на отрезке $[0, l]$ и в прямоугольнике Q_T , $f(x, t) \in L_2[Q_T]$, а $\mu(t)$ – произвольная функция из класса $L_2[0, T]$, определяется равенством

$$u(x, t) = - \int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau) d\tau - \int_0^{t+x-2l} \underline{\mu}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (5)$$

где подынтегральная функция получена из функции правой части уравнения (1) четным продолжением относительно границ $x=0$ и $x=l$ прямоугольника Q_T .

Для доказательства этой леммы достаточно повторить все рассуждения, приведённые в работе [12], при доказательстве утверждения 2 (см. также [13]).

Лемма 2. Пусть $T \leq 2l$ и $q(x,t), f(x,t) \in L_2(Q_T)$. Тогда решение из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи I, у которой $\varphi(x) \equiv 0$ при $x \in [0, l]$, $\psi(x) \equiv 0$ для почти всех $x \in [0, l]$ и $\mu(t)$ – произвольная функция из класса $L_2[0, T]$, удовлетворяет соотношению

$$u(x,t) = - \int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{|x-t+\tau|}^{l-|x+t-\tau-l|} [q(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + f(\xi, \tau)] d\xi +$$

$$+ \int_0^{\max\{0, t-x\}} d\tau \int_0^{t-x-\tau} [q(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + f(\xi, \tau)] d\xi + \int_0^{\max\{0, x+t-l\}} d\tau \int_{2l-x-t+\tau}^l [q(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + f(\xi, \tau)] d\xi \quad (6)$$

в случае, когда $0 \leq t \leq l$, и соотношению

$$u(x,t) = - \int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau) d\tau - \int_0^{t+x-2l} \underline{\mu}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t-l}^t d\tau \int_{|x-t+\tau|}^{l-|t+x-l-\tau|} [q(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + f(\xi, \tau)] d\xi +$$

$$+ \int_0^{t-x} d\tau \int_0^{l-x-|t-l-\tau|} [q(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + f(\xi, \tau)] d\xi + \int_0^{t+x-l} d\tau \int_{2l-x-t+\tau}^l [q(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + f(\xi, \tau)] d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{t-l} d\tau \int_{2l-x-t+\tau}^{l-|t-x-l-\tau|} [q(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + f(\xi, \tau)] d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{\max\{0, t-x-l\}} d\tau \int_{x-t+2l}^l [q(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + f(\xi, \tau)] d\xi \quad (7)$$

в случае, когда $l \leq t \leq T$.

Для доказательства этой леммы достаточно учесть описанное в лемме 1 продолжение функции $f(x,t)$ и перенести $q(x,t)u(x,t)$ в правую часть уравнения.

4. Главные результаты работы. Главными результатами работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть $T \leq 2l$ и \cdot . Тогда решение $u(x,t)$ из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи (1)-(3), рассмотренной в лемме 2, существует, причем, если $f(x,t)$ является нулевым элементом класса $L_2(Q_T)$, то решение тождественно равно нулю в $\{(x,t) | 0 \leq t \leq l, t \leq x \leq l\} \cap Q_T$.

Кратко наметим схему доказательства приведённой теоремы. Все рассуждения для каждого значения $T \in (0, 2l]$ проводятся единообразно. Поэтому ограничимся лишь случаем $T = 2l$. Следуя схеме доказательства теоремы из работы [4], разделим прямоугольник Q_{2l} на семь частей характеристиками, проходящими через его углы. В полученных областях положим $u_j(x,t) = u(x,t)$ при $(x,t) \in \Delta_j, j = \overline{1,7}$ и рассмотрим соотношения (6) и (7) последовательно для точек (x,t) , расположенных в областях $\Delta_j, j = \overline{1,7}$, как интегральные уравнения для нахождения $u_j(x,t), j = \overline{1,7}$.

При $j = 1$ соотношение (6) приводит к следующему уравнению для нахождения $u_1(x,t)$:

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} \iint_{D_1} q(\xi, \tau) u_1(\xi, \tau) d\xi d\tau + \iint_{D_1} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \tag{8}$$

где $D_1 \equiv D_1(x, t) = \{(\xi, \tau) \mid 0 \leq \tau \leq t, x - t + \tau \leq \xi \leq x + t - \tau\}$.

Перепишем уравнение (8) в операторном виде $u_1(x, t) = \iint_{D_1} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + [N_1 u_1](x, t)$ и

заметим, что интегральный оператор $[N_1 u_1](x, t) = \frac{1}{2} \iint_{D_1} q(\xi, \tau) u_1(\xi, \tau) d\xi d\tau$ ограниченно действует в

пространстве $L_2(\Delta_1)$ и его степени N_1^k удовлетворяют оценкам

$$|[N_1^k \chi](x, t)| \leq \sup_{(x, t) \in \Delta_1} |\chi(x, t)| \cdot \|q\|_{2, \Delta_1}^k \cdot \frac{t^k}{(\sqrt{2})^k \sqrt{(2k)!}}, \quad k \in N. \tag{9}$$

Следовательно, (8) является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода. Если $f(x, t) \equiv 0$, то оно как однородное уравнение имеет только тривиальное решение, то есть в этом случае $u_1(x, t) \equiv 0$. Если $f(x, t)$ произвольная функция из класса $L_2(Q_T)$, то решение уравнения (8)

можно записать в виде ряда Неймана $u_1(x, t) = \frac{1}{2} \iint_{D_1} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} [N_1^k f](x, t)$, который абсолютно сходится в силу оценок (9).

Так как $\underline{\mu}(t-x) \equiv 0$ при $(x, t) \in \Delta_3$, то аналогично (8) получим для нахождения $u_3(x, t)$ уравнение

$$u_3(x, t) = \frac{1}{2} \left(\iint_{D_{31}} + \iint_{D_{32}} \right) q(\xi, \tau) u_1(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \iint_{\bigcup_{j=1}^4 D_{3j}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \left(\iint_{D_{33}} + \iint_{D_{34}} \right) q(\xi, \tau) u_3(\xi, \tau) d\xi d\tau, \tag{10}$$

где $D_{31} \equiv D_{31}(x, t) = \left\{ (\xi, \tau) \mid 0 \leq \tau \leq \frac{l-x+t}{2}; x-t+\tau \leq \xi \leq l-\tau \right\}$;

$D_{32} \equiv D_{33}(x, t) = \left\{ (\xi, \tau) \mid 0 \leq \tau \leq \frac{x+t-l}{2}; 2l-x-t+\tau \leq \xi \leq l-\tau \right\}$;

$D_{33} \equiv D_{33}(x, t) = \left\{ (\xi, \tau) \mid 0 \leq \tau \leq t, \frac{l+x-t}{2} + \left| \tau - \frac{l-x+t}{2} \right| \leq \xi \leq \frac{l+x+t-\tau}{2} - \left| \frac{\tau-x-t+l}{2} \right| \right\}$;

$D_{34} \equiv D_{34}(x, t) = \left\{ (\xi, \tau) \mid 0 \leq \tau \leq x+t-l, \frac{3l-x-t}{2} + \left| \tau - \frac{x+t-l}{2} \right| \leq \xi \leq l \right\}$.

Области D_{33} и D_{34} целиком лежат в Δ_3 , поэтому четвертый и пятый интеграл правой части (10) содержат пока неизвестную функцию $u_3(x, t)$. Однако области D_{31} и D_{32} являются частью треугольника Δ_1 , поэтому первый, второй и третий интеграл в (10) известны.

Положим

$$[N_3\chi](x, t) = \frac{1}{2} \left(\iint_{D_{33}} + \iint_{D_{34}} \right) q(\xi, \tau) \chi(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$J_3(x, t) = \frac{1}{2} \left(\iint_{D_{31}} + \iint_{D_{32}} \right) q(\xi, \tau) u_1(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \iint_{\bigcup_{j=1}^4 D_{3j}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Тогда уравнение (10) примет следующий операторный вид:

$$u_3(x, t) = J_3(x, t) + [N_3 u_3](x, t).$$

Интегральный оператор N_3 ограниченно действует в $L_2(\Delta_3)$ и нетрудно показать, что для его степеней выполняется оценка

$$|[N_3^k \chi](x, t)| \leq \sup_{(x, t) \in \Delta_3} |\chi(x, t)| \cdot \|q\|_{L_2(\Delta_3)}^k \cdot \frac{\sqrt{[(x+t-l) \cdot t]^k}}{k!}, \quad k \in N. \tag{11}$$

Таким образом, уравнение (10) также является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода для $u_3(x, t)$. Если $f(x, t) \equiv 0$, то $u_1(x, t) \equiv 0$ в D_{31}, D_{32} и отсюда $J_3(x, t) \equiv 0$. Поэтому $u_3(x, t) \equiv 0$ в Δ_3 как решение однородного уравнения. Если же $f(x, t)$ произвольная функция из $L_2(Q_T)$, то уравнение (10) имеет решение, представимое абсолютно сходящимся рядом Неймана

$$u_3(x, t) = J_3(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} [N_3^k J_3](x, t).$$

В области Δ_2 соотношение (6) примет следующий вид:

$$u_2(x, t) = - \int_0^{t-x} \mu(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \iint_{\bigcup_{k=1}^4 D_{2k}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \iint_{D_{21}} q(\xi, \tau) u_1(\xi, \tau) d\xi d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint_{D_{22}} q(\xi, \tau) u_1(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \iint_{D_{23} \cup D_{24}} q(\xi, \tau) u_2(\xi, \tau) d\xi d\tau, \tag{12}$$

где $D_{21} \equiv D_{21}(x, t) = \left\{ (\xi, \tau) : 0 \leq \tau \leq \frac{t+x}{2}; \tau \leq \xi \leq x+t-\tau \right\} \subset \Delta_1;$

$$D_{22} \equiv D_{22}(x,t) = \left\{ (\xi, \tau) : 0 \leq \tau \leq \frac{t-x}{2}; \tau \leq \xi \leq t-x-\tau \right\} \subset \Delta_1;$$

$$D_{23} \equiv D_{23}(x,t) = \left\{ (\xi, \tau) : 0 \leq \tau \leq t-x; 0 \leq \xi \leq \frac{t-x}{2} - \left| \tau - \frac{t-x}{2} \right| \right\} \subset \Delta_2;$$

$$D_{24} \equiv D_{24}(x,t) = \left\{ (\xi, \tau) : 0 \leq \tau \leq t; \frac{x-t+\tau}{2} + \left| \frac{x-t+\tau}{2} \right| \leq \xi \leq \frac{t+x}{2} - \left| \tau - \frac{t+x}{2} \right| \right\} \subset \Delta_2.$$

Введя обозначения

$$[N_2 u_2](x,t) = \frac{1}{2} \iint_{D_{23} \cup D_{24}} q(\xi, \tau) u_2(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$J_2(x,t) = - \int_0^{t-x} \mu(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \iint_{\bigcup_{k=1}^4 D_{2k}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \iint_{D_{21} \cup D_{22}} q(\xi, \tau) u_1(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

перепишем интегральное уравнение (12) в операторном виде $u_2(x,t) = J_2(x,t) + [N_2 u_2](x,t)$.

Нетрудно показать, что степени оператора N_2 удовлетворяют следующей оценке:

$$|[N_2^k \chi](x,t)| \leq \sup_{(x,t) \in \Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|_{L_2(\Delta_2)}^k \cdot \frac{\sqrt{[t(t-x)]^k}}{k!}, \quad k \in N.$$

Итак, уравнение (12) относительно функции $u_2(x,t)$ является уравнением типа Вольтерра второго рода, решение которого представимо абсолютно сходящимся рядом Неймана

$$u_2(x,t) = J_2(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} [N_2^k J_2](x,t).$$

Рассмотрение остальных частей прямоугольника Q_{2l} проводится аналогичным образом в следующей последовательности: $\Delta_4, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7$. Для каждой части $\Delta_j, j = \overline{4,7}$ выделяется подобласть D_j области интегрирования, целиком лежащая в Δ_j , при этом интеграл по области, дополнительной к D_j , берется уже от известных функций. В правой части каждого уравнения будут присутствовать интегралы от μ и f по соответствующей области.

Итак, нами показано, что уравнения (6) и (7) имеют в прямоугольнике Q_T ограниченное решение $u(x,t)$. Легко можно показать гладкость полученного решения. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда полученное решение удовлетворяет оценке

$$\sup_{(x,t) \in Q_T} |u(x,t)| \leq M \left(\|\mu\|_{L_2[0,T]} + \|f\|_2 \right), \tag{13}$$

равномерной для всех $q(x, t) : \|q\|_2 \leq \gamma$, тем самым $M = M(\gamma) > 0$.

Доказательство. Пусть $(x, t) \in \Delta_1$, тогда на основании оценки (9) и неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$\begin{aligned} |u_1(x, t)| &\leq \frac{1}{2} \sup_{(x,t) \in \Delta_1} \iint_{D_1} |f(\xi, \tau)| d\xi d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \sup_{(x,t) \in \Delta_1} \iint_{D_1} |f(\xi, \tau)| d\xi d\tau \cdot \|q\|_{L_2(\Delta_1)}^k \cdot \frac{t^k}{(\sqrt{2})^k \sqrt{(2k)!}} \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{(x,t) \in \Delta_1} \iint_{D_1} |f(\xi, \tau)| d\xi d\tau \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t \cdot \|q\|_{L_2(\Delta_1)}}{\sqrt{2}} \right)^k \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \|f\|_{L_2(Q_T)} \cdot \frac{l}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{l \cdot \|q\|_{L_2(\Delta_1)}}{\sqrt{2}} \right)^k \right) = \frac{l}{4} \|f\|_{L_2(Q_T)} \exp \left(\frac{l \|q\|_{L_2(\Delta_1)}}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{(x,t) \in \Delta_1} |u_1(x, t)| \leq \frac{l}{4} \exp \left(\frac{l \|q\|_{L_2(\Delta_1)}}{\sqrt{2}} \right) \|f\|_{L_2(Q_T)}, \tag{14}$$

что соответствует оценке (13). Если $f(x, t) \equiv 0$, то из (14) получим соотношение $\sup_{(x,t) \in \Delta_1} |u_1(x, t)| \leq 0$,

из которого вытекает, что $u(x, t) \equiv 0$.

Совершенно аналогично обосновывается справедливость оценки (13) и для остальных областей.

Оценка (13) свидетельствует об **устойчивости** полученного решения относительно граничных условий и правой части уравнения.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда имеет место оценка

$$\|u - u^*\|_{W_2^1(Q_T)} \leq B \|q\|_{L_2(Q_T)}, \tag{15}$$

в которой $u^*(x, t)$ – решение соответствующей смешанной задачи для уравнения вынужденных колебаний струны (5), а B не зависит от нормы функции $q(x, t)$.

Оценка (15) означает, что решение рассматриваемой смешанной задачи регулярно по отношению к аддитивному возмущению $q(x, t)u(x, t)$ волнового оператора с суммируемым с квадратом коэффициентом $q(x, t)$.

Из тождества (4), теоремы 1 и схемы рассуждений, изложенных в [5] при доказательстве теоремы 3, вытекает следующая

Теорема 2. Пусть в уравнении (1) коэффициент $q(x,t)$ принадлежит классу $L_2(Q_T)$. Тогда для любого $T \leq 2l$ смешанная задача (1)-(3) может иметь не более одного решения из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$.

Поступило 27.04.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией. – Дифференциальные уравнения, 2000, т. 36, №11, с. 1513-1528.
2. Лионс Ж. Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987, 368 с.
3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973, 407 с.
4. Абдукаримов М.Ф., Крицков Л.В. Задача граничного управления для одномерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом. Случай управления смещением на одном конце при закреплённом втором. – Дифференциальные уравнения, 2013, т. 49, № 6, с. 759-771.
5. Крицков Л.В., Абдукаримов М.Ф. Граничное управление смещением на одном конце при свободном втором для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменным коэффициентом. – Доклады Академии наук, 2013, т. 450, № 6, с. 640-643.
6. Абдукаримов М.Ф., Крицков Л.В. Задача граничного управления для одномерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом. Случай управления смещениями на двух концах. – Дифференциальные уравнения, 2013, т. 49, № 8, с.1036-1046.
7. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений. – Успехи матем. наук, 1960, т.15, №2(92), с. 97-154.
8. Крицков Л.В. О задачах граничного управления для уравнения Клейна-Гордона-Фока с суммируемым коэффициентом. – Дифференциальные уравнения, 2015, т. 51, №5, с. 688-701.
9. Абдукаримов М.Ф. Об устойчивости решения одной смешанной задачи для телеграфного уравнения. – Вестник Таджикского национального университета, серия естественных наук, 2017, №1/5, с. 116-122.
10. Абдукаримов М.Ф. О разрешимости одной комбинированной смешанной задачи для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом. – ДАН РТ, 2020, т. 63, №1-2, с. 24-33.
11. Абдукаримов М.Ф. Некоторые задачи граничного управления смещением для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом. – Душанбе, 2018, 240 с.
12. Абдукаримов М.Ф. О граничном управлении упругой силой на одном конце при закреплённом втором процесса вынужденных колебаний струны. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2015, т. 58, № 10, с. 894-900.
13. Абдукаримов М.Ф. О граничном управлении упругими силами на двух концах процесса вынужденных колебаний струны за минимальный промежуток времени. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2017, т.60, №5-6, с. 205-211.

М.Ф.Абдукаримов, Ф.Р.Исмаатов

**ДОИР БА ҲАЛШАВАНДАГИИ ЯК МАСЪАЛАИ ОМЕХТА БАРОИ
МУОДИЛАИ ТЕЛЕГРАФӢ БО КОЭФФИТСИЕНТИ ТАӢИРӢБАНДА АЗ
СИНФИ ФУНКСИЯҲОИ БО КВАДРАТ ЗАМШАВАНДА**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола як масъалаи омехта барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда таҳқиқ карда шудааст, ки ҳалли он бо маънои умумикардасуда фаҳмида мешавад. Ҳалшавандагии масъалаи омехтаи муоинашаванда исбот карда шудааст. Илова бар ин, нишон дода мешавад, ки ҳалли масъалаи мазкур нисбат ба ошуби коэффитсиент ва шартҳои сарҳадӣ устувор мебошад.

Калимаҳои калидӣ: муодилаи телеграфӣ, коэффитсиенти тағйирёбанда, масъалаи омехта, ҳалшавандагӣ, айнияти интегралӣ, устуворӣ.

M.F.Abdukarimov, F.R.Ismatov

**ON THE SOLVABILITY OF A MIXED PROBLEM FOR A TELEGRAPH
EQUATION WITH A VARIABLE COEFFICIENT FROM THE CLASS
OF FUNCTIONS SUMMABLE WITH A SQUARE**

Tajik National University

In this paper, we study one mixed problem for a one-dimensional telegraph equation with a variable coefficient, the solution of which is understood in a generalized sense. The solvability of the considered mixed problem is proved. In addition, it is substantiated that the solution of the problem under study is stable with respect to the additive perturbation of the coefficient, as well as with respect to the boundary conditions.

Key words: telegraph equation, variable coefficient, mixed problem, solvability, integral identity, stability.

УДК 517.968.220

Л.Н.Раджабова

О ЯВНЫХ РЕШЕНИЯХ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ОСОБЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ЛИНИЯМИ

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком НАНТ З.Х.Рахмоновым 18.04.2022 г.)

В данной работе изучена переопределенная система интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями, состоящая из двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с двумя особыми линиями и одномерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой линией в прямоугольнике. Определены условия совместности уравнений системы для всех возможных значений параметров уравнений системы. Установлено, что, когда параметры двумерного уравнения интегрального уравнения системы связаны между собой особым образом, в зависимости от знаков параметров явное решение системы уравнений может содержать произвольную функцию, произвольную постоянную или решение системы уравнений может быть единственным.

Ключевые слова: переопределенная система уравнений, интегральные уравнения типа Вольтерра, особые линии, условия совместности, произвольные функции.

Пусть D прямоугольник $D = \{a < x < a_1, b_1 < y < b\}$ с границами $\Gamma_1 = \{a < x < a_1, y = b\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, b_1 < y < b\}$. В области D рассмотрим переопределенную систему интегральных уравнений типа Вольтерра вида

$$\begin{cases} u(x, y) + \lambda \int_a^x \frac{u(t, y)}{t-a} dt - \mu \int_y^b \frac{u(x, s)}{b-s} ds + \delta \int_a^x \frac{dt}{t-a} \int_y^b \frac{u(t, s)}{b-s} ds = f(x, y) \\ u(x, y) + \nu \int_a^x \frac{u(t, y)}{t-a} dt = g(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Решение системы уравнений (1) будем искать в классе функций $u(x, y) \in C(\bar{D})$, обращающихся в нуль при $x \rightarrow a, y \rightarrow b$.

В работах [1-5] изучаются сингулярные интегральные уравнения, ядра которых имеют слабую и сильные особенности, особенности степенного или логарифмического типа, с ядром Коши или когда интеграл понимается в смысле главного значения, для решения которых преимущественно используется численный метод.

Адрес для корреспонденции: Раджабова Лутфия Нусратовна. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Буни Хисорак 17. Таджикский национальный университет. E-mail: lutfya62@mail.ru

Ранее исследованы переопределенные системы одномерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярными или сверх-сингулярными точками в ядре [6], одномерные и двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особыми и сильно-особыми граничными линиями [7,8].

Для переопределенной системы интегральных уравнений (1) при наложении определенных условий на правые части и параметры уравнений получены условия совместности уравнений системы, явные решения, которые могут содержать произвольные функции и произвольные постоянные, определены условия, при выполнении которых решение системы уравнений единственно, и изучены свойства решений.

Если в системе интегральных уравнений (1) функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям $f(x, y) \in C(\bar{D})$ и на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением [8]:

$$f(x, y) = o[(x-a)^{\delta_1}], \delta_1 > |\lambda| \text{ при } x \rightarrow a, \tag{2}$$

$$f(x, y) = o[(y-b)^{\gamma_1}], \gamma_1 > \mu \text{ при } y \rightarrow b, \tag{3}$$

решение первого уравнения системы интегральных уравнений (1) при $\delta = -\lambda\mu$, $\lambda < 0$, $\mu > 0$

представимо в виде:

$$u(x, y) = (b-y)^\mu \varphi(x) + (x-a)^{-\lambda} \psi(y) + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt + \\ + \mu \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ – произвольные функции.

Подставляя решение первого уравнения системы уравнений (1) во второе уравнение системы, после некоторых упрощений для определения произвольной функции $\varphi(x)$ получим равенство:

$$\varphi(x) + v \int_a^x \frac{\varphi(t)}{t-a} dt = (b-y)^{-\mu} [g(x, y) - f(x, y)] + (b-y)^{-\mu} (x-a)^{-\lambda} \psi(y) \left(\frac{v-\lambda}{\lambda}\right) + \\ + \lambda (b-y)^{-\mu} \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt - \mu \int_y^b \frac{f(x, s)}{(b-s)^{\mu+1}} ds + \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \frac{f(t, s)}{(b-s)^{\mu+1}} ds - \\ - v (b-y)^{-\mu} \int_a^x \frac{f(t, y)}{t-a} dt + \lambda v (b-y)^{-\mu} \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \ln \left| \frac{x-a}{t-a} \right| \frac{f(t, y)}{t-a} dt - \\ - \lambda \mu \int_a^x \frac{dt}{t-a} \int_y^b \frac{f(t, s)}{(b-s)^{\mu+1}} ds + v \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \ln \left| \frac{x-a}{t-a} \right| \frac{dt}{t-a} \int_y^b \frac{f(t, s)}{(b-s)^{\mu+1}} ds]. \tag{4}$$

В силу условия независимости левой части равенства (4) от переменной y имеем:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial y} [(b-y)^{-\mu} [g(x,y) - f(x,y) - (x-a)^{-\lambda} \psi(y) \left(\frac{\nu-\lambda}{\lambda} \right) + \\
 & + \lambda \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{f(t,y)}{t-a} dt - \mu \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(x,s)}{b-s} ds + \\
 & + \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(t,s)}{b-s} ds - \nu \int_a^x \frac{f(t,y)}{t-a} dt + \\
 & + \lambda \nu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \ln \left| \frac{x-a}{t-a} \right| \frac{f(t,y)}{t-a} dt - \\
 & - \lambda \mu \int_a^x \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(t,s)}{b-s} ds + \\
 & + \nu \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \ln \left| \frac{x-a}{t-a} \right| \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(t,s)}{b-s} ds] = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Из равенства (5) следует условие совместности первого и второго уравнения системы интегральных уравнений (1) в виде:

$$\begin{aligned}
 & \mu g(x,y) + (b-y) \frac{\partial}{\partial y} (g(x,y) - f(x,y)) + \left(\frac{\nu-\lambda}{\lambda} \right) (x-a)^{-\lambda} \left[\mu \psi(y) + \frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \right] + \\
 & + (b-y) \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{f(t,y)}{t-a} dt - \mu \int_a^x \frac{f(t,y)}{t-a} dt + \lambda \nu \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\lambda \ln \left| \frac{t-a}{x-a} \right| \frac{f(t,y) dt}{t-a} \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть в равенстве (4) выполняются условия:

$$- (y-b)^{-\mu} g(x,y) \Big|_{y=b} = g(x), \tag{7}$$

– $\psi(y) \in C(\overline{D})$ и при $y \rightarrow b$ обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$\psi(y) = o[(y-b)^{\gamma_1}], \quad \gamma_1 > \mu, \tag{8}$$

– согласно (8) $(y-b)^{-\mu} f(x,y) \Big|_{y=b} = 0$, тогда для определения функции $\varphi(x)$ получим уравнение вида [8]:

$$\varphi(x) + \nu \int_a^x \frac{\varphi(t)}{t-a} dt = g(x).$$

Из вышеуказанных рассуждений следуют следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть в системе интегральных уравнений (1) $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = -\lambda\mu$, $\nu < 0$, $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $g(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ с асимптотическими поведением (2), (3), функция $g(x,y)$ удовлетворяет условию (7), где $g(x) \in C(\Gamma_1)$, $g(a) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$g(x) = o[(x-a)^{\delta_2}], \delta_2 > |\nu| \text{ при } x \rightarrow a.$$

Также, пусть функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ связаны между собой условием совместности (6). Тогда однородная система интегральных уравнений (1) имеет решение вида:

$$u_0(x, y) = (b-y)^\mu (x-a)^{|\nu|}.$$

Неоднородная переопределенная система интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями всегда разрешима, решение содержит одну произвольную постоянную и одну произвольную функцию, которое выражается равенством:

$$u(x, y) = (b-y)^\mu \left[(x-a)^{|\nu|} c_1 + g(x) - \nu \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{|\nu|} \frac{g(t)}{t-a} dt \right] + (x-a)^{-\lambda} \psi(y) + f(x, y) - \\ - \lambda \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt + \mu \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b-s} ds,$$

где c_1 – произвольная постоянная, $\psi(y)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям: $\psi(y) \in C(\Gamma_2)$ и при $y \rightarrow b$ обращается в нуль с асимптотическим поведением (8).

Теорема 2. Пусть в системе интегральных уравнений (1) $f(x, y) \in C(D)$, $g(x, y) \in C(D)$, $\lambda < 0$, $\mu > 0, \delta = -\lambda\mu, \nu > 0$, $f(a, b) = 0$ с асимптотическими поведением (2), (3), функция $g(x, y)$ удовлетворяет условию (7), где $g_1(x) \in C(\Gamma_1)$, $g(a) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$g(x) = o[(x-a)^\varepsilon], \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a.$$

Функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ связаны между собой условием совместности (6).

Тогда неоднородная система интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями всегда разрешима, решение содержит одну произвольную функцию и выражается равенством:

$$u(x, y) = (b-y)^\mu \left[g(x) - \nu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\nu \frac{g(t)}{t-a} dt \right] + (x-a)^{-\lambda} \psi(y) + f(x, y) - \\ - \lambda \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt + \mu \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b-s} ds,$$

где произвольная функция $\psi(y) \in C(\Gamma_2)$ и при $y \rightarrow b$ обращается в нуль с асимптотическим поведением (8).

Теорема 3. Пусть в системе интегральных уравнений (1) $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $g(x, y) \in C(\bar{D})$, $\lambda > 0$, $\mu < 0, \delta = -\lambda\mu, f(a, b) = 0$ на Γ_1 и Γ_2 с асимптотическим поведением:

$$f(x, y) = o[(x-a)^\varepsilon], \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a, \tag{9}$$

$$f(x, y) = o[(y-b)^\varepsilon], \varepsilon > 0 \text{ при } y \rightarrow b, \tag{10}$$

$g(x, y) \in C(\bar{D})$, причем функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ связаны между собой условием совместности

$$\begin{aligned}
 g(x, y) = & f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt + \mu \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds - \\
 & - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^\mu \frac{f(t, s)}{b-s} ds + \nu \int_a^x \frac{f(t, y)}{t-a} dt - \\
 & - \lambda \nu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \ln \left(\frac{x-a}{t-a}\right) \frac{f(t, y)}{t-a} dt + \gamma \mu \int_a^x \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^\mu \frac{f(t, s)}{b-s} ds - \\
 & - \nu \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \ln \left(\frac{x-a}{t-a}\right) \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^\mu \frac{f(t, s)}{b-s} ds.
 \end{aligned}$$

Тогда единственное решение системы интегральных уравнений (1) представимо в виде:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt + \mu \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds - \\
 & - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^\mu \frac{f(t, s)}{b-s} ds.
 \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть в системе интегральных уравнений (1) $\lambda < 0, \mu < 0, \delta = -\lambda\mu,$ $f(x, y) \in C(\bar{D}), g(x, y) \in C(\bar{D}), f(a, b) = 0,$ с асимптотическими поведением (2), (10), $g(a, b) = 0$ на Γ_1 и Γ_2 с асимптотическим поведением:

$$\begin{aligned}
 g(x, y) = & o[(x-a)^{\delta_2}], \delta_2 > |\lambda| \text{ при } x \rightarrow a, \\
 g(x, y) = & o[(y-b)^\varepsilon], \varepsilon > 0 \text{ при } y \rightarrow b,
 \end{aligned}$$

причем функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ связаны между собой условием совместности вида

$$\begin{aligned}
 g(x, y) = & \frac{1}{\lambda} \left\{ \nu f(x, y) - (x-a) \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) + \mu(x-a) \frac{\partial}{\partial x} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds + \right. \\
 & \left. + \lambda \nu \int_a^x \frac{f(t, y)}{t-a} dt + \nu \mu \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds + \lambda \nu \mu \int_a^x \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^\mu \frac{f(t, s)}{b-s} ds \right\}.
 \end{aligned}$$

Тогда система интегральных уравнений (1) имеет единственное решение, которое выражается равенством:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & (x-a)^{-\lambda} \psi(y) + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t-a} dt + \\
 & + \mu \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^\mu \frac{f(x, s)}{b-s} ds - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^\lambda \frac{dt}{t-a} \int_y^b \left(\frac{b-y}{b-s}\right)^\mu \frac{f(t, s)}{b-s} ds,
 \end{aligned}$$

где функция $\psi(y)$ определяется равенством:

$$\begin{aligned} \psi(y) = & \frac{\lambda}{\lambda - \nu} (x - a)^\lambda \{ g(x, y) - f(x, y) + \lambda \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t - a} dt - \mu \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b - s} ds + \\ & + \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{dt}{t - a} \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds - \nu \int_a^x \frac{f(t, y)}{t - a} dt + \lambda \nu \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \ln \left(\frac{x - a}{t - a} \right) \frac{f(t, y)}{t - a} dt + \\ & - \nu \mu \int_a^x \frac{dt}{t - a} \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds + \nu \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \ln \left(\frac{x - a}{t - a} \right) \frac{dt}{t - a} \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds \}. \end{aligned}$$

Теорема 5. Пусть в системе интегральных уравнений (1) $\lambda > 0, \mu > 0, \delta = -\lambda\mu, \nu < 0$, $f(x, y) \in C(\bar{D}), g(x, y) \in C(\bar{D}), f(a, b) = 0$ с асимптотическим поведением (9),(3), функция $g(x, y)$ удовлетворяет условию (7), где $g(x) \in C(\Gamma_1), g(a) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$g(x) = o[(x - a)^{\delta_2}], \delta_2 > |\nu| \text{ при } x \rightarrow a,$$

причем функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ связаны между собой условиями совместности:

$$\begin{aligned} -\mu g(x, y) - (b - y) \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) - \lambda (b - y) \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t - a} dt + \\ + \mu (b - y) \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x \frac{f(t, y)}{t - a} dt - \lambda \nu (b - y) \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \ln \left(\frac{x - a}{t - a} \right) \frac{f(t, y)}{t - a} dt = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда однородная система уравнений (1) имеет решение вида:

$$u_0(x, y) = (b - y)^\mu (x - a)^{|\nu|}.$$

Неоднородная система уравнений типа Вольтерра с особыми линиями всегда разрешима, решение содержит одну произвольную постоянную и выражается равенством

$$\begin{aligned} u(x, y) = & (b - y)^\mu [(x - a)^{|\nu|} c_1 + g(x) - \nu \int_a^x \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{|\nu|} \frac{g(t)}{t - a} dt] + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t - a} dt + \\ & + \mu \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b - s} ds - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{dt}{t - a} \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds, \end{aligned}$$

где c_1 – произвольная постоянная.

Теорема 6. Пусть в системе интегральных уравнений (1) $\lambda > 0, \mu > 0, \delta = -\lambda\mu, \nu > 0$, $f(x, y) \in C(\bar{D}), g(x, y) \in C(\bar{D}), f(a, b) = 0$ с асимптотическим поведением (9),(3), функция $g(x, y)$ удовлетворяет условию (7), где $g(x) \in C(\Gamma_1), g(a) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$g(x) = o[(x - a)^\varepsilon], \varepsilon > 0, \text{ при } x \rightarrow a,$$

причем функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ связаны между собой условиями совместности (11).

Тогда неоднородная система интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями всегда разрешима и её единственное решение представимо в виде

$$u(x, y) = (b - y)^\mu \left[g(x) - \nu \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\nu \frac{g(t)}{t - a} dt \right] + f(x, y) - \lambda \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{f(t, y)}{t - a} dt + \\ + \mu \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(x, s)}{b - s} ds - \lambda \mu \int_a^x \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^\lambda \frac{dt}{t - a} \int_y^b \left(\frac{b - y}{b - s} \right)^\mu \frac{f(t, s)}{b - s} ds.$$

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1, любое решение системы интегральных уравнений (1) из класса $C(\overline{D})$ в точке $(x, y) = (a, b)$ и на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^{\delta_3} (b - y)^\mu], \text{ где } \delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2) \text{ при } (x, y) = (a, b),$$

$$u(x, y) = o[(x - a)^{\delta_3}] \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$u(x, y) = o[(b - y)^\mu] \text{ при } y \rightarrow b.$$

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 2, любое решение системы интегральных уравнений (1) из класса $C(\overline{D})$ в точке $(x, y) = (a, b)$ и на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^\epsilon (b - y)^\mu], \text{ при } (x, y) = (a, b),$$

$$u(x, y) = o[(x - a)^\epsilon] \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$u(x, y) = o[(b - y)^\mu] \text{ при } y \rightarrow b.$$

Следствие 3. При выполнении условий теоремы 3, любое решение системы интегральных уравнений (1) из класса $C(\overline{D})$ в точке $(x, y) = (a, b)$ и на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^\epsilon (b - y)^\epsilon], \text{ при } (x, y) = (a, b),$$

$$u(x, y) = o[(x - a)^\epsilon] \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$u(x, y) = o[(b - y)^\epsilon] \text{ при } y \rightarrow b.$$

Следствие 4. При выполнении условий теоремы 4, любое решение системы интегральных уравнений (1) из класса $C(\overline{D})$ в точке $(x, y) = (a, b)$ и на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^\epsilon (b - y)^\epsilon], \text{ при } (x, y) = (a, b),$$

$$u(x, y) = o[(x - a)^\epsilon] \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$u(x, y) = o[(b - y)^\epsilon] \text{ при } y \rightarrow b.$$

Следствие 5. При выполнении условий теоремы 5, любое решение системы интегральных уравнений (1) из класса $C(\overline{D})$ в точке $(x, y) = (a, b)$, на линиях Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon (b - y)^\mu], \text{ при } (x, y) = (a, b),$$

$$u(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon] \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$u(x, y) = o[(b - y)^\mu] \text{ при } y \rightarrow b.$$

Следствие 6. При выполнении условий теоремы 6, любое решение системы интегральных уравнений (1) из класса $C(\overline{D})$ в точке $(x, y) = (a, b)$, на линиях Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon (b - y)^\mu], \text{ при } (x, y) = (a, b),$$

$$u(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon] \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$u(x, y) = o[(b - y)^\mu] \text{ при } y \rightarrow b.$$

Поступило 25.04.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Довгий С.А., Лифанов И.К., Черный Д.И. Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологии. – Киев. Изд.-во «Юстон», 2016, 380 стр.
2. Корчевский Е.М., Фролов А.Г. Двумерные сингулярные и слабо-сингулярные интегральные уравнения в теории диэлектрических волноводов. – Казань, 2018.
3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: Янус, 2018, 521 стр.
4. Расолько Г.А. Численное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши методом ортогональных многочленов. Часть 1. Алгоритмы в MathCad. – Минск, БГУ, 2017. 293 стр.
5. Плещинский Н. Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре. – Казань, 2018, 160 стр.
6. Раджабов Н. Переопределенная линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверх-сингулярные интегральные уравнения типа Вольтерра третьего рода с логарифмическими и сверх-сингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе, ТНУ, 2021, 320 с.
7. Раджабов Н. Интегральные уравнения типа Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх-сингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе: Деваштич, 2007, 222с.
8. Раджабов Н., Раджабова Л.Н. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтера с фиксированными сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. – Saarbiicken : LAP LAMBERT, Academic Publishing, 2012, 502 с.
9. Раджабов Н., Раджабова Л.Н., Зарипов С.Б. Двумерные симметричные интегральные уравнения типа Вольтеррас сингулярными и сверх-сингулярными линиями. – Saarbiicken: LAP LAMBERT, Academic Publishing, 2019, 108 p.
10. Раджабов Н., Раджабова Л.Н., Зарипов С.Б. Двумерные симметричные интегральные уравнения типа Вольтеррас сингулярными и сверх-сингулярными линиями. – Saarbiicken: LAP LAMBERT, Academic Publishing, 2019, 108 p.

11. L.N.Rajabova, M.B.Khushvakhov. To the theory Of non-model two-dimensional integral equations of Volterra type with a strongly singular and weakly singular line on a strip. – Bulletin of L.N.Gumilyov Eurasian national University. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2019, №4(129), p.67-72.

Л.Н.Раджабова

ОИД БА ҲАЛҲОИ ОШКОРИ СИСТЕМАИ БАРЗИЁД МУАЙЯНШУДАИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРАЛИИ НАМУДИ ВОЛТЕРРА БО ХАТҲОИ МАХСУСИ САРҲАДӢ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар кори мазкур системаи барзиёд муайяншудаи муодилаҳои интегралӣ намуди Волтерра бо хатҳои махсус, ки аз муодилаи моделии дученакаи интегралӣ намуди Волтерра бо ду хатҳои махсус ва муодилаи моделии якченакаи намуди Волтерра бо хати махсус иборат мебошад дар росткунҷа омӯхта шудааст. Барои системаи муодилаҳои мазкур шартҳои ҳамчоягии муодилаҳои система барои ҳамаи қиматҳои имконпазири параметрҳои муодилаҳо муайян шудааст. Дар ҳолате, ки параметрҳои муодилаи дученака байни худ ба таври муайян алоқаманданд, вобаста ба аломатҳои параметрҳо ҳалли ошқори системаи муодилаҳо дорони функсияи ихтиёрӣ, доимии ихтиёрӣ буда метавонад ва ё ҳалли системаи муодилаҳо метавонад ягона бошад.

Калимаҳои калидӣ: *системаи муодилаҳои барзиёд муайяншуда, муодилаҳои интегралӣ намуди Волтерра, хатҳои махсус, шартҳои ҳамчоягӣ, функсияҳои ихтиёрӣ.*

L.N.Rajabova

ON EXPLICIT SOLUTIONS TO A REDETERMINATED SYSTEM OF VOLTERRA-TYPE INTEGRAL EQUATIONS WITH SINGULAR BOUNDARY LINES

Tajik National University

In this paper, we study an overdetermined system of Volterra-type integral equations with singular lines, which consists of a two-dimensional Volterra-type integral equation with two singular lines and a one-dimensional Volterra-type integral equation with a singular line in a rectangle. The conditions for the compatibility of the equations of the system for all possible values of the parameters of the equations of the system are determined. It has been established that when the parameters of the two-dimensional equation of the integral equation of the system are interconnected in a special way, depending on the signs of the parameters, the explicit solution of the system of equations may contain an arbitrary function, an arbitrary constant, or the solution of the system of equations may be unique.

Key words: *overdetermined system of equations, Volterra-type integral equations, singular lines, compatibility conditions, arbitrary functions.*

УДК 539.3

З.Н.Бахромова

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМАЦИИ ДЛИННОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ*Таджикский национальный университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 19.05.2021 г.)*

Решается задача о геометрически нелинейной деформации длинной некруговой цилиндрической оболочки с переменными параметрами. Исследуется влияние изменения параметра кривизны и нагрузки на напряженно-деформированное состояние оболочки.

Ключевые слова: деформация цилиндрической оболочки, переменные параметры, нелинейная задача.

Наряду с изучением напряженно-деформированного состояния круговых цилиндрических оболочек, большой интерес представляет исследование деформации некруговых цилиндрических оболочек с переменными параметрами. Такие оболочки находят широкое применение в современной технике. Рассмотрим задачу о геометрически нелинейной деформации длинной некруговой цилиндрической оболочки при действии поверхностно распределенной нагрузки и жестко закрепленных краев. Исследуется влияние переменности кривизны и нагрузки на характер докритической и после критической деформации оболочки в зависимости от её формы и распределения нагрузки.

Будем исходить из уравнений [1], описывающих нелинейную задачу о деформации пологих оболочек при силовых воздействиях в предположении, что толщина оболочки и параметры жесткости переменны: уравнения равновесия, соотношение упругости и выражения деформации через перемещения.

Задача о деформации гибкой длинной цилиндрической оболочки с переменными параметрами описывается нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка [2]. Основные дифференциальные уравнения можно представить в виде

$$D_N \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{dD_N}{dy} \left[\frac{dv}{dy} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 \right] =$$

$$= D_N \left[\frac{dw}{dy} \cdot \frac{dw^2}{dy^2} + k_y \frac{dw}{dy} + \frac{dk_y}{dy} \cdot w \right], \quad (1)$$

$$D_M \frac{d^4 w}{dy^4} + 2 \frac{dD_M}{dy} \cdot \frac{d^3 w}{dy^3} + \frac{d^2 D_M}{dy^2} \cdot \frac{d^2 w}{dy^2} =$$

$$= D_N \left[\frac{dv}{dy} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 - wk_y \right] \left(k_y + \frac{d^2w}{dy^2} \right) + q, \quad (2)$$

где y, v – длина дуги и перемещение по направляющей, w – прогиб, k_y – кривизна,

$D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2}$, $D_M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ жесткости, h – толщина, E – модуль упругости, ν – коэффициент

Пуассона. Величины h, k_y, E, q – функции координаты y ($-b \leq y \leq b$). Для формулировки краевой задачи на продольных краях оболочки задаются четыре граничных условия для w и два для v .

Исследуем влияние переменности кривизны на деформацию гибкой длинной цилиндрической оболочки в случае жесткого закрепления её продольных краев, то есть при следующих граничных условиях

$$w = v = 0, \quad w' = 0 \quad \text{при } y = \pm b. \quad (2)$$

При этом параметр кривизны изменятся по следующему закону:

$$k_y = \alpha + \beta y^2. \quad (3)$$

При интегрировании системы (1), (2) замечаем, что для любых законов изменения кривизны k_y можно найти первый интеграл в виде

$$D_N \left[\frac{dv}{dy} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 - wk_y \right] = c = \text{const}. \quad (4)$$

Тогда $N_y = c$ и второе уравнение системы (1) преобразуется к следующему:

$$D_M \frac{d^4w}{dy^4} + 2 \frac{dD_M}{dy} \frac{d^3w}{dy^3} + \frac{d^2D_M}{dy^2} \frac{d^2w}{dy^2} = N_y \left(k_y + \frac{d^2w}{dy^2} \right) + q. \quad (5)$$

Рассмотрим случай, когда на оболочку действует нагрузка с выпуклой стороны, что приводит к сжатому состоянию оболочки [1] и в дальнейшем примем, что $N_y < 0$.

Для решения задачи в общем случае можно применить численный метод дискретной ортогонализации [3]. При фиксированном N_y решение уравнения (5) запишем в виде

$$w = \bar{w} + w^{(k)} + w^{(q)}, \quad (6)$$

где $w^{(k)}, w^{(q)}$ – частные решения для законов изменения k_y и q , \bar{w} – общее решение соответствующего однородного уравнения, которое равно:

$$\bar{w} = C_1 \cos \lambda y + C_2 \sin \lambda y + C_3 y + C_4, \quad (7)$$

здесь

$$\lambda^2 = -\frac{N_y}{D_M} = -\frac{C}{D_M}; \quad C = const.$$

Учитывая (3) и полагая $q = const$, имеем

$$w^{(k)} = -\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{2}{\lambda^2}\beta\right)y^2 - \frac{\beta}{12}y^4,$$

$$w^{(q)} = \frac{q}{2D_M\lambda^2}y^2 = -\frac{q}{2C}y^2.$$

Подставляя в (7) решение уравнения (5), запишем в виде

$$w = C_1 \cos \lambda y + C_2 \sin \lambda y + C_3 y + C_4 - \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{2}{\lambda^2}\beta\right)y^2 - \frac{\beta}{12}y^4 - \frac{q}{2C}y^2.$$

В этом выражении, хотя нагрузка q в последнем члене входит линейно, прогиб w связан с q нелинейно, так как усилие N_y есть функция q , а следовательно и $\lambda = \lambda(q)$. Постоянные интегрирования определим, пользуясь граничными условиями $w(\pm b) = w'(\pm b) = 0$.

Задача решается с учетом безразмерных величин. Выберем безразмерные значения всех величин [4]

$$\eta = \frac{y}{b} (-1 \leq \eta \leq 1); \quad k_y = \alpha k_y^*(\eta); \quad \alpha = k_y(0); \quad h = h_0 h^*(\eta);$$

$$E = E_0 E^*(\eta); \quad D_M = D_M^0 E^*(h^*)^3; \quad D_M^0 = \frac{E_0 h_0^3}{12(1-\nu^2)}; \quad D_N = D_N^0 E^* \cdot h^*;$$

$$D_N^0 = \frac{E_0 h_0}{1-\nu^2}; \quad h_0 = h(0); \quad E_0 = E(0); \quad \mu = b\lambda; \quad \lambda^2 = -\frac{C}{D_M^0};$$

$$K^* = \frac{4\alpha}{h^0} b^2; \quad q^* = \frac{b^2}{\alpha D_M^0} q; \quad w^* = \frac{w}{\alpha b^2}; \quad \nu^* = \frac{\nu}{a^2 b^3}. \quad (8)$$

Уравнения (4) и (5) представим в виде:

$$\frac{d\nu^*}{d\eta} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw^*}{d\eta}\right)^2 - K_y^* w^* = -\frac{4}{3} \frac{\mu^2}{E^* h^* (K^*)^2}; \quad (9)$$

$$\frac{d^4 w^*}{d\eta^4} + 2\left(\frac{1}{E^*} \frac{dE^*}{d\eta} + \frac{3}{h^*} \frac{dh^*}{d\eta}\right) \frac{d^2 w^*}{d\eta^2} + \left[\frac{1}{E^*} \frac{d^2 E^*}{d\eta^2} + \frac{6}{E^*} \frac{dE^*}{d\eta} \frac{1}{h} \frac{dh^*}{d\eta} + \right]$$

$$\left. + \frac{3}{h^*} \frac{d^2 h^*}{d\eta^2} + 6 \left(\frac{1}{h^*} \frac{dh^*}{d\eta^2} \right)^2 + \frac{\mu^2}{(h^*)^2} \right],$$

$$\frac{dw^*}{d\eta} = - \frac{\mu^2 K_y^*}{E^* (h^*)^2} + \frac{q^*}{E^* (h^*)^2}. \tag{10}$$

Учитывая уравнения (9), (10) и задавая граничные условия при фиксированном значении c , можно сформулировать краевую задачу для функции w^* . Преобразуем уравнение (10) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{z}}{d\eta} = A\vec{z} + \vec{f}, \tag{11}$$

где $\vec{z} = \{z_i\} = \{w^*, (w^*)', (w^*)'', (w^*)'''\}$ ($i = 1, 2, 3, 4$),

$A = \{a_{i,j}\}$ – квадратная матрица с ненулевыми элементами $a_{12} = a_{23} = a_{24} = 1$;

$$a_{43} = \frac{2}{E^*} \frac{dE^*}{d\eta} + \frac{6}{h^*} \frac{dh^*}{d\eta};$$

$$a_{44} = \frac{1}{E^*} \frac{d^2 E^*}{d\eta^2} + \frac{6}{E^*} \frac{dE^*}{d\eta} \frac{1}{h^*} \frac{dh^*}{d\eta} + \frac{3}{h^*} \frac{d^2 h^*}{d\eta^2} + 6 \left(\frac{1}{h^*} \frac{dh^*}{d\eta} \right)^2 + \frac{\mu^2}{(h^*)^2};$$

$f = \{f_i\}$ – вектор правых частей; $f_1 = f_2 = f_3 = 0$; $f_4 = - \frac{\mu^2 K_y^*}{E^* (h^*)^2}$.

Граничные условия имеют вид

$$B_1 \vec{z} = \vec{b}_1 (\eta = -1); \quad B_2 \vec{z} = \vec{b}_2 (\eta = 1), \tag{12}$$

причем B_1 и B_2 – заданные прямоугольные матрицы, соответственно порядок $k \cdot 4$ и $(4 - k) \cdot 4$ ($k < 0$); \vec{b}_1, \vec{b}_2 – заданные векторы.

Решение краевой задачи (5), (6) при фиксированном μ находим в форме

$$\vec{z} = z_1(\mu) + z_2 q_0^*, \tag{13}$$

где q_0^* – характерный фактор нагрузки.

Для решения краевой задачи (11) и (12) применим метод дискретной ортогонализации [5].

После того как w^* вычислено, считая, что края оболочки не сближаются, то есть

$$\int_{-1}^1 \frac{dv^*}{d\eta} = 0, \tag{14}$$

из (3) при фиксированном μ с учетом (7) получаем нелинейную зависимость q_0^* и μ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{d(w_1^* + w_2^* q_0^*)}{d\eta} \right]^2 d\eta - \int_{-1}^1 (w_1^* + w_2^* q_0^*) K_y^* d\eta + \\ & + \frac{4}{3} \frac{\mu^2}{(K^*)^2} \int_{-1}^1 \frac{d\eta}{E^* h^*} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Выражения (9) вместе с (13) позволяет получить нелинейную зависимость w^* от q^* в виде (15).

С учетом безразмерных величин (8), выражение для прогиба окончательно примет вид

$$\begin{aligned} w^* = & \left(\frac{q^* + 2\beta^*}{\mu^*} - 1 - \beta^* \right) \cdot \left(\frac{\cos \mu \eta}{\mu^2 \sin \mu} + \frac{\eta^2}{2} - \frac{\cos \mu}{\mu \sin \mu} - \frac{1}{2} \right) + \\ & + \frac{1}{12} \beta^* (\eta^2 - 1)(5 - \eta^2). \end{aligned} \tag{16}$$

Далее считаем, что края не сближаются, то есть

$$\Delta = \int_{-b}^b \frac{dv}{dy} dy = 0,$$

получаем следующую зависимость

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{q^* + 2\beta^*}{\mu^2} - 1 - \beta^* \right)^2 \left(\frac{\mu^2}{2 \sin \mu} + \frac{3}{2} \mu \operatorname{ctg} \mu - 2 - \frac{\mu^2}{3} \right) - \left(\frac{q^* + 2\beta^*}{\mu^2} - 1 - \beta^* \right), \\ & \left(1 - \frac{\mu^2}{3} - \mu \operatorname{ctg} \mu \right) \cdot (1 + \beta^*) + \frac{4}{3} \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{21} \beta^* \right) \cdot \beta^* \mu^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{k^*} \right)^2 \mu^4 = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Исследуется влияние изменения параметра кривизны на напряженно-деформированное состояние оболочки.

Подставляя в уравнение (16) $\eta = 0$, получаем выражение для параметра прогиба в вершине оболочки

$$w_0^* = \left(\frac{q^* + 2\beta^*}{\mu^2} - 1 - \beta^* \right) \cdot \left(\frac{\cos \mu}{\mu \sin \mu} - \frac{1}{2} \right) + \frac{5}{12} \beta^*.$$

Задавая значения β^* и k^* из выражения (17), находим зависимость $q^* = q^*(\mu)$, далее при фиксированном μ из (9) находим зависимость $w^* = w^*(q^*)$.

Полное напряжение равно сумме изгибных и мембранных напряжений

$$\delta_y = \delta_y^{(u)} + \delta_y^{(M)}.$$

Изгибное напряжение запишем в виде

$$\delta_y^{(u)} = \frac{E\gamma}{1-\nu} (x_2 + \nu x_1),$$

где x_1, x_2 – компоненты изгибной деформации в направленных x и y , $\delta_y^{(M)}$ – мембранное напряжение.

Исследуется влияние значения параметра кривизны на напряженно-деформированное состояние оболочки. Получаем, что оболочка находится под действием равномерно распределенной нагрузки q^* , прямолинейные края жестко закреплены и кривизна изменяется вдоль направляющей по закону (3).

Наблюдается, что для круговой оболочки с параметром кривизны $k^* > 10.3$ зависимость $q^*(w^*)$ перестает быть монотонной. Это характеризует явление, известное под названием хлопка оболочки.

При значении параметра q^* , которое обычно называют верхним критическим, оболочка скачком переходит в устойчивое состояние. Если после скачка нагрузку уменьшать, то при некотором значении произойдет обратный выхлоп оболочки.

Поступило 05.09.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вольмир А.С. Гибкие пластики и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1965, 419 с.
2. Григоренко Я.М. К решению задачи о деформации гибкой длинной цилиндрической оболочки с переменными параметрами. – Докл. АН УССР, 1977, вып. 5, сер. А, с.418-422.
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – УМН, 1961, вып. 3, с. 171-174.
4. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1955, 568 с.
5. Бахромова З.Н. Численное решение краевой задачи о деформации гибкой длинной цилиндрической панели. – ДАН Тадж. ССР, 1980, т.23, №3, с. 135-138.

З.Н.Бахромова

ҲАЛЛИ МАСЪАЛАИ ҒАЙРИХАТТӢ ОИД БА ДЕФОРМАТСИЯИ ҶИЛДИ ДАРОЗИ СИЛИНДРИКӢ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Масъалаи ғайрихаттӣ оид ба деформатсияи ҷилди қаншии силиндрикии ғайридаврии дароз бо параметрҳои тағйирёбанда дида баромада мешавад. Ҳалли адабии тақрибии ин гуна масъала ва тадқиқи таъсири параметрҳои тағйирёбанда ба ҳолати шиддатнок-деформиронидашудаи оболочкаи силиндрикӣ гузаронида мешавад.

Калимаҳои калидӣ: деформатсияи ҷилди цилиндри, параметрҳои тағйирёбанда, масъалаи ғайрихаттӣ.

Z.N.Bakhromova

SOLUTION OF THE NONLINEAR PROBLEM ON DEFORMATION OF A LONG CYLINDRICAL SHELL

Tajik National University

An approach is suggested to solution of problems on nonlinear deformation of long noncircular cylindrical shells of variable rigidity/ if rigidity is constant the problem is solved in quadrature's. The effect of curvature changes on the shell deformation is exemplified.

Key words: deformation of the cylindrical shells, variable parameters, nonlinear task.

УДК 523. 532

Член-корреспондент НАН Таджикистана Г.И.Кохирова,

А.М.Буриев, Х.Г.Асоев

ДИНАМИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОМЕТЫ C/2020 PV6 (PANSTARRS) ПО НАБЛЮДЕНИЯМ В ГИССАРСКОЙ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ*Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана*

По многоцветным наблюдениям долгопериодической кометы C/2020 PV6 (PANSTARRS) в Гиссарской астрономической обсерватории Института астрофизики НАНТ определены координаты и вычислена ее орбита. Измерен видимый и определен абсолютный блеск кометы в фильтрах BVRI, а также его изменение за восемь ночей. Наличие пылевой комы вокруг ядра и вычисленные авторами статьи величины параметра пылепроизводительности указывают на повышенную активность кометы в период мониторинга. Показатели цвета кометы соответствуют короткопериодическим и долгопериодическим кометам. Диаметр ядра кометы оценен как 24.0 ± 0.1 км.

Ключевые слова: комета, наблюдения, астрометрия, фотометрия, координаты, орбита, кривая блеска, показатель цвета, диаметр.

В в е д е н и е

Долгопериодические кометы имеют период обращения вокруг Солнца свыше 200 лет и поэтому их систематические наблюдения практически невозможны. Наблюдаются такие кометы лишь в одном прохождении перигелия орбиты. В отсутствии достаточного количества наблюдений одной конкретной долгопериодической кометы, необходимых для полновесного и всестороннего ее исследования, особую ценность имеют наблюдения каждой доступной долгопериодической кометы.

Д о л г о п е р и о д и ч е с к а я к о м е т а C / 2 0 2 0 P V 6 (P A N S T A R R S)

Новый объект был обнаружен 13 августа 2020 г. на снимках системы телескопов панорамного обзора и быстрого реагирования «PANSTARRS». В этот период у этого объекта никаких признаков кометной активности не наблюдалось, и выглядел он как обычный астероид. Было объявлено об открытии нового астероида, получившего наименование 2020 PV6 (или P113P9h). Однако 17 мая 2021 г. была зарегистрирована кометная активность астероида 2020 PV6, в связи с чем объект получил уже новое наименование комета C/2020 PV6 (PANSTARRS) [1]. Период обращения кометы вокруг Солнца составляет 269 лет, и она наблюдалась только в одном прохождении перигелия в 2021 г. Параметр Тиссерана относительно Юпитера для C/2020 PV6 имеет значение $T_J = -1.022$ [2] и означает, что объект движется по типичной кометоподобной орбите. Период обращения и тип орбиты позволили считать C/2020 PV6 долгопериодической кометой. 25 сентября 2021 г. комета C/2020 PV6 прошла перигелий

Адрес для корреспонденции: Кохирова Гулчехра Исроиловна, Буриев Анварджон Махмадалиевич. 736063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/5, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: kokhirova2004@mail.ru, anvar10@mail.ru

своей орбиты, где ее яркость достигла 15.6^m . Ранее, в июле 2021 г. комета прошла мимо Земли на минимальном расстоянии 1.64 а.е., при этом ее блеск составил 14.0^m [3].

Элементы орбиты кометы C/2020 PV6 [2] приведены в табл. 1, где a – большая полуось, e – эксцентриситет, q, Q – перигелийное и афелийное расстояния, i – наклонение, ω – аргумент перигелия, Ω – долгота перигелия. Комета движется по ретроградной ($i=128$ град.) сильно вытянутой эллиптической ($e=0.945$) орбите, в афелии ($Q=81.1$ а.е.) уходящей далеко за пределы пояса Койпера.

Таблица 1

Элементы орбиты кометы C/2020 PV6 (PANSTARRS) (J2000.0)

Эпоха	a , а.е.	e	q , а.е.	Q , а.е.	i , град.	ω , град.	Ω , град.
29.09.21	41.701	0.944	2.295	81.105	128.239	71.380	329.144

Оптические наблюдения кометы C/2020 PV6

Для исследования динамических и физических свойств кометы C/2020 PV6 нами проведены оптические наблюдения объекта в период до прохождения перигелия. Мониторинг выполнен с 26 августа по 07 сентября 2021 г. на телескопе АЗТ-8 Гиссарской астрономической обсерватории (ГисАО) Института астрофизики НАНТ. Телескоп АЗТ-8 в оптической системе Ньютона имеет фокус $F=2820$ мм. Размер и поле зрения камеры АЗТ-8 - 3056x3056 пикселей и 44.7x44.7 минут дуги, соответственно, масштаб матрицы – 0.874 секунд дуги/пиксель. Регистрация объекта выполнялась с помощью ПЗС FLI ProLine PL09000 с использованием широкополосных фотометрических фильтров системы Джонсона-Козинса – *BVRI* [4]. Длительность экспозиций составляла от 5 до 60 секунд.

Дата наблюдений, положение кометы во время наблюдений в ГисАО и детали выполненных экспозиций приведены в табл. 2, где r и Δ – расстояния кометы от Солнца и Земли, ph – фазовый угол, N и t – количество и время экспозиций. Изображение кометы во время наблюдений приведено на рис. 1. Первичная обработка кадров выполнена по стандартной процедуре с использованием кадров «Dark», «Flat» и «Bias».

Таблица 2

Журнал наблюдений кометы C/2020 PV6 в ГисАО

Дата	r , а.е.	Δ , а.е.	ph , град.	N x Фильтр	t, с
26.08.2021	2.319	2.054	25.812	15xB,15xV, 15xR, 15xI	5-60
27.08.2021	2.318	2.070	25.837	15xB,15xV, 15xR, 15xI	5-60
28.08.2021	2.316	2.086	25.853	15xB,15xV, 15xR, 15xI	5-60
29.08.2021	2.315	2.103	25.859	15xB,15xV, 15xR, 15xI	5-60
30.08.2021	2.314	2.120	25.856	15xB,15xV, 15xR, 15xI	5-60
01.09.2021	2.311	2.153	25.820	15xB,15xV, 15xR, 15xI	5-60
02.09.2021	2.309	2.170	25.78	15xB,15xV, 15xR, 15xI	5-60
07.09.2021	2.304	2.256	25.505	17xB,17xV, 18xR, 18xI	5-60

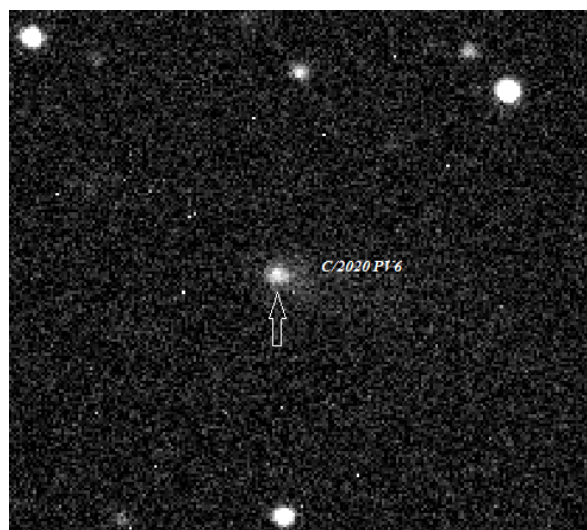


Рис. 1. Изображение кометы C/2020 PV6 по наблюдениям в ГисАО в 2021 г.

Координаты и орбита кометы C/2020 PV6

Астрометрическая обработка изображений выполнена с помощью ПП АПЕКС-II [5], для определения координат кометы использован каталог UCAC5, в котором точность положений звезд составляет 0.05".

В результате астрометрической обработки почти 500 изображений кометы определены ее экваториальные координаты на период наблюдений. Избранные средние координаты приведены в табл. 3, а также в виде графика на рис. 2, где по оси абсцисс даны прямое восхождение α и по оси ординат – склонение δ . На рис. 2 слева для сравнения приведены координаты объекта по нашим и другим наблюдениям в этот период из базы данных [6].

Таблица 3

Экваториальные координаты и видимые звездные величины в разных фильтрах кометы C/2020 PV6 по наблюдениям в ГисАО

№	Дата	Момент наблюдений (UT)	α	δ	m (зв.вел.)
1	26.08.2021	17 ^h 32 ^m 16 ^s .08	16 ^h 52 ^m 29 ^s .34	+27°48'11".8	16.1
2	26.08.2021	17 32 51.36	16 52 29.35	+27 48 10.4	16.1
3	27.08.2021	18 54 13.68	16 50 14.22	+27 33 18.4	15.7
4	27.08.2021	18 56 27.06	16 50 13.98	+27 33 17.1	15.7
5	27.08.2021	18 57 26.64	16 50 13.93	+27 33 15.8	15.7
6	28.08.2021	17 28 17.04	16 48 18.25	+27 20 04.4	14.9
7	28.08.2021	17 28 51.24	16 48 18.22	+27 20 04.6	14.9
8	29.08.2021	17 52 48.72	16 46 17.08	+27 05 49.5	15.9
9	29.08.2021	17 53 21.84	16 46 17.07	+27 05 49.1	15.9
10	29.08.2021	17 53 58.92	16 46 16.99	+27 05 48.4	15.9
11	30.08.2021	17 12 20.88	16 44 25.52	+26 52 14.0	16.4
12	30.08.2021	17 12 54.00	16 44 25.40	+26 52 13.4	16.1
13	30.08.2021	17 13 27.48	16 44 25.36	+26 52 13.0	15.8
14	01.09.2021	17 08 09.06	16 40 48.30	+26 24 28.4	15.5
15	01.09.2021	17 08 43.44	16 40 48.28	+26 24 28.8	16.4
16	02.09.2021	17 20 00.06	16 39 04.80	+26 10 35.2	15.7
17	02.09.2021	17 21 07.92	16 39 04.68	+26 10 34.3	15.7
18	07.09.2021	17 21 04.68	16 31 26.74	+25 03 20.0	15.3
19	07.09.2021	17 27 52.56	16 31 26.36	+25 03 17.3	15.3

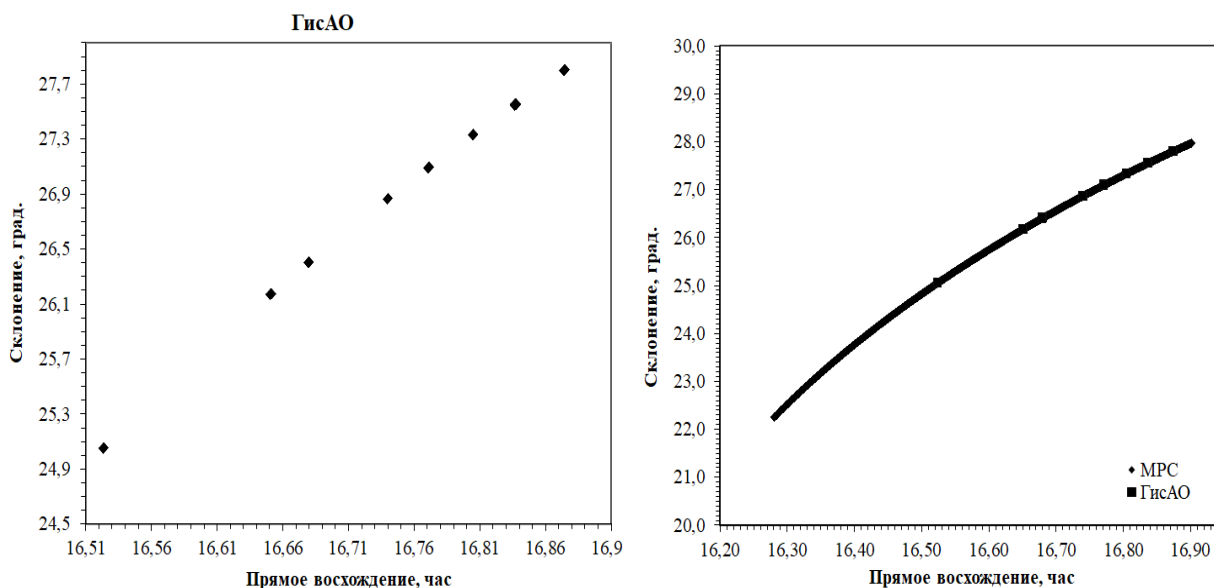


Рис. 2. Видимая траектория кометы C/2020 PV6 по наблюдениям в ГисАО (справа) и данным других наблюдений в 2021 г. (слева).

Ошибки астрометрической обработки наших изображений найдены с помощью ПП ЭПОС [7]. Средние значения отклонений измеренных экваториальных координат (O) от каталожных данных (C), обозначенные как $(O-C)_\alpha$ и $(O-C)_\delta$ для координат α и δ , соответственно, а также их средние квадратичные ошибки σ_α и σ_δ в угловых секундах по наблюдениям в ГисАО представлены в табл. 4. Средняя по всем кадрам ошибка астрометрической редукции не превышает 0.01" и 0.08" для прямого восхождения α и склонения δ , соответственно, что говорит о достаточно высокой точности измерений и, соответственно, определения координат.

Таблица 4

Средние разности (O-C) и их стандартные отклонения для кометы C/2020 PV6

Дата	$(O-C)_\alpha$	σ_α	$(O-C)_\delta$	σ_δ
26.08.2021	-0.352"	± 0.067 "	0.286"	± 0.054 "
27.08.2021	-0.297"	± 0.060 "	0.678"	± 0.079 "
28.08.2021	-0.543"	± 0.020 "	0.142"	± 0.024 "
29.08.2021	-0.508"	± 0.016 "	0.347"	± 0.072 "
30.08.2021	-0.337"	± 0.082 "	0.124"	± 0.030 "
01.09.2021	-0.447"	± 0.019 "	0.407"	± 0.081 "
02.09.2021	-0.350"	± 0.080 "	0.320"	± 0.073 "
07.09.2021	-0.150"	± 0.053 "	0.221"	± 0.021 "

Первоначальная орбита C/2020 PV6 вычислена для среднего момента наблюдений с использованием 203 измерений и ПП ЭПОС [7]. В табл. 5 приведены вычисленные нами стандартные элементы орбиты в равноденствии 2000.0, а также n – среднее суточное движение, σ – средняя квадратичная ошибка. Для сравнения в табл. 5 приведена орбита, вычисленная на основе 1270 измеренных положений кометы по наблюдениям в различных обсерваториях согласно базы данных MPC [8]. В последнем столбце приведены величины разности между вычисленной нами орбитой и орбитой MPC, обозначенные как χ . Как видно, с учетом разности моментов времени, на которые вычислена орбита, по наблюдениям в ГисАО получена орбита, близкая к орбите MPC. Можно заключить, что в

период нашего мониторинга орбита кометы оставалась стабильной, следовательно, никаких событий – фрагментация ядра, столкновение с другим объектом и др. не наблюдалось.

Таблица 5

Орбита кометы C/2020 PV6, полученная по наблюдениям ГисАО, и орбита MPC (J2000.0)

Элементы орбиты	ГисАО [данная работа]	MPEC 2021-W131	χ
Кол-во положений, использованных для вычисления орбиты	203	1270	-
T (JD)	JD 2459483.993	JD 2459483.497	-
Эпоха (JD)	2459464.5	2459200.5	-
e	0.944948 \pm 0.000304	0.944949	-1E-06
a , а.е.	41.701815 \pm 0.000735	41.701816	-1E-06
q , а.е.	2.295632 \pm 0.00121	2.295637	-5E-06
i , град.	128.239241 \pm 0.000112	128.239291	-5E-05
ω , град.	71.380002 \pm 0.000240	71.380041	-3.9E-05
Ω , град.	359.989029 \pm 0.000170	359.989032	-3E-06
n , град./сут.	0.355891 \pm 0.000249	0.355915	-2.4E-05
σ	0".370	0".500	-

Физические свойства кометы C/2020 PV6

Для определения некоторых физических параметров кометы C/2020 PV6 выполнена фотометрическая обработка кадров, полученных в ГисАО с 26 августа по 07 сентября 2021 г., по стандартной процедуре с помощью ПП АПЕКС-II [5]. Для определения видимого блеска кометы использовались звезды сравнения из каталога APASS, для которых блеск определен с точностью, равной 0.03^m [9]. Опорные звезды и комета измерены апертурой радиусом 4", проекция которой на небесную сферу соответствует 5710.96 км. Средние значения видимых звездных величин кометы C/2020 PV6 в фильтрах *BVRI* даны в табл. 6. За каждую ночь наблюдений построены кривые блеска, которые наряду с данными табл.6 показывают постепенное увеличение видимого блеска, что связано с приближением кометы к точке перигелия и усилением кометной активности.

Таблица 6

Средние (за ночь) видимые звездные величины кометы C/2020 PV6 по наблюдениям в ГисАО в августе-сентябре 2021 г.

Дата, (UT) 2021	Фильтр			
	B	V	R	I
авг. 26.0400	17.14 \pm 0.02	16.40 \pm 0.01	15.92 \pm 0.05	15.53 \pm 0.01
авг. 27.0420	17.27 \pm 0.02	16.52 \pm 0.03	16.07 \pm 0.03	15.66 \pm 0.03
авг. 28.0350	17.29 \pm 0.02	16.53 \pm 0.01	16.09 \pm 0.02	15.67 \pm 0.02
авг. 29.0310	17.31 \pm 0.02	16.55 \pm 0.01	16.09 \pm 0.02	15.69 \pm 0.13
авг. 30.0350	17.31 \pm 0.02	16.57 \pm 0.01	16.12 \pm 0.02	15.72 \pm 0.04
сен. 01.0210	17.36 \pm 0.02	16.57 \pm 0.02	16.15 \pm 0.02	15.74 \pm 0.02
сен. 02.0370	17.37 \pm 0.01	16.60 \pm 0.01	16.16 \pm 0.02	15.75 \pm 0.01
сен. 07.0470	17.42 \pm 0.02	16.67 \pm 0.01	16.22 \pm 0.01	15.82 \pm 0.01

Видимый блеск m_a конвертировался в абсолютную яркость ядра кометы $m_a(1,1,0)$ с использованием известного эмпирического уравнения [10], принятого для комет

$$m_a(1,1,0) = m_a - 5 \log(r\Delta) - \beta\alpha, \quad (1)$$

здесь $m_a(1,1,0)$ – блеск гипотетической точки на единичном гелиоцентрическом и геоцентрическом расстояниях с фазовым углом $ph=0$ град., m_a – измеренный блеск, r и Δ – гелио- и геоцентрическое расстояния кометы в а.е., α – фазовый угол (ph) в град., β – фазовый коэффициент в зв.вел./град.; индекс a означает какой-либо фильтр. Для фазового коэффициента использовано общепринятое значение $\beta=0.035$ зв.вел./град. [11]. Найденный таким способом абсолютный блеск кометы в фильтрах BVRI (средние значения за пять ночей) приведен в табл. 7, зависимость абсолютной яркости кометы, обозначенная на графике H , от даты наблюдений (в юлианских днях) в ГисАО, а также ошибки измерений в виде перпендикулярных полос приведены на рис. 3. Как видно, в период мониторинга абсолютный блеск кометы практически был постоянным.

Согласно базе данных [12], общий абсолютный блеск кометы в полосе V составляет 7.4^m , абсолютный блеск ядра 13.0^m . Наши измерения дали оценку абсолютного блеска ядра кометы в диапазоне $12.20-12.21^m$, при этом его несколько большая яркость по сравнению с эфемеридной величиной обусловлена вкладом пылевой комы. Повышение уровня нормальной кометной активности обусловлено приближением кометы к точке перигелия орбиты. Наличие пылевой комы вокруг ядра кометы видно из рис.1.

Таблица 7

Абсолютные звездные величины кометы C/2020 PV6 по наблюдениям в ГисАО

Дата, (UT) 2021	Фильтр			
	B	V	R	I
авг. 26.0400	12.97±0.02	12.21±0.01	11.76±0.05	11.36±0.01
авг. 27.0420	12.96±0.02	12.21±0.02	11.76±0.03	11.35±0.02
авг. 28.0350	12.97±0.02	12.20±0.01	11.77±0.05	11.35±0.02
авг. 29.0310	12.96±0.02	12.21±0.01	11.75±0.02	11.35±0.13
авг. 30.0350	12.95±0.02	12.21±0.01	11.77±0.02	11.36±0.04
сен. 01.0210	12.97±0.02	12.20±0.02	11.77±0.02	11.36±0.02
сен. 02.0370	12.99±0.01	12.20±0.01	11.78±0.01	11.35±0.01
сен. 07.0470	12.95±0.02	12.20±0.01	11.75±0.01	11.35±0.01

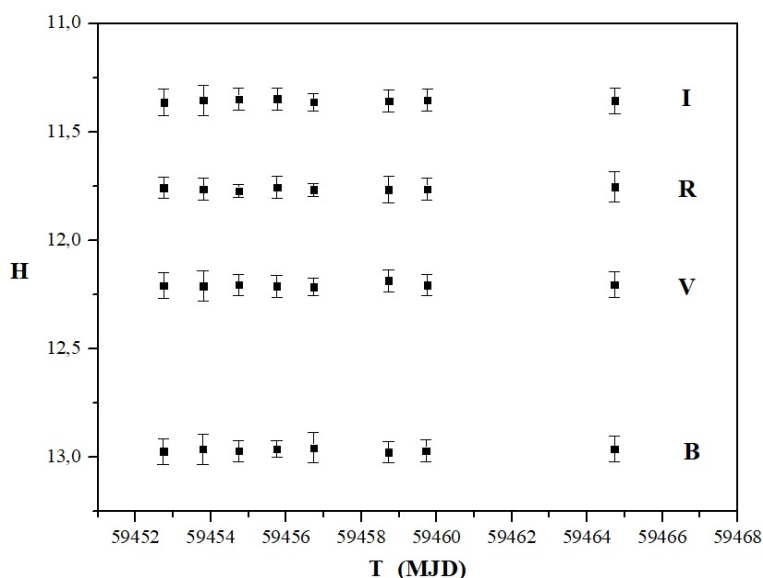


Рис. 3. Абсолютный блеск H (средние значения за ночь) кометы C/2020 PV6 в фильтрах BVRI по наблюдениям в ГисАО.

Показатели цвета кометы по нашим наблюдениям (колор-индекс), а также для комет различных популяций Солнечной системы – активных комет семейства Юпитера (АКСЮ), активных долгопериодических комет (АДПК), объектов пояса Койпера (ОПК) и для Солнца (С) приведены в табл.8. Как видно, показатели цвета кометы C/2020 PV6 по наблюдениям в ГисАО хорошо согласуются со средними показателями цвета для активных долгопериодических комет, куда она и относится. Одновременно наши данные хорошо соответствуют и соответствующим величинам для АКСЮ. Как показано в [13,14], показатели цвета активных комет семейства Юпитера и долгопериодических комет имеют схожие величины, откуда следует предположение об отсутствии принципиальных различий в составе их вещества. Это предположение подтверждается нашими оценками показателей цвета кометы C/2020 PV6. Как и следовало ожидать, колор-индексы C/2020 PV6 сильно отличаются от значений для ОПК, поскольку происхождение долгопериодических комет не связано с этой областью Солнечной системы.

Таблица 8

Показатели цвета кометы C/2020 PV6 в сравнении с данными для комет различных популяций

Колор-индекс	C/2020 PV6, данная работа, 2021 г. (UT)								АКСЮ		АДПК	ОПК	С
	26.04	27.04	28.04	29.03	30.04	01.02	02.04	07.05	[13]	[14]	[13]	[13]	[15]
B-V	0.76	0.75	0.77	0.75	0.75	0.77	0.79	0.75	0.74	0.75	0.78	0.93	0.64
V-R	0.45	0.45	0.45	0.46	0.44	0.45	0.43	0.45	0.46	0.47	0.47	0.57	0.35
R-I	0.40	0.41	0.42	0.41	0.41	0.41	0.43	0.40	0.44	0.43	0.42	-	0.33
B-R	1.21	1.20	1.20	1.20	1.18	1.20	1.21	1.20	1.10	1.22	1.23	1.52	0.99

Мы оценили уровень кометной активности с помощью параметра Afp [16]

$$Afp = \frac{4r^2 \Delta^2 \cdot 10^{0.4(m_\odot - m_a)}}{\rho},$$

где A – альбеда, f – коэффициент заполнения апертуры поля зрения, ρ – проекция радиуса фотометрической апертуры на небесную сферу в см, m_\odot и m_a – видимые величины Солнца и кометы соответственно в определенном фильтре, r – гелиоцентрическое расстояние в а.е., Δ – геоцентрическое расстояние в см. Для наших наблюдений параметр Afp рассчитывался по изображениям, полученным в полосе R , с радиусом проекции апертуры $\rho=5710.96$ км ($4''$), для абсолютного блеска Солнца в фильтре R использована величина $m_\odot=-27^m.15$ [17]. Значения параметра Afp и ошибки измерений по нашим наблюдениям приведены в табл. 9. Как видно, значения параметра составляют свыше 190 см, что свидетельствует о повышенной пылепроизводительности [18] и, следовательно, наряду с абсолютным блеском, также указывает на повышенную активность объекта, связанную с приближением к Солнцу и точке перигелия орбиты.

Для оценки размера ядра кометы использовано эмпирическое соотношение между измеренным в фильтре V абсолютным блеском и эффективным радиусом ядра кометы r_N в метрах [14]

$$A r_N^2 = 2.238 \cdot 10^{22} r^2 \Delta^2 10^{0.4(m_\odot - m_v(1,1,0))}, \quad (2)$$

где A – геометрическое альbedo и $m_{\odot} = -26.76$ видимая зв. вел. Солнца [17], причем обе величины в фильтре V . Поскольку величина альbedo кометы C/2020 PV6 не установлена, то для определения диаметра мы использовали значение $A=0.04$ [11,19], принятое для кометных ядер. Результаты оценки диаметра ядра кометы приведены в табл. 9. Верхняя оценка размера ядра составляет 23.9-24.1 км, причем измерения 8 ночей наблюдений дают почти одинаковые оценки. В период наблюдений комета находилась в активном состоянии и, скорее всего, нам не удалось избежать вклада комы в вычислениях диаметра. К настоящему моменту в литературе не имеется данных по оценке размера кометы, и мы не сможем сопоставить наши данные с другими наблюдениями. Можно отметить, что по сравнению, к примеру, с кометой 67P диаметром чуть более 4 км, комета C/2020 PV6 имеет очень крупный размер.

Таблица 9

Уровень активеости и оценка диаметра ядра кометы C/2020 PV6 по наблюдениям в ГисАО

Дата	r , а.е.	Δ , а.е.	ph , град.	m_R , зв.вел.	$m_V(1,1,0)$, зв.вел.	Afp , см	D , км
авг. 26.0400	2.319	2.054	25.81	15.92±0.05	12.21±0.01	231.08±30	23.97±0.09
авг. 27.0420	2.318	2.071	25.84	16.07±0.03	12.21±0.02	202.75±18	23.94±0.09
авг. 28.0350	2.317	2.087	25.85	16.09±0.02	12.20±0.01	200.41±17	24.07±0.10
авг. 29.0310	2.315	2.104	25.85	16.09±0.02	12.21±0.01	201.70±10	24.03±0.07
авг. 30.0350	2.314	2.121	25.85	16.12±0.02	12.21±0.01	197.62±11	24.03±0.08
сен. 01.0210	2.312	2.154	25.82	16.15±0.02	12.20±0.02	194.88±15	24.08±0.10
сен. 02.0370	2.309	2.171	25.78	16.16±0.02	12.20±0.01	194.12±17	24.04±0.10
сен. 07.0470	2.304	2.256	25.50	16.22±0.01	12.20±0.01	190.15±12	24.04±0.10

З а к л ю ч е н и е

В результате астрометрической и фотометрической обработки изображений долгопериодической кометы C/2020 PV6 (PANSTARRS) по наблюдениям в ГисАО в августе-сентябре 2021 г.:

- определены экваториальные координаты и вычислена орбита кометы, которые согласуются с данными MPC;
- измерен видимый и определен абсолютный блеск кометы в фильтрах $BVRI$, построены кривые блеска кометы в период наблюдений, выявлено постепенное увеличение видимого блеска, однако абсолютный блеск не изменялся, абсолютный блеск в фильтре V составил $12.20-12.21^m$, при этом его несколько большая яркость по сравнению с эфемеридной величиной 13.0^m обусловлена вкладом комы;
- показатели цвета соответствуют диапазону значений для *активных долгопериодических комет* и активных комет семейства Юпитера, что указывает на отсутствие значительных отличий в вещественном составе кометы от состава короткопериодических комет;
- уровень пылепродуктивности также указывает на повышенную активность кометы, связанную с приближением кометы к Солнцу и перигелию;
- средняя оценка диаметра ядра по нашим наблюдениям составила 24.03 ± 0.09 км при альbedo 0.04, комета относится к крупным объектам;

- стабильность орбиты и абсолютного блеска свидетельствуют о том, что в период мониторинга комета не подверглась фрагментации, столкновениям и др. явлениям, способствующим изменениям орбиты и блеска.

Поступило 01.06.2020 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. <https://www.projectpluto.com/mpecs/2021.htm>, МЕРС 2021-K93, 2022.
2. CNEOS (Center of Near Earth Object Studies), <https://cneos.jpl.nasa.gov>, 2022.
3. <https://skyandtelescope.org/online-gallery/comet-c-2020-pv6-panstarrs>, 2022.
4. Кохирова Г.И., Девяткин А.В., Хамроев У.Х., Буриев А.М., и др. Наблюдения потенциально опасного астероида 2014Ю25 в Таджикистане. – ДАН РТ, 2017, т. 60, №10, с. 490-501.
5. Девяткин А.В., Горшанов Д.Л., Куприянов В.В., Верещагина И.А. Программные пакеты «АПЕКС-I» и «АПЕКС-II» для обработки астрономических ПЗС-наблюдений. – Астрон. вестник, 2010, №1, с. 74-87.
6. Minor Planet Center. – <https://minorplanetcenter.net>. object2020PV6, 2022.
7. Львов В.Н., Цекмейстер С.Д. Использование программного пакета ЭПОС для исследования объектов Солнечной системы. – Астрономический вестник, 2012, т. 46, № 2, с. 190-192.
8. <https://www.projectpluto.com/mpecs/2021.htm>, МЕРС 2021-W31, 2022.
9. Henden A.A., Templeton M., Terrell D., Smith T.C., Levine S., Welch D. VizieR Online Data Catalog. – AAVSO Photometric All Sky Survey (APASS) DR9, 2016.
10. Snodgrass C., Lowry S.C., Fitzsimmons A. Photometry of cometary nuclei: rotation rates, colours and a comparison with Kuiper Belt Objects. – Mon. Not. R. Astron. Soc., 2006, v. 373, pp. 1590-1602.
11. Lamy P.L., Toth I., Fernandez Y.R., Weaver H.A. The sizes, shapes, albedos, and colors of cometary nuclei. – In: Comets II, M.C. Festou, H.U. Keller, and H.A. Weaver (eds.), 2004, University of Arizona Press, Tucson, pp. 223-264.
12. Jet Propulsion Laboratory. – ssd.jpl.nasa.gov, 2022.
13. Jewitt D. Color systematics of comets and related bodies. – The Astron. J., 2015, v. 150:201, 18 p.
14. Solonoi M. et al. Ensemble properties of comets in the Sloan Digital Sky Survey. – Icarus, 2012, v.218, Issue 1, pp. 571-584.
15. Holmberg J., Flynn C., Portinari L. The colours of the Sun. – MNRAS, 2006, v. 367, pp. 449-453.
16. Kokhirova G.I., Ivanova O.V., Rakhmatullaeva F.D., Baransky A.V., Buriev A.M. Results of observations of dual-status object 2008 GO98 in 2017. – Advances in Space Research, 2021, v. 67, Issue 1, pp. 639-647.
17. Willmer N.A. The Absolute Magnitude of the Sun in Several Filters. – The Astrophysical Journal Supplement Series, 2018, v. 236:47, 14 pp.
18. Cazadores de cometas. – <http://www.astrosurf.com/cometas-obs>, 2022.
19. Russel H.N. On the Albedo of the Planets and Their Satellites. – Astrophys. J., 1916, v. 43, pp. 173-196.

Г.И.Қохирова, А.М.Буриев, Ҳ.Ғ.Асоев

**ХУСУСИЯТҲОИ ДИНАМИКӢ ВА ФИЗИКИИ КОМЕТАИ
C/2020 PV6 (PANSTARRS) ДАР АСОСИ МУШОҲИДАҲОИ
РАСАДХОНАИ АСТРОНОМИИ ҲИСОР**

Институти астрофизикаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар асоси мушоҳидаҳои бисёр рангаи кометаи дароздаври C/2020 PV6 (PANSTARRS) дар Расадхонаи астрономии Ҳисори Институти астрофизикаи АМИТ координатҳо муайян ва мадори он ҳисоб карда шуд. Равшании намоён ва мутлақи комета дар филтрҳои BVRI чен карда ва тағйирёбии он дар давоми ҳашт шаб муайян карда шуд. Мавҷудияти комаи чангини дар атрофи ядро буда ва киматҳои чанғосилкунӣ ҳисоб карда шуд, ки аз ғаёлнокии комета дар давраи мушоҳида шаҳодат медиҳанд. Нишондоди ранги кометаи ҳисоб карда шуда, ба нишондодҳои ранги кометаҳои кӯтоҳдавр ва дароздавр мувофиқат мекунад. Диаметри ядрои комета 24.0 ± 0.1 километрро ташкил медиҳад.

Калимаҳои калидӣ: комета, мушоҳидаҳо, астрометрия, фотометрия, координатаҳо, мадор, хатти қачи дурахшонӣ, нишондоди ранг, диаметр.

G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, H.G.Asoev

**DYNAMIC AND PHYSICAL PROPERTIES OF COMET C/2020 PV6 (PANSTARRS)
FROM OBSERVATIONS AT HISSAR ASTRONOMICAL OBSERVATORY**

Institute of Astrophysics of the National Academy of Sciences of Tajikistan

Based on multicolor observations of the long-period comet C/2020 PV6 (PANSTARRS) at the Hissar Astronomical Observatory of the Institute of Astrophysics of the National Academy of Science of Tajikistan the coordinates were determined and its orbit was calculated. The apparent brightness of the comet was measured and the absolute magnitudes were determined in BVRI filters, as well as its change over eight nights was found. The presence of a dust coma around the nucleus and the values of the dust production parameter calculated by us indicate an increased activity of the comet during the monitoring period. The comet's color indices correspond to short-period and long-period comets. The diameter of the comet's nucleus is estimated as 24.0 ± 0.1 km.

Key words: comet, observations, astrometry, photometry, coordinates, orbit, light curve, color index, diameter.

УДК 539.173.8

М.Ш.Имом

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТЕЙ СЧЕТА ВРЕМЕННЫХ СОВПАДЕНИЙ ИМПУЛЬСОВ γ -n И СУММАРНЫХ СОВПАДЕНИЙ ИСТОЧНИКА ^{252}Cf ЦИФРОВЫМ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ

Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана Ф.Рахими 04.07.2022 г.)

В работе рассмотрен анализ цифрового метода скоростей счета временных совпадений импульсов γ -n и суммарных совпадений источника ^{252}Cf . Проведены измерения временных совпадений гамма-квантов и нейтронов различной кратности, а также суммарные совпадения в установке с защитным слоем нейтроностоп и без защитного слоя, с целью определения содержания ядерных делящихся материалов.

Ключевые слова: *скорость счета временных совпадений, неразрушающий анализ, цифровой анализ, двойное совпадение, ядерные делящиеся материалы, наносекунда.*

На сегодняшний день важной проблемой в экспериментальной физике является измерение спектральных, дозовых и временных характеристик смешанных гамма-нейтронных (n, γ) – полей. Эта актуальность подтверждается развитием ядерной энергетики. С подобными задачами приходится сталкиваться в процессе всего технологического цикла работ с ядерными делящимися материалами ЯДМ от обогащения и изготовления материалов и изделий из ЯДМ, далее при эксплуатации атомных электростанций с ядерными реакторами и затем при выгрузке, транспортировке, переработке и хранении облученного ядерного топлива. Подобные измерения проводятся при активном и пассивном контроле, а именно при определении наличия, массы и изотопного состава ЯДМ в тепловыделяющей сборке ядерных реакторов [1].

Сцинтилляторы являются веществами, обладающими способностью излучать свет при поглощении ионизирующего излучения (гамма-квантов, электронов, альфа-частиц и т. д.) [2]. Сцинтилляционные детекторы ядерных излучений являются основным применением сцинтилляторов. В сцинтилляционном детекторе свет, излученный при сцинтилляции, собирается на фотоэлектронном умножителе, значительно реже используются фотодиоды и другая аппаратура, преобразуется в импульс тока, усиливается и записывается той или иной регистрирующей системой, далее преобразуется в цифровую форму посредством аналого-цифрового преобразователя [3].

Сцинтилляционные детекторы по сравнению с традиционными газовыми счетчиками (например, на основе ^3He) обладают значительным содержанием изотопа-поглотителя нейтронов. Этот параметр показывает применимость сцинтилляционных детекторов как материала нового поколения для медицинской диагностической техники [4].

Методика разделения импульсов различных ионизирующих излучений (в частности, импульсов нейтронов и гамма-квантов) была разработана в 1959 г. и основана на зависимости конфигурации

Адрес для корреспонденции: Имом Мирахмади Шарофиддин. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Физико-технический институт НАНТ. E-mail: emmirshar@gmail.com

световой вспышки сцинтилляторов от конфигураций ионизирующего излучения. Больше всего представленная методика нашла свое применение при регистрации быстрых нейтронов при наличии γ -фона [5].

Созданный комплекс программ объединён в одну общую компьютерную вычислительную структуру и имеет возможность определять следующие характеристики смешанных нейтронных и фотонных полей:

- 1) отдельные временные распределения нейтронов и фотонов смешанного излучения (аналог временного анализатора);
- 2) отдельные амплитудные распределения нейтронных и фотонных полей (аналог спектрометра);
- 3) временные совпадения событий (аналог схем совпадений);
- 4) комбинированные задачи, соответствующие первым трем пунктам [6].

Счет совпадения нейтронов является особенной частью представленной методики НРА по определению содержания Pu и ^{235}U из тепловыделяющей сборки ядерных реакторов атомных электростанций [7]. Для определения импульсов ионизирующих излучений используются различные типы детекторов излучения (газовые счетчики, органические сцинтилляторы и т.д.). По сравнению с газовыми счетчиками сцинтилляционные детекторы помимо импульсов нейтронов также могут определить импульсы гамма-квантов [8]. Сцинтилляционные детекторы часто используют для быстрой регистрации нейтронов из-за их быстрого отклика и доступной стоимости. Быстрый отклик является главным преимуществом для счетчиков совпадений, где отношение реальных событий совпадений к случайным совпадениям может значительно влиять на статистическую точность результатов измерений [9].

Проведенные эксперименты и полученные результаты

Были проведены эксперименты по определению счета временных совпадений двойной кратности нейтронов и гамма-квантов с использованием в качестве поглотителя защитного слоя нейтроностоп и без защитного слоя. Соответствующей программой определялись счет γ -n и суммарных совпадений. Время измерения было до 30 нс. Результаты полученных значений временных счетов совпадений импульсов нейтронов и гамма-квантов можно увидеть в нижеприведенных таблицах и рисунках.

Таблица 1

Скорость счета двойных совпадений γ -n и суммарных совпадений ^{252}Cf без защитного слоя, 1/с

Время, нс	TOTAL	\pm	$\gamma - n$	\pm
1	596.41	4.88	19.70	0.89
2	463.33	4.31	22.34	0.95
3	313.49	3.54	21.50	0.93
4	202.49	2.85	21.50	0.93
5	145.73	2.41	27.18	1.04
6	114.65	2.14	35.94	1.20
7	105.33	2.05	47.34	1.38
8	111.65	2.11	57.62	1.52
9	123.05	2.22	71.78	1.69
10	140.45	2.37	86.78	1.86
11	144.97	2.41	91.62	1.91
12	141.17	2.38	88.70	1.88
13	133.09	2.31	82.94	1.82

Время, нс	TOTAL	±	γ – n	±
14	118.65	2.18	74.90	1.73
15	101.33	2.01	61.74	1.57
16	95.57	1.96	57.50	1.52
17	83.01	1.82	49.26	1.40
18	79.41	1.78	47.38	1.38
19	67.85	1.65	35.74	1.20
20	53.65	1.47	27.90	1.06
21	42.61	1.31	20.22	0.90
22	33.49	1.16	13.94	0.75
23	27.49	1.05	11.98	0.69
24	22.05	0.94	8.58	0.59
25	18.05	0.85	7.46	0.55
26	17.81	0.84	6.10	0.49
27	15.01	0.78	4.30	0.42
28	11.49	0.68	4.14	0.41
29	12.69	0.71	4.58	0.43
30	11.13	0.67	4.10	0.41
Итого	3547.1	57.84	1114.76	33.5

Таблица 2

Скорость счета двойных совпадений γ-п и суммарных совпадений ^{252}Cf с защитным слоем, толщиной 40 мм (А) и 80 мм (В), 1/с

Время, нс	TOTAL	±	γ – n	±
1	535.61	7.72	10.71	1.10
2	403.84	6.70	9.82	1.05
3	254.17	5.32	11.38	1.13
4	146.06	4.03	12.93	1.21
5	89.28	3.15	15.27	1.31
6	77.39	2.94	24.71	1.66
7	62.39	2.64	32.04	1.89
8	79.06	2.97	47.16	2.29
9	91.06	3.18	56.60	2.51
10	94.95	3.25	62.38	2.64
11	96.06	3.27	65.60	2.70
12	91.84	3.20	58.93	2.56
13	81.06	3.00	52.04	2.41
14	73.06	2.85	45.93	2.26
15	64.61	2.68	37.38	2.04
16	46.73	2.28	25.71	1.70
17	42.06	2.17	20.38	1.51
18	32.61	1.91	14.49	1.28
19	24.84	1.67	9.82	1.05
20	20.95	1.53	8.38	0.97
21	15.17	1.31	7.04	0.90
22	13.06	1.21	3.16	0.61
23	8.17	0.96	2.27	0.52
24	9.73	1.05	2.38	0.53
25	6.17	0.84	1.49	0.43
26	7.84	0.94	2.38	0.53
27	6.50	0.86	1.27	0.40
28	6.95	0.89	1.71	0.46
29	5.17	0.77	0.71	0.31
30	4.61	0.73	1.16	0.38
Итого	2491	76.02	645.23	40.34

А

Время, нс	TOTAL	±	γ – n	±
1	318.36	3.26	2.38	0.28
2	235.19	2.80	2.21	0.27
3	151.32	2.25	2.98	0.32
4	85.86	1.69	3.78	0.36
5	48.92	1.28	5.78	0.44
6	32.09	1.03	8.71	0.54
7	26.02	0.93	10.68	0.60
8	27.59	0.96	14.81	0.70
9	31.59	1.03	19.41	0.80
10	33.29	1.05	21.05	0.84
11	35.76	1.09	23.11	0.88
12	33.96	1.06	22.68	0.87
13	30.96	1.02	19.95	0.82
14	29.06	0.98	17.71	0.77
15	26.16	0.93	16.31	0.74
16	20.12	0.82	11.08	0.61
17	18.66	0.79	10.31	0.59
18	16.56	0.74	9.01	0.55
19	12.96	0.66	6.15	0.45
20	10.42	0.59	5.08	0.41
21	8.69	0.54	3.15	0.32
22	7.36	0.50	2.71	0.30
23	6.09	0.45	1.75	0.24
24	4.26	0.38	1.41	0.22
25	3.36	0.33	0.78	0.16
26	3.82	0.36	0.98	0.18
27	3.42	0.34	1.25	0.21
28	3.29	0.33	0.78	0.16
29	2.52	0.29	0.58	0.14
30	2.39	0.28	0.51	0.13
Итого	1270.05	28.76	274.08	13.9

В

В таблицах 1 и 2 приведены результаты измерений скоростей счета γ - n и суммарных совпадений источника ^{252}Cf с защитным слоем нейтроностоп и без защитного слоя на время 30 нс.

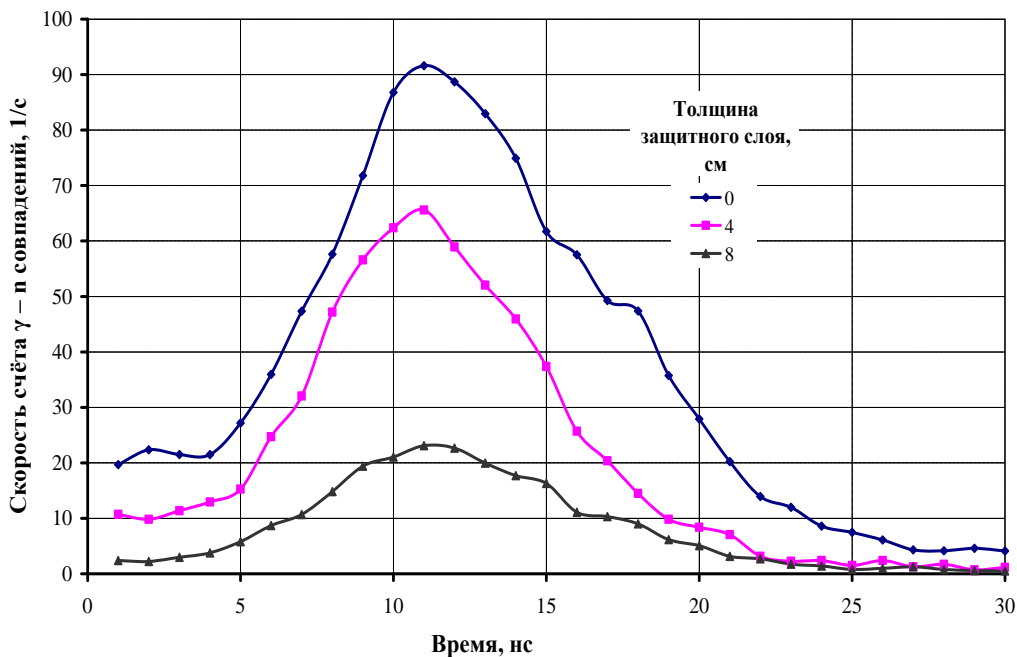


Рис. 1. Временное распределение скорости счета γ - n совпадений.

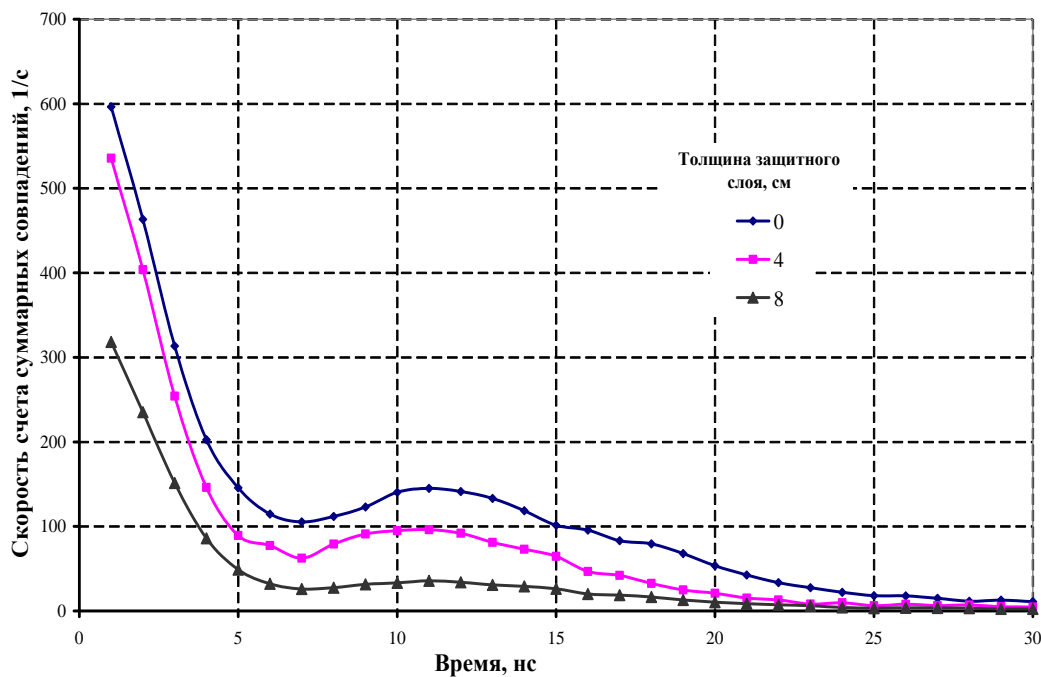


Рис. 2. Временное распределение скорости счета суммарных совпадений.

Также приведены результаты отношения скоростей счета временных γ - n и суммарных совпадений источника от толщины защитного слоя.

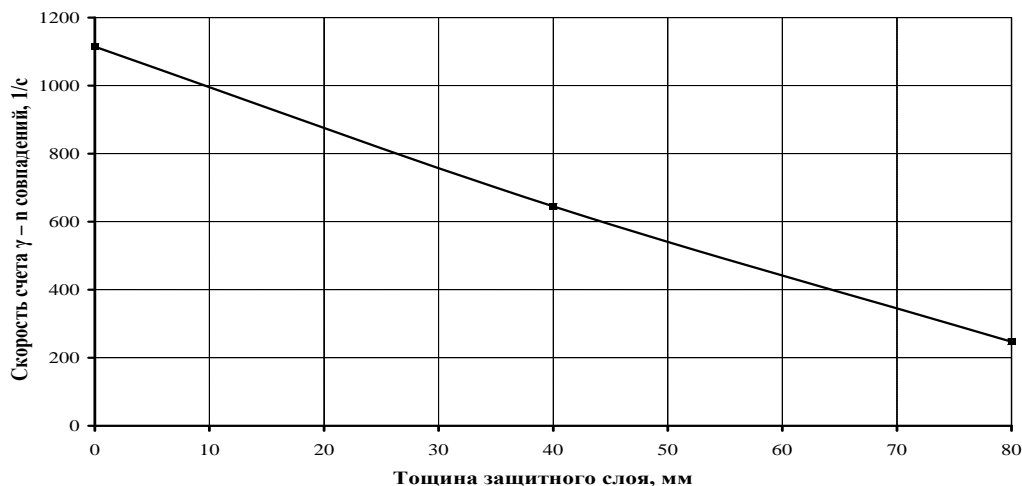


Рис. 3. Скорость счета γ - n совпадений от толщины защитного слоя.

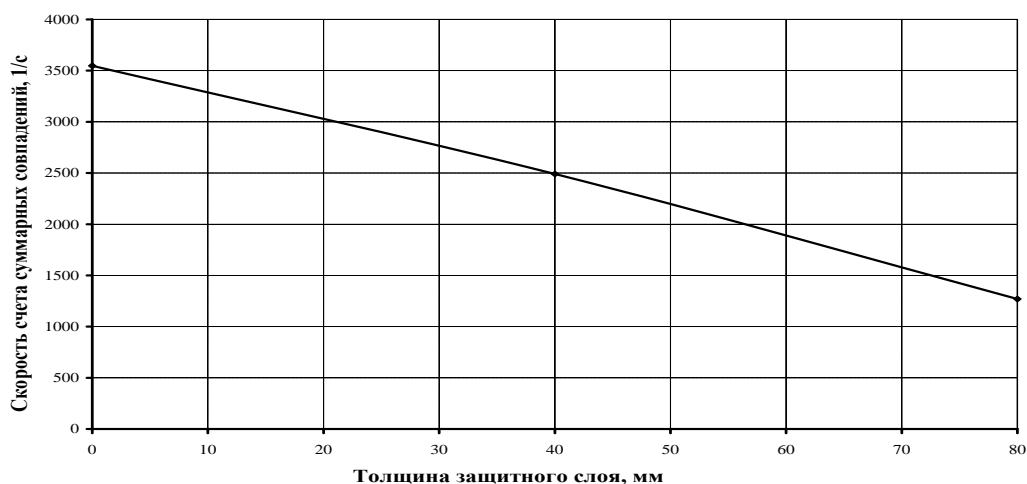


Рис. 4. Скорости счета суммарных совпадений от толщины защитного слоя.

Результаты проведенных экспериментов установки цифрового анализа импульсов нейтронов и гамма-квантов со сцинтиллятором EJ-309 и защитным слоем нейтроны в качестве поглотителя показывают, что представленная установка в составе с программным обеспечением считает временные совпадения двойных типов гамма-квантов и нейтронов и суммарных совпадений.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» А.Г.Белевитину, доктору физико-математических наук В.Л.Ромоданову за помощь в цифровой обработке данных эксперимента, а также академикам НАНТ Х.Х.Муминову и Ф.К.Рахими за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Поступило 04.07.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокуронов М.В. Цифровой метод n - γ разделения в условиях сверхвысоких нагрузок. ГНЦ РФ Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И.Алиханова, М., 2009.

2. Щербаков С.Г., Федорков В.Г., Чередниченко А.Г. Измерение длительности световых импульсов пластмассовых сцинтилляторов в однофотонном режиме регистрации. АО «Институт физико-технических проблем». 141980, Россия, г. Дубна Московской области,
3. Сидоренко В.В., Кузнецов Ю.А., Оводенко А.А. Детекторы ионизирующих излучений: Справочник. – Л.: Судостроение, 1984, 240 с.
4. Klein H., Brooks F.D. Scintillation detectors for fast neutrons. – International Workshop on Fast Neutron Detectors and Applications, SISSA Medialab, 2007, v. 25, p. 097.
5. Боровой А.А., Левина Л.А., Улумбеков Р.Ф., Федотов А.А., Херувимов А.Н. Жидкие сцинтилляторы с разделением по форме импульса. – Препринт ИАЭ-4940/8. – М., 1989.
6. Ромоданов В.Л., Афанасьев В.В., Белевитин А.Г., Мухамадьяров И.В. Тестирование программы цифрового разделения откликов нейтронов и фотонов при различных нагрузках сцинтилляционного тракта. – НИЯУ МИФИ – М., 2008.
7. Ромоданов В.Л. Физические методы и установки активного контроля делящихся материалов. – НИЯУ МИФИ – М., 2007 г.
8. L'Annunziata M.F. et al. Chapter 20 / Analytical Techniques in Nuclear Safeguards, in Handbook of radioactivity analysis, 3rd ed. – Amsterdam: Academic Press, A.-2012, pp. 1243-1280.
9. Ensslin W.C., Krich D.G., Langer M.M., Pickrell J.E. Счет множественности нейтронов. Руководство по эксплуатации. – Лос-Аламосская национальная лаборатория, 1998.

М.Ш.Имом

**ТАҶИКИ ТАҲЛИЛИ АДАДИИ СУРЪАТҶОИ ҲИСОБИ МУВОФИҚОИИ
ИМПУЛСҶОИ γ -n ВА МУВОФИҚОИИ УМУМИИ МАНБАИ ^{252}Cf БО УСУЛИ
ҶУДОСОЗИИ ИМПУЛСҶОИ ГУНОГУНИ АФКАНИШОТИ
ИОНИЗАТСИЯШУДА**

Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар кори мазкур усули таҳлили ададии суръатҳои ҳисоби вақтии импульсҳои γ -n ва мувофиқии умумии манбаи ^{252}Cf гузаронида шуд. Санҷиши мувофиқии вақтии гамма-квантҳо ва нейтронҳои дорои қаратнокии гуногун, ҳамчунин мувофиқии умумӣ дар дастгоҳи бо қабати ҳифзкунандаи нейтроностоп таҷҳизонидашуда ва бидуни қабати ҳифзкунанда барои муайян намудани таркиби моддаҳои ядроии тақсимшаванда гузаронида шудааст.

Калимаҳои калидӣ: суръатҳои ҳисоби вақтии мувофиқӣ, таҳлили вайроннашаванда, таҳлили ададӣ, мувофиқии дутогӣ, моддаҳои ядроии тақсимшаванда, наносоня.

M.Sh.Imom

**THE RESEARCH OF DIGITAL ANALYSIS OF COUNTING RATES OF TIME
COINCIDENCES OF γ -n PULSES AND TOTAL COINCIDENCES OF A ^{252}Cf
SOURCE BY THE METHOD OF SEPARATING PULSES OF DIFFERENT
IONIZING RADIATIONS**

S.U.Umarov Physical and technical Institute of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The paper investigates the method of digital analyses of the count rates of temporal coincidences of pulses γ -n and total coincidences of the ^{252}Cf source. Measurements of time coincidences of gamma quanta and neutrons of different multiplicity were carried out in an installation with a protective layer, in order to determine the content of nuclear fissile materials.

Key words: *time coincidence count rate, non-destructive analysis, digital analyses, double match, nuclear fissionable materials, nanosecond.*

УДК 546.273:521.633

Ш.Д.Отаев, С.М.Гафорзода, Н.М.Джамолов, Д.Х.Мирзоев, А.М.Каюмов

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПОЛУЧЕНИЯ ГЛИНОЗЁМА И ОКСИДА ЖЕЛЕЗА ИЗ АЛЮМОСИЛИКАТНЫХ РУД СПЕКАНИЕМ С CaCl_2 *Институт химии им.В.И.Никитина НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 21.10.2021 г.)*

В статье приводятся результаты спекания алюмосиликатных руд с CaCl_2 . Найдены оптимальные параметры извлечения оксида железа и алюминия после водно-кислотной обработки спека.

Ключевые слова: спекание, хлорид кальция, каолиновая глина, нефелиновые сиениты, зелёные глины.

Процесс производства глинозёма и оксида железа методом спекания уникален и пригоден для переработки всех видов алюминиевого сырья. На практике его применяют для алюмосиликатных руд с содержанием оксида кремния.

В работах [1-4] изучено спекание минерального сырья с CaCl_2 и показана перспективность применения хлорида кальция для процесса спекания.

В настоящей работе дана сравнительная оценка процесса спекания нефелиновых сиенитов, каолиновых глин и зелёных глин с CaCl_2 . Разработана принципиальная технологическая схема переработки алюмосиликатных руд спеканием с CaCl_2 с последующей водно-кислотной обработкой спека.

Химический анализ алюмосиликатных руд проводили по разработанным в лаборатории комплексной переработки минерального сырья Института химии им.В.И.Никитина НАН Таджикистана методикам для определения алюминия, железа и кальция с использованием метода комплексообразования. Щелочные металлы определяли методом пламенной фотометрии.

Рентгенофазовый анализ (РФА) использовали для определения фаз в сырье на усовершенствованном аппарате ДРОН-3 с программным обеспечением. Дифференциально-термический анализ (ДТА) использовали для определения температур плавления и разложения минералов и фазовых переходов.

Изучено спекание алюмосиликатных руд: нефелиновых сиенитов, аргиллитов, каолиновых глин и зелёных глин с CaCl_2 .

Отдельные опыты по спеканию с CaCl_2 проведены с каолиновыми глинами (Зидды, Миёнаду, Восточные Зидды) и аргиллитами (Зидды). Выход Al_2O_3 составил ~90%, для Fe_2O_3 - 50% для каолиновых глин.

В табл.1 приведён химический состав алюмосиликатных руд с учётом литературных данных. Как видно из табл.1, наибольшее содержание глинозёма имеют аргиллиты (Зидды) и каолиновые глины (Восточные Зидды). Как видно из табл.1, для комплексной переработки сырья являются пер-

Адрес для корреспонденции: Мирзоев Давлатмурод Хайруллоевич. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул.Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: davlatmurod.mirzoev.71@mail.ru

спективными нефелиновые сиениты (Турпи), каолиновые глины (Чашма-Санг) и аргиллиты (Зидды), где имеется достаточное количество полезных компонентов: Al_2O_3 , Fe_2O_3 , K_2O .

Таблица 1

Химический состав алюмосиликатных руд (в %)

Руда	Al_2O_3	Fe_2O_3+FeO	Na_2O	K_2O	CaO	SiO_2	TiO	П.п.п.
Нефелиновые сиениты	22.3	6.4	6.5	6.6	2.5	53.0	-	-
Каолиновые глины (Зидды)	23.2	1.3	0.4	2.8	0.7	63.2	0.98	7.7
Каолиновые глины (Чашма-Санг)	24.6	11.0	0.3	2.65	1.0	50.1	6.3	
Каолиновые глины (Миёнаду)	20.2	7.7	0.8	1.7	0.6	56.9	0.95	9.6
Каолиновые глины (Восточные Зидды)	30.5	14.2	0.2	0.4	0.6	39.8	1.17	12.9
Зелёные каолиновые глины с содержанием меди и кобальта (Чашма-Санг)	20.4	12.0	1.0	2.45	-	51.3	-	10.0
Аргиллиты (Зидды)	31.0	8.74	0.1	2.95	1.0	42.9		10.0

Особое значение имеет содержание в рудах K_2O , который в перспективе можно использовать для получения комплексных удобрений.

В литературе имеются отдельные данные спекания $CaCl_2$ с алюмосиликатными рудами, которые приводятся в табл.2.

Таблица 2

Оптимальные параметры и степени извлечения оксидов алюминия и железа из алюмосиликатных руд спеканием с $CaCl_2$

Руда	Оптимальные параметры						Литература
	Температура спекания, °C	Соотношение $CaCl_2$ /руда	Водная обработка после спекания, t=95-98°C	Разложение спекса HCl , %	Степени извлечения		
					Al_2O_3	Fe_2O_3	
Нефелиновые сиениты	850-950	2:1	95-98	20	98.7	99.1	[1, 2]
Каолиновые глины	800	2:1	98	20	90.0	43.1	Наши данные
Зелёные глины с содержанием меди и кобальта	800-850	2:1	95	20	87.2	47.3	Наши данные

Более подробные данные имеются для нефелиновых сиенитов (Турпи) [1, 2]. Для каолиновых глин и зелёных глин (табл.2) приведены оптимальные параметры протекания процессов и степени извлечения оксидов алюминия и железа спеканием с $CaCl_2$.

На рисунке приведены степени извлечения оксидов алюминия и железа из различных руд. Как видно из рисунка, степень извлечения полезных компонентов для нефелиновых сиенитов является максимальной [1, 2]. Для каолиновых глин и зелёных каолиновых глин извлечения составили для

Al_2O_3 – 90.1 и 87.2%, для Fe_2O_3 – 43.1 и 47.3%, соответственно. Низкие извлечения оксида железа, по-видимому, связаны со специфичностью минералов в каолиновых глинах.

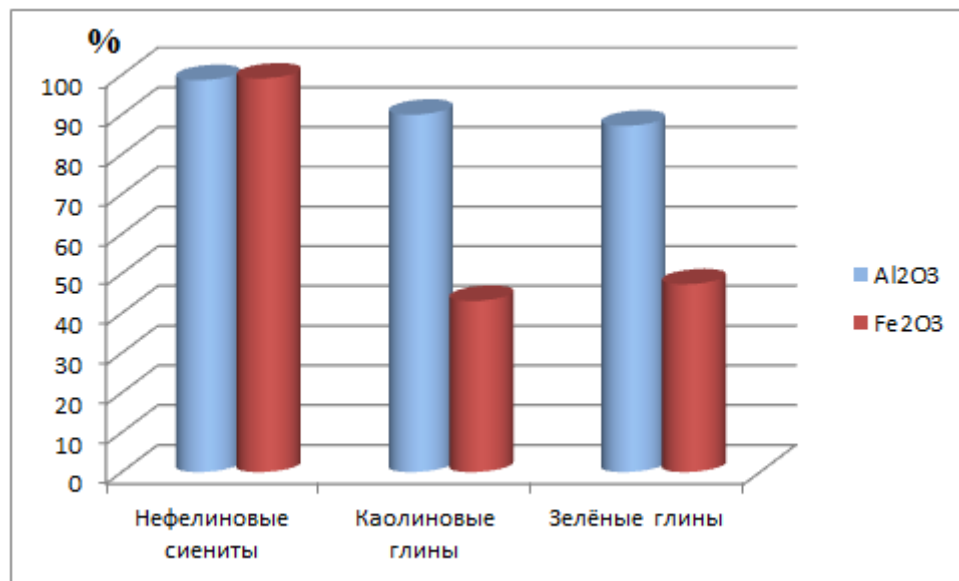


Рис. Степени извлечения оксидов алюминия и железа из нефелиновых сиенитов, каолиновых и зелёных глин.

Поступило 22.10.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров Ш.Б., Сафиев Х.С., Мирсаидов У.М. Селективные методы разложения высококремнистых алюминиевых руд. – Душанбе: Дониш, 2008, 237 с.
2. Мирсаидов У.М., Мирзоев Д.Х., Бобоев Х.Э. Комплексная переработка аргиллитов и каолиновых глин Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2016, 92 с.
3. Курбонов А.С., Баротов А.М., Назаров Ф.А., Мирсаидов У.М. Разложение концентрата боросиликатной руды методом спекания с хлоридом кальция. – ДАН РТ, 2016, т.59, №1-2, с.53-56.
4. Мирсаидов У.М., Маматов Э.Д., Сафиев Х.С. Особенности процесса хлорного разложения бор- и алюмосиликатных руд. – Душанбе: Дониш, 2013, 74 с.

Ш.Д.Отаев, С.М.Ғафорова, Н.М.Ҷамолов, Д.Х.Мирзоев, А.М.Қаюмов

АРҶӢБИИ МУҚОИСАВИИ ҲОСИЛ НАМУДАНИ ОКСИДҲОИ АЛЮМИНИЙ ВА ОҶАН АЗ ЧИНСҲОИ КӢҲИИ АЛЮМОСИЛИКАТӢ БО РОҶИ ПУХТАН ДАР ИШТИРОКИ $CaCl_2$

Институти химияи ба номи В.И.Никитини Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола натиҷаҳои пухтани маъданҳои алюмосиликатӣ бо $CaCl_2$ оварда шудаанд. Ҷузъҳои мусоидаттарини истихроҷи оксиди оҳан ва алюминий пас аз коркарди онҳо кислотагии пухта, ёфт шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: пухтан, хлориди калсий, гилҳои каолинӣ, сиенитҳои нефелинӣ, гилҳои сабз.

Sh.D.Otaev, S.M.Gaforzoda, N.M.Jamolov, D.Kh.Mirzoev, A.M.Kayumov

**COMPARATIVE ASSESSMENT OF PRODUCTION OF ALUMINUM AND IRON
OXIDES FROM ALUMINUM SILICATE ORES SINTERING WITH CaCl₂**

V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National academy of sciences of Tajikistan

In this article the results of sintering aluminosilicate ores with CaCl₂ are presents. The optimal parameters for the extraction of iron and aluminum oxides after the water-acid treatment of the sinter have been found.

Key words: *sintering, calcium chloride, kaolin clay, nepheline syenite, green clays.*

УДК 547.211: 542.943

З.Х.Гайбуллаева, Ф.М.Рахимов*, Т.Х.Гадоев*

ИЗУЧЕНИЕ ПРОЦЕССА ПОЛУЧЕНИЯ ВОДОРОДСОДЕРЖАЩИХ ГАЗОВ

*Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими,***ОАО «Азот» г. Леваканд, Таджикистан**(Представлено академиком НАНТ У.М.Мирсаидовым 02.06.2022 г)*

В статье рассмотрен процесс получения водородсодержащих газов конверсионным способом окисления природного газа в присутствии катализаторов. На основе проведенных исследований предлагается автотермический способ конверсии природного газа, который зависит от равновесного выхода водорода, двуокиси углерода и теплопоглощения при 800°С и 1 атм.

Ключевые слова: *водород, окись углерода, окисление, природный газ, температура, давление, катализатор.*

Водород как простое вещество встречается в природе в небольших количествах. Для его производства в промышленных масштабах используются наиболее распространенные природные соединения. Существует два основных процесса водородной технологии: окислительные и неокислительные процессы. Окислительная обработка происходит в присутствии окислителей, таких как пар, кислород, CO₂. Это происходит при высокой температуре. Производство водорода из углеводородов является малоэнергоёмким способом по отношению к другим способам его получения [1-4]. В связи с этим, конверсия метана и получение смеси водорода и окиси углерода является одной из важнейших химических реакций, пригодных для промышленного получения водорода и других технически ценных продуктов.

Процесс конверсии природного газа осуществляют под атмосферным и повышенным давлением. Скорость окисления природного газа увеличивается при температуре 800-1000°С с использованием катализаторов. Ряд исследований [4-6] свидетельствует об использовании термостойкого высокоактивного механически прочного катализатора при увеличении температуры, согласно законам термодинамики.

На ОАО «Азот» Республики Таджикистан процесс конверсии природного газа осуществляют на агрегатах совмещенной конверсии метана, окиси углерода, моноэтаноламиновой очистки. Конверсия природного газа осуществляется кислородовоздушной смесью и паром в присутствии никелевого катализатора ГИАП-8 или RKS-2-7Н в конверторе метана при температуре 850-1100°С. Конверсия окиси углерода на железохромовом катализаторе №482 или SK-201-2 в 2-ступенчатом конверторе окиси углерода при температуре 380-400°С. Очистку газа от двуокиси углерода осуществляют 18-20% раствором моноэтаноламина (МЭА).

Природный газ проходит сатурационную башню, орошаемую горячей водой температурой 80-90°С, газ нагревается и насыщается водяными парами. Из сатурационной башни парогазовая

Адрес для корреспонденции: *Гайбуллаева Зумрат Хабибовна. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. акад. Раджабовых, 10, Таджикский технический университет.*

смесь (ПГС) поступает в межтрубное пространство теплообменника природного газа. В теплообменнике добавляется пар до получения соотношения пар/газ 1:1. Теплообменник природного газа ПГС подогревается за счет тепла конвертированного газа, идущего по трубному пространству и направляется в межтрубное пространство смесителя. В трубное пространство смесителя подаётся кислородовоздушная смесь (КВС). Из смесителя реакционная смесь поступает в конвертор метана на никелевом катализаторе ГИАП-8 или RKS-2-7Н, где происходит образование водорода и окиси углерода с кислородом и паром. Содержание метана на выходе из конвертора не более 0.5%. После конвертора метана конвертированный газ поступает в увлажнитель; туда подаётся пар и конденсат для охлаждения и насыщения. Дальнейшее охлаждение газа до температуры 400 °С осуществляется в теплообменнике. Из теплообменника конвертированный газ идёт в конвертор окиси углерода. Конвертированный газ из конвертора СО проходит в котел-утилизатор, водонагревательный теплообменник конденсационной башни. После конденсационной башни конвертированный газ охлаждается до температуры 30-35 °С, направляется в абсорбер моноэтаноламиновой очистки, где очищается от газа СО₂ раствором МЭА. Конвертированный газ с содержанием СО₂ - 1.6% идёт в газгольдер и на вход компрессора. Раствор, подаваемый на орошение абсорбера, далее направляют на регенерацию. Раствор МЭА из абсорбера проходит трубное пространство теплообменника и идёт на регенерацию, где происходит нагревание и регенерация (выделение) СО₂ из раствора. Полное выделение СО₂ из раствора идёт в кипятильниках при нагревании глухим паром. ПГС из регенератора поступает в скруббер-охладитель, где охлаждается конденсатом. Моноэтаноламин, уносимый из регенератора ПГС в скруббер охладителя, конденсируется.

Исследования показали, что наносной катализатор типа ГИАП разработанный в Государственном институте азотной промышленности, состоит из окиси алюминия – носителя и никеля. В дальнейшем этот катализатор модернизировали и использовали как основной контакт. На активность, прочность и термостойкость данного катализатора влияет структура носителя, в котором важную роль играет температура прокали. Модернизация катализаторов типа ГИАП продиктована в основном трудностями, возникающими в процессе эксплуатации при парокислородовоздушной конверсии. С остановкой конверторов на ОАО «Азот» в случае резкого изменения температуры катализатор растрескивается, повышая гидравлическое сопротивление и дает усадку, что приводит к появлению в конверторе байпасов, а также к уменьшению полезной реакционной поверхности. Эти нежелательные явления частично устраняют изменением температуры прокали носителя. Исследования показали работу катализатора ГИАП-19 цилиндрической и кольцеобразной формы с различной температурой прокали. Увеличение температуры до 1200 °С повышает механическую прочность катализатора на 15-20%, однако полностью ликвидировать указанный недостаток только изменением температуры прокали не представляется возможным. Применение кольцеобразного катализатора позволило повысить производительность конверторов метана на 10-15% [7]. На рис. 1 показана зависимость равновесного выхода Н₂ и СО в исходной системе конверсии природного газа от температуры и давления. Как видно из рис. 1, с повышением температуры конверсии природного газа выход водорода и СО возрастает, достигая предела вблизи 900 °С. С ростом давления равновесная конверсия уменьшается.

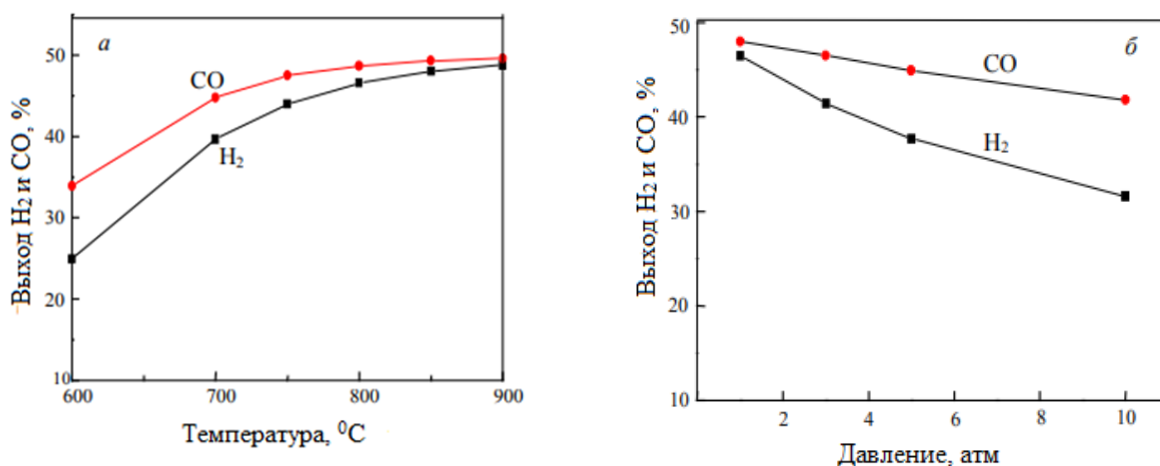


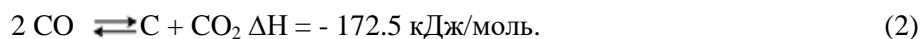
Рис. 1. Зависимость равновесного выхода H₂ и CO конверсии природного газа от температуры при 1 атм (а) и от давления при 800°C (б).

Существенное значение для проведения конверсии природного газа с целью получения водорода и окиси углерода играет легкое отравление катализаторов коксом. Возможны два пути образования кокса при разложении метана:

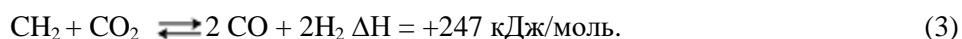
- диссоциация метана



- реакция Будуара

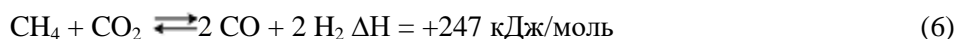
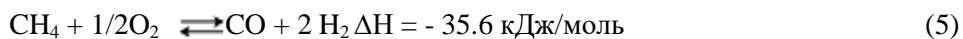
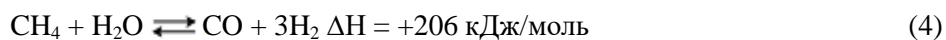


Первая из них эндотермическая, вторая экзотермическая. Обе реакции могут быть представлены как стадии суммарной реакции:



Однако в реальности они протекают при разных температурах [8]: реакция (1) - преимущественно при высоких температурах, реакция (2) - при низких температурах, и в реальных условиях кокс почти всегда образуется. Согласно термодинамическим соображениям, суммарное углеотложение должно снижаться с повышением температуры. Действительно, эксперимент подтверждает, что основное количество углерода образуется по реакции (1), а не (2).

Часто углерод, диффундируя в металл, образуется на выходе из катализатора в виде нитей. Одним из путей решения проблемы, связанной с подводом и отводом тепла при получении водородсодержащего газа, является разработка процесса комбинированной конверсии смеси H₂ + CO₂ + H₂O + O₂, в котором бы без дополнительного подогрева сочетались реакции (4), (5), (6) и (7).





На основе проведенных исследований предлагается автотермический способ конверсии природного газа, который зависит от равновесного выхода водорода, двуокиси углерода и теплопоглощения при 800°C и 1 атм (рис.2).

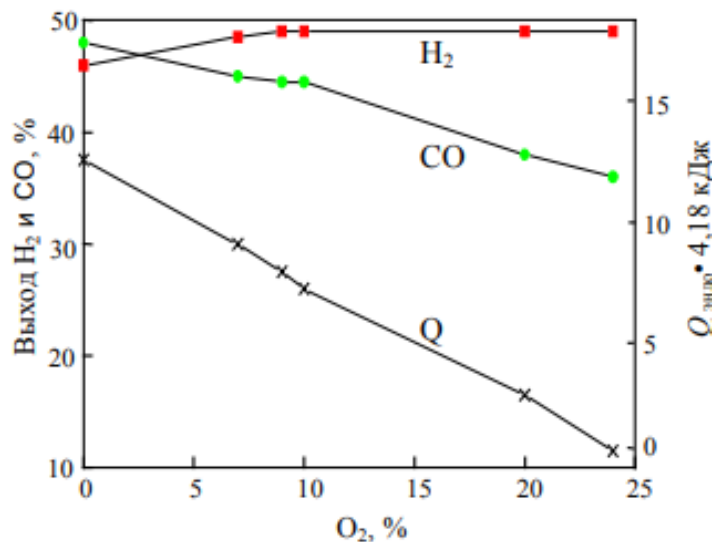


Рис. 2. Зависимость равновесного выхода водорода, окиси углерода и теплопоглощения при 800°C и 1 атм.

Как видно из рис. 2, термонеutralную (автотермическую) конверсию с целью получения газов водорода и окиси углерода можно осуществить, комбинируя углекислотную (6) и кислородную (5) конверсию метана в системе $\text{CH}_4 + \text{CO}_2 + \text{O}_2$.

Термодинамический расчет процесса комбинированной конверсии природного газа, включающей реакции (5), (6) и паровой конверсии CO (7), в работе [9] показано, что можно получить смесь газов состава $50\% \text{CH}_4 + (50-x)\% \text{CO}_2 + x\% \text{O}_2$, согласно которого изменчивым параметром остается соотношение кислорода. Произведя расчет конверсии природного газа, нами выявлено, что при температуре 800°C термонеutralность достигается при 23% кислорода. В реакции исследуемой смеси $50\% \text{CH}_4 + 27\% \text{CO}_2 + 23\% \text{O}_2$ при 800°C и 1 атм получен равновесный выход: водород 49.3% и окись углерода 36.5% CO.

Поступило 09.06.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов И.В., Диденко Л.П., Зайченко А.Ю., Никитин А.В. Получение водорода в процессах конверсии углеводородных газов. Сб. тез. докл. Всероссийской науч.-прак. конф. «Водород. Технологии. Будущее». – Томск, 2021, с. 49-50.
2. Шлуинский Н. Получение водорода. Прошлое и настоящее Российской науки. – М.: Химия, 2018, 130 с.
3. Хасин А.А. Основные пути переработки природного газа в компоненты топлив и ценные химические продукты. – Новосибирск: НГУ, 2015, 100 с.
4. Аксютин О.Е., Ишков А.Г., Хлопцов В.Г., Казарян В.А., Столяревский А.Я. Концепция крупномасштабного развития инновационных систем производства и распределения метан-водородного

- топлива как эффективного альтернативного энергоносителя. – Материалы XXV Мирового газового конгресса. Малайзия. Куала-Лумпур. 2012, с. 96-104.
5. Попов М.В., Першина Д.А., Кувшинов Г.Г. Влияние температуры и давления на процесс разложения метана с образованием водорода и нановолокнистого углерода. Сб. науч. трудов «Альтернативные источники сырья и топлива». – Санкт-Петербург, 2014, с. 182-185.
 6. Касаткин А. Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия, 2018, 754 с.
 7. Пат. 2009712 Российская Федерация, МПК7 B01J 19/24. Аппарат для проведения паровой каталитической конверсии углеводородов. Д.Л.Астановский, В.В.Андрианов, В.А.Калашников. – № 4633249/26; заявл. 27.05.2016; опубл. 11.04.2018, Бюл. № 11, с. 11.
 8. Гаврелюк А.Н., Дормешкин О.Б. Технология связанного азота и азотных удобрений. – Белоруссия: Госиздат, 2018, 162 с.
 9. Гайбуллаева З.Х., Рахимов Ф.М., Гадоев Т.Х. Исследования по усовершенствованию катализаторов конверсии метана и окиси углерода в производстве карбамида. Сб. тр. респ. науч.-практ. конф. «Роль современных методов анализа в развитие науки и производства» посвященная 20-летию развития естественно-научных, точных и математических дисциплин в области науки и образования (2020-2040). – Душанбе, 2022, с. 44-52.

З.Х.Гайбуллоева, Ф.М.Рахимов*, Т.Х.Гадоев*

ОМУЗИШИ РАВАНДИ ҲОСИЛКУНИИ ГАЗҲОИ ГИДРОГЕНДОР

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи акад. М.С.Осимӣ,

**ОАО «Азот», ш.Леваканд, Тоҷикистон*

Дар мақола омӯзиши раванди ҳосилкунии газҳои гидрогендор бо тарзи конверсияи гази табиӣ бо иштироки катализаторҳо мавриди муҳокима қарор гирифтааст. Дар асоси омӯзиши тарзи автоклави конвенсияи гази табиӣ пешниҳод карда шудааст, ки ҳосилшавии гази гидроген, гази оксиди карбон ва гармиғунҷоиши омехтаи газҳо таҳти ҳарорати 800°C ва фишори 0.1 МПа ҳосил кардан мумкин аст.

Калимаҳои калидӣ: *гидроген, оксиди карбон, оксидкунонӣ, гази табиӣ, ҳарорат, фишор, катализатор.*

Z.H.Gaibullaeva, A.V.Rahimov*, N.H.Gadoev*

STUDYING THE PROCESS OF OBTAINING HYDROGEN -CONTAINING GASES

M.S.Osimy, Tajik technical University,

**OAO «Azot», Levakand, Tajikistan*

In this article the process of obtaining hydrogen-containing gases with a convertible method of oxidation of natural gas in the presence of catalysts is discussed. Based on the studies, an autothermal method of converting natural gas is proposed, which depends on the equilibrium output of hydrogen, carbon dioxide and heat absorption at 800°C and 0.1 MPa.

Key words: *hydrogen, carbon monoxide, oxidation, natural gas, temperature, pressure, catalyst.*

УДК 539.01

М.Д.Бобоёров, К.О.Бобоев, Б.Б.Баротов, С.К.Ходжиев, И.Мирсаидзода
**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ТЕРМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАНОВЫХ РУД
ТАДЖИКИСТАНА**

*Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности
НАН Таджикистана*

(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 10.03.2022 г.)

В статье приведены результаты дифференциально-термического анализа урановых руд месторождений Таджикистана: «Северный Таджикистан-1», «Центральный Таджикистан», «Северный Таджикистан-2». Найдены области превращения некоторых минералов урановых руд. Предложены методы переработки уранового сырья карбонатным и сульфатным способами.

Ключевые слова: урановая руда, дифференциально-термический анализ, минералы, переработка.

Дифференциально-термический анализ (ДТА) является наиболее распространённым методом термического анализа из-за широкого спектра получаемой информации [1, 2].

В настоящей работе при помощи ДТА изучены урановые руды месторождений Таджикистана: «Западный Таджикистан», «Центральный Таджикистан», «Северный Таджикистан-2» и дана оценка превращения минералов, находящихся в указанных рудах.

Для работы использовали дериватограф LabsysEvo-1600 фирмы Setaram. LabSysEvo- современный дериватограф (синхронный термический анализатор). Он совмещает в себе одновременное проведение термогравиметрии и дифференциальной сканирующей калориметрии (ТГА-ДТА/ДСК, TG-DTA/DSC) и обладает наилучшей чувствительностью и точностью анализа. LabSysEvo- дериватограф с TG весами точностью 0.01 мг и 3D (Calvet) DSC сенсором теплоты и печью с обогревом до 1600°C и водяным охлаждением. Чувствительность 3D сенсора 0.5 мВ/мВт и высокой скорости нагрева/охлаждения печи 100°C/мин (минимальный 0.1°C/мин), точность измерения C_p достигает значения 2% во всём температурном диапазоне. 3D C_p (Calvet) сенсор состоит из 10 термопар, полностью окружающих образец. Имеется возможность использовать корундовые и платиновые тигли объёмом 0.1 мл при различных газовых средах (воздух, азот, кислород, гелий, аргон, водород и другие или их смеси). Скорость нагрева составляла 10°C/мин.

Дифференциально-термический анализ (ДТА) образцов урановых руд месторождения «Центральный Таджикистан» приведён на рис.1. По термическим кривым идентифицируются следующие минералы: каолинит, кварц, слюда, доломит.

Каолинит. Кривым ДТА каолинита свойственны три основных эффекта - два эндотермических (81 и 518°C) и экзотермический (893°C). Первый эндоэффект связан с несовершенством структуры минерала и отвечает за удаление адсорбированной на поверхности воды. Потеря массы при этом составляет 0.65%. Второй эндоэффект связан с дегидроксилизацией каолинита. Потеря массы в

Адрес для корреспонденции: Бобоёров Мехровар. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по ХБРЯ безопасности НАНТ. E-mail: info@nrsta.tj

интервале температур 400-600°C составляет 1.38%, что соответствует 9.9% каолинита, присутствующего в пробе. Незначительный экзоэффект с максимумом при температуре 893°C говорит о дисперсности минерала и образовании шпинелевой фазы.

Кварц идентифицируется по характерному для него пику с максимумом при температуре α-β-перехода – 571°C.

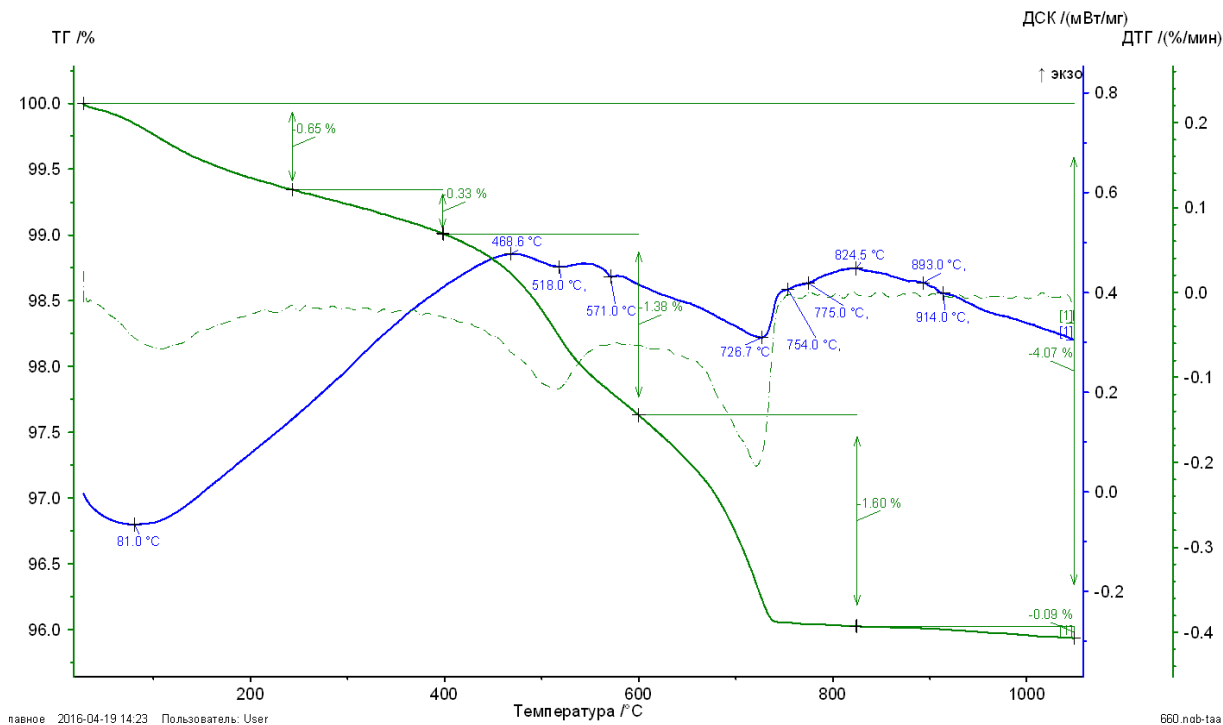


Рис. 1. Термические кривые образцов месторождения «Центральный Таджикистан».

Карбонат. На кривой ДСК в интервале температур 650-800°C отмечается эндоэффект, связанный с термической диссоциацией доломита, присутствующего в образце. Температура максимума эндоэффекта составляет 726.7°C. С этим процессом также связан небольшой эндоэффект с максимумом при температуре 775°C. Количественное соотношение примеси доломита в образце рассчитывается по количественным данным термогравиметрического анализа:

$$C_{(доломита)} = \frac{M_{CaMg(CO_3)_2}}{n \cdot M_{CO_2}} d = \frac{184}{2 \cdot 44} d = 2.09 \cdot 1.6 = 3.35\%$$

где: M – молярная масса (для доломита 184 г/моль, для CO₂ 44 г/моль);

n – число молей (для доломита n=2);

d – потеря массы в процентах (с экспериментального графика).

Слюда. Высокотемпературный эндоэффект при температуре, близкой к 1000°C, отвечает за удаление конституционной воды и распад решетки минерала. Небольшой экзоэффект с температурой максимума при 824.5°C связан с окислением железа.

На рис. 2 приведены результаты ДТА урановых руд месторождения «Западный Таджикистан». По термическим кривым трудно идентифицируется состав минералов руд. В этих рудах, по видимому, содержится большое количество кварца (свыше 50%), незначительное количество каоли-

нита, урансодержащие минералы находятся в малых количествах, поэтому не обнаруживаются в кривых ДТА.

Как видно из рис.2, в широком эндозэффекте при 450-600°C происходит дегидроксилизация каолинита.

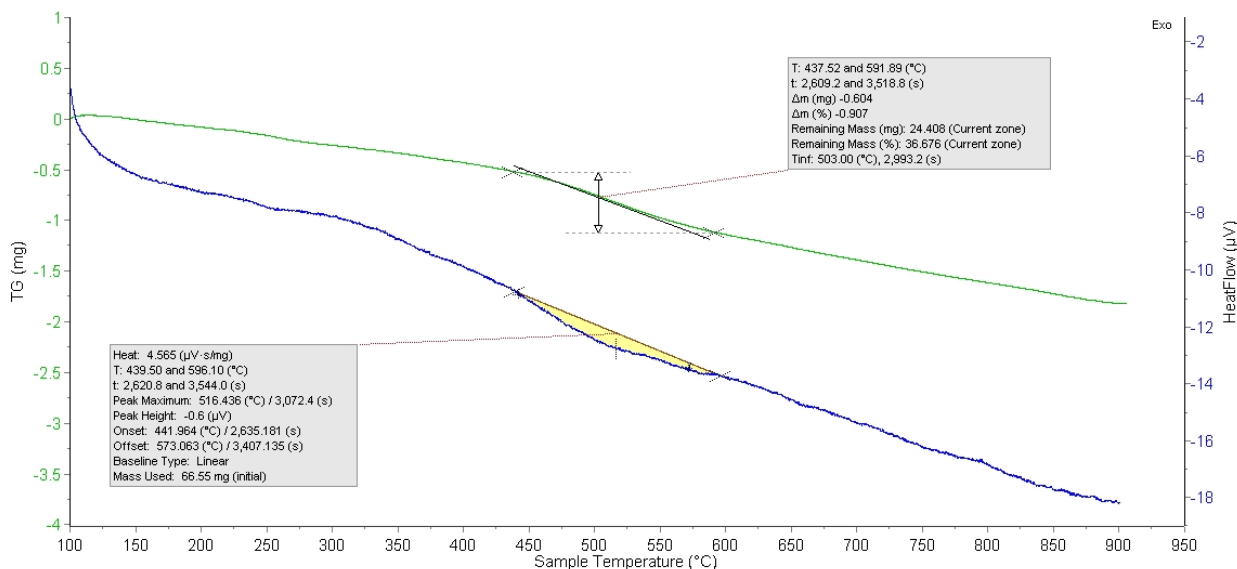


Рис. 2. ДТА руды месторождения «Западный Таджикистан».

На рис. 3 представлены кривые ДТА урановых руд месторождения «Северный Таджикистан-2». На данной термограмме мы наблюдаем эндозэффект при 450-550°C, который также связан с превращением каолинита.

В урановых рудах месторождений «Западный Таджикистан» и «Северный Таджикистан-2» не наблюдается α- и β-перехода кварца, а также ДТА показывает отсутствие карбонатных соединений.

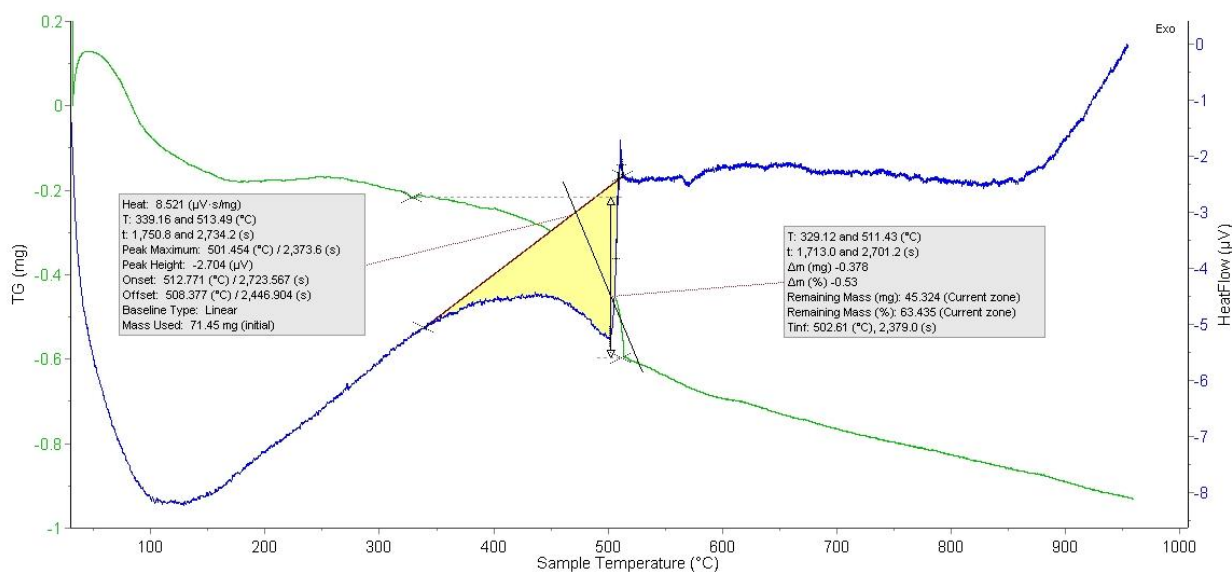


Рис. 3. ДТА руды месторождения «Северный Таджикистан-2» («Октябрьский»).

З а к л ю ч е н и е

Как показывают кривые ДТА, по минералогическому составу урановые руды месторождения «Центральный Таджикистан» относятся к карбонатному сырью, поэтому для их переработки целесообразно применять карбонатный метод.

Для урановых руд месторождений «Западный Таджикистан» и «Северный Таджикистан-2» предлагается сернокислотный способ переработки сырья путём использования окислителей в процессе переработки.

Поступило 04.04.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Берг Л.Г. Введение в термографию. – М.: Наука, 1969, 369 с.
2. Егунов В.П. Введение в термический анализ. – Самара, 1996, 270 с.

М.Д.Бобоёров, К.О.Бобоев, Б.Б.Баротов, С.К.Ҳочиев, И.Мирсаидзода

ТАҲЛИЛИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ-ТЕРМИКИИ МАЪДАНҲОИ УРАНДОРИ ТОЧИКИСТОН

Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии АМИ Тоҷикистон

Дар мақола натиҷаҳои таҳлили дифференциалӣ-термикии маъданҳои урандори конҳои Тоҷикистон: «Тоҷикистони Шимолӣ-1», «Тоҷикистони Марказӣ», «Тоҷикистони Шимолӣ-2» оварда шудаанд. Ҳудуди табадулоти якҷанд минералҳои маъданҳои урандор муайян карда шудааст. Усулҳои коркарди ашёи хоми урандор бо тарзҳои карбонатӣ ва сульфатӣ таҳқиқ карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: маъдани урандор, таҳлили дифференциалӣ-термикӣ, минералҳо, коркард.

M.D.Boboyorov, K.O.Boboev, B.B.Barotov, S.K.Khojiev, I.Mirsaidzoda

DIFFERENTIAL THERMAL ANALYSIS OF URANIUM ORES IN TAJIKISTAN

Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety and Security Agency NAS Tajikistan

In this article the results of the differential thermal analysis of uranium ores from deposits in Tajikistan: "Northern Tajikistan-1", "Central Tajikistan", "Northern Tajikistan-2" are presents. Regions of transformation of some minerals of uranium ores have been found. Methods for processing uranium raw materials by carbonate and sulfate methods are proposed.

Key words: uranium ore, differential thermal analysis, minerals, processing.

УДК 546.62+622.349.2(575.3)

А.С.Курбонов, А.П.Тагаев, Р.Дж.Акрамзода, А.С.Давлатов, М.М.Тагоев

**КИНЕТИКА РАЗЛОЖЕНИЯ БОРОСИЛИКАТНЫХ РУД ТАДЖИКИСТАНА
МИНЕРАЛЬНЫМИ КИСЛОТАМИ***Институт химии им. В.И. Никитина НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 29.08.2022 г.)*

В статье изучены кинетические аспекты разложения исходного боросиликатного сырья и его концентрата минеральными кислотами. Изучена кинетика процесса разложения боросиликатного сырья месторождения Ак-Архар Таджикистана соляной, серной, азотной, ортофосфорной и уксусной кислотами. Установлено, что при разложении боросиликатных руд минеральными кислотами процесс протекает в основном в диффузионной или смешанных областях.

Ключевые слова: *кинетика, разложение, боросиликатная руда, минеральные кислоты, энергия активации.*

Все боратовые руды отличаются хорошими технологическими свойствами; при содержаниях в них B_2O_3 выше 12% они идут в переработку без обогащения. Максимальные содержания B_2O_3 в этих рудах могут достигать 20-30%, а минимальные – 2-6%. Вредные примеси в них – кальций, магний, сульфаты железа и алюминия; сопутствующие полезные компоненты – сода, галит, калийные и магниевые соли, глины, цеолиты.

Боросиликатные (датолитовые и данбуритовые) руды делятся на высоко- (10% и более B_2O_3), средне- (5-10%) и низкосортные (3-5%). Одним из месторождений высокосортного борного сырья, находящихся в нашей стране, является Ак-Архарское месторождение, руды которого содержат более 10% оксида бора.

Вскрытие боросиликатного сырья может быть произведено растворами минеральных кислот или щелочей. В отдельных случаях вскрытие руды осуществляется спеканием со щёлочью, содой, известью и солями хлоридов кальция и натрия [1-6].

В настоящей работе дан анализ разработанным нами способам получения борной кислоты и кинетике разложения боросиликатной руды.

Сернокислотный способ. Борсодержащее сырьё, раздробленное до размера частиц 2 мм, обжигают при температуре 900-950°C в течение часа. После термической обработки руду измельчают до размера частиц 0.1-0.3 мм и обрабатывают 45-50% серной кислотой. Обработка серной кислотой длится 50-60 мин при температуре 80-95°C и непрерывном перемешивании. Горячую пульпу направляют на фильтрацию. Фильтрат подают на повторную фильтрацию, а затем кристаллизацию при охлаждении раствора до температуры 10-20°C. Шлам на фильтре выводится из процесса и идёт на получение строительных материалов или борсодержащего стекла.

Адрес для корреспонденции: Тагоев Муродбек Махмадалиевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: murodbek.tagoev@mail.ru

Азотнокислотный способ. Этот способ отличается от сернокислотного только тем, что растворителем является азотная кислота. При этом растворителе вносятся некоторые изменения в последующие технологические операции, в частности возникает необходимость повторной кристаллизации для очистки от азотнокислого кальция.

Азотно-фосфорнокислотный способ. Боросиликатное сырьё вскрывается с помощью раствора смеси азотной и ортофосфорной кислот с целью получения комплексного удобрения. Процесс очень близок к азотнокислотному способу переработки боросиликатного сырья.

Солянокислотный способ. Борное сырьё вскрывается с помощью раствора соляной кислоты. Извлечение соединений бора из полученных растворов рекомендуется выполнять в двух вариантах: а) кристаллизацией борной кислоты при охлаждении раствора; б) отгонкой хлорида бора.

Фосфорнокислотный способ. Растворение минералов бора осуществляется с помощью технической фосфорной кислоты. Выведенные из процесса маточные растворы содержат фосфаты кальция и магния с некоторым количеством борной кислоты, поэтому они направляются на упаривание для получения удобрений.

Уксуснокислотный способ. В принципе этот способ близок к сернокислотному, но на отдельных стадиях переработки растворов в последние вводится разбавленная соляная кислота. В результате повышения рН раствора гидролизованные ацетаты, которые выпадают в осадок и затрудняют процесс проникновения кислоты в реакционную зону, растворяются. Данный метод является комплексным методом, так как позволяет получать, кроме борной кислоты, также хлориды Al и Fe, которые используются в качестве коагулянтов для очистки вод.

Щелочные способы. Минералы бора вскрываются с помощью щелочных растворов или спеканием с едким натром. При этих способах вскрытия из растворов кристаллизуют буру.

Из рассмотренных способов переработки борсодержащего сырья наиболее эффективным является азотнокислотный, при котором извлечение борной кислоты колеблется от 78 до 93%.

Как известно, скорость взаимодействия компонентов в гетерогенной системе зависит от многих факторов: химического состава руды, гидродинамического режима, концентрации кислоты, дисперсности частиц, температуры процесса, времени и др. Кинетика кислотного разложения боросиликатных руд определяется различными значениями энергии разрушения их кристаллических решёток. Поэтому исследование кинетических закономерностей разложения боросиликатных руд отдельными минеральными кислотами имеет большое значение при разработке научных основ процесса выделения борной кислоты из минерального сырья и его реализации в промышленности. Выявление факторов, оказывающих максимальное влияние на кинетику кислотного вскрытия руды, позволяет найти эффективные технологии её переработки.

Экспериментальное исследование кинетики реакции состоит в измерении скорости убыли исходных веществ или появлении продуктов реакции при данной температуре и установлении зависимости скорости реакции от концентрации этих веществ.

Традиционно глубину протекания процесса разложения боросиликатного сырья оценивают по коэффициенту разложения, который определяется как степень перехода целевого компонента в пересчёте на борный ангидрид (B_2O_3) из общей формы в усвояемую:

$$K_p = B_2O_3_{\text{yse}} / B_2O_3_{\text{зобиц}} \cdot 100\%.$$

Под действием разлагающего агента разрушается кристаллическая решетка боросиликатного сырья, и оксид бора экстрагируется из твёрдой фазы в жидкую и связывается с ионом водорода экстрагента (минеральных кислот) в борную кислоту (H_3BO_3). Исходя из этого, кинетику протекания процесса кислотного разложения борного сырья возможно изучать непосредственно по образованию борной кислоты.

Кинетические кривые зависимости извлечения оксида бора из состава боросиликатной руды от температуры и продолжительности процесса при кислотном разложении удовлетворительно описываются уравнением первого порядка. Кинетическое уравнение элементарной необратимой реакции первого порядка в дифференциальной, интегральной и экспоненциальной формах, соответственно, имеет вид:

$$k_c = da / dt = K (1-\alpha),$$

где: α – степень извлечения; τ – время в минутах; K – константа скорости разложения, в минутах.

С помощью обработки кинетических кривых получены значения константы и логарифма константы скорости разложения исходного обожжённого боросиликатного сырья и его концентрата для различных температур, которые приведены в табл.1 и 2, соответственно.

Таблица 1

Значения констант скоростей и логарифма константы скорости реакции в исследуемом диапазоне температур при разложении исходного обожжённого боросиликатного сырья

H₂SO₄					
Т (К)	303	318	333	348	368
1/Т	0.0033	0.003144	0.0030	0.00287	0.00271
$k_{cp}[(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}]$	0.0051	0.0064	0.0076	0.0088	0.0103
$Lg k_{cp}(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}$	-2.2924	-2.1998	-2.1192	-2.0555	-1.9872
HNO₃					
Т (К)	293	313	333	353	368
1/Т	0.00341	0.00319	0.0030	0.00283	0.00271
$k_{cp}[(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}]$	0.0049	0.0109	0.0159	0.0210	0.0248
$Lg k_{cp}(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}$	-2.3053	-1.9625	-1.7965	-1.6767	-1.6055
HCl					
Т (К)	303	318	333	348	368
1/Т	0.0033	0.003144	0.0030	0.00287	0.00271
$k_{cp}[(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}]$	0.0061	0.0079	0.0098	0.0115	0.0135
$Lg k_{cp}(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}$	-2.2146	-2.1023	-2.0087	-1.9393	-1.8696
CH₃COOH					
Т (К)	303	323	343	353	363
1/Т	0.0033	0.0030	0.00291	0.00283	0.00275
$k_{cp}[(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}]$	0.00741	0.0116	0.01799	0.02165	0.02589
$Lg k_{cp}(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}$	-2.13004	-1.93548	-1.74491	-1.66438	-1.58681

Таблица 2

Значения констант скоростей и логарифма константы скорости реакции в исследуемом диапазоне температур при разложении обожжённого концентрата боросиликатного сырья

H₂SO₄					
Т (К)	293	313	333	353	368
1/Т	0.00341	0.00319	0.0030	0.00283	0.00271
$k_{cp}[(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}]$	-	-	-	-	-
$Lg k_{cp}(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}$	-	-	-	-	-
HNO₃					
Т (К)	293	313	333	353	368
1/Т	0.00341	0.00319	0.0030	0.00283	0.00271
$k_{cp}[(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}]$	0.0111	0.0150	0.0192	0.0267	0.0453
$Lg k_{cp}(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}$	-1.9527	-1.8224	-1.7173	-1.5735	-1.3436
HCl					
Т (К)	293	313	333	353	368
1/Т	0.00341	0.00319	0.0030	0.00283	0.00271
$k_{cp}[(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}]$	-	-	-	-	-
$Lg k_{cp}(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}$	-	-	-	-	-
CH₃COOH					
Т (К)	303	313	323	343	363
1/Т	0.0033	0.00319	0.0030	0.00291	0.00275
$k_{cp}[(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}]$	0.01233	0.01640	0.02155	0.02734	0.03871
$Lg k_{cp}(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}$	-1.90872	-1.78512	-1.6665	-1.56307	-1.41212
H₃PO₄					
Т (К)	303	323	333	343	363
1/Т	0.0033	0.00309	0.0030	0.00291	0.00275
$k_{cp}[(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}]$	0.00566	0.01132	0.01592	0.02147	0.02611
$Lg k_{cp}(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}$	-2.24699	-1.94587	-1.79787	-1.6681	-1.58319
Смесь HNO₃+ H₃PO₄					
Т (К)	303	323	333	343	363
1/Т	0.0033	0.00309	0.0030	0.00291	0.00275
$k_{cp}[(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}]$	0.006531	0.01199	0.01678	0.02372	0.03424
$Lg k_{cp}(\text{моль/л}) \cdot \text{с}^{-1}$	-2.18498	-1.92098	-1.77497	-1.62481	-1.46543

Величины кажущейся энергии активации при кислотном разложении определяли графическим методом с использованием уравнения Аррениуса, результаты которого приведены в табл.3.

Таблица 3

Значения энергии активации при разложении боросиликатных руд различными кислотами

Исходное обожжённое боросиликатное сырьё						
Кислоты	H ₂ SO ₄	HNO ₃	HCl	CH ₃ COOH	H ₃ PO ₄	HNO ₃ + H ₃ PO ₄
E _a (кДж/моль)	16.68	21.19	29.44	19.0	-	-
Обожжённый концентрат боросиликатного сырья						
Кислоты	H ₂ SO ₄	HNO ₃	HCl	CH ₃ COOH	H ₃ PO ₄	HNO ₃ + H ₃ PO ₄
E _a (кДж/моль)	10.33	14.83	11.72	18.36	26.54	26.34

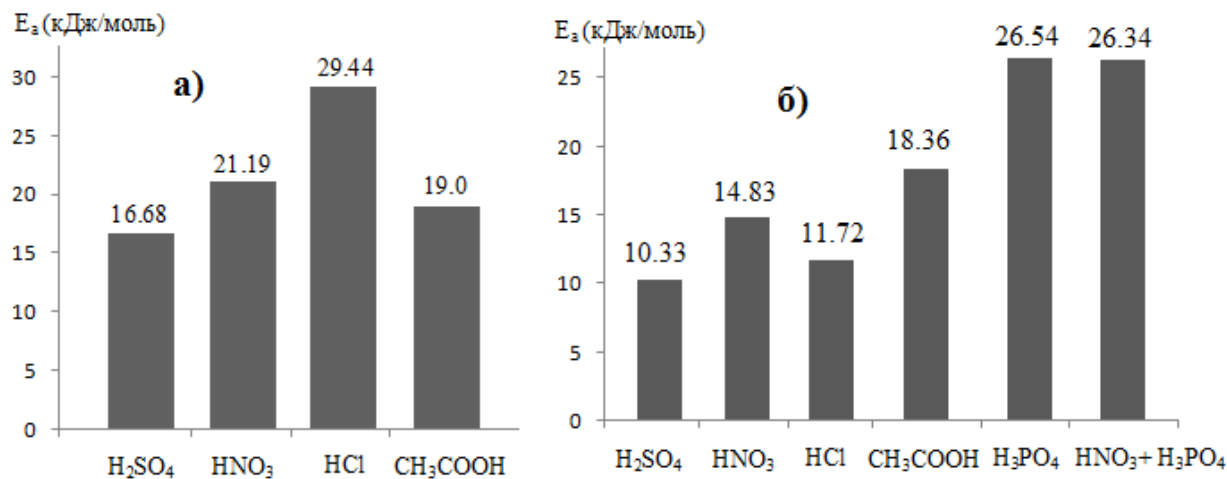


Рис. 1. Значения энергии активации при разложении боросиликатных руд различными кислотами: а) исходное обожжённое боросиликатное сырьё; б) обожжённый концентрат боросиликатного сырья

Как видно из табл.3, и рис.1. при разложении боросиликатных руд минеральными кислотами значение энергии активации во всех случаях не превышает 30 кДж/моль, что свидетельствует о прохождении процесса в диффузионной или смешанной области.

Поступило 31.08.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Николаев А.В. Физико-химическое изучение природных боратов. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947, с. 240.
2. Года Г.К. Синтезы боратов. – Ч.1. – Рига, 1971, с. 58.
3. Ткачёв К.В., Плышевский Ю.С. Технология неорганических соединений бора. – Л.: Химия, 1983, с. 208.
4. Берлин Л.Е. Производство борной кислоты, буры и борных удобрений. – М.: ГХИ, 1950, с. 56.
5. Мирсаидов У.М., Курбонов А.С., Маматов Э.Д. Кислотное разложение боросиликатных руд. – Душанбе: Дониш, 2015, с. 96.
6. Мирсаидов У.М., Курбонов А.С., Назаров Ф.А., Тагоев М.М. Спекательные методы переработки боросиликатных руд Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2020, с. 122.

А.С.Курбонов, А.П.Тагаев, Р.Ч.Акрамзода, А.С.Давлатов, М.М.Тагоев

КИНЕТИКАИ ТАҶЗИЯИ МАЪДАНҲОИ БОРОСИЛИКАТИИ ТОҶИКИСТОН БО КИСЛОТАҲОИ МИНЕРАЛӢ

Институти кимиёи ба номи В.И. Никитини АМИ Тоҷикистон

Дар мақола чанбаҳои кинетикии таҷзияи маъдани боросиликати ибтидоӣ ва ганигардонидашудаи он бо кислотаҳои минералӣ омӯхта шудааст. Кинетикаи раванди таҷзияи маъдани боросиликати кони Ак-Архари Тоҷикистон бо кислотаҳои минералии хлорид, сульфат, нитрат, ортофосфат ва сирко омӯхта шудаанд. Муайян карда шудааст, ки хангоми таҷзияи маъданҳои

боросиликатӣ бо кислотаҳои минералӣ равандро асосан дар ҳудудҳои диффузионӣ ва омехта мегузаранд.

Калимаҳои калидӣ: кинетика, таҷзия, маъданҳои боросиликатӣ, кислотаҳои минералӣ, энергияи фаъолишавӣ.

A.S.Kurbonov, A.P.Tagayev, R.J.Akramzoda, A.S.Davlatov, M.M.Tagoev

KINETICS OF DECOMPOSITION OF BOROSILICATE ORES OF TAJIKISTAN WITH MINERAL AIDS

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, NAS of Tajikistan

In this article the kinetic aspects of decomposition of initial borosilicate raw materials and its concentrate with mineral acids have been studied. The kinetics of decomposition process of borosilicate raw materials of Ak-Arkhar deposit of Tajikistan with hydrochloric, sulfuric, nitric, orthophosphoric and acetic acids has been studied. It has been defined that at decomposition of borosilicate ores with mineral acids the process proceeds mainly in diffusion or in mixed areas.

Key words: kinetic, decomposition, borosilicate ores, mineral acids, activation energy.

УДК 546.621

С.М.Бахронов, М.Д.Бобоёров, Б.Б.Баротов, А.Мирзоев, И.Мирсаидзода

**ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОТЕКАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ
РАЗЛОЖЕНИИ УРАНСОДЕРЖАЩИХ РУД МЕСТОРАЖДЕНИЯ «ТАНЗИМ»***Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности**НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 30.05.2022 г.)*

В статье приведены результаты термодинамических расчётов разложения урансодержащих руд месторождения «Танзим» серной кислотой. Определены термодинамические характеристики минералов, входящих в состав сырья и рассчитаны величины энергии Гиббса для каждой реакции.

Ключевые слова: *урансодержащая руда, энтальпия, энтропия, энергия Гиббса, разложение, серная кислота.*

В работах [1-4] изучены процессы разложения урансодержащих руд различными минеральными кислотами, в присутствии окислителей. Найдены оптимальные условия процессов разложения кислотами и предложены принципиальные технологические схемы переработки урансодержащих руд.

Как известно, задачами термодинамического анализа являются:

- 1) расчёт теплового эффекта реакции;
- 2) выявление возможности самопроизвольного протекания реакции в данном направлении;
- 3) определение предела самопроизвольного протекания реакции, то есть состояния химического равновесия;
- 4) в результате определяют условия, при которых реакция будет протекать в нужном направлении, и равновесный состав, соответствующий заданным условиям.

В настоящей работе определен состав минералов месторождения «Танзим», термодинамические характеристики минералов, расчёт термодинамических характеристик реакций при взаимодействии минеральных руд месторождения «Танзим» серной кислотой. Особое внимание уделено изменению значений энергий Гиббса при различных температурах.

Для урансодержащих руд месторождений «Центральный Таджикистан» и «Западный Таджикистан» проведены термодинамические оценки процессов разложения руды серной кислотой [5].

Результаты расчётов термодинамических характеристик разложения урансодержащих руд серной кислотой указывают на вероятность протекания процесса в стандартных условиях. В работе [5] приведены результаты влияния температуры на значения энергии Гиббса рассматриваемых процессов. Повышение температуры способствует разложению минералов ураннитита, альбита, пирита,

Адрес для корреспонденции: Бахронов Соджидхон Манонджонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАНТ. E-mail: s.bahronov@cbrn.tj

мусковита, которые содержатся в указанной руде. Найдены значения энергии Гиббса для соответствующих реакций [5].

Разложение урансодержащих руд месторождений «Западный Таджикистан» и «Центральный Таджикистан» серной кислотой показывает необходимость проведения процесса при температурах 298-373 К с получением полезных компонентов [6].

Цель настоящей работы – термодинамическая оценка разложения отдельных минералов месторождения «Танзим» серной кислотой.

Химический анализ и методика эксперимента

Для химического анализа урансодержащих руд использован метод комплексонометрии для определения урана, метод пламенной фотометрии для определения щелочных металлов, весовой метод и др. [7].

Методика эксперимента была разработана с учётом параллельных образцов руд, с использованием среднего значения анализа.

Рентгенофазовый и дифференциально-термический анализы проводили на усовершенствованных аппаратах с программным обеспечением марки ДРОН-2 и на дериватографе Q-1500 фирмы МОМ системы Паулик-Эрдей с рабочим диапазоном температуры от комнатной до 1000°C. Скорость нагрева 10°C/мин с автоматической загрузкой образцов.

Рентгенофазовый анализ (РФА) проводили для нескольких образцов месторождения «Танзим». По результатам РФА и ДТА определили минералогический состав месторождения «Танзим» (табл.1). Как видно из табл.1, урансодержащая руда месторождения «Танзим» в основном содержит следующие минералы: пирит, уранинит, каолинит, сфен, пирофиллит, галенит.

Таблица 1

Минералогический состав месторождения «Танзим»

1	Уранинит (UO ₂)
2	Пирит (FeS ₂)
3	Каолинит (Al ₂ Si ₂ O ₇ ·2H ₂ O)
4	Сфен CaTiSiO ₄
5	Пирофиллит Al ₂ [OH] ₂ {Si ₄ O ₁₀ }
6	Галенит PbS

В табл.2 приведены справочные данные по изменению энтальпии и энтропии веществ и минералов, которые содержатся в урановых рудах месторождения «Танзим» [8].

Таблица 2

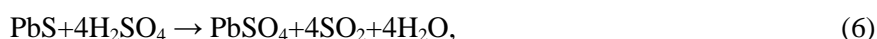
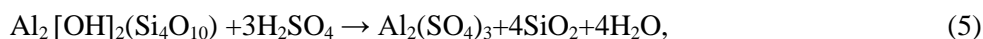
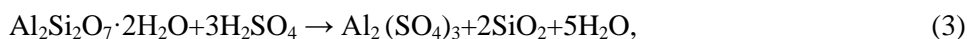
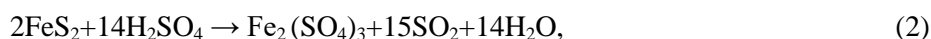
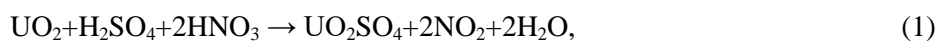
Термодинамические характеристики минералов и их продукты разложения месторождения «Танзим»

№	Вещество	ΔH_{298}^0 , кДж/моль	ΔS_{298}^0 , Дж/моль·К
1.	UO ₂ (т)	-1081.23	0.08
2.	FeS ₂ (т)	-163.18	0.053
3.	H ₂ SO ₄ (ж)	-814.2	0.157
4.	Al ₂ Si ₂ O ₇ ·2H ₂ O (т)	-4098.65	0.203
5.	HNO ₃ (ж)	-174.14	0.155
6.	CaTiSiO ₄ (т)	-2600.56	-0.173
7.	CaSO ₄ (п-п)	-1454.06	-0.04
8.	TiSO ₄ (п-п)	-1601.4	-0.1733
9.	UO ₂ SO ₄ (п-п)	-1929.7	0.0812

Продолжение таблицы 2

№	Вещество	ΔH^0_{298} , кДж/моль	ΔS^0_{298} , Дж/моль·К
10.	NO_2 (г)	33.5	0.24
11.	H_2O ж	-285.8	0.07
12.	$\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ (р-р)	-3792.33	0.55
13.	$\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ (р-р)	-2825.7	-0.564
14.	S (г)	1.68	167.7
15.	SO_2 (г)	-296.9	248.1
16.	SiO_2 (г)	-910.94	41.84
17.	PbS (г)	-100.42	91.21
18.	PbSO_4 (г)	-911.9	31.01
19.	$\text{Al}_2[\text{OH}]_2\{\text{Si}_4\text{O}_{10}\}$ (г)	42.342	236.8

При взаимодействии серной кислоты с минералами месторождения «Танзим» возможны следующие реакции:



Для каждой реакции были рассчитаны термодинамические характеристики, которые приведены в табл.3.

Таблица 3

Расчёт термодинамических характеристик реакций при взаимодействии минералов руды месторождения «Танзим» серной кислотой

№ схемы реакции	ΔH^0_{298} , кДж/моль	ΔS^0_{298} , кДж/моль·К	ΔG^0_{298} , кДж/моль
(1)	-190.62	0.006	-192.41
(2)	482.63	1.84	-65.7
(3)	-502.11	0.79	-737.53
(4)	-309.1	0.1705	-359.91
(5)	-617.9	-0.061	-599.72
(6)	115.72	0.932	-162.02

Результаты расчёта термодинамических характеристик предполагаемых реакций (1)-(6) (табл.4) указывают на вероятность протекания процесса в стандартных условиях. В табл.4 и на рис.1 приведены результаты влияния температуры на значения энергии Гиббса рассматриваемых процессов. Как видно из табл.4 и рисунка, повышение температуры способствует протеканию всех рассматриваемых реакций (1)-(6).

Таким образом, выщелачивание урансодержащих руд месторождения «Танзим» серной кислотой показывает необходимость проведения процесса при температурах 298-373 К с получением полезных компонентов.

Таблица 4

Значения энергии Гиббса (ΔG , кДж/моль) при различных температурах в реакциях (1)-(6)

№ схемы реакции	ΔG^0_{298}	ΔG^0_{313}	ΔG^0_{333}	ΔG^0_{353}	ΔG^0_{373}
(1)	-192.41	-188.76	-188.64	-188.53	-188.41
(2)	-65.7	-93.3	-130.1	-166.9	-203.7
(3)	-737.53	-749.38	-765.18	-780.98	-796.8
(4)	-359.91	-362.47	-365.88	-369.28	372.7
(5)	-599.72	-598.81	-597.59	-596.37	-595.15
(6)	-162.02	-175.96	-194.94	-213.3	-231.9

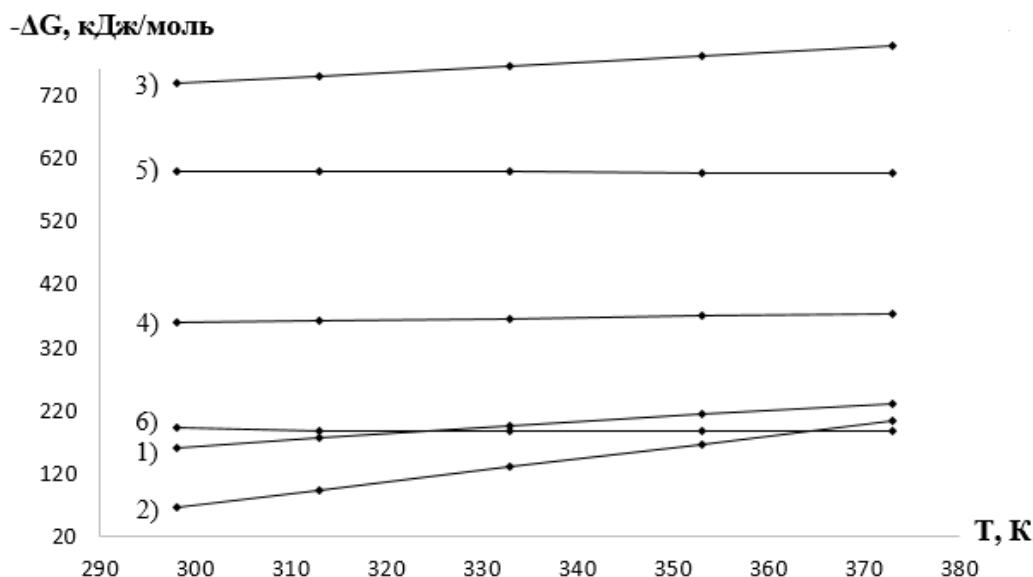


Рис. Зависимость изменения ΔG от температуры выщелачивания минералов, содержащихся в месторождении «Танзим»: 1) уранинит, 2) пирит, 3) каолинит, 4) сфен, 5) пирофиллит, 6) галенит.

Поступило 01.06.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирсаидов И.У. Физико-химические основы получения урановых концентратов из отходов и сырьевых материалов. – Душанбе: Дониш, 2014, с. 106.
2. Мирсаидов И.У., Баротов Б.Б., Ходжиев С.К. и др. Физико-химические основы переработки ураносодержащих руд Таджикистана. – XV Нумановские чтения, Душанбе, 2019, с.154-155.
3. Ходжиев С.К., Назаров Х.М., Хочиён М.М. и др. Возможности переработки ураносодержащих руд месторождения «Центральный Таджикистан». – ДАН РТ, 2017, т.60, №1, с.68-72.
4. Бобоёров М.Д., Баротов Б.Б., Хамидов Ф.А. и др. Термодинамический анализ протекающих процессов при сернокислотном выщелачивании руд месторождений «Западный Таджикистан» и «Центральный Таджикистан». – Изв. НАН Таджикистана. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук, 2020, №1(178), с.84-88.
5. Глушко В.П., В. А. Медведев, Г. А. Бергман, В. П. Васильев и др. Термические константы веществ. – М., АН СССР, ВИНТИ, 1981, вып.10, с. 441.

С.М.Бахронов, М.Д.Бобоёров, Б.Б.Баротов, А.Мирзоев, И.Мирсаидзода

**ТАҲЛИЛИ ТЕРМОДИНАМИКИИ ГУЗАРИШИ РАВАНДҲО ҲАНГОМИ
ТАҶЗИИ МАЪДАНҲОИ УРАНДОРИ КОНИ «ТАНЗИМ»**

*Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии Академияи миллии илмҳои
Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаҳои таҳлили термодинамикии таҷзии маъданҳои кони “Танзим” бо кислотаи сулфат оварда шудааст, инчунин тавсифи термодинамикии минералҳои, ки ба таркиби маъдан дохиланд оварда шудааст. Барои ҳар як реаксия қимати энергияи Гиббс ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: маъдани урандор, таҷзия, энталпия, энтропия, энергияи Гиббс, кислотаи сулфат.

S.M.Bahronov, M.D.Boboyorov, B.B.Barotov, A.Mirzoev, I.Mirsaidzoda

**THERMODYNAMIC ANALYSIS OF PROCESSING PROCESSES IN
DECOMPOSITION OF URANIUM-CONTAINING ORES FROM THE TANZIM**

*Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety and Security Agency
National Academy of Sciences of Tajikistan*

In this article the results of a thermodynamic calculation of the decomposition of uranium-containing ores from the “Tanzim” are presents. Deposit with sulfuric acid, the thermodynamic characteristics of the minerals that make up the raw materials and the calculation of the Gibbs energy for each reaction are also determined.

Key words: uranium ore, decomposition, enthalpy, entropy, Gibbs energy, sulfuric acid.

УДК 550.42:546.679:628.398 (430)

М.З.Ахмедов

**СОДЕРЖАНИЕ ИЗОТОПА ЦЕЗИЯ-137 В ПОЧВЕННОМ ПОКРОВЕ
СЕВЕРНОГО ТАДЖИКИСТАНА***Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности
НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана У.Мирсаидовым 25.04.2022 г.)*

В статье приведены результаты исследования содержания цезия-137 в почвенном покрове северной части Таджикистана. Измерены концентрации изотопов уранового и ториевого ряда (^{40}K , ^{137}Cs , ^{210}Pb , ^{212}Pb , ^{212}Bi , ^{214}Pb , ^{214}Bi , ^{226}Ra , ^{228}Ac , ^{228}Th , ^{235}U , $^{238}\text{U}+dau$) в почвах. Установлена зависимость накопления изотопа цезия-137 от направления розы ветров и рельефа местности в исследуемом регионе. У подножья гор и на глинистых почвах наблюдаются относительно высокие содержания изотопа цезия-137 по сравнению с равнинами и песчаными почвами.

Ключевые слова: рельеф, ветер, почва, проба, анализ, цезий, удельная активность.

Как известно, почва является основным аккумулятором и депонентом загрязнений. В воздухе, воде, растениях поступившие загрязнения обычно находятся относительно недолго, а в почве они остаются на годы, десятилетия, столетия.

Ранее в работах [1-9] было изучено содержание природных и техногенных радионуклидов в образцах почв и аэрозолях, где показано наличие цезия-137. Элементный анализ проб почв, собранных по пути распространения пылевой мглы, свидетельствует о средних коэффициентах корреляции содержания цезия (0.13) относительно содержания урана [3].

В связи с этим, исследование содержания изотопа цезия-137 в почвенном покрове Северного Таджикистана является актуальным.

Цель проведённых исследований – изучение состояния почвы как индикатора техногенной нагрузки в зоне влияния выбросов промышленных объектов и их дальнейший перенос.

Материалы и методы исследований

Для отбора проб на территории южной части Кураминского хребта и вокруг радиоактивного хвостохранилища Адрасман заранее определяли координаты точек отбора и их месторасположение (рис.1).

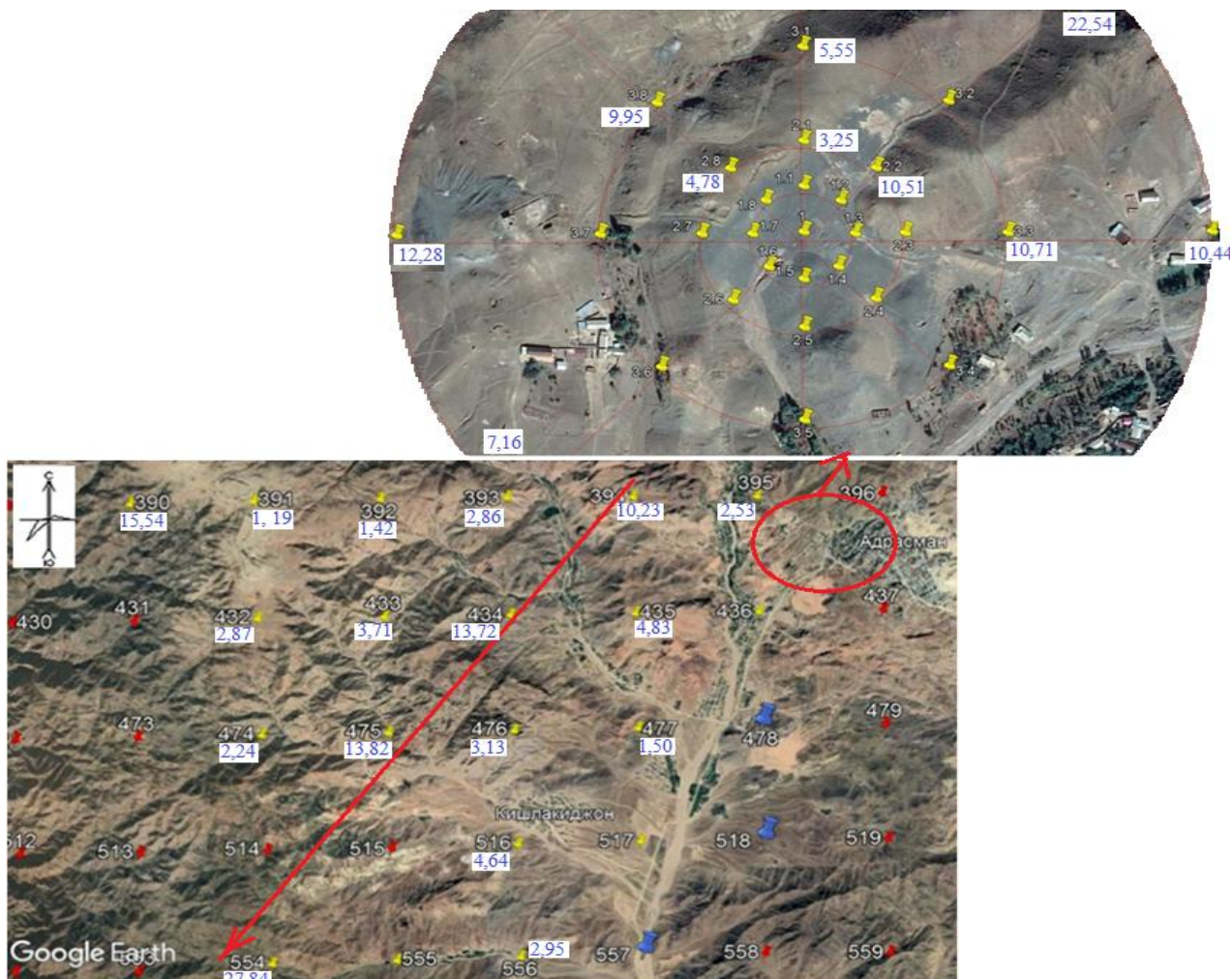


Рис. 1. Точки отбора проб и значения содержания изотопа цезия-137.

Для отбора проб также выбраны населённые пункты и самые разнообразны ландшафты, в которых из каждой точки отбирали 3-4 пробы.

Отбор проб почвы проводили согласно ГОСТ 17.4.3.01-2017 от поверхности земли до глубины 25 см [10, 11]. Каждую пробу в точке отбора очищали от камней, корней и других включений. Из общей массы методом квартования отбирали более 1 л образца. Почвы высушивали до воздушно-сухого состояния, измельчали на мельнице и просеивали через сито диаметром отверстий 2 мм. Для радиологического измерения проб использовали стандартный сосуд «Маринелли» объёмом 1 л. Радиологические измерения и анализ исследуемых проб проводились на гамма-спектрометре (CANBERA, программное обеспечение Genie-2000) в аккредитованной Лаборатории технических услуг Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана. Описание изученных проб приведено в табл.1-3.

Таблица 1

Суммарная активность нуклидов в пробах почв, отобранных вокруг хвостохранилища Адрасман

№ пробы (рис.1)	Координаты	Нуклиды, Бк/кг											
		⁴⁰ K	¹³⁷ Cs	²¹⁰ Pb	²¹² Bi	²¹² Pb	²¹⁴ Bi	²¹⁴ Pb	²²⁶ Ra	²²⁸ Ac	²²⁸ Th	²³⁵ U	²³⁸ U+daу
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	69.97603°E, 40.65476°N	1140,2	-	-	44,9	49,7	636,4	561,2	1170,0	-	-	-	-
1.1	69.97619°E, 40.65523°N	1154,6	-	-	42,2	54,2	82,7	82,7	186,2	67,90	-	-	-
1.2	69.97644°E, 40.65511°N	1204,9	-	-	46,4	64,5	416,1	329,4	798,4	79,35	503,35	-	-
1.3	69.97663°E, 40.65475°N	1164,4	-	-	43,2	55,2	24,6	233,4	502,2	-	-	-	-
1.4	69.97648°E, 40.65448°N	-	-	-	44,0	48,9	391,4	325,5	653,9	73,25	-	-	-
1.5	69.97560°E, 40.65427°N	1271,3	-	-	47,3	62,7	451,8	352,5	832,2	78,09	487,02	-	118,61
1.6	69.97562°E, 40.65443°N	865,6	-	5044,9	-	54,5	8737,9	8407,2	8570,5	61,30	9697,27	273,09	811,11
1.7	69.97544°E, 40.65479°N	1194,6	-	-	40,5	37,6	257,9	187,5	455,0	-	-	-	-
1.8	69.97553°E, 40.65518°N	1338,1	-	-	-	57,9	282,6	260,9	559,7	-	-	-	-
2.1	69.97605°E, 40.65573°N	1365,5	3,25	-	45,1	61,9	375,0	330,7	639,3	76,70	-	-	-
2.2	69.97714°E, 40.65537°N	1139,8	10,51	4323,9	-	73,5	8511,2	7965,3	8386,2	87,26	7388,08	222,41	313,24
2.3	69.97723°E, 40.65477°N	1206,1	-	-	36,7	36,8	94,2	89,2	184,3	-	-	-	-
2.4	69.97688°E, 40.65408°N	1215,4	-	-	44,9	55,3	205,2	189,2	345,8	-	-	-	-
2.5	69.97603°E, 40.65389°N	1183,6	-	-	47,5	55,45	309,1	275,1	600,0	-	-	-	-
2.6	69.97519°E, 40.65413°N	1204,7	-	-	50,6	67,1	327,4	280,3	622,2	70,17	491,44	-	-
2.7	69.97478°E, 40.65478°N	1157,7	-	-	71,3	-	1905,6	1555,3	3300,7	70,41	2598,40	-	-
2.8	69.97520°E, 40.65541°N	1107,2	4,78	-	44,7	57,0	23,8	203,0	460,5	73,68	-	-	-
3.1	69.97594°E, 40.65658°N	1254,7	5,55	-	47,9	58,1	83,5	88,8	-	-	-	-	-
3.2	69.97774°E, 40.65602°N	1163,0	-	-	58,3	60,7	978,5	875,1	1616,0	-	-	-	-
3.3	69.97833°E, 40.65476°N	1431,5	10,71	-	46,8	54,6	477,6	390,6	795,2	-	-	-	-
3.4	69.97773°E, 40.65326°N	1140,9	-	-	44,7	55,4	582,0	535,6	1045,9	-	-	-	-
3.5	69.97647°E, 40.65265°N	1107,1	-	-	-	62,2	2868,0	2460,1	4205,5	-	2285,11	-	-
3.6	69.97439°E, 40.65367°N	1395,9	-	-	43,7	53,3	93,1	94,2	195,1	71,61	-	-	-
3.7	69.97364°E, 40.65478°N	1276,9	-	-	48,9	68,2	66,8	70,1	162,7	76,74	-	-	-
3.8	69.97455°E, 40.65595°N	1189,2	9,95	-	-	41,7	225,1	178,6	367,6	-	-	-	-
4.1	69.97640°E, 40.65812°N	1284,8	-	-	48,3	41,4	84,0	72,8	-	-	-	-	-
4.2	69.97985°E, 40.65737°N	1353,3	22,54	-	46,3	61,9	194,4	189,7	406,9	-	-	-	-
4.3	69.98107°E, 40.65479°N	1734,0	-	-	49,3	63,8	217,0	209,4	427,2	-	-	-	-
4.4	69.97960°E, 40.65233°N	1195,8	-	-	53,4	-	845,5	787,4	138,0	-	-	-	-

Продолжение таблицы 1

№ пробы (рис.1)	Координаты	Нуклиды, Бк/кг											
		⁴⁰ K	¹³⁷ Cs	²¹⁰ Pb	²¹² Bi	²¹² Pb	²¹⁴ Bi	²¹⁴ Pb	²²⁶ Ra	²²⁸ Ac	²²⁸ Th	²³⁵ U	²³⁸ U+dau
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4.5	69.97616°E, 40.65070°N	1200,8	-	-	43,9	61,8	330,6	260,7	-	75,68	499,35	41,94	47,08
4.6	69.97278°E, 40.65224°N	1024,7	7,16	-	31,2	37,8	478,4	407,7	756,7	58,65	-	-	-
4.7	69.97139°E, 40.65479°N	1150,5	12,28	-	43,6	38,9	121,7	104,0	274,1	-	-	-	-
4.8	69.97312°E, 40.65781°N	963,6	10,44	-	43,0	54,2	73,9	77,9	155,0	67,94	-	-	-
5.1	69.97557°E, 40.66181°N	8609,6	5,31	-	40,2	55,9	70,6	75,7	164,8	64,89	-	-	-
5.2	69.98312°E, 40.65980°N	1299,9	-	-	46,2	44,7	71,0	63,0	-	-	-	-	-
5.3	69.98547°E, 40.65485°N	1153,9	-	-	46,0	56,1	125,2	128,1	293,9	-	-	-	-
5.4	69.98276°E, 40.64949°N	1021,4	-	-	30,8	30,3	60,9	57,1	114,1	48,41	-	-	-
5.5	69.97587°E, 40.64770°N	1046,6	-	-	40,8	37,6	72,6	70,6	146,8	63,85	-	-	-
5.6	69.96937°E, 40.64974°N	1267,5	-	-	40,7	38,2	70,9	67,7	139,0	-	-	-	-
5.7	69.96646°E, 40.65474°N	1373,9	-	-	68,8	87,2	68,1	68,5	146,2	107,33	-	-	-
5.8	69.96949°E, 40.65984°N	1304,0	-	-	51,8	69,3	87,0	88,8	188,9	79,53	-	-	-

Таблица 2

Содержание изотопов уран-ториевого ряда в пробах почв, отобранных на территории южной части хребта Курама

№ пробы (рис.1)	Координаты	Нуклиды, Бк/кг											
		⁴⁰ K	¹³⁷ Cs	²¹⁰ Pb	²¹² Bi	²¹² Pb	²¹⁴ Bi	²¹⁴ Pb	²²⁶ Ra	²²⁸ Ac	²²⁸ Th	²³⁵ U	²³⁸ U+dau
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
350	40.675030°N 69.866610°E	1499,96	-	-	60,05	86,49	45,48	43,27	126,07	99,15	-	-	54,92
390	40.656750°N 69.843290°E	844,10	15,54	48,32	28,19	35,76	56,12	49,93	116,05	41,62	-	-	41,72
391	40.656660°N 69.866660°E	497,92	1,19	-	12,84	17,99	27,87	23,90	55,52	22,84	-	-	-
392	40.656680°N 69.890010°E	1414,20	1,42	-	54,27	60,34	58,14	53,69	12,80	81,48	-	-	-
393	40.656650°N 69.913400°E	1434,33	2,86	-	66,53	30,24	48,19	39,47	98,92	104,38	-	-	-
394	40.656660°N 69.936640°E	1213,55	10,23	51,63	77,33	107,13	55,98	53,81	139,66	132,04	236,90	-	46,89
395	40.656640°N 69.961370°E	1392,47	2,53	52,29	42,44	55,84	75,49	70,00	171,27	67,94	172,51	-	58,36
432	40.638320°N 69.866580°E	1090,08	2,87	-	40,54	19,97	44,20	32,71	85,45	-	-	-	-
433	40.638350°N 69.890010°E	1127,09	3,71	-	49,22	55,44	60,82	55,48	132,13	73,57	-	-	-
434	40.638350°N 69.913360°E	1547,30	13,72	89,11	54,98	75,41	86,55	81,81	231,06	88,32	-	-	80,65
435	40.638400°N 69.937350°E	1294,20	4,83	-	81,83	99,42	56,42	53,16	146,21	133,66	-	-	29,39
436	40.638400°N 69.960010°E	929,04	-	107,74	68,45	93,54	172,25	149,69	143,75	94,56	399,58	18,69	185,42

Продолжение таблицы 2

№ пробы (рис.1)	Координаты	Нуклиды, Бк/кг											
		⁴⁰ K	¹³⁷ Cs	²¹⁰ Pb	²¹² Bi	²¹² Pb	²¹⁴ Bi	²¹⁴ Pb	²²⁶ Ra	²²⁸ Ac	²²⁸ Th	²³⁵ U	²³⁸ U+dau
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
474	40.620880°N 69.871290°E	1320,42	2,24	30,64	71,96	104,74	47,67	45,31	-	122,74	221,85	7,23	48,43
475	40.619980°N 69.890660°E	789,20	13,82	46,17	22,92	32,70	47,46	46,07	71,81	41,31	-	2,08	-
476	40.619850°N 69.913510°E	1328,51	3,13	69,56	63,63	89,26	102,91	98,63	163,04	102,39	266,40	6,01	92,42
477	40.619990°N 69.936680°E	721,79	1,50		30,48	40,30	44,88	45,53	82,03	46,81	-	0,91	-
516	40.601670°N 69.913320°E	1183,76	4,64	-	41,39	45,88	47,47	42,45	106,79	64,05	-	-	-
517	40.601690°N 69.936690°E	1154,40	-	29,51	36,56	50,86	59,51	55,88	127,01	57,63	-	-	40,41
554	40.583310°N 69.866660°E	2302,82	27,84	155,38	88,89	121,70	138,48	128,43	307,37	133,71	-	-	113,27
555	40.583300°N 69.890030°E	894,82	-	-	35,04	43,01	45,88	47,12	109,51	54,87	-	-	-
556	40.583520°N 69.913500°E	1053,06	2,95	45,22	44,14	56,52	53,89	-	78,46	69,80	172,35	4,93	60,40

Таблица 3

Удельная активность радионуклидов в пробах почв, отобранных на территории северных склонов Туркестанского хребта

Место отбора проб	Нуклиды, Бк/кг											
	⁴⁰ K	¹³⁷ Cs	²¹⁰ Pb	²¹² Bi	²¹² Pb	²¹⁴ Bi	²¹⁴ Pb	²²⁶ Ra	²²⁸ Ac	²²⁸ Th	²³⁵ U	²³⁸ U+dau
г.Истаравшан	686,3	11,7	139,8	-	49,3	34,8	31,3	152,5	39,4	-	-	-
Село Сурхи, Истаравшан	521,0	2,98	28,6	22,2	31,7	34,0	31,2	-	36,2	-	4,68	24,0
Село Лакат, Истаравшан	524,0	1,64	29,2	21,7	31,3	32,2	29,9	-	34,9	93,8	4,23	21,1
Село Октаги, Шахристан	765,0	14,4	34,3	27,6	38,4	36,8	34,1	48,6	43,4	96,1	2,09	30,6
Село Навкент, Шахристан	560,0	5,22	32,4	25,0	34,3	31,9	28,9	44,9	36,2	88,9	1,37	21,2
Село Фирдавси, Шахристан	535,0	0,82	16,2	22,5	28,0	28,6	28,3	64,8	35,0	-	-	23,1
п.Зафарбад	803,4	4,7	33,4	-	45,3	42,4	97,8	97,8	58,2	-	-	-

Результаты обследований

В табл.1-3 приведены измеренные концентрации изотопов уранового и ториевого ряда (⁴⁰K, ¹³⁷Cs, ²¹⁰Pb, ²¹²Pb, ²¹²Bi, ²¹⁴Pb, ²¹⁴Bi, ²²⁶Ra, ²²⁸Ac, ²²⁸Th, ²³⁵U, ²³⁸U+dau) в пробах почв Северного Таджикистана, их средние значения и выделены максимальные значения концентраций.

При анализе удельной активности образцов исследуемых местностей было установлено, что максимальное значение удельной активности цезия-137 наблюдается в пробе почвы, отобранной на территории южной части Кураминского хребта, которое составляет 27.84 Бк/кг. Отмечено увеличение удельной активности в этом районе в южном направлении (стрелкой указано на рис.1).

Относительно высокое содержание изотопа цезия-137 в почвах наблюдается в основном в пробах, отобранных на северных склонах подножья гор. Это может быть связано с водной и ветровой

эрозией поверхностного покрова, который, смываясь, накапливается у подножья гор, в его составе происходит концентрация техногенных радионуклидов. Данное явление также отмечается в работах авторов [12].

Как видно из табл.1, в пробах почв, отобранных вокруг хвостохранилища Адрасман, также наблюдаются накопления изотопа цезия-137, которые сосредоточены с северной стороны объекта, максимальная удельная активность которых составляет 22.54 Бк/кг. Но это не связано с радиоактивным хвостохранилищем, так как на самом объекте не обнаружен цезий-137. В пробе 1.6 установлены максимальные значения удельной активности (Бк/кг): ^{210}Pb – 5044.9; ^{214}Bi – 8737.9; ^{214}Pb – 8407.2; ^{226}Ra – 8570.5; ^{228}Th – 9697.27; ^{235}U – 273.09 и $^{238}\text{U}+\text{dau}$ – 811.11, что непосредственно связано со смывом хвостового материала из тела радиоактивного хвостохранилища селевыми потоками.

Из табл.3 видно, что суммарные удельные активности образцов (почв), отобранных на территории северных склонов Туркестанского хребта, варьируют от 820 до 6680 Бк/кг. Активности изотопов в пробах, отобранных из данных участков, варьируют в пределах (Бк/кг): ^{40}K – от 521 до 803.4; ^{137}Cs – от 0.82 до 14.4; ^{210}Pb – от 16.2 до 139.8; ^{212}Bi – от 21.7 до 27.6; ^{212}Pb – от 28.0 до 49.3; ^{214}Bi – от 28.6 до 42.4; ^{214}Pb – от 28.3 до 97.8; ^{226}Ra – от 44.9 до 152.5; ^{228}Ac – от 34.9 до 58.2; ^{228}Th – от 88.9 до 96.1; ^{235}U – от 1.37 до 4.68; ^{238}U – от 21.1 до 30.6.

Обнаруженные аномальные величины содержания радионуклидов в исследуемом регионе, на наш взгляд, связаны с тем, что, во-первых, южная часть Шахристанского перевала непосредственно примыкает к гранитоидной массе Туркестанского хребта, имеющей в своём составе тяжёлые радионуклиды, которые выходят на земную поверхность и дают вклад в общий фон; во-вторых, Шахристанский перевал находится на наветренной стороне дующих со степных частей Центрально-Азиатского массива ветров, то есть на пути «Розы ветров», приносящей радионуклиды из техногенных мест других территорий.

Что касается превышения радиационного фона акватории верхнего канала п.Зафарабад по отношению к низинной его части по рельефу, видимо, это связано с тем, что за геологические периоды из северных склонов Туркестанского хребта происходили миграции радионуклидов. Кроме того, есть вероятность миграции «следов» техногенных процессов с северных, наветренных склонов Туркестанских гор, привнесённых извне из других регионов.

З а к л ю ч е н и е

Данные по содержанию радиоактивных изотопов в пробах, особенно цезия-137, позволяют сделать вывод о том, что загрязнение связано с дальним переносом нуклидов. Максимальное значение удельной активности цезия-137 наблюдается в пробах почв, отобранных на северных сторонах южных склонов Кураминского хребта, составляющее 27.84 Бк/кг. Техногенные радионуклиды также концентрируются у подножья гор и в глинистых почвах.

На основании полученных результатов выявлено, что пространственное распределение цезия-137 в почвенном покрове зависит от направления розы ветров и рельефа местностей. Отмечается, что концентрация изотопов в северной части региона во всех пробах выше, чем в южной части.

Поступило 25.04.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абдуллаев С.Ф., Абдурасулова Н.А., Назаров Б.И., Джураев А.А. Распределение природной и техногенной радиоактивности в образцах пыльной мглы юга Таджикистана. – ДАН РТ, 2011, т.54, №9, с.746-753.
2. Абдуллаев С.Ф., Маслов В.А., Назаров Б.И. и др. Элементный состав почв и пылевого аэрозоля юго-центральной части Таджикистана. – Оптика атмосферы и океана, 2015, т.28, №3, с.246-255.
3. Назаров Б.И., Абдуллаев С.Ф., Маслов В.А. Атмосферный аэрозоль Центральной Азии. – Душанбе: Дониш, 2017, 416 с.
4. Буриев Н.Н., Буриев Н.Т., Давлатшоев Т. Техногенный радионуклид цезий-137 в пищевых дикорастущих растениях Таджикистана. – Символ науки, 2018, №4, с.7-8.
5. Рахматов М.Н., Абдуллаев С.Ф., Маслов В.А., Расулзода Х.Х. Элементный состав атмосферного аэрозоля и почв Таджикистана. – Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2018, №1, с.72-88.
6. Рахматов М.Н., Маслов В.А., Абдуллаев С.Ф. Динамика распределения тяжёлых металлов в пробах пылевого аэрозоля и почв Северного Таджикистана. – Химическая безопасность, 2019, т.3, №2, с.78-93.
7. Булгаков В.Г., Вакуловский С.М., Кимидр В.М. Техногенные радионуклиды в приземном слое атмосферы вследствие аварии на АЭС «Фукусима». – Радиационная гигиена, 2011, т.4, №4, с.26-31.
8. Бакарикова Ж.В., Жукова О.М., Герменчук М.Г. Вертикальная миграция цезия-137 в различных типах почв как фактор уменьшения внешней дозы облучения. – Сб. мат. республ. науч.-практ. конф. с междунар. участием, посвящ. 90-летию республиканского унитарного предприятия "Научно-практический центр гигиены". – Минск, 2017, с.67-69.
9. Манзон Д.А. Динамика миграции цезия-137 после Чернобыльской аварии на территории русской равнины: автореф. дис. ... канд. геогр. наук. – Москва, 2010, 26 с.
10. ГОСТ 17.4.3.01-2017. Охрана природы (ССОП). Почвы. Общие требования к отбору проб. Межгосударственный стандарт. – М.: Стандартинформ, 2018, 9 с.
11. Карпов Ю.А., Савостин А.П. Методы пробоотбора и пробоподготовки. – 3-е изд. (эл). – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015, 246 с.
12. Муминов С.В., Баротов Б.Б., Мирсаидов У. и др. Содержание цезия-137 в почвенном покрове Центрального и Южного Таджикистана. – Радиационная гигиена, 2021, т.14, №2, с.66-71.

М.З.Ахмедов

МИҚДОРИ ИЗОТОПИ СЕЗИЙ-137 ДАР ҚАБАТҲОИ ХОКИ ШИМОЛИ ТОҶИКИСТОН

*Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии Академияи миллии илмҳои
Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаҳои тадқиқоти миқдори Сезий-137 дар қабатҳои хоки Шимоли Тоҷикистон оварда шудаанд. Инчунин консентратсияи изотопҳои қаторҳои уран ва торий (^{40}K , ^{137}Cs , ^{210}Pb , ^{212}Pb , ^{212}Bi , ^{214}Pb , ^{214}Bi , ^{226}Ra , ^{228}Ac , ^{228}Th , ^{235}U , $^{238}\text{U}+\text{dau}$) низ дар ҳок чен карда шудаанд. Вобастагии чамъшавии изотопи Сезий-137 аз самти вазиши шамоли ва релефи минтақаи тадқиқшаванда муайян

карда шудааст. Дар доманаи кӯҳҳо ва хокҳои гилдор назар ба заминҳои ҳамвор ва регдор микдори нисбатан зиёди изотопи Сезий-137 ба назар мерасад.

Калимаҳои калидӣ: рельеф, шамол, хок, намуна, таҳлил, сезий, фаъолнокии хос.

M.Z.Akhmedov

CONTENT OF CAESIUM-137 ISOTOPE IN THE SOIL COVER NORTHERN TAJIKISTAN

*Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety and Security Agency of the National Academy of
Sciences of Tajikistan*

In this article the results of a research of the content of cesium-137 in the soil cover of the northern parts of Tajikistan are presents. The concentration of isotopes of uranium and thorium series (^{40}K , ^{137}Cs , ^{210}Pb , ^{212}Pb , ^{212}Bi , ^{214}Pb , ^{214}Bi , ^{226}Ra , ^{228}Ac , ^{228}Th , ^{235}U , $^{238}\text{U}+\text{dau}$) in soils was also measured. The dependence of the accumulation of the cesium-137 isotope on the direction of the wind rose and the terrain in the study region has been established. At the foot of the mountains and clay soils, there is a relatively high content of the cesium-137 isotope compared to plains and sandy soils.

Key words: *relief, wind, soil, sample, analysis, cesium, specific activity.*

УДК 692.18

Ф.А.Шарифов

ПОВЫШЕНИЕ СВОЙСТВ БИТУМА ИЗВЛЕЧЁННОГО ИЗ СТАРОГО АСФАЛЬТОБЕТОНА, ГУДРОНА РАСТИТЕЛЬНОГО МАСЛА И КОМПЛЕКСНОЙ ДОБАВКИ НА ЕГО ОСНОВЕ

*Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими**(Представлено академиком НАН Таджикистана Д.Х.Халиковым 13.12. 2021г.)*

В работе проведен анализ теоретических аспектов использования старого асфальтобетона в дорожном строительстве. Проведены лабораторные исследования по определению строительных характеристик битума, извлечённого из состава старого асфальтобетона. Разработана технология получения комплексной добавки из вторичных ресурсов производства растительных масел и местного сырья отходов промышленности; добитумная широкая фракция высокосернистой нефти Республики Таджикистан (ДШФВН) и моноэтаноламин (МЭА). Показано положительное влияние комплексной добавки на структуру и физико-механические характеристики исходного битума БНД60/90, битума, извлечённого из состава старого асфальтобетонного гранулята (АГ) и искусственно состаренного исходного битума, именно: прилипание к минеральным материалам, дуктильности, пенетрация и температура размягчения.

Ключевые слова: материал, дуктильность, пенетрация, температура размягчения, моноэтаноламин.

В настоящее время для повышения эффективности дорожного хозяйства, как и народного хозяйства, в целом, важное значения имеет экономичное использование материально-сырьевых ресурсов, поскольку потребность народного хозяйства в сырье непрерывно растет, а добывать его приходится из более отдаленных месторождений.

Одним из направлений экономии сырьевых ресурсов и охраны окружающей среды является повышение уровня использования вторичных ресурсов взамен первичного сырья.

В практике при демонтаже старого асфальтобетонного покрытия получают куски асфальтобетона различных размеров [1], называемых асфальтобетонным ломом. В зависимости от способа дробления и переработки ломов получают асфальтобетонные грануляты. Асфальтобетонные грануляты в настоящее время, как вторичные ресурсы, имеют большой спрос в качестве строительных материалов. Основными их преимуществами являются: прочность к воздействию механических нагрузок, устойчивость к воздействию влаги и перепадам температуры, доступная технология применения, низкая стоимость [2]. Однако их без переработки нецелесообразно принимать в качестве основных материалов для строительства дороги. При эксплуатации на них воздействуют погодноклиматические условия и механические перегрузки от движущихся автотранспортных средств. При этом битум стареет – становится более жестким, повышается его температура размягчения и хрупкости, увеличивается вязкость, уменьшается растяжимость, нарастает содержание асфальтенов [3]. С

Адрес для корреспонденции: Шарифов Фируз Абдулмаджидович. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. акад. Раджабовых, 10, Таджикский технический университет. E-mail: srivakn@mail.ru

этой целью нами проведены исследования восстановления пластификации битума, выделенного из состава старого асфальтобетона и искусственного состаренного битума с применением местных добавок и вяжущих материалов.

Для исследования использовали следующие материалы:

Исходный битум марки БНД60/90, битум после искусственного термотестирования, битум, извлеченный из старого асфальтобетона, в качестве восстанавливающих добавок. Комплексные добавки с применением госсиполовой смолы, моноэтаноламина и добитумной широкой фракции местной нефти республики Таджикистан.

Характеристики битума, извлеченного из состава асфальтового гранулята, определили по методике нормативных ссылок ГОСТ 33140-2014.

Таблица 1

Изменение группового состава битумов в процессе эксплуатации

Срок службы покрытия	Исследуемый слой покрытия	Количество битума в а/б, %	Содержание компонентов битума, %			Коэффициент дисперсности	Коэффициент структурного типа
			Асфальтены	Смолы	Масла		
	на глубине 3.0-5 см	2.35	41.3	24.6	34.1	1.13	1.29

Примечание: а/б – асфальтобетон.

Таблица 2

Изменение физико-механических свойств битумов в процессе эксплуатации

Срок службы покрытия, год.	Исследуемый слой покрытия	Пенетрация, 0.1 мм		Растяжимость, см при 25°C	Температура размягчения, °C	Температура хрупкости, °C
		при 25°C	при 0°C			
6	на глубине 3.0-5 см	29	8	14	63	-12

Данные табл. 1 и 2 показывают, что битум, извлеченный из АГ, имеет незначительные показатели свойств, которые не соответствуют техническим требованиям.

Старение исходного нефтяного битума изучали в интервале технологических и эксплуатационных температур при 160°C, соответствующих технологическим параметрам подготовки битума при приготовлении асфальтобетонных смесей. Были изучены основные показатели битума: границы реологических состояний, температура размягчения, температура хрупкости, растяжимости в сочетании с исследованиями изменения структурного состава, дающего информацию о структурных превращениях вяжущего. Результаты исследования приведены в табл. 3.

Таблица 3

Изменение физико-механических свойств искусственно состаренного битума

Температура °C	Битум БНД 60/90	Пенетрация, 0.1 мм		Растяжимость, см при 25°C	Температура размягчения, °C	Температура хрупкости, °C
		при 25°C	при 0°C			
160	После термотестирования	42	8	38	55	-13
-	Исходный	67	31	80	49	-18

Используя данные работы авторов [4-7], добавки антиоксидантов могли быть полезными для пластификации и омолаживания исследуемого извлеченного и искусственно состаренного битума.

Авторы [4-7] экспериментально доказали, что комплексные добавки на основе гудрона растительных масел являются эффектом улучшения структурных, физико-механических и химических получаемых материалов. Характеристики добавки приведены в табл. 4 и 5.

Госсиполовая смола нерастворима в минерализованной и дистиллированной воде, имеет плотность-0.9-0.95 г/см³, вязкость при 50°C 65-70 Сст, кислотное число 30-80 мг КОН/г. содержание кислот и окси кислот 30-65% [5-8].

Таблица 4

Показатели состава ГС

Показатели	Значение
Кислотное число	70...100мг (миллиграммов) КОН/г*
Растворимость в ацетоне, %	80
Содержание золы, %	1.0
Содержание влаги и летучих веществ, %	до 4

*Кислотное число битума измеряется в мг КОН/г продукта.

Таблица 5

Физико-химическая характеристика ДШФВН

Плотность, г/м ³	0.8672
Преломление, n _d ²⁰	1.4800
S, %	3.95
T _{кипения} , °C	
Начало	120°C
Конец	400°C
Вязкость, ссм	5.9

Добитумная широкая фракция нефтей (ДШФВН) состоит из следующего структурно-группового состава органических соединений серы, масс%: - циклических и насыщенных сульфидов – 75-80%; тиофенов – 20-25%. В целях использования для регенерации и активации старых асфальтовых бетонов, как разжижителей и модификаторов битума и ингибитора старения битума, ДШФВН нуждается в широком изучении [6-8].

Кубовый остаток моноэтаноламиновой очистки аммиака (МЭА) - представляет собой продукт остатка очистки аммиака при производстве аммиака, имеет коричневый цвет с запахом аммиака, имеет плотность 1.05-1.1 г/см³. Смолистые соединения после отгонки моноэтаноламинового раствора. Химический состав: смолистые вещества – 78%, моноэтаполамалин – 2%, вода – 20%. МЭА имеет следующее строение NH₂-CH₂-CH₂-OH (C₂H₂ОН). Смолы моноэтаноламина представляют собой не только поверхностно-активные вещества, но и хелато-комплексобразователи с многовалентными металлами [6-8].

При нагревании ГС с МЭА протекает реакция конденсации с получением амидов и H₂O:



Введение МЭА позволяет снижать вязкость, что улучшает пластичность полученного продукта с водорастворимыми свойствами.

Таким образом, из результатов совместного нагревания ГС и МЭА следует, что продукт нагревания соли RCOO⁻МЭАН⁺ содержит элементы высших карбоновых кислот (RCOOH), амиды жир-

ных кислот (RCONH-R), амины [(NH-CH₂-CH₂)_n], соли аминов (RCOO⁻МЭАН⁺) и сложные эфиры [6-8].

Рабочий раствор комплексной добавки на основе ГС, имея в виду (ГСМЭА+ДШФВН), в лабораторных условиях получили по методике [5-6]. Подогревали ГРМ до 90°C в количестве 40 масс %, добавляли 25 масс %, МЭА и перемешивают в течение 0.5 часа. Затем добавляли 35 масс %, ДШФВН перемешивали их до получения однородной массы [6-8].

Исследование влияния комплексной добавки на основе ГС, (ГСМЭА+ДШФВН) в лабораторных условиях на физико-механические свойства исходного битума, битума состаренного искусственным путем и извлечённого из старого асфальтобетона битума складывалось из определения стандартных характеристик: глубины проникновения иглы, температуры размягчения и растяжимости при 25°C.

Для этого была приготовлена серия составов смеси с разным количеством добавки и испытаны с их разным содержанием. Количество добавок было выбрано, исходя из рекомендаций предыдущих работ [3-8]. Полученные данные приведены в таблице 1.5.

Таблица 6

Физико-механические показатели исходного битума с комплексной добавкой

Наименование показателей	Исходный битум БНД 60/90	Битум с комплексной добавкой, %				
		2	4	6	10	12
Глубина проникания иглы, 0.1 мм при 25%	67	69	79	81	94	108
Температура размягчения, °С	49	50	52	51	48	47
Растяжений, при 25°C	80	80	76	70	58	56

Таблица 7

Физико-механические показатели искусственно состаренного исходного битума с комплексной добавкой

Наименование показателей	Битум после термоя, при 160°C	Битум с комплексной добавкой, %				
		2	4	6	10	12
Глубина проникания иглы, 0.1 мм при 25%	31	68	69	71	74	78
Температура размягчения, °С	62,0	50	50	49	48	47
Растяжение, при 25°C	16	21	30	49	69	66

Таблица 8

Физико-механические показатели битума, извлеченного из АГ с комплексной добавкой

Наименование показателей	Битум извлечённый из АГ	Битум с комплексной добавкой, %				
		2	4	6	10	12
Глубина проникания иглы, 0.1 мм при 25%	29	33	41	47	74	78
Температура размягчения, °С	63	61	59	56	48	47
Растяжение, при 25°C	14	16	20	24	68	56

Как видно из табл. 8, при добавлении в битум, извлеченного из состава старого асфальтобетонного гранулята, в количестве от 2 до 12% комплексной добавки, приводит к изменению показателей характеристик: глубины проникновения иглы, температуры размягчения и растяжимости.

Оставшиеся в битуме добавки в результате окисления и уплотнения защищают битум от старения сравнительно быстро и равномерно формируют устойчивую структуру. Кроме этого, практика и научные опыты показывают, что хорошее сцепление битума с минеральными материалами является определяющим условием получения качественного дорожного композита на его основе. С этой целью нами определено сцепление исследуемого битума с каменным материалом. Результаты исследования приведены в табл. 9.

Таблица 9

Показатели сцепления битума с добавкой

№ п/п	Состав вяжущий	Показатели сцепления битума, % с:			
		известняком	мрамором	гранитом	песком
1	Битум из АГ	21	19	14	16
2	Битум из АГ с добавкой, 2 %	23	21	19	21
3	Битум из АГ с добавкой, 4 %	31	26	21	23
4	Битум из АГ с добавкой, 6 %	40	36	28	30
5	Битум из АГ с добавкой, 10 %	45	43	34	36
6	Битум из АГ с добавкой, 12 %	48	46	42	44

Из результатов, приведённых в табл. 6, следует, что комплексная добавка из ГС+МЭА+ДШФВБ значительно повышает сцепление битума, извлечённого из АГ, и достаточно снижает старение битума.

Доминирующей причиной старения битума является окисление, и оно протекает через промежуточное образование перекисей. Антиокислительные функции комплексных добавок RCOO^- МЭАН содержат высшие карбоновые кислоты (RCOOH), амиды жирных кислот (RCONH-R), амины $[(\text{NH}-\text{CH}_2-\text{CH}_2)_n]$, соли аминов ($\text{RCOO}^- \text{МЭАН}^+$), сложные эфиры [7,8] состоят во взаимодействии их и продуктов их окисления с перекисными радикалами.

В ы в о д ы

Проведенное исследование показало, что при понимании процессов, происходящих в битуме, регулярно занимаясь анализом, подтверждается факт жёсткости смесей с АГ, что приводит к снижению эксплуатационных качеств материалов на их основе. Следует обратить внимание на изменение показателей извлечённого битума с комплексной добавкой.

Эти продукты окисления обогащают битум высокомолекулярными кислотами и другими кислородсодержащими группами. Они, в свою очередь, вступают в химическое взаимодействие с катионами металлов на поверхность минерального сырья и, в результате чего, образуются поверхностно-активные соединения типа мыл. Следовательно, образовавшиеся новые соединения на поверхности раздела обеспечивают прочную связь битума с минеральными материалами.

Поступило 16.12.2021 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лещинский А.В., Жуковский В.В. Экологичная установка для регенерации старого асфальтобетона. – Электронное научное издание, 2018, т.9, № 1, с. 60-63.
2. Майданов Н.В., Шабиллов С.А. Вторичное использование гранулята старого асфальтобетона в составе асфальтобетонных смесей. – Дороги России. 2018, №5 (107), с. 51-54.

3. Умаров С.С., Сайрахмонов Р.Х. Повышение долговечности нефтяных битумов в зависимости от эксплуатационных условий работы в покрытии автомобильных дорог. – Душанбе, 2021, 120 с.
4. Умаров С.С., Сайрахмонов Р.Х., Боймуродов С.Р. Изучение кинетики старения битума в разных погодно-климатических условиях Республики Таджикистан. – Вестник ТНУ, Серия естественных наук. – Душанбе, 2016, №1 (192), с. 205-207.
5. Усманов У.Р., Усманов М.С., Кучаров С.Б., Мирзоев М.Б., Каримов Р. Последствия пленкообразующих ингибиторов коррозии гудрон растительных масел и композиционного состава на его основе. – Вестник национального университета. Серия естественных наук, 2011, вып. 6(70), с.54-59.
6. Усманов Р., Кучаров М.С., Усманов У.Р., Куканиев М.А. Влияние моноэтаноламиновой соли гудрона растительных масел на свойства нестабильных гетерогенных дисперсных систем нефтяного пласта. – Известия АН Республики Таджикистан, 2012, №1 (146), с.78-84.
7. Мухитдинов Ф.М., Оев А.М., Усманов Р., Махкамов К.М. Исследование растворимости битума старого асфальтобетона в добитумной широкой фракции высокосернистой нефти юга Средней Азии. – Труды ТГУ, серия Транспорт и дорожное хозяйство. – Душанбе, 1999, вып. 2, с.51-53.
8. Сайрахмонов Р.Х., Умаров С.С. Повышение адгезионных свойств битумов путем применения комплексной добавки. – Вестник Таджикского национального университета. – Душанбе, 2016, №1(110), с. 58-63.

Ф.А.Шарифов

**БАЛАНД БАРДОШТАНИ ХОСИЯТҲОИ БИТУМИ АЗ АСФАЛТОБЕТОНИ
КӮХНА ГИРФТАШУДА БО ИСТИФОДА АЗ ҚАТРОНИ РАВҒАНИ РАСТАНӢ
ВА ИЛОВАГИҲО ДАР АСОСИ ОН**

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи акад. М.С.Осимӣ

Дар кори маскур таҳлили ҷабҳаҳои назариявии истифодабарии асфальтобетонҳои кӯхна дар сохтмони роҳҳо омӯхта шудааст. Ҳамчунин таҷқиқотҳои озмоишии хосиятҳои битуми аз асфальтобетони кӯхна гирифташуда оварда шудааст. Технологияи истеҳсоли иловагии комплексӣ дар асоси боқимондаҳо аз коркарди пахта, моноэтаноламин ва боқимонда аз коркарди корхонаҳои саноатӣ коркард карда шудааст. Таъсири мусбӣ иловагии комплексӣ ба хосиятҳои физикавӣ-механикии асфальтобетони дар асоси битуми кӯхна омодакардашуда оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: масолах, дуктилност, пенетартсия, ҳарорати мулоимшавӣ, моноэтаноламин.

F.A.Sharifov

**INCREASING THE PROPERTIES OF BITUMEN EXTRACTED FROM OLD
ASPHALT CONCRETE, VEGETABLE OIL GUDRON AND A COMPLEX
ADDITIVE BASED ON IT**

Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi

The paper analyzes the theoretical aspects of the use of old asphalt concrete in road construction. Laboratory studies have been carried out to determine the building characteristics of bitumen extracted from

the old asphalt concrete. A technology has been developed for obtaining a complex additive from secondary resources of the production of vegetable oils and local raw materials of industrial waste; pre-bituminous broad fraction of high-sulfur oil of the Republic of Tajikistan (DSHFVN) and polyethanolamine (MEA). The positive effect of the complex additive on the structure and physical and mechanical characteristics of the original bitumen BND60 / 90, bitumen extracted from the composition of old asphalt concrete granulate (AG) and artificially aged original bitumen, namely: adhesion to mineral materials, ductility, penetration and softening temperature, is shown.

Key words: *material, ductility, penetration, softening point, monoethanolamine.*

УДК 582.26. (584.5)

Академик НАН Таджикистана Х.Х.Хисориев, М.Т.Бобоев, П.А.Курбонова, М.С.Худжаев

**ДОПОЛНЕНИЯ К ФЛОРЕ ДИАТОМОВЫХ ВОДОРΟΣЛЕЙ
(BACILLARIOPHYTA) ВОДОЁМОВ ТАДЖИКИСТАНА***Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана*

В данном сообщении приводятся описания новых флористических находок диатомовых водорослей (Bacillariophyta), обнаруженных в Рогунском водохранилище и в водоёмах его окрестностей. Всего обнаружено 74 вида, разновидностей и формы диатомовых, среди которых 5 видов, 1 разновидность и 1 формы указываются впервые для альгофлоры Таджикистана: *Fragilariforma nitzschoides* (Grunow) Lange-Bertalot, *Diatoma ehrenbergii* Kützing, *Achnantheidium biasolettianum* (Grunow) Lange-Bertalot, *Gyrosigma acuminatum* var. *lacustre* (W.Smith) F.Meister, *Humidophila brekkaensis* (J.B.Petersen) R.L.Lowe, *Sellaphora hustedtii* (Krasske) Lange-Bertalot, *Pinnularia interrupta* forma *minutissima* (Hustedt) Hustedt. Для видов *Navicula cari* Ehrenberg, *Pinnularia fonticola* Hustedt и разновидности *Stauroneis phoenicenteron* var. *signata* F.Meister приводятся новые места нахождения в Таджикистане.

Ключевые слова: альгофлора, дополнения, Bacillariophyta, водоёмы Таджикистана.

Материалом для данной статьи послужили образцы водорослей, собранные нами в весенне-летнем периоде 2021-2022 гг. в Рогунском водохранилище, а также в впадающих в него различные ручьи, родники, заводы и т.д., находящиеся в большом количестве в его окрестностях. Как нами предварительно было сообщено, в этих водоёмах, в общих сложностях было идентифицировано 74 вида, разновидностей и формы диатомовых водорослей [1]. Анализируя весь видовой и внутривидовой состав, с учетом современных таксономических преобразований, принятых для отдела Bacillariophyta, 5 видов, одна разновидность и одна форма отмечаются как новые флористические находки для альгофлоры страны. Эти таксоны следующие: *Fragilariforma nitzschoides*, *Diatoma ehrenbergii*, *Achnantheidium biasolettianum*, *Gyrosigma acuminatum* var. *lacustre*, *Humidophila brekkaensis*, *Sellaphora hustedtii*, *Pinnularia interrupta* forma *minutissima*. Для двух видов и одной разновидности этих водорослей (*Navicula cari*, *Pinnularia fonticola*, *Stauroneis phoenicenteron* var. *signata*) указываются новые места нахождения в Таджикистане. Краткая гидрологическая и физико-химическая характеристика исследованных водоёмов, а также методы сбора альгологических образцов и идентификация диатомовых водорослей приведены нами в предыдущих работах [2,3].

Здесь для названных выше таксонов диатомовых водорослей, приводятся краткая их диагностическая характеристика, местообитания, места обнаружения, а также общее распространение по земному шару (ареал). Перед латинского названия таксона и его синонима (если таковых есть), указывается его систематическая принадлежность к определённому роду, семейству и порядку. Название

Адрес для корреспонденции: Хисориев Хикмат Хисориевич. 734017, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Каримова, 27, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАНТ. E-mail: hhikmat@mail.ru

видовых и внутривидовых таксонов приводятся с учетом современных таксономических преобразований, принятых для отдела Bacillariophyta. Данные о местообитаниях и общее распространение таксонов приводятся на основе литературных данных, приводимых в базу данных (algaebase.org/search/species/Detailed Distribution with Sources [4]).

**Порядок Fragilariales -
Семейство Fragilariaceae**

Род *Fragilariforma* – Фрагиляриформа

1. *Fragilariforma nitzschoides* (Grunow) Lange-Bertalot (= *Fragilaria nitzschoides* Grunow) – Фрагилярияформа ницшевидная.

Клетки линейные, линейно-эллиптические, часто плотно сомкнутые в лентовидные колонии, 15-27 мкм длины, 3 мкм ширины, 17 штрихов в 10 мкм.

Места обитания. Обитает в основном в горных ручьях и на орошаемых скалах, иногда в озерах и водохранилищах. Редкий пресноводный, по отношению к солености - индифферентный вид, β – бета-мезосапроб.

Место обнаружения. Очень редко в заводях ручья Дубеда и в мелководье правого берега водохранилища. Для альгофлоры Таджикистана указывается впервые.

Общее распространение (ареал): Азия: Индия, Монголия, Россия, Таджикистан; Европа: Ирландия, Чехия, Словения, Франция, Нидерланды, Скандинавия; Северная Америка: Алеутские острова, США; Южная Америка: Аргентина (евразийско-американский).

**Порядок Tabellariales
Семейство Tabellariaceae**

Род *Diatoma* - Диатома

2. *Diatoma ehrenbergii* Kützing (= *Diatoma vulgaris* var. *ehrenbergii* (Kützing) Grunow) – Диатома еренберга.

Клетки обычно в колониях в виде зигзаговидных цепочек. Створки линейные, с головчатыми концами, 60-80 мкм длины и 10 мкм ширины.

Места обитания. Широко распространённый в мезотрофных водоёмах вид, но чаще в медленно текущих и сильно заросших водах: на влажных камнях, на высших водных растениях и на талломах многоклеточных зеленых и стрептофитовых водорослей. Пресноводный, индифферентный вид, α – олиго-альфа-мезосапроб.

Места обнаружения. В заводях ручья Дубеда и в мелководье правого берега водохранилища. Для альгофлоры Таджикистана указывается впервые.

Общее распространение (ареал): Азия: Таджикистан; Европа: Германия, Ирландия, Нидерланды, Словения; Северная Америка: США; Южная Америка: Аргентина (евразиатско-американский).

**Порядок Bacillariales
Семейство Bacillariaceae**

Род *Achnantheidium* - Ахнантидиум

3. *Achnantheidium biasoletianum* (Grunow) Lange-Bertalot (= *Achnanthes biasoletiana* Grunow) – Ахнантес биазолетта.

Створки эллиптические, с оттянутыми широкими, тупо закруглёнными концами, 21 мкм длины и 3 мкм ширины, штрихи слегка радиальные, 22 штрихов в 10 мкм.

Места обитания. Экология данного вида слабо изучена. По имеющимся данным этот таксон обнаружен в минеральных источниках Кавказа, а также в различных типах по трофности водоёмов в Европе и России. Индифферентный вид, *о-а* – *олиго-альфа-мезосапроб*.

Место обнаружения. В заводях ручьи Дубеда, однажды в образцах бентоса. Для альгофлоры Таджикистана указывается впервые.

Общее распространение (ареал): Азия: *Индия, Ирак, Таджикистан, Турция, Китай, Тибет, Корея, Непал*; Европа (*почти вся*); Северная Америка: США, Аляска; Южная Америка: *Аргентина, Чили*; Новая Зеландия и Австралия (*космополит*).

П о р я д о к N a v i c u l a l e s

С е м е й с т в о N a v i c u l a c e a e

Род *Navicula* – Навикула

***Navicula cari* Ehrenberg – Навикула кари.**

Створки ланцетные, с сильно суженными и закруглёнными концами, 30 мкм длины и 7 мкм ширины. Штрихи на середине створки радиальные, а концах конвергентные, 13 штрихов в 10 мкм, на середине несколько из них укорочено. Осевое поле линейно-ланцетное, среднее поле слегка расширенное.

Места обитания. Широко распространённый в обрастаниях различного типа пресноводных водоёмов. Индифферентный вид, *о-олигогалоб*.

Место обнаружения. В заводях ручьи Дубеда и побережья Рогунского водохранилища, единично. Для данного таксона указывается новое местонахождение.

Общее распространение (ареал): Азия: *Ирак, Индия, Израиль, Турция, Китай, Корея, Мьянма, Монголия, Россия, Таиланд, Таджикистан*; Европа (*почти вся*); Африка: *Гамбия, Судан, Южная Африка*; Северная Америка: *США, Аляска*; Южная Америка: *Аргентина, Бразилия, Эквадор*; Новая Зеландия и Австралия (*космополит*).

Род *Gyrosigma* – Гиросигма

***Gyrosigma acuminatum* var. *lacustre* (W.Smith) F.Meister – Гиросигма заостренная разновидность - озёрная.**

Створки ланцетные слегка S-образные, с тупыми и широкими концами, 90 мкм длины, 20 мкм ширины, 18 штрихов в 10 мкм.

Места обитания. Разновидность, как и вид широко распространённые в пресноводно-солонатоводных водоёмах. Индифферентный, алкалофильный вид.

Место обнаружения. В бентосе и обрастаниях в ручье Дубеда и побережья Рогунского водохранилища, единично. Для альгофлоры Таджикистана указывается впервые.

Общее распространение (ареал): Азия: *Бангладеш, Таджикистан*; Европа: *Румыния, Ирландия*; Северная Америка: *Мексика (евразийско-американский)*.

С е м е й с т в о D i a d e s m i d a c e a e

Род *Humidophila* – Хумидофила

Humidophila brekkaensis (J.B.Petersen) R.L.Lowe (= *Navicula brekkaensis* Boye P.) – Хумидофила бреккенская.

Створки линейные, посередине расширенные, с широко закруглёнными с слегка головчатыми концами, 17 мкм длины и 2.5 мкм ширины.

Места обитания. Горные ручьи, родники, а также в горячих источниках и щелочных водоёмах. Пресноводный аэрофильный вид, *галофоб*.

Место обнаружения. В бентосе и обрастаниях в ручье Дубеда и в родниках, единично.

Общее распространение (ареал): Азия: *Китай, Таджикистан*; Европа: *Исландия, Англия, Ирландия, Дания, Франция, Германия, Нидерланды*; Африка: *Южная Африка*; Северная Америка: *США (космополит)*.

Семейство Sellaphoraceae

Род *Sellaphora* – Селлафора

Sellaphora hustedtii (Krasske) Lange-Bertalot & Werum (= *Navicula hustedtii* Krasske) – Селлафора густедта.

Створки узко ланцетные или эллиптические с головчатыми концами и округлённым средним полем, 15 мкм длины и 4 мкм ширины. Штрихи радиальные 26 в 10 мкм.

Места обитания. Горные ручьи родники. Пресноводный аэрофильный вид, *индифферент, х-ксеносапроб*.

Место обнаружения. В бентосе и обрастаниях в ручье Дубеда и в родниках, единично.

Общее распространение (ареал): Азия: *Таджикистан, Монголия, Турция, Корея, Сингапур, Россия*; Европа: *Исландия, Ирландия, Франция, Германия, Венгрия, Нидерланды, Балтийское и Черное моря*; Северная Америка: *США*; Южная Америка: *Аргентина*; Новая Зеландия и Австралия (*космополит*).

Семейство 11. Pinnulariaceae

Род *Pinnularia* – Пиннулария

Pinnularia interrupta W.Smith *forma minutissima* (Hustedt) Hustedt – Пиннулария прерванная форма миниатюрная.

Створки широко линейные, иногда со слабо вогнутыми краями и головчатыми концами, 17 мкм длины и 5 мкм ширины. Штрихи на середине створки радиальные и к концам конвергентные, 9 штрихов в 10 мкм.

Места обитания. В бентосе и в грунтах различных пресноводных водоёмов, *индифферент до олигалоба, х-о-олиго-ксеносапроб*.

Место обнаружения. В бентосе и обрастаниях в ручье Дубеда и побережье Рогунского водохранилища, единично.

Общее распространение (ареал): Азия: *Россия (Арктика), Таиланд, Таджикистан*; Европа: *Исландия, Англия, Франция, Ирландия, Испания, Украина, Грузия*; Африка: *Ганна*; Новая Зеландия и Австралия (*космополит*).

Pinnularia fonticola Hustedt – Пиннулария ключевая

Створки линейно-эллиптические, с широкозакруглёнными концами, 85 мкм длины и 15 мкм ширины. Штрихи радиальные, к концам створки конвергентные, 6 в 10 мкм.

Места обитания. В бентосе горных пресноводных водотоках и озёрах, *индифферент, х-о-ксено-олигосапроб*.

Место обнаружения. В бентосе и обрастаниях в ручье Дубеда и побережье Рогунского водохранилища, единично.

Общее распространение (ареал): Азия: *Китай, Таджикистан (азиатский)*.

Семейство *Stauroneidaceae*

Род *Stauroneis* – Ставронеис

Stauroneis phoenicenteron Ehrenberg var. *signata* F.Meister – Ставронеис пурпурный **разновидность отличающийся**

Створки широколанцетные, с отсутствием похожего на типового вида среднего поля, 125 мкм длины и 30 мкм ширины. Штрихи пунктирные, 12 в 10 мкм.

Места обитания. В бентосе разных типов пресноводных водоёмов и в родниках, аэрофит, *индифферент, х-о-ксено-олигосапроб*.

Место обнаружения. В бентосе и обрастаниях в ручье Дубеда и побережье Рогунского водохранилища, единично.

Общее распространение (ареал): Азия: *Россия, Таджикистан (азиатский)*.

Поступило 10.08.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Худжаев М.С., Курбонова П.А., Бобоев М.Т., Хисориев Х. О диатомовых водорослях (Bacillariophyta) Рогунского водохранилища и его окрестностей. – Известия НАНТ, Отделение биологических наук, №3 (218), с. 7-12.
2. Худжаев М. Флористические находки зеленых водорослей (Chlorophyta) из Рогунского водохранилища и его окрестностей. – Доклады НАНТ, 2022, т.65, №5-6, с. 397-401.
3. Курбонова П.А. Дополнения к флоре стрептофитовых водорослей (Streptophyta) водоёмов Таджикистана. – Доклады НАНТ, 2022, т.65, №7-8, с. 397-401.
4. Algae Base.org/search/species/Detailed Distribution with Sources.

Х.Хисориев, М.Т.Бобоев, П.А.Курбонова, М.С.Хучаев

ИЛОВАҶО ДОИРИ ФЛОРАИ ОБСАБЗҶОИ ДИАТОМИИ (BACILLARIOPHYTA) МАВЗЕҶОИ ОБИИ ТОЧИКИСТОН

Институти ботаника, физиология ва генетикаи растании АМИТ

Дар мақола тавсифи бозёфтҳои флоравӣ барои алейгофлорай Тоҷикистон аз обсабзҳои диатомӣ (Bacillariophyta), ки дар обанбори Роғун ва ҳавзаҳои обии гирду атрофи он дарёфт гардидаанд. Дар маҷмӯъ 74 намуд, зернамуд ва шаклҳои диатомаҳо дарёфт гардид, ки дар байни онҳо 5 намуд, 1 зернамуд ва 1 шакл бори аввал барои алейгофлорай Тоҷикистон қайд мегарданд: *Fragilariforma*

nitzschioides (Grunow) Lange-Bertalot, *Diatoma ehrenbergii* Kützing, *Achnantheidium biasolettianum* (Grunow) Lange-Bertalot, *Gyrosigma acuminatum* var. *lacustre* (W.Smith) F.Meister, *Humidophila brekkaensis* (J.B.Petersen) R.L.Lowe, *Sellaphora hustedtii* (Krasske) Lange-Bertalot, *Pinnularia interrupta* forma *minutissima* (Hustedt) Hustedt. Барои намудҳои *Navicula cari* Ehrenberg, *Pinnularia fonticola* Hustedt ва зернамуди *Stauroneis phoenicenteron* var. *signata* F.Meister маскани нави сабзиш дар Тоҷикистон нишон дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: иловаҳо, алгофлора, Bacillariophyta, ҳавзаи оби Тоҷикистон.

H.H.Hisoriev M.T.Boboiev, P.A.Kurbonova, M.S.Khudzhaev

ADDITION DATES TO THE FLORA OF BACILLARIOPHYTA ALGAE OF THE WATER BODIES OF TAJIKISTAN

Institute of Botany, Physiology and Genetics of Plants, National Academy of Sciences of Tajikistan

There are the notes on a new floristic finds of diatom algae (Bacillariophyta), which were found in Rogun reservoir and in a water bodies in around of it. Totally 74 species, 1 subspecies and 1 form of this algae are shown as a new for algaeflora of Tajikistan floristic finds: *Fragilariforma nitzschioides* (Grunow) Lange-Bertalot, *Diatoma ehrenbergii* Kützing, *Achnantheidium biasolettianum* (Grunow) Lange-Bertalot, *Gyrosigma acuminatum* var. *lacustre* (W.Smith) F.Meister, *Humidophila brekkaensis* (J.B.Petersen) R.L.Lowe, *Sellaphora hustedtii* (Krasske) Lange-Bertalot, *Pinnularia interrupta* forma *minutissima* (Hustedt) Hustedt. For species of *Navicula cari* Ehrenberg, *Pinnularia fonticola* Hustedt and subspecies *Stauroneis phoenicenteron* var. *signata* F.Meister are shown as a new distribution places in Tajikistan.

Key words: addition, algaeflora, Bacillariophyta, Tajikistan water bodies.

УДК 589.822

Х.М.Талбонов

О ДВУХ ПОДВИДАХ ОБЫКНОВЕННОГО СКВОРЦА – *STURNUS VULGARIS* (FINSCH, 1901) В ГИССАРСКОЙ ДОЛИНЕ

Институт зоологии и паразитологии им. Е.Н.Павловского НАН Таджикистана

(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана А.С.Саидовым 05.07.2021 г.)

В работе даётся описание двух подвидов обыкновенного скворца: зеленоспинного (бухарского) и сибирского, обитающих на территории Гиссарской долины. Описаны характерные для каждого из подвидов сроки пребывания, биология, питание и миграции.

Ключевые слова: скворец, подвиды, пролетное, гнездящийся, зимовка, Таджикистан, г. Душанбе.

Обыкновенный скворец является типичным представителем орнитофауны Гиссарской долины. Изучением биологии и особенностей географического распределения на подвидовом уровне в прежние годы занимались многие исследователи. Особое внимание уделялось вопросам биологии и экологии [1-3], особенностям миграций [2-7] и зимовке [1,2] этого вида [8-10].

Однако за истекший период изменились условия обитания птиц, в связи с интенсивной урбанизацией, в значительной мере нарушены условия для гнездования птиц и их миграционные пути и в настоящее время возникла необходимость в более глубоком изучении особенностей питания обыкновенного скворца для каждого из двух подвидов, тем более, что численность птиц резко сокращается.

Материалом к настоящему сообщению послужили собственные исследования автора, проведённые в период с 2011 по 2019 гг. в Гиссарской долине.

В республике встречаются два подвида обыкновенного скворца: зеленоспинный (бухарский) скворец – *Sturnus vulgaris dresseri* Buturlin и сибирский скворец – *Sturnus vulgaris poltaratskyi* Finsch.

На территории Таджикистана обитает преимущественно зеленоспинный подвид обыкновенного скворца – *S. vulgaris dresseri* Buturlin, о чем в прошлые годы отмечал И.А.Абдусаломов [1].

Основным отличием сибирского подвида обыкновенного скворца – *S. vulgaris poltaratskyi* Finsch, который читается более редким в Таджикистане, от зеленоспинного скворца – *S. vulgaris dresseri* Buturlin является наличием у него фиолетовой окраски перьев.

Зеленоспинный (бухарский) подвид – в период своего гнездования занимает почти всю территорию Таджикистана на высотах от 400–500 м (долины Вахша, Пянджа) до 1800–2000 м над ур. м. (ур.Октанг, северный склон Туркестанского хребта).

В зоне своего ареала в Гиссарской долине, как отмечает А.И.Иванов, бухарский подвид обыкновенного скворца встречается всюду по кишлакам [2].

Прилетевшие в первой половине апреля птицы сразу занимают гнездовые участки и приступают к строительству гнёзд. Во второй половине этого месяца основная масса приступает к насиживанию.

Адрес для корреспонденции: Талбонов Хурсанд Мирзошоевич. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, п/я 70, Институт зоологии и паразитологии НАНТ. E-mail: talboinov78@mail.ru

ванию яиц. В Гиссарской долине в третьей декаде мая мы наблюдали появление оперившегося поколения птиц.

Как отмечает И.А.Абдусаламов, молодая птица, приступившая к смене птенцового оперения в окончательный наряд, добыта им в Гиссарской долине 8 августа [1].

Скворцы строят гнезда в трещинах, в дуплах фруктовых деревьев, чинар, арчи, под карнизами мечетей и других строительных объектов. Основа гнезда обычно состоит из более или менее грубого материала, из которого строится лоток, состоящий из шерсти, клочьев ваты, растительной ветоши, перьев домашних и диких птиц.

В насиживании и вскармливании птенцов принимает участие преимущественно самка, иногда и самец.

Состав пищи обыкновенного скворца меняется в зависимости от сезона года. В весенне-летний период скворец питается в основном насекомыми (их личинками и куколками), реже – семенами и побегами растений. В период выкармливания птенцов скворцы в массе уничтожают насекомых, преимущественно саранчовых. После вылета птенцов из гнезда до самого их отлета на зимовку, скворцы в Таджикистане питаются и животной пищей, и растительным кормом, причем они часто посещают виноградные и фруктовые сады. Там, где нет таких садов, летят на кормежку в пойменные заросли, где произрастают лох и облепиха. Питается скворец также и созревшими плодами шиповника, иногда в содержимом желудков обнаруживаются зерна пшеницы, ячменя и других культурных растений. Поздней осенью в желудках зимующих особей обнаруживаются жуки, куколки и личинки насекомых, которых они добывают среди опавших листьев, в коре деревьев и других местах. Особую озабоченность у садоводов вызывают стаи скворцов во время созревания винограда. Большие стаи наносят ощутимый ущерб производителям винограда [1].

Гнездование в пределах города очень незначительно. За период исследований в городе Душанбе нами обнаружено лишь два гнезда.

В конце мая – начале июня 2016 года мы наблюдали 4-х особей скворцов, которые отдирали мягкую ткань (камбий) от сухой ветки тутовника и затем несли ее к водонапорной башне (9 км к востоку от г. Душанбе), где внутри трубы они обустроили свое гнездо. За обыкновенным скворцом мы наблюдали 23 июня 2016 г., когда после грозы он собирал червей. В период с 19 по 25 июня 2016 г. вели наблюдение за скворцами, кормящими птенцов. В этот же день между одноэтажными домами, в южной части г. Душанбе наблюдали скворца, собирающего корм в клюв. В центре города 24 июля нами была отмечена самка со слётком, который не мог летать и ещё бегал по земле.

По устному сообщению А.Латифи, он наблюдал в городе оба подвида гнездящихся птиц обыкновенного скворца в течение ряда лет, в конце июня, в дуплах белого тополя.

Подвид Сибирский скворец – *S. vulgaris poltaratskyi*.

Для территории Таджикистана скворец сибирский считается пролетной и зимующей птицей. За последние 20 – 25 лет численность зимующих скворцов резко снизилась от десятков тысяч особей до нескольких тысяч.

В разных частях республики скворцы появляются в разные сроки. Время появления и в особенности количество зимующих птиц находится в полной зависимости от метеорологических усло-

вий зимы. Основная масса пролетных скворцов отмечена в середине октября. В прежние годы, как ранее сообщал А.В.Попов, птиц было много, и он добыл одиночную птицу в Рамите 11 ноября 1956 г. [3].

Часть прилетевших птиц к середине декабря из Центрального Таджикистана откочевывает на юг. Основная масса зимующих сибирских скворцов распространена в Юго-Западном Таджикистане, а на север скворцы поднимаются до Гиссарской долины и предгорий одноименного хребта.

Обратное движение начинается в последней трети февраля и наибольшего размаха достигает в начале марта; к концу марта пролет заканчивается [1, 2].

Во время зимовки, в хорошие дни, можно часто слышать пение скворцов, собирающихся стаями на деревьях в городе для ночевки. Держатся стайками по 50–70 особей. При подлете к местам ночевки стаи могут составлять до 3000 особей. Кормятся преимущественно на земле. По Гиссарской долине птицы часто кормятся на посевах озимых зерновых культур. После снегопада с последующими похолоданиями они обитают в окрестностях населенных пунктов: у скотных дворов, зернохранилищ и мест с кухонными отбросами. В многоснежные холодные зимы зимующие в пределах Таджикистана птицы откочевывают южнее.

С наступлением первых признаков весны сибирские скворцы постепенно сменяются бухарским или зеленоспинным подвидом, который,

прилетая в Таджикистан, начинает рассредоточиваться по местам своего гнездования.

Распределение птиц по сезонам и по биотопам Гиссарской долины является характерным для обоих подвидов скворцов.

Пребывание обыкновенного скворца в Гиссарской долины обусловлено зимовками сибирского подвида с октября по март, когда этот подвид прилетает из северных широт и обустроивается на территории населённых пунктов. К концу марта этот подвид мигрирует в северные широты и практически исчезает из прежних мест. Одновременно с этим прилетает бухарский подвид скворца, который сразу приступает к гнездованию. Незначительное количество его встречаемости в населенных местах, объясняется тем, что он строит гнезда в основном на окраинах и за пределами сёл и городов. В сентябре-октябре этот подвид отлетает в южные широты и его заменяет зимующая популяция сибирского скворца.

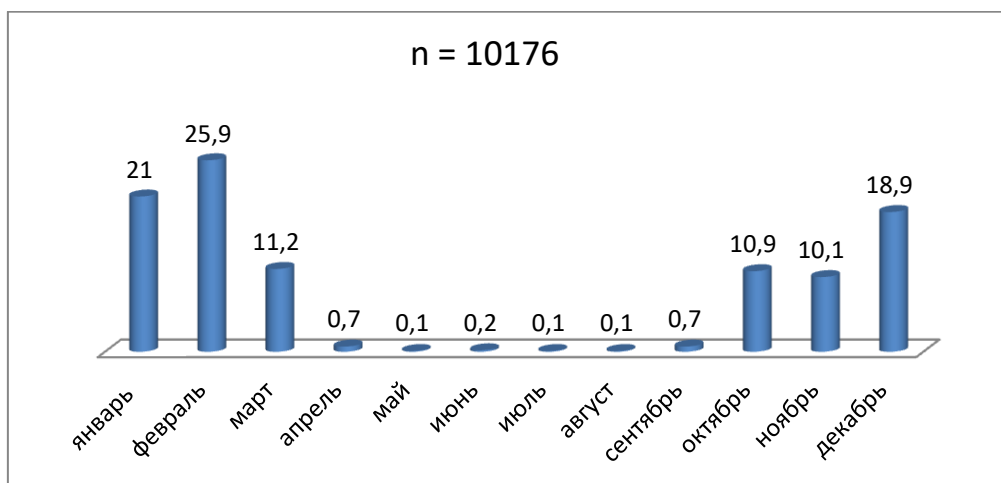


Рис. Динамика численности скворцов в Гиссарской долине (в % от общего числа зарегистрированных птиц).

З а к л ю ч е н и е

Таким образом, в Гиссарском долине обитают два подвида скворца: зеленоспинный (бухарский) скворец – *Sturnus vulgaris dresseri* Buturlin и сибирский скворец – *Sturnus vulgaris poltaratskyi* Finsch. Исследованиями доказано, что каждый из них занимает свою экологическую временную нишу, что позволяет им сосуществовать на одной территории. Зеленоспинный (бухарский) скворец – пребывает здесь в период поздней весны и гнездования, а в начале осени улетает на зимовку. Сибирский скворец – наоборот, прилетает осенью и зимует на территории Гиссарской долины, а ранней весной улетает в места гнездования.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абдусаламов И.А. Фауна Таджикской ССР. Душанбе: Дониш, 1973, т. 19. ч. 2, 403 с.
2. Иванов А.И. Птицы Памиро-Алая. Л.: Наука Ленингр. отд., 1969, 448 с.
3. Попов А.В. Птицы Гиссаро-Каратегина. Сталинабад: Изд-во АН Тадж ССР, 1959, 183 с.
4. Абдусаламов И.А. Миграции птиц в Южном Таджикистане. Душанбе: Дониш, 1986, 210 с.
5. Абдусаламов И.А., Костина О.А., Муратов Р.Ш. Миграция птиц в Центральном и Северном Таджикистане. Душанбе: Дониш, 1986, 156 с.
6. Иванов А.И. Птицы Гиссарской долины и сопредельных районов. Тр. Тадж. базы АН СССР, 1945 а, с. 29-42.
7. Муратов Р.Ш. Дневные миграции птиц на территории Памиро-Алая. Автореф. дис.к.б.н. Новосибирск, 1989, 23 с.
8. Жусупбаева А.А. Птицы города Бишкек (численность, пространство-временная структура и организация г. Бишкек: Автореф. дис.к.б.н. Бишкек, 2013, 22 с.
9. Иванов А.И. Зимовка птиц в низовьях р.Вахш в Южном Таджикистане. Изв. Тадж ССР, филиала АН СССР, 1945, т. 6, 36-59.
10. Иванов А.И. Зимняя орнитофауна окрестностей Сталинабада. Тр. Тадж. филиала АН СССР, 1949 б, т. 19, 49-72.
11. Талбонов Х.М., Хакимов А. Оседлые виды птиц города Душанбе. Материалы респ. научно-теорет. конф. профессор. препод. состава ТНУ, посвященной Международному десятилетию действия «Вода для устойчивого развития, 2018-2028 годы», «Году развития туризма и народных ремесел», «140-ой годовщине со дня рождения Героя Таджикистанан С.Айни» и «70-ой годовщине со дня создания Таджикского национального университета». Душанбе, 2018, 125-126.
12. Талбонов Х.М. Биотопическое распределение и экология птиц города Душанбе: дис... к.б.н. Душанбе, 2019, 57 с.

Х.М.Талбонов

**ДУ ЗЕРНАМУДИ СОЧИ МУҚАРРАҲИ – *STURNUS VULGARIS POLTARATSKYI*
FINSCH, (1901) ДАР ВОДИИ ҲИСОР***Институти зоология ва паразитологияи ба номи Е.Н.Павловский**Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола оид ба биология, мӯҳлати зист, ғизоғирӣ, кӯчиши ду зернамуди сочҳо “сочи муқарраҳи ва сочи пуштсабз”, ки дар ҳудуди водии Ҳисор зист мекунанд маълумот дарҷ гардидааст.

Калимаҳои калидӣ: сочҳо, зернамуд, кӯчишкунанда, лонагузор, зимистонгузарон, Тоҷикистон, ш.Душанбе.

Kh.M.Talbonov

**ABOUT TWO SUBSPECIES OF THE COMMON STARLING – *STURNUS*
VULGARIS POLTARATSKYI FINSCH, (1901) IN THE GISSAR VALLEY***E.N.Pavlovskii Institute of Zoology and Parasitology**National Academy of Sciences of Tajikistan*

The presented work describes two subspecies of the “common and greenback” starling that inhabit the territory of the Gissar valley. The article provides a description of each of them, length of stay, biology, nutrition and migration.

Key words: starlings, subspecies, migratory, nesting, wintering, Tajikistan, Dushanbe.