

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- З.Х.Рахмонов, А.З.Азамов, Н.Н.Назрублов.** Асимптотическая формула в обобщении проблемы Варинга для почти пропорциональных кубов5
- Р.Х.Авезов.** Метод декомпозиции Адомяна и его применение в теории дробных дифференциальных уравнений в частных производных11
- А.Х.Табари, З.Р.Имомов.** О парастрофах квазигруппы Стейна, изотопных абелевой группе20
- Ш.М.Зулфонов.** Решение начально-краевой задачи для телеграфного уравнения28
- М.Ш.Шабозов, Н.О.Гадоев.** О наилучшем линейном методе совместного приближения функций в пространстве Харди $H_{q,\rho}$ ($q \geq 1, 0 < \rho \leq 1$)33
- М.И.Джангибеков.** О задаче наилучшего совместного полиномиального приближения дифференцируемых периодических функций в L_240
- С.Ф.Савлатов.** Об алгебре, порожденной поликern-операторами Бергмана с нечетной характеристикой со сдвигом46

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- М.М.Кабиллов, П.Б.Садриддинов, А.С.Баротов.** Сравнительный анализ основных параметров волны горения пропано-воздушной смеси в двух моделях фильтрационного горения газов56

АСТРОНОМИЯ

- В.В.Бусарев.** Применение многополосной фотометрии для поиска признаков пылевой активности астероидов.....65

ФИЗИКА

- М.А.Кудусов, У.Мадвалиев, А.Р.Мукумов, С.Ф.Абдуллаев.** Анализ влияния естественной пыли на производительность солнечных фотоэлектрических панелей в условиях г. Душанбе.....73

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

- Д.Н.Низомов, И.И.Каландарбеков, И.К.Каландарбеков.** Моделирование задач строительной механики на основе теории подобия80

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Т.Б.Холматов, Д.Х.Мирзоев, Ф.А.Назаров, М.М.Тагоев, У.М.Мирсаидов.** Физико-химические основы разложения алюмосиликатных руд Таджикистана фосфорной кислотой.....89
- А.М.Исоев.** Хлорное разложение алюмосиликатных руд Таджикистана93

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- С.М.Бахронов, М.З.Ахмедов, М.Д.Бобоёров, А.Мирзоев, И.Мирсаидзода.** Термодинамический анализ сернокислотного разложения отходов урановой промышленности на территории «Карта 1-9» г. Бустон.....**97**
- Р.А.Султонов, У.Р.Раджабов, С.Дж.Юсуфи, Г.Ф.Навруззода, И.Х.Юсупов.** Исследование структуры льняных волокон и фиброина натурального шелка методом спиновых меток**103**

БОТАНИКА

- П.А.Курбонова.** О некоторых редких стрептофитовых водорослях (Streptophyta), обнаруженных в Таджикистане**111**

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- Х.А.Абдуллаев, Н.Х.Ойзода, Б.А.Солиева, М.М.Саиднабиев, М.Л.Дадобаева.** О влиянии формы и окраски листа на распределение ассимилятов по органам растений хлопчатника.....**115**

CONTENTS

MATHEMATICS

- Z.Kh.Rakhmonov, A.Z.Azamov, N.N.Nazrubloev.** An asymptotic formula in a generalization of Waring's problem for almost proportional cubes.....5
- R.H.Avezov.** Adomian's decomposition method and its application in the theory of fractional partial differential equation.....11
- A.H.Tabari, Z.R.Imomov.** About parastrophes quasigroup Stein isotope abelian group20
- Sh.M.Zulfonov.** Solution of the initial-boundary problem for the telegraph equation.....28
- M.Sh.Shabozov, N.O.Gadoev.** On the best linear joint method approximations of functions in the Hardy space33
- I.M.Jangibekov.** On the problem of the best joint polynomial approximation of differentiable periodic functions in L_240
- S.F.Savlatov.** On the algebra generated by Bergman polykern operators with odd characteristic with a shift.....46

MATHEMATICAL PHYSICS

- M.M.Kabilov, P.B.Sadriddinov, A.S.Barotov.** Comparative analysis of the main parameters of the combustion wave of a propane-air mixture in two models of filtered gas combustion.....56

ASTRONOMY

- V.V.Busarev.** Application of multiband photometry to search for signs of asteroids dust activity65

PHYSICS

- M.A.Kudusov, U.Madvaliev, A.R.Muqumov, S.F.Abdullaev.** Analysis of the effect of natural dust on the performance of solar photovoltaic panels in the conditions of Dushanbe73

STRUCTURAL MECHANICS

- D.N.Nizomov, I.I.Kalandarbekov, I.K.Kalandarbekov.** Modeling of problems of structural mechanics based on the theory of similarity80

INORGANIC CHEMISTRY

- T.B.Kholmatov, D.Kh.Mirzoev, F.A.Nazarov, M.M.Tagoev, U.M.Mirsaidov.** Physico-chemical bases of decomposition of aluminosilicate ores of Tajikistan with phosphoric acid.....89
- A.M.Isoev.** Chlorine decomposition of aluminosilicate ores in Tajikistan.....93

PHYSICAL CHEMISTRY

- S.M.Bahronov, M.Z.Akhmedov, M.D.Boboyorov, A.Mirzoev, I.Mirsaidzoda.** Thermodynamic analysis of sulfuric acid decomposition of uranium industry waste on the territory “Map 1-9”, Buston.....**97**
- R.A.Sultonov, U.R.Rajabov, S.J.Ysufi, G.F.Navruzzoda, I.Kh.Yusupov.** Study of the linen fibers, and natural lye fibroin by of the spin method.....**103**

BOTANY

- P.A.Kurbonova.** On some rare species of Streptophyta algae, found in Tajikistan.....**111**

PLANT PHYSIOLOGY

- Kh.A.Abdullaev, N.Kh.Oyzoda, B.A.Solieva, M.M.Saidnabiev, M.L.Dadoboeva.** About the influence of the leaf shape and colors on assimilates distribution in cotton.....**115**

УДК 511.325

Специальность: 1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Академик НАН Таджикистана З.Х.Рахмонов, А.З.Азамов, Н.Н.Назрублов

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА В ОБОБЩЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ВАРИНГА ДЛЯ ПОЧТИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ КУБОВ

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

Получена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального N суммой девяти кубов натуральных чисел x_i , $i = \overline{1,9}$, удовлетворяющих условиям

$$|x_i^3 - \mu_i N| \leq H, \quad \mu_1 + \dots + \mu_9 = 1, \quad H \geq N^{1-\frac{1}{30}+\varepsilon},$$

где μ_1, \dots, μ_9 – положительные фиксированные числа, являющиеся уточнением известного английского математика Е.М.Райта.

Ключевые слова: проблема Варинга, почти пропорциональные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма Г.Вейля, малая окрестность центров больших дуг.

Лагранж доказал, что любое натуральное число представимо в виде суммы не более четырёх квадратов натуральных чисел. Обобщая эту теорему, Варинг в 1770 г. сформулировал проблему, которая утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нём базис конечного порядка $G(n)$, то есть каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_r^n = N, \quad (1)$$

где x_1, x_2, \dots, x_r – натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированной величины $G(n)$, называемой порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди.

Проблема Варинга в XIX веке была доказана для отдельных значений n , но реального продвижения на пути к решению этой проблемы удалось добиться только в XX-ом веке. В 1909 г. эту задачу решил Д.Гильберт, тем самым он установил существование функции $G(n)$.

В 1920 г. Харди и Литтлвуд доказали проблему Варинга новым методом. Они ввели функцию $G(n)$ и доказали, что

$$n < G(N) \leq n2^{n-1}h; \lim_{n \rightarrow \infty} h = 1.$$

Адрес для корреспонденции: Рахмонов Зарулло Хусенович, Азамов Аслиддин Замонович, Назрублов Насрулло Нуруллоевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: zarullo_r@mail.ru, asliddinkhon@mail.ru, nasrullo_86@bk.ru

Самым же основным было то, что Харди и Литтлвуд при

$$r > (n - 2)2^{n-1} + 5$$

для числа $J_{n,r}(N)$ представлений числа N в виде (1) находили асимптотическую формулу вида

$$J_{n,r}(N) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \left(\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)\right)^{-1} N^{\frac{r-1}{n}} \mathfrak{S}_{n,r}(N) + O(N^{\frac{r}{n}-1-c(n,r)}),$$

где $\mathfrak{S}_{n,r}(N)$ – некоторый особый ряд, сумма которого, как они показали, превосходит некоторое положительное число $c_{n,r}(N)$.

В 1924 г. И.М.Виноградов [1], применяя к проблеме Варинга свой метод тригонометрических сумм, нашёл асимптотическую формулу Харди и Литтлвуда при

$$r \geq 2[n^2(2 \ln n + \ln \ln n + 3)].$$

В 1934 г. И.М.Виноградову [1] удаётся доказать, что

$$G(n) < n(6 \ln n + 10),$$

далее ему удалось уточнить эту оценку несколько раз, и, наконец, в 1959 г. доказывает следующую оценку

$$G(n) < n(2 \ln n + 4 \ln \ln n + 2 \ln \ln \ln n + 13).$$

А.А.Карацуба [2], применяя к оценке $G(n)$ p -адический метод, нашёл более точную оценку

$$G(n) < n(2 \ln n + 2 \ln \ln n + 12).$$

Вули [3] показал, что

$$G(n) < n \ln n + n \ln \ln n + O(1).$$

Значение $G(n)$ известно всего лишь для $k = 2$ и $k = 4$, то есть $G(2) = 4$, $G(4) = 16$, что, в свою очередь, доказали Лагранж и Давенпорт. Ю.В.Линник [4] показал, что имеет место $G(3) \leq 7$.

В 1934 г. английский математик Е.М.Райт [5] при $n = 3$ и $r = 9$ для числа решений диофантова уравнения (1) с почти пропорциональными слагаемыми, то есть когда

$$|x_i^3 - \mu_i N| \leq N^{1-\theta}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_9 = 1,$$

где μ_1, \dots, μ_9 – положительные фиксированные числа, нашёл асимптотическую формулу при

$$\theta \geq \frac{1}{51} + \varepsilon.$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon \tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Для некоторого η , $\eta < 0,1\tau$ через $\mathfrak{M}(\eta)$ обозначим те числа α , для которых $q \leq \omega$, через $\mathfrak{m}(\eta)$ обозначим оставшиеся α . $\mathfrak{M}(\eta)$ и $\mathfrak{m}(\eta)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

После создания метода тригонометрических сумм И.М.Виноградова вывод асимптотических формул для количества решений в классических аддитивных проблемах, к которым относится проблема Варинга, тернарная проблема Гольдбаха, проблема Варинга-Гольдбаха, проблема Эстермана, сводится к двум следующим задачам:

- исследованию поведения тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T_n(\alpha, x) = \sum_{m \leq x} e(\alpha m^n), S_n(\alpha, x) = \sum_{p \leq x} e(\alpha p^n),$$

в малых окрестностях центра больших дуг $\mathfrak{M}(\eta)$,

- получению нетривиальных оценок этих сумм в малых дугах $\mathfrak{m}(\eta)$.

Вывод асимптотических формул для количества решений в классических аддитивных проблемах становится гораздо труднее, если требовать, что все слагаемые почти пропорциональны или все они почти равны (аддитивная задача с почти пропорциональными слагаемыми при $\mu_1 = \dots = \mu_r$ превращается в задачу с почти равными слагаемыми), так как вместо тригонометрических сумм Г.Вейля $T_n(\alpha, x)$ и $S_k(\alpha, x)$ возникают короткие тригонометрические суммы Г. Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^n), S_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < p \leq x} e(\alpha p^n),$$

причём если $n > 1$, то длина и границы коротких тригонометрических сумм зависят от чисел μ_i , то есть каждой из r слагаемых соответствует своя короткая тригонометрическая сумма, в случае аддитивных задач с почти равными слагаемыми все эти суммы совпадают. Более конкретно решения этих классических аддитивных проблем с почти пропорциональными слагаемыми сводятся к трём следующим задачам:

- исследованию поведения коротких тригонометрических сумм $T_n(\alpha; x, y)$ и $S_n(\alpha; x, y)$ в малых окрестностях центра больших дуг $\mathfrak{M}(\eta)$;
- нахождению нетривиальных оценок этих коротких тригонометрических сумм в больших дугах $\mathfrak{M}(\eta)$, кроме малых окрестностей их центров;
- получению нетривиальных оценок этих сумм в малых дугах $\mathfrak{m}(\eta)$.

Поведения коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_n(\alpha; x, y)$ для фиксированного n в больших дугах было исследовано в работах [6–8]. Воспользовавшись этими результатами в

сочетании с нетривиальными оценками сумм $T_n(\alpha; x, y)$ в малых дугах [9], были доказаны асимптотические формулы для количества решений в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

- проблема Варинга с почти равными слагаемыми в случаях $n = 3, 4, 5$, точнее были найдены [8,10-12], асимптотические формулы для количества решений диофантова уравнения (5), с условиями

$$\left| x_i - \left(\frac{N}{2^n + 1} \right)^{\frac{1}{n}} \right| \leq H, \quad i = 1, \dots, 2^n + 1, \quad H \geq N^{\frac{1}{n} - \theta(n) + \varepsilon};$$

где

$$\theta(3) = \frac{1}{30}, \quad \theta(4) = \frac{1}{108}, \quad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

- обобщение [6,7,13] тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде

$$p_1 + p_2 + m^n = N,$$

при $n = 2, 3, 4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m , с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| m^n - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{1 - \theta(n)} \mathcal{L}^{c_n},$$

соответственно при

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \quad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \quad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

Дальнейшее развитие методов вышеприведённых работ [6-12] позволило доказать теорему Е.М.Райта об асимптотической формуле в обобщении проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов при условии

$$\theta \geq \frac{1}{30} + \varepsilon.$$

Теорема 1. Пусть N – достаточно большое натуральное число, μ_1, \dots, μ_9 – положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию

$$\mu_1 + \dots + \mu_9 = 1,$$

$J_{3,9}(N, H)$ – число представлений N суммой девяти кубов натуральных чисел x_i , с условиями

$$|x_i^3 - \mu_i N| \leq H, \quad i = 1, \dots, 9. \quad (2)$$

Тогда при $H \geq N^{1-\frac{1}{30}+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$J_{3,9}(N, H) = \frac{259723}{44089920} \prod_{k=1}^9 \mu_k^{-\frac{2}{3}} \mathfrak{S}(N) \frac{H^8}{N^6} + O\left(\frac{H^8}{N^6 \mathcal{L}^7}\right),$$

где $\mathfrak{S}(N)$ – особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное.

Поступило 12.01.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Виноградов И.М. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1952.
2. Карацуба А.А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга. – Известия Академии наук СССР. Серия математическая, 1985, т. 49, №5, с. 935-947.
3. Wooley T.D. Large improvements in Waring's problem. – Ann of Math, 1992, v. (2)135, 1, pp. 131-164.
4. Линник Ю.В. О разложении больших чисел на семь кубов. – Доклады Академии наук СССР, 1942, №35, с. 179-180.
5. Wright E.M. Proportionality conditions in Waring's problem. – Mathematische Zeitschrift, 1934, v. 38, pp. 730-746.
6. Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2003, т. 74, вып. 4, с. 564-572.
7. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2014, т. 95, вып. 3, с. 445-456.
8. Рахмонов З.Х., Назрублов Н.Н., Рахимов А.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения. – Чебышевский сборник, 2015, т. 16, в. 1(53), с. 232-247.
9. Рахмонов З. Х., Азамов А.З., Назрублов Н.Н. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малых дугах. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2018, т. 61, №7-8, с. 609-614.
10. Рахмонов З.Х., Мирзоабдугафуров К.И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2008, т. 51, №2, с. 83-86.
11. Рахмонов З. Х., Азамов А.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2011, т. 54, №3, с. 34-42.
12. Рахмонов З.Х., Назрублов Н.Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2014, т. 57, №11-12. с. 823-830.
13. Рахмонов Ф. З., Рахимов А. О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми. – Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. ISSN: 1810-4134, 2016, №8, с. 87-89.

З.Х.Рахмонов, А.З.Азамов, Н.Н.Назрублов

ФОРМУЛАИ АСИМПТОТӢ ДАР МУАММОИ ВАРИНГ БАРОИ КУБҲОИ ҚАРИБ МУТАНОСИБ

Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Барои миқдори тасвирҳои адади кифоя калони натуралии N дар намуди суммаи нӯхто кубҳои ададҳои натуралии x_i , $i = \overline{1,9}$ бо шартҳои

$$|x_i^3 - \mu_i N| \leq H, \quad \mu_1 + \dots + \mu_9 = 1 \quad H \geq N^{1-\frac{1}{30}+\varepsilon},$$

μ_1, \dots, μ_9 – ададҳои мусбати фиксиронидашуда, формулаи асимптотӣ гирифта шудааст, ки натиҷаи маълуми математики англис Е.М.Райтро беҳтар мекунад.

Калимаҳои калидӣ: муаммои Варинг, ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб, суммаи кутӯҳи тригонометрии Г.Вейл, атрофи хурди марказҳои камонҳои калон.

Z.Kh.Rakhmonov, A.Z.Azamov, N.N.Nazrubloev

AN ASYMPTOTIC FORMULA IN A GENERALIZATION OF WARING'S PROBLEM FOR ALMOST PROPORTIONAL CUBES

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan

An asymptotic formula is obtained for the number of representations of a sufficiently large natural N by the sum of nine cubes of natural numbers x_i , $i = \overline{1,9}$ satisfying the conditions

$$|x_i^3 - \mu_i N| \leq H, \quad \mu_1 + \dots + \mu_9 = 1 \quad H \geq N^{1-\frac{1}{30}+\varepsilon},$$

where μ_1, \dots, μ_9 – positive fixed numbers, which are a refinement of the famous English mathematician E.M.Wright.

Key words: Waring's problem, almost proportional summands, H.Weil's short exponential sum, small neighborhood of centers of major arcs.

УДК 511.325

Специальность: 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Р.Х.Авезов

**МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ АДОМЯНА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ
ДРОБНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ***Институт математики им. А. Дзюраева НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Илоловым 08.12.2022 г.)*

В данной статье рассматривается решение нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка с частными производными с использованием метода декомпозиции Адомяна. Найдено решение дробного уравнения Колмогорова-Фишера с помощью метода декомпозиции Адомяна.

Ключевые слова: дифференциальные операторы дробного порядка, многочлен Адомяна, дробное уравнение Колмогорова-Фишера, оператор Лапласа.

1. За последние десятилетия опубликовано большое количество работ, посвященных методу декомпозиции Адомяна (МДА) [1-4]. Данный метод позволяет описать свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения в частных производных и интегральных уравнений [5-8]. МДА находит применение при анализе различных математических моделей физических, биологических и многих других процессов [8-9].

Важным аспектом МДА является то, что он позволяет найти аналитические приближения решений широкого класса нелинейных детерминированных и стохастических дифференциальных и интегральных уравнений помимо их линеаризации, возмущений и дискретизации. Для многих математических моделей, используемых при математическом описании природных явлений, очень важно нахождение аналитических решений нелинейных задач в замкнутой форме.

Настоящая работа посвящена распространению метода декомпозиции Адомяна на случай дробных дифференциальных уравнений в частных производных. Более конкретно, рассматривается начальная задача для уравнения Колмогорова-Фишера с дробным порядком производной по времени.

2. В этом пункте демонстрируются основные идеи МДА применительно к нелинейным уравнениям в частных производных с дробным порядком производной по времени.

Пусть дано уравнение

$${}^C D_t^\alpha [u(x,t)] + R[u(x,t)] + N[u(x,t)] = f(x,t), \quad (1)$$

где ${}^C D_t^\alpha [\cdot]$ – дробный дифференциальный оператор Капуто относительно времени t вида

$${}^C D_t^\alpha [u(x,t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{d}{ds} u(x,s) ds, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2)$$

$R[\cdot]$ – линейный оператор, который в общем случае может содержать частные производные относительно переменной x , $N[\cdot]$ – нелинейный аналитический оператор и $f(x,t)$ – функция внешних сил, не зависящая от $u(x,t)$. Уравнение (1) рассматривается вместе с начальным условием

$$u(x,0) = g(x). \quad (3)$$

В дальнейшем будем считать, что обратный оператор ${}^C D_t^{-\alpha}$ для ${}^C D_t^\alpha$ существует в соответствующем функциональном пространстве. Тогда, применяя к обеим частям уравнения оператор ${}^C D_t^{-\alpha}$, получим

$$u(x,t) = g(x) + {}^C D_t^{-\alpha} f(x,t) - {}^C D_t^{-\alpha} R[u(x,t)] - {}^C D_t^{-\alpha} N[u(x,t)]. \quad (4)$$

Метод декомпозиции Адомяна постулирует существование решения $u(x,t)$ уравнения (4) в виде следующего ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t). \quad (5)$$

Более того, предполагается, что нелинейный член $N[u(x,t)]$ может быть разложен в соответствие с правилом

$$N[u(x,t)] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n), \quad (6)$$

где $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ – полиномы Адомяна, и которые могут быть вычислены по простому правилу [8]

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right) \Big|_{\lambda=0}. \quad (7)$$

После подстановки рядов (5), (6), (7) в уравнение (4) находим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = & g(x) + {}^C D_t^{-\alpha} f(x,t) - {}^C D_t^{-\alpha} R\left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right] - \\ & - {}^C D_t^{-\alpha} N\left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)\right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Из уравнения (8) немедленно вытекают следующие рекуррентные соотношения, которые дают решение уравнения (4) в виде ряда, а именно

$$u_0(x, t) = g(x) + {}^C D_t^{-\alpha} f(x, t), \tag{9}$$

$$u_{k+1}(x, t) = -{}^C D_t^{-\alpha} R[u_k(x, t)] - {}^C D_t^{-\alpha} N[A_k(u_0, u_1, \dots, u_k)], \tag{10}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, приближенное решение уравнения (4) имеет вид

$$u(x, t) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, t),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k(x, t) = u(x, t).$$

Для произвольной нелинейности $N[u(x, t)]$ с учетом (9), (10) полиномы Адомяна могут быть найдены по правилу

$$A_0 = N[u_0], \quad A_1 = u_1 \frac{d}{du_0} N[u_0],$$

$$A_2 = u_2 \frac{d}{du_0} N[u_0] + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} N[u_0],$$

$$A_3 = u_3 \frac{d}{du_0} N[u_0] + u_1 u_2 \frac{d^2}{du_0^2} N[u_0] + \frac{u_1^3}{3!} \frac{d^3}{du_0^3} N[u_0].$$

Данная процедура может быть продолжена до бесконечности. Чем больше число рассматриваемых членов в разложении МДА, тем выше точность вычисления в полуаналитическом решении.

Отметим, что предельный случай $\alpha \rightarrow 1$ рассматривается в работе [10].

3. Трехмерное уравнение Колмогорова-Фишера [10] первого порядка относительно производной по времени имеет важные приложения в физике и биологии. В частности, оно применяется при описании роста раковой опухоли (глиобластома) [11].

Дробное уравнение Фишера-Колмогорова имеет вид

$${}^C D_t^\alpha u(t, x, y, z) = d \Delta u(t, x, y, z) + au(t, x, y, z) \left(1 - \frac{u(t, x, y, z)}{M} \right), \tag{11}$$

где ${}^C D_t^\alpha$ – дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– дифференциальный оператор Лапласа, и a, M, d – постоянные.

Уравнение (11) рассматривается вместе с начальным условием

$$u(0, x, y, z) = u_0(x, y, z). \tag{12}$$

Применение МДА к уравнению (11) общего вида

$${}^C D_t^\alpha u = d\Delta u + F(u), \tag{13}$$

где $F(u) = au\left(1 - \frac{u}{M}\right)$ осуществляется следующим образом. Вводим дробный интегральный оператор ${}^C D_t^{-\alpha}$ вида

$${}^C D_t^{-\alpha} u(t, x, y, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s, x, y, z) ds,$$

применимого к обеим частям уравнения (13) и учитывая (12) формально находим его общее решение

$$u(t, x, y, z) = u_0(x, y, z) + d {}^C D_t^{-\alpha} \Delta u(t, x, y, z) + {}^C D_t^{-\alpha} F(u),$$

или, более подробно,

$$u(t, x, y, z) = u_0(x, y, z) + \frac{d}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \Delta u(s, x, y, z) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(u(s, x, y, z)) ds. \tag{14}$$

В соответствии с МДА будем искать решение уравнения (14) в виде ряда

$$u(t, x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x, y, z). \tag{15}$$

Нелинейному члену $F(u)$ соответствует ряд

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t, x, y, z), \tag{16}$$

где полиномы Адомяна $A_n(t, x, y, z)$ определяются следующим образом

$$A_n(t, x, y, z) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} F(u(\lambda)) \right]_{\lambda=0}, \tag{17}$$

где

$$u(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i.$$

С учетом того, что

$$F(u(\lambda)) = au(\lambda) \left(1 - \frac{u(\lambda)}{M} \right),$$

находим несколько полиномов Адомяна в виде

$$A_0 = F(u_0) = au_0 \left(1 - \frac{u_0}{M} \right),$$

$$A_1 = u_1 F'(u_0) = au_1 \left(1 - \frac{2u_0}{M} \right),$$

$$A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 F''(u_0) = au_2 \left(1 - \frac{2u_0}{M} \right) - \frac{a}{M} u_1^2,$$

$$A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{6} u_1^3 F'''(u_0) = au_3 \left(1 - \frac{2u_0}{M} \right) - \frac{2a}{M} u_1 u_2.$$

Далее, подставляя (15), (16), (17) в уравнение (14), получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x, y, z) &= u_0(x, y, z) + d^C D_t^{-\alpha} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \Delta u_n(t, x, y, z) \right] + \\ &+ d^C D_t^{-\alpha} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t, x, y, z) \right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Приравнивая члены при одинаковых показателях в (18), получим

$$u_0(t, x, y, z) = u_0(x, y, z), \tag{19}$$

$$u_{k+1}(t, x, y, z) = d^C D_t^{-\alpha} [\Delta u_k(t, x, y, z)] + d^C D_t^{-\alpha} [A_k(t, x, y, z)]. \tag{20}$$

Из уравнений (19), (20) находим

$$u_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [d\Delta u_0(s, x, y, z) + A_0(s, x, y, z)] ds,$$

$$u_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [d\Delta u_1(s, x, y, z) + A_1(s, x, y, z)] ds,$$

$$u_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [d\Delta u_2(s, x, y, z) + A_2(s, x, y, z)] ds,$$

.....

$$u_{m+1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [d\Delta u_m(s, x, y, z) + A_m(s, x, y, z)] ds .$$

Итак, приближенное решение дробного уравнения Колмогорова-Фишера может быть записано в виде

$$u(t, x, y, z) = \sum_{i=0}^{m+1} u_i(t, x, y, z).$$

4. Рассмотрим конкретный пример дробного уравнения Колмогорова-Фишера в виде

$${}^C D_t^\alpha u(t, x, y, z) = 2\Delta u(t, x, y, z) + 36u(t, x, y, z)(1 - u(t, x, y, z)), \quad (21)$$

с начальным условием

$$u(0, x, y, z) = \frac{1}{(1 + e^{x+y+z})^2}. \quad (22)$$

С помощью описанной выше процедуры можно получить несколько многочленов в виде

$$A_0 = F(u_0) = 36u_0(1 - u_0) = \frac{36(2e^{x+y+z} + e^{2(x+y+z)})}{(1 + e^{x+y+z})^4},$$

$$u_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [2\Delta u_0(s, x, y, z) + A_0(s, x, y, z)] ds =$$

$$= \frac{60e^{x+y+z}}{(1 + e^{x+y+z})^3} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha.$$

$$A_1 = 36u_1(1 - 2u_0) =$$

$$= \frac{2160e^{x+y+z} (e^{2(x+y+z)} + 2e^{x+y+z} - 1)}{(1 + e^{x+y+z})^5} \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha.$$

$$u_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [2\Delta u_1(s, x, y, z) + A_1(s, x, y, z)] ds =$$

$$= \frac{1800e^{x+y+z} (-1 + 2e^{x+y+z})}{(1 + e^{x+y+z})^4} \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha}.$$

$$A_2 = 36u_2(1 - 2u_0) - 36u_1^2 =$$

$$= \frac{129600e^{4(x+y+z)} + 194400e^{3(x+y+z)} - 259200e^{2(x+y+z)} + 64800e^{x+y+z}}{(1 + e^{x+y+z})^6} \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha}$$

$$- \frac{129600e^{2(x+y+z)}}{(1 + e^{x+y+z})^6} \frac{1}{\Gamma^2(\alpha + 1)} t^{2\alpha}.$$

$$\begin{aligned}
 u_3 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [2\Delta u_2(s, x, y, z) + A_2(s, x, y, z)] ds = \\
 &= \frac{10800e^{x+y+z}}{(1+e^{x+y+z})^5} \left\{ 20e^{2(x+y+z)} - 35e^{x+y+z} + 20 + \frac{9e^{x+y+z} - 15}{(1+e^{x+y+z})} \right\} \frac{1}{\Gamma(3\alpha+1)} t^{3\alpha} - \\
 &\quad - \frac{129600e^{2(x+y+z)}}{(1+e^{x+y+z})^6} \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+1)} t^{3\alpha}.
 \end{aligned}$$

Итак, приближенное решение дробного уравнения Колмогорова-Фишера (21) с условием (22) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
 u(t, x, y, z) &= u_0(t, x, y, z) + u_1(t, x, y, z) + u_2(t, x, y, z) + u_3(t, x, y, z) + \dots = \\
 &= \frac{1}{(1+e^{x+y+z})^2} + \frac{60e^{x+y+z}}{(1+e^{x+y+z})^3} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \\
 &\quad + \frac{1800e^{x+y+z}(-1+2e^{x+y+z})}{(1+e^{x+y+z})^4} \frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \\
 &\quad + \frac{10800e^{x+y+z}}{(1+e^{x+y+z})^5} \left\{ 20e^{2(x+y+z)} - 35e^{x+y+z} + 20 + \frac{9e^{x+y+z} - 15}{(1+e^{x+y+z})} \right\} \frac{1}{\Gamma(3\alpha+1)} t^{3\alpha} - \\
 &\quad - \frac{129600e^{2(x+y+z)}}{(1+e^{x+y+z})^6} \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+1)} t^{3\alpha} + \dots.
 \end{aligned} \tag{23}$$

При $\alpha=1$ функция (23) будет решением классического уравнения Фишера-Колмогорова, а именно

$$\begin{aligned}
 u(t, x, y, z) &= \frac{1}{(1+e^{x+y+z-30t})^2} = \frac{1}{(1+e^{x+y+z})^2} + \frac{60e^{x+y+z}}{(1+e^{x+y+z})^3} \cdot \frac{t}{1!} + \\
 &\quad + \frac{1800e^{x+y+z}(-1+2e^{x+y+z})}{(1+e^{x+y+z})^4} \frac{t^2}{2!} + \\
 &\quad + \frac{54000e^{x+y+z}(4e^{2(x+y+z)} - 7e^{x+y+z} + 1)}{(1+e^{x+y+z})^5} \frac{t^3}{3!} + \dots.
 \end{aligned}$$

Поступило 26.12.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Adomian G. Fisher-Kolmogorov Equation. – Appl. Math. Lett., 1995, v. 8, № 2, pp. 51-52.
2. Atta U., Kamol Sh., Rahmat A.Kh., Series form solution to two dimensional heat equation of fractional order. – Peer Reviewed Scientific Journal, 2019, v. 4, pp. 193-199.
3. Fazal H., Kamal Sh., Asaf Kh., Muhammad Sh., Ghaus R. Numerical Solution of Fractional Order Epidemic Model of a Vector Borne Disease by Laplace Adomian Decomposition Method. – Punjab University, Journal of Mathematics, 2017, v. 49, №2, pp. 13-22.
4. Mustafa I., Mohammad P. H., Mehmet A. A., Yu-Ming Ch. New numerical solutions of fractional-order Korteweg-de Vries equation. – Results in Physics, 2020, v. 19, pp.103-326.
5. Ilolov M., Kuchakshoev Kh.S., Guljonov D.N. Dynamical behavior of Kolmogorov – Petrovsky-Piskunov equation with fractal memory. – International Congress of Mathematicians, Seoul, 2014, 362 p.
6. Shah K., Khalil H., Kha R.A. Analytical Solutions of Fractional Order Diffusion Equations by Natural Transform Method. – Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A, 2018, v. 42, №3, pp. 1479-1490.
7. Muhammad I., Abbas M., Atiq U.R. Analytic solution to Benjamin-Bona-Mahony equation by using laplace Adomian decomposition method. Matrix Science Mathematic (MSMK), 2019, v. 3, №1, pp. 3-18.
8. Илолов М., Авезов Р.Х. Аналитическое решение уравнения Бенджамина – Бона – Махони – Бюргерса. – Современные проблемы теории чисел и математического анализа. Материалы международной конференции доктора физико-математических наук, профессора Додождона Исмоилова. Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана. Душанбе, 2022, с. 91-92.
9. Adomian G. A review of the decomposition method in applied mathematics. – Journal of Mathematical Analysis and Application, 1988, v. 135, №4, pp. 501-544.
10. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002, 432 с.
11. Mahmoud M., El-Borai, Wagdy G., El-Sayed, Adham M. Jawad. Adomian Decomposition Method for solving Fractional Differential Equations. – IRJET, 2015, v.02, № 06, pp. 296-306.

Р.Х.АВЕЗОВ

**МЕТОДИ ЧУДОКУНИИ АДОМЯН ВА ТАТБИҚИ ОН ДАР НАЗАРИЯИ
МУОДИЛАҲОИ КАСРИИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО ҲОСИЛАҲОИ ХУСУСӢ**

Институти математика ба номи А. Ҷураеви АМИТ

Дар мақолаи мазкур ҳалли муодилаҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби касрӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ бо усули чудокунии Адомян баррасӣ мешавад. Ҳалли муодилаи касрии Колмогоров-Фишер бо усули чудокунии Адомян пайдо карда мешавад.

Калимаҳои калидӣ: операторҳои дифференсиалии тартиби касрӣ, бисёрраъзогии Адомян, муодилаи касрии Колмогоров-Фишер, оператори Лаплас.

R.H.Avezov

**ADOMIAN'S DECOMPOSITION METHOD AND ITS APPLICATION IN THE
THEORY OF FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION***A.Juraev Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Tajikistan*

This article discusses the solution of non-linear differential equation of fractional order with partial derivatives using the Adomian decomposition method. A solution to the fractional Kolmogorov-Fisher equation is found using Adomian decomposition method.

Key words: *differential operators of fractional order, Adomian polynomial, Kolmogorov-Fisher fractional equation, Laplace operator.*

УДК 512.548

Специальность: 1.1.6 – Вычислительная математика

Член-корреспондент НАН Таджикистана А.Х.Табари, З.Р.Имомов*

О ПАРАСТРОФАХ КВАЗИГРУППЫ СТЕЙНА, ИЗОТОПНЫХ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

Институт математики им. А.Джусураева НАН Таджикистана,

*Кулябский государственный университет им. А.Рудаки

В статье доказано, что правая часть квазигруппы Стейна и парастрофы квазигруппы Стейна изотопны абелевой группе. Кроме того, доказано, что правые квазигруппы Стейна с дополнительными условиями являются левыми квазигруппами Бола, медиальными квазигруппами и дистрибутивными квазигруппами.

Ключевые слова: парастрофа, левая квазигруппа Бола, медиальная квазигруппа, дистрибутивная квазигруппа, левая квазигруппа Стейна, правая квазигруппа Стейна, изотопия.

В теории квазигрупп важную роль играют лупы (петли), то есть квазигруппы с нейтральным элементом. В классе квазигрупп, удовлетворяющих определенным аксиомам, нет явной аксиомы существования нейтрального элемента. Однако существуют классы квазигрупп, в которых если квазигруппа этого класса имеет нейтральный элемент, то квазигруппа является группой или имеет только один элемент. В.Д.Белоусов имел дело с такими классами квазигрупп, некоторые из них он описал в своей монографии [1].

Определение 1 [2]. Квазигруппа (Q, A) или (Q, \cdot) называется левой квазигруппой Стейна, если для $\forall x, y \in Q$ в (Q, A) или (Q, \cdot) выполняется тождество

$$A(x A(x, y)) = A(y, x) \text{ или } x \cdot (x \cdot y) = y \cdot x. \quad (1)$$

Определение 2 [2]. Квазигруппа (Q, A) или (Q, \cdot) называется правой квазигруппой Стейна, если для $\forall x, y \in Q$ в (Q, A) или (Q, \cdot) выполняется тождество

$$A(A(y, x)x) = A(x, y) \text{ или } (y \cdot x) \cdot x = x \cdot y. \quad (2)$$

Определение 3 [2]. Квазигруппа (Q, A) или (Q, \cdot) называется квазигруппой Стейна, если для $\forall x, y \in Q$ в (Q, A) или (Q, \cdot) выполняются тождества (1) и (2).

Пусть (Q, A) квазигруппа Стейна, тогда её парастрофы можно представить в виде:

Адрес для корреспонденции: Табари Абдулло Хабибулло. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАН Таджикистана. E-mail: tabarov2010@mail.com;
Имомов Зафархон Раджабалиевич. 735360, Республика Таджикистан, г. Куляб, ул. С.Сафарова, 16, Кулябский государственный университет. E-mail: zafarjon.m89@mail.ru

$$(Q, A^{-1}) = (x \cdot (x \cdot y)) \cdot y = x, \quad (3)$$

$$(Q, {}^{-1}A) = x \cdot (y \cdot (y \cdot x)) = y \cdot x, \quad (4)$$

$$(Q, {}^{-1}(A^{-1})) = ((x \cdot y) \cdot y) \cdot x = x \cdot y, \quad (5)$$

$$(Q, ({}^{-1}A)^{-1}) = y \cdot ((y \cdot x) \cdot x) = x, \quad (6)$$

$$(Q, ({}^{-1}A)^{-1}) = (y \cdot x) \cdot x = x \cdot y. \quad (7)$$

Предложение 1 [3]. Любая левая квазигруппа Стейна идемпотентна: $(x^2 = x)$.

Следствие 1. Любая парастрофа квазигруппы Стейна вида (3), (4), (5), (6) и (7) идемпотентна: $(x^2 = x)$.

Доказательство. Пусть в равенстве (3) $x = y$, тогда получаем $(x \cdot (x \cdot x)) \cdot x = x$, $(x \cdot x^2) \cdot x = x$, $(x \cdot x) \cdot x = x$, $x^2 \cdot x = x$, $x^2 \cdot x = x$, $x \cdot x = x$, откуда следует

$$x^2 = x, \quad (8)$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать для парастрофы квазигруппы Стейна вида: (4), (5), (6) и (7).

Следствие 2. Если в $(Q, {}^{-1}A)$ обратима слева ${}^{-1}x \cdot (y \cdot (y \cdot x)) = y \cdot x \cdot {}^{-1}x$, то (Q, A^{-1}) - единичная группа.

Теорема 1. Если квазигруппа (Q, A^{-1}) изотонна группе $(Q, +)$ и выполняются следующие условия $R_a^2 + R_a L_b R_a = \varepsilon$, $R_a L_b = J$ и $J y = -y$, где R_a, L_b - автоморфизм группы $(Q, +)$ и

$$x \cdot y = R_a x + L_b y, \quad (9)$$

тогда группа $(Q, +)$ является абелевой.

Доказательство. Из $(x \cdot (x \cdot y)) \cdot y = x$ и равенства (9) следует

$$R_a(R_a(x) + L_b(R_a(x) + L_b(y))) + L_b(y) = x,$$

откуда получаем

$$R_a^2(x) + R_a L_b(R_a(x) + L_b(y)) = J L_b(y) + x. \quad (10)$$

Положим в равенстве (10) $x = 0$, где 0 - нулевой элемент группы $(Q, +)$, то из (10) следует

$$R_a L_b^2(y) = J L_b(y), \Rightarrow R_a L_b(y) = J(y) \text{ или } R_a L_b = J.$$

Теперь в равенстве (10), подставляя $y = 0$, получаем следующие равенства

$$R_a^2(x) + R_a L_b(R_a(x)) = x \text{ или } R_a^2 + R_a L_b R_a = \varepsilon.$$

Равенство (10) принимает вид $x + J y = J y + x$. В последнем равенстве, заменяя $y \rightarrow J y$, получим $x + y = y + x$. Значит, $(Q, +)$ – абелева группа.

Обратно. Пусть $(Q, +)$ – абелевая группа, где

$$R_a^2(x) + R_a L_b(R_a(x)) = x \text{ и } R_a L_b(y) = J(y), J y = -y.$$

Справедливость тождества (3) проверяется непосредственно

$$\begin{aligned} (x \cdot (x \cdot y)) \cdot y &= R_a(R_a(x) + L_b(R_a(x) + L_b(y))) + L_b(y) = \\ &= R_a^2(x) + R_a L_b R_a(x) + J L_b(y) + L_b(y) = x + J y + y = x. \end{aligned}$$

Следствие 3. Если квазигруппы (4), (5), (6) и (7) изотопны группе $(Q, +)$, где изотопия имеет вид (9), R_a, L_b – автоморфизм группы $(Q, +)$, то группа $(Q, +)$ является абелевой, если выполняются следующие условия:

- 1) $(Q, {}^{-1}A) = x \cdot (y \cdot (y \cdot x)) = y \cdot x, L_b R_a + J L_b = J L_b^2, R_a = J L_b^3 + R_a$ и $J(y) = -y$;
- 2) $(Q, {}^{-1}(A^{-1})) = ((x \cdot y) \cdot y) \cdot x = x \cdot y, R_a^2 L_b + R_a L_b = L_b, L_b + J L_b = J R_a^3$ и $J(y) = -y$;
- 3) $(Q, ({}^{-1}A)^{-1}) = y \cdot ((y \cdot x) \cdot x) = x, L_b R_a L_b + L_b^2 = \varepsilon, L_b R_a^2 = J R_a$, и $J(y) = -y$;
- 4) $(Q, ({}^{-1}A)^{-1}) = (y \cdot x) \cdot x = x \cdot y, R_a^2 = L_b^2, R_a^2 L_b + L_b = R_a$, и $J y = -y$.

Теорема 2. Если квазигруппа $(Q, {}^{-1}A): x \cdot (y \cdot (y \cdot x)) = y \cdot x$ изотопна абелевой группе $(Q, +)$, то для любого $b \in Q$ существует изоморфная группа $(Q, \oplus) \cong (Q, +)$, что $x \cdot y = J L_b(x) + L_b(y) + b, \forall x, y \in Q$, где $J: Q \rightarrow Q, J(x) = -x, \forall x \in Q$.

Доказательство. Пусть квазигруппа $(Q, {}^{-1}A): x \cdot (y \cdot (y \cdot x)) = y \cdot x$ изотопна абелевой группе. Тогда для любых $a, b \in Q$

$$x + y = R_a^{-1}(x) \cdot L_b^{-1}(y), \forall x, y \in Q \tag{11}$$

также является абелевой группой, где $b \cdot a = 0, 0$ – нулевой элемент группы $(Q, +)$. Согласно (9) получаем

$$R_a(x) + L_b(R_a(y) + L_b(R_a(y) + L_b(x))) = R_a(y) + L_b(x).$$

Теперь, произведя подстановки $y \rightarrow R_a^{-1}(y), x \rightarrow L_a^{-1}(x)$, получаем

$$L_b(y + L_b(y + x)) = R_a^{-1}(y) + L_a^{-1}(x) + J R_a L_b^{-1}(x). \tag{12}$$

Полагая в (12) $y = 0$, находим

$$L_b^2(x) = b + L_a^{-1}(x) + J R_a L_b^{-1}(x) \Rightarrow L_b^3(x) = b + x + J R_a(x).$$

Следствие 4. Любая квазигруппа (Q, A^{-1}) имеет правую единицу e , где $x \cdot e = x$ для любого $x \in Q$.

Теорема 3. Если квазигруппа (Q, A^{-1}) изотопна группе $(Q, +)$ вида

$$x \cdot y = x + L_b^{-1}y, \tag{13}$$

где L_b – автоморфизм группы $(Q, +)$, тогда группа $(Q, +)$ является абелевой, при выполнении следующих условий $L_b(y) = J(y)$, $L_b(x) = \varepsilon$ и $Jy = -y$.

Доказательство. Из $(x \cdot (x \cdot y)) \cdot y = x$ и равенства (13) следует, что $(x + L_b(x + L_b(y))) + L_b(y) = x$, откуда имеем

$$x + L_b(x + L_b(y)) = JL_b(y) + x. \tag{14}$$

Полагая в (14) $x = 0$, где 0 – нулевой элемент в группе $(Q, +)$, находим

$$L_b^2(y) = JL_b(y), \Rightarrow L_b(y) = J(y) \text{ или } L_b = J.$$

Теперь в (14), полагая $y = 0$, получаем

$$x + L_b(x) = x \text{ или } L_b(x) = \varepsilon.$$

Тогда равенство (14) принимает вид: $x + Jy = Jy + x$. В последнем равенстве, заменяя $y \rightarrow Jy$, получим $x + y = y + x$. Значит, $(Q, +)$ – абелева группа.

Обратно. Пусть $(Q, +)$ – абелева группа, где $x + L_b(x) = x$ и $L_b(y) = J(y)$, $Jy = -y$. Справедливость тождества (3) проверяется непосредственно

$$(x \cdot (x \cdot y)) \cdot y = x + L_b(x + L_b(y)) + L_b(y) = x + L_b(x) + L_b^2(y) + L_b(y) = x + \varepsilon + y + Jy = x.$$

Следствие 5. Если квазигруппа $(Q, {}^{-1}(A^{-1})) = ((x \cdot y) \cdot y) \cdot x = x \cdot y$ изотопна группе $(Q, +)$, и имеет вид (13), где L_b – автоморфизм группы $(Q, +)$, то группа $(Q, +)$ является абелевой, при выполнении условий:

$$L_b(y) = J(y), L_b(x) = \varepsilon \text{ и } Jy = -y.$$

Доказательство. Пусть $(Q, {}^{-1}(A^{-1}))$ квазигруппа вида $((x \cdot y) \cdot y) \cdot x = x \cdot y$ и $x \cdot y = x + L_b^{-1}y$ изотопна группе $(Q, +)$, тогда получаем

$$(L_b(x + L_b y) + L_b y) + L_b x = x + L_b y. \tag{15}$$

Положим в (15) $x = 0$, где 0 – нулевой элемент группы $(Q, +)$, то из (15) следует выполнение условий

$$(L_b(L_b(y)) + L_b y) = L_b y \quad L_b^2(y) + L_b(y) = L_b(y) \text{ или } L_b^2 + L_b = L_b.$$

Теперь в (15), полагая $y = 0$, получим

$$L_b(x) + L_b(x) = x, \text{ или } L_b + L_b = e.$$

Равенство (15) принимает вид $x + y = y + x$. Значит, $(Q, +)$ – абелева группа.

Следствие 6. Если квазигруппы (4), (6) и (7) изотопны группе $(Q, +)$ и имеют вид (13), где L_b – автоморфизм группы $(Q, +)$, то группа $(Q, +)$ является абелевой, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) $(Q, {}^{-1}A) = x \cdot (y \cdot (y \cdot x)) = y \cdot x, JL_b^3 + L_b = \varepsilon, L_b + L_b^2 = \varepsilon$, где $J(y) = -y$;
- 2) $(Q, ({}^{-1}A)^{-1}) = y \cdot ((y \cdot x) \cdot x) = x, L_b^2 + L_b^2 = \varepsilon, L_b = J$, где $J(y) = -y$;
- 3) $(Q, ({}^{-1}A)^{-1}) = (y \cdot x) \cdot x = x \cdot y, L_b = \varepsilon, L_b + L_b = \varepsilon$, где $J y = -y$.

Следствие 7. Если правая квазигруппа Стейна (Q, \cdot) обратима справа $((y \cdot x) \cdot x^{-1} = y)$, то (Q, \cdot) – единичная группа.

Следствие 8. Если в любой правой квазигруппе Стейна (Q, \cdot) имеет место равенство $R_x L_x = L_x R_x$, тогда в (Q, \cdot) выполняется следующее тождество $((y \cdot x) \cdot x) \cdot x = (x \cdot y) \cdot x$.

Доказательство. Пусть (Q, \cdot) правая квазигруппа Стейна $(y \cdot x) \cdot x = x \cdot y$, умножая справа на x : $((y \cdot x) \cdot x) \cdot x = (x \cdot y) \cdot x$, тогда на основании (2) получаем

$$(x \cdot y) \cdot x = (y \cdot x) \cdot x, R_x L_x = L_x R_x. \tag{16}$$

Теорема 4. Если правая квазигруппа Стейна (Q, \cdot) является левой квазигруппой Бола $x \cdot (y \cdot (x \cdot t)) = R_x^{-1}(x \cdot (y \cdot x)) \cdot t$, тогда (Q, \cdot) будет левой дистрибутивной квазигруппой и изотопна левой лупе Бола (Q, \circ) , при условии:

$$x \circ y = R_a^{-1} x \cdot L_a^{-1} y \text{ и } (x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}.$$

Доказательство. Пусть (Q, \cdot) является левой квазигруппой Бола

$$x \cdot (y \cdot (x \cdot t)) = R_x^{-1}(x \cdot (y \cdot x)) \cdot t.$$

На основании (16) и теоремы 4 [5] получим

$$x \cdot (y \cdot (x \cdot t)) = R_x^{-1}(x \cdot (y \cdot x)) \cdot t = (x \cdot y) \cdot t.$$

Полагая $y = x$, из последнего равенства получаем $x \cdot (x \cdot (x \cdot t)) = (x \cdot x) \cdot t = xt$, откуда

$$x \cdot (x \cdot t) = t, \quad L_x^2 = \varepsilon, \quad L_x = L_x^{-1}. \quad (17)$$

В равенстве $x \cdot (y \cdot (x \cdot t)) = (y \cdot x) \cdot t$, подставляя $t \rightarrow xt$ и, имея в виду (17), получим

$$x \cdot (y \cdot t) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot t). \quad (18)$$

Тогда (Q, \cdot) является левой дистрибутивной квазигруппой. Из (18) следует $L_x(y \cdot t) = L_x(y) \cdot L_x(t)$, то есть L_x – автоморфизм квазигруппы (Q, \cdot) .

Теперь докажем, что (Q, \cdot) изотопна левой лупе Бола (Q, \circ) , при условии: $x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}y$ и $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$, откуда

$$x \cdot y = R_a x \circ L_a y. \quad (19)$$

Известно, что (Q, \circ) – левая лупа Бола [6]. Осталось доказать, что $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$, где $x^{-1} \circ x = e = a$, e – единица лупы (Q, \circ) . Докажем, что имеет место $L_a = J$, где $x^{-1} = xJ$, L_a – автоморфизм лупы (Q, \circ) . Из (16) получим $R_x L_x = L_x R_x$, $\forall(x) \in Q$. Из (17) и (19) следует

$$R_a x \circ L_a (R_a x \circ L_a t) = t \text{ или } x \circ L_a (x \circ L_a t) = t. \quad (20)$$

Ясно, что L_a – автоморфизм квазигруппы (Q, \cdot) , тогда на основании (19), (17) и (16) получим $L_a(R_a x \circ L_a y) = L_a R_a x \circ L_a^2 y = L_a R_a x \circ y$, то есть

$$L_a(x \circ y) = L_a x \circ L_a y, \quad (21)$$

тогда из (21) следует, что L_a – автоморфизм лупы (Q, \circ) .

На основании (20), (21) и (16) получаем $x \circ (L_a x \circ L_a^2 t) = t$, то есть

$$x \circ (L_a x \circ t) = t. \quad (22)$$

Подставляя в (22) $t = e$, $x \circ L_a x = e$ и, заменяя $x \rightarrow L_a x$, получим $L_a x \circ L_a^2 x = e$, $L_a x \circ x = e$, откуда $L_a = J$, где $J = x^{-1}$.

Следствие 9. Пусть (Q, \cdot) – любая правая квазигруппа Стейна, для которой выполняется левая квазигруппа Бола $x \cdot (y \cdot (x \cdot t)) = R_x^{-1}(x \cdot (y \cdot x)) \cdot t$. Тогда $\forall(x, y) \in Q$ имеет место

$$x \cdot (y \cdot x) = y \cdot (x \cdot y). \quad (23)$$

Следствие 10. Пусть (Q, \cdot) – любая квазигруппа Стейна, для которой выполняется левая (правая) квазигруппа Бола $x \cdot (y \cdot (x \cdot t)) = R_x^{-1}(x \cdot (y \cdot x)) \cdot t$, $((t \cdot x) \cdot y) \cdot x = t \cdot L_x^{-1}((x \cdot y) \cdot x)$. Тогда $\forall (x, y) \in Q$ имеет место

$$x \cdot (y \cdot x) = y \cdot (x \cdot y) \quad ((x \cdot y) \cdot x = (y \cdot x) \cdot y).$$

Теорема 5. Пусть в правой квазигруппе Стейна (Q, \cdot) , в которой выполняется левой квазигруппой Бола $x \cdot (y \cdot (x \cdot t)) = R_x^{-1}(x \cdot (y \cdot x)) \cdot t = (x \cdot y) \cdot t$, (Q, \cdot) – изотопна абелевой группе $(Q, +)$, тогда (Q, \cdot) – медиальная квазигруппа.

Доказательство. Из [6] следует, что, если лупа (Q, \circ) изотопная квазигруппе (Q, \cdot) , где изотопия $x \circ y = R_a^{-1} \cdot L_a^{-1}$ является абелевой группой, то (Q, \cdot) – дистрибутивная квазигруппа и R_a, L_a автоморфизмы квазигруппы (Q, \cdot) , то в группе $(Q, +)$ $R_a L_a = L_a R_a$. Тогда можно доказать (Q, \cdot) медиальную квазигруппу. Из $x \circ (x \circ t) = (x \circ y) \circ t$ следует

$$R_a^{-1}x \cdot L_a^{-1}(R_a^{-1}x \circ L_a^{-1}t) = R_a^{-1}(R_a^{-1}x \circ L_a^{-1}y) \circ L_a^{-1}t. \tag{24}$$

Из (24) получаем:

$$(x \cdot a) \cdot (y \cdot t) = (x \cdot y) \cdot (a \cdot t), \tag{25}$$

Тогда $(Q, +)$ – абелева группа, то по теореме Алберта [7] любая лупа (Q, \circ) , изотопная квазигруппе (Q, \cdot) , является абелевой группой $(Q, +)$. Из (25) следует, что a – любой элемент квазигруппы (Q, \cdot) . Тогда (Q, \cdot) – медиальная квазигруппа.

Аналогично в квазигруппе Стейна (Q, \cdot) , в которой выполняется левая (правая) квазигруппа Бола и (Q, \cdot) изотопная абелевой группе $(Q, +)$, тогда и только тогда (Q, \cdot) – медиальная квазигруппа.

Следствие 11. Пусть (Q, \cdot) правая квазигруппа Стейна и изотопна группе $(Q, +)$, при условии: $x \cdot y = R_a x + L_a y$, где R_a, L_a – автоморфизмы группы $(Q, +)$, тогда группа $(Q, +)$ – абелева.

Теорема 6. Пусть лупа (Q, \circ) , изотопна правой квазигруппе Стейна (Q, \cdot) , которая является абелевой группой $(Q, +)$, при условии $x \cdot y = R_a x + L_a y$, где R_a, L_a – автоморфизмы группы $(Q, +)$ и автоморфизмы квазигруппы (Q, \cdot) . Тогда (Q, \cdot) – дистрибутивная и медиальная квазигруппа.

Поступило 23.12.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. – М.: Наука, 1967, 225 с.

2. Мовсисян Ю.М., Давидов С.С. Алгебры, близкие к квазигруппам. – М.: ЛЕНАНД, 2018, 408 с.
3. Shcherbacov V.A. Elements of Quasigroup Theory and Applications. – Moldova, 2017 540 p.
4. Белоусов В.Д. Элементы теории квазигрупп. Учебное пособие по спецкурсу. – Кишиневский государственный университет, 1981, 95 с.
5. Флория И.А., Кройтор Н.Н. Квазигруппы Бола, исследования по общей алгебре. – Кишинев, Издательство АНМССР, 1965, с. 136-154.
6. Флория И.А. Связь левотранзитивных квазигрупп с квазигруппами Бола, сети и квазигруппы. – Кишинев: Штеница, 1976, с. 203-216.
7. Albert A.A. Quasigroups. I, Trans. – Amer. Math. Soc, 1943, vol. 54, p. 507-519.
8. Toyoda K. On axioms of linear functions. – Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1941, vol. 17, pp. 221-227.

А.Х.Табари, З.Р.Имомов*

ДАР БОРАИ ПАРАСТРОФҶОИ КВАЗИГУРҶҶИ СТЕЙН, КИ БО ГУРУҶИ АБЕЛӢ ИЗОТОПИАНД

Институти математикаи ба номи А. Ҷураеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

**Донишгоҳи давлатии Кӯлоб ба номи А.Рӯдакӣ*

Дар мақола исбот шудааст, ки квазигурӯҳи тарафи рости Стейн ва парастрофҳои квазигурӯҳи Стейн дар кадом ҳолат бо гурӯҳи абелӣ изотопӣ мебошанд. Ғайр аз ин исбот шудааст, ки квазигурӯҳи тарафи рости Стейн бо шартҳои иловагӣ квазигурӯҳи тарафи чапи Бол, квазигурӯҳи медиалӣ ва квазигурӯҳи дистрибутивӣ мебошад.

Калимаҳои калидӣ: *парастроф, квазигурӯҳи чапи Бол, квазигурӯҳи медиалӣ, квазигурӯҳи дистрибутивӣ, квазигурӯҳи чапи Стейн, квазигурӯҳи рости Стейн, изотопия.*

A.H.Tabari, Z.R.Imomov*

ABOUT PARASTROPHES QUASIGROUP STEIN ISOTOPE ABELIAN GROUP

A.D.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan,

**Kulob State University named after A.Rudaki*

It is proved in the article that the right-hand side of the Stein quasigroup and the parastrophe of the Stein quasigroup are isotopic to the Abelian group. Moreover, it is proved that right Stein quasigroups with additional conditions are left Bol quasigroups, medial quasigroups and distributive quasigroups.

Key words: *parastrophe, left Bol quasigroup, medial quasigroup, distributive quasigroup, left Stein quasigroup, right Stein quasigroup, isotopy.*

УДК 511.5

Специальность: 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Ш.М.Зулфонов

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО
УРАВНЕНИЯ*Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Илоловым 04.01.2023 г.)*

Методом операционного исчисления найдено аналитическое решение начально-краевой задачи для дифференциального телеграфного уравнения

Ключевые слова: начально-краевые условия задачи, аналитическое решение, преобразование Лапласа-Карсона, дифференциальное телеграфное уравнение.

Рассмотрим телеграфное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t), \quad (1)$$

решение которого удовлетворяет начальным

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad t > 0; \quad u'_x(0, t) = \varphi_2(t), \quad t > 0 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x > 0; \quad u'_t(x, 0) = u_1(x), \quad x > 0. \quad (3)$$

В [1] найдено решение задачи (1) - (3) при $\alpha = 0$; $\beta = c^2$, $c - const$; $f(t) = 0$, в [2] найдено решение задачи (1) - (3) при $\alpha = 0$, $\beta = -q(x; t)$.

Мы рассматриваем решение задачи (1), (2) и (3) при $\alpha \geq 0$ и $\beta = \frac{\alpha^2}{4} \geq 0$ с помощью преобразования Лапласа-Карсона.

Функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $f(t)$ – известные, а $u(x, t)$ – неизвестная функция.

Предполагается, что все эти функции являются оригиналами по переменным x и t .

Пусть (см. [3])

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x) &\rightarrow U_0(p), \quad u(0, t) = \varphi_1(t) \rightarrow \Phi_1(q), \\ u'_x(0, t) = \varphi_2(t) &\rightarrow \Phi_2(q), \quad u'_t(x, 0) = u_1(x) \rightarrow U_1(p), \end{aligned}$$

Адрес для корреспонденции: Зулфонов Шахриер Мулозулфонович. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121, ТГПУ. E-mail: zulfonov.shakhrier@mail.ru

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &\Rightarrow U(p,q), \quad f(t) \rightarrow F(q), \\
 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &\Rightarrow p^2 [U(p,q) - \Phi_1(q)] - p\Phi_2(q); \\
 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &\Rightarrow q^2 [U(p,q) - U_0(p)] - qU_1(p); \\
 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &\Rightarrow q [U(p,q) - U_0(p)].
 \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), получим уравнение для изображений

$$U(p,q) = \frac{(q^2 + \alpha q)U_0(p) + qU_1(p) - p^2\Phi_1(q) - p\Phi_2(q) + F(q)}{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - p^2}, \tag{5}$$

где знаменатель имеет следующие корни: $p_{1,2} = \pm \left(q + \frac{\alpha}{2}\right)$.

Второй корень нас не интересует, так как при достаточно больших $\text{Re} q$ не лежит в области сходимости интеграла Лапласа-Карсона. Однако первый корень $p = q + \frac{\alpha}{2}$ лежит в указанной области. Следовательно, числитель в правой части (5) должен иметь корень $p = q + \frac{\alpha}{2}$ без чего функция $U(p,q)$ перестала быть аналитической функцией при

$$\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = p^2.$$

Поэтому справедливо равенство

$$\Phi_2(q) = \frac{q^2 + \alpha q}{q + \frac{\alpha}{2}} U_0\left(q + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{q}{q + \frac{\alpha}{2}} U_1\left(q + \frac{\alpha}{2}\right) - \left(q + \frac{\alpha}{2}\right) \Phi_1(q) + \frac{F(q)}{q + \frac{\alpha}{2}}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$U(p,q) = \left\{ \frac{q^2 + \alpha q}{q + \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right) U_0(p) - p U_0\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)}{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - p^2} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \frac{q}{q + \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)U_1(p) - pU_1\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)}{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - p^2} \right\} + \\
 & + \left\{ \frac{\left(\left(q + \frac{\alpha}{2}\right) - p\right)F(q)}{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - p^2\right)} \right\} + \left\{ \frac{p\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)\Phi_1(q)\left(\left(q + \frac{\alpha}{2}\right) - p\right)}{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - p^2\right)} \right\}. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Преобразование Лапласа-Карсона имеет важные свойства линейности и единственности, которые позволяют вычислить обратные преобразования для каждого из четырех слагаемых в (7) в отдельности.

Далее приводим следующие изображения, необходимые в дальнейшем:

$$\int_0^{\min(x,t)} e^{-a_1s} f(x-s, t-s) ds \Rightarrow \frac{F(p, q)}{p + q + a_1}; \tag{8}$$

$$\int_0^{\min(x,t)t-s} \int_0^{\min(x,t)t-s} a(t-s-\tau) f(x-s; \tau) e^{-a_1s} ds d\tau \Rightarrow \frac{A(q)F(p; q)}{q(p + q + a_1)}. \tag{9}$$

С учётом формул (8) и (9) получим изображения

$$\int_0^{\min(x,t)t-s} \int_0^{\min(x,t)t-s} a(t-s-\tau) u_1(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)} ds d\tau \Rightarrow \frac{A(q)}{q+b} \cdot \frac{pU_1(q+b) - (q+b)U_1(p)}{p^2 - (q+b)^2}; \tag{10}$$

$$\frac{q}{q + \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)U_1(p) - pU_1\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)}{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - p^2} \Leftarrow \int_0^{\min(x,t)} e^{-\frac{\alpha}{2}t} u_1(x+t-2s) ds. \tag{11}$$

Изображения (10), (11) позволяют найти функции оригинала для всех четырёх слагаемых в формуле (7):

$$\begin{aligned}
 & 1) \left\{ \frac{q^2 + \alpha q}{q + \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)U_0(p) - pU_0\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)}{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - p^2} \right\} \Leftarrow \\
 & \int_0^{\min(x,t)t-s} \int_0^{\min(x,t)t-s} \delta'(t-s-\tau) u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)} ds d\tau +
 \end{aligned}$$

$$+\alpha \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau) u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)} dsd\tau; \quad (12)$$

$$2) \left\{ \frac{q}{q+\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)U_1(p)-pU_1\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2} \right\} \Leftarrow \int_0^{\min(x,t)} e^{-\frac{\alpha}{2}t} u_1(x+t-2s) ds; \quad (13)$$

$$3) \left\{ \frac{p\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\Phi_1(q)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)-p\right)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2\right)} \right\} \Leftarrow e^{-\frac{\alpha}{2}x} \varphi_1(t-x); \quad (14)$$

$$4) \left\{ \frac{\left(q+\frac{\alpha}{2}-p\right)F(q)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2\right)} \right\} \Leftarrow \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-\tau)} h(x-s) f(\tau) dsd\tau. \quad (15)$$

Таким образом, представление решения задачи (1), (2), (3) с учетом формул (12), (13), (14) и (15) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta'(t-s-\tau) u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)} dsd\tau + \\ & +\alpha \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau) u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)} dsd\tau + \\ & + \int_0^{\min(x,t)} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot u_1(x+t-2s) ds + \\ & + e^{-\frac{\alpha}{2}x} \varphi_1(t-x) + \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-\tau)} h(x-s) f(\tau) dsd\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

где $h(t); t \geq 0$ – функция Хевисайда и $\delta(t)$ – функция Дирака.

Поступило 05.01.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Моисеев Е.И. О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением. – Доклады Академии наук, 2002, т. 387, №5, с. 600-603

2. Абдулкаримов М.Ф. О разрешимости одной задачи граничного управления для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом из класса L_2 . – Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича, (Таджикистан. Душанбе, 24-25 июня 2022 г.), с 191-192.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. – М., 1958, 179 с
4. Зулфонов Ш.М. Применение преобразования Лапласа-Карсона к решению начально-краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений. – Доклады НАНТ, т. 64, № 3-4, 135-141 с.

Ш.М.Зулфонов

ҲАЛЛИ МУОДИЛАИ ТЕЛЕГРАФ БО ШАРТҲОИ ИБТИДОӢ ВА КАНОРӢ

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Дар мақолаи мазкур ёфтани ҳалли муодилаи телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канорӣ бо истифода аз тадбири усули ҳисоби оператсионӣ нишон дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: шартҳои ибтидоӣ ва канорӣ масъала, ҳалли аналитикӣ, табдилоти Лаплас-Карсон, муодилаи дифференсиалии телеграф.

Sh.M.Zulfonov

SOLUTION OF THE INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR THE TELEGRAPH EQUATION

Tajik State Pedagogical University named after S. Aini

The method of operational calculation is used to find an analytical solution of the initial-boundary conditions of the problem for the differential telegraph equation.

Key words: initial-boundary conditions of the problem, analytical solution, Laplace-Carson transformation, differential telegraph equation.

УДК 517.5

Специальность 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Академик НАН Таджикистана М.Ш.Шабозов, Н.О.Гадов

О НАИЛУЧШЕМ ЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ СОВМЕСТНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ $H_{q,\rho}$ ($q \geq 1, 0 < \rho \leq 1$)

Таджикский национальный университет

В пространстве Харди $H_{q,\rho}$ ($q \geq 1, 0 < \rho \leq 1$) найден наилучший линейный метод совместного приближения функций и их производных $f^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, r$) класса функций $W^{(r)}H_q$ ($r \in \mathbb{Z}_+, q \geq 1$), у которых $\|f^{(r)}\|_{H_q} \leq 1$.

Ключевые слова: наилучший линейный метод, совместное приближение функций и их производных, пространство Харди.

Введём необходимые обозначения и понятия. Пусть $U_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$, где $0 < \rho \leq 1, U_1 := U$, $A(U_\rho)$ – множество функций, аналитических в круге U_ρ ; $H_q := H_q(U)$, $q \geq 1$ – пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U)$, для которых

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} M_q(\rho, f),$$

где

$$M_q(\rho, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right\}^{1/q}.$$

Известно [1, с.279], что норма функции $f \in H_q$ реализуется на её угловых граничных значениях $f(e^{it})$, которые существуют почти для всех $t \in [0, 2\pi)$. Полагаем

$$H_{q,\rho} := \{f \in A(U_\rho) : \|f(z)\|_{q,\rho} := \|f(\rho z)\|_q < \infty, H_{q,1} \equiv H_q\}$$

и для $r \in \mathbb{N}$ введем обозначение

$$H_q^{(r)} := \left\{ f \in A(U) : f^{(r)} \in H_q \right\}, \quad f^{(r)}(z) = \frac{d^r f(z)}{dz^r}.$$

Каждой функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in A(U)$$

сопоставим посредством произвольной треугольной матрицы чисел $\Lambda := \{\lambda_{k,n}\}$ последовательность полиномов

$$V_{\Lambda,n}(f, z) = \sum_{k=0}^n \lambda_{k,n} c_k z^k.$$

Величина

$$\mathcal{E}_n(f, \Lambda)_{H_{q,\rho}} := \|f(z) - V_{\Lambda,n}(f, z)\|_{H_{q,\rho}}$$

характеризует скорость приближения функций $f(z)$ полиномами $V_{\Lambda,n}(f)$ в метрике $H_{q,\rho}$, или, что то же самое, линейным методом Λ . Наилучшим линейным методом приближения на классе $\mathfrak{M} \subset H_{q,\rho}$ называется треугольная матрица $\Lambda^* = \{\lambda_{k,n}^*\}$, такая, что

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}, \Lambda^*)_{H_{q,\rho}} := \inf_{\Lambda} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_n(f, \Lambda)_{H_{q,\rho}} = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_n(f, \Lambda^*)_{H_{q,\rho}}.$$

Обозначим через $W^{(r)}H_q$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $W^{(0)}H_q \equiv H_q$, $q \geq 1$) – класс функций $f \in H_q^{(r)}$, у которых $\|f^{(r)}\|_q \leq 1$. Введём обозначение

$$\alpha_{n,r} := n(n-1) \cdots (n-r+1), \quad n \geq r, \quad \alpha_{n,0} = 1, \quad \alpha_{n,1} = n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+.$$

В работах К.И.Бабенко [2] ($q = \infty$) и Л.В.Тайкова [3] (случай $q \geq 1$) при любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq r$ и $0 < \rho \leq 1$ доказано, что

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}H_q, \Lambda^*)_{H_{q,\rho}} = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} := \frac{\rho^n}{n(n-1) \cdots (n-r+1)}, \tag{1}$$

где наилучшая треугольная матрица имеет вид

$$\Lambda^* := \{\lambda_{k,n}^*\} = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \dots, r-1; \\ 1 - \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \cdot \rho^{2(n-k)}, & k = r, r+1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Для некоторых других классов функций и других пространств аналитических функций наилучшие линейные методы найдены, например, в работах [4, 5] (см. также приведенную в них литературу).

Хорошо известно [6], что для произвольной функции $f \in H_q^{(r)}$, $q \geq 1$, наравне с функцией f и ее производной r -го порядка $f^{(r)}$, пространству H_q , $q \geq 1$, также принадлежит

последовательность промежуточных производных $f^{(s)}(z) = 1, 2, \dots, r-1$ и так как $V_{\Lambda, n}^{(s)}(f, z) = V_{\Lambda, n-s}(f^{(s)}, z)$ ($s = 0, 1, \dots, r; V_{\Lambda, n}^{(0)}(f, z) \equiv V_{\Lambda, n}(f, z)$), то имеет смысл найти величину

$$\mathcal{E}_{n-s}(f^{(s)}, \Lambda)_{H_{q, \rho}} := \|f^{(s)} - V_{\Lambda_{(s)}, n-s}(f^{(s)})\|_{H_{q, \rho}},$$

которая характеризует скорость приближения функции f и её последовательность производных $f^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, r$) линейным методом $\Lambda_{(s)} := \{\lambda_{k, n, s}\}$ в пространстве $H_{q, \rho}$.

Наилучшим линейным методом совместного приближения на классе $\mathfrak{M} \subset H_{q, \rho}$ называется треугольная матрица $\Lambda_{(s)}^* := \{\lambda_{k, n, s}^*\}$, такая, что

$$\mathcal{E}_{n-s}(\mathfrak{M}, \Lambda_{(s)}^*)_{H_{q, \rho}} = \inf_{\Lambda_{(s)}} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_{n-s}(f, \Lambda_{(s)})_{H_{q, \rho}} = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_{n-s}(f, \Lambda_{(s)}^*)_{H_{q, \rho}}.$$

В следующей теореме дадим обобщение равенства (1) для случая совместного приближения, когда \mathfrak{M} есть класс функций $W^{(r)}H_q$ ($q \geq 1$).

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $q \geq 1, 0 < \rho \leq 1$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}H_q, \Lambda_{(s)}^*)_{H_{q, \rho}} = \frac{\rho^{n-s}}{(n-s)(n-s-1) \cdots (n-r+1)}, \tag{2}$$

где $\Lambda_{(s)}^*$ есть треугольная матрица с элементами

$$\lambda_{k, n-1, s}^* := \begin{cases} 1; & k = s, s+1, \dots, r-1; \\ 1 - \frac{\alpha_{2n-k, s} \cdot \alpha_{k, r}}{\alpha_{2n-k, r} \cdot \alpha_{k, s}} \cdot \rho^{2(n-k)}; & k = r, r+1, \dots, n-1, \end{cases} \tag{3}$$

а наилучший линейный метод совместного приближения имеет вид

$$V_{\Lambda_{(s)}, n-s-1}^*(f, z) = \sum_{k=s}^{r-1} \alpha_{k, s} c_k(f) z^{k-s} + \sum_{k=r}^{n-1} \alpha_{k, s} \left(1 - \frac{\alpha_{2n-k, s} \cdot \alpha_{k, r}}{\alpha_{2n-k, r} \cdot \alpha_{k, s}} \rho^{2(n-k)} \right) c_k(f) z^{k-s}.$$

Доказательство. Выражая коэффициенты Тейлора по формуле Коши

$$c_k(f) := \frac{\alpha_{k, r}^{-1}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^r f^{(r)}(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta, \quad (k \geq r),$$

повторив схему рассуждений работы [4], для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q$ после некоторых простых преобразований получаем

$$\begin{aligned}
 & f^{(s)}(z) - V_{\Lambda, n-s-1}(f^{(s)}, z) = \\
 &= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s} c_k(f) z^{k-s} - \sum_{k=s}^{n-1} (1 - \lambda_{k, n-1, s}) \alpha_{k,s} c_k(f) z^{k-s} = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} f^{(r)}(\zeta) \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \zeta^{r-k} \cdot z^{k-s} + \sum_{k=s}^{n-1} (1 - \lambda_{k, n-1, s}) \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \zeta^{r-k} \cdot z^{k-s} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} = \\
 &= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^{n-r} f^{(r)}(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^{k-n} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=s}^{n-1} (1 - \lambda_{k, n-1, s}) \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^{k-n} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Так как первые r коэффициенты в рядах Тейлора функций класса $W^{(r)}H_q$ произвольны, то будем рассматривать только треугольные матрицы $\Lambda_{(s)} = \{\lambda_{k, n-1, s}\}$, у которых $\lambda_{k, n-1, s}$ определены равенством (3). Подставляя указанные значения $\lambda_{k, n-1, s}^*$ во вторую сумму внутри интеграла (4), с учетом аналитичности f , в круге U получаем

$$\begin{aligned}
 & f^{(s)}(z) - V_{\Lambda_{(s)}^*, n-s-1}(f^{(s)}, z) = \\
 &= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^{n-r} f^{(r)}(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^{k-n} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=r}^{n-1} \frac{\alpha_{2n-k,s}}{\alpha_{2n-k,r}} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^{n-k} \left| \frac{z}{\zeta} \right|^{2(n-k)} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} = \\
 &= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^{n-r} f^{(r)}(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \cdot \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-r} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}} \right)^k + \sum_{k=n-r+1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}} \right)^k \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} = \\
 &= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^{n-r} f^{(r)}(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+r,s}} \left[\left(\frac{z}{\zeta} \right)^k + \left(\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}} \right)^k \right] \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} = \\
 &= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^{n-r} f^{(r)}(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Полагая в равенстве (5) $z = \rho e^{it}$, $0 < \rho \leq 1$, $\zeta = e^{i\theta}$, будем иметь

$$f^{(s)}(\rho e^{it}) - V_{\Lambda_{(s)}^*, n-s-1}(f^{(s)}, \rho e^{it}) = \frac{\rho^{n-s} e^{i(r-s)t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-r)\theta} f^{(r)}(e^{i(t-\theta)}) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \cos k\theta \right\} d\theta. \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что числовая последовательность $\left\{ \rho^k \cdot \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \right\}$ является выпуклой вниз и ее общий член стремится к нулю (см., напр. [7, с.251-252]). Но тогда в силу теоремы 1.5 монографии [8, с.294] функция

$$\Phi_{\rho}(\theta) := \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \rho^k \cos k\theta$$

является неотрицательной и интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$ функцией. При этом

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{\rho}(\theta) d\theta = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} := \frac{1}{(n-s)(n-s-1) \cdots (n-r+1)}. \quad (7)$$

Из равенства (7) следует, что

$$\begin{aligned} & \| f^{(s)} - V_{\Lambda_{(s)}^*, n-s-1}(f^{(s)}) \|_{q, \rho} = \| f^{(s)}(\rho e^{i(\cdot)}) - V_{\Lambda_{(s)}^*, n-s-1}(f^{(s)}, \rho e^{i(\cdot)}) \|_q = \\ & = \rho^{n-s} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-r)\theta} f^{(r)}(e^{i(t-\theta)}) \Phi_{\rho}(\theta) d\theta \right|^q dt \right)^{1/q} \leq \\ & \leq \rho^{n-s} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(e^{i(t-\theta)})| \cdot |\Phi_{\rho}(\theta)| d\theta \right)^q dt \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (8)$$

Применяя обобщённое неравенство Минковского к правой части неравенства (8) с учетом равенства (7) для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q$ получаем

$$\begin{aligned} & \| f^{(s)} - V_{\Lambda_{(s)}^*, n-s-1}(f^{(s)}) \|_{q, \rho} \leq \\ & \leq \rho^{n-s} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(e^{it})|^q dt \right)^{1/q} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi_{\rho}(\theta)| d\theta \right) \leq \\ & \leq \rho^{n-s} \| f^{(r)} \|_q \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \leq \rho^{n-s} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} = \frac{\rho^{n-s}}{(n-s)(n-s-1) \cdots (n-r+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует оценка сверху величины, стоящей в левой части (2):

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}H_q, \Lambda^*)_{H_{q,\rho}} \leq \frac{\rho^{n-s}}{(n-s)(n-s-1)\cdots(n-r+1)}. \tag{9}$$

Для получения соответствующей оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \frac{z^n}{\alpha_{n,r}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad n > r,$$

которая, как легко проверить, принадлежит классу $W^{(r)}H_q$. Для этой функции при любой матрице

чисел $V_{\Lambda_{(s)}, n-s-1}(f_0^{(s)}) \equiv 0$ ($s = 1, 2, \dots, r-1$) и, поскольку $f_0^{(s)}(z) := \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot z^{n-s}$, то мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}H_q, \Lambda_{(s)}^*)_{q,\rho} &\geq \|f_0^{(s)} - V_{\Lambda_{(s)}, n-s-1}^*(f_0^{(s)})\|_{q,\rho} = \\ &= \|f_0^{(s)}\|_{q,\rho} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \rho^{n-s} = \frac{\rho^{n-s}}{(n-s)(n-s-1)\cdots(n-r-1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Требуемое равенство (2) получаем из сопоставлении оценки сверху (9) с оценкой снизу (10), чем и завершаем доказательство теоремы.

Поступило 04.01.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.Л., Наука, 1940.
2. Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций. – Известия АН СССР. Серия математическая, 1958, т.22, с.631-640.
3. Тайков Л.В. О наилучших линейных методах приближения классов \mathcal{B}^r и \mathcal{H}^r . – Успехи матем. наук, 1963, т.18, №4, с.183-189.
4. Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций. Теория отображений и приближение функций. – Киев: ИМ АН УССР, 1983.
5. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге. – Матем. сб., 2010, т.201, №8, с.3-22.
6. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации. – Укр. матем. журнал, 2011, т.63, №12, с.1579-1601.
7. Pinkus A. *n*-Widths in Approximation Theory. – Berlin. Heidelberg. New York. Tokyo. Springer-Verlag, 1985.
8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965.

М.Ш.Шабозов, Н.О.Гадоев

ДАР БОРАИ БЕҲТАРИН УСУЛИ НАЗДИККУНИИ ЯҚҶОЯИ ХАТТИИ ФУНКСИЯҶО ДАР ФАЗОИ ХАРДИ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар фазои Харди $H_{q,\rho}$ ($q \geq 1, 0 < \rho \leq 1$) беҳтарин усули хаттии наздиккунии яқҷояи функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо $f^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, r$) аз синфи функсияи $W^{(r)}H_q$ ($r \in \mathbb{Z}_+, q \geq 1$) ки, барои он $\|f^{(r)}\|_{H_q} \leq 1$.

Калимаҳои калидӣ: *беҳтарин усули хатӣ, наздиккунии яқҷояи функсияҳо ва онҳо ҳосилаҳои, фазои Харди.*

M.Sh.Shabozov, N.O.Gadoev

ON THE BEST LINEAR JOINT METHOD APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS IN THE HARDY SPACE

Tajik National University

In the Hardy space $H_{q,\rho}$ ($q \geq 1, 0 < \rho \leq 1$) best linear method of joint approximation of functions and their derivatives $f^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, r$) of the function class $W^{(r)}H_q$ ($r \in \mathbb{Z}_+, q \geq 1$) for which $\|f^{(r)}\|_{H_q} \leq 1$.

Key words: *best linear method, joint approximation of functions and their derivatives, Hardy space.*

УДК 517.5

Специальность 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

М.И.Джангибеков

О ЗАДАЧЕ НАИЛУЧШЕГО СОВМЕСТНОГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В L_2

Хорогский государственный университет им. М.Назариоева

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 25.12.2022 г.)

В работе решена экстремальная задача нахождения точной верхней грани наилучшего совместного приближения самой функции и ее промежуточных производных на некоторых классах функций из L_2 , характеристика гладкости старшей производной которых ограничена сверху заданной мажорантой.

Ключевые слова: *наилучшее приближение, верхняя грань, характеристика гладкости, мажоранта.*

В недавно опубликованных статьях [1, 2] получены некоторые точные неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и специальной характеристикой гладкости функций, впервые рассмотренной в работе К.В.Руновского [3] и более подробные свойства которой изучены С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [4]. Здесь, пользуясь одним результатом из [4], мы находим точное значение величины наилучшего совместного приближения функции и ее промежуточных производных одного класса функций.

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых по Лебегу 2π -периодических функций с конечной нормой

$$\|f\| := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Обозначим через

$$\Delta_h^m f(x) := \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kh)$$

– конечную разность m -го порядка функции $f \in L_2$ в точке x с шагом h и равенством

$$\omega_m(f, t) := \sup \{ \|\Delta_h^m f(\cdot)\| : |h| \leq t \}, \quad t > 0, \quad (1)$$

определим, как обычно, m -й модуль непрерывности функции $f \in L_2$.

Адрес для корреспонденции: Джангибеков Мирзошо Исломбекович. 736000, Республика Таджикистан, г.Хорог, ул. Ш.Шотемура, 109, Хорогский государственный университет. E-mail: ambarkuh04@list.ru

Следуя [3], под усредненной характеристикой гладкости функции $f \in L_2$ будем понимать величину

$$\Lambda_m(f, t) := \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^m f(\cdot)\|^2 dh \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где $t > 0$. Из (2) и (1) следует, что при $t > 0$ справедливо неравенство

$$\Lambda_m(f, t) \leq \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^2(f, h) dh \right) \leq \omega_m(f, t). \quad (3)$$

Символом $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых $(r-1)$ -ые производные при $r \in \mathbb{N}$ абсолютно непрерывны, а производная r -го порядка принадлежит пространству L_2 . Через \mathcal{F}_{2n-1} обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Для произвольной функции $f \in L_2$, с формальным разложением в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

величина ее наилучшего приближения элементами подпространства \mathcal{F}_{2n-1} равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &:= \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{F}_{2n-1} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

– частная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда Фурье функции f , а $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$.

Напомним, что под неравенством типа Джексона-Стечкина понимают неравенство, в котором величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается сверху через некоторую характеристику гладкости самой функции или ее производной заданного порядка.

Условимся в дальнейшем в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям из класса $L_2^{(r)}$ заранее предполагать, что $f \neq const$.

Легко заметить, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любом $s = 0, 1, \dots, r$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)}) = \|f^{(s)} - S_{n-1}(f^{(s)})\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} c_k(f) \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

В [5, с.127] доказано, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любом $s = 1, 2, \dots, r-1$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ имеет место следующее неравенство типа Колмогорова

$$\| (f^{(s)}) \| \leq \| f \|^{1-s/r} \cdot \| f^{(r)} \|^{s/r}. \tag{6}$$

Из этого неравенства, в частности, вытекает, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ ее промежуточные производные $f^{(s)}$, $s = 1, 2, \dots, r-1$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ принадлежат пространству L_2 , а потому определенный интерес представляет поведение величины $E_{n-1}(f^{(s)})$ – совместного приближения функций и ее промежуточных производных на некотором подклассе функций $\mathfrak{M}^{(r)} \subseteq L_2^{(r)}$ или на самом классе $L_2^{(r)}$. Другими словами, для множества $\mathfrak{M}^{(r)} \subseteq L_2^{(r)}$ требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup \{ E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \}. \tag{7}$$

Для решения задачи (7) нам понадобится точное неравенство между величиной $E_{n-1}(f^{(s)})$ и усредненной характеристикой гладкости $\Lambda_m(f, t)$.

Положим

$$\mathcal{J}_{k,m}(t) := \left(\frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos kh)^m dh \right)^{1/2}, \tag{8}$$

где $k, m \in \mathbb{N}$ и $t > 0$. Очевидно, что при любых $k, m \in \mathbb{N}$ и $t > 0$

$$\mathcal{J}_{k,m}(t) = \mathcal{J}_{1,m}(kt). \tag{9}$$

В [1, с.452] доказано, что при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < t \leq 2\pi$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)}, t/n)} = \frac{1}{2^{m/2} \cdot \mathcal{J}_{1,m}(t)} \tag{10}$$

и, в частности, из (10) при $t = \pi$ следует, что

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)}, \pi/n)} = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}},$$

где C_{2m}^m – биномиальный коэффициент.

Используя определение характеристики гладкости (2), рассмотрим следующий класс функций. Пусть $\Phi(u)$, где $0 \leq u \leq 2\pi$, есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Функцию Φ будем называть мажорантой. Символом $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ обозначим класс

функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные r -го порядка удовлетворяют условию $\Lambda_m(f^{(r)}, u) \leq \Phi(u)$, и $u \in (0, 2\pi]$.

В принятых обозначениях имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть $n, m \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$, функция $\mathcal{J}_{1,m}$ определяется формулами (8) и (9).

Если для произвольных $\tau \in (0, 2\pi]$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта Φ удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Phi(\tau)}{\Phi(\pi/n)} \geq \sqrt{\frac{2^m}{C_{2m}^m}} \cdot \mathcal{J}_{1,m}(n\tau), \quad (11)$$

то справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)) = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (12)$$

Доказательство. Из соотношения (10) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{2^{m/2} \mathcal{J}_{1,m}(t)} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Lambda_m(f^{(r)}, t/n).$$

Полагая в полученном неравенстве $t = \pi$ и имея в виду, что $2^{m/2} \mathcal{J}_{1,m}(\pi) = \sqrt{C_{2m}^m}$ [1, с.454], получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Lambda_m\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right).$$

Используя определение класса $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$, отсюда получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (12):

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)) \leq (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-(r-s)} \cdot \Phi(\pi/n). \quad (13)$$

Теперь заметим, что при доказательстве теоремы 5 из [4] было показано, что если при выполнении ограничения (11) тригонометрический полином $T_n \in \mathcal{T}_{2n+1}$ удовлетворяет условию

$$\|T_n\| \leq (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-r} \cdot \Phi(\pi/n), \quad (14)$$

то полином T_n является элементом класса $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$. Принимая этот факт во внимание, введем в рассмотрение функцию

$$f_0(x) = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-r} \cdot \Phi(\pi/n) \cos nx.$$

Для этой функции выполняются условия (14) со знаком равенства

$$\|f_0\| = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-r} \cdot \Phi(\pi/n),$$

а потому $f_0 \in W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$. Кроме того, так как

$$f_0^{(s)}(x) = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-(r-s)} \cdot \Phi(\pi/n) \cos\left(\pi n + \frac{s\pi}{2}\right),$$

и в силу равенства (5)

$$E_{n-1}(f^{(s)}) = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-(r-s)} \cdot \Phi(\pi/n), \quad (15)$$

то, пользуясь равенством (15), получаем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)) \geq E_{n-1}(f_0^{(s)}) = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-(r-s)} \cdot \Phi(\pi/n). \quad (16)$$

Сопоставляя оценку сверху (13) с оценкой снизу (16), получаем требуемое равенство (12).

Известно [4, с.230], что множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (11), не пусто.

Этому ограничению удовлетворяет, например, функция $\Phi^*(u) := u^{\alpha/2}$, где $\alpha := \frac{2^{2m}}{C_{2m}^m} - 1$.

Теорема доказана.

Поступило 25.12.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шабозов М.Ш. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 . – Матем. заметки, 2021, т.110, №3, с.450-458.
2. Шабозов М.Ш., Абдухаминов М.А. Некоторые неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве L_2 . – Изв. вузов. Математика, 2021, №10, с.78-91.
3. Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p , $0 < p < 1$. – Матем. сб., 1994, т.185, №8, с.81-102.
4. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций. – Матем. заметки, 2016, т.99, №2, с.215-238.
5. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1978, 424 с.

М.И.Чангибеков

**ОИД БА МАСЪАЛАИ НАЗДИККУНИИ БЕ ЯК ПОЛИНОМИАЛИИ ФУНКСИЯ
ДАВРИИ ДИФФЕРЕНСИРОНИДАШАВАНДА ДАР L_2** *Донишгоҳи давлатии Хоруг ба номи М.Назаршоев*

Дар мақола масъалаи экстремалии ёфтани сарҳади саҳеи наздиккунии беҳтарини функсия ва ҳосилаҳои он барои баъзе синфи функсияҳо, ки характеристикаи суфтаи ҳосилаи тартиби калонтаринашон аз боло ба воситаи мажорантаи додшуда маҳдуд аст, ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин, сарҳади болоӣ, характеристикаи суфтагӣ, мажоранта.

I.M.Jangibekov

**ON THE PROBLEM OF THE BEST JOINT POLYNOMIAL APPROXIMATION OF
DIFFERENTIABLE PERIODIC FUNCTIONS IN L_2** *M.Nazarshoev Khorog State University*

The paper solves the extremal problem of finding the least upper bound of the best joint approximations of the function itself and its intermediate derivatives on some classes of functions from L_2 , the smoothness characteristic of which is bounded from above by a given majorant.

Key words: best approximation, upper bound, characteristic of smoothness, majorant.

УДК 517.968.2

Специальность 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

С.Ф.Савлатов

ОБ АЛГЕБРЕ, ПОРОЖДЕННОЙ ПОЛИКЕРН-ОПЕРАТОРАМИ БЕРГМАНА С НЕЧЕТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ СО СДВИГОМ

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.И.Илоловым 04.01.2023 г.)

В работе установлены необходимые и достаточные условия нетеровости некоторых двумерных интегральных операторов с ядром Бергмана с нечетной характеристикой со сдвигом в лебеговых пространствах с весом и дана формула для вычисления индекса оператора.

Ключевые слова: поликern-функция, поликern-оператор Бергмана, символ оператора, индекс нетерова оператора.

Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная замкнутой кривой Ляпунова Γ .

В пространстве N -мерных вектор-функций

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)) \in L_{\beta-2/p}^{n,p}(D),$$

компоненты которых $f_k(z), k = 1, 2, \dots, N$ принадлежат пространству

$$L_{\beta-2/p}^p(D) = \{f_k(z) : |z|^{\beta-2/p} f_k(z) = F_k(z) \in L^p(D), \|f_k\|_{L_{\beta-2/p}^p} = \|F_k\|_{L^p}\},$$

$1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ рассматривается следующий оператор

$$A \equiv aI + b\mathcal{W} + \sum_{m=0}^n (c_{2m+1}I + d_{2m+1}\mathcal{W})B_{-(2m+1)} + (v_{2m+1}I + \mu_{2m+1}\mathcal{W})B_{2m+1} + T, \quad (1)$$

где $a(z), b(z), c_{2m+1}(z), d_{2m+1}(z), v_{2m+1}(z), \mu_{2m+1}(z) (m = 0, 1, 2, \dots, n)$ – непрерывные квадратные матрицы-функции размерности N в \bar{D} , I – тождественный оператор, T – компактный оператор, B_n – интегральный оператор ядром с поликern-функцией Бергмана с нечетной характеристикой $n = 2m + 1$ (см. [1-8])

$$B_n(z, \bar{\zeta}) = \frac{e^{-in\alpha}}{\pi |1 - z\bar{\zeta}|^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k C_n^k C_{\frac{n}{2}+k-1}^k \left| \frac{\zeta - z}{1 - z\bar{\zeta}} \right|^{2(k-1)}; \quad (2)$$

Адрес для корреспонденции: Савлатов Франсуан. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17, Таджикский национальный университет, E-mail: fransua.0404@list.ru

$$\alpha = \arg(1 - z\bar{\zeta}), C_{\frac{n}{2}}^k = \frac{\left(\frac{n}{2} + k - 1\right)\left(\frac{n}{2} + k - 2\right) \cdots \left(\frac{n}{2} + 1\right)\frac{n}{2}}{k!}.$$

Оператор \mathscr{W} действует по формуле $(\mathscr{W}f)(z) = f(\alpha(z))$, где $\alpha(z)$ – однолистное конформное или антиконформное отображение области D на себя, удовлетворяющее условию Карлемана $\alpha(\alpha(z)) = z$.

Как известно [9], нетерова теория одномерных сингулярных интегральных операторов со сдвигом хорошо развита. Что касается двумерных сингулярных интегральных операторов со сдвигом, то, по-видимому, работы [10, 11] являются первыми в этом направлении. В [10] получены условия нетеровости простейшего двумерного сингулярного интегрального оператора со сдвигом $\alpha(z)$ – являющемся конформным отображением области D на себя с условием Карлемана. В [11] установлены необходимые и достаточные условия нетеровости и дана формула для индекса интегрального оператора с ядром Бергмана, в котором $\alpha(z) = \bar{z}$. Отметим работу [12], где установлена нетеровость двумерных сингулярных интегральных операторов с дискретными группами сдвигов в L^2 в терминах обратимости одномерных сингулярных операторов, а также работы [13, 14], где исследована алгебра, порожденная в L^2 оператором \hat{A} и операторами умножения на кусочно-непрерывные в D функции.

Ранее частный случай оператора A , когда все матрицы, кроме a и c , тождественно равны нулю и $m = 1$, изучался в [15]. Исследованию оператора A в скалярном случае при $b \equiv d \equiv \mu_k \equiv 0$ ($k = 1, 2, \dots, \delta$) посвящены работы [16, 17]. Введем следующие обозначения

$$M(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ b(\alpha(z)) & a(\alpha(z)) \end{pmatrix}, \quad N(z) = \begin{pmatrix} c(z) & d(z)((\overline{\alpha'(z)}\alpha'(\zeta))^m) \\ d(\alpha(z)) & c(z)((\overline{\alpha'(z)}\alpha'(\zeta))^m) \end{pmatrix},$$

$$c_{jj}(t) = \begin{pmatrix} a(t) + \sum_{k=j}^m \nu_k(t) & b(t) + \sum_{k=j}^m \mu_k(t) \\ b(\alpha(t)) + \sum_{k=j}^m \mu_k(\alpha(t)) & a(\alpha(t)) + \sum_{k=j}^m \nu_k(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

где $z \in \bar{D}$, $t \in \Gamma$ ($j = 1, 2, \dots, m$).

Пусть G – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ , $B(z, \zeta)$ – kern-функция Бергмана области G , представляемая в виде (см.[18], с. 252, 258)

$$B(z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{\omega'(z)\overline{\omega'(\zeta)}}{(1 - \omega'(z)\overline{\omega'(\zeta)})^2},$$

где $z, \zeta \in G$, $\omega(z)$ – однолиственное конформное отображение области G на единичный круг с центром в начале координат, штрих обозначает производную, а черта над функцией – комплексное сопряжение. В пространстве $L^p_{\beta-2/p}(G)$, ($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$):

$$L^p_{\beta-2/p}(G) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(G), \|f\|_{L^p_{\beta-2/p}} = \|F\|_{L^p}\}$$

рассмотрим поликэрн - оператор (см. [5, 16] и [19])

$$B_m = B + \sum_{k=1}^{m-1} S_k B S_{-k}, \quad B_m = K B_m K,$$

здесь $m \geq 0$ – целое,

$$(Bf)(z) = \iint_G B(z, \zeta) f(\zeta) ds_\zeta,$$

$$(S_m f)(z) = \frac{m(-1)^m}{\pi} \iint_G \frac{e^{-2im\theta} f(\zeta)}{|\zeta - z|^2} ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z),$$

$$S_{-m} = K S_m K, \quad (Kf)(z) = \overline{f(z)}.$$

Пусть $(Wf)(z) = f(\alpha(z))$, где $\alpha(z)$ – однолиственное конформное или анти-конформное отображение области G на себя, удовлетворяющее условию Карлемана $\alpha(\alpha(z)) = z$.

В скалярном случае интегральные операторы с ядром Бергмана изучались многими авторами (см. [11–13, 20–23]). Так, в [11] получены необходимые и достаточные условия нетеровости и вычислен индекс оператора $aI + bB + c\bar{B}$ в случае, когда G – единичный круг, а коэффициенты a, b, c являются непрерывными функциями. В [20] изучен указанный оператор в случае, когда G – конечно-связано, а коэффициенты принадлежат классу $C_1(G) \cap C_\alpha(\bar{G})$, $0 < \alpha < 1$. В [22, 13] исследована алгебра, порожденная в пространстве L_2 интегральным оператором B и операторами умножения на кусочно-непрерывные в \bar{G} функции. Особо отметим работу [21], где изучено интегральное уравнение, в котором содержатся операторы B и \bar{B} со сдвигом $\alpha(z) = \bar{z}$. В [23] исследована алгебра, содержащая операторы $B, \bar{B}, BK, \overline{BK}$ с непрерывными коэффициентами.

Вопросам нетеровости и индекса интегральных операторов, содержащих, в частности, поликэрн-операторы B_k ($k = 1, 2, \dots, m$), посвящены работы ([5, 16, 24]).

Основные свойства операторов B_k, W , установленные в [16], [24], можно резюмировать в виде следующего утверждения.

Лемма 1. Если $f(z) \in L^p_{\beta-2/p}(G)$ ($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$), то тогда следующие операторы вполне непрерывны: $B_l B_k - B_l$ при $l \leq k$, $B_l B_k - B_k$ при $k \geq l$; $B_{-l} B_k$ – при любых целых

положительных l и k ; $WB_l - B_lW$, если $\alpha(z)$ конформно-отображающая функция; $WB_l - B_lW$, если $\alpha(z)$ – антиконформное отображение.

Доказательство. Рассмотрим оператор WB_n : Известно, что если n – нечетное, то ядро Бергмана имеет такой вид

$$B_n(z, \bar{\zeta}) = \frac{e^{-in\alpha}}{\pi |1 - z\bar{\zeta}|^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k C_n^k C_{\frac{n}{2}+k-1}^k \left| \frac{\zeta - z}{1 - z\bar{\zeta}} \right|^{2(k-1)}.$$

Поскольку функция $\left| \frac{\zeta - z}{1 - z\bar{\zeta}} \right|^{(k-1)}$ имеет особенность только на границе области G , когда ζ и z одновременно находятся на границе. Поэтому функция со слабой особенностью понимается как вполне непрерывный оператор. Используя эти свойства, мы можем выбрать главную часть оператора Бергмана $\frac{e^{-in\alpha}}{\pi |1 - z\bar{\zeta}|^2}$ для доказательства леммы. Поэтому мы получим

$$(WB_n f)(z) = T + \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{(1 - \overline{\alpha(z)\alpha(\sigma)})^{m-\frac{3}{2}}}{(1 - \alpha(z)\overline{\alpha(\sigma)})^{m+\frac{1}{2}}} \alpha'(z) \overline{\alpha'(\sigma)} f(\alpha(\sigma)) ds_{\sigma} = \alpha'(z) \overline{\alpha'(\sigma)} \cdot \overline{B_n} W + T.$$

Используя эти свойства, без особого труда устанавливается

Лемма 2. Если $f(z) \in L^p_{\beta-2/p}(G)$ ($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$), то алгебра R_2 , порожденная операторами (1), совпадает с совокупностью операторов вида

$$A \equiv aI + bW + \sum_{k=1}^m (c_k I + d_k W) B_{-k} + (v_k I + \mu_k W) B_k + T, \tag{3}$$

где T – вполне непрерывный оператор, $a(z), b(z), c(z), v_k(z), \mu_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) – непрерывные в \bar{G} квадратные матрицы – функции размерности n .

Прежде всего нетрудно проверить, что произведение двух операторов A_1 и A_2 с коэффициентами $a_i, b_i, c_k^i, d_k^i, v_k^i$ и μ_k^i ($i = 1, 2$) дает оператор A . Поэтому если мы пишем оператор A в виде

$$A_i = a_i(z)I + b_i(z)W + \sum_{k=1}^m (c_k^i(z)I + d_k^i(z)W) B_{-k} + (v_k^i(z)I + \mu_k^i(z)W) B_k + T, \quad (i = 1, 2)$$

то $A_1 + A_2 \in \mathfrak{R}$ и $A = A_1 \cdot A_2 \in \mathfrak{R}$, причем коэффициенты оператора A имеют вид

$$a = a_1 a_2 + b_1 b_2(\alpha),$$

$$b = a_1 b_2 + b_1 a_2(\alpha),$$

$$c_k = a_1 c_k^2 + b_1 d_k^2(\alpha) + c_k^1 c_k^2 + d_k^1 d_k^2(\alpha),$$

$$d_k = a_1 d_k^2 + b_1 c_k^2(\alpha) + c_k^1 d_k^2 + d_k^1 c_k^2(\alpha),$$

$$v_k = a_1 v_k^2 + b_1 \mu_k^2(\alpha) + v_k^1 v_k^2 + \mu_k^1 \mu_k^2(\alpha),$$

$$\mu_k = a_1 \mu_k^2 + b_1 v_k^2(\alpha) + v_k^1 \mu_k^2 + \mu_k^1 v_k^2(\alpha).$$

Каждому оператору вида (3) из алгебры R_2 сопоставим в качестве символа непрерывную на $\bar{G} \cup \Gamma$ матрицу-функцию (переменной размерности).

$$\sigma_A(z, t) = \begin{cases} M(z) & \text{где } z \in \bar{G}, \\ D_1(t) & \text{где } t \in \Gamma, \\ D_2(t) & \text{где } t \in \Gamma, \end{cases}$$

где

$$M(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ b(\alpha(z)) & a(\alpha(z)) \end{pmatrix},$$

$D_1(t), D_2(t)$ – блочно-диагональные матрицы-функции с соответствующими элементами $\{d_{jk}\}$ и $\{q_{jk}\}$. При этом, если $\alpha(z)$ – конформно отображающая функция, то

$$d_{jj}(t) = \begin{pmatrix} a(t) + \sum_{l=j}^m c_l(t) & b(t) + \sum_{l=j}^m d_l(t) \\ b(\alpha(t)) + \sum_{l=j}^m d_l(\alpha(t)) & a(\alpha(t)) + \sum_{l=j}^m c_l(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

$$d_{jk}(t) = \begin{pmatrix} c_k(t) & d_k(t) \\ d_k(\alpha(t)) & c_k(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

при $k < j, d_{jk}(t) = 0$ при $k > j$;

$$q_{jj}(t) = \begin{pmatrix} a(t) + \sum_{l=j}^m v_l(t) & b(t) + \sum_{l=j}^m \mu_l(t) \\ b(\alpha(t)) + \sum_{l=j}^m \mu_l(\alpha(t)) & a(\alpha(t)) + \sum_{l=j}^m v_l(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

$$q_{jk}(t) = \begin{pmatrix} v_k(t) & \mu_k(t) \\ \mu_k(\alpha(t)) & v_k(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

при $k < j, q_{jk}(t) \equiv 0$ при $k > j$; если же $\alpha(z)$ - антиконформная функция, то

$$d_{jj}(t) = \begin{pmatrix} a(t) + \sum_{l=j}^m c_l(t) & b(t) + \sum_{l=j}^m \mu_l(t) \\ b(\alpha(t)) + \sum_{l=j}^m d_l(\alpha(t)) & a(\alpha(t)) + \sum_{l=j}^m \nu_l(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

$$d_{jk}(t) = \begin{pmatrix} c_k(t) & \mu_k(t) \\ d_k(\alpha(t)) & \nu_k(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

при $k < j$, $d_{jk}(t) \equiv 0$ при $k > j$;

$$q_{jj}(t) = \begin{pmatrix} a(t) + \sum_{l=j}^m \nu_l(t) & b(t) + \sum_{l=j}^m d_l(t) \\ b(\alpha(t)) + \sum_{l=j}^m \mu_l(\alpha(t)) & d(\alpha(t)) + \sum_{l=j}^m c_l(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

$$q_{jk}(t) = \begin{pmatrix} \nu_k(t) & d_k(t) \\ \mu_k(\alpha(t)) & c_k(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

при $k < j$, $q_{jk}(t) \equiv 0$ при $k > j$.

Обозначим через U множество всех символов операторов из R_2 . Непосредственной проверкой устанавливается, что для любых операторов A_1, A_2 вида (3) из R_2 имеют место равенства

$$\sigma_{A_1+A_2}(z, t) = \sigma_{A_1}(z, t) + \sigma_{A_2}(z, t), \quad \sigma_{A_1 \cdot A_2}(z, t) = \sigma_{A_1}(z, t) \cdot \sigma_{A_2}(z, t),$$

то есть сопоставление оператору $A \in R_2$ его символа $\sigma_A(z, t)$ задает гомоморфизм алгебр R_2 и U , при этом оператор $A \in R_2$ восстанавливается по своему символу с точностью до компактного в $L^p_{\beta-2/p}(G)$ оператора. Таким образом, для того чтобы оператор $A \in R_2$ был нетеровым оператором в $L^p_{\beta-2/p}(G)$ ($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$), необходимо и достаточно, чтобы его символ $\sigma_A(z, t)$ был обратим для любых $z \in \bar{G}$, $t \in \Gamma$.

Пусть теперь $\det \sigma_A(z, t) \neq 0$, $z \in \bar{G}$, $t \in \Gamma$ и $\alpha(z)$ – конформно отображающая функция. Поскольку матрица $M(z)$ невырождена, то оператор $aI + bW$ обратим. Представим исходный оператор A вида (3) из R_2 с точностью до вполне непрерывного оператора в виде композиции:

$$A = (aI + bW + \sum_{k=1}^m (\mu_k I + \nu_k W) B_k) (I + (aI + bW))^{-1} \sum_{k=1}^m (c_k I + d_k W) B_{-k}.$$

К каждому из сомножителей применима теорема 1 из [23]. Тогда получим

$$\kappa(A) = \frac{1}{4\pi} \left[\arg \frac{\det d_{jj}(t)}{\det q_{jj}(t)} \right]_{\Gamma}.$$

Пусть теперь $\alpha(z)$ – антиконформное отображение. Тогда для вычисления индекса оператора A введем аналогично [9] соответствующий оператор A_c :

$$A_c = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ b(\alpha(z)) & a(\alpha(z)) \end{pmatrix} I + \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} c_k(z) & \mu_k(z) \\ d_k(\alpha(z)) & \nu_k(\alpha(z)) \end{pmatrix} B_{-k} + \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} \nu_k(z) & d_k(z) \\ \mu_k(\alpha(z)) & c_k(\alpha(z)) \end{pmatrix} B_k.$$

Оператор A_c с точностью до компактного оператора представим в виде

$$A_c = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ b(\alpha) & a(\alpha) \end{pmatrix} I + \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} \nu_k & d_k(z) \\ \mu_k(\alpha) & c_k(\alpha) \end{pmatrix} B_k \right] \times \times \left[I + \begin{pmatrix} a & b \\ b(\alpha) & a(\alpha) \end{pmatrix}^{-1} \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} c_k & \mu_k \\ d_k(\alpha) & \nu_k(\alpha) \end{pmatrix} B_{-k} \right].$$

Применяя к оператору A_c результаты работы [24], получим

$$\varkappa(A) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^m \left[\arg \frac{\det d_{jj}(t)}{\det q_{jj}(t)} \right]_{\Gamma}.$$

Нетрудно установить, что $\det q_{jj}(t) = \det d_{jj}(t)$, поэтому имеем

$$\varkappa(A) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m [\arg \det d_{jj}(t)]_{\Gamma}.$$

Таким образом установлена

Теорема. Для того, чтобы оператор A вида (3) из алгебры R_2 был н в пространстве $L_{\beta-2/p}^p(D)$ ($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

1) $\det M(z) \neq 0$ при $z \in \bar{G}$, $\det \prod_{j=1}^m d_{jj}(t) \neq 0$, $\det \prod_{j=1}^m q_{jj}(t) \neq 0$, при $t \in \Gamma$, и конформном $\alpha(z)$;

2) $\det M(z), \neq 0$ при $z \in \bar{G}$, $\det \prod_{j=1}^m d_{jj}(t) \neq 0$, при $t \in \Gamma$, и антиконформном $\alpha(z)$.

При выполнении условия нетеровости индекс интегрального оператора A вычисляется по формулам:

а) при конформном $\alpha(z)$:

$$\varkappa(A) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^m \left[\arg \frac{\det d_{jj}(t)}{\det q_{jj}(t)} \right]_{\Gamma};$$

б) при антиконформном $\alpha(z)$:

$$\varkappa(A) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \left[\arg \det d_{jj}(t) \right]_{\Gamma}.$$

Рассмотрим банахову алгебру R_1 , порожденную всеми операторами вида

$$a(z)I, \quad K, \quad W, \quad B_{-k}, \quad B_k, \quad (k=1,2,\dots,N), \quad (4)$$

где $a(z)$ – непрерывная в \bar{G} комплекснозначная квадратная матрица-функция порядка n , I – единичный оператор. Очевидно, что алгебра R_1 является расширением алгебры R_2 :

$$a(z)I, \quad W, \quad B_{-k}, \quad B_k, \quad (k=1,2,\dots,m), \quad (5)$$

с помощью оператора K . В самом деле, любой элемент $A \in R_1$ можно представить в виде $A = A_1 + KA_2$, где $A_2 \in R_2$, и отображение

$$\nu: A = A_1 + KA_2 \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & KA_2K \\ A_2 & KA_1K \end{pmatrix}$$

осуществляет изоморфное вложение алгебры R_1 в алгебру R_2 . Поэтому из полученных выше результатов для операторов из (3) следует необходимые и достаточные условия нетеровости операторов A из алгебры R_1 и формулы для подсчетов индекса операторов A .

Поступило 11.01.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bergman S. Uber die Entwining der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. – Math. Ann., 1922, v.86, pp.238-271.
2. Bergman S. The Kernel Funktion and Conformal Mapping. – Math. Surveys., 1970, v.5, Am.Math.Soc. N.Y.
3. Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. – М.: ИЛ, 1953, 310 с.
4. Кошелев А.Д. О kern-функции гильбертова пространства функций, полианалитических в круге. – ДАН СССР, 1977, т.232, №2, с.277-279.
5. Джангибеков Г. Формула обращения для одного двумерного сингулярного интегрального уравнения. – Доклады АН ТаджССР, 1984, т.27, №5, с.243-248.

6. Джангибеков Г., Савлатов Ф. О поликern-функциях ограниченной области и их связь с сингулярными интегральными операторами. – Вестник филиала МГУ им.М.В.Ломоносова в г. Душанбе, 2018, №1 (2), с.11-40.
7. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области. – Доклады РАН, 2002, т.383, №1, с.7-9.
8. Долженко Е.П. О граничном поведении компонент полианалитической функции.– Доклады РАН, 1994, т.338, №5, с.585-588.
9. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977, 448 стр.
10. Дудучава Р.В., Сагинашвили А., Шаргородский Е.М. О двумерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом. – Труды Тбилисского математического института им. А.М.Размадзе. – Тбилиси: Мецниереба, 1995, т. 103.
11. Комяк И.И. Об условиях нетеровости и формуле для индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений. – Доклады АН БССР. 1979, т.23, №1, с.8-11.
12. Батхин А.Б. Теорема об изоморфизме C^* -алгебр многомерных операторов типа свертки с дискретными группами сдвигов. – Доклады расширенного заседания семинара ИПМ им. И.Н.Векуа. – Тбилиси ТГУ, 1990.
13. Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами I. – Изв.вузов, Матем, 1986, №3, с.12-21.
14. Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами II. – Изв.вузов, Матем, 1986, №3, с.33-38.
15. Джураев А. К теории систем сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области. – ДАН СССР, 1979, т.249, №1, с.22-26.
16. Джангибеков Г. О нетеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами. – ДАН СССР, 1988, т.300, №2, с.272-276.
17. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах. – Математические заметки, 1989, т.46, в.5, с.91-93.
18. Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. – М.: ИЛ, 1953, 310 с.
19. Джураев А.Д. Поликern-функция области, kern-операторы и сингулярные интегральные операторы. – ДАН СССР, 1985, т.283, №5, с.1057-1060.
20. Джураев А.Д. О некоторых двумерных интегральных уравнениях по ограниченной области. – В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Краевые задачи. – Тбилиси, 1979, с.89-94.
21. Комяк И.И. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов по круговой области. – Доклады АН БССР, 1979, т.23, №11, с.972-974.
22. Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные некоторыми двумерными интегральными операторами II. – Math. Nachr., 1980, Bd.99, pp.135-144.
23. Джангибеков Г. Нетеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов. – ДАН ТаджССР, 1987, т.30, №7, с.400-405.

24. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом. – Математические заметки, 1991, т.49, в.4, с.150-152.

С.Ф.Савлатов

**ДАР БОРАИ ПОЛИКЕРН-ОПЕРАТОРИ ҲОСИЛШУДАИ БЕРГМАН БО
ХАРАКТЕРИСТИКАИ ТОҚ БО ҒЕЧИШ**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола шартҳои зарурӣ ва кифоягии нетеровӣ будани якчанд намуд операторҳои дученакаи интегралӣ сингулярӣ бо ядрои Бергман бо характеристикаи тоқ бо ғеҷиш дар фазои Лебегии вазндор омӯхта шуда, формула барои ҳисоб намудани индекси оператор ҳосил карда шудааст. **Калимаҳои калидӣ:** поликерна-функсия, поликерна-оператори Бергман, симболи оператор, индекси оператори нетеровӣ.

S.F.Savlatov

**ON THE ALGEBRA GENERATED BY BERGMAN POLYKERN OPERATORS
WITH ODD CHARACTERISTIC WITH A SHIFT**

In this paper necessary and sufficient conditions for the Noetherian property of some two-dimensional integral operators with Bergman kernel with odd characteristic with a shift in weighted Lebesgue spaces are established and a formula for calculating the index of the operator is given.

Key words: polykern-function, polykern-Bergman operator, operator symbol, Noetherian operator index.

УДК 536.46

Специальность 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

М.М.Кабиров, П.Б.Садриддинов*, А.С.Баротов**

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ВОЛНЫ ГОРЕНИЯ ПРОПАНО-ВОЗДУШНОЙ СМЕСИ В ДВУХ МОДЕЛЯХ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ ГАЗОВ*Российско-Таджикский (Славянский) университет,***Институт математики им.А.Джураева НАН Таджикистана,****Дангаринский государственный университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 12.01.2022 г.)*

В работе горение пропановоздушной смеси в инертной пористой среде анализируется посредством двух математических моделей фильтрационного горения газов. Эти модели соответствуют интенсивным и конечным межфазным теплообменам. Проведены расчёты и сравнения параметров волны горения.

Ключевые слова: *волна горения, смеси газов, скорость волны, скорость продува, равновесная температура, межфазный теплообмен, порядок реакции.*

Фильтрационное горение газов (ФГГ), наподобие горения водородо-, пропано- и метановоздушных смесей в инертной пористой среде является перспективным направлением теории горения. Такое горение обладает специфическими свойствами, в силу чего используется при разработке современных горелочных устройств нового типа, огнепреградителей разного типа, модели сжигания газов в двигателях внутреннего сгорания с низкими концентрациями выхлопных газов, модели горения природного газа.

Целью настоящей работы является изучение особенностей фильтрационного горения пропановоздушной смеси на основе двух математических моделей ФГГ, которые соответствуют интенсивному и конечному межфазному теплообмену [1,2]. В случае интенсивного межфазного теплообмена, температура пористой среды (твёрдой фазы) полагается равным температуре газа, а это означает, что выделившееся тепло в газе, в результате химической реакции, мгновенно передаётся твёрдой фазе. Такое возможно, если диаметр частиц относительно мал. Дополнительно, в этом случае учитывается порядок скорости химической реакции по недостающему компоненту [3], чтобы оценить влияние химической кинетики реакции на параметры волны горения пропановоздушной смеси. При конечном межфазном теплообмене температуры пористой среды отличается от температуры смеси газов в по-

Адрес для корреспонденции: Кабиров Маруф Махмудович. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. М.Турсун-заде, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: maruf1960@mail.ru; Садриддинов Парвиз Бахриддинович. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни 299/4, Институт математики им.А.Джураева НАН Таджикистана. E-mail: parviz06@list.ru.

рах. В этом случае происходит рекуперация тепла из зоны горения в подлежащие слои (зона прогрева) посредством эффективной теплопроводности пористой среды. То есть, перед фронтом горения пористая среда нагревает смеси газов до температуры воспламенения. При этой температуре начинается химическая реакция, и в газе выделяется тепло, которое резко повышает температуры газа до максимального значения. После завершения химической реакции газ постепенно отдаёт своё тепло пористой среде и тем самым повышает температуру пористой среды до равновесной. Заметим, что конечный межфазный теплообмен возможен при относительно больших диаметрах частиц, где удельная межфазная поверхность мала.

Основным параметром горения веществ является скорость распространения зоны горения, обычно её называют скоростью волны. Под волной подразумеваются профили температур, концентрации и давления. В рассматриваемых математических моделях давление смеси газов полагается постоянным, так как основную массу газовой смеси составляет воздух (~96%) и в нём азот (N₂) инертный газ, составляет 79% и не участвует в химической реакции. В работах [1,2] явный вид функции температур и концентрации от продольной координаты не получены, только выведены соотношения для скорости волны. В связи с этим для сравнения параметров волны воспользуемся только этими соотношениями. Отметим, что ранее фильтрационное горение пропановоздушной смеси по этим соотношениям не изучалось.

Следует заметить, что изучение горения водорода, пропана и метановоздушных смесей в инертной пористой среде начинается с работ новосибирских учёных, в которых исследование проводились в начале экспериментально [4,5], а затем теоретически [6-8]. В исследование ФГГ существенное продвижение сделано белорусскими учёными [9]. В последующие годы для изучения этой проблемы применялся численные методы [10-11] с разработкой новых разностных схем [12] и вычислительных алгоритмов [13,14]. В теоретическом исследовании фильтрационного горения газов не отстают и таджикские учёные [15-18].

Ниже приводим соотношения для определения скорости волны, выведенные из рассмотрения однотемпературной и двухтемпературной моделей фильтрационного горения газов соответственно [1,2]

$$v_{10} - u = \sqrt{\frac{(2 - \nu)k_0(\alpha_2\lambda_2 + \alpha_1\lambda_1)T_0RT_e \exp(-E/RT_e)}{\rho_{10}Q\eta_0E}} \tag{1}$$

$$v_{10} - u = \sqrt{\frac{(T_e - T_{2in})k_0\alpha_2\lambda_2E}{\rho_{10}c_pRT_e^2 \exp(\beta)(\exp(\beta - \gamma) - 1)}} \tag{2}$$

где

$$T_{2in} = T_0 + \frac{k_1}{(k_1 - k_2)}(T_e - T_0), \quad T_{1in} = T_0 + \frac{k_1\alpha_c S_c}{(k_1 - k_2)(\alpha_c S_c + \rho_{10}(v_{10} - u)c_p k_2)}(T_e - T_0).$$

$$k_{1,2} = \frac{-\left(\frac{\alpha_c S_c}{\rho_{10} c_p (v_{10} - u)} + \frac{\rho_2 c_2 u}{\alpha_2 \lambda_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_c S_c}{\rho_{10} c_p (v_{10} - u)} + \frac{\rho_2 c_2 u}{\alpha_2 \lambda_2}\right)^2 - \frac{4\alpha_c S_c}{\alpha_2 \lambda_2} \left(\frac{\rho_2 c_2 u}{\rho_{10} c_p (v_{10} - u)} - 1\right)}}{2}$$

$$\gamma = \frac{ET_{in}}{T_e^2 R}, \quad \beta = \frac{E}{RT_e}, \quad \alpha_c = \frac{Nu \cdot \lambda_1}{d_{eff}}, \quad S_c = \frac{6\alpha_2}{d}, \quad d_{eff} = \frac{2\alpha_1 d}{3\alpha_2}.$$

Здесь u – скорость волны; v_{10} – продуваемая в пористый блок скорость газа; T_{in} , T_{2in} – характерные температуры газа и пористой среды; T_0 – исходная температура системы - пористая среда, смеси газов; η_0 – исходная массовая концентрация недостающего компонента; ρ_{10} , c_p – приведённая плотность и теплоёмкость смеси газов; ρ_2 , c_2 – те же величины для пористой среды; λ_1 , λ_2 – коэффициенты теплопроводности газовой и твёрдой фаз; α_1, α_2 – объёмные содержания фаз; α_c – поверхностный коэффициент межфазного теплообмена; S_c – удельная поверхность пористой среды; Q – тепловой эффект реакции; J – скорость химической реакции; ν – порядок скорости химической реакции по недостающему компоненту; E – энергия активации; R – универсальная газовая постоянная; d – диаметр частиц твёрдой фазы; d_{eff} – эффективный диаметр пор; k_0 – предэкспонент; Nu – число Нусельта, γ, β – безразмерные параметры.

Равновесная температура (T_e) получена из интеграла энергии при удовлетворении граничных условий

$$T_e = T_0 + \frac{Q\eta_0}{c_p (1 - \rho_2 c_2 u / \rho_{10} c_p (v_{10} - u))}. \tag{3}$$

Ниже на рис. 1 и 2 приводятся зависимости скорости волны u (м/с) от скорости вдува газа v_{10} (м/с) рассчитанные по соотношениям (1) (сплошные линии) и (2) (пунктирная линия) при разных порядках скорости реакции по недостающему компоненту ($1 - \nu = 0.5$; $2 - \nu = 1$; $3 - \nu = 1.5$) и для двух составов пропановоздушной смеси: $2.146\% C_3H_8 + \text{воздух}$; $3.99\% C_3H_8 + \text{воздух}$. По этим рисункам делаем вывод, что скорость волны монотонно возрастает с увеличением скорости продува смеси в пористый блок, причём фронт горения движется навстречу потоку. По формуле (3) можем сказать, что равновесная температура ниже адиабатической, то есть реализуется субадиабатический режим распространения волны горения. Также по рисункам наблюдаем, что по мере увеличения доли пропана в смеси до стехиометрического скорость волны увеличивается для каждого значения скорости продува смеси и это имеет место в обеих моделях.

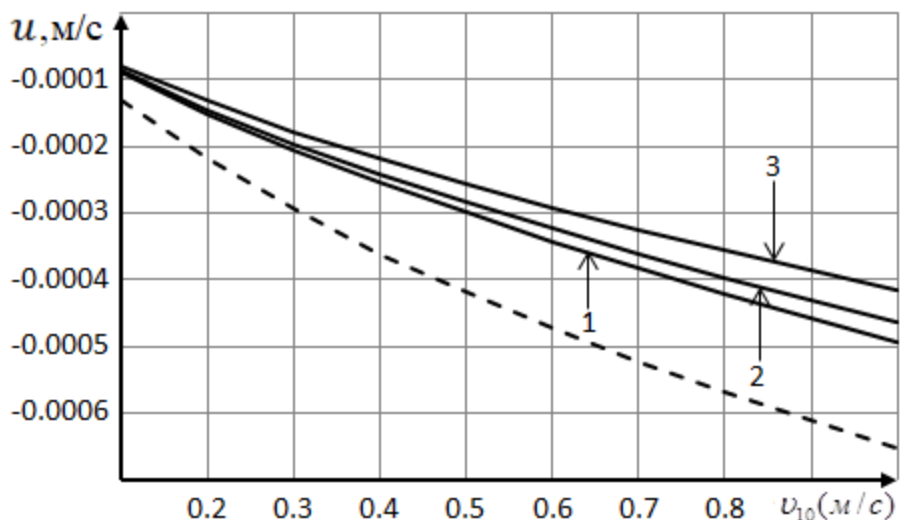


Рис. 1. Зависимости скорости волны u (м/с) от скорости вдува газа v_{10} (м/с) рассчитанные по соотношениям (1) (сплошные линии) и (2) (пунктирная) при разных порядках скорости реакции: 1 – $\nu = 0.5$; 2 – $\nu = 1$; 3 – $\nu = 1.5$; состав смеси – 2.146% C_3H_8 + воздух .

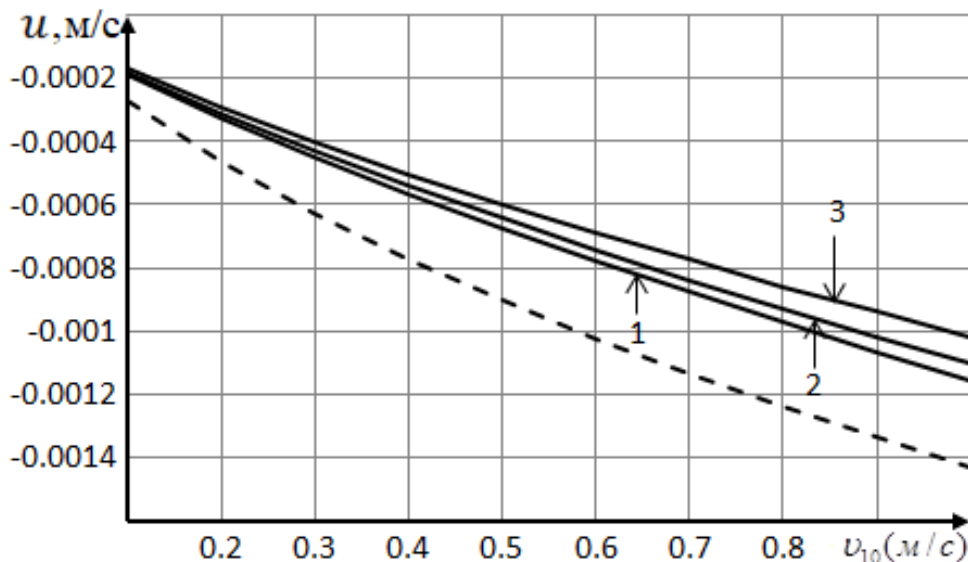


Рис. 2. Зависимости скорости волны u (м/с) от скорости вдува газа v_{10} (м/с) рассчитанные по соотношениям (1) (сплошные линии) и (2) (пунктирная) при разных порядках скорости реакции: 1 – $\nu = 0.5$; 2 – $\nu = 1$; 3 – $\nu = 1.5$; состав смеси – 3.99% C_3H_8 + воздух .

Для сравнения параметров волны, рассчитанных по соотношениям (1) и (2) при одних и тех же значениях физико-химических констант пористой среды и смеси газов, нами принята относительная погрешность

$$\delta_u = \frac{|u_1 - u_2|}{|u_2|} \tag{4}$$

Здесь, в частном случае, u_1 – скорость волны, рассчитанная по соотношению (1), а u_2 соответственно по второму соотношению для каждого фиксированного значения скорости продува смеси v_{10} . На рис. 3 и 4 приведены зависимости относительной погрешности скорости волны δ_u от скоро-

сти вдува газа $u_{10} (м/с)$ при разных порядках скорости реакции ($1 - \nu = 0.5$; $2 - \nu = 1$; $3 - \nu = 1.5$) и двух составов пропановоздушной смеси ($2.146\% C_3H_8 + \text{воздух}$; $3.99\% C_3H_8 + \text{воздух}$). По рисункам 1 и 2 наблюдаем, что скорости волны рассчитанные по соотношениям (1) и (2) при относительно малых скоростях продува отличаются незначительно в сравнении со значениями скорости волны при скорости продува 1 м/с. Однако зависимости относительной погрешности скорости волны на рис.3,4 показывают противоположные. То есть относительная погрешность скорости волны при скорости продува смеси 0.1м/с больше в сравнении для скорости продува 1 м/с. Это связано с тем, что скорость волны, рассчитанная по соотношению (2) по абсолютной величине относительно мала в сравнении со скоростью волны, рассчитанной по соотношению (1). В итоге, расчёт по формуле (4) даёт относительно большие погрешности скорости волны.

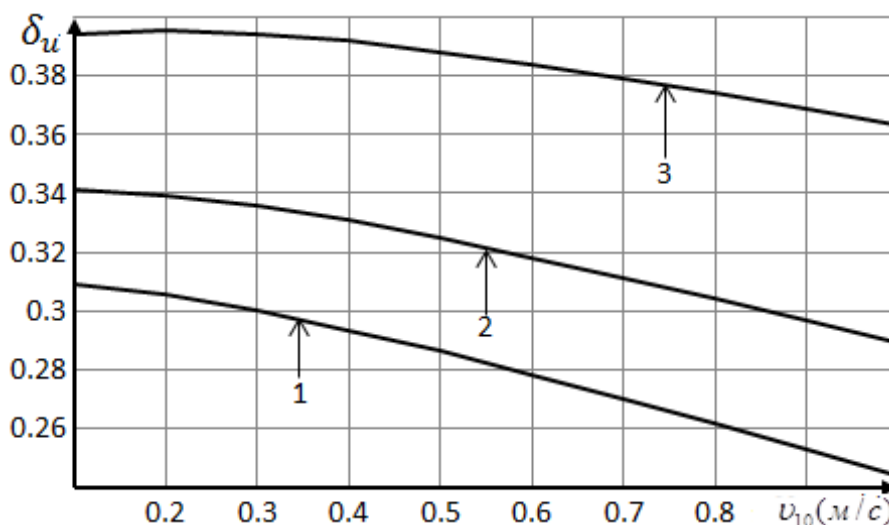


Рис. 3. Зависимости относительной погрешности скорости волны δ_u от скорости вдува газа $u_{10} (м/с)$ при разных порядках скорости реакции: $1 - \nu = 0.5$; $2 - \nu = 1$; $3 - \nu = 1.5$; состав смеси – $2.146\% C_3H_8 + \text{воздух}$.

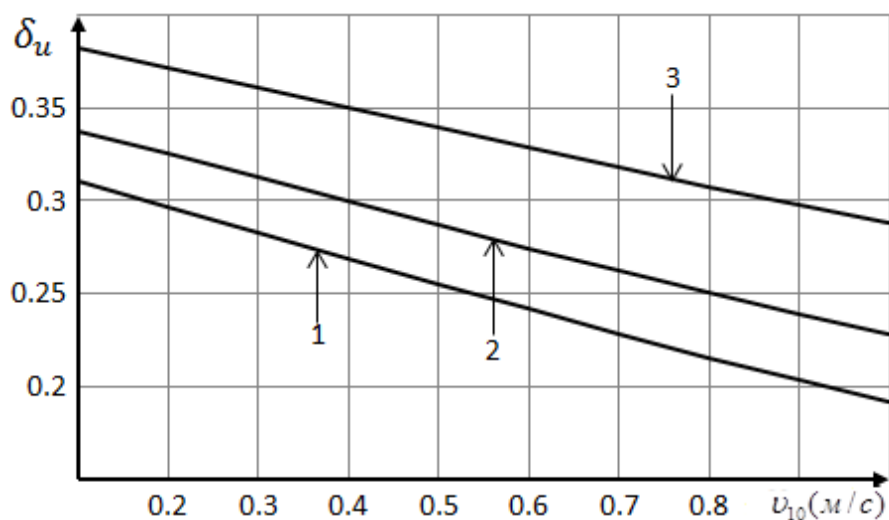


Рис. 4. Зависимости относительной погрешности скорости волны δ_u от скорости вдува газа $u_{10} (м/с)$ при разных порядках скорости реакции: $1 - \nu = 0.5$; $2 - \nu = 1$; $3 - \nu = 1.5$; состав смеси – $3.99\% C_3H_8 + \text{воздух}$.

Заметим, что скорости волны, рассчитанные по соотношениям (1) и (2) соответствуют режиму низких скоростей [6], однако их относительные погрешности составляют от 19 до 39%. Это означает, что межфазный теплообмен играет существенную роль в распространении горения. Относительно малые погрешности скорости волны наблюдается при относительно малых порядках скорости реакции по недостающему компоненту.

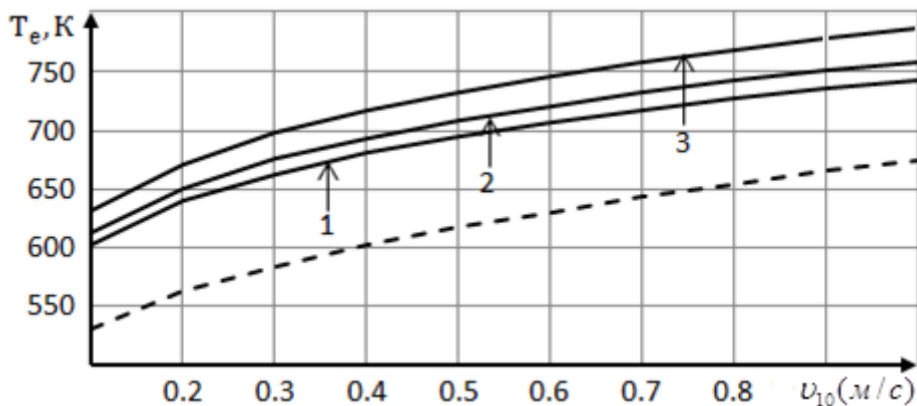


Рис. 5. Зависимости равновесной температуры (T_e, K) от скорости вдува газа $v_{10}(m/c)$ определённые по значениям скорости волны $u(m/c)$ и порядка скорости реакции ($1-\nu = 0.5$; $2-\nu = 1$; $3-\nu = 1.5$); сплошные линии однотемпературная модель, пунктирная – двухтемпературная; состав смеси – $2.146\% C_3H_8 + \text{воздух}$.

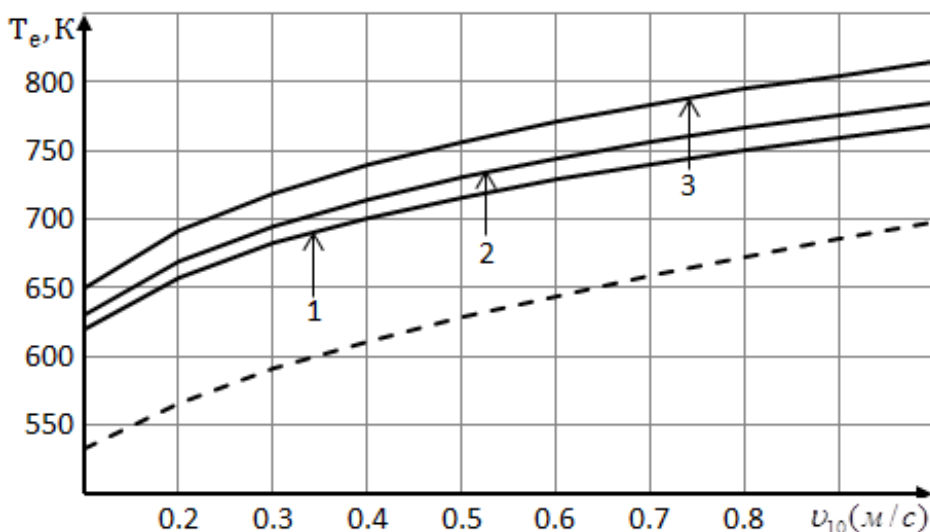


Рис. 6. Зависимости равновесной температуры (T_e, K) от скорости вдува газа $v_{10}(m/c)$ определённые по значениям скорости волны $u(m/c)$ и порядка скорости реакции ($1-\nu = 0.5$; $2-\nu = 1$; $3-\nu = 1.5$); сплошные линии однотемпературная модель, пунктирная – двухтемпературная; состав смеси – $3.99\% C_3H_8 + \text{воздух}$.

Рассчитанные равновесные температуры по значениям скорости волны и формулы (3) приведены на рис. 5 и 6, где наблюдаем её монотонный рост по мере увеличения скорости продува для каждого состава пропановоздушной смеси. Кроме того, на рис. 5 и 6 замечаем, что относительно большим значениям скорости волны соответствуют относительно малые значения равновесной температуры. Сплошные кривые 1,2,3 соответствуют значениям равновесной температуры, рассчитанные по значениям скорости волны определённым по соотношению (1) для каждого порядка скорости

химической реакции (0.5; 1.0; 1.5). Пунктирная кривая – это значения равновесной температуры, соответствующая двухтемпературной модели ФГГ. В силу ограниченности количества рисунков, в работе не приводятся соответствующие относительные погрешности равновесных температур в зависимости от скорости продува и состава смеси. Незначительные отклонения относительной погрешности равновесных температур от 10% до 16% наблюдаются для кривых под номером 1 и пунктиром, на рис.5,6.

Все расчёты проведены при следующих значениях физико-химических констант пористой среды и смеси газов:

$$\rho_1^0 = 1.16 \text{ кг} / \text{м}^3, \rho_2^0 = 3900 \text{ кг} / \text{м}^3, c_p = 1006 \text{ м}^2 / (\text{с}^2 \text{К}), c_2 = 800 \text{ м}^2 / (\text{с}^2 \text{К}), T_0 = 300 \text{ К}, \\ \alpha_1 = 0.5, \lambda_2 = 4 \text{ кгм} / (\text{с}^3 \text{К}), \lambda_1 = 0.025 \text{ кгм} / (\text{с}^3 \text{К}), d = 0.005 \text{ м}, E = 116393 \text{ кгм}^2 / (\text{с}^2 \text{моль}), \\ Q = 48122727 \text{ м}^2 / \text{с}^2, k_0 = 1.874 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}, \eta_0 = 0.02146; 0.0399, R = 8.314 \text{ кгм}^2 / (\text{с}^2 \text{мольК}).$$

В ы в о д ы

При горении пропановоздушной смеси в инертной пористой среде, фронт горения движется навстречу продуваемого потока и реализуется режим низких скоростей ($\sim 10^{-4}$ м/с). Закономерности изменения скорости волны горения по мере увеличения скорости продува предварительно перемешанной смеси, монотонно возрастающие. Равновесная температура ниже адиабатической температуры.

Наблюдаются различия в значениях скорости волны и равновесных температур рассчитанные по двум моделям фильтрационного горения газа. Скорость волны, рассчитанная в рамках двухтемпературной модели относительно больше в сравнении со скоростью однотемпературной модели. Порядок скорости химической реакции по недостающему компоненту влияет на скорость волны, но незначительно.

Поступило 19.01.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кабилов М.М., Садриддинов П.Б. Скорость распространения фронта горения смеси газов в инертной пористой среде. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2009, т.52, №6, с.443-448.
2. Кабилов М.М., Садриддинов П.Б. Исследование процесса распространения фронта фильтрационного горения газов. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2010, т.53, №1, с.28-33.
3. Мержанов А.Г., Филоненко А.К. О тепловом самовоспламенении гомогенной газовой смеси в потоке. – ДАН СССР, 1963, т.152, № 1, с.143-146.
4. Коржавин А.А., Бунев В.А., Абдуллин Р.Х., Бабкин В.С. О зоне пламени при горении газа в инертной пористой среде. – Физика горения и взрыва, 1982, т.18, №16, с. 20-23.
5. Потытняков С.И., Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. Влияние теплотерь на распространение стационарных волн при фильтрационном горении газов. – Физика горения и взрыва, 1984, № 1, с. 19–26.
6. Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. Фильтрационное горение газов. – В сб. Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. Новосибирск: Наука, 1988, с. 108–145.

7. Какуткина Н.А. и др. Особенности фильтрационного горения водородо-, пропано- и метановоздушных смесей в инертных пористых средах. – Физика горения и взрыва, 2006, т.42, №4, с. 8-20.
8. Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. Стабилизированная волна горения газов в инертной пористой среде. – Физика горения и взрыва, 2008, т. 44, № 5, с. 8-15.
9. Доброго К.В., Жданок С.А. Физика фильтрационного горения газов. – Минск, Ин-т тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАНБ, 2002, 203 с.
10. Князева А.Г., Князева А.Г., Немытов В.П. Численное исследование режимов горения газа в пористой цилиндрической горелке с низкой теплопроводностью каркаса. – Изв. ТПУ, 2006, т. 309, № 3, с. 126-130.
11. Какуткина Н.А., Коржавин А.А., Рычков А.Д. Особенности прогорания пористых огнепреградителей засыпного и канального типа. – Физика горения и взрыва, 2009, т.45, № 3, с. 35-43.
12. Лаевский Ю.М., Яушева Л.В. Численное моделирование фильтрационного горения газа на основе двухуровневых полунявных разностных схем. – Вычислительные технологии, 2007, т. 12, № 2, с. 90-103.
13. Laevsky Yu.M., Nosova T.A. Computational models of filtration gas combustion. – Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 2017, v. 32, is.2, pp. 115-125.
14. Носова Т.А. Вычислительные модели фильтрационного горения газа в режиме низких скоростей: Дисс. к.ф.-м.н. Новосибирск, Инс. выч. мат. и мат. геофизики СО РАН, 2018, 102 с.
15. Кабиров М.М. Исследование диффузионно-тепловой устойчивости волн фильтрационного горения газов в инертной пористой среде. – Физика горения и взрыва, 2012, т. 48, № 1, с.14- 21.
16. Кабиров М.М. О неустойчивости фронта фильтрационного горения газов в неадиабатическом режиме. – Физика горения и взрыва, 2012, т.48, № 2, с. 15- 23.
17. Гулбоев Б.Дж. Модели фильтрационного горения газов при диффузии топливно-воздушной смеси: Дисс. к.ф.-м.н., Душанбе, Таджикский национальный университет, 2016, 124 с.
18. Халимов И.И. Сверх- и субадиабатические режимы фильтрационного горения газов в эквивалентной математической модели: Дисс. к.ф.-м.н., Душанбе, Таджикский национальный университет, 2021, 127 с.

М.М.Қобиров, П.Б.Садриддинов*, А.С.Баротов**

ТАҲЛИЛИ МУҚОИСАИ ПАРАМЕТРҲОИ АСОСИИ МАВҶИ СӮЗИШИ ОМЕХТАИ ПРОПАНУ ҲАВО ДАР ДУ МОДЕЛИ СӮЗИШИ ФИЛТРОНАИ ГАЗҲО

Донишгоҳи (Славянии) Россия ва Тоҷикистон,

**Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви АМИ Тоҷикистон,*

***Донишгоҳи давлатии Дангара*

Дар мақола сӯхтани омехтаи пропану ҳаво дар муҳити ковоки инертӣ бо ду модели математикии сӯзиши филтронаи газҳо таҳлил карда мешавад. Ин моделҳо ба мубодилаи гармии зудтар ва охирноки байнифазаӣ мувофиқат мекунанд. Ҳисобкуниҳо ва муқоисаи параметрҳои мавҷи сӯзиш гузаронида шудааст.

Калимаҳои калидӣ: мавҷи сӯзиш, омехтаи газҳо, суръати мавҷ, суръати ҳаводиҳӣ, ҳарорати мувозинатӣ, интиқоли гармии байнифазаӣ, тартиби реаксия.

M.M.Kabilov, P.B.Sadriddinov*, A.S.Barotov**

**COMPARATIVE ANALYSIS OF THE MAIN PARAMETERS OF THE
COMBUSTION WAVE OF A PROPANE-AIR MIXTURE IN TWO MODELS
OF FILTERED GAS COMBUSTION**

Russian-Tajik (Slavic) University,

**A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan,*

***Dangara State University*

In this work, the combustion of a propane-air mixture in an inert porous medium is analyzed by means of two mathematical models of filtration combustion of gases. These models correspond to intense and final interfacial heat exchanges. Calculations and comparisons of the parameters of the combustion wave were performed.

Key words: *combustion wave, gas mixtures, wave velocity, blowing speed, equilibrium temperature, inter-phase heat transfer, reaction order.*

УДК 523. 532

Специальность: 1.3.1 – Физика космоса, астрономия

В.В.Бусарев

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОПОЛОСНОЙ ФОТОМЕТРИИ ДЛЯ ПОИСКА ПРИЗНАКОВ ПЫЛЕВОЙ АКТИВНОСТИ АСТЕРОИДОВ

*МГУ им. М.В.Ломоносова, Астрономический ин-т им. П.К.Штернберга (ГАИШ МГУ),
Институт астрономии РАН (ИНАСАН)*

(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Г.И.Кохировой 02.12.2022 г.)

Рассматривается применение метода UBVR_I-фотометрии астероидов для упрощенной аппроксимации формы их спектров отражения в видимом и ближнем ИК диапазонах. Это обеспечивает возможность проведения обзора значительного числа астероидов за ограниченное наблюдательное время и оперативной оценки формы их спектров отражения. Обсуждаются преимущества и недостатки этого метода по сравнению с классической спектрофотометрией при поиске и изучении слабой пылевой экзосферы, возникающей у астероидов в результате сублимационной активности или других физических процессов.

Ключевые слова: *астероиды, UBVR_I-фотометрия, спектрофотометрия, обнаружение пылевой активности астероидов.*

1. Введение

Хотя специалисты не пришли пока к единому мнению о природе так называемых «комет» или активных объектов в Главном поясе астероидов (ГПА), впервые обнаруженных около 20 лет назад (напр., [1-4]), усилия в изучении таких объектов привели к развитию нового научного подхода в исследованиях классических астероидов. Его суть состоит в целенаправленном изучении явления образования временной пылевой экзосферы астероидов, возникающей под влиянием различных физических факторов.

Оказалось, что пылевая активность астероидов может быть использована не только для определения их собственных физических и химико-минералогических характеристик, но также может служить индикатором интенсивности и степени изотропности регулярно воздействующих на них внешних факторов. К таковым в первую очередь относятся столкновения с другими телами, а также солнечные вспышечные и эруптивные события.

В качестве эффективного инструмента для поиска у астероидов наличия разреженной экзосферы нами используется спектральный метод, основанный на UBVR_I-фотометрии, но обладающий высокой чувствительностью. Использование этого метода позволило впервые обнаружить возникно-

Адрес для корреспонденции: Бусарев Владимир Васильевич. 119992, Российская Федерация, г. Москва, Университетский проспект, 13, МГУ им. М.В.Ломоносова, Астрономический ин-т им. П.К.Штернберга (ГАИШ МГУ). E-mail: busarev@sai.msu.ru

вание вблизи перигелия у ряда крупных астероидов примитивных типов временной пылевой экзосферы, образовавшейся при сублимации замерзших летучих соединений (в основном H_2O и CO_2). Кратко рассмотрим эти результаты в следующем разделе.

2. О преимуществах *UBVRI*-фотометрии и полученные результаты

В настоящее время в астрономии используется ряд многополосных фотометрических систем, большинство из которых создано для изучения определенных типов объектов (напр., [5-7]). Но наиболее универсальной и хорошо разработанной является *UBVRI*-система, охватывающая оптический спектр от ближнего ультрафиолета (УФ) до ближнего инфракрасного (ИК) диапазона, с эффективными длинами волн светофильтров (в модификации Джонсона-Козинса) 0.3663, 0.4361, 0.5448, 0.6407 и 0.7980 мкм соответственно [5]. Фотометрическая система *UBVRI* базируется на большом количестве выверенных звездных стандартов, имеющих разный блеск и достаточно равномерно распределенных на всей небесной сфере (напр., [6]). Эта фотометрическая система успешно применяется и при исследованиях астероидов. Наблюдения этих тел осуществляются как в отдельных полосах (например, *V* или *R* при определении кривых блеска тел с целью изучения их формы, вращения и т. п., [8]), так и с использованием двух светофильтров (напр., *V-R* или *V-I*, [9]) для оценки спектральных (таксономических) типов астероидов.

2.1. Специфика получения наблюдательных данных и их обработки

Наш подход в использовании *UBVRI*-фотометрии при изучении подозреваемого в пылевой активности астероида основан на расчете его отражательной способности в каждом свето фильтре (для этого также должны быть выполнены наблюдения стандартной звезды солнечного типа на близких к астероиду воздушных массах), и аппроксимации формы его спектра отражения на эффективных длинах волн всех светофильтров. Важно отметить, что даже в случае отсутствия у астероида пылевой экзосферы, наблюдательные данные, полученные рассматриваемым способом, позволяют оценить или уточнить минералогию его вещества.

Таким образом, при осуществлении *UBVRI*-фотометрии астероида и стандартной звезды солнечного типа соблюдается следующая последовательность действий: (1) проведение стандартных процедур коррекции плоского поля ПЗС-матрицы, а также учета темновых токов и шумов считывания сигнала на приемнике; (2) регистрация в каждом свето фильтре интенсивностей светового потока от астероида и звезды-аналога Солнца с вычитанием среднего фона неба; (3) контроль круговой симметрии изображения астероида по нескольким фотометрическим разрезам с целью обнаружения признаков выбросов вещества; (4) определение для каждой наблюдательной ночи значений функции спектральной прозрачности атмосферы в каждом свето фильтре путем сравнения интенсивностей света от стандартной звезды ($I_1(\lambda)$ и $I_2(\lambda)$) на разных воздушных массах ($M1$ и $M2$ соответственно) по следующей формуле:

$$f(\lambda) = [I_2(\lambda) / I_1(\lambda)]^{1/(M1-M2)};$$

(5) определение отражательной способности астероида на эффективных длинах волн светофильтров осуществляется по стандартной формуле расчета спектра отражения [10], то есть путем деления интенсивности светового потока от астероида на интенсивность светового потока от звезды-аналога

Солнца с учетом значений функции спектральной прозрачности атмосферы и разности воздушных масс на моменты наблюдений (при таком расчете «выносятся» за земную атмосферу величина отражательной способности астероида и устраняются различия в эквивалентных ширинах светофильтров, но главным условием корректности этого расчета является соблюдение ограничений на уровень измеряемой интенсивности света от объектов: она не должна выходить за пределы линейного участка чувствительности регистрирующей ПЗС-матрицы); (б) нормировка величин отражательной способности астероида, измеренная во всех светофильтрах, на значение этой величины в фильтре V (на эффективной длине волны 0.5448 мкм) и построение аппроксимированного спектра отражения астероида.

2.2. Спектральные признаки наличия разреженной пылевой экзосферы у астероидов

Как показали результаты спектрофотометрии примитивных астероидов Главного пояса (145 Адеоны, 704 Интерамнии и 779 Нины) и одного Марс-кроссера (1474 Бейры), находившихся у перигелия при высокой солнечной активности с 13 по 19 сентября 2012 г. [11], признаками сублимационной экзосферы являются нетипичные для минералогии астероидов максимумы (с относительной интенсивностью до 40-50%) в спектрах отражения около $\sim 0.40-0.50$ мкм или $\sim 0.60-0.70$ мкм. Усредненные и нормированные спектры отражения этих астероидов представлены на рисунках 1 (а, б, в, г). На рисунке 1г для сравнения приведен спектр астероида 1474 Бейры из базы SMASSII (в 1994 г., когда астероид был в неактивном состоянии).

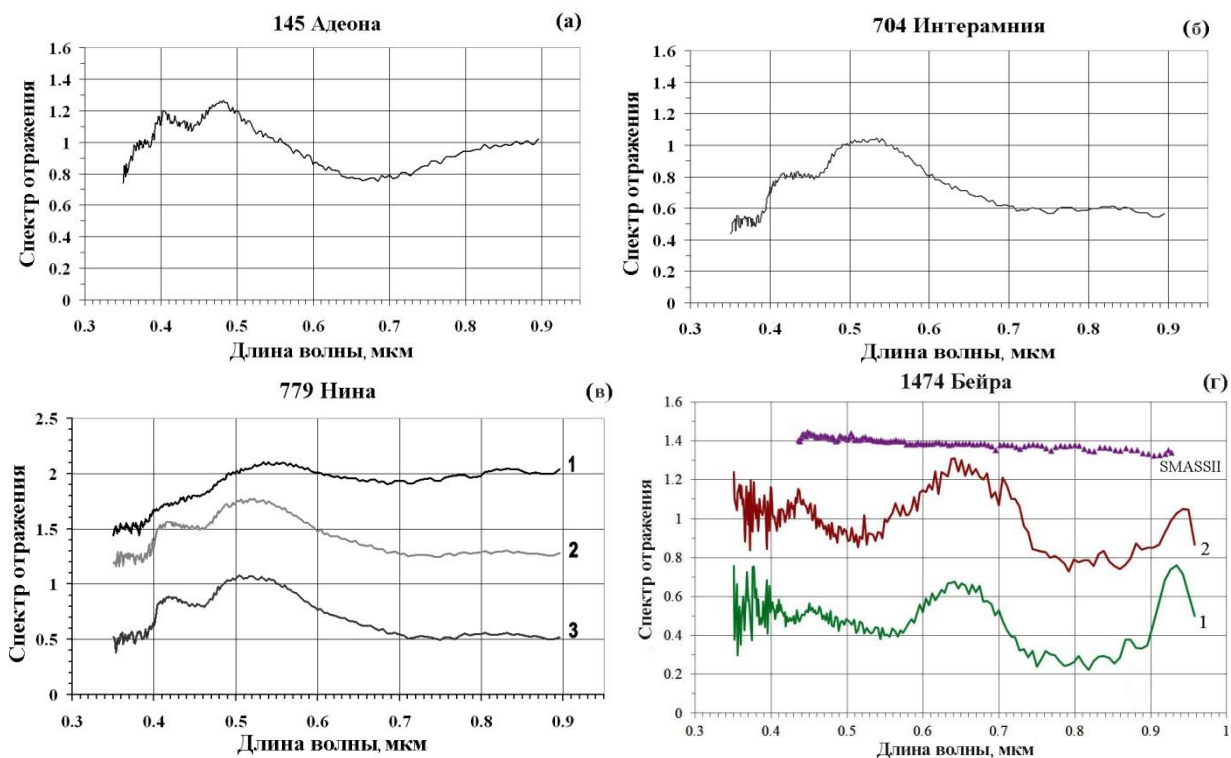


Рис. 1 (а, б, в, г). Нормированные (на 0.55 мкм) усредненные (по нескольким исходным) спектры отражения астероидов примитивных типов (с углисто-хондритовым составом) Главного пояса 145 Адеоны (19.09.2012), 704 Интерамнии (13.09.2012) и 779 (13.09.2012; спектры 1-3 получены при последовательных фазах вращения астероида в течение одной ночи), а также Марс-кроссера 1474 Бейры (18.09.2012 – спектр 1; 19.09.2012 – спектр 2).

Очевидно, что пылевая экзосфера астероидов является временным образованием (по причине слабости гравитационных полей этих тел, быстрой сублимацией ледяных частиц, выброшенных на поверхность или в пылевую экзосферу и т. п.). Но в условиях высокой солнечной активности, когда вспышечные и эруптивные события на Солнце повторяются особенно часто, спектральные признаки такой пылевой оболочки в спектрах активных астероидов становятся наиболее выраженными, что объясняется, вероятно, размерами экзосферы, возросшими под влиянием электромагнитных и корпускулярных волн в солнечном ветре.

В случае более разреженной пылевой экзосферы, особенно при низкой солнечной активности, в спектрах отражения астероидов отсутствуют описанные максимумы рассеяния света, но наблюдаются быстрые изменения общего наклона спектра на интервалах времени от нескольких десятков минут и больше, что нельзя объяснить изменениями минералогических характеристик при вращении астероидов. Это показали повторные спектральные и многополосные наблюдения 145 Адеоны, 779 Нины и 704 Интерамнии вблизи перигелия при низкой солнечной активности в 2016 и 2018 гг. в нескольких обсерваториях [12].

Обоснованием корректности интерпретации полученных наблюдательных результатов является численное моделирование спектров отражения условного астероида примитивного типа, окруженного пылевой экзосферой с малой оптической толщиной (<0.5) [13]. Основные результаты этого моделирования с использованием теории переноса излучения в рассеивающей среде, состоящей из субмикронных агрегатов частиц разного состава, представлены на рис. 2 (а-е).

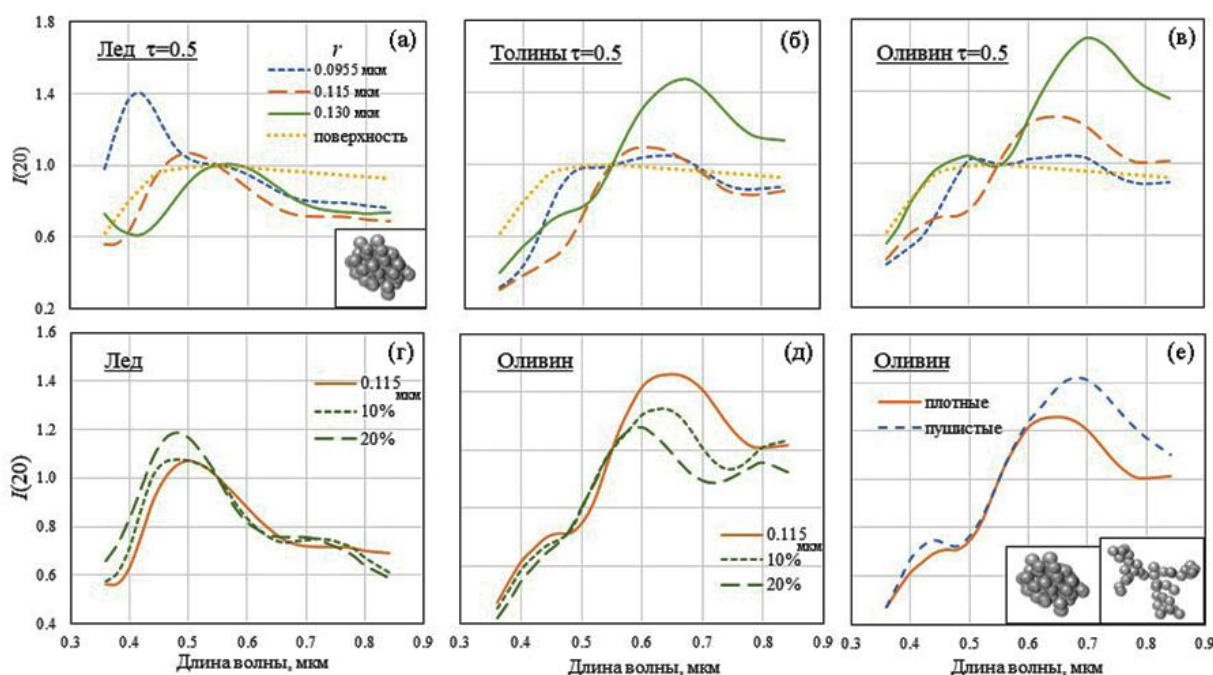


Рис. 2 (а-е). Модельные спектры отражения (спектры обратного рассеяния света при фазовом угле 20°) условного астероида примитивного типа (углисто-хондритового состава), окруженного пылевой экзосферой (с оптической толщиной 0.5), состоящей из субмикронных агрегатов пылевых частиц основных материалов (лед, толины, оливин) с разными показателями преломления и структурой, которая показана на вставках. Спектр «поверхность» (на рисунках 1а-1в) относится к астероиду без пылевой экзосферы. Размеры агрегатов частиц в микронах указаны на рисунках 1а, 1г и 1д. Численное моделирование спектров выполнено Е.В.Петровой [13].

2.3. Некоторые примеры (U)BVRI-спектров активных астероидов

В качестве примеров использования *UBVRI*-фотометрии для поиска признаков временной пылевой активности астероидов приведем некоторые из наших ранее полученных результатов.

На рисунках 3 (а, б) представлены аппроксимированные *BVRI*-спектры астероида 704 Интерамния, имевшего спектральные признаки сублимационной активности при прохождении окрестности перигелия в октябре-ноябре 2017 г. На рисунке 3а приведен усредненный (по 10 наблюдательным сетам) *BVRI*-спектр этого астероида до прохождения перигелия, полученный в обсерватории Санглок на 1-м телескопе (Таджикистан) 25 октября 2017 г., на котором имеется характерный максимум рассеяния света в экзосфере астероида на ~ 0.55 мкм. Очень близкое совпадение 10 последовательных спектров характеризует превосходные фотометрические условия при измерении этих спектров (практически совпадающие точки на рис. 3а). По положению максимума на ~ 0.55 мкм на рис. 3а можно допустить (при сравнении с модельными спектрами на рисунках 2а и 2г), что в экзосфере астероида преобладали агрегатные частицы силикатно-ледяного состава. В то же время на рисунке 3б приведен усредненный по трем наблюдательным сетам *BVRI*-спектр 704 Интерамния после прохождения перигелия, 11 ноября 2017 г., полученный в Крымской обсерватории ГАИШ (на 0.6-м телескопе). Видно, что на этом спектре имеется максимум рассеяния света в экзосфере на ~ 0.55 мкм, а также признаки более длинноволнового максимума около ~ 0.8 мкм (рис. 3б). Исходя из этого, можно предполагать, что после прохождения астероидом перигелия и, соответственно, прогрева его поверхности до более высоких температур, усиление сублимации льдов привело к выносу в экзосферу более крупных частиц, которые вызвали рассеяние света вблизи ~ 0.8 мкм [12].

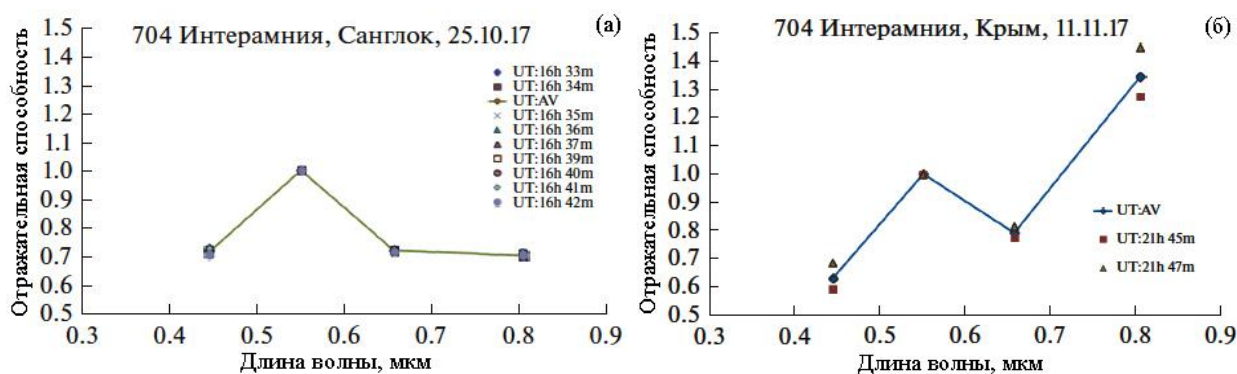


Рис. 3 (а, б). Усредненные и нормированные (на 0.55 мкм) *BVRI*-спектры астероида 704 Интерамния с признаками сублимационной активности до прохождения перигелия 25.10.17 (Санглок, 1-м телескоп) и после прохождения перигелия 11 ноября 2017 г. (Крымская обсерватория ГАИШ, 0.6-м телескоп) [12].

Пример предполагаемой более слабой пылевой (сублимационной) активности астероида 145 Адеона у перигелия 7 февраля 2018 г., обнаруженной по значительным изменениям общего наклона *UBVRI*-спектра приведен на рисунке 4а. На графике 4б приведен спектр ближайшей к астероиду стандартной звезды (на том же ПЗС-изображении), на которых таких изменений нет [12], что подтверждает пылевую активность астероида.

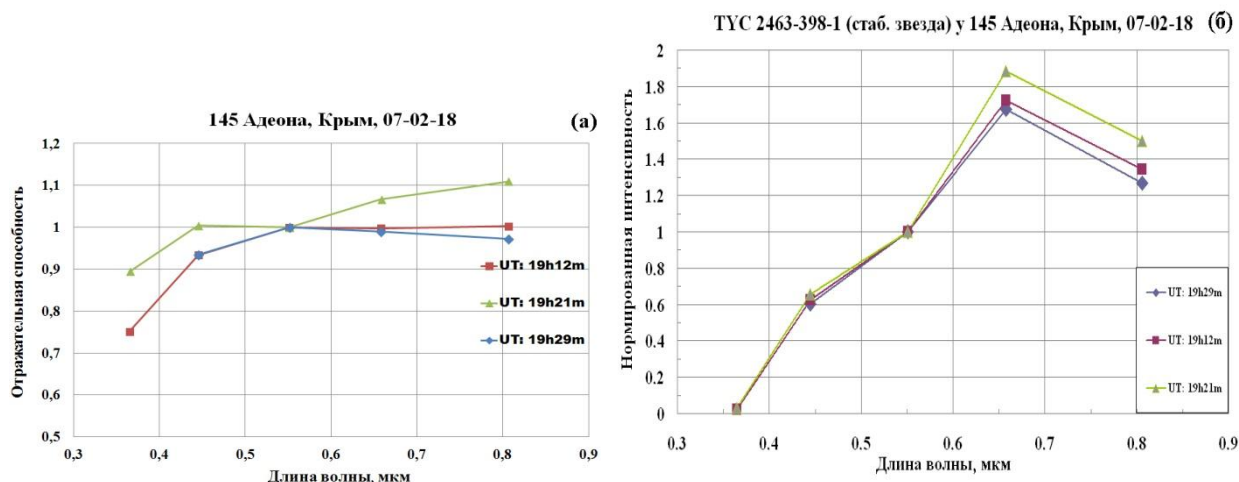


Рис. 4 (а, б). Нормированные *UVBRI*-спектры отражения астероида 145 Адеона у перигелия 7 февраля 2018 г., полученные в Крымской обсерватории ГАИШ на 0.6-м телескопе (а), и нормированные спектры неперменной звезды (б) на тех же ПЗС-кадрах для сравнения.

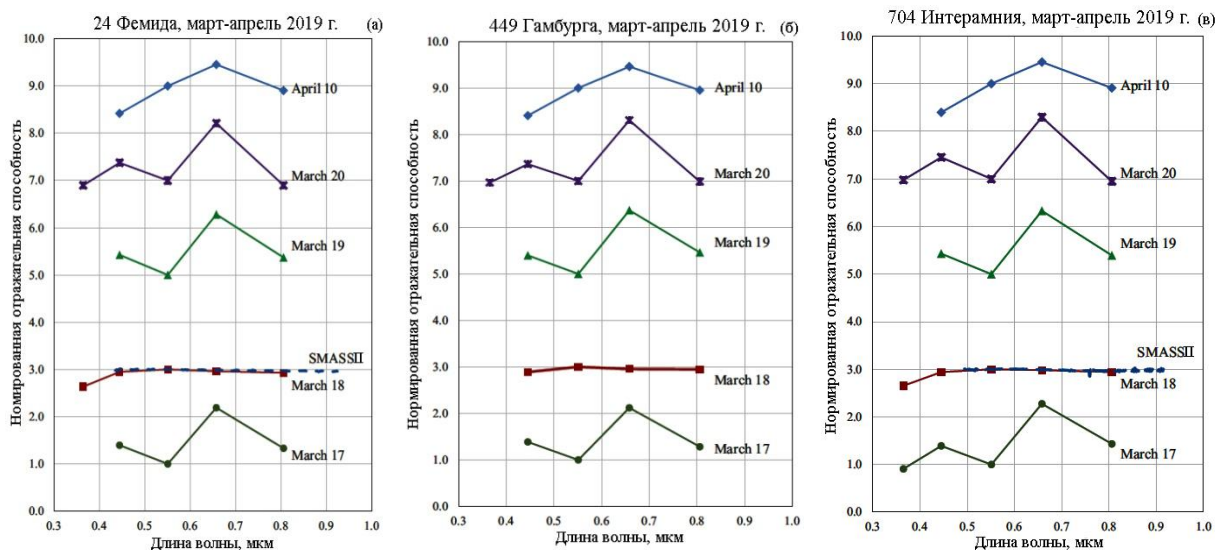


Рис. 5 (а-в). Нормированные (на 0.55 мкм) и смещенные по вертикальной оси для удобства сравнения (*UVBRI*-спектры отражения активных астероидов 24 Фемиды (а), 449 Гамбург (б) и 704 Интерамнии (в), полученные в марте-апреле 2019 г. Эффект воздействия на экзосферы астероидов ударной волны в солнечном ветре виден на спектрах 18 марта [13].

И, наконец, последний пример, который показывает возможность обнаружения и изучения солнечной активности по изменениям характера пылевой активности астероидов. При наблюдениях одновременной сублимационной активности вблизи перигелия трех астероидов примитивных типов Главного пояса – 24 Фемиды, 449 Гамбург и 704 Интерамнии – в марте 2019 г. нам удалось обнаружить воздействие ударной волны в солнечном ветре на экзосферу этих астероидов [13]. Эта ударная волна образовалась в результате близких по времени вспышек и корональных выбросов вещества, произошедших на Солнце 8-9 марта 2019 г. в период низкой солнечной активности. Эффектом воздействия ударной волны в солнечном ветре на данные астероиды явилось «сметание» их сублимационной экзосферы в антисолнечном направлении 18 марта 2019 г. (см. рис. 5), в результате чего на всех трех астероидах исчезли спектральные признаки пылевой активности в виде упоминавшихся

максимумов рассеяния света и мы увидели спектр отражения оголенной твердой поверхности этих тел, совпадающий по форме с имеющимися более ранними спектрами из базы SMASSII (<https://sbnapps.psi.edu/ferret/>) астероидов 24 Фемида и 704 Интерамния.

3. Вывод

Таким образом, эффективные длины волн светофильтров U , B , V , R и I практически совпадают с перечисленными спектральными особенностями активных астероидов в видимом диапазоне. Это означает, что метод наблюдений, основанный на данном наборе светофильтров, является оптимальным при поиске разреженных пылевых экзосфер астероидов и не уступает по чувствительности классической спектрофотометрии. Но очевидно, что более высокое спектральное разрешение спектрофотометрии также востребовано и необходимо для обнаружения и изучения минералогических полос поглощения в спектрах отражения астероидов. Представленные результаты демонстрируют возможности $UBVRI$ -фотометрии для аппроксимации формы спектров отражения астероидов с целью поиска признаков их пылевой активности и изучения внешних физических факторов, вызывающих такую активность.

Благодарности

Автор выражает благодарность Российскому Научному Фонду за финансовую поддержку работы (грант РФФ 22-12-00115).

Поступило 02.12.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hsieh H.H., Jewitt D., Fernandez Y.R. The strange case of 133P/Elst-Pizarro: A comet among the asteroids. – *Astron. J.*, 2004, v.127, pp.2997-3017.
2. Hsieh H.H., Jewitt D.A. Population of Comets in the Main Asteroid Belt. – *Science*, 2006, v.312, pp.561-563.
3. Jewitt D. The active asteroids. – *Astron. J.*, 2012, v.143, Issue 1, 14 pp.
4. Jewitt D., Hsieh H.H. The Asteroid-Comet Continuum. – Chapter in press for the book *Comets III*, edited by K. Meech and M. Combi, University of Arizona Press. arXiv:2203.01397v1 [astro-ph.EP] 2 Mar 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.01397>.
5. Bessell M.S. Standard photometric systems. – *Annu. Rev.Astron.Astrophys.*, 2005, v.43, pp.293-336.
6. Landolt A.U., Uomoto A.K. Optical multicolor photometry of spectrophotometric standard stars. – *Astron. J.*, 2007, v.133, pp.768-790.
7. Lang D., Hogg D.W., Schlegel D.J. WISE photometry for 400 million SDSS sources. – *Astron. J.*, 2016, v.151, Issue 2, 12 pp.
8. Pravec P., Wolf M., Šarounová L. Lightcurves of 26 Near-Earth Asteroids. – *Icarus*, 1998, v.136, pp.124-153.
9. Erasmus N., McNeill A., Mommert M. et al. A taxonomic study of asteroid families from KMTNET-SAAO multiband photometry. – *Astroph. J. Suppl. Ser.*, 2019, v.242, Issue 2, 12 pp.
10. Бусарев В.В. Спектрофотометрия безатмосферных тел Солнечной системы. – *Астрон. вестн.*, 1999, т.33, с.140-150.
11. Бусарев В.В., Барабанов С.И., Пузин В.Б. Оценка состава вещества и обнаружение сублимационной активности астероидов 145 Адеоны, 704 Интерамнии, 779 Нины и 1474 Бейры. – *Астрон. вестн.*, 2016, v.50, с.300-312.

12. Бусарев В.В., Щербина М.П., Барабанов С.И., Ирсамбетова Т.Р., Кохирова Г.И., Хамроев У.Х., Хамитов И.М., Бикмаев И.Ф., Гумеров Р. И., Иртуганов Э.Н., Мельников С.С. Подтверждение сублимационной активности примитивных астероидов Главного пояса 779 Нины, 704 Интерамнии и 145 Адеоны и ее вероятные спектральные признаки у 51 Немаузы и 65 Цибелы. – Астрон. вестн., 2019, т.53, с. 273-290.
13. Busarev V.V., Petrova E.V., Irsambetova T.R., Shcherbina M.P., Barabanov S.I. Simultaneous sublimation activity of primitive asteroids including (24) Themis and (449) Hamburga: Spectral signs of an exosphere and the solar activity impact. – Icarus, 2021, v. 369. id. 114634, 18 pp.

В.В.Бусарев

ИСТИФОДАИ ФОТОМЕТРИЯИ БИСЪЁРБАНДА БАРОИ ЧУСТУЧЌИ НИШОНАҲОИ ЧАНГИИ ФАЪОЛНОКИИ АСТЕРОИДҲО

*Институти астрономии давлатии ба номи П.К.Штернбергии ДДМ ба номи М.В.Ломоносов
(ИАД ДДМ),*

Институти астрономияи Академияи илмҳои Россия, (ИНАСАН)

Истифодаи усули фотометрияи UBVR-и астероидҳо барои наздик кардани шакли спектрҳои инъикоси содакардашудаи онҳо дар диапазонҳои намоён ва наздики инфрасурх баррасӣ мешавад. Ин усул имкон медиҳад, ки шумораи зиёди астероидҳоро дар муддати маҳдуди мушоҳида тадқиқ намуда, шакли спектри инъикоси онҳо зуд муайян карда мешаванд. Бартарӣ ва камбудии ин усул дар муқоиса бо спектрофотометрияи классикӣ ҳангоми чувствувӣ ва омӯхтани экзосфераи сусти чанголд, ки дар наздикии астероидҳо дар натиҷаи фаъолияти сублиматсионӣ ё дигар равандҳои физикӣ пайдо мешаванд, муҳокима хоҳанд шуд.

Калимаҳои калидӣ: астероидҳо, UBVR-фотометрия, спектрофотометрия, ошкор намудани фаъолияти чанги астероидҳо.

V.V.Busarev

APPLICATION OF MULTIBAND PHOTOMETRY TO SEARCH FOR SIGNS OF ASTEROIDS DUST ACTIVITY

*Sternberg Astronomical Institute, Moscow University,
Institute of Astronomy, Russian Academy of Sciences*

The application of the UBVR photometric method for a simplified approximation of the shape of reflectance spectra of asteroids in the visible and near infrared ranges is considered. This makes it possible to observe a significant number of asteroids in a limited time and to promptly assess the shape of their reflectance spectra. The advantages and disadvantages of this method in comparison with classical spectrophotometry in the search and study of a weak dusty exosphere that occurs on asteroids as a result of sublimation activity or other physical processes are discussed.

Key words: asteroids, UBVR photometry, spectrophotometry, detection of asteroid dust activity.

УДК 621.31

Специальность: 1.3.13 – Электрофизика, электрофизические установки

М.А.Кудусов, член-корреспондент НАН Таджикистана У.Мадвалиев*, А.Р.Мукумов**,

С.Ф.Абдуллаев**

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЕСТЕСТВЕННОЙ ПЫЛИ НА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ СОЛНЕЧНЫХ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ В УСЛОВИЯХ г. ДУШАНБЕ

*Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими,***ОАО «Системаавтоматика»,****Физико-технический институт им. С. У. Умарова НАН Таджикистана*

В статье приведены результаты исследования влияния осажденной на поверхности солнечных панелей пыли на их производительность в естественных условиях города Душанбе за два месяца (июль-август 2022 г.). Результат тестирования в стандартных условиях показал, что производительность панелей снижается до 36% при плотности пыли 0.427 мг/см². Показано, что коэффициент корреляции фотоэлектрических панелей от интенсивности солнечного излучения ухудшается летом, что является следствием накопления пыли на поверхности фотоэлектрических панелей.

Ключевые слова: *солнечная энергия, пылевое вторжение, влияние пыли, фотоэлектрические панели, накопление и осаждение пыли.*

Солнечная энергетика является одной из быстрорастущих отраслей возобновляемой энергетики во всем мире и приоритетным направлением в энергосистеме Республики Таджикистан. Для преобразования солнечного излучения в электрическую энергию используются солнечные фотоэлектрические панели. Производительность этих панелей зависит от географических факторов, факторов окружающей среды (температура, влажность, загрязнение, пыль, дождь и т.д.), а также и технологии их производства (монокристаллические, поликристаллические и др.) [1].

Таджикистан расположен в глобальном пылевом поясе, на пути таких источников пыли, как пустыни Аралкум, Кызылкум, Каракум, Дашти Кабир, Дашти Лут, Сахара, а также Гоби и Такла-Макан [2]. Поэтому Таджикистан ежегодно (чаще всего с апреля по ноябрь) подвергается сильным пылевым вторжениям и его территория является накопителем пыли [2]. За последние 30 лет количество и продолжительность пылевых вторжений в Таджикистан, особенно в его южные и центральные части, существенно увеличилось: если в начале 90-х годов были зарегистрированы два-три сильных эпизода в год с продолжительностью от 3-5 часов и атмосфера очищалась ливневыми осадками, то в последние годы наблюдается тенденция увеличения количества эпизодов с продолжительностью от 5-15 дней и, при этом, пик пылевых вторжений соответствует периоду отсутствия осадков [2]. Ре-

Адрес для корреспонденции: Мадвалиев Умархон. 734024, Таджикистан, г. Душанбе, ул. Дружбы Народов, 62, ОАО «Системаавтоматика». E-mail: umarkhon@mail.ru

кордная продолжительность пылевого вторжения зарегистрирована летом 2001г. (29 непрерывных дней) в г. Душанбе. По измеренным данным среднее годовое значение интенсивности осаждения пылевого аэрозоля в некоторых регионах Таджикистана, например для Шаартуза, составляет 206-617 г/(м²·год) [2]. Урбанизация и индустриализация страны также способствует попаданию твердых частиц в атмосферу [3]. Эта тенденция наблюдается и в других странах Центральной Азии [4]. В связи с потеплением и изменением климата в ближайшие годы количество пыльных и песчаных бурь растет, и исследование влияния пыли на производительность солнечных фотоэлектрических панелей является особенно актуальным, так как потепление климата влечет за собой ускоренное таяние ледников, которые являются основными источниками водных ресурсов рек, использующихся в гидроэнергетике Таджикистана.

В целом пыль влияет на производительность панелей в двух случаях или в комбинации этих случаев: рассеяние в атмосфере и осаждение пыли на поверхности солнечных фотоэлектрических панелей. Существует много исследований о влиянии осажденной пыли на производительность солнечных фотоэлектрических систем, но большая часть имеющейся информации действительна только для их конкретного местоположения [5-7]. Однако отсутствует соответствующая информация о последствиях осаждения пыли для конкретного места в Таджикистане, которая могла бы быть эффективно использована при проектировании и расчете мощностей фотоэлектрических станций.

Оценка влияния осажденной пыли на производительность фотоэлектрических панелей в стандартных условиях измерения

Влияние осажденной пыли было исследовано с использованием двух монокристаллических фотоэлектрических панелей марки ODA 110-18-M [8] номинальной мощностью 110 Вт. Панели были размещены на площадке ОАО «Системаавтоматика» в городе Душанбе (38°34'4.7" с. ш. 68°48'52" в. д. высота 830 м над уровнем моря) на стойке, обращенной к югу, с фиксированным углом наклона 30°, так как именно этот угол является оптимальным для г. Душанбе [9] (рис. 1, а).



Рис. 1. Внешний вид испытуемых панелей а) панели с осажденной пылью, б) визуальное сравнение чистой панели и загрязнённой панели.

Солнечные фотоэлектрические панели были установлены на открытом воздухе в течение двух месяцев (июль–август 2022 г.) для естественного накопления пыли на поверхности панелей (эти па-

нели называются «загрязнёнными» панелями). Влияние пыли определялось путем сравнения выходных параметров чистых и загрязненных панелей в стандартных условиях испытаний (STC, 1000 Вт/м², 25 °С) с помощью тестера солнечных панелей BSMT204 в соответствии с IEC 60904:2020 до и после накопления пыли [8]. Вольт-амперные характеристики фотоэлектрических панелей приведены на рис. 2.

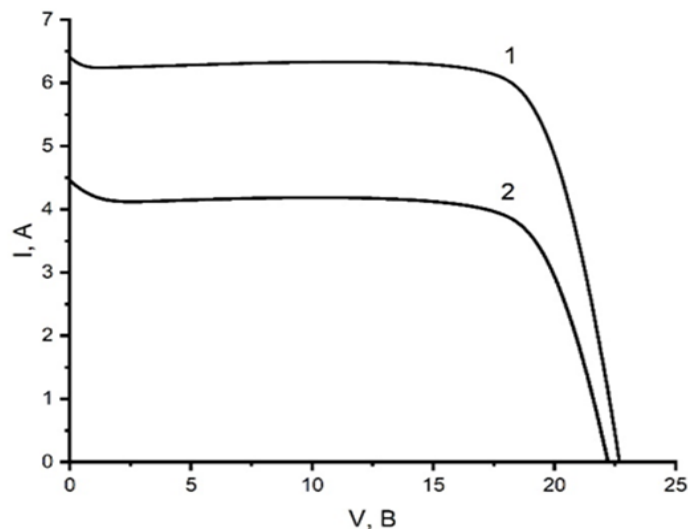


Рис. 2. Сравнение вольт-амперных характеристик фотоэлектрических панелей в стандартных условиях измерения. 1 – чистая фотоэлектрическая панель, 2 – загрязнённая фотоэлектрическая панель.

Таблица 1

Результаты измеренных характеристик чистой и загрязнённой фотоэлектрических панелей

Фотоэлектрическая панель	Чистая	Загрязнённая
Номинальная мощность (P_{max}), Вт	109.4	70.2
Номинальное напряжение (V_{mp}), В	18.42	18.22
Номинальный ток (I_{max}), А	5.94	3.85
Напряжение при разомкнутом контуре (V_{oc}), В	22.68	22.21
Ток короткого замыкания (I_{sc}), А	6.40	4.45
Фактор заполнения (FF), %	75.34	70.8
Шунтирующее сопротивление (сопротивление тока утечки в землю) (R_{sh}), Ом	110.41	142.82
Последовательное сопротивление (внутреннее сопротивление ячейки (R_s), Ом	0.48	0.66

Потери мощности $P_{потеря}$ фотоэлектрической панели могут быть рассчитаны с помощью уравнения (3), используя соотношение [10]:

$$P_{потеря} = \frac{P_{чистая} - P_{загрязнённая}}{P_{чистая}} \cdot 100\% \quad (1)$$

Плотность пыли измерялась путем взвешивания пыли, осевшей на панели, с использованием аналитических весов модели Sartorius BSA 224S-CW. Плотность пыли, скопившейся на поверхности панелей, составила ~0.427 мг/см² после 8 недель воздействия окружающей среды, и в результате измерений было определено, что мощность фотоэлектрических панелей снизилась на ~36%. Во время проведения измерений погодные условия в основном были солнечными и без дождей.

Из-за слипания на поверхности панелей происходит накопление большой доли мелких частиц, а более крупные частицы, с большей вероятностью, очищаются ветром [11]. Анализ распределения частиц пыли по размерам в диапазоне 50-1600 мкм проводился под микроскопом Olympus BX53 (табл. 2).

Таблица 2

Процентное соотношение распределения частиц пыли по размерам

Размеры частиц, мкм	50-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	>700
%	9	24	15	13	10	6	7	14

Оценка влияния осажженной пыли на производительность солнечной фотоэлектрической станции (СФЭС)

На рис.3 показан пример накопления пыли на поверхностях фотоэлектрических панелей СФЭС города Душанбе. Для оценки влияния осажженной пыли на производительность панелей используются данные СФЭС Родильного дома №1 мощностью 34 кВт (38°34'39" с. ш. 68°47'38" в. д., высота 845 м над уровнем моря). Данная станция интегрирована во внешнюю электросеть с системой мониторинга и оснащена сетевым инвертором РМС100ТD (40 кВт). С помощью устройств мониторинга, таких как термометр МТ-052 и пиранометр MS-602, осуществляется ежедневный, ежемесячный и ежегодный сбор и накопление данных выходной электрической мощности P , температуры окружающей среды T_a и интенсивности солнечного излучения H на поверхности фотоэлектрических панелей. СФЭС оснащена преобразователем сигналов 2-TD-TJC и SS4851-TR-ACW и программным обеспечением ESAP2-HE для мониторинга функционирования системы.



Рис. 3. Осажденная пыль на поверхности фотоэлектрических панелей Солнечной фотоэлектрической станции мощностью 40 кВт Научно-исследовательского института акушерства, гинекологии и перинатологии Таджикистана.

Согласно экспериментальным данным выходная мощность фотоэлектрических панелей линейно зависит от интенсивности солнечного излучения, падающей на поверхности панелей. [11]. Все

модели для оценки максимальной выходной мощности фотоэлектрических панелей в качестве входных данных используют интенсивность излучения и температуру панели. В данной работе расчет максимальной выходной мощности панели P_m был выполнен по следующей линейной модели [12]:

$$P_m = P_{stc} (1 + \gamma (T_m - 25)) \frac{\tau_g H}{1000}, \quad (2)$$

$$T_m = T_a + (T_{noct} - 20) \frac{H}{800}, \quad (3)$$

где τ_g – коэффициент пропускания стекла фотоэлектрической панели со стеклянной крышкой ($\tau_g = 1$ для незастекленной фотоэлектрической панели и $\tau_g = 0.85$ для застекленной фотоэлектрической панели [12]), P_{stc} – максимальная мощность при стандартных условиях тестирования, когда солнечное излучение составляет 1000 Вт/м^2 , а температура фотоэлектрической панели T_m составляет 25°C , γ – температурный коэффициент ($\gamma = 0.0045$).

На рис. 4.а. показана зависимость выходной мощности P фотоэлектрических панелей СФЭС от интенсивности солнечного излучения H по сезонам года. Интенсивность солнечного излучения H была выбрана в диапазоне $800\text{-}1000 \text{ Вт/м}^2$, так как в этом диапазоне погрешность линейных моделей наименьшая [13]. Как видно из приведенных данных, коэффициент корреляции очень высокий зимой и весной по сравнению с осенью и летом. Уменьшение коэффициента детерминации летом связано с накоплением пыли на поверхности фотоэлектрической панели и пиранометра (осевающая пыль на поверхности пиранометра снижает оценку интенсивности солнечного излучения до 20% [14]).

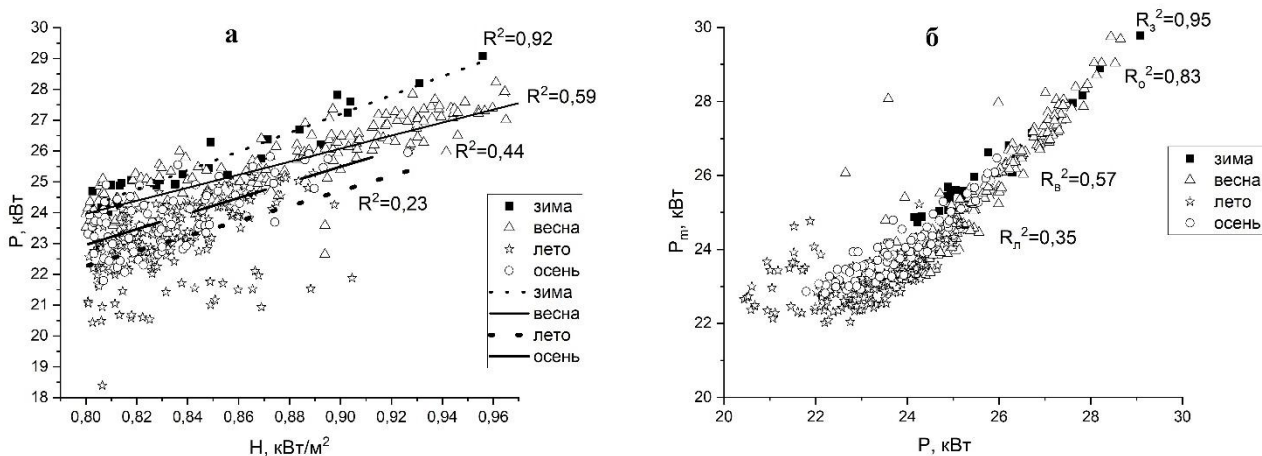


Рис. 4. Зависимость выходной электрической мощности фотоэлектрической панели: а) от интенсивности излучения; б) от максимальной выходной мощности фотоэлектрической панели согласно линейной модели.

Сравнительный анализ максимальной выходной электрической мощности фотоэлектрической панели P_m , согласно линейной модели (2) с измеренными данными P , показан на рис. 4б.

Выводы

В данной статье было исследовано влияние пыли на производительность солнечных фотоэлектрических панелей. Фотоэлектрические панели подвергались воздействию реальных условий на открытом воздухе в г. Душанбе в течение 8 недель. Плотность пыли, осевшей на поверхности фотоэлектрических панелей, в конце эксперимента составила 0.427 мг/см^2 . Результат исследования показал, что производительность панелей снижается до 36%. Показано, что коэффициент детерминации между P и H ухудшается летом (0.23), что является следствием накопления пыли на поверхности фотоэлектрических панелей. Этот показатель для зимнего периода в отсутствии пыли равняется 0.92, что является хорошим коэффициентом детерминации. Для определения целесообразного периода очистки панелей от пыли необходимы более детальные исследования.

Поступило 03.02.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sayyah Arash, Horenstein Mark N., Mazumder Malay K. Energy yield loss caused by dust deposition on photovoltaic panels – Solar Energy. 2014, v. 107, pp. 576-604.
2. Назаров Б.И., Абдуллаев С.Ф., Маслов В.А. Атмосферный аэрозоль Центральной Азии. – Душанбе: Дониш, 2017, 416 с.
3. Электронный ресурс: Рязанов А.В., Муртазоев Ш.А. Анализ уровня загрязненности атмосферы в г. Душанбе Республики Таджикистан. – <https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-urovnya-zagryaznennosti-atmosfery-v-g-dushanbe-respubliki-tadzhikistan>. – [Дата обращения: 11. 01. 2023]
4. Шогучкаров С.К., Жамолов Т.Р., Болиев А.М. Исследование влияния различных концентраций пыли на вольт-амперные характеристики фотоэлектрической батареи. – Universum: Технические науки: электрон. научн. журн., 2019, №4(61) – URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/7213> – [Дата обращения: 29.01.2023].
5. Sanaz Ghazi, Ali Sayigh, Kenneth Ip. Dust effect on flat surfaces Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2014, v. 33, pp. 742-751.
6. Shenouda R., Abd-Elhady M.S. & Kandil H.A. A review of dust accumulation on PV panels in the MENA and the Far East regions. – J. Eng. Appl. Sci., 2022, v.69, Iss.8 . DOI:10.1186/s44147-021-00052-6.
7. Adel A Hegazy. Effect of dust accumulation on solar transmittance through glass covers of plate-type collectors. – Renewable Energy, 2001, v. 22, Iss. 4, pp. 525-540. DOI:10.1016/S0960-1481(00)00093-8.
8. Электронный ресурс: International Standard <https://webstore.iec.ch/publication/32004> – [Дата обращения: 11.01.2023].
9. Кудусов М., Мадвалиев У. Оценка прихода солнечной энергии и выбор оптимального угла наклона солнечных панелей для разных городов Таджикистана. – ДАН РТ, 2020, т.63, № 9-10, с. 610-617.
10. Bashir M.A., Ali H.M., Ali M., and Siddiqui A.M. An Experimental Investigation of Performance of Photovoltaic Modules in Pakistan, Online. – Thermal Science, 2015, v.19, pp.525–534.
11. Kazmerski L., Diniz A., Cristiana Brasil Maia, et al. Fundamental studies of the adhesion of dust to PV module chemical and physical relationships at the microscale. – IEEE Journal of Photovoltaics, 2016, v.6, pp. 719-729,
12. Sun V. et al. Evaluation of nominal operating cell temperature (NOCT) of glazed photovoltaic thermal module. – Case Studies in Thermal Engineering, 2021, v. 28, pp.101-361.
13. Kun Ding et al. Comparison of Parameterisation Models for the Estimation of the Maximum Power Output of PV Modules. – Energy Procedia, 2012, v. 25, pp. 101-107.

14. Kudusov M.A., Madvaliev U., Elistratov V.V. Evaluation of the Efficiency of Already Existing Network Solar Photovoltaic Plants Operating 24/7/365 in Low-Voltage Power Supply Systems of Social Facilities in the city of Dushanbe. – Applied Solar Energy, 2021, v. 57, №4, pp. 323–332

М.А.Кудусов, У.Мадвалиев*, А.Р.Муқумов**, С.Ф.Абдуллаев**

ТАҲЛИЛИ ТАЪСИРИ ЧАНГИ ТАБИИ БА КОРИ ПАНЕЛҲОИ ФОТОЭЛЕКТРИКИИ ОФТОБӢ ДАР ШАРОИТИ ДУШАНБЕ

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ,

**ҶСК «Системавтоматика»,*

***Институту физикаю техникаи ба номи С.У.Умаров АМИТ*

Дар мақолаи мазкур таҳқиқоти таъсири чанги чамъшуда дар сатҳи лавҳаҳои офтобӣ ба кори онҳо дар шароити табиӣ шаҳри Душанбе дар давоми ду моҳ (июл-август соли 2022) баррасӣ шуд. Натиҷаи озмоиш дар шароити стандартӣ нишон дод, ки тавоноии лавҳаҳо ҳангоми зичии чанг $0,427 \text{ мг/см}^2$ будан то 36 % кам мешавад. Нишон дода шуд, ки вобастагии хурди тавоноии лавҳаҳои фотоэлектрикӣ нисбат ба интенсивияти нури офтоб дар тобистон аз ҳисоби чамъшавии чанг дар рӯи лавҳаҳои фотоэлектрикӣ мебошад.

Калимаҳои калидӣ: *энергияи офтоб, воридшавии чанг, таъсири чанг, кори панелҳои офтобӣ, чамъшавӣ ва таҳшиншавии чанг, лавҳаи фотоэлектрикӣ.*

М.А.Kudusov, U.Madvaliev*, A.R.Muqumov**, S.F.Abdullaev**

ANALYSIS OF THE EFFECT OF NATURAL DUST ON THE PERFORMANCE OF SOLAR PHOTOVOLTAIC PANELS IN THE CONDITIONS OF DUSHANBE

M.S.Osimi Tajik Technical University,

**OJSC "Systemavtomatika"*

***S.U.Umarov Physical Technical Institute, National Academy of Sciences of Tajikistan*

The article presents the result of investigation of influence of deposited dust on the surface of solar panels on their performance in natural conditions in Dushanbe for two months (July-August 2022) was considered. The result of testing under standard conditions showed that the performance of panels decreases to 36% at a dust density of 0.427 mg/cm^2 . It is shown that the weak dependence of the output power of photovoltaic modules on the intensity of solar radiation in summer is a consequence of the accumulation of dust on the surface of photovoltaic modules.

Key words: *solar energy, dust intrusion, dust impact, solar panel performance, dust accumulation and deposition, photovoltaic panel.*

УДК 624.042

Специальность: 2.1.1 – Строительные конструкции, здания и сооружения

Член-корреспондент НАН Таджикистана Д.Н.Низомов, И.И.Каландарбеков*,

И.К.Каландарбеков*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ НА ОСНОВЕ
ТЕОРИИ ПОДОБИЯ***Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана,***Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими*

Рассматривается применение теории подобия к моделированию статических и динамических задач строительной механики на основе анализа дифференциальных уравнений, описывающих исследуемые процессы при различных воздействиях. На различных примерах получены константы подобия, выражающих отношение одноименных величин в натуре и модели.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, теория подобия, коэффициенты подобия, условия однозначности, свободные колебания, вынужденные колебания, вибрационная нагрузка.

Введение. Эксперимент, производимый для проверки правильности и применимости полученных результатов математического моделирования, представляет собой физическое моделирование. Физическое моделирование используется при проектировании и строительстве различных объектов, где предусматривается применения новых конструктивных решений с целью повышения их сейсмостойкости. Необходимым условием физического моделирования являются геометрическое, временное и физическое подобия, а также подобие начальных и граничных условий модели и природы. Подобие – это возможность распространения результатов эксперимента с модели на оригинал. Теория подобия позволяет результаты экспериментальных исследований, получаемых на моделях, переносить на реальные объекты.

Безразмерные константы подобия, выражающие отношение одноименных величин в натуре и модели, изменяются от соотношения размеров природы и модели. Система дифференциальных уравнений, описывающая исследуемый процесс, вместе с начальными и граничными условиями образуют математическую модель исследуемого объекта как для природы, так и для его модели.

Моделирование механических процессов, основанное на четырех теоремах подобия (Кирпичев, 1951; Седов, 1977; Гухман, 1973; Шаповалов, 1990), осуществляется исходя из следующих требований: 1) модель и натуральный объект должны удовлетворять требованиям геометрического подобия; 2) механические процессы, происходящие в модели и натуре, описываются одинаковыми уравнениями в безразмерном виде; 3) безразмерные параметры, входящие в уравнения модели и природы,

Адрес для корреспонденции: Низомов Джахонгир Низомович. 734029, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ. E-mail: tiees@mail.ru; Каландарбеков Ифтихор Имомёрбекович, Каландарбеков Имомёрбек Каландарбекович. 734042, г. Душанбе, пр. академиков Раджабовых, 10А. E-mail: iftikhor791@mail.ru, kalandarbekov-55@mail.ru

должны иметь одинаковые численные значения; 4) начальные и граничные условия модели и натура, записанные в безразмерном виде, должны тождественно совпадать.

Критерии подобия дают правила переноса результата эксперимента с модели на натуру. Для определения безразмерных коэффициентов подобия применяются: 1) метод анализа дифференциальных уравнений, описывающих исследуемый процесс; 2) метод анализа размерностей параметров поставленной задачи. Метод анализа размерностей для определения коэффициентов подобия основан на второй теореме подобия и применяется в случае, когда исследуемый процесс не имеет строгого математического описания (Кирпичев, 1953; Алабужев, 1968; Веников, 1976; Баренблатт, 1987). Здесь мы будем использовать первый метод, где с целью получения критериев подобия, дифференциальные уравнения приводятся к безразмерному виду.

Подобные объекты описываются одной системой дифференциальных уравнений и имеют подобные условия однозначности, которые включает в себя геометрическое подобие, временное подобие, подобие физических величин, подобие начальных и граничных условий.

Пример 1. Статика. Изгиб простой балки от действия сосредоточенной силы (рис.1). Дифференциальное уравнение изгиба балки представляется в виде (Дарков, Шапиро, 1969)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M(x)}{EI}, \tag{1}$$

где w, M, EI – прогиб, изгибающий момент и изгибная жесткость балки.

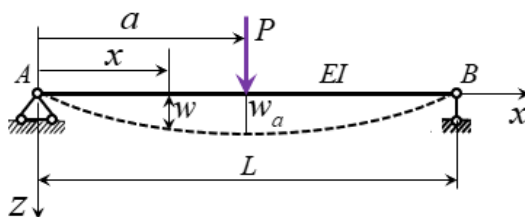


Рис. 1. Изогнутая ось балки.

Рассмотрим два геометрически подобных объекта – модель m и натура n . Для аргумента x , функции $w(x)$, параметров I, E, M вводим характерные размерные параметры: l_0, w_0, I_0, E_0, M_0 . Тогда соответствующие безразмерные величины записываются в виде

$$\bar{x} = x/l_0, \quad \bar{w} = w/w_0, \quad \bar{I} = I/I_0, \quad \bar{E} = E/E_0, \quad \bar{M} = M/M_0. \tag{2}$$

Уравнение (1) с учетом (2) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_0}{l_0^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}, \quad \frac{M}{EI} = \frac{M_0}{E_0 I_0} \frac{\bar{M}}{\bar{EI}},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} = -\pi \frac{\bar{M}}{\bar{EI}}, \quad \pi = \frac{M_0 l_0^2}{w_0 E_0 I_0}, \tag{3}$$

где обозначение буквой « π » от греческого термина «параметр». Если за характерные размерные параметры:

$$l_0, w_0, M_0, I_0, E_0,$$

принять соответственно

$$l_0 = L, w_0 = w_a, M_0 = PL, I_0 = I, E_0 = E,$$

то безразмерный параметр подобия π представляется в виде

$$\pi = \frac{PL^3}{w_a EI} = c, \Rightarrow w_a = \frac{1}{c} \frac{PL^3}{EI}. \tag{4}$$

Из (4) следует, что без решения уравнения (1) с точностью до постоянного коэффициента c получена зависимость максимального прогиба от других параметров задачи. Формула позволяет провести сравнительный анализ в зависимости от изменения параметров в правой части. Для точного определения максимального прогиба w_a следует решить дифференциальное уравнение (1).

Следует отметить, что безразмерное дифференциальное уравнение (3) имеет один и тот же вид, как для модели m , так и для природы n . Следовательно, можно написать

$$\pi_m = \pi_n, \rightarrow \left(\frac{PL^3}{w_a EI} \right)_m = \left(\frac{PL^3}{w_a EI} \right)_n \rightarrow \frac{w_{a,m}}{w_{a,n}} = \frac{(P_m / P_n)(L_m^3 / L_n^3)}{(E_m / E_n)(I_m / I_n)}. \tag{5}$$

Если ввести соответствующие коэффициенты подобия (масштабы-scale)

$$w_s = \frac{w_{a,m}}{w_{a,n}}, L_s = \frac{L_m}{L_n}, P_s = \frac{P_m}{P_n}, I_s = \frac{I_m}{I_n}, E_s = \frac{E_m}{E_n}, \tag{6}$$

то из (5) получим

$$w_s = \frac{w_{a,m}}{w_{a,n}} = \frac{P_s L_s^3}{E_s I_s}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что если мы из эксперимента на модели (рис.1) получаем $w_{a,m}$, то прогнозируемая величина прогиба в природе будет равняться $w_{a,n} = w_{a,m} / w_s$.

Пример 2. Свободные колебания простой балки. Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения с равномерно распределенной массой m (рис.2). Предполагается, что в начальный момент времени точка в середине пролета приобретает начальное перемещение, равное δ , а затем балка совершает свободные колебания.

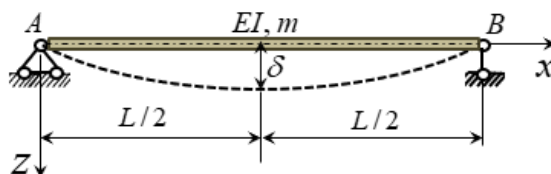


Рис. 2. Балка с распределенной массой.

Свободные колебания балки без учета затухания описываются дифференциальным уравнением четвертого порядка

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (8)$$

Начальные и граничные условия представляются в виде:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad w|_{x=L/2} = \delta, \quad \partial w / \partial t|_{x=L/2} = 0, \\ x = 0, \quad w = 0, \quad \partial^2 w / \partial x^2 = 0, \\ x = L, \quad w = 0, \quad \partial^2 w / \partial x^2 = 0. \end{aligned}$$

Безразмерные переменные выберем следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T_1}, \quad \bar{w} = \frac{w}{\delta}, \quad (9)$$

где δ – максимальный прогиб в середине балки, T_1 – время, соответствующее четверти периода свободных колебаний. Уравнение (8) с учетом (9), после замены переменных

$$EI \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} = EI \frac{\delta}{L^4} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4}, \quad m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = m \frac{\delta}{T_1^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2},$$

приобретает вид

$$\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + \pi_1 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} = 0, \quad \pi_1 = \frac{mL^4}{T_1^2 EI}. \quad (10)$$

Если ввести такие параметры, как радиус инерции сечения балки, равный $r = \sqrt{I/A}$, где A – площадь поперечного сечения, и скорость продольной волны, равная $c = \sqrt{E/\rho}$, то параметр подобия π_1 может быть записан так

$$\pi_1 = \frac{mL^4}{T_1^2 EI} = \left| m = \rho A, \quad I = Ar^2, \quad E = \rho c^2 \right| = \left(\frac{L^2}{c r T_1} \right)^2. \quad (11)$$

Начальные и граничные условия в безразмерных переменных принимают вид:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad \bar{w}|_{\bar{x}=1/2} = 1, \quad \partial \bar{w} / \partial \bar{t}|_{\bar{x}=1/2} = 0, \\ \bar{x} = 0, \quad \bar{w} = 0, \quad \partial^2 \bar{w} / \partial \bar{x}^2 = 0, \\ \bar{x} = 1, \quad \bar{w} = 0, \quad \partial^2 \bar{w} / \partial \bar{x}^2 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Можно видеть, что нормализованные (приведенные к безразмерному виду) начальные и граничные условия не содержат параметров подобия. Исходя из подобия модели и натуры, свободные колебания которых описывается уравнением (10), можно написать

$$\pi_{1,m} = \pi_{1,n}, \rightarrow \left(\frac{L^2}{c r T_1} \right)_m^2 = \left(\frac{L^2}{c r T_1} \right)_n^2, \quad T_{1,n} = T_{1,m} \frac{L_n^2 c_m r_m}{L_m^2 c_n r_n}. \quad (13)$$

Из полученной формулы (13) следует, что если в результате проведенного эксперимента на модели мы получим запись свободных колебаний с периодом $T_{1,m}$, то можно прогнозировать основной период свободных колебаний балки в натуре без решения дифференциального уравнения. Например, если модель построена в масштабе 1:10 из одного и того же материала, что и натура, то из (13) получим

$$\frac{r_m}{r_n} = \frac{1}{10}, \quad \frac{c_m}{c_n} = 1, \quad \left(\frac{L_n}{L_m} \right)^2 = 100, \quad T_{1,n} = 10T_{1,m}.$$

Для определения амплитуды свободных колебания следует решить дифференциальное (10) с учетом начальных и граничных условий (12).

Пример 3. Вынужденные колебания балки от действия вибрационной нагрузки. На балку с равномерно распределенной массой $m = \gamma A / g$ действует сила $P(t) = P \sin \theta t$ (рис.3).

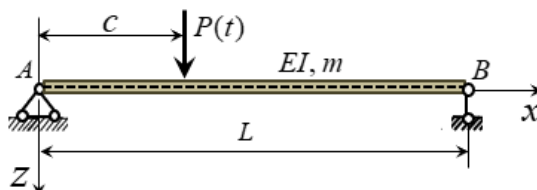


Рис. 3. Действие вибрационной нагрузки.

Здесь можно предположить, что форма изгиба балки может быть представлена в виде суммы простых форм колебаний [9]

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} z_j(t) X_j(x), \quad (14)$$

где X_j – безразмерные функции прогиба, которые удовлетворяют заданным граничным условиям, z_j – обобщенные координаты. В случае балки с шарнирными опорами (рис.3), нормальные формы колебания $X_j(x)$ определяются синусоидами и ряд (14) примет вид

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} z_j(t) \sin(j\pi x / L). \quad (15)$$

В этом случае интенсивность сил инерции, распределенных по длине колеблющейся балки, с учетом (15), записывается в виде

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = m \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 z_j}{\partial t^2} \sin \frac{j\pi x}{L},$$

а потенциальная энергия деформации изгиба будет равняться:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \left| M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right| = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx =, \\ &= \frac{EI}{2} \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L \left(\sum_{j=1}^{\infty} z_j j^2 \sin \frac{j\pi x}{L} \right)^2 dx = \frac{EI}{4} \frac{\pi^4}{L^3} \sum_{j=1}^{\infty} j^4 z_j^2 \end{aligned}$$

откуда находим силу упругости

$$\frac{\partial V}{\partial z_j} = \frac{EI}{2} \frac{\pi^4}{L^3} j^4 z_j.$$

Принимая виртуальное перемещение в виде

$$\delta w = \delta z_j \sin(j\pi x / L),$$

получим виртуальные работы сил инерции, сил упругости и заданной силы $P \sin \theta t$

$$m \int_0^L \ddot{w} \delta w dx = m \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{z}_j \delta z_j \int_0^L \sin \frac{j\pi x}{L} \sin \frac{j\pi x}{L} dx = \frac{mL}{2} \ddot{z}_j \delta z_j, \quad (16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_j} \delta z_j = \frac{\pi^4 EI}{2L^3} j^4 z_j \delta z_j, \quad (17)$$

$$P \sin \theta t \delta w = P \sin \theta t \sin(j\pi x / L) \delta z_j. \quad (18)$$

В результате сложения (16), (17) и (18) получим следующее уравнение

$$\frac{mL}{2} \frac{\partial^2 z_j}{\partial t^2} + \frac{\pi^4 EI j^4}{2L^3} z_j = P \sin \theta t \sin \frac{j\pi c}{L},$$

которое при

$$\bar{t} = t / T_1, \quad \bar{z} = z / z_0, \quad \bar{P} = P / P_0, \quad \bar{\theta} = \theta / \theta_0, \quad c = L / 2,$$

$$T_1 = \frac{2L^2}{\pi} \sqrt{\frac{m}{EI}}$$

можно представить в безразмерном виде

$$\frac{\partial^2 \bar{z}_j}{\partial \bar{t}^2} + \pi_1 \bar{z}_j = \pi_2 \bar{P} \sin(\pi_3 \bar{\theta} \bar{t}) \sin(j\pi / 2), \quad (19)$$

$$\pi_1 = \frac{T_1^2 j^4 \pi^4 EI}{mL^4}, \quad \pi_2 = \frac{2T_1^2 P_0}{mLz_0}, \quad \pi_3 = \theta_0 T_1. \tag{20}$$

Безразмерные параметры подобия (20) позволяют провести сравнительный анализ между моделью и натурой. Например, из равенства $\pi_{2,m} = \pi_{2,n}$ получаем величину амплитуды динамической нагрузки P_0 , соответствующей натуре.

Пример 4. Испытание модели балки на вибрационную нагрузку. Определение частот собственных колебаний конструкций с применением вибратора. Вибратор состоит из двух неуравновешенных масс (рис.4,a), вращающихся в вертикальной плоскости в противоположенных направлениях со скоростью $\theta = n \cdot 2\pi / 60$ рад/с, где n – угловая скорость в оборотах в минуту (задается).

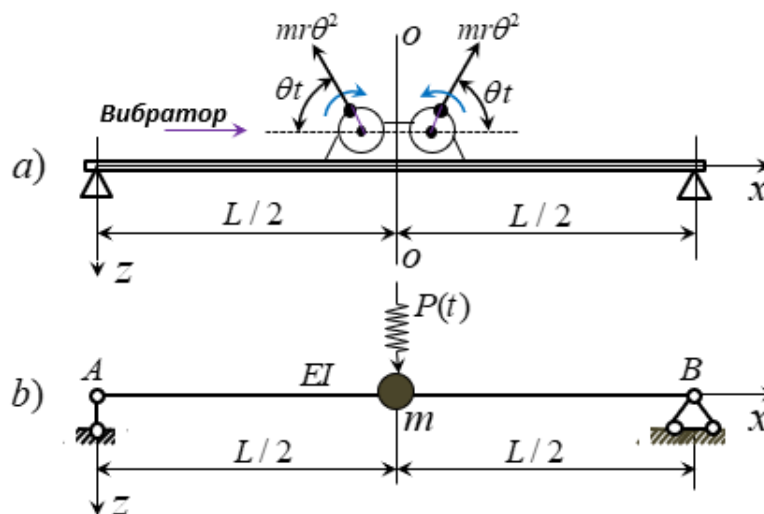


Рис. 4. Вибрационное воздействие на балку.

Неуравновешенные грузы, симметрично расположенные относительно вертикальной оси oo , при вращении создадут центробежные силы $mr\theta^2$, равнодействующая которых равняется $P(t) = 2m_0r\theta^2 \sin \theta t$. Сила $P(t)$ вызывает вынужденные колебания конструкции экспериментальной модели, которые могут быть записаны вибродатчиками. Постепенно изменяя скорость вращения дисков, можно установить то число оборотов в секунду, при котором амплитуда вынужденных колебаний неуклонно возрастает и наступает резонанс. Так как это явление возможно при совпадении частот, то это дает возможность определить частоту свободных колебаний модели. Конструкцию, представленную на рис.4a мы можем представить как систему с одной степенью свободы (рис.4b), в которой сосредоточенная масса $m = 0.5Lm_1 + m_2$, где m_1 – распределенная масса балки, m_2 – масса вибратора. Дифференциальное уравнение движения этой системы с учетом затухания представляется в виде

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + kw = P \sin \theta t, \tag{21}$$

$$P = 2m_0r\theta^2, \quad k = 48EI / L^3, \quad c = 2m\omega\xi.$$

Выбирая для аргумента t , функции w и других параметров уравнения характерные значения:

$$t_0, w_0, m_0, c_0, k_0, P_0, \theta_0, \quad (22)$$

определим соответствующие безразмерные величины

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t / t_0, \quad \bar{w} = w / w_0, \quad \bar{m} = m / m_0, \quad \bar{c} = c / c_0, \\ \bar{k} &= k / k_0, \quad \bar{P} = P / P_0, \quad \bar{\theta} = \theta / \theta_0, \end{aligned} \quad (23)$$

которые позволяют (21) представить в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \bar{m} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \pi_1 \bar{c} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \pi_2 \bar{k} \bar{w} &= \pi_3 \bar{P} \sin(\pi_4 \bar{\theta} \bar{t}), \\ \pi_1 &= \frac{c_0 t_0}{m_0}, \quad \pi_2 = \frac{k_0 t_0^2}{m_0}, \quad \pi_3 = \frac{P_0 t_0^2}{m_0 w_0}, \quad \pi_4 = \theta_0 t_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Если характерным размерным величинам (22) задавать соответствующие значения

$$\begin{aligned} t_0 &= T, \quad w_0 = w_{st} = P / k, \quad m_0 = m, \quad c_0 = c, \\ k_0 &= k, \quad P_0 = P, \quad \theta_0 = \omega = \sqrt{k / m}, \end{aligned} \quad (25)$$

то уравнение (24) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \pi_1 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \pi_2 \bar{w} &= \pi_3 \sin(\pi_4 \bar{\theta} \bar{t}), \\ \pi_1 &= \frac{cT}{m}, \quad \pi_2 = \frac{kT^2}{m}, \quad \pi_3 = \frac{PT^2}{m w_{st}}, \quad \pi_4 = \omega T, \end{aligned} \quad (27)$$

где T, ω – период и частота свободных колебаний. Безразмерное уравнение (26) описывает динамический процесс как в модели, так и в натуре. Следовательно, коэффициенты подобия (27) для модели и природы должны быть одинаковыми. Безразмерные числа подобия (27) позволяют провести сравнительный анализ, а также по данным, полученным на модели, прогнозировать результаты в натуре. Например, по найденному периоду свободных колебаний из эксперимента на модели, с использованием равенства $\pi_{2n} = \pi_{2m}$, можно определить период свободных колебаний в натуре, а затем из равенства $\pi_{3n} = \pi_{3m}$ можно получить амплитудное значение вибрационной нагрузки для природы.

В ы в о д

Система дифференциальных уравнений с учетом начальных и граничных условий, приведенные к безразмерному виду, дает математическую формулировку поставленной задачи как для натурального объекта, так и для модели. Из равенства параметров подобия мы можем определить характеристики исследуемого объекта без проведения эксперимента в натуре.

Поступило 04.01.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кирпичев М.В. Теория подобия. – М.: Изд-во АН СССР, 1953, 96 с.
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1977, 440 с.
3. Гухман А.А. Введение в теорию подобия. – М.: Высшая школа, 1973, 296 с.
4. Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций. – М.: Машиностроение, 1990, 288 с.
5. Алабужев П.М., Геронимус В.В., Минкевич Л.М., Шеховцов Б.А. Теория подобия и размерностей. Моделирование. – М.: Высшая школа, 1968, 206 с.
6. Веников В.А. Теория подобия и моделирования (применительно к задачам электроэнергетики). – М.: Высшая школа, 1976, 479 с.
7. Баренблатт Г. И. Анализ размерностей. – М.: МФТИ, 1987, 168 с.
8. Дарков А.В., Шапиро Г.С. Сопrotивление материалов. – М.: Высшая школа, 1969, 734 с.
9. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959, 439 с.

Ч.Н.Низомов, И.И.Қаландарбеков*, И.Қ.Қаландарбеков*

МОДЕЛКУНОНИ МАСЪАЛАҲОИ МЕХАНИКАИ СОХТМОН ДАР АСОСИ НАЗАРИЯИ МОНАНДӢ

*Институти геология, сохтмони базаминҷунбӣ тобовар ва сейсмологияи АМИ Тоҷикистон,
Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ

Татбиқи назарияи монандӣ ба моделсозии масъалаҳои статикӣ ва динамикии механикаи сохтмон дар асоси таҳлили муодилаҳои дифференциалӣ, ки равандҳои омӯхташавандаро дар зери таъсири гуногун тавсиф мекунанд, баррасӣ карда мешавад. Дар мисолҳои гуногун доимии монандӣ пайдо карда шудаанд, ки таносуби якхелаи бузургӣро дар асл ва модел ифода мекунанд.

Калимаҳои калидӣ: муодилаҳои дифференциалӣ, назарияи монандӣ, коэффициентҳои монандӣ, шартҳои ҳаммаънӣ, лантисҳои озод, лантисҳои маҷбурӣ, бори вибраторӣ.

D.N.Nizomov, I.I.Kalandarbekov*, I.K.Kalandarbekov*

MODELING OF PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS BASED ON THE THEORY OF SIMILARITY

*Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology, NAST,
M.S.Osimi Tajik Technical University

The application of the theory of similarity to the modeling of static and dynamic problems of structural mechanics based on the analysis of differential equations that describe the processes under study under various influences is considered. Using various examples, similarity constants are obtained, expressing the ratio of similar quantities in nature and in the model.

Key words: differential equations, similarity theory, similarity coefficients, uniqueness conditions, free oscillations, forced oscillations, vibration load.

УДК 546:666.762.1

Специальность: 1.4.1 – Неорганическая химия

Т.Б.Холматов, Д.Х.Мирзоев, Ф.А.Назаров, М.М.Тагоев,

академик НАН Таджикистана У.М.Мирсаидов

**ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗЛОЖЕНИЯ АЛЮМОСИЛИКАТНЫХ
РУД ТАДЖИКИСТАНА ФОСФОРНОЙ КИСЛОТОЙ***Институт химии им. В.И.Никитина Национальной академии наук Таджикистана*

В статье приводятся результаты фосфорнокислотного разложения алюмосиликатных руд Таджикистана. Показано, что при обработке исходных алюмосиликатных руд – нефелиновых сиенитов, каолиновых глин и аргиллитов Таджикистана степень извлечения глинозёма составляет от 43 до 92%. Извлечение оксида железа колеблется от 30.6 до 55%. При обработке обожжённых алюмосиликатных руд степени извлечения глинозёма и оксида железа увеличиваются.

Ключевые слова: глинозём, оксид железа, алюмосиликатная руда, нефелиновые сиениты, каолиновые глины, аргиллиты, фосфорная кислота.

Одним из путей обеспечения сырьём металлургической, химической промышленности и сельского хозяйства Таджикистана является комплексная переработка алюмосиликатных руд страны с получением глинозёма, соединений железа и минеральные удобрения. Алюмосиликатные руды в Таджикистане имеются в достаточном количестве. Нефелиновые сиениты, каолиновые глины, сиаллиты, аргиллиты и ряд других руд в месторождениях Таджикистана являются основой для их комплексной переработки. Эти алюмосиликаты, несмотря на пониженное содержание глинозёма (20-30%), содержат другие полезные компоненты, из которых в зависимости от метода переработки можно наряду с Al_2O_3 получать поташ, строительные материалы, коагулянты, жидкое стекло, минеральные удобрения и др.

Использование фосфорной кислоты выгодно тем, что в процессе разложения получают фосфаты алюминия и железа, которые используются в различных областях медицины, химии и сельского хозяйства.

В работах [1-5] изучена кислотная переработка алюмосиликатных руд различных месторождений. В настоящей работе рассматривается разложение алюмосиликатных руд (исходных и обожжённых) фосфорной кислотой. Для исследования были выбраны алюмосиликатные руды – нефелиновые сиениты месторождения Турпи, каолиновые глины и сиаллиты месторождения Зидды, аргиллиты Зидды и Чашма-Санг (табл.1).

В табл.1 приводится химический состав алюмосиликатных руд, а также низкокачественного алюмосодержащего сырья – бентонитов и цеолитов Таджикистана.

Адрес для корреспонденции: Назаров Фаридун Абдулхамидович. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул.Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: f.nazarov@cbrn.tj

Таблица 1

Химический состав алюмосиликатных руд (основные компоненты), в %

№	Алюмосиликатные руды	SiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	FeO	Na ₂ O	K ₂ O	CaO	TiO ₂	MgO
1	Нефелиновые сиениты (м.Турпи)	53.0	22.3	6.4	-	6.5	6.6	2.5	-	-
2	Каолиновые глины (м.Зидды)	63.2	23.2	0.7	0.54	0.1	2.8	0.7	-	-
3	Сиаллиты (м.Миёнаду)	55.9	20.1	6.0	1.72	0.2	1.7	0.6	0.95	0.8
4	Сиаллиты (м.Восточные Зидды)	39.8	30.5	13.9	0.29	0.3	0.4	0.6	1.17	0.2
5	Аргиллиты (м.Чашма-Санг)	42.9	31.6	8.74	-	0.1	2.95	1.0	0.6	1.0

Примечание: м – месторождение.

Ранее были изучены характеристики алюмосиликатных руд и установлено, что основными рудообразующими минералами в указанных рудах являются: нефелин, альбит, ортоклаз, микроклин, биотит, анорит, кальцит, каолинит и кремнезём (более 50%) [2, 3].

Результаты разложения алюмосиликатных руд фосфорной кислотой представлены в табл.2, на рис.1 (исходные алюмосиликатные руды без предварительного обжига) и на рис.2 (с предварительным обжигом при температуре от 600 до 900°C). Как видно из рис.1, при обработке алюмосиликатных руд фосфорной кислотой при температуре 95-98°C извлечение полезных компонентов незначительно и не превышает 30%. При составлении диаграмм (рис.1 и 2) использовали также данные работы [6]. Концентрация фосфорной кислоты составляла 30-35%.

Таблица 2

Степени извлечения глинозёма и оксида железа из алюмосиликатных руд фосфорной кислотой

№	Алюмосиликатная руда	Исходная руда, % извлечения		Разложение после обжига, % извлечения	
		Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃
1	Нефелиновые сиениты (м.Турпи)	30.7	47.0	43.0	55.0
2	Каолиновые глины (м.Зидды)	16.1	30.6	-	-
3	Сиаллиты (м.Миёнаду)	15.8	48.0	-	-
4	Сиаллиты (м.Восточные Зидды)	15.6	46.9	-	-
5	Аргиллиты (м.Чашма-Санг)	19.0	30.0	92.0	48.0

Примечание: м – месторождение.

В настоящей работе, используя результаты работ [6], рассмотрен вопрос сравнительной оценки разложения нефелиновых сиенитов, каолиновых глин, сиаллитов, аргиллитов фосфорной кислотой.

Проведённое исследование по фосфорнокислотному разложению алюмосиликатных руд показывает преимущество предварительного обжига сырья для кислотного разложения.

На рис.1 и 2 приведены диаграммы извлечения полезных компонентов алюмосиликатных руд до и после обжига. Как видно из диаграмм, при предварительном обжиге степени извлечения оксидов железа и алюминия выше, особенно это наглядно видно для аргиллитов месторождения Чашма-Санг.

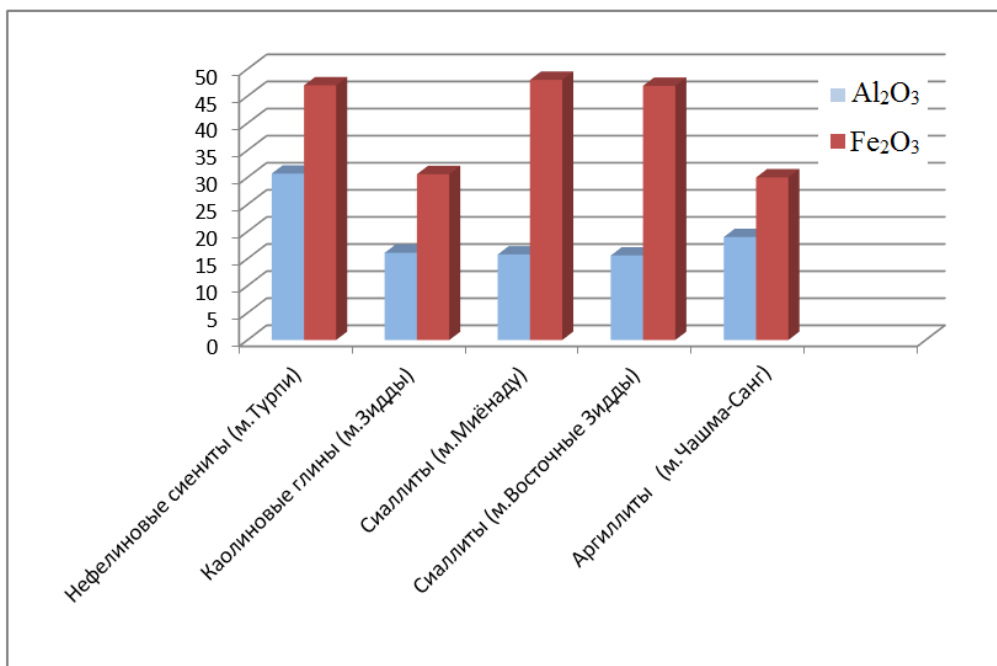


Рис. 1. Степень извлечения оксидов алюминия и железа из необоженных алюмосиликатных руд. 1 – нефелиновые сиениты (м.Турпи), 2 – каолиновые глины (м.Зидды), 3 – сиаллиты (м.Миёнаду), 4 – сиаллиты (м.Восточные Зидды), 5 – аргиллиты (м.Чашма-Санг).

Как известно, каолинсодержащее сырьё – сиаллиты содержат большое количество железа. Как видно из рис.1, при обработке сиаллитов фосфорной кислотой степень извлечения составляет до 50%.

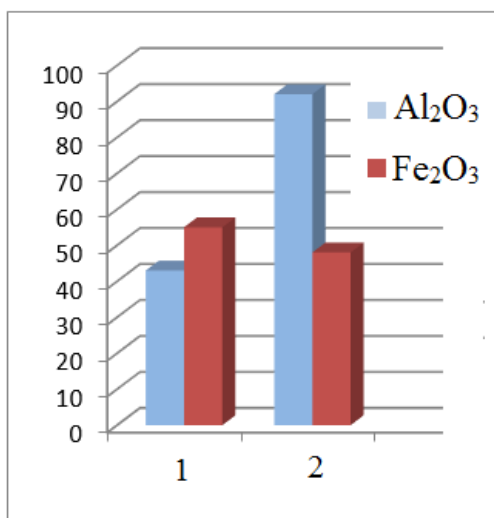


Рис. 2. Степень извлечения оксидов алюминия и железа из обожженных алюмосиликатных руд 1 – нефелиновые сиениты (м.Турпи), 2 – аргиллиты (м.Чашма-Санг).

Таким образом, переработка алюмосиликатных руд фосфорной кислотой показывает необходимость обжига руды и обработку 30% фосфорной кислотой при температуре до 95-98°C с получением глинозёма и оксида железа.

Поступило 11.12.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бобоев Х.Э., Рузиев Д.Р., Сафиев Х.С., Кутенец В.А., Мирсаидов У.М. Сернокислотное разложение нефелинсодержащего сырья. – ДАН РТ, 1995, т.33, №3-4, с.46-50.
2. Мирсаидов У.М., Сафиев Х.С. Комплексная переработка низкокачественного алюминийсодержащего сырья. – Душанбе: Дониш, 1998, 238 с.
3. Мирсаидов У.М., Мирзоев Д.Х., Бобоев Х.Э. Комплексная переработка аргиллитов и каолиновых глин Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2016, 92 с.
4. Мирсаидов У.М., Маматов Э.Д. Комплексная переработка бор- и алюмосиликатных руд Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2013, 116 с.
5. Мирсаидов У.М., Сафиев Х.С. Коагулянты для очистки воды из сырьевых материалов Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2003, 40 с.
6. Бобоев Х.Э. Кислотное разложение каолиновых глин и сиаллитов: автореф. ... дис. канд. хим. наук. – Душанбе, 1996, 18 с.

Т.Б.Холматов, Д.Х.Мирзоев, Ф.А.Назаров, М.М.Тағоев, У.М.Мирсаидов

**АСОСҶОИ ФИЗИКО-ХИМИЯВИИ ТАҶЗИЯИ МАЪДАНИ
АЛЮМОСИЛИКАТИИ ТОҶИКИСТОН БО КИСЛОТАИ ФОСФАТ**

Институти химияи ба номи В.И.Никитини Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола натиҷаҳои таҷзияи маъданҳои алюмосиликати Тоҷикистон бо кислотаи фосфор оварда шудааст. Нишон дода шуд, ки ҳангоми коркарди маъдани алюмосиликати аввалии нефелинҳои сиенитӣ, гилхокҳои каолинӣ ва аргилитҳои Тоҷикистон, дараҷаи ҷудошавии гилхок (глинозём) аз 43 то 92%-ро ташкил медиҳад. Ҷудошавии оксиди оҳан бошад аз 30,6 то 55%-ро дар бар мегирад. Ҳангоми коркарди маъдани алюмосиликати сузонидашуда дараҷаи ҷудошавии гилхок ва оксиди оҳан зиёд мегардад.

Калимаҳои калидӣ: гилхок (глинозём), оксиди оҳан, маъдани алюмосиликатӣ, нефелинҳои сиенитӣ, гилхокҳои каолиновӣ, аргилитҳо, кислотаи фосфор.

T.B.Kholmatov, D.Kh.Mirzoev, F.A.Nazarov, M.M.Tagoev, U.M.Mirsaidov

**PHYSICO-CHEMICAL BASES OF DECOMPOSITION OF ALUMINOSILICATE
ORES OF TAJIKISTAN WITH PHOSPHORIC ACID**

V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The article presents the results of phosphoric acid decomposition of aluminosilicate ores in Tajikistan. It is shown that when processing the original aluminosilicate ores - nepheline syenites, kaolin clays and mudstones of Tajikistan, the degree of extraction of alumina ranges from 43 to 92%. The extraction of iron oxide ranges from 30.6 to 55%. When processing roasted aluminosilicate ores, the degree of extraction of alumina and iron oxide increases.

Key words: alumina, iron oxide, aluminosilicate ore, nepheline syenites, kaolin clays, mudstones, phosphoric acid.

УДК 666.762.1+677.027.622.4

Специальность: 1.4.1 – Неорганическая химия

А.М.Исоев

ХЛОРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ АЛЮМОСИЛИКАТНЫХ РУД ТАДЖИКИСТАНА*Институт химии им.В.И.Никитина НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 05.12.2022 г.)*

В статье систематизированы химические основы хлорного метода переработки алюмосиликатных руд Таджикистана. Хлорные процессы с участием алюмосиликатных руд: нефелиновых сиенитов, каолиновых глин, аргиллитов протекают при температуре 800-850°C в присутствии восстановителя (угля) с получением хлоридов алюминия и железа. Найдены оптимальные параметры проведения хлорного процесса. Предложена общая принципиальная технологическая схема переработки сырья.

Ключевые слова: *хлорирование, разложение, алюмосиликаты, хлорид алюминия, хлорид железа, нефелиновые сиениты, каолины, аргиллиты.*

Для переработки трудно вскрываемого и низкокачественного алюмосодержащего сырья более перспективной считается хлорная технология. Опубликовано определённое число работ, посвящённых хлорному методу переработки минерального сырья [1-7].

В ряде работ [8-10] изучены процессы хлорирования алюмосиликатных руд Таджикистан в присутствии активированного угля. Изучено влияние различных физико-химического факторов, как температура, дозировка угля в шихте, крупность частиц сырья на процесс хлорирования. На основе проведённых исследований найдены оптимальные условия процесса хлорирования указанных руд.

В настоящей работе приводятся хлорные процессы алюмосиликатных руд, дана сравнительная оценка разложения сырья, известного в литературе и предложена общая технологическая схема процесса.

Для исследования были выбраны алюмосиликатные руды – нефелиновые сиениты месторождения Турпи, каолиновые глины месторождения Зидды, аргиллиты Зидды и Чашма-Санг (табл.1).

В табл.1 приводится химический состав некоторых алюмосиликатных руд Таджикистана.

Результаты разложения алюмосиликатных руд хлорным способом представлены в табл.2 и на рис.1 (с предварительным обжигом при температуре от 500 до 600°C). Как видно из рис.1, при обработке алюмосиликатных руд газообразным хлором при температуре 800-850°C извлечение полезных компонентов составляет более 70%, кроме каолиновой глины месторождения Зидды, которое при таких условиях незначительно и не превышает 32%. При составлении диаграмм (рис.1) использовали также данные работ [8, 9].

Таблица 1

Химический состав алюмосиликатных руд (основные компоненты), в %

№	Алюмосиликатные руды	SiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	FeO	Na ₂ O	K ₂ O	CaO	TiO ₂	MgO
1.	Нефелиновые сиениты (м.Турпи)	53.0	22.3	6.4	-	6.5	6.6	2.5	-	-
2.	Каолиновые глины (м.Зидды)	63.2	23.2	0.7	0.54	0.1	2.8	0.7	-	-
3.	Аргиллиты (м.Зидды)	60.0	19.75	4.99	-	0.1	1.2	1.0	0.6	1.0
4.	Аргиллиты (м.Чашма-Санг)	42.9	31.6	8.74	-	0.1	2.95	1.0	0.6	1.0

Примечание: м – месторождение

Таблица 2

Степени извлечения глинозёма и оксида железа из алюмосиликатных руд при хлорировании

№	Алюмосиликатная руда	Разложение после обжига, % извлечения		Литература
		Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	
1	Нефелиновые сиениты (м. Турпи)	98.8	100	[8]
2	Каолиновые глины (м.Зидды)	32.6	95.2	-
3	Аргиллиты (м.Зидды)	70.1	95.2	[9]
4	Аргиллиты (м.Чашма-Санг)	78.5	97.5	

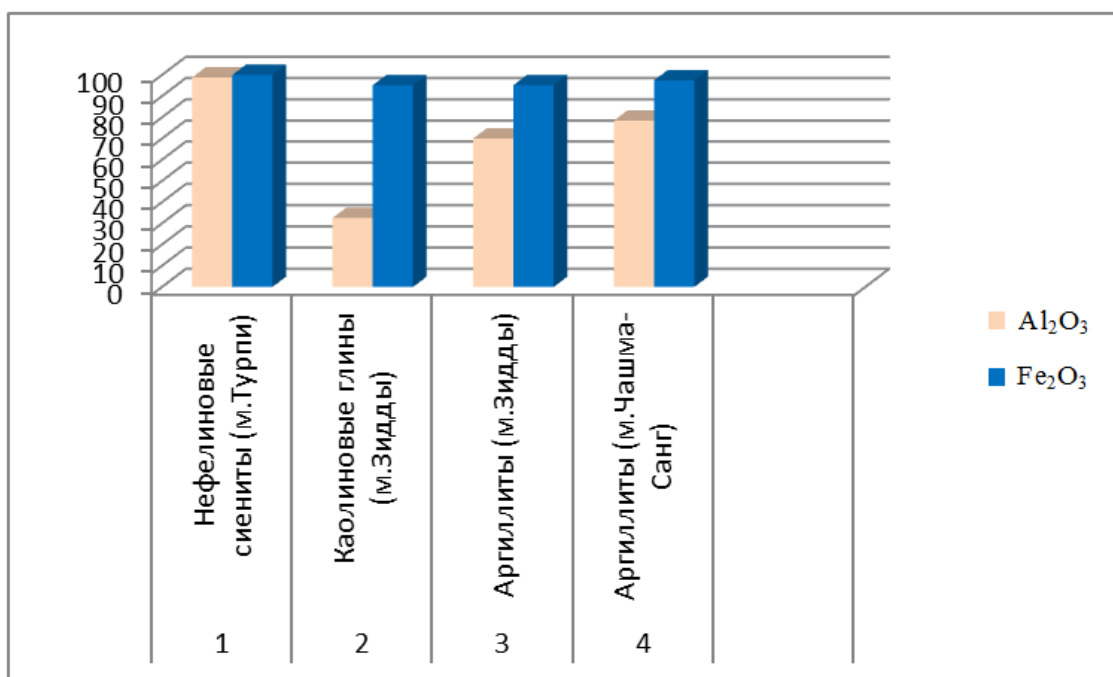


Рис. 1. Степень извлечения оксидов алюминия и железа (после обжига) из предварительно обожжённых алюмосиликатных руд (1 – нефелиновые сиениты (м.Турпи), 2 – каолиновые глины (м.Зидды), 3 – аргиллиты (м.Зидды), 4 – аргиллиты (м.Чашма-Санг).

Как известно, алюмосодержащее сырьё содержит значительные количества железа. Как видно из рис.1, при обработке алюмосиликатных руд газообразным хлором происходит полное их обезжелезивание, и полученное сырьё можно использовать для фарфорово-фаянсовой промышленности, а смесь хлоридов алюминия и железа можно использовать, как смешанные коагулянты для очистки

вод. Кроме того, при изменении температуры хлорирования, на первом этапе можно получить FeCl_3 , а на втором этапе - AlCl_3 – ценные продукты для химической промышленности.

На основании проведённых опытов предложена принципиальная технологическая схема процесса общего хлорирования алюмосиликатных руд (рис.2).

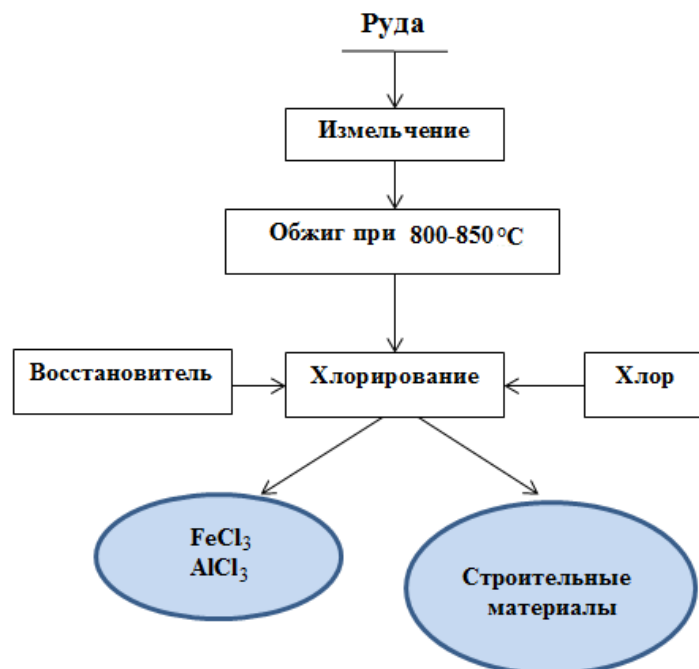


Рис. 2. Принципиальная технологическая схема переработки алюмосиликатных руд хлорным способом.

Таким образом, переработка алюмосиликатных руд хлорным способом показывает необходимость обжига руды и обработку газообразным хлором при температуре до 800-850°C в присутствии активированного угля с получением хлорида алюминия и железа. Как показывают обобщённые результаты по хлорированию алюмосиликатных руд, основными продуктами хлорирования являются FeCl_3 и AlCl_3 . Эти хлориды – важнейшие соединения для многих отраслей промышленности.

Поступило 12.12.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Глухов И.А., Шалухина Л.М., Шарипов А. Исследование оптимальных условий хлорирования пятиокисей ниобия и тантала. – Изв. АН ТаджССР, отд. физ.-мат. и геол.-хим. наук, 1973, т.50, №4, с.48-51.
2. Шарипов А.Ш., Глухов И.А., Шалухина Л.М. Планирование эксперимента при хлорировании лопаритового и пирохлорового концентрата. – Изв. АН ТаджССР, отд. физ.-мат. и геол.-хим. наук, 1975, №1(55), с.72-78.
3. Глухов И.А., Шалухина Л.М., Шарипов А. К кинетике низкотемпературного хлорирования пятиокисей ниобия и тантала. – Изв. АН ТаджССР, отд. физ.-мат. и геол.-хим. наук, 1976, №4(62), с.95-100.
4. Мирзоев Б., Сафиев Х., Запольский А.К., Мирсаидов У. Хлорирование нефелиновых сиенитов месторождения Турпи. – Комплексное использование минерального сырья, 1986, №8, с.40-42.

5. Мирзоев Б., Сафиев Х., Запольский А.К., Мирсаидов У. Кинетика хлорирования нефелиновых сиенитов месторождения Турпи Таджикской ССР. – ДАН ТаджССР, 1989, т.32, №8, с.536-540.
6. Маматов Э.Д., Бобоев Х.Э., Сафиев Х.С. Кинетика обезжелезивания сиаллитов Зидды. – ДАН РТ, 2000, т.43, №1-2, с.19-22.
7. Ступина А.М., Муклиев В.И., Безукладников А.Б. Исследование хлорирования гранулированного глинозёмсодержащего сырья. – Цветные металлы, 1982, №6, с.62-65.
8. Мирсаидов У.М., Сафиев Х.С. Комплексная переработка низкокачественного алюминийсодержащего сырья. – Душанбе, 1998, 238 с.
9. Расулов Д.Д., Маматов Э.Д., Курбанов А.С., Мирсаидов У.М. Хлорирование аргиллитов месторождения Зидды. – ДАН РТ, 2008, т.51, №11, с.829-833.
10. Мирзоев Б., Маматов Э.Д., Расулов Д.Д., Мирсаидов У.М. Хлорные способы получения соединений алюминия и железа из низкокачественных алюминийсодержащих руд. – ДАН РТ, 2005, т.48, №9, с.30-34.

А.М.Исоев

ТАҶЗИЯИ МАЪДАНҲОИ АЛЮМОСИЛИКАТИИ ТОҶИКИСТОН БО УСУЛИ ХЛОРНИДАН

Институти химияи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон

Дар мақола асосҳои усулҳои коркарди хлоронидани маъданҳои алюмосиликати Тоҷикистон ба як тартиб оварда шудааст. Равандҳои хлоронидан бо иштироки маъданҳои алюмосиликати: нефелинҳои сиенитӣ, гилхокҳои каолинӣ, аргиллитҳо, барои ба даст овардани хлоридҳои алюминий ва оҳан дар ҳароратҳои 800-850°C бо иштироки барқароркунанда (ангишт) мегузаранд. Параметрҳои оптималии раванди хлоронидан муайян карда шудааст. Тарҳи умумии нақшаи технологияи коркарди маъдан пешниҳод карда шуд.

Калимаҳои калидӣ: хлоронидан, таҷзия, маъданҳои алюмосиликати, хлориди алюминий, хлориди оҳан, нефелинҳои сиенитӣ, каолинҳо, аргиллитҳо.

А.М.Isoev

CHLORINE DECOMPOSITION OF ALUMOSILICATE ORES IN TAJIKISTAN

V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The article systematizes the chemical bases of the chlorine method for processing aluminosilicate ores in Tajikistan. Chlorine processes involving aluminosilicate ores: nepheline syenites, kaolin clays, argillites proceed at a temperature of 800-850°C in the presence of a reducing agent (coal) to produce aluminum and iron chlorides. The optimal parameters of the chlorine process have been found. A general basic technological scheme for processing raw materials is proposed.

Key words: chlorination, decomposition, aluminosilicates, aluminum chloride, iron chloride, nepheline syenites, kaolins, mudstones.

УДК 544.32

Специальность: 1.4.4 – Физическая химия

С.М.Бахронов, М.З.Ахмедов, М.Д.Бобоёров, А.Мирзоев, И.Мирсаидзода
**ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЕРНОКИСЛОТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ
ОТХОДОВ УРАНОВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ НА ТЕРРИТОРИИ
«КАРТА 1-9» г. БУСТОН**

Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности

НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 01.11.2022 г.)

В статье приведены результаты термодинамического расчёта разложения отходов урановой промышленности на территории «Карта 1-9» г. Бустон серной кислотой, также определены термодинамические характеристики минералов, входящих в состав сырья и расчёт энергии Гиббса для каждой реакции. Выявлено, что повышение температуры способствует протеканию рассматриваемых реакций.

Ключевые слова: урансодержащая руда, энтальпия, энтропия, энергия Гиббса, разложение, серная кислота.

В разные годы намечались исследования по разработке методов извлечения урана из хвостохранилищ [1-4]. Изучение возможности и экономической целесообразности переработки отходов прошлых лет требует всесторонней проработки, что связано не только с извлечением урана, но и с его безопасной добычей из отвалов хвостохранилищ. И прежде всего требуется термодинамическая оценка возможности получения урановых концентратов из отходов.

Современные радиологические и экологические проблемы в Таджикистане являются наследием интенсивно развиваемых ранее отраслей промышленности по добыче и переработке урана бывшего СССР. После распада Советского Союза разработки большинства месторождений урансодержащих руд в Таджикистане были завершены. Однако после законсервирования основных рудников практически одновременно Таджикистан столкнулся с проблемой безопасного управления отходами, закрытием шахт и необходимостью восстановления территорий, где ранее располагались урановые объекты.

Анализ химического и минералогического состава урановых хвостохранилищ на территории Северного Таджикистана показал целесообразность вторичной переработки отходов «Карта 1-9» г. Бустон [4, 5]. Для нахождения оптимальных параметров процесса вторичной переработки урановых отходов необходим термодинамический анализ разложения сырья серной кислотой.

Адрес для корреспонденции: Бахронов Содиждон Манонджонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАНТ. E-mail: s.bahronov@cbrn.tj

Хвостохранилище г. Бустон расположено в промышленной зоне в 200 м от гидрометаллургического завода. Состоит из девяти намывных карт и называется «Карта 1-9». Находится в 5 км от города Худжанда. Площадь составляет 18 га. Санитарно-защитная зона равна 50 м.

В эксплуатации находилось с 1945 по 1963 гг. За время эксплуатации накоплено 4 млн. тонн радиоактивных отходов от гидрометаллургической переработки урана. Хвостохранилище относится к категории «частично законсервированные». В санитарной зоне расположены хлопковые поля Б.Гафуровского района и проходят отводы Ферганского канала. Климат в районе хвостохранилища умеренный. Скорость западного ветра усиленная и достигает 10-15 м/сек. Среднегодовая температура воздуха +20°C. Среднегодовое количество осадков не превышает 400 мм. Среда хвостов кислая, рН=5-6.

Суммарная активность равна 779 Кюри. Мощность гамма-излучения на поверхности составляет 155-275 мкР/час.

В 1975 году поверхность хвостохранилища засыпалась галечником толщиной до 1 метра. Отсутствует система водоотвода. Имеется 13 наблюдательных скважин [1-3].

В табл.1 и на рис.1 приведены основные характеристики хвостохранилища «Карта 1-9» г. Бустон.

Таблица 1

Распределение содержания долгоживущих радионуклидов хвостохранилища «Карта 1-9» г. Бустон

Радионуклиды	Содержание, Бк/кг	
	от	до
Ra-226	2490	42760
Th-232	88	560
K-40	2660	6840



Рис. 1. Состояния уранового хвостохранилища «Карта 1-9» г. Бустон.

Химический состав урановых отходов хвостохранилища «Карта 1-9» г. Бустон приведён в табл. 2. Для химического анализа ураносодержащих отходов использован метод комплексометрии, весовой метод и метод пламенной фотометрии.

Рентгенофазовый и дифференционно-термический анализ проводили с целью установления состава минералов в отходах урановой промышленности «Карта 1-9» г. Бустон (табл.3).

Для всех возможных минералов хвостохранилища «Карта 1-9» были найдены энтальпия и энтропия веществ, используя справочные данные [8].

Возможность химических реакций разложения отходов хвостохранилища «Карта 1-9» с учётом окислителя (HNO_3) приведена ниже (реакции (1)-(6)).

Таблица 2

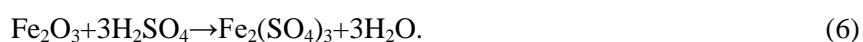
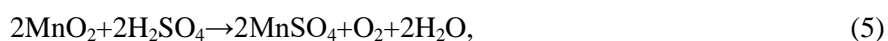
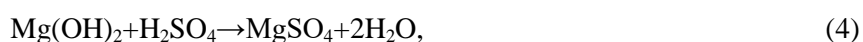
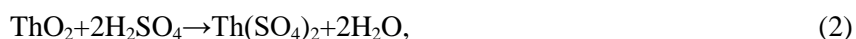
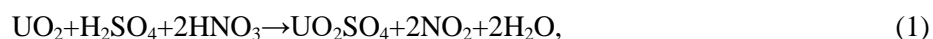
Химический состав отходов месторождения «Карта 1-9»

Наименование компонентов хвостохранилища	SiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	CaO	MgO	MnO ₂	U	Прочие
Содержание компонентов в хвостохранилище, %	69.4	10.7	4.1	2.5	3.8	0.3	0.02	9.18

Таблица 3

Термодинамические характеристики минералов месторождения «Карта 1-9»

№	Вещество	ΔH_{298}^0 , кДж/моль	ΔS_{298}^0 , кДж/моль·К
1	UO ₂ (тв)	-1081.23	0.08
2	HNO ₃ (ж)	-174.14	0.155
3	CaSO ₄ (p-p)	-1454.06	-0.04
4	MgSO ₄ (p-p)	-1379.1	-0.116
5	UO ₂ SO ₄ (p-p)	-1929.7	0.0812
6	NO ₂ (г)	33.5	0.24
7	H ₂ O _ж	-285.8	0.07
8	Na ₂ SO ₄ (p-p)	-1395.9	0.136
9	Al ₂ (SO ₄) ₃ (p-p)	-3792.33	-0.055
10	Fe ₂ (SO ₄) ₃ (p-p)	-2825.7	-0.564
11	Th(SO ₄) ₂ (p-p)	-2604.372	-0.382
12	Al ₂ O ₃ (т)	-1675.692	0.051
13	Fe ₂ O ₃ (т)	-822.16	0.0875
14	Mg(OH) ₂ (т)	-924.66	0.0632
15	O ₂ (г)	0	0.205
16	MnO ₂ (т)	-521.493	0.053
17	MnSO ₄ (p-p)	-1131.144	-0.044
18	ThO ₂ (т)	-1226.75	0.065
19	H ₂ SO ₄ (p-p)	-745.651	0.018



Для каждой реакции были рассчитаны термодинамические характеристики, которые приведены в табл.4.

Таблица 4

Расчёт термодинамических характеристик реакций при взаимодействии компонентов месторождения «Карта 1-9»

№ схемы реакции	ΔH^0_{298} , кДж/моль	ΔS^0_{298} , Дж/моль·К	ΔG^0_{298} , кДж/моль
(1)	-190,62	0,006	-192,41
(2)	-457,92	-0,341	-356,3
(3)	-737,1	0,05	-752
(4)	-280,39	0,024	-287,542
(5)	-299,6	0,115	-333,87
(6)	-623,99	-0,495	-476,48

Результаты расчёта термодинамических характеристик предполагаемых реакций (1)-(6) (табл. 4) указывают на вероятность протекания процесса в стандартных условиях. В табл. 5 и на рис. 2 приведены результаты влияния температуры на значения энергии Гиббса рассматриваемых процессов. Как видно из табл. 5 и рис. 2, повышение температуры способствует протеканию всех рассматриваемых реакций.

Таблица 5

Значения энергии Гиббса (ΔG , кДж/моль) при различных температурах в реакциях (1)-(6)

№ схемы реакции	ΔG^0_{298}	ΔG^0_{313}	ΔG^0_{333}	ΔG^0_{353}	ΔG^0_{373}
(1)	-192.41	-188.76	-188.64	-188.53	-188.41
(2)	-356.3	-351.2	-344.4	-337.5	-330.73
(3)	-752	-752.75	-753.75	-754.75	-755.75
(4)	-287.542	-287.9	-288.4	-288.9	-289.34
(5)	-333.87	-335.6	-337.9	-340.2	-342.5
(6)	-476.48	-469.06	-459.16	-449.25	-439.36

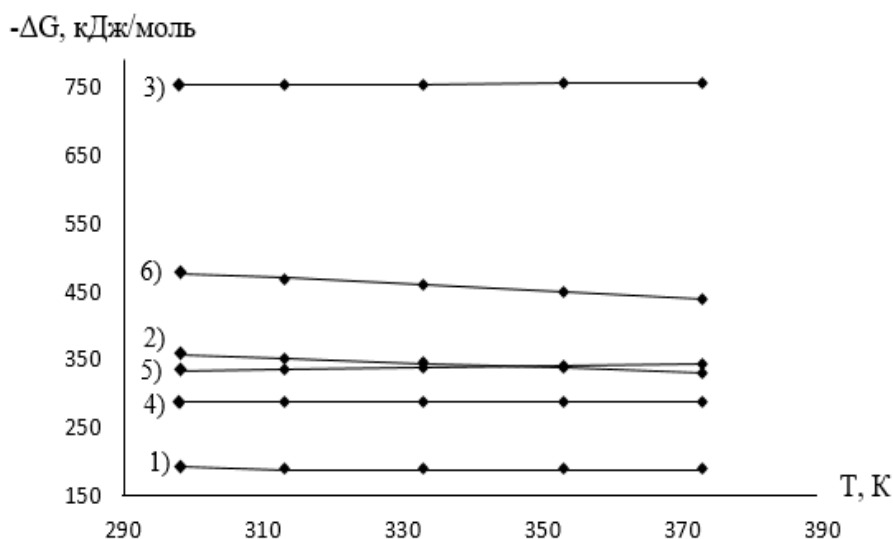


Рис. 2. Зависимость изменения ΔG от температуры выщелачивания минералов, содержащихся в месторождении «Карта 1-9»

Таким образом, термодинамический анализ отходов урановой промышленности показывает вероятность протекания реакций (1)-(6) при разложении минеральными кислотами.

Поступило 01.11.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Mirsaidov U., Khakimov N. From History of Reception of Nature Uranium. – International Conference on Fifty Years of Nuclear Power – the Next Fifty Years. – Obninsk, 27 June - 2 July 2004. – Door of Extended Synopses. – М., 2004, p.162-163.
2. Урановые хвостохранилища в Центральной Азии: национальные проблемы, региональные последствия, глобальные решения. – Рамочный документ к Международному форуму. – Женева, 29 июня 2009, с. 44.
3. Мирсаидов У.М. Отходы уранодобывающих производств Таджикистана. – Горный журнал, 2012, №2, с. 128-131.
4. Хакимов Н., Назаров Х.М., Мирсаидов И.У. Физико-химические и технологические основы получения урановых концентратов из отходов гидрометаллургических заводов и технических вод: Монография. – Душанбе, 2012, с. 120.
5. Khakimov N., Nazarov Kh.M., Mirsaidov I.U. Physico-Chemical and Manufacturing Basis for Uranium Concentrates Production from Wastes of Hydrometallurgical Plants and Technical waters. – Dushanbe, 2012, p. 120.
6. Разыков З.А., Гусанов Э.Г., Марущенко Г.А., Ботов А.Ю., Юнусов М.М. Урановые месторождения Таджикистана. – Худжанд: ООО «Хуросон», 2001, с. 212.
7. Хакимов Н., Назаров Х.М., Мирсаидов У.М. Экологический риск при вторичной переработке урановых отвалов Гафуровского хвостохранилища. – ДАН РТ, 2005, т. 48, №7, с. 43-48.
8. Глушко В.П., Медведев В.А., Бергман Г.А., Васильев В.П. и др. Термические константы веществ. – М.: АН СССР, ВИНТИ, 1981, вып.10, с. 441.

С.М.Бахронов, М.З.Ахмедов, М.Д.Бобоёров, А.Мирзоев, И.Мирсаидзода

**ТАҲЛИЛИ ТЕРМОДИНАМИКИИ ТАҶЗИЯИ КИСЛОТАИ СУЛФАТИИ
ПАРТОВҲОИ САНОАТИ УРАН ДАР ҲУДУДИ “ХАРИТАИ 1-9” Ш. БУСТОН**

Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола натиҷаҳои ҳисобкунии термодинамикии таҷзияи партовҳои саноатии уран дар ҳудуди «Харитаи 1-9»-и Бӯстон бо кислотаи сулфат ва тавсифи термодинамикии минералҳое, ки ба таркиби маъдани дохиланд оварда шудааст. Барои ҳар як реаксия қимати энергияи Гиббс ҳисоб карда шуд. Маълум гардид, ки баландшавии ҳарорат ба гузариши реаксияҳои баррасишаванда мусоидат мекунад.

Калимаҳои калидӣ: маъдани урандор, таҷзия, энталпия, энтропия, энергияи Гиббс, кислотаи сулфат.

S.M.Bahronov, M.Z.Akhmedov, M.D.Boboyorov, A.Mirzoev, I.Mirsaidzoda

THERMODYNAMIC ANALYSIS OF SULFURIC ACID DECOMPOSITION OF URANIUM INDUSTRY WASTE ON THE TERRITORY “MAP 1-9”, BUSTON

*Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety & Security Agency,
National Academy of Sciences of Tajikistan*

The article presents the results of a thermodynamic calculation of the decomposition of uranium industry waste on the territory “Map 1-9” of Buston with sulfuric acid, the thermodynamic characteristics of the minerals that make up the raw material and the calculation of the Gibbs energy for each reaction are also determined. It was found that an increase in temperature promotes the occurrence of the reactions under consideration.

Key words: *uranium ore, decomposition, enthalpy, entropy, Gibbs energy, sulfuric acid.*

УДК 544.02; 615.1/4 (575.3-25)

Специальность: 1.4.4 – Физическая химия;

3.4.2 – Фармацевтическая химия, фармакогнозия

Р.А.Султонов*, У.Р.Раджабов, академик НАН Таджикистана С.Дж.Юсуфи*,

Г.Ф.Навруззода, И.Х.Юсупов**

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ЛЬНЯНЫХ ВОЛОКОН И ФИБРОИНА НАТУРАЛЬНОГО ШЕЛКА МЕТОДОМ СПИНОВЫХ МЕТОК

ГОУ «Таджикский государственный медицинский университет имени Абуали ибни Сино»,

**ГУ «Научно-исследовательский фармацевтический центр Министерства здравоохранения и
социальной защиты населения Республики Таджикистан»,*

***Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана*

Методом спиновой метки исследовано влияние структуры микрокристаллической целлюлозы льняных волокон и фиброина натурального шелка. Специфика физико-химической структуры целлюлозы (регулярность строения цепей и их взаимной ориентации, системы меж- и внутримолекулярных водородных связей, степени кристалличности и т.д.) определяет комплекс ее механических и технологических свойств. В связи с этим представляется важным провести сравнительное исследование молекулярной структуры микрокристаллической целлюлозы (МКЦ) различного метода спиновых меток. При этом было обнаружено существование нескольких стадий изменения химической и физической структуры целлюлозы.

Ключевые слова: *микрокристаллическая структура, спиновая метка, лекарственные растения, фиброин натурального шелка, электронный парамагнитный резонанс, нитроксильный радикал.*

Физико-химическая структура целлюлозы определяет комплекс её механических и технологических свойств. В связи с этим представилось целесообразным провести аналогичные исследования для целлюлозы из льняной костры, которая по своему происхождению должна обладать определенными свойствами как хлопковой, так и древесной целлюлозы. В данном разделе применен эффективный и высокочувствительный метод исследования молекулярной динамики – метод спиновых меток. В работе использовались образцы МКЦ из средневолокнистого и тонковолокнистого хлопка, древесной целлюлозы и сахарного тростника. Образцы последнего любезно предоставлены Р.Г.Жбанковым. Образцы МКЦ химически модифицировали по гидроксильным группам спиновой меткой 2,2,5,5-тетраметил-3-аминопирролидин-(3,5-дихлортриазинил)-1-оксил по методу, описанному в работе [1,2].

Целью данной работы является исследование структуры, льняных волокон и фиброина натурального шелка методом спиновых меток.

Материал и методы исследования

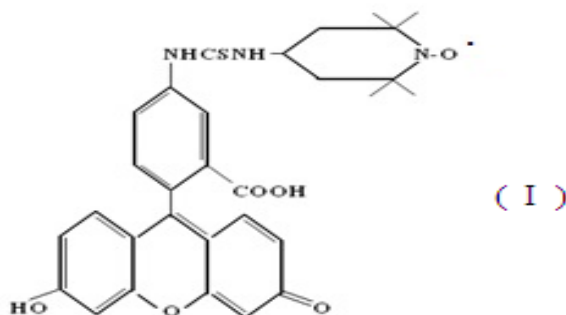
Физико-механические свойства полимеров в значительной степени зависят от динамики макромолекулярных цепей. Эффективным методом изучения конформационной подвижности макромолекул является метод спиновых меток [3-5].

Работа проводилась на кафедре фармацевтической и токсикологической химии, ГОУ «Таджикского государственного медицинского университета имени Абуали ибни Сино» и в лаборатории молекулярной спектроскопии Физико-технического института им.С.У.Умарова НАНТ.

Результаты и их обсуждение

Волокна химически модифицировали по гидроксильным группам (ОН) спиновой меткой (I) по методике. Первую производную сигнала ЭПР поглощения V_I регистрировали на спектрометре ЭПР-1306. Относительную влажность образцов (P/P_s : 0.04; 0.60; 0.96) задавали, помещая их на пять суток в специальную камеру, которая сообщалась с раствором серной кислоты определённой плотности.

В качестве спиновой метки использовали стабильный нитроксильный радикал (I), имеющий следующую структурную формулу:



На рис. 1 показаны спектры спин-меченого образца МКЦ при температурах 293, 333 и 373К. Как видно, в спектрах ЭПР при указанных температурах имеются быстро- и медленновращающиеся компоненты.

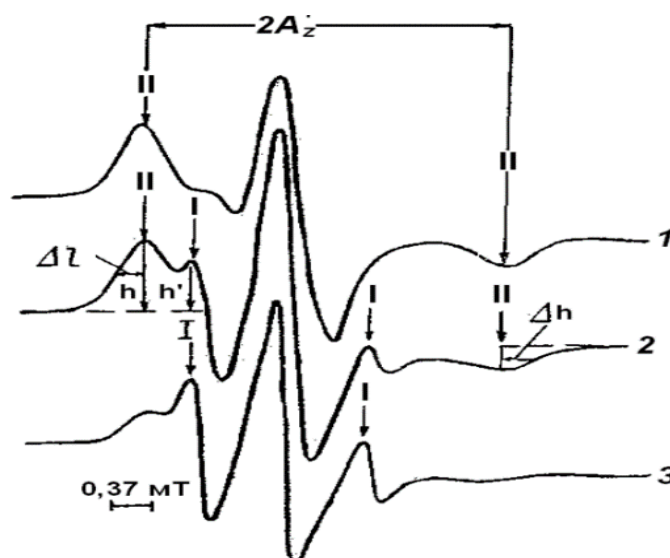


Рис 1. Спектры спин-меченой МКЦ из тонковолокнистого хлопка при температуре 293 (1), 333 (2) и 373 К (3) и относительной влажности $P/P_s= 0,96$. Стрелками обозначены компоненты быстро- (I) и медленновращающихся (II) радикалов.

На рис. 2-3 и табл. 1 приведены результаты исследования температурной зависимости параметра ЭПР, $2A_z^1$ (расстояние между внешними экстремумами).

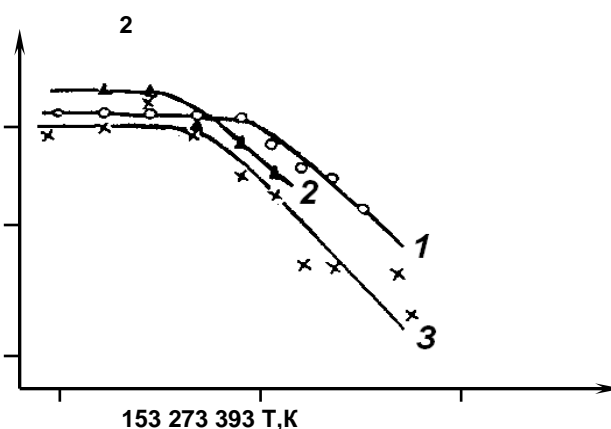


Рис. 2. Температурные зависимости параметра $2A_z^1$ спектров ЭПР спин-меченых образцов МКЦ из тонковолокнистого (1), средневолокнистого хлопкового волокна (2) и древесной целлюлозы (3). $P/P_s = 0,96$.

Как видно из рис. 2-3 и табл. 1, с увеличением температуры при одинаковой влажности $P/P_s = 0,96$ в исследуемых образцах МКЦ в суммарном спектре ЭПР наблюдается уменьшение параметра $2A_z^1$, что свидетельствует о интенсификации подвижности меток в наносекундной области времени корреляции. Для разных образцов она различна. Например, для образцов МКЦ из тонковолокнистого хлопка сигнал в спектре ЭПР, соответствующий быстровращающемуся радикалу (на рис. 1 указаны стрелками) (компонента I), появляется при температуре 40°C и увеличивается вплоть до 120°C . При этом компонента II (рис. 1) спектра ЭПР исчезает. Различия в температурных зависимостях исследуемых образцов свидетельствуют о различии в упорядоченности и степени неоднородности МКЦ. Для образца МКЦ из древесной целлюлозы в этом интервале температур компонента I не наблюдается. Однако компонента II проявляется во всем исследуемом интервале температур. Эти данные свидетельствуют о том, что в МКЦ из древесной целлюлозы в местах локализации метки структура относительно однородна и метка движется с временем корреляции $\tau_c \approx 10^{-8}$ с.

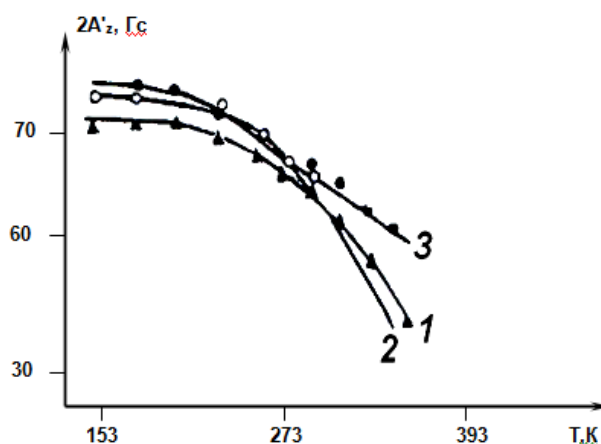


Рис. 3. Температурные зависимости параметра $2A_z^1$ спектров ЭПР спин-меченых образцов МКЦ из сахарного тростника: исходной (1), очищенной путем удаления гемицеллюлоз из холоцеллюлоз (2) и пере гидролизованной сульфатным способом и отбеленной из богасы (3). $P/P_s = 0,96$.

Как видно из рис. 4 увеличение влажности в исследуемых образцах увеличивает подвижность спиновой метки, что характеризуется появлением узкого сигнала, соответствующего быстровращающимся радикальным фрагментам ($\tau_c \leq 10^{-9}$ с). Повышение температуры от 150 до 273К сопровождается сужением спектральных линий изученных образцов. Этот факт объясняется появлением мелкомасштабных движений, приводящих к усреднению диполь-дипольных взаимодействий [6,7].

Таблица 1

Характеристики спин-меченых образцов

№ п/п	Образец	$R \cdot 10^{18}$, спин/г	T_n , К	$\frac{d(\Delta l)}{dT}$	T_{min} , К
I	Тонковолокнистый хлопок	1.5	303	1.00	263
II	Средневолокнистый хлопок	5.0	273	1.52	283
III	МКЦ из тонковолокнистого хлопка	3.0	273	1.79	303
IV	МКЦ из средневолокнистого хлопка	10.4	216	3.71	243
V	МКЦ из древесины	7.0	243	2.50	283
VI	МКЦ из сахарного тростника	36.9	243	1.76	293
VII	МКЦ из сахарного тростника, очищенного путем удаления гемецеллюлоз из холоцеллюлозы	25.5	243	2.29	--
VIII	МКЦ из сахарного тростника, прегидролизованного сульфатным способом, отбеленная	38.7	243	2.67	313

Примечание: R – количество спиновых меток в образце; T_n – температура перехода, $\frac{d(\Delta l)}{dT}$ в диапазоне температур; T_{min} – температура минимум на зависимости Δl от T (рис. 4).

На рис. 3 приведены данные температурной зависимости параметра $2A_z'$ для МКЦ из сахарного тростника, который, как установлено, характеризуется сравнительно низким температурным переходом ($T_n = -30^\circ\text{C}$), при котором «растормаживается» крупномасштабное движение с $\tau_c \leq 10^{-7}$ с. На рис. 4 приведена температурная зависимость полуширины линии спектров ЭПР в низком поле (Δl). Отсюда видно, что во всех образцах в области низких температур (153-273К) происходит уменьшение ширины линий Δl спектров ЭПР спин-меток.

Эффект сужения, по-видимому, связан с движением протонов среды, окружающих нитроксильный фрагмент радикала, которые частично усредняют взаимодействие магнитных диполей неспаренного электрона и протона и характеризуются $\tau_c \leq 10^{-7}$ с. Например, для образца МКЦ из средневолокнистого хлопка (рис. 4, кривая 1) наблюдается перелом в области 243К. При температурах меньше 213К линия сужалась в результате динамического процесса с временем корреляции $\tau_c \geq 10^{-8}$ с и с небольшой амплитудой (в этой области $2A_z'$ не меняется).

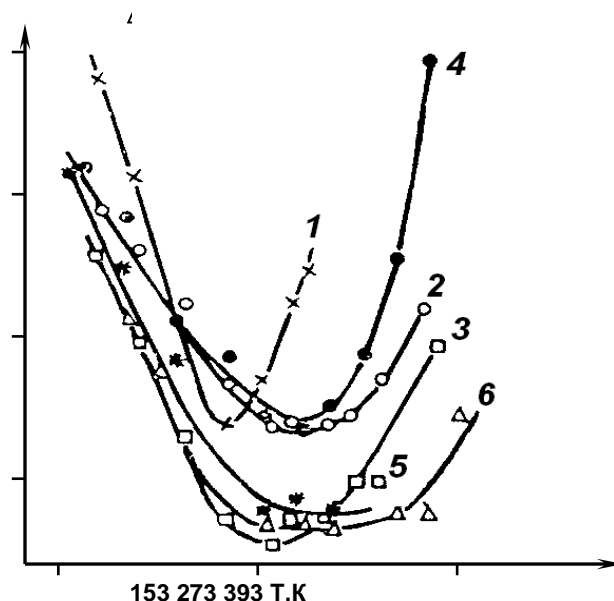


Рис. 4. Температурные зависимости параметра ΔI спектров ЭПР спин-меченых образцов МКЦ из средневолокнистого (1) и тонковолокнистого хлопкового волокна (2), древесной целлюлозы (3), сахарного тростника (4-6), очищенной путем удаления гемицеллюлозы из полуцеллюлозы (5) и перегидролитованной сульфатным способом и отбеленной из богасы (6) $P/P_s = 0,96$.

Таблица 2

Параметры спектров ЭПР спин-меченых МКЦ при разных температурах

T, K	МКЦ из тонковолокнистого сорта 5595-B			МКЦ из средневолокнистого сорта 108-Ф			МКЦ из древесной целлюлозы		
	$2A'_z, \text{ Гс}$	$\Delta I, \text{ Гс}$	h'/h	$2A'_z, \text{ Гс}$	$\Delta I, \text{ Гс}$	h'/h	$2A'_z, \text{ Гс}$	$\Delta I, \text{ Гс}$	h'/h
293	68.82	4.44	-	66.97	5.55	1.13	65.12	3.70	1.88
373	67.34	4.44	4.67	б.в.к.	б.в.к.	0.62	60.68	3.70	1.00
333	66.60	4.44	1.45	б.в.к.	б.в.к.	-	59.57	4.07	0.60
353	64.38	4.81	0.73	б.в.к.	б.в.к.	-	56.61	4.07	0.40
373	б.в.к.	б.в.к.	0.46	б.в.к.	б.в.к.	-	57.35	3.70	0.36
393	б.в.к.	б.в.к.	0.33	б.в.к.	б.в.к.	-	55.50	5.18	0.30
273	70.67	4.44	-	68.82	4.81	2.40	66.60	3.33	-
243	70.67	4.81	-	70.76	4.44	-	70.67	3.70	-
213	71.04	5.92	-	73.26	5.55	-	72.50	4.44	-
183	71.78	5.92	-	72.89	6.66	-	70.30	5.18	-
153	71.78	6.29	-	71.04	7.40	-	70.67	5.92	-

Примечание: б.в.к. – компонента от быстровращающейся радикала (указание стрелками I рис. 1) весьма чувствителен, по этому в спектрах ЭПР параметры, относящийся к медленно вращающийся (указанные стрелками II) изменяется до исчезновения, и измерение параметра $2A'_z$ невозможен.

Для образцов МКЦ из тонковолокнистого хлопка (рис. 4, кривая 2), древесной целлюлозы (рис. 4, кривая 3) и сахарного тростника (рис. 4, кривые 4 и 6) наблюдается минимум соответственно при температуре $T=30, 10, 20$ и 40°C , после чего ΔI увеличивается. Это увеличение связано с появлением высоко амплитудных движений с $\tau_c \geq 10^{-7}$. Для кривой 5 (рис. 4) в области $T=0^\circ\text{C}$ не наблюдается увеличения, как в случае других образцов.

Следует отметить, что сравнение, набора параметров спектров ЭПР спин-меченых хлопковых волокон свидетельствует о том, что в местах локализации спиновых меток в МКЦ из сахарного тро-

стника молекулярная подвижность среды в них существенно выше и, кроме того, в них присоединяется в 2-3 раза больше спиновых меток, чем в МКЦ из хлопкового волокна (табл. 2). Повышение содержания мест локализации спиновых меток в МКЦ из сахарного тростника свидетельствует о высоком содержании дефектов структуры в аморфных областях исследованных образцов. Таким образом, из этих данных можно предположить, что микроструктура МКЦ из тонковолокнистого хлопка и древесной целлюлозы более упорядочена по сравнению с МКЦ из средневолокнистого хлопка и сахарного тростника.

По величине параметра $d(\Delta I)/dT$ (табл. 2), характеризующего влияние температуры на степень интенсификации мелкомасштабных движений с $\tau_c \geq 10^{-7}$ с, которые приводят к усреднению уширяющих линии диполь-дипольных взаимодействий нитроксильных радикалов с протонами окружающей среды, образцы МКЦ из средневолокнистого хлопка, древесной целлюлозы и сахарного тростника (IV, V и VII-VIII) отличаются большим значением $d(\Delta I)/dT$. По-видимому, интенсивность этих движений несколько выше по сравнению с соответствующими динамическими эффектами в других исследованных образцах.

Из данных рис. 3, 4 и табл. 1 можно в порядке увеличения T_{II} расположить образцы следующим образом: IV<V≈VI≈VII≈VIII<III. Этот ряд соответствует увеличению подвижности с $\tau_c \leq 10^{-7}$ с в местах локализации метки. Однако по величине T_{min} образцы располагаются следующем порядке: IV<V<VI<VII<VIII<III. Этот ряд качественно соответствует более интенсивным крупномасштабным движениям с $\tau_c \leq 10^{-7}$ с. в МКЦ из средневолокнистого хлопка по сравнению с МКЦ тонковолокнистого хлопка и сахарного тростника.

Таким образом, препараты МКЦ из сахарного тростника по динамическим свойствам по сравнению с МКЦ из хлопковых и древесных целлюлоз являются менее упорядоченными, что связано с особенностью формирования физической структуры в процессе биосинтеза его макромолекул.

Поступило 11.11.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Марупов Р., Юсупов И.Х., Бободжанов П.Х., Лихтенштейн Г.И. Исследование молекулярной динамики хлопкового волокна методом спиновой метки. – ДАН СССР, 1981, т. 256, № 2, с. 414-417.
2. Бободжонов П.Х., Юсупов И.Х., Марупов Р. и др. Молекулярные свойства волокон хлопчатника различного происхождения. – ДАН Тадж ССР, 1983, т. 26, с. 594-597.
3. Велюгина Е.Т. Лекарственные растения России. – СПб.: Издатель, 1997. 284 с.
4. Лекарственные растения. Каталог. – М.: Медицина, 1985, 256 с.
5. Бободжонов П.Х., Юсупов И.Х., Марупов Р. и др. Молекулярные свойства волокон хлопчатника различного происхождения. – ДАН Тадж ССР, 1983, т. 26, с. 594-597.
6. Лихтенштейн Г.И., Котельников А.И. Молекулярная биология. 1983. т.17, №3, с. 505-507.
7. Юсупов И.Х., Бободжонов П.Х., Марупов Р., Анцифирова Л.И. и др. Исследование молекулярной динамики хлопкового волокна методом спиновой метки. – Высокомолекулярные соединения, 1984, т.26, № 2, с. 369-373.

Р.А.Султонов*, У.Р.Раджабов, С.Ч.Юсуфӣ*, Г.Ф.Наврӯзода, И.Х.Юсупов**

ОМУЗИШИ СТРУКТУРАИ НАХҶОИ КАТОНӢ ВА ФИБРОИНИ ТАБИИ ШЛЮС БО УСУЛИ НИШОНАИ СПИНӢ

МДТ «Донишгоҳи давлатии тиббии Тоҷикистон ба номи Абуалӣ ибни Сино»,

**МД «Маркази илмӣ-тадқиқотии фарматсевтии Вазорати тандурустӣ ва ҳифзи иҷтимоии аҳолии Ҷумҳурии Тоҷикистон»,*

***Институти-физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови Академияи миллии Тоҷикистон*

Таъсири нахҳои кетонӣ ва фиброинҳои табиӣ шлюс ба сохтори целлюлозаи микрокристаллӣ бо усули нишонаи спинӣ омӯхта шуд. Хусусиятҳои сохтори физикӣ-химиявии целлюлоза (коннунияти сохтори занҷирҳо ва самти мутақобилаи онҳо, системаи алоқаҳои байнимолекулавии гидрогенӣ, дараҷаи кристаллӣ ва ғайра) маҷмӯи хосиятҳои механикӣ ва технологияи онро муайян мекунад. Ба ин муносибат гузарондани тадқиқоти муқоисавии сохти молекулавии целлюлозаи микрокристаллӣ (СМК) бо усулҳои гуногуни тамғаи спинӣ муҳим ба назар мерасад. Дар баробари ин мавҷудияти якҷанд марҳалаи тағйир ёфтани сохти химиявӣ физикии целлюлоза кашф карда шуд.

Калимаҳои калидӣ: структураи микрокристаллӣ, нишонаи спинӣ, растаниҳои шиғоӣ, фиброини табиӣ шлюс, резонанси электронии парамагнети, радикали нитроксил.

R.A.Sultonov*, U.R.Rajabov, S.J.Yusufi*, G.F.Navruzzoda, I.Kh.Yusupov**

STUDY OF THE LINEN FIBERS, AND NATURAL LYE FIBROIN BY OF THE SPIN METHOD

SOI «Tajik State Medical University named after Abuali ibni Sino»,

**SI «Research Pharmaceutical Center of the Ministry of Health and Social Protection of the Population of the Republic of Tajikistan»,*

***U.S.Umarova Physico-Technical Institute, NAST*

The effect of flax fibers and natural lye fibroin on the structure of microcrystalline cellulose was studied by the spin method. The specifics of the physicochemical structure of cellulose (the regularity of the structure of chains and their mutual orientation, the system of inter- and intramolecular hydrogen bonds, the degree of crystallinity, etc.) determine the complex of its mechanical and technological properties. In this regard, it seems important to conduct a comparative study of the molecular structure of microcrystalline cellulose (MCC) of various spin methods. At the same time, the existence of several stages of change in the chemical and physical structure of cellulose was discovered.

Key words: structure microcrystalline, spin method, medicinal plant, natural lye fibroin, electron paramagnetic resonance, nitroxyl radical.

Сведения об авторах:

Султонов Рауфджон Азизкулович – аспирант кафедры фармацевтической и токсикологической химии Таджикского государственного медицинского университета им. Абуали ибн Сино. E-mail: raufsultonov@mail.ru

Раджабов Умарали Раджабович – заведующий кафедрой фармацевтической и токсикологической химии Таджикского государственного медицинского университета им. Абуали ибн Сино, доктор химических наук, профессор. E-mail: umarali55@mail.ru

Юсуфи Саломиддин Джаббор – ГУ «Научно-исследовательский фармацевтический центр Министерства здравоохранения и социальной защиты населения Республики Таджикистан», доктор фармацевтических наук, профессор, академик НАНТ.

Наврузода Ганджина Фуркат – Таджикский государственный медицинский университет им. Абуали ибн Сино, кандидат фармацевтических наук, доцент. E-mail: ganga-tj@mail.ru

Юсупов Изатулло Ходжаевич – ведущий научный сотрудник лаборатории молекулярной спектроскопии Физико-технического института им С.У.Умарова НАНТ, кандидат физ.-мат. наук, доцент. E-mail: usupizat@yandex.ru

УДК 582.26. (584.5)

Специальность: 1.5.9 – Ботаника

П.А.Курбонова

**О НЕКОТОРЫХ РЕДКИХ СТРЕПТОФИТОВЫХ ВОДОРΟΣЛЯХ
(STREPTOPHYTA), ОБНАРУЖЕННЫХ В ТАДЖИКИСТАНЕ***Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана Х.Х.Хисориевым 05.01.2023 г.)*

Приводятся данные об экологии и географическом распространении некоторых редких видов стрептофитовых водорослей (*Streptophyta*), обнаруженных в водоёмах верховий р. Кафирниган. Всего в различных водоёмах и водотоках бассейна данной реки выявлено 40 таксонов видового и внутривидового рангов, среди которых 5 видов являются редкими для альгофлоры Таджикистана: *Actinotaenium curtum* (Bréb.) Teiling, *Penium margaritaceum* (Ehr.) Bréb., *Staurodesmus spetsbergensis* (Nordst.) Teiling, *Xanthidium armatum* (Bréb.) ex Ralfs, *Gonatozygon kinahanii* (Arch.) Rabenh.

Ключевые слова: редкие таксоны, стрептофитовые, водоросли, р. Кафирниган, Таджикистан.

Стрептофитовые водоросли бассейна р. Кафирниган специально не исследованы. Имеются лишь отдельные сообщения об обнаружении некоторых видов этих водорослей в мелководье верхних притоков данной реки (рр. Сорбо и Сардаи Миёна в пределах заповедника Рамит), а также в водоёмах среднего её течения [1,2]. Альгологический материал собран в различных лужах, заводях, родниках, высыхающих эфемерных водоёмах, встречающихся в большом количестве по берегам главных притоков р. Кафирниган (рр. Сорбо и Сардаи Миёна) в весенне-летний период 2020-2022 гг. Пробы взяты из различных биотопов (фитопланктон, фитобентос, перифитон, обрастания макрофитов, нитчатых водорослей и других субстратов). Отбор, фиксация водорослевых образцов, идентификация видовых и внутривидовых таксонов, а также общее распространение и особенности экологии видов проводились согласно методике сбора и изучения стрептофитовых водорослей [3-6].

Подытоживая литературные данные и собственные исследования, в различных водоёмах бассейнов рр. Сорбо и Сардаи Миёна зафиксировано 34 вида водорослей из отдела *Streptophyta*, представленных 40 видовыми и внутривидовыми таксонами. Они принадлежат классу *Zygnemorphyceae*, 3 порядкам, 7 семействам и 8 родам. По разнообразию видов господствующими являются семейства *Desmidiaceae* и *Closteriaceae*, которые вместе объединяют 31 вид, разновидности и формы. Доля этих двух семейств в видовом разнообразии стрептофитовых верховий реки составляет 70%. По наибольшему видовому богатству среди 8 родов отличаются роды *Cosmarium*, *Closterium* и *Spirogyra*. Они вместе объединяют 23 вида, разновидности и формы, составляющие 57.5% общего видового и внутривидового состава стрептофитовых исследованных водоёмов.

Из 40 таксонов видового и внутривидового рангов стрептофитовых водорослей, выявленных в водоёмах верховий р. Кафирниган, 5 видов относятся к редким и малоизученным видам водорослей

Адрес для корреспонденции: Курбонова Парвина Абдурахмановна.734017, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Каримова, 27, Институт ботаники НАНТ. E-mail: parvin-mad@mail.ru

для альгофлоры Таджикистана. Они обнаружены лишь в отдельных водоёмах Таджикистана и в очень малом количестве [7,8]. К таким видам относятся *Actinotaenium curtum* (Bréb.) Teiling, *Penium margaritaceum* (Ehr.) Bréb., *Staurodesmus spetsbergensis* (Nordst.) Teiling, *Xanthidium armatum* (Bréb.) ex Ralfs, *Gonatozygon kinahanii* (Arch.) Rabenh. Следует отметить, что для некоторых этих видов, таких как *Penium margaritaceum* и *Staurodesmus spetsbergensis* характерно наиболее широкое распространение в водоёмах других природно-климатических зон Земного шара.

Ниже приведено биоморфологическое описание вышеназванных редких видов стрептофитовых водорослей, с указанием названия и синонимов таксона на латинском и русском языках, места обитания, а также общее распространение (ареал) вида в разных флористических царствах, областях и провинциях Земного шара.

1. *Actinotaenium curtum* (Bréb.) Teil. ex Růžička et Pouzar – Актинотениум укороченный (= *Cosmarium curtum* Brébisson in Ralfs; = *Penium curtum* Brébisson in Kütz.)

Клетки веретеновидно-эллипсоидные, посередине слабо перетянутые, 32 мкм длины и 10 мкм ширины. Полуклетки полуэллипсоидные, с выпуклой и утолщенной верхушкой, а также с чуть вздутыми и суживающимися кверху боками. Хлоропласты звездчатые, зигоспоры не обнаружены.

Места обитания. Очень редко среди других нитчатых стрептофитовых и зеленых водорослей, а также в обрастаниях мелких, эфемерных и сильно заросших стоячих водоёмах по берегам р. Сардаи Миёна.

Общее распространение (ареал). Голарктика: Циркумбореальная (Россия, Украина, Литва, Грузия, Швеция, Аляска), Восточно-Азиатская (Япония), Атлантико-Северо-Американская (США); Неотропики: Бразильская (Бразилия).

2. *Penium margaritaceum* (Ehr.) Bréb. – Пениум жемчужный

Клетки цилиндрические, посередине слегка перешнурованные, с широко округлёнными концами, 62-80 мкм длины, 12-14 мкм ширины. Оболочка слегка коричневатая, покрытая рядами мелких гранул. Хлоропласты по одному в каждой полуклетке и с одним пиреноидом. Зигоспоры не обнаружены.

Места обитания. Очень редко среди других нитчатых стрептофитовых и зеленых водорослей, а также в обрастаниях мелких, эфемерных и сильно заросших стоячих водоёмах по берегам р. Сорбо.

Общее распространение (ареал). Голарктика: Циркумбореальная (Россия, Канада, Лабрадор, Аляска, Шпицберген, Фарерские острова, Украина, Латвия, Грузия, Швеция, Финляндия, Польша), Ирано-Туранская (Узбекистан), Восточно-Азиатская (Япония, Китай, Северная и Южная Корея), Средиземноморская (Марокко), Атлантико-Северо-Американская (США); Палеотропики: Индокитайская (Бирма), Малазийская (о. Ява); Гвинео-Конголезская, Судано-Замбезийская, Мадагаскарская (о. Мадагаскар); Неотропики: Карибская (Эквадор), Амазонская (Бразилия); Австралийская: Центральная Австралия (Квинсленд, Сидней); Голантарктида: Новозеландская (Новая Зеландия), Чилийско-Патагонская (Аргентина). Космополит.

3. *Staurodesmus spetsbergensis* (Nordst.) Teiling – Стауродесмус шпицбергенский (= *Staurostrum bieneanum* Rabenh. f. *spetsbergensis* Nordstedt).

Клетки почти округлые, посередине глубоко перетянутые, 26 мкм длины и 29 ширины. Перешеек 7 мкм длины. Полуклетки широко чашевидно-трапециевидные, с плоской верхушкой и с немного вздутыми боками. Оболочка клеток гладкая. Хлоропласты с одним пиреноидом, зигоспоры шаровидные.

Места обитания. Очень редко среди других водорослей, в лужах и мелких, высыхающих и сильно заросших стоячих водоёмах по берегам р. Сардаи Миёна.

Общее распространение (ареал). **Голарктика:** Циркумбореальная (Англия, Ирландия, Исландия, Нидерланды, Франция, Россия, Румыния), Атлантико-Северо-Американская (США), Восточно-Азиатская (Китай), Неотропики: Амазонская (Бразилия); **Австралийская:** Центральная Австралия (Квинсленд, Сидней); **Голантарктида:** Новозеландская (Новая Зеландия).

4. *Gonatozygon kinahanii* (Arch.) Rabenh. – Гонатозигон Кинагана (= *Leptocystinema kinahanii* Arch).

Клетки цилиндрические, немного согнутые, с расширенными срезанными концами, 150 мкм длины и 10 мкм ширины. Хлоропластов по 2 в клетке, с несколькими пиреноидами в каждом хлоропласте. Зигоспоры неизвестны.

Места обитания. Очень редко среди обрастаний, а также в лужах и мелких стоячих водоёмах побережья р. Сардаи Миёна.

Общее распространение (ареал). **Голарктика:** Циркумбореальная (Канада, Западная Европа, Россия, Украина), Атлантико-Северо-Американская (США), Восточно-Азиатская (Амурская обл. России, Китай), Ирано-Туранская (Казахстан, Узбекистан), **Неотропики:** Амазонская (Бразилия).

5. *Xanthidium armatum* (Bréb.) ex Ralfs – Ксантидиум вооруженный (= *Cosmarium armatum* Bréb. in Menegh.; *Eastrum armatum* Kützing; *Xanthidium furcatum* Ralfs).

Клетки восьмиугольные, глубоко перетянутые, с щипами, 104 мкм длины и 78 мкм ширины, 63 мкм толщины. Хлоропласты пристенные, по 4 в каждой полуклетке. Зигоспоры не обнаружены.

Места обитания. Очень редко в бентосе стоячих и высыхающих водоёмов побережья р. Сорбо.

Общее распространение (ареал). **Голарктика:** Циркумбореальная (почти вся Европа, Эстония, Латвия, Белоруссия, Россия, Украина), Атлантико-Северо-Американская (США), Восточно-Азиатская (Япония); **Палеотропики:** Индийская (Индия); **Голантарктида:** Новозеландская (Новая Зеландия).

Поступило 06.01.2023

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Хисориев Х.Х. Водоросли р. Кафирниган. – Биол. основы рыб. хоз.-ва республик Средней Азии и Казахстана. – Фрунзе: Илим, 1978, с. 179-181.
2. Хисориев Х.Х. Биоразнообразие водорослей заповедника «Рамит». – Изв. АН РТ. Отд. биол. и мед. н., 2010, №1 (170), с. 23-29.
3. Водоросли: Справочник (Под ред. С.П.Вассера). – Киев: Наукова думка, 1989, 654 с.

4. Паламарь-Мордвинцева Г.М. Флора водорослей континентальных водоёмов Украины. Десмидиевые водоросли. Вып. 1, ч. 1. – Киев, 2003, 353 с.
5. Паламарь-Мордвинцева Г.М. Флора водорослей континентальных водоёмов Украины. Десмидиеві водорості. Вип. 1, ч. 2. – Київ, 2005, 573 с.
6. Паламарь-Мордвинцева Г.М., Петльований О.А. Флора водорослей України, т.12, стрептофітові водорості. Вип. 1. Родина Мезотенієві (Mesotaeniaceae). – Київ, 2009, 157 с.
7. Хисориев Х.Х. Итоги исследований флоры водорослей Таджикистана. – Изв. АН РТ. Отд. биол. и мед. Н. 2006, № 2 (155), с. 37-46.
8. Бобоев М.Т. Альгофлора водотоков и водоёмов Южно-Таджикской депрессии. Ч. 1. Таксономический состав и систематическая структура альгофлоры. – Душанбе: Дониш, 2016, 212 с.

П.А.Курбонова

О НЕКОТОРЫХ РЕДКИХ СТРЕПТОФИТОВЫХ ВОДОРΟΣЛЯХ (СТРЕПТОРНУТА) ОБНАРУЖЕННЫХ В ТАДЖИКИСТАНЕ

Институты ботаника, физиология ва генетикаи растении ИМИТ

Дар гузориши мазкур маълумотҳо доири экология ва паҳншавии географии баъзе намудҳои нодири обсабзҳои стрептофитӣ (Streptophyta), ки дар болооби дарёи Кофарниҳон дарёфт гардидаанд, оварда шудаанд. Дар мавзҳои гуногуни обӣ, ба монанди қўлмақҳо ва ҳавзчаҳои эферӣ 40 намуд ва зернамудҳои обсабзҳои стрептофитӣ дарёфт гардид, ки 5 намуди онҳо дар таркиби алгофлораи Тоҷикистон хеле нодиранд: *Actinotaenium curtum* (Bréb.) Teiling, *Penium margaritaceum* (Ehr.) Bréb., *Staurodesmus spetsbergensis* (Nordst.) Teiling, *Xanthidium armatum* (Bréb.) ex Ralfs, *Gonatozygon kinahanii* (Arch.) Rabenh.

Калимаҳои калидӣ: таксонҳои нодир, стрептофитҳо, обсабзҳо, Кофарниган, Таджикистан.

P.A.Kurbonova

ON SOME RARE SPECIES OF STREPTOPHYTA ALGAE, FOUND IN TAJIKISTAN

Institute of Botany, Plant Physiology and Genetics, National Academy of Sciences of Tajikistan

There are presented ecology and geographical distribution of some rare species of Streptophyta algae, which found in headstream of Kofarnihon river basin. Totally 40 species and interspecies of Streptophyta were found in different small headstreams of this river. Among them 5 species are rare species for algae flora of Tajikistan: *Actinotaenium curtum* (Bréb.) Teiling, *Penium margaritaceum* (Ehr.) Bréb., *Staurodesmus spetsbergensis* (Nordst.) Teiling, *Xanthidium armatum* (Bréb.) ex Ralfs, *Gonatozygon kinahanii* (Arch.) Rabenh.

Key words: rare taxons, streptophyta, algae, Kofarnihon, Tajikistan.

УДК 581.132:633.511

Специальность: 1.5.21 – Физиология и биохимия растений

Член-корреспондент НАН Таджикистана Х.А.Абдуллаев, Н.Х.Ойзода, Б.А.Солиева,
М.М.Саиднабиев*, М.Л.Дадобаева**

О ВЛИЯНИИ ФОРМЫ И ОКРАСКИ ЛИСТА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АССИМИЛЯТОВ ПО ОРГАНАМ РАСТЕНИЙ ХЛОПЧАТНИКА

Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана,

**Худжандский научный центр НАН Таджикистана,*

***Худжандский государственный университет им. академика Б.Гафурова*

В работе приводятся результаты анализа распределения и накопления продуктов фотосинтеза по органам и частям растения хлопчатника в зависимости от формы и окраски листа. Установлено, что распределение ассимилятов по органам растения хлопчатника не зависит от формы и степени окраски листа. Корреляционный анализ показал, что между накоплением общей сухой биологической массы растения и формой листа нет положительной связи ($r = -0.126$). Аналогичная картина наблюдается также между окраской листа и сухой надземной биомассой растения ($r = -0.148$). Между индексом урожая ($K_{хоз.}$) и окраской листа существует слабая положительная связь ($r = 0.445$).

Ключевые слова: средневолокнистый хлопчатник, *Gossypium hirsutum*, инбредные линии, форма и окраска листовой пластинки, распределение ассимилятов, органы и части растения.

В предыдущих наших исследованиях были приведены результаты работ по изучению влияния формы и окраски листа на показатели фотосинтеза [1] и водного режима [2-4] элементов и компонентов урожая [5] хлопчатника. Однако в этих сериях опытов не были представлены данные по изучению эффекта формы и окраски листовой пластинки на распределение ассимилятов по органам и частям растения хлопчатника.

В этой связи в настоящей работе приводятся результаты исследования распределения и накопления продуктов фотосинтеза по органам и частям растений хлопчатника по фазам развития в зависимости от формы и окраски листа в течение вегетации.

Материалы и методы исследований

Объектом исследования служили инбредные линии средневолокнистого хлопчатника Л-3, Л-461, Л-501, Л-549, Л-601 из генетической коллекции *Gossypium hirsutum* L. Ташкентского государственного университета им. Мирзо Улугбека (Узбекистан), контрастные по форме и окраске листовой пластинки. Линии Л-3 и Л-461 имеют пальчаторассечённые листья типа окра и суперокра соответственно с антоциановой и зелёной окраской. Характерной особенностью линии Л-501 и Л-549 является

Адрес для корреспонденции: Абдуллаев Хамиджон Абдуллаевич. 734017, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Каримова, 27, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАНТ. E-mail: homidjon1945@mail.ru

цельнокрайная форма листовой пластинки, соответственно с зелёной и антоциановой окраской. Линия Л-601 имеет листья пальчатодольчатой формы тёмно-зелёной окраски.

Растения для опытов выращивали на экспериментальном участке Института ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана, расположенном в восточной части Гиссарской долины на высоте 830 м над ур.м., в одинаковых условиях, согласно агрорекомендациям по выращиванию хлопчатника в Таджикистане [6] в едином опыте. Делянки опыта – четырёхрядковые, десятилуночные, схема посева – 60х30х1, биологическая повторность трёхкратная, рендомизированная. Для анализов брали растения с одинаковым уровнем роста и развития.

Для изучения характера определения ассимилятов в течение вегетации по фазам развития растений определяли массу корня и отдельных надземных органов путём их расчленения и высушивания до постоянного веса в термостате при температуре 100°C.

Статистический анализ полученных данных проводили с использованием программы *Microsoft Excel 2010*. В таблицах приведены среднеарифметические величины и стандартные ошибки трёх определений из трёх биологических повторностей. Достоверность различий определяли по *t*-критерию Стьюдента при числе степеней свободы $n'=(n+n_2)-2+4$ и уровне значимости $P = 0.01$.

Результаты исследований и их обсуждение

Результаты анализа распределения ассимилятов и накопления биомассы по органам растений у различных генотипов – инбредных линий средневолокнистого хлопчатника в фазах бутонизации, цветения, плодоношения и созревания представлены в табл. 1-4.

Как видно из данных табл. 1, в фазу бутонизации у всех исследованных генотипов независимо от формы и окраски листа основными акцепторами ассимилятов являлись стебли и листья. Их доля в общей сухой биомассе растений составляла: 67.3% у линии Л-3, 73.7% – у линии Л-501, 69.2% – у линии Л-601, 73.7% – у линии Л-549 и 63.5 – у линии Л-461, то есть основная масса продуктов фотосинтеза в фазе бутонизации направлялась в эти органы растения.

Аналогичная картина распределения продуктов фотосинтеза наблюдается и в фазу цветения (табл. 2). Так, процентное содержание сухой массы стебля и листьев составляла: у линии Л-3 – 37.9%, у линии Л-461 – 37.9%, у линии Л-501 – 53.4%, у линии Л-549 – 63%, у линии Л-601 – 56.9%.

При этом ассимиляты на формирование фотосинтезирующей системы растения – листьев расходовали у линии Л-3 на 37.9%, у линии Л-461 на 25%, у линии Л-501 на 32.5%, у линии Л-549 на 33.6% и у линии Л-601 на 34.7%.

С переходом растений в репродуктивную фазу, то есть с появлением новых акцепторов ассимилятов (цветков, завязей и зелёных коробочек) в фазу цветения изменился характер распределения ассимилятов на рост органов (табл. 2) – уменьшилась масса листьев и их доля в общей биомассе (от 25.0 до 37.9%), то есть происходило переключение (смена) акцепторной функции листа на донорную.

Таблица 1

Распределение сухой биомассы по органам растений хлопчатника.

Фаза развития: массовая бутонизация

Линия	Сухая масса органов и частей растения, г					Общая сухая биомасса растения, г
	корень	стебель	листья	черешки листьев	бутоны	
Л-3	0.9±0.01	2.7±0.3	3.9±0.4	0.8±0.08	0.7±0.01	9.4±0.8
Л-461	0.7±0.08	2.1±0.1	3.3±0.4	0.8±0.05	1.2±0.07	8.5±0.8
Л-501	1.0±0.05	3.2±0.1	5.5±0.5	0.8±0.05	1.1±0.04	12.7±1.1
Л-549	0.7±0.05	2.0±0.1	2.8±0.1	0.6±0.01	0.3±0.03	6.5±0.3
Л-601	1.1±0.02	2.1±0.1	5.1±0.01	1.1±0.03	0.8±0.07	10.4±0.3

Таблица 2

Распределение сухой биомассы по органам растений хлопчатника.

Фаза развития: массовое цветение

Линия	Сухая масса органов и частей растения, г							Общая сухая биомасса растения, г
	корень	стебель	листья	черешки листьев	бутоны	цветки	зелёные коробочки	
Л-3	1.5±0.01	4.1±0.04	5.2±0.06	1.3±0.013	0.8±0.04	0.3±0.01	0.7±0.03	13.7±1.7
Л-461	1.0±0.05	3.0±0.07	4.0±0.04	1.2±0.012	1.5±0.01	1.0±0.05	3.9±0.3	16.0±1.4
Л-501	1.5±0.03	3.6±0.02	5.6±0.06	1.9±0.012	1.5±0.05	0.6±0.01	2.4±0.07	17.2±0.8
Л-549	1.2±0.01	3.5±0.04	4.0±0.07	1.3±0.013	0.6±0.01	0.3±0.01	1.0±0.05	11.9±2.5
Л-601	1.8±0.05	5.1±0.04	8.0±0.08	2.9±0.03	1.3±0.02	0.6±0.02	3.0±0.4	23.0±4.0

В фазе массового плодоношения (табл. 3) у всех инбредных линий независимо от формы и окраски листа увеличивается масса стебля и листьев, за исключением линии Л-461 с пальчаторассечённой формой листа (типа суперокра). Повышается масса зелёных коробочек у линии Л-501 и Л-601 на 18.8 и 22.9% г/растение. Максимальное накопление сухой биомассы наблюдается: у линий Л-3 (47.7 г/растение) и Л-601 (62 г/растение), минимальное – у линии Л-549 (25.7 г/растение).

Таблица 3

Распределение сухой биомассы по органам растений хлопчатника.

Фаза развития: массовое плодоношение

Линия	Сухая масса органов и частей растения, г								Общая сухая биомасса растения, г
	корень	стебель	листья	черешки листьев	завязи	зелёные коробочки	створки раскрытых коробочек	Масса хлопка-сырца	
Л-3	5.3±0.05	13.5±0.2	11.4±1.2	2.9±0.5	2.1±0.05	13.3±1.5	-	-	47.7±5.1
Л-461	1.2±0.06	3.1±0.1	3.9±0.06	1.0±0.06	0.3±0.01	6.0±0.7	4.7±0.2	16.9±0.9	37.1±2.2
Л-501	1.5±0.02	4.3±0.3	5.4±0.4	1.8±0.1	0.3±0.01	18.8±0.6	1.6±0.7	3.5±1.0	37.2±2.5
Л-549	2.1±0.02	4.1±0.2	4.6±0.8	1.4±0.2	0.4±0.01	12.2±0.12	2.5±0.01	2.0±0.0	25.7±3.9
Л-601	3.3±0.03	6.6±0.7	9.5±1.5	3.5±0.7	1.0±0.04	22.9±3.6	4.4±0.3	10.5±2.4	62.0±8.3

Таблица 4

Распределение сухой биомассы по органам растений хлопчатника.

Фаза развития: массовое созревание

Линия	Сухая масса органов и частей растения, г									K _{хоз.} , %
	корень	стебель	листья	черешки листьев	завязи	зелёные коровочки	створки раскрытых коровочек	Масса хлопка-сырца	Общая сухая биомасса растения, г	
Л-3	4.2±0.4	14.1±1.5	12.8±0.1	3.2±0.2	0.3±0.05	29.0±2.4	6.4±1.0	9.6±0.6	80.9±3.0	11.8
Л-461	1.4±0.2	3.3±0.4	2.7±0.2	0.9±0.1	0.37±0.01	-	13.0±0.6	16.9±1.5	37.0±2.3	45.6
Л-501	3.4±0.2	8.0±0.6	6.9±0.9	2.5±0.3	0.8±0.0	8.2±0.0	7.7±1.0	7.3±1.2	39.1±1.0	18.6
Л-549	1.4±0.3	3.8±0.4	4.4±0.5	1.3±0.03	-	8.1±1.7	5.4±0.3	5.2±0.8	29.6±0.2	17.6
Л-601	3.9±0.3	8.9±0.08	6.6±2.1	4.9±1.3	1.9±0.2	-	11.4±0.7	33.5±2.1	70.6±2.6	47.4

Как видно из табл. 4, в фазе массового созревания урожая среди изученных генотипов, линия Л-3 с пальчаторассечённой формой листа антоциановой окраски и линия Л-601 с пальчатодольчатой формой листа зелёной окраски имеют максимальные величины общей сухой биомассы 80.9 и 70.6 г/растение. Минимальное накопление общей сухой биологической массы за вегетацию наблюдается у линии Л-549 с антоциановым и цельнокрайним листом – 29.6 г/растение (табл. 4). Линия Л-461 с пальчаторассечённым листом зелёной окраски имеет сухую биомассу 34.0 г/растение.

Обращает на себя внимание тот факт, что линии Л-3 и Л-461 имеют одинаковую пальчаторассечённую форму листовой пластинки – типа окра и суперокра. Однако у них накопление сухой биомассы разное – 80.9 и 34.0 г/растение, соответственно. Эти данные наглядно показывают, что образование биологической массы не зависит от формы листовой пластинки или же у линий Л-501 и Л-549 с цельнокрайними формами листа, но разными цветовыми окрасками (зелёными и антоциановыми оттенками, соответственно) накопление общей сухой биологической массы разное: 39.1 и 29.6 г/растение. Эти результаты свидетельствуют о том, что образование и накопление сухой биомассы у хлопчатника абсолютно не зависит от формы и окраски листа. Проведённый нами корреляционный анализ показал, что между накоплением сухой биомассы и формой листовой пластинки у хлопчатника нет положительной взаимосвязи ($r = -0.126$).

Аналогичная картина наблюдается и при анализе взаимосвязи между накоплением сухой биомассы и окраской листовой пластинки у хлопчатника ($r = -0.148$).

Таким образом, на основании полученных данных можно заключить, что распределение и накопление ассимилятов у хлопчатника не зависит от формы и степени окраски листовой пластинки.

Из табл. 4 видно, что инбредные линии хлопчатника, которые имеют разные формы и окраски листа, резко отличаются друг от друга по показателю хозяйственной эффективности.

Среди исследованных генотипов линия Л-601 с тёмно-зелёными листьями имеет лучшее распределение ассимилятов и хозяйственно ценной части урожая растений хлопчатника (K_{хоз.}) – 47.4%, на втором месте – линия Л-461 со светло-зелёной окраской листа пальчаторассечённой формы (45.6%). Данные табл. 4 показывают, что чем выше K_{хоз.}, тем, следовательно, выше и хозяйственная

продуктивность. Между $K_{хоз.}$ и формой листа ($r = 0.331$), окраской листа ($r=0.44$) имеется положительная связь.

Обычно в зависимости от генотипа и биологических особенностей линий и сортов этот признак хлопчатника варьирует от 0.22 до 0.65, у скороспелого низкорослого сорта тонковолокнистого хлопчатника с нулевым типом ветвления Каршинский-8 $K_{хоз.}$ даже равен 0.80 [7].

Возникает вопрос: чем обусловлена высокая хозяйственная продуктивность и, следовательно, высокое отношение массы репродуктивных органов к вегетативным?

Возможно, это связано с направленностью транспорта и распределения ассимилятов в репродуктивные и вегетативные органы, то есть если листовой аппарат у хлопчатника в более поздние фазы развития работает исключительно только на формирование хозяйственной части, а не на увеличение вегетативной массы, то повышается $K_{хоз.}$ и наоборот (рисунок).

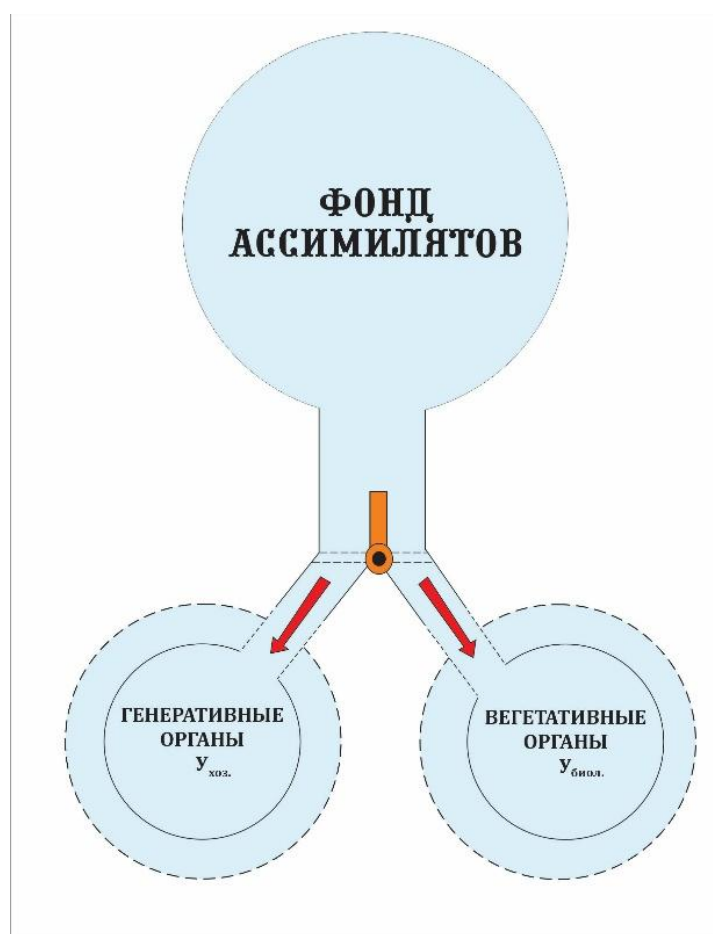




Рисунок. Схема распределения ассимилятов на вегетативные и генеративные органы растения.

Примечание:  – распределитель ассимилятов открыт,
 – увеличение количество ассимилятов

Поступило 20.11.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абдуллаев Х.А., Каримов Х.Х., Негматов М.Н., Мансуров А.И., Каспарова И.С. Фотосинтез генотипов средневолокнистого хлопчатника с различной формой листовой пластинки. – ДАН РТ. 2013, т. 56, №2, с. 153-159.
2. Абдуллаев Х.А., Ойзода Н.Х., Солиева Б.А., Маниязова Н.А. Зависимость интенсивности транспирации от формы и окраски листа. – Мат-лы респ. науч. конф. «Биоразнообразие горных экосистем Памира в связи с изменением климата». – Хорог: Дониш, 2021, с. 8-9.
3. Ойзода Н.Х., Солиева Б.А., Сатторов Б.Н. и др. О водном дефиците инбредных линий хлопчатника. – Мат-лы респ. науч. конф. «Биоразнообразие горных экосистем Памира в связи с изменением климата». – Хорог: Дониш, 2021, с. 74.
4. Солиева Б.А., Ойзода Н.Х., Сатторов Б.Н. и др. Водоудерживающая способность хлопчатника в зависимости от формы и окраски листа. Доклады НАН Таджикистана, 2021, т. 64, №1-2, с. 113-116.
5. Ойзода Н.Х., Солиева Б.А., Хакимова Р.Ш. и др. Число и крупность коробочек в зависимости от формы и окраски листовой пластинки. – ДАН РТ. 2020, т. 63, №5-6, с. 388-392.
6. Ахмедов Х.М., Набиев Т.Н., Бухориев Т.Н. Научные системы ведения сельского хозяйства Таджикистана (на тадж. яз.). – Душанбе: Матбуот, 2009, 766 с.
7. Тяминов А.Р. Скороспелый сорт тонковолокнистого хлопчатника для интенсивного земледелия. – Гуза генетикаси, селекцияси, уругчилиги ва бедачилик масалалари туплами. – Тошкент: Ўз ГСУИТИ, 2000, с. 111-114.

Х.А.Абдуллоев, Н.Х.Ойзода, Б.А.Солиева, М.М.Саиднабиев*, М.Л.Дадобоева**

**ДАР БОРАИ ТАЪСИРИ ШАКЛ ВА РАНГИ БАРГ БА ТАҚСИМОТИ
АССИМИЛЯТҲО**

Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

**Маркази илми Хучанд, АМИТ*

***Донишгоҳи давлатии Хучанд ба номи академик Б.Ғафуров*

Дар мақола натиҷаи таҳқиқи тақсимоти ассимилятҳо ба узвҳо ва қисмҳои растани пахта вобаста аз шакл ва ранги барг оварда шудааст. Муқаррар карда шудааст, ки тақсимоти ассимилятҳо ба узвҳои растани пахта аз шакл ва ранги барг вобастагӣ надорад. Ташҳиси коррелясионӣ нишон дод, ки байни ғуншавии массаи хушки растанӣ ва шакли барг вобастагии мусбӣ мавҷуд нест ($r = -0.126$). Чунин вазъият байни ранги барг ва биомассаи хушки рӯизаминии растанӣ ($r = -0.148$) низ мушоҳида карда мешавад. Байни шохосаи (индекси) ҳосил ($K_{хоз.}$) ва ранги барг алоқаи сусти мусбӣ ($r = 0.445$) вучуд дорад.

Калимаҳои калидӣ: *пахтаи миёнаҳах *Gossypium hirsutum*, лайнҳои инбредӣ, шакл ва ранги пластинкаи барг, тақсимоти ассимилятҳо, узвҳо ва қисмҳои растанӣ.*

Kh.A.Abdullaev, N.Kh.Oyzoda, B.A.Solieva, M.M.Saidnabiev*, M.L.Dadoboeva**

**ABOUT THE INFLUENCE OF THE LEAF SHAPE AND COLORS ON
ASSIMILATES DISTRIBUTION IN COTTON**

Institute of Botany, Plants physiology and Genetics National Academy of Sciences of Tajikistan,

**Khudjand of Sciences Center of NAST,*

***B. Gafurov, Khudjand State University*

In this paper presents the results of the analysis of distribution and accumulation of assimilates in the organs and parts of cotton plants, depending from leaf shape and colors. It has been established that the distribution of assimilates to the organs of cotton plants does not depend from shape and color of the leaf. Correlation analysis showed that is no positive relationship between accumulation of total biomasses of the plants and leaf shape ($r = - 0,126$). A similar result is also observed between the colors of the leaf and dry weight of plants ($r = - 0.148$). There is a weak positive correlation between the harvest indexes (HI) and leaf color ($r = 0.445$)

Key words: *middle cotton Gossypium hirsutum, inbred lines, leaf shape and colors, assimilates distribution, plant organs and parts.*