

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- М.Илолов, Ш.М.Зулфонов.** Начально-краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка127
- Р.Л.Хотамова.** Распределение дробных частей многочлена, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала136
- Х.М.Хуромонов.** О наилучшем совместном полиномиальном приближении функций и их производных в пространстве Бергмана B_2 142
- А.Захурбеков.** Наилучшее совместное приближение некоторых классов функций двух переменных в $L_2(Q)$ 156
- Э.М.Мухамадиев, М.М.Каримов, И.Дж.Нуров.** Исследование бифуркации периодических решений для двумерной динамической системы с главной однородной частью162
- О.Х.Каримов, З.Дж.Хакимова.** О коэрцитивной разрешимости эллиптического дифференциального уравнения недивергентного вида170
- Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов.** Задачи типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями178

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- М.М.Кабиллов, З.Б.Шерматова.** Эквивалентная математическая модель фильтрационного горения газов при наличии теплопотерь187

АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, Д.К.Аюбов.** Результаты наблюдений кометы C/2021 A2 (NEOWISE) в Таджикистане196

ВЫСОКОМОЛЕКУЛЯРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

- Х.М.Абдуллаев, Э.Д.Шаимов, Р.Т.Кадыров, У.М.Шаимов.** Температурное поведение структуры трехкомпонентного сополиэфира208

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- К.О.Бобоев, М.Д.Бобоёров, Б.Б.Баротов, И.Мирсаидзода.** Особенности анализа урана в урансодержащих рудах и отходах218
- Д.З.Музафарова, М.Т.Жумаев, Л.Солиев.** Фазообразование в системе Na, Ca, Al||SO₄, CO₃-H₂O при 273 К223

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

- З.Х.Гайбуллаева, Т.Х.Гадоев, Б.И.Асроров, Ш.Б.Бахриддинзода, А.Шарифов.**
Ресурсосберегающая технология переработки угля месторождения Фан-Ягноб.....**230**
- А.С.Курбонов, К.И.Нематуллоев, М.М.Тагоев, А.П.Тагаев, У.М.Мирсаидов.** Получение
боросиликатного стекла из местных сырьевых материалов Таджикистана.....**236**

МИНЕРАЛОГИЯ

- М.А.Мираков.** Ниобий-танталовая минерализация в пегматитовой жиле лесхозовская из
Шахдаринского пегматитового поля (Юго-Западный Памир)**241**

CONTENTS

MATHEMATICS

- M.Iolov, Sh.M.Zulfonov.** Initial-boundary value problem for equation in private derivatives of the 2nd order127
- R.L.Hotamova.** Distribution of fractional parts of a polynomial whose argument runs through prime numbers from a short interval.....136
- Kh.M.Khuromonov.** On the best joint polynomial approximation of functions and their derivatives in the Bergman space.....142
- A.Zahurbekov.** Best joint approximation of some classes of functions of two variables in $L_2(Q)$156
- E.M.Muhamadiev, M.M.Karimov, I.J.Nurov.** Investigation of the bifurcation of periodic solutions for a two-dimensional dynamic system with the main homogeneous part.....162
- O.Kh.Karimov, Z.Zh.Khakimova.** On coercitive solvability of an elliptic differential equation of non-divergent type.....170
- L.N.Rajabova, F.M.Akhmadov.** Cauchy-type problems for a two-dimensional Volterra-type integral equation with boundary special and strongly special lines.....178

MATHEMATICAL PHYSICS

- M.M.Kabilov, Z.B.Shermatova.** Equivalent mathematical model of filtration combustion of gases in the presence of heat losses.....187

ASTRONOMY

- G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, D.K.Ayubov.** Results of comet C/2021 A2 (NEOWISE) observation in Tajikistan.....196

HIGH MOLECULAR MASS COMPOUND

- Kh.M.Abdullaev, E.D.Shaimov, R.T.Kadirov, U.M.Shaimov.** Temperature behaviour of the structure three-component copolyester.....208

INORGANIC CHEMISTRY

- K.O.Boboev, M.D.Boboyorov, B.B.barotov, I.Mirsaidzoda.** Features of the analysis of uranium in uranium-containing ores and waste218
- D.Z.Muzafarova, M.T.Jumaev, L.Soliev.** Phase formation in the systems Na,Ca,Al||SO₄,CO₃-H₂O at 273 K223

CHEMICAL TECHNOLOGY

- Z.H.Gaibullaeva, N.H.Gadoev, B.I.Asrorov, Sh.B.Bahriddinzoda, A. Sharifov.** Studying the process of obtaining hydrogen-containing gases.....230

A.S.Kurbonov, K.I.Nematulloev, M.M.Tagoev, A.P.Tagaeв, U.M.Mirsaidov. Obtaining borosilicate glass from local raw materials of Tajikistan	236
--	------------

MINERALOGY

M.A.Mirakov. Niobium-tantalum mineralization in the leshozovskaya pegmatite vein from the Shakh dara pegmatite field (South Western Pamir)	241
---	------------

УДК 511.5

Специальность: 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Академик НАН Таджикистана М.Илолов, Ш.М.Зулфонов*

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 2-ГО ПОРЯДКА

Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана,

**Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни*

С помощью преобразования Лапласа-Карсона найдено представление решения начально-краевой задачи для уравнения в частных производных 2-го порядка.

Ключевые слова: *начально-краевая задача, аналитическое решение, преобразование Лапласа-Карсона.*

Рассмотрим начально-краевую задачу для линейного дифференциального уравнения в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial t} + bu = f(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющего начальным

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad t > 0; \quad u'_x(0, t) = \varphi_2(t), \quad t > 0 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x > 0; \quad u'_t(x, 0) = u_1(x), \quad x > 0. \quad (3)$$

Предположим, что заданные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), u_0(x), u_1(x), f(x, t)$ являются функциями оригинала для преобразования Лапласа.

Для нахождения решения задачи (1)-(3) воспользуемся разновидностью преобразования Лапласа, функций двух переменных – преобразованием Лапласа-Карсона, составляющей основу операционного исчисления Хевисайда (см. [1]).

Двухмерное преобразование Лапласа-Карсона функции $f(x, t)$ имеет вид

$$F(p, q) = pq \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-px-qt} f(x, t) dx dt \quad (4)$$

Адрес для корреспонденции: *Зулфонов Шахриёр Мулозулфонович. 734025, Республики Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, Таджикский государственный педагогический университет. E-mail: Zulfonov.Shakhrier@mail.ru*

и связывает однозначную функцию двух комплексных переменных p, q с соответствующей функцией $f(x, t)$.

Вначале выпишем изображения Лапласа-Карсона для всех составляющих уравнения (1), начальных (2) и граничных (3) функций, то есть

$$u(x, 0) = u_0(x) \rightarrow U_0(p), \quad u(0, t) = \varphi_1(t) \rightarrow \Phi_1(q), \quad u'_x(0, t) = \varphi_2(t) \rightarrow \Phi_2(q),$$

$$u'_t(x, 0) = u_1(x) \rightarrow U_1(p), \quad u(x, t) \Rightarrow U(p, q), \quad f(x, t) \rightarrow F(p, q),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow p^2 [U(p, q) - \Phi_1(q)] - p\Phi_2(q); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow q^2 [U(p, q) - U_0(p)] - qU_1(p);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow q [U(p, q) - U_0(p)].$$

Далее, подставляя изображения в уравнение (1), получим следующие соотношения для функции $U(p, q)$ в пространстве частот

$$\begin{aligned} U(p, q) = & \left\{ \frac{F(p, q)}{(p+q)^2 + a(p+q) + b} \right\} + \left\{ \frac{[p^2 + 2pq + ap]\Phi_1(q)}{(p+q)^2 + a(p+q) + b} \right\} + \\ & + \left\{ \frac{p\varphi_2(q)}{(p+q)^2 + a(p+q) + b} \right\} + \left\{ \frac{[q^2 + 2pq + aq]U_0(p)}{(p+q)^2 + a(p+q) + b} \right\} + \\ & + \left\{ \frac{qU_1(p)}{\left(p+q + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) \left(p+q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right)} \right\} + \\ & + \left\{ \frac{-2pqu(0,0)}{\left(p+q + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) \left(p+q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right)} \right\}. \end{aligned} \tag{5}$$

С учетом теоремы единственности и известных свойств обратного преобразования Лапласа-Карсона находим функции оригинала для каждого слагаемого для суммы (5).

Шаг 1: докажем справедливость формулы

$$\left\{ \frac{F(p, q)}{\left(p + q + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) \left(p + q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right)} \right\} \Leftarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \int_0^{\min(x, t)} \left(e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)s} - e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)s} \right) f(x-s, t-s) ds.$$

Сначала упростим выражение, стоящее слева

$$\frac{F(p, q)}{\left(p + q + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) \left(p + q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(\frac{F(p, q)}{p + q + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} - \frac{F(p, q)}{p + q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \right).$$

Далее воспользуемся следующей формулой из [2]

$$\frac{F(p, q)}{p + q + a_0} \Leftarrow \int_0^{\min(x, t)} e^{-a_0 s} f(x-s, t-s) ds \tag{6}$$

и переходим к формуле

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(\frac{F(p, q)}{p + q + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} - \frac{F(p, q)}{p + q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \right) \Leftarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \int_0^{\min(x, t)} e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)s} f(x-s, t-s) ds -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \int_0^{\min(x, t)} e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)s} f(x-s, t-s) ds =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \int_0^{\min(x,t)} \left(e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)s} - e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)s} \right) f(x-s, t-s) ds. \tag{7}$$

Шаг 2: выражение во второй скобке из (5) допускает упрощение в виде

$$2 \cdot \left\{ \frac{[p^2 + 2pq + ap] \Phi_1(q)}{\left(p + q + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) \left(p + q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right)} \right\}.$$

Сначала упростим выражение

$$\begin{aligned} & \frac{[p^2 + 2pq + ap] \Phi_1(q)}{\left(p + q + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) \left(p + q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right)} = \\ &= \frac{p\Phi_1(q)}{p + q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} + \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \cdot \frac{pq\Phi_1(q)}{p + q + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} + \\ & \quad + \frac{\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \cdot \frac{p\Phi_1(q)}{p + q + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} - \\ & \quad - \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \cdot \frac{pq\Phi_1(q)}{p + q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \\ & \quad - \frac{\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \cdot \frac{p\Phi_1(q)}{p + q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}}. \end{aligned}$$

Хорошо известно [3], что изображения функций $e^{-a_1x} \varphi_1'(t-x) + \varphi_1(0)e^{-a_1x} \delta(t-x) + \varphi_1(0)e^{-a_1x} \delta(t-x)$ и $e^{-a_2x} \varphi_1(t-x)$ имеют соответственно вид

$$\left(e^{-a_1 x} \varphi_{1_t}'(t-x) + \varphi_1(0) e^{-a_1 x} \delta(t-x) \right) \Rightarrow \frac{pq\Phi_1(q)}{p+q+a_1}, \tag{8}$$

$$e^{-a_2 x} \varphi_1(t-x) \Rightarrow \frac{p\Phi_1(q)}{p+q+a_2}. \tag{9}$$

Пользуясь формулами (8) и (9), находим оригинал для второй скобки из (5)

$$\left\{ \frac{[p^2 + 2pq + ap] \Phi_1(q)}{\left(p+q+\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) \left(p+q+\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right)} \right\} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x} \varphi_1(t-x) + \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x} \varphi_{1_t}'(t-x) +$$

$$+ \frac{e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(\varphi_1(0) \delta(t-x) + \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) \varphi_1(t-x) \right)$$

$$- \frac{e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(\varphi_{1_t}'(t-x) + \varphi_1(0) \delta(t-x) \right)$$

$$- \frac{e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) \varphi_1(t-x). \tag{10}$$

Шаг 3: с учетом формулы (7) устанавливается соотношение

$$\left\{ \frac{p\Phi_2(q)}{\left(p+q+\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) \left(p+q+\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right)} \right\} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow (a^2 - 4b)^{-\frac{1}{2}} \left(e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x} - e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x} \right) \varphi_2(t-x). \tag{11}$$

Шаг 4: аналогично шагу 2 устанавливается следующее соотношение

$$\left\{ \frac{[q^2 + 2pq + aq]U_0(p)}{\left(p + q + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)\left(p + q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)} \right\} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)t}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(u_0(0)\delta(x-t) + \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)u_0(x-t) \right)$$

$$- \frac{e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)t}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(u_{0,x}'(x-t) + u_0(0)\delta(x-t) \right)$$

$$- \frac{e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)t}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) u_0(x-t) +$$

$$+ e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)t} u_0(x-t) + \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)t} u_{0,x}'(x-t). \tag{12}$$

Шаг 5: справедливо соотношение

$$\left\{ \frac{qU_1(p)}{\left(p + q + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)\left(p + q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)} \right\} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)t} - e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)t} \right) u_1(x-t). \quad (13)$$

Шаг 6: справедливо соотношение

$$\left\{ \frac{-2pqu(0,0)}{\left(p+q + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) \left(p+q + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right)} \right\} \Leftarrow 0. \quad (14)$$

Таким образом, учитывая формулы (7)-(14), выпишем общее представление решения задачи (1)-(3)

$$\begin{aligned} u(x,t) = & e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x} \varphi_1(t-x) + \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x} \varphi'_{1,t}(t-x) + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \int_0^{\min(x,t)} \left(e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)s} - e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)s} \right) f(x-s, t-s) ds + \\ & + \frac{e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(\varphi_1(0)\delta(t-x) + \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) \varphi_1(t-x) \right) - \\ & \frac{e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(\varphi'_{1,t}(t-x) + \varphi_1(0)\delta(t-x) + \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \right) \varphi_1(t-x) \right) - \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x} - e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x} \right) \varphi_2(t-x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)t} u_0(x-t) + \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)t} u_{0,x}'(x-t) + \\
 & \frac{e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)t}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(u_0(0)\delta(x-t) + \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right) u_0(x-t) \right) - \\
 & \frac{e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)t}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(u_{0,x}'(x-t) + u_0(0)\delta(x-t) + \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right) u_0(x-t) \right) \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)t} - e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)t} \right) u_1(x-t). \tag{15}
 \end{aligned}$$

Пример. Найти решение уравнения

$$u_{xx} + u_{tt} + 2u_{xt} + u = \sqrt{x+t}, \quad t > 0 \tag{16}$$

С начальными и краевыми условиями

$$u(0,t) = u(x,0) = u_x(x,0) = u_t(0,t) = u(0,0) = 0. \tag{17}$$

Из формулы (15) сразу выпишем решение задачи (16), (17) ($x < t$)

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int_0^x \left(e^{-(-\sqrt{-1})\tau} - e^{-(\sqrt{-1})\tau} \right) \sqrt{x-\tau+t-2\tau} d\tau = \\
 &= \int_0^x \frac{r^{i\tau} - e^{-i\tau}}{2i} \sqrt{x+t-2\tau} d\tau = \int_0^x \sin \tau \sqrt{x+t-2\tau} d\tau.
 \end{aligned}$$

Отметим, что задача (16), (17) другим операционным методом решена в [4].

Поступило 08.02.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. – М., 1958, 179 с.

2. Дёг Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразование. – М.: Рипол Классик. 1971, с. 288
3. Илолов.М.И., Зулфонов Ш.М. Начально-краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка. – Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибеков Гулходжа, (Таджикистан. Душанбе, 30-31 января 2020 г.)
4. Dahiya R.S., Jafar Saberi-Nadjafi, Theorems on n -dimensional Laplace transforms and their applications. – 15th Annual conference of Applied Mathematics. Univ of central Oklahoma, Electronic journal of differential Equations; Conference 02, 1999, pp 61-74

М.Илолов, Ш.М.Зулфонов*

МАСЪАЛАИ ИБТИДОӢ КАНОРӢ БАРОИ МУОДИЛАӢО ДАР ӢОСИЛАИ ХУСУСИИ ТАРТИБИ ДУ

Маркази рушди инноватсионии илм ва технологияҳои нави АМИ Тоҷикистон,

**Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ*

Дар мақолаи мазкур тасвири ҳалли муодилаҳо дар ҳосилаи хусусӣ бо шартҳои ибтидоӣ ва канорӣ додашуда бо воситаи табдилоти Лаплас-Карсон нишон дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: шартҳои ибтидоӣ ва канорӣ масъала, ҳалли аналитикӣ, табдилоти дученакаи Лаплас-Карсон.

M.Iolov, Sh.M.Zulfonov*

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION IN PRIVATE DERIVATIVES OF THE 2nd ORDER

Center for Innovative Development of Science and New Technologies NAS Tajikistan,

**S.Aini Tajik State Pedagogical University*

With the help of the Laplace-Carson transformation, a representation of the solution of the initial-boundary value problem for the partial differential equation of the 2nd order is found

Key words: initial-boundary value problem, analytical solution, Laplace-Carson two-dimensional transformation.

Сведения об авторах:

Илолов Мамадшо – доктор физ.-мат. наук, академик НАНТ, зав. отделом математического моделирования динамических процессов Центра ИРНТ НАНТ;

Зулфонов Шахриёр Мулозулфонович – докторант (PhD) кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им.С.Айни.

УДК 511.325

Специальность: 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Р.Л.Хотамова

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ МНОГОЧЛЕНА, АРГУМЕНТ КОТОРОГО ПРОБЕГАЕТ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ИЗ КОРОТКОГО ИНТЕРВАЛА

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 15.03.2023 г.)

Задача о распределении дробных частей многочлена, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины, сведена к оценкам сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами.

Ключевые слова: *равномерное распределение, короткая тригонометрическая сумма с простыми числами, отклонение членов последовательности.*

Пусть α – вещественное число, $x > x_0 > 1$, $y \geq x^{0.534}$, $0 \leq \sigma \leq 1$. Вводим следующие обозначения и понятия:

- $F_\alpha(x, y, \sigma)$ – обозначает количество членов последовательности $\{\alpha p^n\}$ таких, что $x - y < p \leq x$ и $\{\alpha p^n\} < \sigma$;
- $F_\alpha(x, y, \mu, \nu)$ – обозначает количество членов последовательности $\{\alpha p^n\}$ таких, что $x - y < p \leq x$ и $\mu \leq \{\alpha p^n\} < \nu$, причем $0 \leq \mu < \nu \leq 1$, то есть

$$F_\alpha(x, y, \mu, \nu) = F_\alpha(x, y, \nu) - F_\alpha(x, y, \mu);$$

- величина

$$D_\alpha(x, y) = \sup_{0 \leq \mu < \nu \leq 1} \left| \frac{F_\alpha(x, y, \mu, \nu)}{\pi(x - y) - \pi(x)} - (\nu - \mu) \right|$$

называется **отклонением** членов последовательности $\{\alpha p^n\}$ при $x - y < p \leq x$, если m принимает значение из интервала малой длины $(x - y, x]$;

- последовательность $\{\alpha p^n\}$ такая, что $x - y < p \leq x$ и $\{\alpha p^n\} < \sigma$ называется равномерно распределенной по модулю единица, если при $y \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$D(x, y) = o(1).$$

В работе [1] задача о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которых пробегает простые числа из интервала малой длины $(x - y, x]$, была сведена к оценке сумм вида

$$V_K(x, y) = \sum_{k \leq K} \left| \sum_{x-y < p \leq x} e(\alpha kp) \right|.$$

В данной работе этот результат обобщён для дробных частей $\{\alpha p^n\}$, где n – любое фиксированное натуральное число.

Теорема 1. Пусть $y \geq x^{0.534}$, $\mathcal{L} = \ln x$, $A > 1$ – абсолютная постоянная, $\ln c^A \leq M < x$ и $M_1 = M \ln \mathcal{L}^A$, тогда для $F_\alpha(x, y, \sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p^n\}$ таких, что $x - y < p \leq x$ и $\{\alpha p^n\} < \sigma$, справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x, y, \sigma) - \sigma(\pi(x) - \pi(x - y)) \ll \frac{y}{\mathcal{L}^A} + \mathcal{L}^2 \max_{K \leq M_1} \left(\frac{V_K(x, y)}{K} \right),$$

где $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих числа x .

Доказательство. Вводим характеристическую функцию полуинтервала $[0, \sigma)$, то есть

$$g(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \{u\} < \sigma; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

который имеет следующий явный вид

$$g(u) = -[\{u\} - \sigma] = [u] - [u - \sigma] = u - \{u\} - (u - \sigma - \{u - \sigma\}).$$

Функцию $g(u)$ представим с помощью функции $\rho(u) = 0,5 - \{u\}$. Имеем

$$g(u) = \sigma + \left(\frac{1}{2} - \{u\} \right) - \left(\frac{1}{2} - \{u - \sigma\} \right) = \sigma + \rho(u) - \rho(u - \sigma).$$

Воспользовавшись при $M \geq \mathcal{L}^A$ теоремой [2, стр. 442] о приближении функции $\rho(u)$ тригонометрическим полиномом с остаточным членом, являющимся периодической функцией, находим

$$g(u) = \sigma + \sum_{1 \leq |k| \leq M} \frac{1 - e(-(\sigma k))}{2\pi i k} e(ku) + r_M(u) - r_M(u - \sigma),$$

$$|r_M(u)| \leq \psi_M(u) = \frac{4}{\sqrt{1 + M^2 \sin^2 \pi(u)}}. \tag{1}$$

При помощи функции $g(u)$ представим функцию $F_\alpha(x, y, \sigma)$ в виде

$$F_\alpha(x, y, \sigma) = \sum_{x-y < p \leq x} g(\alpha p^n) = \sigma(\pi(x) - \pi(x - y)) + \sum_{x-y < p \leq x} r_M(\alpha p^n) -$$

$$- \sum_{x-y < p \leq x} r_M(\alpha p^n - \sigma) + \sum_{1 \leq |k| \leq M} \frac{1 - e(-\sigma k)}{2\pi i k} \sum_{x-y < p \leq x} e(\alpha k p^n).$$

В последнем равенстве, переходя к оценкам, получим

$$F_\alpha(x, y, \sigma) - \sigma(\pi(x) - \pi(x - y)) \ll |W(x, y, \sigma)| + |R(x, y, 0)| + |R(x, y, \sigma)|, \tag{2}$$

$$W(x, y, \sigma) = \sum_{1 \leq |k| \leq M} \frac{1 - e(-\sigma k)}{2\pi i k} \sum_{x-y < p \leq x} e(\alpha k p^n),$$

$$R(x, y, \eta) = \sum_{x-y < p \leq x} r_M(\alpha p^n - \eta).$$

Отдельно оценим каждую из сумм $W(x, y, \sigma)$ и $R(x, y, \eta)$.

Оценка $|W(x, y, \sigma)|$. Воспользовавшись формулой Эйлера, переходя к оценкам, а затем разбивая интервал изменения $1 \leq k \leq M$ на не более \mathcal{L} интервалов вида $0.5K < k \leq K$, имеем

$$\begin{aligned} |W(x, y, \sigma)| &\ll \sum_{1 \leq k \leq M} \frac{1}{k} \left| \sum_{x-y < p \leq x} e(\alpha k p^n) \right| \ll \mathcal{L} \max_{K \leq M} \left(\sum_{0.5K \leq k \leq K} \frac{1}{k} \left| \sum_{x-y < p \leq x} e(\alpha k p^n) \right| \right) \\ &\ll \max_{K \leq M} \left(\frac{\mathcal{L}}{K} \sum_{k \leq K} \left| \sum_{x-y < p \leq x} e(\alpha k p^n) \right| \right) = \mathcal{L} \max_{K \leq M} \left(\frac{V_K(x, y)}{K} \right). \end{aligned} \tag{3}$$

Оценка $|R(x, y, \eta)|$. Воспользовавшись для $\psi_M(u)$ леммой [2, стр. 603] о разложении в ряд Фурье, то есть соотношением

$$\psi_M(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e(ku),$$

где при $k \geq 0$ для коэффициентов Фурье c_k справедлива оценка

$$|c_k| = |c_{-k}| \leq \frac{4 + \ln M}{\pi M} \exp\left(-\frac{k}{M}\right), \tag{4}$$

и с учётом соотношения (1) найдем

$$|R(x, y, \eta)| \leq \sum_{x-y < p \leq x} \psi_M(\alpha p^n - \eta) = \sum_{x-y < p \leq x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e(k(\alpha p^n - \eta)).$$

При $M_1 = M \ln \mathcal{L}^A$, разбивая сумму по k на две части, для которых соответственно выполняются условия $k \leq M_1$ и $k > M_1$, имеем

$$|R(x, y, \eta)| \leq R_1(x, y, \eta) + R_2(x, y, \eta), \tag{5}$$

$$R_1(x, y, \eta) = c_0(\pi(x) - \pi(x - y)) + \sum_{1 \leq |k| \leq M_1} c_k e(-k\eta) \sum_{x-y < p \leq x} e(\alpha k p^n),$$

$$R_2(x, y, \eta) = \sum_{x-y < p \leq x} \sum_{|k| > M_1} c_k e(k(\alpha p^n - \eta)).$$

При $y \geq x^{0.534}$, воспользовавшись оценкой $\pi(x) - \pi(x - y) \ll y(\ln x)^{-1}$ (см. [3]) и разбивая отрезок $1 \leq |k| \leq M_1$ на $\ll \mathcal{L}$ интервалов вида $0.5K < |k| \leq K$, находим:

$$|R_1(x, y, \eta)| \ll \frac{|c_0| \cdot y}{\mathcal{L}} + \mathcal{L} \max_{K \leq M_1} \sum_{0.5K < |k| \leq K} |c_k| \left| \sum_{x-y < p \leq x} e(\alpha k p^n) \right|. \tag{6}$$

Воспользовавшись формулой (4), оценим коэффициенты Фурье c_0 и c_k при $0.5K < |k| \leq K$. Имеем

$$|c_0| \leq \frac{4 + \ln M}{\pi M} \leq \frac{4 + \mathcal{L}}{\pi M} \leq \frac{\mathcal{L}}{M}.$$

Если $1 \leq K \leq 2M$, то

$$|c_k| = |c_{-k}| \leq \frac{4 + \mathcal{L}}{\pi M} (1 + O(\mathcal{L}^{-A})) \leq \frac{\mathcal{L}}{2M} \leq \frac{\mathcal{L}}{K}.$$

Если же $2M < K \leq M_1$, то

$$\begin{aligned} |c_k| = |c_{-k}| &\leq \frac{\mathcal{L}}{K} \cdot \frac{K}{2M} \exp\left(-\frac{K}{2M}\right) = \frac{\mathcal{L}}{K} \exp\left(-\frac{K}{2M} + \ln \frac{K}{2M}\right) \leq \\ &\leq \frac{\mathcal{L}}{K} \exp\left(-\frac{K}{4M}\right) \leq \frac{\mathcal{L}}{K} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{\mathcal{L}}{K}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные оценки $|c_k|$ в (6), с учетом соотношения $M \geq \mathcal{L}^A$, имеем

$$|R_1(x, y, \eta)| \ll \frac{y}{\mathcal{L}^A} + \mathcal{L}^2 \max_{K \leq M_1} \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{1}{K} \left| \sum_{x-y < p \leq x} e(\alpha k p^n) \right|.$$

Оценивая в $R_2(x, y, \eta)$ слагаемые суммы по k , по модулю и разность $\pi(x) - \pi(x - y)$ как при оценке $|R_1(x, y, \eta)|$, а затем коэффициенты Фурье c_k при помощи формулы (4), последовательно имеем

$$\begin{aligned} R_2(x, y, \eta) &\leq \sum_{x-y < p \leq x} \sum_{|k| > M_1} |c_k| = (\pi(x) - \pi(x - y)) \sum_{|k| > M_1} |c_k| \ll \\ &\ll \frac{y}{\mathcal{L}} \cdot \frac{\ln M}{M} \sum_{k > M_1} \exp\left(-\frac{k}{M}\right) \leq \frac{y}{M \exp\left(\frac{M_1}{M}\right)} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{M}\right) - 1}. \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись при $|u| < 1$ разложением $e^u = 1 + u + O(u^2)$, имеем

$$R_2(x, y, \eta) \ll \frac{y}{\exp\left(\frac{M_1}{M}\right)} \cdot \frac{1}{1 + O(M^{-1})} = \frac{y}{\mathcal{L}^A} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{M}\right)\right) \ll \frac{y}{\mathcal{L}^A}.$$

Подставляя найденные оценки для $R_1(x, y, \eta)$ и $R_2(x, y, \eta)$ в неравенство (5), найдем

$$|R(x, y, \eta)| \ll \frac{y}{\mathcal{L}^A} + \mathcal{L}^2 \max_{K \leq M_1} \left(\frac{V_K(x, y)}{K}\right).$$

Из этой оценки и оценки (3), с учетом соотношения (2), получим утверждение теоремы.

Из теоремы 1 для $F_\alpha(x, y, \mu, \nu)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p^n\}$ таких, что $x - y < p \leq x$ и $\mu \leq \{\alpha p^n\} < \nu$, причём $0 \leq \mu < \nu \leq 1$, получим:

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x, y, \mu, \nu) - (\nu - \mu)(\pi(x) - \pi(x - y)) \ll \frac{y}{\mathcal{L}^A} + \mathcal{L}^2 \max_{K \leq M_1} \left(\frac{V_K(x, y)}{K}\right).$$

Из следствия 1 для отклонения $D_\alpha(x, y)$ членов последовательности $\{\alpha p^n\}$ таких, что $x - y < p \leq x$, находим:

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 1 справедлива следующая оценка

$$D_\alpha(x, y) \ll \frac{1}{\mathcal{L}^{A+1}} + \max_{K \leq M_1} \left(\frac{V_K(x, y)}{Ky \mathcal{L}^{-3}}\right).$$

Понятие равномерного распределения значений числовых последовательностей на отрезке ввел в математику Г. Вейль [4]. Он заложил основы теории равномерного распределения, которая получила дальнейшее развитие в теории чисел, в теории функции, классической механике. В [5,6] было введено понятие *равномерной распределенности* для дробных частей $\{\alpha t^n\}$ при условии, что $x - y < t \leq x$, и доказано, что если α – иррациональное число, тогда последовательность $\{\alpha t^2\}$, $x - y < t \leq x$ при $y \geq \ln^3 x$, $y \rightarrow \infty$ является равномерно распределенной по модулю единица.

Мы вводим критерии Г. Вейля о равномерном распределении дробных частей $\{\alpha p^n\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины.

Из следствия 1 получаем следующий критерий равномерной распределенности по модулю единица для последовательности $\{\alpha p^n\}$ при условии, что аргумент p принимает значения из интервала малой длины $(x - y, x]$.

Следствие 3. Последовательность $\{\alpha p^n\}$ такая, что $x - y < p \leq x$ является равномерно распределенной по модулю единица, при $y \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$V_K(x, y) = o\left(\frac{Ky}{\mathcal{L}^3}\right).$$

Поступило 15.03.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Хотамова Р.Л. О распределении дробных частей квадратичного многочлена, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала. – ДАН РТ, 2019, т. 62. 9-10, с. 497-502.
2. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – М.: Дрофа, 2003.
3. Baker R., Harman G. The difference between consecutive primes. – Proc. London Math, 1996, Soc. 72, pp. 261-280.
4. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. – Math. Ann, 1916, 77, s. 313-352.
5. Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля. – Ученые записки Орловского университета, серия естественные, технические и медицинские науки, 2012, 6, ч. 2, с. 194-203.
6. Рахмонов З.Х., Озодбекова Н.Б., Шокамолова Дж.А. О равномерном распределении по модулю единица значений квадратичного многочлена, аргумент которого принимает значения из короткого интервала. – ДАН РТ, 2013, т. 56. 4, с. 261-264.

Р.Л.Хотамова

ТАҚСИМШАВИИ ҚИСМҲОИ КАСРИИ БИСЁРАЪЗОГИЕ, КИ АРГУМЕНТАШ АДАДҲОИ СОДДАРО АЗ ИНТЕРВАЛИ КЎТОҲ ҚАБУЛ МЕКУНАД

Институти математикаи ба номи А. Ҷураеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Масъалаи тақсимшавии қисмҳои касрии бисёраъзогие, ки аргументаш ададҳои соддаро аз интервали кӯтоҳ қабул мекунад, ба масъалаи баҳои суммаи суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии квадрати бо ададҳои содда оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: тақсимшавии мунтазам, суммаи тригонометрии кӯтоҳ бо ададҳои содда, тамоили аъзо бисёраъзогӣ.

R.L.Hotamova

DISTRIBUTION OF FRACTIONAL PARTS OF A POLYNOMIAL WHOSE ARGUMENT RUNS THROUGH PRIME NUMBERS FROM A SHORT INTERVAL

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan

The problem of the distribution of the fractional parts of a polynomial whose argument ranges over prime numbers from an interval of small length is reduced to estimates for sums of short exponential sums with prime numbers.

Key words: uniform distribution, short exponential sum with prime numbers, deviation of sequence terms.

Сведения об авторах:

Хотамова Рахбарой Латифовна – старший научный сотрудник Отдела теории чисел, алгебры и топологии Института математики НАН Таджикистана.

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Х.М.Хуромонов

О НАИЛУЧШЕМ СОВМЕСТНОМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА B_2

Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 01.03.2023)

В работе рассматриваются задачи наилучшего совместного полиномиального приближения аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2 . Вычислены точные значения верхних граней наилучших совместных приближений функций и их последовательных производных полиномами и их соответствующими производными на некоторых классах комплексных функций, принадлежащих пространству B_2 . Для классов функций $W^{(r)}(\Phi)$ вычислены точные значения различных n -поперечников.

Ключевые слова: экстремальные задачи, совместное приближение функций, модуль непрерывности, верхние грани, n -поперечник, пространство Бергмана.

1. Введение. Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}$ – соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, вещественных и комплексных чисел. Через $U := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ обозначим единичный круг в \mathbb{C} , $\mathcal{A}(U)$ – множество функций, аналитических в круге U . Известно [1], что аналитическая в U функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (1)$$

принадлежит пространству Бергмана B_2 , если

$$\|f\| := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ – элемент площади.

Символом \mathcal{P}_n обозначим множество комплексных алгебраических полиномов степени n :

$$\mathcal{P}_n := \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \right\}.$$

Адрес для корреспонденции: Хуромонов Хуромон Мамадамонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Борбад, 48/5, Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана.
E-mail: khuromon@mail.ru

Величину

$$E_n(f) := E(f, \mathcal{P}_n)_{B_2} = \inf \{ \|f - p_n\| : p_n \in \mathcal{P}_n \} \quad (2)$$

называют наилучшим среднеквадратичным полиномиальным приближением функции $f \in B_2$ подпространством \mathcal{P}_n . Хорошо известно, что [1, с.203]

$$E_{n-1}(f) = \|f - T_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \quad (3)$$

где

$$T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

– частичная сумма ряда Маклорена функции $f \in B_2$.

Для любых $r \in \mathbb{N}$ через $f^{(r)}(z) := d^r f / dz^r$ обозначим производную r -го порядка функции $f \in B_2$. Так как функция $f \in B_2$ аналитична в круге U , то из разложения f в ряд Маклорена

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k$$

следует, что

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \quad (4)$$

где

$$\alpha_{k,r} := k! / (k-r)!, \quad k \geq r, \quad k, r \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{k,0} \equiv 1, \quad \alpha_{k,1} \equiv k,$$

$c_k(f)$ – коэффициенты Маклорена функции f . Положим

$$B_2^{(r)} := \{ f \in B_2 : \|z^r f^{(r)}\| < \infty \}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad B_2^{(0)} \equiv B_2.$$

Заметим, что если функция $f \in B_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, то легко доказать, что

$$E_{n-1}(z^r f^{(r)})_2 := \|z^r f^{(r)} - T_{n-1}(z^r f^{(r)})\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

Условимся, в дальнейшем, в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in B_2^{(r)}$, предполагать, что $f \notin \mathcal{P}_r$, соотношение $0/0$ полагаем равным нулю. Нам для дальнейшего понадобится следующая

Лемма 1. Для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $n > m \geq \nu$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(z^\nu f^{(\nu)})_2 \leq \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(z^r f^{(r)}). \tag{6}$$

Для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$ неравенство (6) обращается в равенство.

Доказательство. Так как в силу (5)

$$E_{n-1}^2(z^r f^{(r)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}, \tag{7}$$

то, учитывая равенство (7), при любых $n > r \geq \nu$ получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(z^\nu f^{(\nu)})_2 &= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \leq \\ &\leq \max_{k \geq n} \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{\alpha_{k,r}^2} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} = \max_{k \geq n} \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{\alpha_{k,r}^2} \cdot E_{n-1}^2(z^r f^{(r)})_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Покажем, что

$$\max_{k \geq n} \frac{\alpha_{k,\nu}}{\alpha_{k,r}} = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}.$$

С этой целью мы сначала покажем, что при $k \geq n > r \geq \nu$

$$\frac{\alpha_{k,\nu}}{\alpha_{k,r}} = \frac{\alpha_{k,\nu}}{\alpha_{k,\nu} \alpha_{k-\nu,r-\nu}} = \frac{1}{\alpha_{k-\nu,r-\nu}}.$$

Так как при ограничении $k \geq n > r \geq \nu$, $k, n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{k,\nu}}{\alpha_{k,r}} &:= \frac{k(k-1)\cdots(k-\nu+1)}{k(k-1)\cdots(k-r+1)} = \\ &= \frac{k(k-1)\cdots(k-\nu+1)}{\underbrace{k(k-1)\cdots(k-\nu+1)(k-\nu)\cdots(k-\nu-(r-\nu)+1)}} = \frac{\alpha_{k,\nu}}{\alpha_{k,\nu} \alpha_{k-\nu,r-\nu}} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{k-\nu,r-\nu}} = \frac{1}{(k-\nu)(k-\nu-1)\cdots(k-\nu-(r-\nu)+1)}, \end{aligned}$$

то отсюда следует, что

$$\max_{k \geq n} \frac{\alpha_{k,\nu}}{\alpha_{k,r}} = \max_{k \geq n} \frac{1}{(k-\nu)(k-\nu-1)\cdots(k-\nu-(r-\nu)+1)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(n-v)(n-v-1)\cdots(n-v-(r-v)+1)} = \frac{1}{\alpha_{n-v,r-v}} = \\
 &= \frac{\alpha_{n,v}}{\alpha_{n,v}\alpha_{n-v,r-v}} := \frac{\alpha_{n,v}}{\alpha_{n,r}}.
 \end{aligned}$$

Учитывая последнее равенство, из (8) получаем неравенство (6). Докажем, что для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n > r$ в (6) имеет место знак равенства. Так как при всех $v = 1, 2, \dots, r$

$$z^v f_0^{(v)}(z) = \alpha_{n,v} z^n, \quad E_{n-1}(z^v f_0^{(v)}) = \alpha_{n,v} / \sqrt{n+1}, \tag{9}$$

то мы имеем

$$E_{n-1}(z^v f_0^{(v)})_2 = \frac{\alpha_{n,v}}{\sqrt{n+1}} = \frac{\alpha_{n,v}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n+1}} = \frac{\alpha_{n,v}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(z^r f_0^{(r)})_2.$$

Лемма 1 доказана.

2. Основные теоремы. Введём понятие модуля непрерывности первого порядка. Полагаем

$$\Delta_h f(\rho e^{it}) := f(\rho e^{i(t+h)}) - f(\rho e^{it})$$

– разность первого порядка функции f по аргументу t с шагом h . Модулем непрерывности функции $f \in B_2$ определим равенством

$$\omega(f, \tau)_2 := \omega(f, \tau)_{B_2} = \sup \{ \| \Delta_h f(\rho e^{i(\cdot)}) \|_{B_2} : |h| \leq \tau \} \tag{10}$$

и гладкость произвольной функции $f \in B_2$, будем характеризовать скоростью убывания к нулю модуля непрерывности (10) при $\tau \rightarrow 0$, либо скоростью убывания к нулю некоторой усредненной величины, содержащей (10).

Найдем явный вид модуля непрерывности (10). Так как

$$\Delta_h f(\rho e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \rho^k e^{ikt} (e^{ikh} - 1), \tag{11}$$

то, применяя равенство Парсеваля к правой части (11), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \| \Delta_h f(\rho e^{i(\cdot)}) \|_2^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} |\Delta_h f(\rho e^{it})|^2 d\rho dt = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} |1 - e^{ikh}|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kh),
 \end{aligned}$$

а потому, учитывая равенство (10), запишем

$$\omega^2(f, \tau)_2 = 2 \sup_{|h| \leq \tau} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kh). \tag{12}$$

В частности, с учетом (4), из (12) получаем

$$\omega^2(z^r f^{(r)}, \tau)_2 = 2 \sup_{|h| \leq \tau} \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kh). \tag{13}$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1. При любых $n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq \nu$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,\nu}) E_{n-1}(z^\nu f^{(\nu)})_2}{\left\{ \int_0^t \omega^2(z^r f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \right\}^{1/2}} = \left\{ \frac{n}{2(nt - \sin nt)} \right\}^{1/2}, \quad 0 < nt \leq \pi / 2. \tag{14}$$

Доказательство. Не уменьшая общности ограничимся функциями $f \in B_2^{(r)}$ имеющие вид

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) z^k.$$

Для таких функций имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_h f\|_2^2 &= 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kh) = 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} - 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cos kh = \\ &= 2E_{n-1}^2(f)_2 - 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cos kh. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\omega^2(f, h)_2 \geq 2E_{n-1}^2(f)_2 - 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cos kh. \tag{15}$$

Интегрируя обе части неравенства (15) по переменному h от 0 до t ($0 \leq t \leq \pi / 2$), получаем

$$2t E_{n-1}^2(f)_2 \leq 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \frac{\sin kt}{k} + \int_0^t \omega^2(f, h)_2 dh. \tag{16}$$

Поделив обе части полученного неравенства на $2t$, имеем

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \frac{\sin kt}{kt} + \frac{1}{2t} \int_0^t \omega^2(f, h)_2 dh. \tag{17}$$

Пользуясь тем, что [2]

$$\max_{u \geq nt} \left| \frac{\sin u}{u} \right| = \frac{\sin nt}{nt}, \quad (0 \leq nt \leq \pi / 2),$$

из неравенства (17) будем иметь

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{\sin nt}{nt} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} + \frac{1}{2t} \int_0^t \omega^2(f, h)_2 dh = \frac{\sin nt}{nt} \cdot E_{n-1}^2(f)_2 + \frac{1}{2t} \int_0^t \omega^2(f, h)_2 dh,$$

или, что то же,

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{n}{2(nt - \sin nt)} \int_0^t \omega^2(f, h)_2 dh, \quad nt \leq \pi / 2.$$

Заменяя здесь функцию f на $z^r f^{(r)}$, запишем

$$E_{n-1}^2(z^r f^{(r)})_2 \leq \frac{n}{2(nt - \sin nt)} \int_0^t \omega^2(z^r f^{(r)}, h)_2 dh.$$

Применив лемму 1 к последнему неравенству при любых $n > r \geq \nu$, получаем

$$E_{n-1}^2(z^\nu f^{(\nu)})_2 \leq \left(\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} \right)^2 \cdot \frac{n}{2(nt - \sin nt)} \int_0^t \omega^2(z^r f^{(r)}, h)_2 dh. \quad (18)$$

Отсюда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,\nu}) E_{n-1}(z^\nu f^{(\nu)})_2}{\left\{ \int_0^t \omega^2(z^r f^{(r)}, h)_2 dh \right\}^{1/2}} \leq \left\{ \frac{n}{2(nt - \sin nt)} \right\}^{1/2}, \quad (19)$$

где $0 < nt \leq \pi / 2$. Оценку снизу получаем для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$. Для этой функции в силу (13) запишем

$$\omega^2(z^r f_0^{(r)}, h)_2 = 2 \frac{\alpha_{n,r}^2}{n+1} \cdot (1 - \cos nh), \quad (20)$$

$$E_{n-1}(z^\nu f_0^{(\nu)}) = \alpha_{n,\nu} / \sqrt{n+1}. \quad (21)$$

Учитывая равенство (13) и (21), запишем оценку снизу

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,\nu}) E_{n-1}(z^\nu f^{(\nu)})_2}{\left\{ \int_0^t \omega^2(z^r f^{(r)}, h)_2 dh \right\}^{1/2}} \geq \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,\nu}) E_{n-1}(z^\nu f_0^{(\nu)})_2}{\left\{ \int_0^t \omega^2(z^r f_0^{(r)}, h)_2 dh \right\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,\nu}) \cdot \alpha_{n,\nu} / \sqrt{n+1}}{\alpha_{n,r} / \sqrt{n+1} \left\{ 2 \int_0^t (1 - \cos nh) dh \right\}^{1/2}} = \left\{ \frac{n}{2(nt - \sin nt)} \right\}^{1/2}, \tag{22}$$

где $0 < nt \leq \pi/2$. Требуемое равенство (14) следует из сравнения оценок сверху (19) и снизу (22). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$\frac{1}{nt} \leq \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,\nu}) E_{n-1}(z^\nu f^{(\nu)})_2}{\omega(z^r f^{(r)}, \tau)_2} \leq \left(\frac{1}{(n\tau)^2} + \frac{1}{2} \right)^{1/2}, \tag{23}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq \nu$, $0 < \tau \leq \pi$.

Доказательство. Интегрируя неравенство (16) по t от 0 до τ , получаем

$$\tau^2 E_{n-1}^2(f)_2 \leq 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \frac{1 - \cos k\tau}{k^2} + \int_0^\tau \left(\int_0^t \omega^2(f, h)_2 dh \right) dt.$$

Заметив, что $\max_{k \geq n} (1/k^2) = 1/n^2$ и интегрируя по частям двойной интеграла, получаем

$$\begin{aligned} \tau^2 E_{n-1}^2(f)_2 &\leq \frac{2}{n^2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos k\tau) + \int_0^\tau (t - \tau) \omega^2(f, t)_2 dt \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2} \omega^2(f, \tau)_2 + \frac{\tau^2}{2} \omega^2(f, \tau)_2 = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\tau^2}{2} \right) \omega^2(f, \tau). \end{aligned} \tag{24}$$

Отсюда вытекает оценка сверху

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\omega(f, \tau)_2} \leq \left(\frac{1}{(n\tau)^2} + \frac{1}{2} \right).$$

Если предполагать, что $f \in B_2^{(r)}$, то, заменяя в полученном неравенстве f на $z^r f^{(r)}$, запишем

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(z^r f^{(r)})_2}{\omega(z^r f^{(r)}, \tau)_2} \leq \left(\frac{1}{(n\tau)^2} + \frac{1}{2} \right). \tag{25}$$

Для рассмотренной нами выше функции $f_0(z) = z^n$, для которой имеют место равенства (13) и (21), в силу того, что

$$\omega^2(z^r f_0^{(r)}, \tau) = 2 \frac{\alpha_{n,r}^2}{n+1} (1 - \cos n\tau) \leq \frac{\alpha_{n,r}^2}{n+1} \left(2 \sin \frac{n\tau}{2} \right)^2 \leq \frac{\alpha_{n,r}^2}{n+1} (n\tau)^2,$$

получаем оценку снизу

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(z^\nu f^{(\nu)})_2}{\omega(z^r f^{(r)}, \tau)_2} \geq \frac{E_{n-1}(z^\nu f_0^{(\nu)})_2}{\omega(z^r f_0^{(r)}, \tau)_2} \geq \frac{(\alpha_{n,r} / \sqrt{n+1})}{(\alpha_{n,r} / \sqrt{n+1}) \cdot n\tau} = \frac{1}{n\tau}. \quad (26)$$

Требуемое неравенство (23) вытекает из сопоставления оценки сверху (25) с оценкой снизу (26). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq \nu$ и любого $0 < \tau \leq \pi/n$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,\nu}) E_{n-1}(z^\nu f^{(\nu)})_2}{\left\{ \int_0^\tau \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega^2(z^r f^{(r)}, h)_2 dh \right) dt \right\}^{1/2}} = \left\{ \frac{n}{2(n\tau - Si(n\tau))} \right\}^{1/2}, \quad (27)$$

где $Si(u) = \int_0^u \frac{\sin t}{t} dt$ – интегральный синус.

Доказательство. Интегрируя обе части неравенства (17) по переменному t от 0 до τ , будем иметь

$$\begin{aligned} \tau E_{n-1}^2(f)_2 &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \int_0^\tau \frac{\sin kt}{kt} dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega(f, h)_2 dh \right) dt = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \frac{Si(k\tau)}{k} + \frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega(f, h)_2 dh \right) dt. \end{aligned}$$

Поделив обе части полученного неравенства на τ , имеем

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \frac{Si(k\tau)}{k\tau} + \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega(f, h)_2 dh \right) dt. \quad (28)$$

Учитывая, что функция $Si(x)/x$ является невозрастающей на интервале $0 < x < \infty$ (см., например, [3, с.335]), при всех $k \geq n$, $k, n \in \mathbb{N}$ запишем

$$\max_{k \geq n} \frac{Si(kh)}{kh} = \frac{Si(nh)}{nh}, \quad 0 < nh \leq \pi,$$

а потому из неравенства (28) следует, что

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \left\{ \frac{n}{2(n\tau - Si(n\tau))} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^\tau \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega(f, h)_2 dh \right) dt \right\}^{1/2}.$$

Так как полученное неравенство справедливо для любой функции $f \in B_2^{(r)}$, то из него следует, что

$$E_{n-1}(z^r f^{(r)})_2 \leq \left\{ \frac{n}{2(n\tau - Si(n\tau))} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^\tau \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega(z^r f^{(r)}, h)_2 dh \right) dt \right\}^{1/2}$$

и, учитывая лемму 1, запишем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(z^r f^{(r)})_2 &\leq \frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,v}} \cdot E_{n-1}(z^r f^{(r)})_2 \leq \\ &\leq \frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,v}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(n\tau - Si(n\tau))} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^\tau \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega(z^r f^{(r)}, h)_2 dh \right) dt \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

откуда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,v}) E_{n-1}(z^v f^{(v)})_2}{\left\{ \int_0^\tau \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega^2(z^r f^{(r)}, h)_2 dh \right) dt \right\}^{1/2}} \leq \left\{ \frac{n}{2(n\tau - Si(n\tau))} \right\}^{1/2}. \tag{29}$$

Так как для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, кроме равенства (20), имеют место также соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \omega^2(z^r f_0^{(r)}, h)_2 dh &= 2 \frac{\alpha_{n,r}^2}{n+1} \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right), \\ \left\{ \int_0^\tau \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega^2(z^r f_0^{(r)}, h)_2 dh \right) dt \right\}^{1/2} &= \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n+1}} \cdot \left\{ \frac{2(n\tau - Si(n\tau))}{n} \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

то, пользуясь этими равенствами, запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,v}) E_{n-1}(z^v f^{(v)})_2}{\left\{ \int_0^\tau \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega^2(z^r f^{(r)}, h)_2 dh \right) dt \right\}^{1/2}} &\geq \\ &\geq \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,v}) E_{n-1}(z^v f_0^{(v)})_2}{\left\{ \int_0^\tau \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega^2(z^r f_0^{(r)}, h)_2 dh \right) dt \right\}^{1/2}} = \left\{ \frac{n}{2(n\tau - Si(n\tau))} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{30}$$

Требуемое равенство (27) следует из неравенств (29) и (30), и тем самым теорема 3 доказана.

3. Точные значения n -поперечников классов функций $W^{(r)}(\Phi)$. Прежде чем сформулировать дальнейшие результаты, напомним необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем. Пусть S – единичный шар в B_2 ; \mathfrak{M} – выпуклое центрально-симметричное подмножество из B_2 ; $\mathcal{L}_n \subset B_2$ – n -мерное подпространство; $\mathcal{L}^n \subset B_2$ –

подпространство коразмерности n ; $\Lambda : B_2 \rightarrow \mathcal{L}^n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства B_2 в \mathcal{L}_n ; $\Lambda^\perp : B_2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования пространства B_2 . Величины

$$\begin{aligned}
 b_n(\mathfrak{M}; B_2) &= \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}_{n+1} \subset B_2 \right\}, \\
 d_n(\mathfrak{M}; B_2) &= \inf \left\{ \sup \{ \inf \{ \|f - g\| : g \in \mathcal{L}_n \} : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \right\}, \\
 \delta_n(\mathfrak{M}; B_2) &= \inf \left\{ \inf \{ \sup \{ \|f - \Lambda(f)\| : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda B_2 \subset \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L} \subset B_2 \right\}, \\
 d^n(\mathfrak{M}; B_2) &= \inf \left\{ \sup \{ \|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{L}^n \} : \mathcal{L}^n \subset B_2 \right\}, \\
 \Pi_n(\mathfrak{M}; B_2) &= \inf \left\{ \inf \{ \sup \{ \|f - \Lambda^\perp f\| : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda^\perp B_2 \subset \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \right\}
 \end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным n -поперечниками* подмножества $\mathfrak{M} \in B_2$.

Так как B_2 является гильбертовым пространством, то имеют место следующие соотношения между перечисленными n -поперечниками (см., например, [4, 5]):

$$b_n(\mathfrak{M}; B_2) \leq d^n(\mathfrak{M}; B_2) \leq d_n(\mathfrak{M}; B_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; B_2) = \Pi(\mathfrak{M}; B_2). \quad (31)$$

Пусть $\Phi(u)$ – произвольная непрерывная возрастающая при $u \geq 0$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Через $W^{(r)}(\Phi)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(r)}$, которые при любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $0 < t \leq \pi/n$ удовлетворяют ограничению

$$\int_0^t \omega^2(f^{(r)}; u)_2 du \leq \Phi(t).$$

Вычислим значения вышеуказанных поперечников при некоторых ограничениях на множество Φ . Введем обозначение

$$(1 - \cos nu)_* := \{ 1 - \cos nu, \text{ если } 0 \leq u \leq \pi/n; \quad 2, \text{ если } u > \pi/n \}. \quad (32)$$

Теорема 4. Если при всех значениях $t > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ функция Φ удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/(2n))} \geq \frac{2}{\pi - 2} \begin{cases} nt - \sin nt, & \text{если } 0 < t \leq \pi/n; \\ 2nt - \pi, & \text{если } t \geq \pi/n, \end{cases} \quad (33)$$

то при указанных $n \in \mathbb{N}$ и любых $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $n > r$ имеют место равенства

$$\lambda_n(W^{(r)}(\Phi), B_2) = E_{n-1}(W^{(r)}(\Phi)) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{ \frac{n}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2}, \tag{34}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n -поперечников.

Множество мажорантных функций, удовлетворяющих условию (33), не пусто.

Доказательство. Из неравенства (18) при $\nu = 0, t = \pi / (2n)$ следует соотношение

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2n)} \omega^2(z^r f^{(r)}, h)_2 dh.$$

Отсюда, в предположении $f \in W^{(r)}(\Phi)$, следует оценка сверху всех n -поперечников

$$\lambda_n(W^{(r)}(\Phi), B_2) \leq E_{n-1}(W^{(r)}(\Phi)) \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{ \frac{n}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2}. \tag{35}$$

Для получения аналогичной оценок снизу вышеперечисленных n -поперечников рассмотрим в множестве $\mathcal{P}_n \cap B_2$ шар

$$S_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \| p_n \|_2 \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left(\frac{n}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right)^{1/2} \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_m^{(r)}(\Phi)$. Докажем, что для произвольного полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$

$$\omega^2(z^r p_n^{(r)}, \tau)_2 \leq 2\alpha_{n,r}^2 (1 - \cos n\tau)_* \cdot \| p_n \|_2^2, \tag{36}$$

где $(1 - \cos u)_* := \{ 1 - \cos u, \text{ если } 0 < u \leq \pi/2; \quad 2, \text{ если } u > \pi/2 \}$. В самом деле, из формулы (13) при $n > r$ получаем

$$\begin{aligned} \omega^2(z^r p_n^{(r)}, \tau)_2 &= 2 \sup_{|h| \leq \tau} \sum_{k=r}^n \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1} (1 - \cos kh) \leq \\ &\leq 2\alpha_{n,r}^2 (1 - \cos nh)_* \cdot \sum_{k=0}^n \frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1} = 2\alpha_{n,r}^2 (1 - \cos nh)_* \cdot \| p_n \|_2^2, \end{aligned}$$

откуда и вытекает неравенство (36).

Пусть сначала $0 < \tau \leq \pi/n$. Используя определение класса $W^{(r)}(\Phi)$, первое неравенство из ограничения (33) и соотношения(36), для любого полинома $p_n \in S_{n+1}$ имеем

$$\int_0^t \omega^2(z^r p_n^{(r)}, \tau)_2 d\tau \leq 2\alpha_{n,r}^2 \cdot \| p_n \|_2^2 \int_0^t (1 - \cos nh) dh =$$

$$= 2\alpha_{n,r}^2 \|p_n\|_2^2 \cdot \frac{nt - \sin nt}{n} = \frac{2}{\pi - 2} (nt - \sin nt) \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \Phi(t). \quad (37)$$

Пусть теперь $t \geq \pi/n$. На основании второго неравенства из ограничения (33) для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \omega^2(z^r p_n^{(r)}, \tau)_2 d\tau &= \left(\int_0^{\pi/n} + \int_{\pi/n}^t \right) \omega^2(z^r p_n^{(r)}, \tau)_2 d\tau \leq \\ &\leq 2\alpha_{n,r}^2 \|p_n\|_2^2 \cdot \left(2t - \frac{\pi}{n} \right) \leq \frac{2}{\pi - 2} \cdot (2nt - \pi) \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \Phi(t). \end{aligned} \quad (38)$$

Из неравенств (37) и (38) следует включение $S_{n+1} \subset W^{(r)}(\Phi)$. Используя соотношения (31) и определение бернштейновского n -поперечника, запишем

$$\lambda_n(W^{(r)}(\Phi), B_2) \geq b_n(W^{(r)}(\Phi), B_2) \geq b_n(S_{n+1}, B_2) \geq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2}. \quad (39)$$

Сопоставляя неравенства (35) и (39), получим соотношение (34).

Заметим, что теорема 4 является обобщением и распространением результата Л.В.Тайкова [2], доказанного для периодического случая в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$, на случай аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2 . В [2] доказано, что функция $\Phi_*(t) = t^{\pi/(\pi-2)}$ удовлетворяет ограничению (33).

Теорема 4 обеспечивает возможность доказать следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq \nu$ и мажоранта Φ удовлетворяет условию (33).

Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(\nu)}(W^{(r)}(\Phi)) = \sup\{E_{n-1}(z^\nu f^{(\nu)}) : f \in W^{(r)}(\Phi)\} = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2}. \quad (40)$$

Доказательство. Полагая в неравенстве (18) $t = \pi/(2n)$ и учитывая определение класса $W^{(r)}(\Phi)$, приходим к оценке сверху

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(\nu)}(W^{(r)}(\Phi)) \leq \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2}. \quad (41)$$

Легко убедиться, что функция

$$g_0(z) = \frac{\sqrt{n+1}}{\alpha_{n,r}} \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot z^n$$

является элементом шара S_{n+1} , введенном при доказательстве теоремы 4, а значит принадлежит классу $W^{(r)}(\Phi)$ и так как

$$E_{n-1}(z^v g_0^{(v)}) = \frac{\alpha_{n,v}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{ \frac{n}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2},$$

то имеем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(v)}(W^{(r)}(\Phi)) \geq E_{n-1}(z^v g_0^{(v)}) = \frac{\alpha_{n,v}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{ \frac{n}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2}. \quad (42)$$

Сопоставляя неравенства (41) и (42), получаем равенство (40). Теорема 5 доказана.

В завершение статьи отметим, что различные вопросы наилучшей совместной аппроксимации аналитических в единичном круге функций рассмотрены в недавно опубликованных работах [6-8].

Поступило 02.03.2023

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.-Л.: Наука, 1964.
2. Тайкова А.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 . – Матем. заметки, 1976, 20 (3), с. 433-438.
3. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов. – Матем. заметки, 2009, т. 86, №3, с. 328-336.
4. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – МГУ. 1976, 325 с.
5. Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo, 1985, 252 pp.
6. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n -поперечников. – Матем. заметки, 2018, т. 103, вып. 4, с. 617-631.
7. Шабозов М.Ш., Хуромонов Х.М. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана. – Известия вузов. 2020, №2, с. 74-92.
8. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди. – Труды ИММ УрО РАН, 2021, т. 27, №4, с. 240-256.

Х.М.Хуромонов

ОИД БА НАЗДИККУНИИ БЕХТАРИНИ ҲАМЧОЯИ ФУНКСИЯҲО ВА ҲОСИЛАИ ОНҲО ДАР ФАЗОИ БЕРГМАН B_2

Донишгоҳи байналмиллалии сайёҳи ва соҳибқори Тоҷикистон

Дар мақола масъалаҳои наздиккунии беҳтарини ҳамчояи полиномиалии функцияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ, ки ба фазои Бергман B_2 таалуқ доранд, дида баромада шудааст. Қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини функцияҳо ва ҳосилаҳои пайдарпайи онҳо ба воситаи полиномҳо ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо дар баъзе синфи функцияҳои комплексӣ, ки ба фазои Бергман таалуқ доранд, ҳисоб карда шудаанд. Барои синфи функцияҳои $W^{(r)}(\Phi)$ қиматҳои аниқи n -кутҳаи гуногун ҳисоб карда шудаанд.

Қалимаҳои калидӣ: масъалаҳои экстремалӣ, наздиккунии ҳамчояи функцияҳо, модули бефосилагӣ, сарҳади болоӣ, n -кутҳа, фазои Бергман.

Kh.M.Khuromonov

ON THE BEST JOINT POLYNOMIAL APPROXIMATION OF FUNCTIONS AND THEIR DERIVATIVES IN THE BERGMAN SPACE

International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan

In the paper, problems on the best joint polynomial approximation analytic functions in the unit disc that belong to the Bergman space B_2 in being considered. The exact values of the upper bounds of the best joint approximations of the functions and their successive derivatives by polynomials and their corresponding derivatives on some classes of complex functions belonging to the space B_2 were calculated. For function classes $W^{(r)}(\Phi)$, the exact values of various n -width are calculated.

Key words: extremal problems, joint approximation of functions, modulus of continuity, upper bound, n -width, Bergman space.

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А.Захурбеков

НАИЛУЧШЕЕ СОВМЕСТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В $L_2(Q)$

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 09.01.2023 г.)

В статье найдены точные верхние грани наилучших совместных приближений некоторых классов двух переменных “круговыми” суммами Фурье, характеризующимися обобщенным модулем непрерывности в гильбертовом пространстве L_2 .

Ключевые слова: комплексный ряд Фурье, обобщенный модуль непрерывности, оператор Лапласа, “круговые” суммы.

В данной работе изучается вопрос нахождения точной оценки верхней грани наилучших совместных приближений периодических классов функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$. Напомним, что $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ двух переменных, 2π -периодических по каждой переменной с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

Пусть функция $f \in L_2$ имеет формальное разложение в двумерный комплексный ряд Фурье

$$f(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} c_{kl}(f) e^{i(kx+ly)}, \quad (1)$$

где коэффициенты $c_{kl}(f)$ определены равенством

$$c_{kl}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, что

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_{k,l}(f)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \rho_{k,l}^2(f),$$

Адрес для корреспонденции: Захурбеков Алишер. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: zahurbekov_a94@mail.ru

где

$$\rho_{k,l}^2(f) = |c_{k,l}(f)|^2 + |c_{-k,l}(f)|^2 + |c_{k,-l}(f)|^2 + |c_{-k,-l}(f)|^2. \quad (2)$$

Для произвольной $R \in \mathbb{N}$ через

$$S_R(f; x, y) = \sum_{0 \leq k^2 + l^2 < R^2} c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)} \quad (3)$$

обозначим “круговые” частичные суммы функции $f \in L_2$. Если через \mathcal{P}_R , $R \in \mathbb{N}$ обозначить множество комплекснозначных полиномов вида

$$p_R(x, y) = \sum_{0 \leq k^2 + l^2 < R^2} a_{k,l} e^{i(kx+ly)},$$

то хорошо известно [3, 4], что наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in L_2$ элементами $p_R \in \mathcal{P}_R$ реализует “круговая” частичная сумма (3). При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_R(f) &:= \inf \{ \|f - p_R\| : p_R \in \mathcal{P}_R \} = \\ &= \|f - S_R(f)\| = \left\{ \sum_{k^2 + l^2 \geq R^2} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $\mathcal{D} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа второго порядка. Определим

$\mathcal{D}^r := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}), r \in \mathbb{N}, \mathcal{D}^0 := E$. Через $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых существуют частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dots$$

и для которых $\mathcal{D}^r f \in L_2$. Применив оператор \mathcal{D}^r , $r \in \mathbb{N}$ к ряду (1), в силу линейности этого оператора находим

$$\mathcal{D}^r f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{kl}(f) (ik + il)^r e^{i(kx+ly)},$$

а отсюда в силу равенства Парсеваля и соотношения (2) запишем

$$\|\mathcal{D}^r f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_{kl}(f)|^2 (k^2 + l^2)^{2r} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f). \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) следует, что

$$\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^r f) = \left\{ \sum_{k^2 + l^2 \geq R^2} (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (6)$$

Заметим, что при любом $s = 0, 1, \dots, r; \quad r \in \mathbb{Z}_+$ из (6) следует формула

$$\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f) = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} (k^2+l^2)^{2s} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{7}$$

Следуя работе [4], вводим в рассмотрение функцию

$$T(x, u; y, v; h) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-u)} e^{il(y-v)} h^{k^2+l^2}, \tag{8}$$

где $h \in (0, 1)$ и сходимость двойного ряда справа понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2(Q \times Q)$. Пользуясь функцией (8), определим оператор $\mathcal{F}_h : L_2 \rightarrow L_2$ по следующей формуле

$$\mathcal{F}_h(f) := \mathcal{F}_h f(x, y) = \iint_Q f(u, v) T(x, u; y, v; 1-h) dudv, \tag{9}$$

которую назовем оператором обобщенного сдвига. Оператор (9) обладает следующими свойствами:

1. $\mathcal{F}_h(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}_h(f) + \mu \mathcal{F}_h(g), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L_2;$
2. $\|\mathcal{F}_h(f)\| \leq \|f\|;$
3. $\|\mathcal{F}_h(f) - f\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0+;$
4. $\mathcal{F}_h(e^{i(mx+ny)}) = (1-h)^{n^2+m^2} \cdot e^{i(mx+ny)}, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+.$

Определим теперь разности первого и высших порядков, как и в классическом случае, следующим образом:

$$\Delta_h f = \mathcal{F}_h f - f = (\mathcal{F}_h - E)f,$$

$$\Delta_h^v f := \Delta_h(\Delta_h^{v-1} f) = (\mathcal{F}_h - E)^v f = \sum_{j=0}^v (-1)^{v-j} \binom{v}{j} \mathcal{F}_h^j(f),$$

где

$$\mathcal{F}_h^0 f = Ef = f, \quad \mathcal{F}_h^j f := \mathcal{F}_h(\mathcal{F}_h^{j-1} f), \quad j = \overline{1, v}; \quad v \in \mathbb{N};$$

E – единичный оператор в пространстве L_2 . Равенством

$$\Omega_v(f, t) := \sup \{ \|\Delta_h^v f\| : 0 < h \leq t \}, \quad t \in (0, 1)$$

определим обобщенный модуль непрерывности функции $f \in L_2$.

В [1] для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ доказано, что

$$\Omega_v(\mathcal{D}^r f, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} (1 - (1-t)^{k^2+l^2})^v (k^2+l^2)^{2r} \rho_{kl}^2(f). \tag{10}$$

Справедлива следующая [2]

Теорема 1. При любых $\nu, R \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и $h \in (0,1)$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; t)} = \frac{1}{(1-(1-t)^{R^2})^\nu}. \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть $R, \nu \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$, $h \in (0,1)$, $\mu(t)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} = \left(\int_0^h [1-(1-t)^{R^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}. \quad (12)$$

Легко показать, что для функции $f \in L_2^{(r)}(Q)$, наравне с функцией f и $\mathcal{D}^r f$, пространству L_2 также принадлежат все промежуточные производные $\mathcal{D}^s f (s = 1, 2, \dots, r-1)$. Исходя из этого, если $\mathfrak{N}^r \subset L_2^{(r)}(Q)$ – некоторый подкласс функции, то определенный интерес представляет нахождение верхней грани наилучшего приближения промежуточных производных $\mathcal{E}_{R^2}(\mathcal{D}^s f)_{L_2(Q)} (s = 1, 2, \dots, r-1, r \geq 2, r \in \mathbb{N})$ по всем функциям $f \in \mathfrak{N}^r$. Другими словами, требуется найти верхнюю грань наилучшего совместного приближения функций f и всех его производных $\mathcal{D}^s f (s = 1, 2, \dots, r)$, принадлежащих множеству $\mathfrak{N}^r \subset L_2^{(r)}(Q)$:

$$\mathcal{E}_{R^2}^{(s)}(\mathfrak{N}^r) = \sup \{ \mathcal{E}_{R^2}(\mathcal{D}^s f) : f \in \mathfrak{N}^r \}. \quad (13)$$

Пусть $\Phi(t)$, $0 < t \leq 1$ положительная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Рассмотрим класс $W^{(r)}(\Omega_\nu; \Phi, t)$ функций $f \in L_2^{(r)}$, которые при любых $r \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{N}$ и $t \in (0, 1]$ удовлетворяют условию

$$\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f, t)_{L_2(Q)} \leq \Phi(t).$$

Аналогичным образом вводим класс

$$W_{q, \mu}^{(r)}(\Omega_\nu, t)_{L_2(Q)} = W_q^{(r)}(\Omega_\nu; \mu, h)_{L_2(Q)}$$

функций $f \in L_2^{(r)}$, при любых $r \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $h \in (0, 1]$, $\mu(t)$ – весовая на $[0, 1]$ функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t)_{L_2(Q)} \mu(t) dt \leq 1.$$

Приведем решение экстремальной задачи (13), когда $\mathfrak{N}^r = W^{(r)}(\Omega_\nu; \Phi, t)$ и $\mathfrak{N}^r = W_q^{(r)}(\Omega_\nu; \mu, h)$.

Теорема 3. При всех $\nu \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и $t \in (0, 1]$ имеют место равенства

$$\mathcal{E}_{R^2}^{(s)}(W^{(r)}(\Omega_\nu; \Phi, t)) = \frac{1}{R^{2(r-s)}} \cdot \frac{\Phi(t)}{(1-(1-t)^{R^2})^\nu}.$$

Теорема 4. При всех $\nu \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $1 \leq q \leq \infty$ и $h \in (0, 1]$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{R^2}^{(s)}(W_q^{(r)}(\Omega_\nu, \Phi; \mu, h)) &= \\ &= R^{-2(r-s)} \left(\int_0^h [1-(1-t)^{R^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Следствие. В условиях теоремы 4 при

$$\mu(t) := \mu_*(t) = R^2(1-t)^{R^2-1}, \quad 0 < t \leq 1, \quad R \geq 1$$

справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{R^2}^{(s)}(W_q^{(r)}(\Omega_\nu, \Phi, \mu_*, h)) = R^{-2(r-s)} \cdot \left\{ \frac{\nu q + 1}{(1-(1-h)^{R^2})^{\nu q + 1}} \right\}^{1/q}$$

и если в полученном равенстве полагать $q = 1/\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, $h = R^{-2}$, то имеем

$$\sup_{R \in \mathbb{R}_+} \mathcal{E}_{R^2}^{(s)}(W_{1/\nu}^{(r)}(\Omega_\nu, \Phi; \mu_*, R^{-2})) = \frac{2^\nu}{(1-e^{-1})^{2\nu}}.$$

Поступило 12.01.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захурбеков А. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в $L_2(Q)$. – Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2021, т.64, №7-8, с.368-377.
2. Захурбеков А. Верхние грани наилучших совместных приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в $L_2(Q)$. – Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2022, т.65, №9-10, с.580-585.
3. Абилов В.А., Абилов М.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, т.55, №7, с.1109-1117.

4. Абилова Ф.В., Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье двух переменных и их приложения. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2018, т.58, №10, с.1596-1603.

А.Захурбеков

НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ЯҚҶОЯИ БАЪЗЕ СИНФҶОИ ФУНКСИЯҶОИ ДУ ТАҒЙИРЁБАНДА ДАР $L_2(Q)$

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола сарҳади саҳеҳи болоии наздиккунии беҳтарини яқҷояи баъзе синфи функсияҳои дутағйирёбанда ба воситаи суммаҳои “доиравии” Фурье дар фазои гилбертии L_2 , ки ба воситаи модули бифосилагии умумикардашуда тавсиф шудаанд, ёфт шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *комплексии Фурье, модули бифосилагии умумишуда, оператори Лаплас, суммаи “доиравӣ”.*

A.Zahurbekov

BEST JOINT APPROXIMATION OF SOME CLASSES OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES IN $L_2(Q)$

Tajik National University

In this article the exact upper bounds of the best joint approximation some classes of two variables by “circular” Fourier sums characterized by a generalized modulus of continuity in the Hilbert space L_2 are found.

Key words: *complex Fourier series, generalized modulus of continuity, Laplace operator, “circular” sums.*

УДК 517.91

Специальность: 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Член-корреспондент НАН Таджикистана Э.М.Мухамадиев,

М.М.Каримов*, И.Дж.Нуров*

ИССЛЕДОВАНИЕ БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ГЛАВНОЙ ОДНОРОДНОЙ ЧАСТЬЮ

*Вологодский государственный университет, Российская Федерация,***Таджикский национальный университет*

В статье исследована бифуркация Андронова-Хопфа периодических решений для двумерной динамической системы с главной однородной частью. Используя принцип смены топологического индекса особой точки вполне непрерывного векторного поля, порожденного динамической системой, получены необходимые и достаточные условия бифуркации периодических решений в терминах характеристики главной однородной части динамической системы.

Ключевые слова: динамическая система, периодическое решение, бифуркационное значение, векторное поле, индекс особой точки.

В теории бифуркации исследуется качественное поведение решений динамических систем при изменении входящих в них параметров. В трудах основоположников этой теории А.Пуанкаре, А.М.Ляпунова, А.А.Андронова, Э.Хопфа и их учеников и последователей были получены обширные результаты по теории бифуркации динамических систем (см., напр., [1, 2]). Среди них важное место занимает бифуркация Андронова-Хопфа – появление периодических решений в окрестности стационарных решений при определенных значениях параметров, такие значения параметров называют бифуркационными [3].

В работах [4, 5] для исследования бифуркации Андронова–Хопфа предложен и обоснован метод функционализации параметра. Суть метода заключается в том, что параметры, входящие в динамическую систему, заменяются специальными функционалами. Это даёт возможность изолировать отдельные решения и находить бифуркационные значения. Данный метод эффективно применяется в теории управления динамическими системами.

В настоящей работе исследована бифуркация Андронова-Хопфа периодических решений для двумерной динамической системы с главной однородной частью. В терминах свойств главной однородной части динамической системы получены необходимые и достаточные условия бифуркации периодических решений, как следствие принципа смены топологического индекса особой точки вполне непрерывного векторного поля, порожденного динамической системой.

Рассмотрим динамическую систему вида

Адрес для корреспонденции: Нуров Исхокбой Джумаевич. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр.Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: nid1@mail.ru

$$\begin{cases} x' = P(x, y, \lambda), \\ y' = Q(x, y, \lambda), \end{cases} \quad (1)$$

где P, Q – непрерывные функции по совокупности переменных (x, y, λ) , $(x, y) \in R^2$, $\lambda \in \Lambda \subset R$, удовлетворяющие условиям

$$P(0, 0, \lambda) \equiv Q(0, 0, \lambda) \equiv 0,$$

$$|P(x, y, \lambda)| + |Q(x, y, \lambda)| > 0, \quad |x| + |y| > 0, \quad \lambda \in \Lambda. \quad (2)$$

Предположим, что в функциях P и Q выделены главные однородные части:

$$\begin{aligned} P(x, y, \lambda) &= P_m(x, y, \lambda) + p(x, y, \lambda), \\ Q(x, y, \lambda) &= Q_m(x, y, \lambda) + q(x, y, \lambda), \end{aligned} \quad (3)$$

где P_m, Q_m положительно однородные порядка $m > 0$ функции переменных x, y :

$$P_m(\rho x, \rho y, \lambda) \equiv \rho^m P_m(x, y, \lambda), \quad Q_m(\rho x, \rho y, \lambda) \equiv \rho^m Q_m(x, y, \lambda), \quad \forall \rho > 0,$$

а функции p, q удовлетворяют условиям малости

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^m} \sup_{x^2 + y^2 \leq \rho^2, \lambda \in \Lambda} (|p(x, y, \lambda)| + |q(x, y, \lambda)|) = 0. \quad (4)$$

Верна следующая лемма.

Лемма 1. Пусть функции P и Q непрерывны по совокупности переменных и имеют представление (3), где $m > 0$ и функции p и q удовлетворяют условию (4). Тогда функции P_m, Q_m, p и q непрерывны по совокупности переменных $(x, y, \lambda) \in R^2 \times \Lambda$.

Система уравнений (1), в силу условий (2), при всех $\lambda \in \Lambda$ имеет изолированное нулевое стационарное (периодическое любого периода) решение. Нас интересует множество предельных точек Λ^* последовательностей $\lambda_n \in \Lambda$, $n = 1, 2, \dots$ для которых система (1) при $\lambda = \lambda_n$ имеет ненулевое периодическое решение $(x_n(t), y_n(t))$, удовлетворяющих условию:

$$\max_t (|x_n(t)| + |y_n(t)|) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Определение. Число $\lambda_0 \in \Lambda$ назовем бифуркационным значением для динамической системы (1), если существуют число $T_0 > 0$ и последовательности $\lambda_n \in \Lambda$, $T_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$ такие, что при каждом $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$ система уравнений (1) имеет ненулевое T_n -периодическое решение $(x_n(t), y_n(t))$ и при $n \rightarrow \infty$ имеют место пределы

$$\lambda_n \rightarrow \lambda_0, \quad \rho_n := \max_t (|x_n(t)| + |y_n(t)|) \rightarrow 0, \quad \rho_n^{m-1} T_n \rightarrow T_0.$$

Приведенное определение при $m = 1$ совпадает с понятием точки бифуркации Андронова-Хопфа [3, 4].

Наряду с динамической системой (1), рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x' = P_m(x, y, \lambda), \\ y' = Q_m(x, y, \lambda). \end{cases} \quad (5)$$

Система уравнений (5) в случае, когда функции P_m и Q_m являются однородными многочленами, исследована многими авторами (см., напр., [6]). Ниже выделим такие свойства системы (5), которые необходимы для существования бифуркационных значений параметра динамической системой (1).

Введем в рассмотрение функцию

$$G(\varphi, \lambda) = -P_m(\cos \varphi, \sin \varphi, \lambda) \sin \varphi + Q_m(\cos \varphi, \sin \varphi, \lambda) \cos \varphi.$$

Данная функция непрерывна по совокупности переменных $(\varphi, \lambda) \in [0, 2\pi] \times \Lambda$ и 2π -периодична по φ .

Лемма 2. Если $G(\varphi_0, \lambda) \neq 0$, то при любом $\rho > 0$ решение системы уравнений (5), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = \rho \cos \varphi_0, y(0) = \rho \sin \varphi_0$, единственно.

Лемма 3. Пусть задача Коши $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ в любой ненулевой точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ для системы (5) имеет единственное решение. Пусть система (5) имеет ненулевое решение $(x_0(t), y_0(t))$, удовлетворяющее условиям $(x_0(0), y_0(0)) = \rho_0(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0), G(\varphi_0, \lambda) \neq 0$ и $(x_0(T), y_0(T)) = \sigma(x_0(0), y_0(0)), T \neq 0, \sigma > 0$. Тогда функция $G(\varphi, \lambda)$ удовлетворяет условию $G(\varphi, \lambda) \neq 0 \forall \varphi \in [0, 2\pi]$.

Необходимое и достаточное условия. Определим множество $\Lambda_0 = \{ \lambda \in \Lambda : G(\varphi, \lambda) \neq 0 \forall \varphi \in [0, 2\pi] \}$. В силу непрерывности функции G множество Λ_0 открыто. Предположим, что множество Λ_0 не пусто. Для $\lambda \in \Lambda_0$ введём числовую характеристику системы (5)

$$X(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi, \lambda)}{G(\varphi, \lambda)} d\varphi,$$

где

$$F(\varphi, \lambda) = P_m(\cos \varphi, \sin \varphi, \lambda) \cos \varphi + Q_m(\cos \varphi, \sin \varphi, \lambda) \sin \varphi.$$

Из непрерывности функций $G(\varphi, \lambda)$, $F(\varphi, \lambda)$ по совокупности переменных следует, что $\chi(\lambda)$ также является непрерывной функцией на множестве Λ_0 .

Лемма 4. Пусть при $\lambda \in \Lambda_0$ решение $(x(t), y(t))$ системы уравнений (5) удовлетворяет условиям $(x(t), y(t)) \neq \rho(x(0), y(0))$ при всех $\rho > 0$, $0 < t < T$ и $(x(T), y(T)) = \rho_0(x(0), y(0))$, $\rho_0 > 0$. Тогда имеет место равенство $\rho_0 = e^{\chi(\lambda)}$.

Следующая теорема даёт необходимое условие бифуркации.

Теорема 1. Если система уравнений (5) имеет единственное стационарное решение $(0, 0)$ и число $\lambda_0 \in \Lambda$ является бифуркационным значением для динамической системы (1), то $\lambda_0 \in \Lambda_0$ и $\chi(\lambda_0) = 0$.

В пространстве $C[0, 2\pi]$ непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ функций рассмотрим вполне непрерывное векторное поле

$$(\Phi_\lambda u)(\varphi) = u(\varphi) - u(2\pi) - \int_0^\varphi u(s) R(u(s), s, \lambda) ds,$$

где функция $R(u, s, \lambda)$ определена равенствами

$$R(u, s, \lambda) = F(s, \lambda) / G(s, \lambda) \text{ при } u = 0,$$

$$R(u, s, \lambda) = \frac{|u|^m F(s, \lambda) + f(|u|, s, \lambda)}{|u|^m G(s, \lambda) + g(|u|, s, \lambda)} \text{ при } u \neq 0,$$

и

$$f(\rho, s, \lambda) = p(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \lambda) \cos \varphi + q(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \lambda) \sin \varphi,$$

$$g(\rho, s, \lambda) = q(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \lambda) \cos \varphi - p(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \lambda) \sin \varphi.$$

Для произвольного значения $\lambda \in \Lambda_0$ существует $r_0 = r_0(\lambda) > 0$ такое, что

$$\inf \left\{ |G(s, \lambda) + \rho^{-m} g(\rho, s, \lambda)| : 0 < \rho \leq r_0, s \in [0, 2\pi] \right\} > 0.$$

Поэтому при $\lambda \in \Lambda_0$ функция $R(u, s, \lambda)$ определена и непрерывна на множестве $\{(u, s) : |u| \leq r_0, s \in [0, 2\pi]\}$. Следовательно, векторное поле Φ_λ определено в шаре радиуса r_0 пространства $C[0, 2\pi]$ с центром в нуле. В силу 2π -периодичности функции $R(u, s, \lambda)$ по переменной s , нули поля Φ_λ являются 2π -периодическими решениями дифференциального уравнения

$$u' = uR(u, \varphi, \lambda). \tag{6}$$

Отметим некоторые свойства решения скалярного уравнения (6). Если $u(\varphi)$ решение уравнения (6) и $|u(\varphi)| \leq r_0(\lambda), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, то $(-u(\varphi))$ также решение, причем $u(\varphi) \neq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, если $u(\varphi)$ не равна нулю тождественно. Пусть $u_0(\varphi)$ является 2π -периодическим решением уравнения (6) и $0 < u_0(\varphi) \leq r_0(\lambda), \varphi \in [0, 2\pi]$. Обозначим через $\varphi_0(t)$ решение уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{u_0^m(\varphi)G(\varphi, \lambda) + g(u_0(\varphi), \varphi, \lambda)}{u_0(\varphi)},$$

удовлетворяющее условию $\varphi(0) = 0$. Тогда пара функций

$$x(t) = u_0(\varphi_0(t)) \cos \varphi_0(t), \quad y(t) = u_0(\varphi_0(t)) \sin \varphi_0(t)$$

является периодическим решением системы уравнений (1) периода

$$T = \pm \int_0^{2\pi} \frac{u_0(s) ds}{u_0^m(s)G(s, \lambda) + g(u_0(s), s, \lambda)}.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. Пусть $\lambda \in \Lambda_0$ и $\mathbf{X}(\lambda) \neq 0$. Тогда нуль θ пространства $C[0, 2\pi]$ является изолированной особой точкой вполне непрерывного векторного поля Φ_λ , и для ее индекса $\gamma(\Phi_\lambda, \theta)$ справедлива формула

$$\gamma(\Phi_\lambda, \theta) = -\text{sign} \mathbf{X}(\lambda).$$

Следующая теорема даёт достаточное условие бифуркации.

Теорема 2. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda_0$ и существуют последовательности положительных чисел $\delta_n^+, \delta_n^-, n = 1, 2, \dots$, такие, что

$$(\lambda_n - \delta_n^-, \lambda_n + \delta_n^+) \subset \Lambda_0, \quad \mathbf{X}(\lambda_0 - \delta_n^-) \cdot \mathbf{X}(\lambda_0 + \delta_n^+) < 0,$$

и $\delta_n^+ \rightarrow 0, \delta_n^- \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда λ_0 является бифуркационным значением для динамической системы (1).

Таким образом, согласно теореме 2, смена знака $\mathbf{X}(\lambda)$ в окрестности значения $\lambda_0 \in \Lambda_0$ обеспечивает бифуркацию периодических решений динамической системы (1).

Пример. Пусть $m = 3$ и

$$P_m(x, y, \lambda) = \frac{y(x^2 + y^2)^2 + x\tilde{P}(x, y, \lambda)}{x^2 + y^2}, \quad Q_m(x, y, \lambda) = \frac{x(x^2 + y^2)^2 + y\tilde{P}(x, y, \lambda)}{x^2 + y^2},$$

где

$$\tilde{P}(x, y, \lambda) = x^4 + a(\lambda)x^3y + b(\lambda)x^2y^2 + c(\lambda)xy^3 + d(\lambda)y^4$$

с непрерывными коэффициентами $a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda)$ и $d(\lambda)$ на множестве Λ . Тогда для функции $\mathbf{X}(\lambda)$ справедлива следующая формула

$$\mathbf{X}(\lambda) = -\frac{\pi}{4}(3 + 3d(\lambda) + b(\lambda)), \quad \lambda \in \Lambda.$$

Заметим, что в полученной формуле коэффициенты $a(\lambda), c(\lambda)$ не участвуют. Для определения бифуркационных значений находим нули функции $3 + 3d(\lambda) + b(\lambda)$, затем в окрестности каждого нуля выясняем смену знака этой функции.

Дифференциальное уравнение второго порядка. Рассмотрим уравнение второго порядка вида

$$x'' + a(\lambda)x' + b(\lambda)x + c(\lambda)|x'| = f(x, x', \lambda), \quad (6)$$

где коэффициенты $a(\lambda), b(\lambda)$ и $c(\lambda)$ непрерывные функции на множестве Λ , а функция $f(x, y, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \Lambda$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow 0} \sup_{\lambda \in \Lambda} |f(x, y, \lambda)| = 0.$$

Уравнение (6) эквивалентно системе (1) с правыми частями $P = P_1 + p$ и $Q = Q_1 + q$, где

$$P_1(x, y, \lambda) = y, \quad Q_1(x, y, \lambda) = -(a(\lambda)y + b(\lambda)x + c(\lambda)|y|),$$

$$p(x, y, \lambda) \equiv 0, \quad q(x, y, \lambda) = f(x, y, \lambda).$$

Отметим, что в этом случае соответствующая системе (5) функция G имеет вид

$$G(\varphi, \lambda) = -[\sin^2 \varphi + a(\lambda)\sin \varphi \cos \varphi + b(\lambda)\cos^2 \varphi + c(\lambda)|\sin \varphi| \cos \varphi].$$

Для функции G множество Λ_0 и соответствующая функция $\mathbf{X}(\lambda)$ на этом множестве определяются равенствами

$$\Lambda_0 = \left\{ \lambda : 4b(\lambda) > (|a(\lambda)| + |c(\lambda)|)^2 \right\},$$

$$\mathbf{X}(\lambda) = -\pi \left(\frac{a(\lambda) + c(\lambda)}{\sqrt{4b(\lambda) - (a(\lambda) + c(\lambda))^2}} + \frac{a(\lambda) - c(\lambda)}{\sqrt{4b(\lambda) - (a(\lambda) - c(\lambda))^2}} \right), \lambda \in \Lambda_0.$$

Лемма 6 [7]. Функция $\chi(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_0$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда $a(\lambda) = 0$, причём $\chi(\lambda)a(\lambda) < 0$ при $a(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \Lambda_0$.

Применяя теоремы 1 и 2, выводим:

Теорема 3. Пусть число $\lambda_0 \in \Lambda$ является бифуркационным значением для динамической системы, соответствующей уравнению (6). Тогда $4b(\lambda_0) > (c(\lambda_0))^2$ и $a(\lambda_0) = 0$.

Теорема 4. Пусть

$$\lambda_0 \in \Lambda_0 := \left\{ \lambda : 4b(\lambda) > (|a(\lambda)| + |c(\lambda)|)^2 \right\}$$

и существуют последовательности положительных чисел δ_n^+ , δ_n^- , $n = 1, 2, \dots$ такие, что

$$(\lambda_n - \delta_n^-, \lambda_n + \delta_n^+) \subset \Lambda_0, \quad a(\lambda_0 - \delta_n^-) \cdot a(\lambda_0 + \delta_n^+) < 0$$

и $\delta_n^+ \rightarrow 0$, $\delta_n^- \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда λ_0 является бифуркационным значением для динамической системы, соответствующей уравнению (6).

В заключении отметим, что изложенные выше методы анализа о точках бифуркации задачи о периодическом решении в окрестности нулевого стационарного решения по существу, без изменений, переносятся для исследования «рождения» (при изменении параметра) периодических решений большой нормы.

Исследование частично выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00032, <https://rscf.ru/project/23-21-00032/>

Авторы искренне благодарны профессору Наимову А.Н. за внимание к данной работе.

Поступило 15.02.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967.
2. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1976.
3. Marsden I. K., McCracken M. – Appl. Math.Sci., 1976, v. 19.
4. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975, 510 с.
5. Бобылев Н.А., Красносельский М.А. Функционализация параметра и теорема родственности для автономных систем. – Дифференциальные уравнения, 1970, т.6, №11, с. 1946-1952.
6. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.-Л., 1947, 449 с.
7. Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д., Халилова М.Ш. Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка. – УМЖ, 2014, т. 6, №1, с. 84-93.

Э.М.Мухамадиев, М.М.Каримов*, И.Дж.Нуров*

ТАДҚИҚИ ҲАЛҲОИ ДАВРИИ БИФУРКАТСИОНИИ СИСТЕМАИ ДУ МУОДИЛАИ ДИНАМИКӢ БО ҚИСМИ АСОСИИ ЯКЧИНСА

Донишгоҳи давлатии Вологда, Руссия,

**Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Мақола ба омӯхтани масъалаи мавҷудияти қиматҳои бифуркатсионии муодилаи дифференциалии тартиби дувуми қисми асосиаш якчинса бахшида шуда аст. Бо воситаи усули нишони гуногунии индекси топологии майдони вектории комилан бифосила шартҳои зарури кифоягии мавҷудияти ҳалҳои бифуркатсионии даврӣ нишон дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: системаи динамики, ҳалли даври, қимати бифуркационии, майдони вектори, индекси нуктаи махсус.

E.M.Muhamadiev, M.M.Karimov*, I.J.Nurov*

INVESTIGATION OF THE BIFURCATION OF PERIODIC SOLUTIONS FOR A TWO-DIMENSIONAL DYNAMIC SYSTEM WITH THE MAIN HOMOGENEOUS PART

Vologda State University, Russia,

**Tajik National University*

In the article the Andronov-Hopf bifurcation of sequences of solutions for a two-dimensional dynamical system with a main homogeneous part is studied. Assigning the principle of changing the topological index for determining the points of an admissible stable vector field generated by a dynamical system, necessary and sufficient conditions for the bifurcation of the periodicity of solutions in terms of the characteristics of the main homogeneous part of the dynamical system are obtained.

Key words: dynamical system, periodic solution, bifurcation value, vector field, singular point index.

Сведения об авторах:

Мухамадиев Э.М. – доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры информатики и информационных систем Вологодского государственного университета;

Каримов М.М. – докторант (PhD) кафедры информационно-коммуникационных технологий Таджикского национального университета;

Нуров Исхобой Джумаевич – доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры информационно-коммуникационных технологий Таджикского национального университета.

УДК 517.948

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

О.Х.Каримов, З.Дж.Хакимова

О КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 03.02.2023г.)

В работе получены условия коэрцитивной разрешимости эллиптического дифференциального уравнения недивергентного вида.

Ключевые слова: эллиптический оператор, недивергентный вид уравнения, коэрцитивное неравенство, разделимость, коэрцитивная разрешимость, гильбертово пространство.

1. В пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x, u)u(x) = f(x), \quad u(x) \in W_{2,loc}^2(R^n), \quad (1)$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, а $V(x, z)$ – положительная функция.

Разделимость дифференциальных выражений изучалась во многих работах (см. [1-5]). Коэрцитивная разрешимость рассматривалась в работах К.Х.Бойматова [3-4], М.Отелбаева [5] и Е.Zayed, A.S.Mohamed, H.A.Atia [6]. В работе Шодиева М.С. [8] изучается коэрцитивная разрешимость уравнения Шрёдингера в пространстве $L_p(R)^1$. Разделимость нелинейных дифференциальных операторов исследовалось в работах [7], [9]-[11].

В данной работе получены новые условия коэрцитивной разрешимости эллиптического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве.

В дальнейшем предположим, что $V(x, z) \in C^1(R^n \times \mathbb{C})$. Введем функции

$$F(x, \xi, \eta) = V^{\frac{1}{2}}(x, z), \quad \xi = \operatorname{Re}z, \quad \eta = \operatorname{Im}z,$$

$$Q(x, \xi, \eta) = V(x, z), \quad \xi = \operatorname{Re}z, \quad \eta = \operatorname{Im}z.$$

Пусть для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ функция $F(x, \xi, \eta)$ удовлетворяет условиям

Адрес для корреспонденции: Каримов Олимджон Худойбердиевич. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: karimov_olim@mail.ru; Хакимова Зумрад Джамшиедовна. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: zumratmsu@mail.ru

$$\left\| a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} F^{-1} \right\|^2 \leq \sigma_1, \quad (2)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} F^{-1} \right\|^2 \leq \sigma_2, \quad (3)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial x_i} F^{-\frac{3}{2}} \right\|^2 \leq \sigma_3, \quad (4)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \mu + \nu \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \omega; \mathbb{C} \right\| \leq \delta_1 \left\| F^{\frac{1}{2}} \Omega; \mathbb{C} \right\|. \quad (5)$$

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x_i} F^{-2} \right\|^2 \leq \sigma_5, \quad (6)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} \mu + \nu \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) \omega; \mathbb{C} \right\| \leq \delta_2 \left\| F \Omega; \mathbb{C} \right\|. \quad (7)$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2)–(7) и пусть числа $\sigma_j, (j = \overline{1,4}), \delta_1, \delta_2$ такие, что

$$\sigma_1 + \sigma_2 < \frac{4}{3n^2}, \frac{2}{n^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} < 1 - \delta_1, \frac{2}{n^2(\sigma_1 + \sigma_2)} < 1 - \delta_2. \quad (8)$$

Тогда уравнение (1) разделяется в $L_{2,\rho}(R^n)$, и для всех функций $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ таких, что $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$ справедливы включения

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, V(x, u(x)) u(x) \in L_{2,\rho}(R^n),$$

$$a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{2,\rho}(R^n), i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\| \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\| + \left\| V(x, u) u; L_{2,\rho}(R^n) \right\| +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\| \leq M \| f(x); L_{2,\rho}(R^n) \|, \tag{9}$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

Этот результат приведен в [11].

2. В этом пункте изучается коэрцитивная разрешимость уравнения (1). Как следствие выводов теоремы 1 получим следующий результат.

Теорема 2. Пусть дифференциальный оператор

$$L[u] = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Vu$$

разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$, и пусть положительная функция $\phi(x)$, принадлежащая в $C^1(R^n)$, удовлетворяет неравенствам

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|^2 \leq \theta_1, \tag{10}$$

где $0 < \theta_1 + \sigma_1 + \sigma_2 < \frac{1}{n^2}$. Тогда уравнение (1) для всех $f \in L_{2,\rho}(R^n)$ имеет единственное решение в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Доказательство. Сначала докажем, что дифференциальное уравнение

$$L[u] = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Vu = 0 \tag{11}$$

имеет нулевое решение $u(x) = 0$ для всех $x \in R^n$. Пусть $\psi(x)$ – произвольная положительная функция из $C^2(R^n)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle Vu, \rho \phi \psi u \rangle &= \left\langle \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \rho \phi \psi u \right\rangle = \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [a_{ij}(x) \rho \phi \psi u] \right\rangle = \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \rho \phi \psi u \right\rangle - \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \phi \psi u \right\rangle - \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \rho \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi u \right\rangle - \end{aligned}$$

$$-\sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u \right\rangle - \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \rho \phi \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle. \quad (12)$$

Теперь выделяем реальную часть скалярного произведения

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle Vu, \rho \phi \psi u \rangle &= -\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \rho \phi \psi u \right\rangle - \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \phi \psi u \right\rangle - \\ &- \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \rho \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi u \right\rangle - \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u \right\rangle - \\ &- \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \rho \phi \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Имея в виду, что

$$\begin{aligned} &2 \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \rho \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi u \right\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left\| \left[\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi + \frac{a_{ij}(x)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi + a_{ij}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \phi \right] u \right\|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

и применяя неравенства Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u \right\rangle = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \rho^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) V^{\frac{1}{2}} u \right\rangle \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\| \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) V^{\frac{1}{2}} u \right\|, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \rho \phi \psi u \right\rangle = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \rho^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}} \right) V^{\frac{1}{2}} u \right\rangle \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\| \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \left[a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}} \right] V^{\frac{1}{2}} u \right\|, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \phi \psi u \right\rangle = \\
 & = \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \rho^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \left[a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}} \right] V^{\frac{1}{2}} u \right\rangle \leq \\
 & \leq \sum_{i,j=1}^n \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\| \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \left[a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}} \right] V^{\frac{1}{2}} u \right\|. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Учитывая, что для любого $\alpha > 0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1 y_2 \leq \frac{\alpha}{2} |y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha} |y_2|^2,$$

имеем

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \phi \psi u \right\rangle \leq \\
 & \leq \frac{\alpha_2}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2 \theta_1}{2\alpha_2} \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u \right\|^2, \tag{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u \right\rangle \leq \\
 & \leq \sum_{i,j=1}^n \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\| \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \left[a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right] V^{\frac{1}{2}} u \right\| \leq \\
 & \leq \frac{n\alpha_2}{2} \sum_{j=1}^n \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2 \sigma_1}{2\alpha_2} \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u \right\|^2, \tag{19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \phi \psi u \right\rangle = \\
 & \leq \sum_{i,j=1}^n \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\| \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \left[a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} Q^{-\frac{1}{2}} \right] V^{\frac{1}{2}} u \right\| \\
 & \leq \frac{\alpha_2}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2 \sigma_2}{2\alpha_2} \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u \right\|^2. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Применяя далее для равенства (13) неравенства (18)-(20), получим

$$\left(1 - \frac{n^2(\theta_1 + \sigma_1 + \sigma_2)}{2\alpha_2}\right) \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \leq \frac{1}{2}.$$

$$\cdot \sum_{i,j=1}^n \left\| \left[\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi + \frac{a_{ij}(x)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi + a_{ij}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \phi \right]^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 +$$

$$+ \frac{3}{2} \alpha_2 \cdot \sum_{j=1}^n \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 - \sum_{j=1}^n \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2. \quad (21)$$

Пусть $\psi(x) \equiv 1$ для любых $x \in R^n$ и $\alpha_2 = \frac{2}{3}$, тогда имеем

$$0 < (1 - (n^2(\theta_1 + \sigma_1 + \sigma_2)) \left\| \phi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u; L_{2,\rho}(R^n) \right\|^2 \leq 0. \quad (22)$$

Следовательно, получим

$$0 < (1 - n^2(\theta_1 + \sigma_1 + \sigma_2)) \int_{R^n} \left| \rho^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u \right|^2 dx \leq 0. \quad (23)$$

Последнее неравенство имеет место только при $u(x) \equiv 0$. Это доказывает, что $u(x) = 0$ является единственным решением уравнения (11).

Пусть далее $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ и является решением уравнения

$$L[u] = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Vu = f(x) \quad (24)$$

с правой частью $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$. Теперь выберем последовательность функций $f_1, f_2, \dots, f_n \in C_0^\infty(R^n)$, сходящихся к f в $L_{2,\rho}(R^n)$. Положим $\mathcal{G}_p = A^{-1} f_p$, где A – означает

замыкание оператора $A' = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + V$, $D(A' = C_0^\infty(R^n))$ в $L_{2,\rho}(R^n)$. Функция

$\mathcal{G}_p \in C^1(R^n)$ и является решением уравнения

$$- \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \mathcal{G}_p}{\partial x_i \partial x_j} + V \mathcal{G}_p = f_p.$$

Используя коэрцитивное неравенство (9), находим, что

$$\left\| \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 (\mathcal{G}_p - \mathcal{G}_k)}{\partial x_i \partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\| + \|V(\mathcal{G}_p - \mathcal{G}_k); L_{2,\rho}(R^n)\| +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial(\mathcal{G}_p - \mathcal{G}_k)}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\| \leq M \| f_p - f_k; L_{2,\rho}(R^n) \|. \tag{25}$$

Переходя к пределу $p, k \rightarrow \infty$, заключаем, что последовательности

$$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, V\mathcal{G}_1, V\mathcal{G}_2, \dots, a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x_j}, a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial x_j}, \dots,$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2(\mathcal{G}_1)}{\partial x_i \partial x_j}, \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2(\mathcal{G}_2)}{\partial x_i \partial x_j},$$

будучи фундаментальными, сходятся в $L_{2,\rho}(R^n)$ соответственно к некоторым элементам $\mathcal{G}, \mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}, \mathcal{G}^{(3)} \in L_{2,\rho}(R^n)$. Легко проверить, что $\mathcal{G} \in W_{2,loc}^2(R^n)$, $\mathcal{G}^{(1)} = V\mathcal{G}$,

$$\mathcal{G}^{(2)} = a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_j}, \mathcal{G}^{(3)} = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_j}.$$

Переходя в неравенстве (25) к пределу при $p, k \rightarrow \infty$, получим $\mathcal{G}_p = \mathcal{G}_k = \mathcal{G}$. Следовательно, для $f \in R^n$ таких, что $u \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$, $Au = f$.

Пусть u_1 тоже является решением уравнения $Au = f$. Тогда имеем

$$A(u - u_1) = 0.$$

Так как уравнение $Au = 0$ имеет единственное решение $u = 0$, отсюда следует, что $u = u_1$, то есть теорема доказана.

Поступило 03.02.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Everitt W.N., Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators. – Proc.London Math.Soc., 1971, v.23, pp.301-324.
2. Everitt W.N., Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions. – Proc.London Math.Soc., 1972, v.24, pp.149-170.
3. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения. – Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.
4. Бойматов К.Х., Шарипов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шр и Дирака. – Доклады Академии наук России, 1992, т.326, №3, с.393-398.
5. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n . – Труды МИАН СССР, 1983, т.161, с.195-217.
6. Zayed E.M.E., A.S.Mohamed, H.A.Atia. Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in the hilbert spaces. – J. Math. Anal. Appl., 2007, v.336, pp. 81-92.

7. Mohamed A.S., Atia.H.A. Separation of the general second elliptic differential operator potential in the weighted Hilbert spaces Applied Mathematics and Computation, 2005, 162. pp. 155-163.
8. Шодиев М.С. Разделимость операторов Штурма-Лиувилля и Шр в пространстве вектор-функций с взвешенно-суммированными компонентами. – ДАН РТ, 1995, т. XXXVIII, №1-2, с. 79-86.
9. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом. – Уфимский математический журнал, 2017, т. 9, №1, с. 55-62.
10. Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве. – ДАН РТ, 2018, т. 61, №11-12, с. 829-836.
11. Каримов О.Х., Хакимова З.Дж. Коэрцитивные оценки и разделимость нелинейного эллиптического дифференциального оператора в весовом пространстве. – Известия НАНТ, Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2023, №4(189), с. 47-55.

О.Х.Каримов, З.Дж.Хакимова

ОИД БА КОЭРЦИТИВИИ МУОДИЛАИ ЭЛЛИПТИКИИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ ДИВЕРГЕНТӢ

Институти математикаи ба номи А. Чураеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола шартҳои ҳалшавандагии коэрцитивӣ барои муодилаи эллиптикии дифференсиалӣ гайридивергентӣ гирифта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: оператори эллиптикӣ, навъи муодилаи гайридивергентӣ, нобаробариҳои коэрцитивӣ, ҳудошавандагӣ, ҳалшавандагии коэрцитивӣ, фазои Гильбертӣ.

O.Kh.Karimov, Z.Zh.Khakimova

ON COERCITIVE SOLVABILITY OF AN ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATION OF NON-DIVERGENT TYPE

A.Juraev Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Tajikistan

In the work, the conditions of coercive solvability of the elliptic differential equation of a non-divergent form are obtained.

Key words: elliptic operator, non-divergent type of equation, coercive inequality, separability, coercive solvability, Hilbert space.

УДК 517.968.220

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов*

ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ГРАНИЧНЫМИ ОСОБЫМИ И СИЛЬНО-ОСОБЫМИ ЛИНИЯМИ

Таджикский национальный университет,

*Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана

(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана С.А.Исхоковым 06.01.2023 г.)

Для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями получены явные представления решений, которые в зависимости от корней характеристических уравнений и знака параметров уравнения могут содержать произвольные функции одной переменной. Настоящая работа посвящена постановке и решению задачи типа Коши для данного интегрального уравнения типа Вольтерра, когда условия заданы на особых линиях.

Ключевые слова: двумерное интегральное уравнение, особая линия, сильно-особая линия, задачи типа Коши, асимптотическое поведение.

Пусть дан открытый прямоугольник $D = \{(x, y) : a < x < a_1, b < y < b_1\}$ с границами $\Gamma_1 = \{y = b, a < x < a_1\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, b < y < b_1\}$.

В области D рассмотрим двумерное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) + \int_a^x \left[p + q \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{u(t, y)}{t-a} dt + \int_b^y \left[\lambda + \mu (\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)) \right] \frac{u(x, s)}{(s-b)^\beta} ds + \\
 + \int_a^x \left[p_1 + q_1 \ln \left(\frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{dt}{t-a} \int_b^y \left[\lambda_1 + \mu_1 (\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)) \right] \frac{u(t, s)}{(s-b)^\beta} ds = f(x, y),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $p, q, \lambda, \mu, p_1, q_1, \lambda_1, \mu_1$ – заданные постоянные числа, $f(x, y)$ – заданная функция, $u(x, y)$ – искомая функция,

$$\omega_b^\beta(y) = [(\beta - 1)(y - b)^{\beta - 1}]^{-1}, \quad \beta > 1.$$

Адрес для корреспонденции: Раджабова Лутфия Нусратовна. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: lutfyab2@mail.ru; Ахмадов Фарвариддин Муфазалович. 734055, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Фирдавси, 48/5, Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана. E-mail: farvar90@gmail.com.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D})$, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} u(x, y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon], \varepsilon > 0, \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$u(x, y) = o[(y - b)^\nu], \nu > 2(\beta - 1), \text{ при } y \rightarrow b.$$

Ранее в работе [1] исследовано характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае, получены условия разрешимости и явная формула представления решения. Работа [2] посвящена основам вычисления определенных, сингулярных и гиперсингулярных одномерных и двумерных интегралов, а также численного решения уравнений с ними. В [3] рассматриваются сингулярные интегральные уравнения, ядра которых имеют особенности логарифмического или степенного типа, а также одновременно слабые и сильные особенности в различных сочетаниях.

Исследованию слабо сингулярных и сингулярных интегральных уравнений различных видов, построению и обоснованию вычислительных схем решенных данных уравнений посвящены работы [4-6]. Работы Н.Раджабова [7-10] посвящены исследованию одномерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированным левым и правым сингулярным или сверхсингулярным ядрами, модельным одномерным интегральным уравнение типа Вольтерра со сверхсингулярной точкой, также получены многообразия решений одномерного интегрального уравнения с сингулярной и логарифмической особенностью в ядре.

В работах [11-14] изучено двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра (1) для различных значений и знаков параметров уравнения, получены явные представления многообразия решений через произвольные функции. В настоящей работе для определения произвольных функций в полученных решениях ставятся и решаются задачи типа Коши.

Задача К₁. Требуется найти решение интегрального уравнения (1) из класса $C(\overline{D})$, обращающихся в нуль на Γ_1 и Γ_2 , при выполнении условий $p < 0, q > 0, \lambda < 0, \mu > 0, \Delta_1 = p^2 - 4q > 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1$ по граничным условиям:

$$\begin{cases} \left[(x - a)^{-\gamma_1} (\gamma_2 u(x, y) - D_x u(x, y)) \right]_{x=a} = \overline{\theta_1(y)} \\ \left[(x - a)^{-\gamma_2} (-\gamma_1 u(x, y) + D_x u(x, y)) \right]_{x=a} = \overline{\theta_2(y)} \\ \left[e^{-\eta_2 \omega_b^\beta(y)} (\eta_2 u(x, y) - D_\beta^y u(x, y)) \right]_{y=b} = \overline{\Phi_1(x)} \\ \left[e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)} (\eta_1 u(x, y) + D_\beta^y u(x, y)) \right]_{y=b} = -\overline{\Phi_2(x)}, \end{cases}$$

где $\overline{\Phi_1(x)}, \overline{\Phi_2(x)}, \overline{\theta_1(y)}, \overline{\theta_2(y)}$ – произвольные непрерывные функции.

Решение задачи К₁:

Согласно [12-13], решение интегрального уравнения (1) при:

$$p < 0, q > 0, \lambda < 0, \mu > 0, \Delta_1 = p^2 - 4q > 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1$$

имеет вид:

$$u(x, y) = \theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1} + \theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2} + e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \Phi_1(x) + e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \Phi_2(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x, y)]. \quad (2)$$

Решение (2) представим в виде:

$$\gamma_2 u(x, y) = \gamma_2 (x-a)^{\gamma_1} \theta_1(y) + \gamma_2 (x-a)^{\gamma_2} \theta_2(y) + \gamma_2 \Omega_1 [\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x, y)],$$

где

$$\Omega_1 [\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x, y)] = e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \Phi_1(x) + e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \Phi_2(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x, y)],$$

$$\Phi_1(x) = \varphi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \int_a^x \left[(\gamma_2)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\gamma_1} \right] \frac{\varphi_1(t)}{t-a} dt,$$

$$\Phi_2(x) = \varphi_2(x) + \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \int_a^x \left[(\gamma_2)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\gamma_1} \right] \frac{\varphi_2(t)}{t-a} dt.$$

Дифференцируя решение интегрального уравнения (1), равенство (2), далее умножая на $(x-a)$, получим:

$$\begin{aligned} D_x u(x, y) &= (x-a) \frac{du(x, y)}{dx} = \\ &= (x-a) \left\{ \gamma_1 (x-a)^{\gamma_1-1} \theta_1(y) + \gamma_2 (x-a)^{\gamma_2-1} \theta_2(y) + \frac{\partial}{\partial x} \Omega_1 [\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x, y)] \right\} = \\ &= \gamma_1 (x-a)^{\gamma_1} \theta_1(y) + \gamma_2 (x-a)^{\gamma_2} \theta_2(y) + D_x \Omega_1 [\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x, y)]. \end{aligned}$$

Подставляя полученное равенство в первое условие задачи \underline{K}_1 , находим:

$$\begin{aligned} & \left[(x-a)^{-\gamma_1} (\gamma_2 u(x, y) - D_x u(x, y)) \right]_{x=a} = \\ & = \left\{ (\gamma_2 - \gamma_1) \theta_1(y) + (x-a)^{-\gamma_1} \left[\gamma_2 \Omega_1 [\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x, y)] - D_x \Omega_1 [\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x, y)] \right] \right\}_{x=a} = \\ & = (\gamma_2 - \gamma_1) \theta_1(y) = \overline{\theta_1(y)}, \theta_1(y) = \frac{\overline{\theta_1(y)}}{\gamma_2 - \gamma_1}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, справедливо равенство:

$$-\gamma_1 u(x, y) = -\gamma_1 (x-a)^{\gamma_1} \theta_1(y) - \gamma_1 (x-a)^{\gamma_2} \theta_2(y) - \gamma_1 \Omega_1 [\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x, y)],$$

$$D_x u(x, y) = \gamma_1 (x-a)^{\gamma_1} \theta_1(y) + \gamma_2 (x-a)^{\gamma_2} \theta_2(y) + D_x \Omega_1 [\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x, y)].$$

Подставляя полученные значения во второе условие задачи \underline{K}_1 , получим:

$$\begin{aligned} & \left[(x-a)^{-\gamma_2} \left(-\gamma_1 u(x, y) + D_x u(x, y) \right) \right]_{x=a} = \\ & = \left\{ (\gamma_2 - \gamma_1) \theta_2(y) + (x-a)^{-\gamma_2} \left[-\gamma_1 \Omega_1 [\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x, y)] + D_x \Omega_1 [\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x, y)] \right] \right\}_{x=a} = \\ & = (\gamma_2 - \gamma_1) \theta_2(y) = \overline{\theta_2(y)}, \theta_1(y) = \frac{\overline{\theta_2(y)}}{\gamma_2 - \gamma_1}. \end{aligned}$$

Далее, дифференцируя решение интегрального уравнения (1) и умножая на $(y-b)^\beta$, получим:

$$D_\beta^y u(x, y) = (y-b)^\beta \frac{du(x, y)}{dy} = -\eta_1 \Phi_1(x) e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} - \eta_2 \Phi_2(x) e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} + D_\beta^y \Omega_2 [\theta_1(y), \theta_2(y), f(x, y)].$$

Подставим полученное значение в третье условие задачи \mathbf{K}_1 :

$$\begin{aligned} & \left[e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \left(\eta_2 u(x, y) - D_\beta^y u(x, y) \right) \right]_{y=b} = \\ & = \left[(\eta_2 - \eta_1) \Phi_1(x) + e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \left[\eta_2 \Omega_2 [\theta_1(y), \theta_2(y), f(x, y)] + D_\beta^y \Omega_2 [\theta_1(y), \theta_2(y), f(x, y)] \right] \right]_{y=b} = \\ & = (\eta_2 - \eta_1) \Phi_1(x) = \overline{\Phi_1(x)}, \Phi_1(x) = \frac{\overline{\Phi_1(x)}}{\eta_2 - \eta_1}, \end{aligned}$$

где

$$\Omega_2 [\theta_1(y), \theta_2(y), f(x, y)] = \theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1} + \theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2} + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x, y)].$$

Аналогичным образом, находим:

$$\begin{aligned} \eta_1 u(x, y) &= \eta_1 \Phi_1(x) e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} + \eta_1 \Phi_2(x) e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} + \eta_1 \Omega_2 [\theta_1(y), \theta_2(y), f(x, y)] \\ D_\beta^y u(x, y) &= -\eta_1 \Phi_1(x) e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} - \eta_2 \Phi_2(x) e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} + D_\beta^y \Omega_2 [\theta_1(y), \theta_2(y), f(x, y)]. \end{aligned}$$

Подставляя полученное значение в четвертое условие задачи \mathbf{K}_1 , имеем:

$$\begin{aligned} & \left[e^{-\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \left(\eta_1 u(x, y) + D_\beta^y u(x, y) \right) \right]_{y=b} = \\ & = \left[(\eta_2 - \eta_1) \Phi_2(x) + e^{-\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \left[\eta_2 \Delta [\theta_1(y), \theta_2(y), f(x, y)] + D_\beta^y \Delta [\theta_1(y), \theta_2(y), f(x, y)] \right] \right]_{y=b} = \\ & = (\eta_2 - \eta_1) \Phi_2(x) \equiv -\overline{\Phi_2(x)}, \Phi_2(x) = -\frac{\overline{\Phi_2(x)}}{\eta_2 - \eta_1}. \end{aligned}$$

Итак, доказана

Теорема 1. Пусть в интегральном уравнении (1) параметры удовлетворяют условиям задачи \mathbf{K}_1 , правая часть удовлетворяет условиям $f(x, y) \in C(\overline{D})$, $f(a, b) = 0$ с асимптотическим поведением на Γ_1 и Γ_2 :

$$f(x, y) = o[(x - a)^{\delta_1}], \delta_1 > \gamma_1, \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$f(x, y) = o[e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} (y - b)^{\nu_1}], \nu_1 > \beta - 1, \text{ при } y \rightarrow b.$$

Тогда задача K_1 имеет единственное решение, которое выражается равенством:

$$u(x, y) = \frac{\overline{\theta_1(y)}}{\gamma_2 - \gamma_1} (x - a)^{\gamma_1} + \frac{\overline{\theta_2(y)}}{\gamma_2 - \gamma_1} (x - a)^{\gamma_2} + e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \frac{\overline{\Phi_1(x)}}{\eta_2 - \eta_1} + e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \frac{\overline{\Phi_2(x)}}{\eta_2 - \eta_1} + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x, y)], \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x, y)] &= f(x, y) + \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \int_a^x \left[(\gamma_2)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\gamma_1} \right] \frac{f(t, y)}{t-a} dt + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \int_b^y \left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))} \right] \frac{f(x, s)}{(s-b)^\beta} ds + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2 - 4\mu)(p^2 - 4q)}} \int_b^y \left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))} \right] \frac{ds}{(s-b)^\beta} \times \\ &\times \int_a^x \left[(\gamma_2)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\gamma_1} \right] \frac{f(t, s)}{t-a} dt, \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0, \quad \gamma_2 = \frac{-p - \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0, \quad (\gamma_1 - \gamma_2 > 0),$$

$$\eta_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\Delta_2}}{2} < 0, \quad \eta_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta_2}}{2} < 0, \quad (\eta_1 - \eta_2 > 0).$$

Задача K_2 . Требуется найти решение интегрального уравнения (1) из класса $C(\overline{D})$, обращаясь в нуль на Γ_1 и Γ_2 , при выполнении условий $p < 0, q > 0, \lambda > 0, \mu < 0, \Delta_1 = p^2 - 4q > 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1$ по граничным условиям:

$$\begin{cases} \left[(x - a)^{-\gamma_1} (\gamma_2 u(x, y) - D_x u(x, y)) \right]_{x=a} = \overline{\theta_1(y)} \\ \left[(x - a)^{-\gamma_2} (-\gamma_1 u(x, y) + D_x u(x, y)) \right]_{x=a} = \overline{\theta_2(y)} \\ \left[e^{-\eta_3 \omega_b^\beta(y)} u(x, y) \right]_{y=b} = -\overline{\Phi_1(x)}, \end{cases}$$

где $\overline{\Phi_1(x)}, \overline{\theta_1(y)}, \overline{\theta_2(y)}$ – произвольные непрерывные функции.

Используя вышеприведенный способ решения задачи K_1 , получим следующую теорему о разрешимости задачи K_2 :

Теорема 2. Пусть в интегральном уравнении (1) параметры удовлетворяют условиям задачи K_2 , правая часть удовлетворяет условиям $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(a, b) = 0$ с асимптотическим поведением на Γ_1 и Γ_2 :

$$f(x, y) = o[(x - a)^{\delta_2}], \delta_2 > \gamma_1, \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$f(x, y) = o[e^{\eta_3 \omega_b^\beta(y)} (y - b)^{\nu_2}], \nu_2 > \beta - 1, \text{ при } y \rightarrow b.$$

Тогда задача K_2 имеет единственное решение, которое выражается равенством:

$$u(x, y) = \frac{\overline{\theta_1(y)}}{\gamma_2 - \gamma_1} (x - a)^{\gamma_1} + \frac{\overline{\theta_2(y)}}{\gamma_2 - \gamma_1} (x - a)^{\gamma_2} - e^{\eta_3 \omega_b^\beta(y)} \overline{\Phi_1(x)} + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x, y)], \quad (4)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0, \quad \gamma_2 = \frac{-p - \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0, \quad (\gamma_1 - \gamma_2 > 0), \quad \eta_3 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta_2}}{2} < 0.$$

Задача K_3 . Требуется найти решение интегрального уравнения (1) из класса $C(\bar{D})$, обращающееся в нуль на Γ_1 и Γ_2 , при выполнении условий $p < 0, q > 0, \lambda < 0, \mu < 0, \Delta_1 = p^2 - 4q > 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1$ по граничным условиям:

$$\begin{cases} \left[(x - a)^{-\gamma_1} (\gamma_2 u(x, y) - D_x u(x, y)) \right]_{x=a} = \overline{\theta_1(y)} \\ \left[(x - a)^{-\gamma_2} (-\gamma_1 u(x, y) + D_x u(x, y)) \right]_{x=a} = \overline{\theta_2(y)} \\ \left[e^{-\eta_4 \omega_b^\beta(y)} u(x, y) \right]_{y=b} = -\overline{\Phi_1(x)}, \end{cases}$$

где $\overline{\Phi_1(x)}, \overline{\theta_1(y)}, \overline{\theta_2(y)}$ – произвольные непрерывные функции.

Теорема 3. Пусть в интегральном уравнении (1) параметры удовлетворяют условиям задачи K_3 , правая часть удовлетворяет условиям $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(a, b) = 0$ с асимптотическим поведением на Γ_1 и Γ_2 :

$$f(x, y) = o[(x - a)^{\delta_3}], \delta_3 > \gamma_1, \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$f(x, y) = o[e^{\eta_4 \omega_b^\beta(y)} (y - b)^{\nu_3}], \nu_3 > \beta - 1, \text{ при } y \rightarrow b.$$

Тогда задача K_3 имеет единственное решение, которое выражается равенством:

$$u(x, y) = \frac{\overline{\theta_1(y)}}{\gamma_2 - \gamma_1} (x - a)^{\gamma_1} + \frac{\overline{\theta_2(y)}}{\gamma_2 - \gamma_1} (x - a)^{\gamma_2} - e^{\eta_4 \omega_b^\beta(y)} \overline{\Phi_1(x)} + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x, y)], \quad (5)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0, \gamma_2 = \frac{-p - \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0, (\gamma_1 - \gamma_2 > 0), \eta_4 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta_2}}{2} < 0.$$

Задача К₄. Требуется найти решение интегрального уравнения (1) из класса $C(\bar{D})$, обращающееся в нуль на Γ_1 и Γ_2 , при выполнении условий $p < 0, q > 0, \lambda > 0, \mu > 0, \Delta_1 = p^2 - 4q > 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1$ по граничным условиям:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_1} (\gamma_2 u(x, y) - D_x u(x, y)) \right]_{x=a} = \overline{\theta_1(y)} \\ \left[(x-a)^{-\gamma_2} (-\gamma_1 u(x, y) + D_x u(x, y)) \right]_{x=a} = \overline{\theta_2(y)}, \end{cases}$$

где $\overline{\theta_1(y)}, \overline{\theta_2(y)}$ – произвольные непрерывные функции.

Теорема 4. Пусть в интегральном уравнении (1) параметры удовлетворяют условиям задачи К₄, правая часть удовлетворяет условиям $f(x, y) \in C(\bar{D}), f(a, b) = 0$ с асимптотическим поведением на Γ_1 и Γ_2 :

$$f(x, y) = o[(x-a)^{\delta_4}], \delta_4 > \gamma_1, \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$f(x, y) = o[(y-b)^{\nu_4}], \nu_4 > 2(\beta-1), \text{ при } y \rightarrow b.$$

Тогда задача К₄ имеет единственное решение, которое выражается равенством:

$$u(x, y) = \frac{\overline{\theta_1(y)}}{\gamma_2 - \gamma_1} (x-a)^{\gamma_1} + \frac{\overline{\theta_2(y)}}{\gamma_2 - \gamma_1} (x-a)^{\gamma_2} + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x, y)], \tag{6}$$

где $\gamma_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0, \gamma_2 = \frac{-p - \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0, (\gamma_1 - \gamma_2 > 0).$

Поступило 13.01.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солдатов А.П. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае. – Научные ведомости БелГУ. Серия математика-физика, 2011, №17(112), с.1-7.
2. Довгий С.А., Лифанов И.К. Методы решения интегральных уравнений. – Киев: Наукова думка, 2002, 345 с.
3. Плещинский Н.Б. Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре. – Казань.: Издательство КФУ, 2018, 160 с.
4. Расолько Г.А. Численное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов. – Минск.: Изд-во БГУ, 2017, 239 с.
5. Байков И.В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2004, 297 с.

6. Елисеева Т.В. Интегральные уравнения и вариационное исчисление. – Пенза.: Изд-во ПГУ, 2008, 102 с.
7. Раджабов Н. Интегральные уравнения типа Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх сингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе: Деваштич, 2007, 221с.
8. Раджабов Н. Об одном классе модельного сверхсингулярного интегрального уравнения, обобщающего одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сверхсингулярной точкой в ядре. – Мат-лы III междунар. конф. “Проблемы дифференциальных уравнений анализа и алгебры”. – Актобе, 2015, с.202-206.
9. Раджабов Н. Введение в теории многомерных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложение. – Germany: LAP LAMBERT Academic publishing, 2011, 520 p.
10. Раджабов Н. Исследование одного класса двумерного интегрального уравнения с фиксированными сингулярными ядрами, связанное с гиперболическим уравнением. – ДАН России, 2003, т.391, №1, с. 20-22.
11. Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М. К теории двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с граничными особой и сильно-особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные. – Вестник ТНУ. Серия естественных наук, 2021, №1, с.78-89.
12. Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями. – Доклады НАНТ, 2021, т.64, №5-6, с.283-290.
13. Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М. Явные решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и равные. – Bulletin of L.N Gumilyov ENU. – Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2021, vol. 137, №4, pp. 6-13.
14. Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и комплексно-сопряженные. – Доклады НАНТ, 2022, т.65, №5-6, с.314-324.

Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов *

**МАСЪАЛАИ НАМУДИ КОШӢ БАРОИ МУОДИЛАИ ИНТЕГРАЛИИ
ДУЧЕНАКАИ НАМУДИ ВОЛТЕРРА БО ХАТӢОИ МАХСУС ВА
ФАВҚУЛМАХСУСИ САРӢАДӢ**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,

**Донишгоҳи байналмилалӣ сайёҳӣ ва соҳибкорӣ Тоҷикистон.*

Барои муодилаи интегралӣ дученакаи намуди Вольтерра бо хатҳои махсус ва фавқулмахсуси сарҳадӣ тасвири ҳалли ошқори он барои қиматҳои гуногун ва аломатҳои гуногуни параметрҳои муодила, ки метавонад функсияҳои ихтиёрии аз як тағирёбанда вобастаро доро бошад, ҳосил карда шудааст. Қори мазкур ба гузориш ва ҳалли масъалаи намуди Кошӣ барои муодилаи додашуда дар ҳолати шартҳои гузошташуда дар хатҳои махсус дода мешаванд, бахшида шудааст.

Калимаҳои калидӣ: муодилаи интегралӣ дученака, хати махсус, хати ғавқулмахсус, масъалаи намуди Коши, рафтори асимптотикӣ.

L.N.Rajabova, F.M.Akhmadov*

**CAUCHY-TYPE PROBLEMS FOR A TWO-DIMENSIONAL VOLTERRA-TYPE
INTEGRAL EQUATION WITH BOUNDARY SPECIAL AND STRONGLY
SPECIAL LINES**

Tajik National University,

**International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan*

For a two-dimensional Volterra-type integral equation with boundary special and strongly special lines, explicit representations of solutions are obtained, which, depending on the roots of the characteristic equations and the sign of the equation parameters, can contain arbitrary functions of one variable. This paper is devoted to the formulation and solution of a Cauchy type problem for a given Volterra integral equation when the conditions are given on special lines.

Key words: *two-dimensional integral equation, special line, strongly special line, Cauchy type problems, asymptotic behavior.*

Сведения об авторах:

Раджабова Л.Н. – доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического анализа и теории функций;

Ахмадов Фарвариддин Муфазалович – соискатель ТНУ, старший преподаватель.

УДК 536.46

Специальность: 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ;

1.3.17 – Химическая физика, горение и взрыв, физика экстремальных состояний вещества;

1.3.3 – Теоретическая физика.

М.М.Кабиров, З.Б.Шерматова

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ ГАЗОВ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОПОТЕРЬ

*Российско-Таджикский (Славянский) университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.И.Илоловым 20.02.2023 г.)*

В статье построена эквивалентная математическая модель фильтрационного горения газов при наличии теплопотерь. Разработана методика нахождения аналитического решения построенной модели в виде зависимостей температур (пористой среды, газа) и концентрации недостающего компонента смеси газов от времени и координат. Найдены зависимости максимальной температуры газа и скорости распространения волны горения от физико-химических параметров пористой среды и газа.

Ключевые слова: математическая модель, горение газов, пористая среда, смеси газов, теплопотери, температура, концентрация, скорость волны.

Математическая модель фильтрационного горения газов (ФГГ) при наличии теплопотерь составляется для решения вопроса о влиянии теплопотерь на горение и его устойчивость. Этот вопрос был предметом теоретического и экспериментального исследования сотрудников лаборатории физики и химии горения Института химической кинетики и горения СО РАН на протяжении нескольких лет [1-4]. Обычно, теплопотери зоны горения описываются ньютоновской зависимостью, то есть линейной зависимостью от температуры, а её интенсивность задаётся коэффициентом теплоотдачи, что очень удобно при аналитическом рассмотрении задачи. Именно по этой причине, радиационные теплопотери не учитываются в рассматриваемой ниже математической модели. Следует отметить, что Я.Б.Зельдовичем [5] были сформулированы теоретические основы современного представления влияния теплопотерь на процесс горения. Как отмечено в [6], наибольший интерес представляют три аспекта проблемы: влияние теплопотерь на скорость распространения волны, влияние теплопотерь на максимальную температуру пористой среды и определение предельных теплопотерь для существования ФГГ. В [6-8] получены идентичные формулы определения максимальной температуры пористой среды при наличии теплопотерь. Имеется множество работ, в которых характеристики волн ФГГ изучаются методом численного моделирования [9-16]. Детальный учёт кинетики газофазного горения [17,18] не приводили к качественному изменению динамического поведения волн ФГГ по сравнению с аррениусовской моделью брутто-кинетики. Количественный анализ влияния теплопотерь на макси-

Адрес для корреспонденции: Кабиров Маруф Махмудович. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. М.Турсун-заде, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: maruf1960@mail.ru

мальную температуру пористой среды проводился в работе [19]. Эквивалентная математическая модель в отсутствие теплопотерь изучалась в [20], где получены аналитические зависимости температур пористой среды, смеси газов и доли концентрации недостающего компонента газа от времени и координат. Дополнительно получены условия нахождения скорости распространения волны, температуры пористой среды на входе и время формирования структуры стационарной волны.

Целью настоящей работы являются: построение эквивалентной математической модели ФГГ при наличии теплопотерь; разработка методики нахождения аналитического решения построенной модели в виде зависимостей температур (пористой среды, газа) и концентрации недостающего компонента смеси газов от времени и координат; нахождение зависимостей максимальной температуры газа и скорости распространения волны горения от физико-химических параметров пористой среды и газа.

Рассматриваемая математическая модель при наличии теплопотерь имеет вид [1,4,6,13,14]

$$\begin{aligned} \rho_1 c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} + \rho_1 c_p v_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} &= -\alpha_c S_c (T_1 - T_2) + \rho_1 Q J, \quad J = \eta k_0 \exp(-E/RT_1), \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \alpha_2 \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \alpha_c S_c (T_1 - T_2) + \alpha_{0,e} (T_0 - T_2), \\ \rho_1 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \rho_1 v_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\rho_1 J, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial x} = 0, \quad \rho_1 T_1 = \rho_{10} T_0, \\ \alpha_c &= \frac{Nu \cdot \lambda_1}{d_{eff}}, \quad S_c = \frac{6\alpha_2}{d}, \quad \alpha_{0,e} = \frac{2\alpha_w}{R_w}, \\ Nu &= 0.395 Re^{0.64} Pr^{1/3}, \quad Re = \frac{v_1 d_{eff} \rho_1}{\mu_1 \alpha_1}, \quad Pr = \frac{c_p \mu_1}{\lambda_1}, \quad d_{eff} = \frac{2\alpha_1 d}{3\alpha_2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Начальные и граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} t = 0: \quad T_1 &= T_{10}(x), \quad T_2 = T_{20}(x), \quad \eta = \eta_0(x), \\ x = 0: \quad T_1 &= T_0, \quad T_2 = T_0, \quad \eta = \eta_0, \\ x = l: \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} &= 0; \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0; \quad \eta = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь T_1, T_2 – температуры фаз (газа и пористой среды), η – массовая концентрация реагирующего компонента, v_1 – скорость фильтрации смеси газов; ρ_1, ρ_2 – приведённые плотности фаз; c_p, c_2 – удельные теплоёмкости; λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности в газе и пористой среде; α_c – коэффициент поверхностного теплообмена между фазами; S_c – удельная поверхность частиц, $\alpha_{0,e}$ – коэффициент теплоотдачи в окружающее пространство; Q – тепловой эффект реакции; E – энергия активации; R – универсальная газовая постоянная; k_0 – предэкспонент, Nu, Re, Pr в – числа Нусельта, Рейнольдса, Прандтля соответственно, d_{eff} – эффективный диаметр, d – диаметр частиц, α_1, α_2 – объёмные содержания фаз, μ_1 – динамическая вязкость газа.

Система (1) с граничными условиями (2) описывает структуры нестационарных волн ФГГ. Здесь под волнами подразумевается профили температур (газа, пористой среды) и концентрации недостающего компонента, которые зависят от времени и координат и распространяются со скоростью, также зависящей от времени и координат. Отметим, что в теории горения для исследования структуры стационарных волн горения, обычно из подобной системы (1) посредством преобразования, переходят в подвижную систему координат. При этом полагают, что все входящие в систему неизвестные функции не зависят от времени, и, как следствие этого, производные по времени от этих функций равны нулю. Но полученная система дифференциальных уравнений содержит дополнительную неизвестную константу – скорость волны, что усложняет решение задачи. Несмотря на это, в настоящей работе, также переходим в подвижную систему координат ($x = \xi + U\tau$, $t = \tau$), и рассматриваем квазистационарный режим распространения волны горения. Этот режим предполагает, что плотность смеси кусочно-постоянная функция и скорость волны постоянная величина. Следовательно, система (1) в безразмерных переменных и параметрах имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\tau}} + \gamma_1 \left(1 - \frac{1}{u_0}\right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\xi}} &= -\alpha' \gamma_1 (\theta_1 - \theta_2) + n \exp\left(\frac{E}{RT_e} \left(1 - \frac{1}{T_0/T_e + \theta_1 RT_e/E}\right)\right), \\ \gamma_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{\tau}} - \gamma_2 \frac{1}{u_0} \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{\xi}} &= \gamma_1 \chi_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{\xi}^2} + \alpha' \gamma_1 (\theta_1 - \theta_2) - \alpha'_{0,e} \theta_2, \\ \frac{\partial n}{\partial \bar{\tau}} + \left(1 - \frac{1}{u_0}\right) \frac{\partial n}{\partial \bar{\xi}} &= -n \exp\left(\frac{E}{RT_e} \left(1 - \frac{1}{T_0/T_e + \theta_1 RT_e/E}\right)\right), \quad u_0 = \frac{v_{10}}{U}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} T_1 - T_0 &= \frac{RT_e^2}{E} \theta_1, \quad T_2 - T_0 = \frac{RT_e^2}{E} \theta_2, \quad \eta = \eta_0 n, \quad \xi = L \bar{\xi}, \quad \tau = \frac{\bar{\tau} \exp(E/RT_e)}{k_0}, \\ \gamma_1 &= \frac{c_p RT_e^2}{Q \eta_0 E}, \quad \alpha' = \frac{\alpha_c S_c}{\rho_{10} c_p k_0 \exp(-E/RT_e)}, \quad \alpha'_{0,e} = \frac{\alpha_{0,e}}{\rho_{10} Q \eta_0 k_0 \exp(-E/RT_e)}, \\ \gamma_2 &= \gamma_1 \varphi, \quad L = \frac{v_{10}}{k_0 \exp(-E/RT_e)}, \quad \chi_2 = \frac{\alpha_2 \lambda_2}{\rho_{10} c_p k_0 \exp(-E/RT_e) L^2}, \quad \alpha_c = \frac{Nu \cdot \lambda_1}{d_{eff}}, \\ T_e &= T_0 + \frac{Q \eta_0}{c_p (1 + \varphi / (1 - u_0)) \sqrt{1 + 4\Delta / u^2}}, \quad u = 1 - \frac{u_0}{1 + \varphi}, \quad \varphi = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_{10} c_p}, \quad \Delta = \frac{(\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) \alpha_{0,e}}{(\rho_{10} c_p + \rho_2 c_2)^2 U^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом начальные и граничные условия приобретают вид

$$\begin{aligned} \bar{\tau} = 0: \quad \theta_1 &= \theta_{10}(\bar{\xi}), \quad \theta_2 = \theta_{20}(\bar{\xi}), \quad n = n_0(\bar{\xi}), \\ \bar{\xi} = -\infty: \quad \theta_1 &= 0, \quad \theta_2 = 0, \quad n = 1, \\ \bar{\xi} = +\infty: \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\xi}} &= 0; \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{\xi}} = 0; \quad n = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Построение эквивалентной математической модели ФГГ при наличии теплопотерь

Проведём алгебраические преобразования над уравнениями системы (3). Суммируем первое и третье уравнения системы (3), получим первое уравнение эквивалентной системы. Второе уравнение системы (3) оставляем без изменений. Суммируя все уравнения (3), получим третье уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\gamma_1\theta_1+n)}{\partial\bar{\tau}} + \left(1 - \frac{1}{u_0}\right) \frac{\partial(\gamma_1\theta_1+n)}{\partial\bar{\xi}} &= -\alpha'\gamma_1(\theta_1-\theta_2), \\ \gamma_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial\bar{\tau}} - \gamma_2 \frac{1}{u_0} \frac{\partial\theta_2}{\partial\bar{\xi}} &= \gamma_1\chi_2 \frac{\partial^2\theta_2}{\partial\bar{\xi}^2} + \alpha'\gamma_1(\theta_1-\theta_2) - \alpha'_{0,e}\theta_2, \\ \frac{\partial(\gamma_1\theta_1+\gamma_2\theta_2+n)}{\partial\bar{\tau}} + \frac{\partial}{\partial\bar{\xi}} \left(\gamma_1 \left(1 - \frac{1}{u_0}\right) \theta_1 - \frac{\gamma_2}{u_0} \theta_2 + \left(1 - \frac{1}{u_0}\right) n \right) &= \gamma_1\chi_2 \frac{\partial^2\theta_2}{\partial\bar{\xi}^2} - \alpha'_{0,e}\theta_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Система уравнений (6) с начальными и граничными условиями (5) представляют собой эквивалентную математическую модель ФГГ при наличии теплопотерь.

Нахождение аналитического решения системы. Вначале в левую часть третьего уравнения системы (6) добавим и вычтем член $f \frac{\partial\theta_2}{\partial\bar{\xi}}$, где f – постоянная величина, впоследствии убедимся, что она выражается параметрами системы

$$\frac{\partial(\gamma_1\theta_1+\gamma_2\theta_2+n)}{\partial\bar{\tau}} + \frac{\partial}{\partial\bar{\xi}} \left(\gamma_1 \left(1 - \frac{1}{u_0}\right) \theta_1 - \frac{\gamma_2}{u_0} \theta_2 + \left(1 - \frac{1}{u_0}\right) n \right) + f \frac{\partial\theta_2}{\partial\bar{\xi}} - f \frac{\partial\theta_2}{\partial\bar{\xi}} = \gamma_1\chi_2 \frac{\partial^2\theta_2}{\partial\bar{\xi}^2} - \alpha'_{0,e}\theta_2.$$

В это уравнение под частное производное (второй член в левой части) внесём добавленный член, и полагаем, что полученное выражение под частным производным не зависит от времени и координат

$$\gamma_1 \left(1 - \frac{1}{u_0}\right) \theta_1 - \frac{\gamma_2}{u_0} \theta_2 + \left(1 - \frac{1}{u_0}\right) n + f \theta_2 = const. \tag{7}$$

Это условие означает, что мы рассматриваем околостационарный режим, то есть структура волны находится на стадии перехода к структуре стационарной волны. Удовлетворяя левые граничные условия, находим $const = 1 - 1/u_0$. Далее, применяя к (7) правые граничные условия (5) и учитывая, что максимальная температура пористой среды определяется по формуле

$$\theta_e = \frac{1}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\varphi}{1-u_0}\right) \sqrt{1 + \frac{4\Delta}{u^2}}},$$

имеем

$$\theta_e \left[\left(1 - \frac{1}{u_0} \right) \gamma_1 + \left(f - \frac{\gamma_2}{u_0} \right) \right] = 1 - \frac{1}{u_0},$$

откуда, находим

$$f = \gamma_1 \left(1 - \frac{1+\varphi}{u_0} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{4\Delta}{u^2}} - 1 \right). \quad (8)$$

Заметим, что если, теплотери нет ($\alpha_{0,e} = 0$), то следует $\Delta = 0$ и $f = 0$.

Далее, из (7) находим

$$\gamma_1 \theta_1 + n = 1 - \frac{f - \gamma_2 / u_0}{1 - 1 / u_0} \theta_2. \quad (9)$$

Подставляя (9) в третье уравнение системы (6), имеем

$$\left(\gamma_2 - \frac{f - \gamma_2 / u_0}{1 - 1 / u_0} \right) \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{\tau}} = \gamma_1 \chi_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{\xi}^2} + f \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{\xi}} - \alpha'_{0,e} \theta_2. \quad (10)$$

Как видим, уравнение (10) – это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и поэтому решение ищется в виде $\theta_2 = \Psi(\bar{\tau}) \theta_2^0(\bar{\xi})$. Здесь $\theta_2^0(\bar{\xi})$ – функция безразмерной температуры пористой среды, соответствующая стационарному режиму распространения волны горения. Следовательно, функция $\Psi(\bar{\tau})$ при $\bar{\tau} \rightarrow \infty$ должна стремиться к единице, а это возможно при $\Psi(\bar{\tau}) = 1 - \exp(-a\bar{\tau})$, $a > 0$. В этом случае уравнение (10) примет вид

$$\left(\gamma_2 - \frac{f - \gamma_2 / u_0}{1 - 1 / u_0} \right) a \theta_2^0 \exp(-a\bar{\tau}) = (1 - \exp(-a\bar{\tau})) \left(\gamma_1 \chi_2 \frac{d^2 \theta_2^0}{d \bar{\xi}^2} + f \frac{d \theta_2^0}{d \bar{\xi}} - \alpha'_{0,e} \theta_2^0 \right). \quad (11)$$

При условии

$$\gamma_2 - \frac{f - \gamma_2 / u_0}{1 - 1 / u_0} = 0 \quad (12)$$

уравнение (11) примет вид

$$\gamma_1 \chi_2 \frac{d^2 \theta_2^0}{d \bar{\xi}^2} + f \frac{d \theta_2^0}{d \bar{\xi}} - \alpha'_{0,e} \theta_2^0 = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) – это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и решение можно представить в виде

$$\theta_2^0(\bar{\xi}) = \begin{cases} \theta_e \exp(p_2(\bar{\xi} - \bar{\xi}_*)), & \bar{\xi} < \bar{\xi}_* \\ \theta_e \exp(p_1(\bar{\xi} - \bar{\xi}_*)), & \bar{\xi} > \bar{\xi}_*. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь p_1, p_2 – корни характеристического уравнения

$$\gamma_1 \chi_2 p^2 + f \cdot p - \alpha'_{0,e} = 0.$$

В результате функцию $\theta_2(\bar{\tau}, \bar{\xi})$ получим в виде

$$\theta_2(\bar{\tau}, \bar{\xi}) = \Psi(\bar{\tau}) \cdot \theta_2^0(\bar{\xi}) = \begin{cases} (1 - \exp(-a\bar{\tau})) \cdot \theta_e \exp(p_2(\bar{\xi} - \bar{\xi}_*)), & \bar{\xi} < \bar{\xi}_* \\ (1 - \exp(-a\bar{\tau})) \cdot \theta_e \exp(p_1(\bar{\xi} - \bar{\xi}_*)), & \bar{\xi} > \bar{\xi}_*. \end{cases} \quad (15)$$

Далее, из второго уравнения системы (6) находим функцию $\theta_1(\bar{\tau}, \bar{\xi})$

$$\theta_1(\bar{\tau}, \bar{\xi}) = \theta_2 + \frac{1}{\gamma_1 \alpha'} \left(\gamma_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{\tau}} - \frac{\gamma_2}{u_0} \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{\xi}} - \gamma_1 \chi_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{\xi}^2} + \alpha'_{0,e} \theta_2 \right)$$

и, в итоге, имеем

$$\theta_1(\bar{\tau}, \bar{\xi}) = (1 - \exp(-a\bar{\tau})) \left[\theta_2^0 + \frac{1}{\gamma_1 \alpha'} \left(-\frac{\gamma_2}{u_0} \frac{\partial \theta_2^0}{\partial \bar{\xi}} - \gamma_1 \chi_2 \frac{\partial^2 \theta_2^0}{\partial \bar{\xi}^2} + \alpha'_{0,e} \theta_2^0 \right) \right] + \frac{a\gamma_2}{\gamma_1 \alpha'} \theta_2^0 \exp(-a\bar{\tau}).$$

Из (9) находим

$$n = 1 - \gamma_1 \theta_1 - \frac{f - \gamma_2 / u_0}{1 - 1 / u_0} \theta_2 = 1 - \gamma_1 \theta_1 - \left(\frac{1}{\theta_e} - \gamma_1 \right) \theta_2 = 1 - \gamma_1 (\theta_1 - \theta_2) - \frac{\theta_2}{\theta_e}.$$

При $\bar{\tau} = 0$

$$\theta_1(\bar{\tau}, \bar{\xi}) = \frac{a\gamma_2}{\gamma_1 \alpha'} \theta_2^0(\bar{\xi}), \quad \theta_2(\bar{\tau}, \bar{\xi}) = 0, \quad n = 1 - \frac{a\gamma_2}{\alpha'} \theta_2^0(\bar{\xi}),$$

а при $\bar{\tau} = \infty$

$$\begin{aligned} \theta_1(\bar{\xi}) &= \theta_2^0 + \frac{1}{\gamma_1 \alpha'} \left(-\frac{\gamma_2}{u_0} \frac{\partial \theta_2^0}{\partial \bar{\xi}} - \gamma_1 \chi_2 \frac{\partial^2 \theta_2^0}{\partial \bar{\xi}^2} + \alpha'_{0,e} \theta_2^0 \right), \quad \theta_2(\bar{\xi}) = \theta_2^0(\bar{\xi}), \\ n &= 1 + \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{\gamma_2}{u_0} \frac{\partial \theta_2^0}{\partial \bar{\xi}} + \gamma_1 \chi_2 \frac{\partial^2 \theta_2^0}{\partial \bar{\xi}^2} - \alpha'_{0,e} \theta_2^0 \right) - \frac{\theta_2^0(\bar{\xi})}{\theta_e}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для полного представления распространения волны горения в порах пористой среды предполагаем, что в начальный момент времени температура газа равна адиабатической температуре ($T_1 = T_{ad} = T_0 + Q\eta / c_p$), доля недостающего компонента равна нулю ($n = 0$), а температура пористой среды равна максимальной температуре ($T_2 = T_e$). При этом неизвестная константа a будет равна $a = \alpha' / \gamma_2 \theta_e$.

Поскольку получили стационарное решение (16) задачи, в виде функции температур (газа, пористой среды) и концентрации от координат, то имеется возможность исследовать максимальную температуру газа и израсходования недостающего компонента

$$\theta_{1\max} = \theta_e + \frac{1}{\gamma_1 \alpha'} \left(-\frac{\gamma_2}{u_0} p_2 \theta_e - \gamma_1 \chi_2 p_2^2 \theta_e + \alpha'_{0,e} \theta_e \right), \quad \theta_2(\bar{\xi}) = \theta_e, \quad (17)$$

$$n = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{\gamma_2}{u_0} p_2 \theta_e + \gamma_1 \chi_2 p_2^2 \theta_e - \alpha'_{0,e} \theta_e \right).$$

Используя характеристическое уравнение, перепишем зависимости (17) в виде

$$\theta_{1\max} = \theta_e \left[1 + \frac{p_2}{\gamma_1 \alpha'} \left(f - \frac{\gamma_2}{u_0} \right) \right], \quad \theta_2(\bar{\xi}) = \theta_e, \quad (18)$$

$$n = \frac{p_2 \theta_e}{\alpha'} \left(\frac{\gamma_2}{u_0} - f \right).$$

В соответствии с (12) ($f = \gamma_2$) зависимости в (18) примет вид

$$\theta_{1\max} = \theta_e \left[1 + \frac{p_2 \varphi}{\alpha'} \left(1 - \frac{1}{u_0} \right) \right], \quad \theta_2(\bar{\xi}) = \theta_e, \quad p_2 = \frac{-f + \sqrt{f^2 + 4\gamma_1 \chi_2 \alpha'_{0,e}}}{2\gamma_1 \chi_2},$$

$$n = \frac{p_2 \theta_e \gamma_2}{\alpha'} \left(\frac{1}{u_0} - 1 \right), \quad u_0 = \frac{1 + \varphi}{2 + \varphi} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\Delta(\varphi + 2)}{\varphi}} \right).$$

Поступило 29.02.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Потытняков С.И., Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. Влияние теплопотерь на распространение стационарных волн при фильтрационном горении газов. – Физика горения и взрыва, 1984, т.20, №1, с.19-26.
2. Лаевский Ю.М., Бабкин В.С., Дробышев В.И., Потытняков С.И. К теории фильтрационного горения газов. – Физика горения и взрыва, 1984, т.20, №6, с. 3-13.
3. Потытняков С.И., Лаевский Ю.М., Бабкин В.С., Дробышев В.И. Исследование тепловой структуры волны фильтрационного горения газов. – Физика горения и взрыва, 1985, т. 21, №2, с. 19-26.
4. Бабкин В.С., Лаевский Ю.М. Фильтрационное горение газов. – Физика горения и взрыв, 1987, т. 23, №5, с. 27-44.
5. Зельдович Я.Б. Теория предела распространения тихого пламени. – Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1941, т. 11, №1, с. 159-169.
6. Доброго К.В., Жданок С.А. Физика фильтрационного горения газов. – Минск: Институт тепло- и массообмена им.А.В.Лыкова НАНБ, 2002, 203 с.
7. Кабилов М.М. Влияние теплопотерь на устойчивость стационарных волн при фильтрационном горении газов.–Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 1994, т.37, № 3-4, с. 24-28.
8. Какуткина Н.А., Коржавин А.А., Мбрава М. Особенности фильтрационного горения водородо-, пропано- и метановоздушных смесей в инертных пористых средах. – Физика горения и взрыва, 2006, т.42, №4, с.8-20.

9. Foutko S.I., Zhdanok S.A., Shabunya S.I. Superadiabatic combustion wave in a diluted methane air mixture under filtration in a packed bed. – 26thSymp. (Int.) on Combustion. Naply, Italy. The Combustion Institute, 1996, vol. 2, pp.1556-1565.
10. Martynenko V.V., Shabunya S.I. Two-temperature model of filtrational combustion. 2D approach. – 27th Symp. (Int.) on Combustion: Abst. Work-in-Progress Posters. Pittsburg, PA. The Combustion Institute, 1998, p.408.
11. Brenner G. Numerical and experimental investigation of matrix-stabilized metan/air combustion in porous inert media. – Combustion and Flame. 2000, v.123, Issue 1-2, pp.201-203.
13. Лаевский Ю.М., Яушева Л.В. Численное моделирование фильтрационного горения газа на основе двухуровневых полунеевных разностных схем. – Вычислительные технологии, 2007, т. 12, № 2, с. 90-103.
14. Какуткина Н.А., Рычков Д.А. Моделирование нестационарных процессов фильтрационного горения газа. – Физика горения и взрыва, 2010, т.4, №3, с.44-51.
15. Кабилов М.М., Халимов И.Х. Численное исследование стационарной структуры волны фильтрационного горения газов при наличии теплопотерь. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2013, т. 56, №4, с.297-304.
16. Кандрюкова Т.А., Лаевский Ю.М. О численном моделировании фильтрационного горения газов на многоядерных вычислительных системах. – Сибирский журнал индустриальной математики, 2014, т.17, № 1, с. 55-64.
17. Носова Т.А. Вычислительные модели фильтрационного горения газа в режиме низких скоростей: дис... к. ф.-м. н. – Инс. выч. мат. и мат. геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2018, 102 с.
18. Футько С.И. Химическая структура волн фильтрационного горения газов в инертных пористых средах, ч.2. Ультраобогащённые метановоздушные составы. – Минск, 2002 (Препринт /АНК ИТМО НАНБ, №2).
19. Migoun A.N., Chernukho A.P., Zhdanok S.A. Combustion of Methane-Air Mixture in packed bed. Steady wave approximation. – Proc. of IV Int. school-seminar Modern problems of combustions and its applications (Minsk, Sept. 2-7, 2001). Minsk: НМТИ, 2001, p. 23.
20. Футько С.И., Доброго К.Б., Жданок С.А., Ханевич Э.И. Локализация фронта горения в фильтрационном нагревателе дискового типа в условиях интенсивной внешней теплоотдачи. – Физика горения и взрыва, 2000, т.36, №3, с.17-24.
21. Кабилов М.М., Халимов И.И. Сверхадиабатический режим горения водородо-воздушной смеси в инертной пористой среде. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2018, т.61, №3, с. 241-249.

М.М.Қобилов, З.Б.Шерматова

МОДЕЛИ МАТЕМАТИКИИ БАРОБАРҚУВВАИ СЎЗИШИ ФИЛТРОНАИ ГАЗҶО ҲАНГОМИ ТАЛАФИ ГАРМӢ

Донишгоҳи (Славянии) Россияю Тоҷикистон

Дар мақола модели математикии баробарқувваи сӯзиши филтронаи газҳо ҳангоми талафи гармӣ сохта шудааст. Муайян кардани усули ҳалли аналитикии модели сохташуда дар намуди вобастагӣҳои ҳарорат ва консентратсияи таркибаи омехтаи газҳо аз вақт ва координат таҳия карда

шудааст. Вобастагии ҳарорати максимали ва суръати паҳншавии мавҷи сӯзиш аз нишондодҳои физикию химиявӣ ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: модели математики, сӯзиши газҳо, муҳити ковок, омехтаи газҳо, талафи гармӣ, ҳарорат, консентратсия, суръати мавҷ.

M.M.Kabilov, Z.B.Shermatova

EQUIVALENT MATHEMATICAL MODEL OF FILTRATION COMBUSTION OF GASES IN THE PRESENCE OF HEAT LOSSES

Russian-Tajik (Slavic) University

In the article, an equivalent mathematical model of the filtration combustion of gases in the presence of heat losses is constructed. A technique has been developed for finding an analytical solution of the constructed model in the form of dependences of temperatures (porous medium, gas) and the concentration of the missing component of a mixture of gases on time and coordinates. The dependences of the maximum gas temperature and combustion wave propagation velocity on the physicochemical parameters of the porous medium and gas are found.

Key words: mathematical model, gas combustion, porous medium, gas mixtures, heat loss, temperature, concentration, wave speed.

Сведения об авторах:

Кабиллов Маруф Махмудович – кандидат физ.-мат. наук, зав. кафедрой информатики и информационных технологий Российско-Таджикского (Славянского) университета.

УДК 523. 532

Специальность: 1.3.1 – Физика космоса, астрономия.

Член-корреспондент НАН Таджикистана Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, Д.К.Аюбов
**РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ КОМЕТЫ C/2021 A2 (NEOWISE)
В ТАДЖИКИСТАНЕ**

Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана

Представлены результаты оптических наблюдений долгопериодической кометы C/2021 A2 (NEOWISE), проведенных на телескопе АЗТ-8 Гиссарской астрономической обсерватории (ГисАО) Института астрофизики НАНТ в 2021 г. Определены координаты и вычислена орбита кометы. Найден видимый и абсолютный блеск кометы в фильтрах BVRI, построены кривые блеска по наблюдениям пяти ночей, Оценены показатели цвета. Вычислен параметр пылепроизводительности кометы; оценка диаметра ядра кометы составила 7.0 ± 0.1 км. Проведен сравнительный анализ новых данных с опубликованными сведениями и показано отсутствие нестационарных явлений в период наблюдений.

Ключевые слова: комета, наблюдения, астрометрия, фотометрия, координаты, точность, орбита, блеск, показатель цвета, пылепроизводительность, диаметр.

В в е д е н и е

Одна из основных задач современной кометной астрономии - проблема происхождения комет. Кометы, наряду с астероидами и метеорными телами, относятся к группе малых тел Солнечной системы. Кометная популяция имеет разветвленную структуру, в которой главное место занимают короткопериодические и долгопериодические кометы. Имеется много сведений о кометах с коротким периодом обращения вокруг Солнца, так как они часто оказываются вблизи Солнца и Земли и, следовательно, их можно наблюдать неоднократно, а некоторые из них – систематически. Более того, к таким кометам уже реализованы космические миссии (Stardust, Rozetta) и можно осуществить новые космические миссии. Долгопериодические кометы, напротив, имеют период обращения вокруг Солнца свыше 200 лет и поэтому их систематические наблюдения практически невозможны. Наблюдения таких комет происходят лишь в одном прохождении перигелия орбиты и к тому же космические миссии к ним весьма маловероятны. Между тем, считается, что коротко- и долгопериодические кометы имеют различные источники происхождения, а также предполагается, что из-за этого они должны различаться по свойствам. Для подтверждения или опровержения последнего утверждения крайне необходимо как можно больше сведений о долгопериодических кометах, включая наблюдательные данные. По этим причинам долгопериодические кометы представляют особый научный интерес.

Адрес для корреспонденции: Кохирова Гулчехра Исроиловна, Буриев Анварджон Махмадалиевич. 736063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/5, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: kokhirova2004@mail.ru, anvar10@mail.ru

Долгопериодическая комета C/2021 A2 (NEOWISE)

Новая комета открыта на снимках космического проекта NEOWISE 3 января 2021 г. На момент открытия яркость объекта составила 15.0^m (звёздных величин) и она имела кому размером 5 угловых минут. В течение 5- 9 января 2021 г. ряд наземных наблюдателей подтвердили кометную активность объекта, а именно яркость увеличилась и достигла 12^m [1], а ТАКЖЕ значительно расширилась кома и появился хвост. Объект получил новое наименование -комета C/2021 A2 (NEOWISE) [2], далее по тексту C/2021 A2. По первым наблюдениям выявлено, что период обращения кометы вокруг Солнца составляет 4149 лет [3], следовательно, она является долгопериодической; она наблюдалась только в одном прохождении перигелия в январе 2021 г., благодаря чему и была открыта. Согласно величине параметра Тиссерана относительно Юпитера $T_J = -0.410$ [3], C/2021 A2 движется по типичной кометоподобной орбите. В январе 2021 г. комета C/2021 A2 прошла перигелий своей орбиты, сблизившись с Солнцем на расстоянии 1.4 а.е., при этом ее блеск составлял 15.0^m . В феврале 2021 г. комета прошла мимо Земли на минимальном расстоянии 0.5 а.е., имея блеск, равный 14.1m [4].

Элементы орбиты кометы C/2021 A2 приведены в табл. 1 [3], где a – большая полуось, e – эксцентриситет, q, Q – перигелийное и афелийное расстояния, i – наклонение, ω – аргумент перигелия, Ω – долгота перигелия. Комета движется по ретроградной (i составляет почти 107 град.) сильно вытянутой эллиптической ($e=0.994$) орбите, в афелии ($Q=515.03$ а.е.) уходящей далеко за пределы пояса Койпера и облака Оорта.

Таблица 1

Элементы орбиты кометы C/2021 A2 (NEOWISE) (J2000.0)

Эпоха	a , а.е.	e	q , а.е.	Q , а.е.	i , град.	ω , град.	Ω , град.
21.02.2021	258.226	0.994	1.413	515.039	106.978	125.238	338.849

Оптические многоцветные наблюдения кометы C/2021 A2 (NEOWISE)

Как было отмечено, в период прохождения перигелия орбиты или в периоды сближения с Землей создаются благоприятные условия для наземных наблюдений космических объектов. Для исследования динамических и физических свойств нами проведены астрометрические и фотометрические наблюдения кометы C/2021 A2 в период сближения с Землей (после прохождения перигелия). Мониторинг выполнен с 04 по 16 февраля 2021 г. на телескопе АЗТ-8 Гиссарской астрономической обсерватории (ГисАО) Института астрофизики НАНТ. Телескоп АЗТ-8 в оптической системе Ньютона имеет фокус $F=2.82$ м. Размер и поле зрения камеры – 3056x3056 пикселей и 44.7' x 44.7', соответственно, масштаб матрицы – 0.874"/пиксель. Регистрация объекта выполнялась с помощью ПЗС FLI ProLine PL09000 с использованием широкополосных фотометрических фильтров системы Джонсона-Козинса – BVRI. Длительность экспозиций составляла от 10 до 120 секунд.

Для уменьшения уровня шумов ПЗС камера аппаратуры была охлаждена до температуры - 20°С. Чтобы учесть темновой сигнал в течение наблюдательной ночи были, получены темновые кадры «Dark», которые при обработке вычитались из рабочих кадров. Для получения снимков с равномерным полем были использованы кадры с плоскими полями «Flat», наблюденные при вечерних или

утренних сумерках. Для учета ошибок матрицы ПЗС камеры снимались кадры «Bias», которые также использовались в обработке кадров. Дата наблюдений, геометрическое положение кометы во время наблюдений в ГисАО и детали выполненных экспозиций приведены в табл.2, где r и Δ – расстояния кометы от Солнца и Земли, ph – фазовый угол, N и t – количество и время экспозиций. Изображение кометы во время наблюдений приведено на рис. 1.

Таблица 2

Журнал наблюдений кометы C/2021 A2 в ГисАО

Дата	r , а.е.	Δ , а.е.	ph , град.	N x <i>Фильтр</i>	t , с
04.02.2021	1.425	0.509	24.627	27xB, 27xV, 27xR, 27xI	10-120
11.02.2021	1.442	0.574	29.967	30xB, 30xV, 30xR, 30xI	10-120
12.02.2021	1.445	0.591	31.007	29xB, 29xV, 29xR, 29xI	10-120
15.02.2021	1.455	0.645	33.900	15xB, 15xV, 15xR, 15xI	10-120
16.02.2021	1.458	0.664	34.749	24xB, 24xV, 24xR, 24xI	10-120

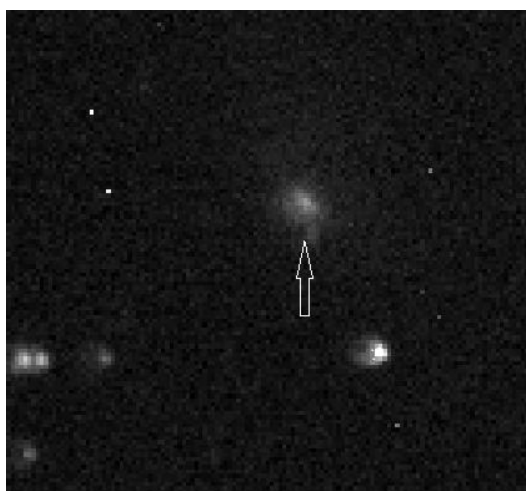


Рис. 1. Изображение кометы C/2021 A2 по наблюдениям в ГисАО в феврале 2021 г.

Астрометрия изображений кометы C/2021 A2 и результаты

Для астрометрической обработки мы использовали ПП АПЕКС-II [5]. Для определения позиций кометы использован каталог UCAC5, в котором положения звезд приведены с точностью до 0.05".

В результате астрометрической обработки почти для 300 изображений определены экваториальные координаты кометы в период наблюдений. Избранные координаты приведены в табл. 3; средние (за ночь) положения в виде графика показаны на рис. 2, где по оси абсцисс даны прямое восхождение α и по оси ординат – склонение δ . На рис. 2 слева для сравнения приведены координаты объекта по нашим и другим наблюдениям в этот период из базы данных [6].

Таблица 3

Экваториальные координаты и видимые звездные величины в разных фильтрах кометы C/2021 A2 по наблюдениям в ГисАО

№	Дата	Момент наблюдений (UT)	α	δ	m (зв.вел.)
1	04.02.2021	16 ^h 23 ^m 13 ^s .920	07 ^h 15 ^m 36 ^s .64	-06°53'17".9	15.5
2	04.02.2021	16 23 47.616	07 15 36.44	-06 53 14.2	15.2
3	04.02.2021	16 24 21.312	07 15 36.28	-06 53 09.9	15.5
4	04.02.2021	16 24 55.008	07 15 36.08	-06 53 05.7	15.0
5	04.02.2021	16 26 0.6720	07 15 35.72	-06 52 57.5	16.0
6	04.02.2021	16 26 34.368	07 15 35.57	-06 52 54.1	16.1
7	11.02.2021	17 0 19.5840	07 15 24.83	-06 48 48.8	15.6
8	11.02.2021	15 42 16.704	06 29 05.26	+11 40 52.5	16.5
9	11.02.2021	15 42 40.032	06 29 05.17	+11 40 54.3	16.2
10	11.02.2021	15 43 26.688	06 29 04.98	+11 40 58.9	17.8
11	11.02.2021	15 44 13.344	06 29 04.73	+11 41 03.5	17.0
12	11.02.2021	15 44 35.808	06 29 04.66	+11 41 05.9	15.8
13	12.02.2021	16 23 14.784	06 28 55.26	+11 44 48.0	15.2
14	12.02.2021	16 32 59.712	06 23 15.54	+13 59 50.4	15.1
15	12.02.2021	16 35 43.008	06 23 14.89	+14 00 06.6	15.6
16	12.02.2021	16 39 22.464	06 23 14.04	+14 00 25.8	15.9
17	12.02.2021	16 39 45.792	06 23 13.93	+14 00 28.1	15.0
18	12.02.2021	16 44 43.872	06 23 12.76	+14 00 54.4	14.4
19	15.02.2021	16 47 50.496	06 23 12.03	+14 01 11.5	14.3
20	15.02.2021	15 44 41.856	06 08 05.59	+19 53 50.0	14.2
21	15.02.2021	15 45 5.1840	06 08 05.55	+19 53 49.9	14.4
22	15.02.2021	15 46 15.168	06 08 05.25	+19 53 56.6	14.5
23	15.02.2021	15 46 38.496	06 08 05.17	+19 53 58.4	14.6
24	15.02.2021	15 49 45.984	06 08 04.53	+19 54 12.9	15.9
25	16.02.2021	16 33 10.080	06 07 55.84	+19 57 28.0	15.2
26	16.02.2021	17 18 16.992	06 03 10.49	+21 45 31.1	16.4
27	16.02.2021	17 18 40.320	06 03 10.40	+21 45 32.8	16.1
28	16.02.2021	17 19 3.6480	06 03 10.35	+21 45 33.6	14.5
29	16.02.2021	17 22 37.920	06 03 09.63	+21 45 49.4	16.2
30	16.02.2021	17 23 1.2480	06 03 09.54	+21 45 51.6	15.7

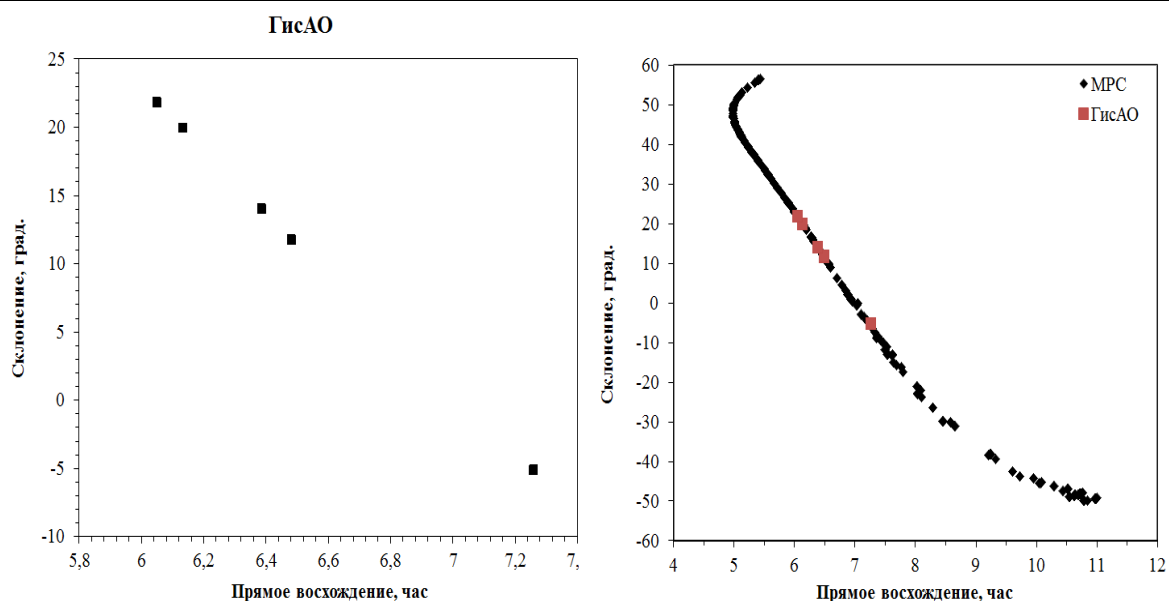


Рис. 2. Видимая траектория кометы C/2021 A2 по наблюдениям в ГисАО (справа) и данным наблюдений у других авторов в 2021 г. (из базы данных MPC) (слева).

Точность определения координат зависит от ошибок астрометрических измерений. Ошибки определения координат найдены с помощью ПП ЭПОС [7]. Средние значения отклонений измеренных экваториальных координат (O) от данных MPC (C), обозначенные как $(O-C)_\alpha$ и $(O-C)_\delta$ для координат α и δ , соответственно, а также их средние квадратичные ошибки σ_α и σ_δ в угловых секундах по наблюдениям в ГисАО представлены в табл. 4. Как видно из табл. 4, средняя по всем кадрам ошибка астрометрической редукции не превышает 0.08" и 0.09" для прямого восхождения α и склонения δ , соответственно, что говорит о достаточно высокой точности измерений и, соответственно, определения координат.

Таблица 4

Средние разности (O-C) и их стандартные отклонения для кометы C/2021 A2

Дата	$(O-C)_\alpha$	σ_α	$(O-C)_\delta$	σ_δ
04.02.2021	0.186"	± 0.035 "	0.205"	± 0.038 "
11.02.2021	0.213"	± 0.038 "	0.225"	± 0.040 "
12.02.2021	0.276"	± 0.076 "	0.417"	± 0.016 "
15.02.2021	0.374"	± 0.084 "	0.362"	± 0.026 "
16.02.2021	0.264"	± 0.061 "	0.406"	± 0.093 "

Полученная точность астрометрической обработки позволяет вычислить первоначальную орбиту кометы. На основе найденных из наблюдений 213 положений с помощью ПП Find_orb [8] вычислена орбита C/2021 A2, приведенная в табл. 5. Здесь даны стандартные элементы орбиты в равноденствии 2000.0, а также n – среднее суточное движение, σ – средняя квадратичная ошибка. Для сравнения в табл. 5 приведена орбита, вычисленная на основе 981 измеренных положений кометы по наблюдениям в различных обсерваториях, согласно базе данных MPC. В последнем столбце приведены величины разности между вычисленной нами орбитой и орбитой MPC, обозначенные как χ . Как видно, с учетом разности моментов времени, на которые вычислена орбита, по наблюдениям в ГисАО получена орбита, близкая к орбите MPC [3]. В период нашего мониторинга орбита кометы оставалась стабильной, следовательно, никаких событий – фрагментация ядра, столкновение с другим объектом и др. не наблюдалось.

Таблица 5

Орбита кометы C/2021 A2 (NEOWISE), полученная по наблюдениям ГисАО, и орбита MPC (J2000.0)

Элементы орбиты	ГисАО [данная работа]	[3]	χ
Кол-во положений, использованных для вычисления орбиты	213	981	-
T (JD)	2459237.096	2459237.134	-
Эпоха (JD)	2459261.500	2459266.500	-
e	0.994564 ± 0.000139	0.994528	-3.6E-05
a , а.е.	258.226231 ± 0.000735	258.226251	2E-05
q , а.е.	1.412902 ± 0.000119	1.412975	7.3E-05
i , град.	106.978303 ± 0.000102	106.978359	5.6E-05
ω , град.	338.849071 ± 0.000480	338.849034	-3.7E-05
Ω , град.	125.238295 ± 0.000380	125.238252	-4.3E-05
n , град./сут.	0.000564 ± 0.000122	0.000237	-0.000327
σ	0".310	0".535	-

Анализ результатов астрометрии показывает достаточно хорошую точность определения координат из наблюдений в ГисАО, отличающихся от данных мирового мониторинга в пределах ошибок измерений, об этом свидетельствуют и элементы орбиты, вычисленные по найденным координатам.

Фотометрия изображений кометы C/2021 A2 и результаты

Для определения некоторых физических параметров кометы C/2021 A2 выполнена фотометрическая обработка кадров, полученных в ГисАО с 04 по 16 февраля 2021 г., по стандартной процедуре с помощью ПП АПЕКС-II [6].

Видимый блеск

Для определения видимого блеска кометы использовались звезды сравнения из каталога APASS, для которых блеск определен с точностью равной 0.03^m [9]. По опорным звездам были измерены видимые звездные величины кометы C/2021 A2 в фильтрах *BVRI*, средние значения которых даны в табл. 6. На рис. 3 приведены кривые блеска, где по оси ординат отложены средние видимые звездные величины m и по оси абсцисс – даты наблюдений в юлианских днях; ошибки измерения блеска приведены в виде вертикальных полос. Оценки видимых звездных величин получены по измерениям кометы и звезд сравнения апертурой радиусом 4", проекция которой на небесную сферу соответствует 1435.46 км. Как видно из табл.6 и рис.3, видимый блеск имеет тенденцию к уменьшению, что объясняется тем, что комета уже прошла перигелий орбиты и удалялась от Солнца.

Таблица 6

Средние (за ночь) видимые звездные величины кометы C/2021 A2 по наблюдениям в ГисАО в феврале 2021 г.

Дата, (UT) 2021	Фильтр			
	B	V	R	I
фев. 04.05379	15.83±0.07	15.05±0.05	14.58±0.02	14.17±0.02
фев. 11.05429	16.25±0.01	15.51±0.04	15.04±0.02	14.62±0.01
фев. 12.05671	16.45±0.06	15.70±0.03	15.25±0.02	14.79±0.05
фев. 15.03426	16.66±0.02	15.91±0.02	15.46±0.03	15.03±0.02
фев. 16.08107	16.75±0.01	16.01±0.02	15.55±0.02	15.14±0.01

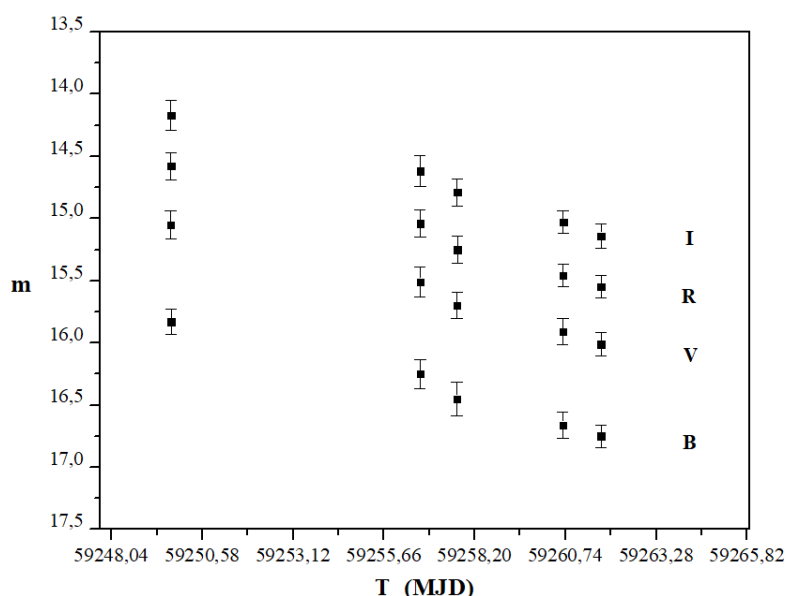


Рис. 3. Видимый блеск кометы C/2021 A2 в фильтрах BVRI (средние значения за ночь) по наблюдениям в ГисАО в феврале 2021 г.

Абсолютный блеск

Абсолютная звёздная величина – это физическая единица, характеризующая блеск астрономического объекта для наблюдателя, находящегося на некотором стандартном расстоянии от объекта. Использование абсолютной звёздной величины позволяет сравнивать действительную, а не наблюдаемую светимость объектов. Для разных типов объектов используются разные определения абсолютной величины, но, как правило, все они связаны с видимой звёздной величиной.

Видимый блеск m_a конвертировался в абсолютную яркость ядра кометы $m_a(1,1,0)$ с использованием известного эмпирического уравнения [10], принятого для комет

$$m_a(1,1,0) = m_a - 5 \log(r\Delta) - \beta\alpha, \tag{1}$$

здесь $m_a(1,1,0)$ – блеск гипотетической точки на единичном гелиоцентрическом и геоцентрическом расстояниях с фазовым углом $ph=0$ град., m_a – измеренный блеск, r и Δ – гелио- и геоцентрическое расстояния кометы в а.е., α – фазовый угол (ph) в град., β – фазовый коэффициент в зв.вел./град.; индекс a означает какой-либо фильтр. Для фазового коэффициента использовано общепринятое значение $\beta=0.035$ зв.вел./град. [11]. Найденный таким способом абсолютный блеск кометы в фильтрах BVRI (средние значения за пять ночей в зв.вел.) приведен в табл. 7, зависимость абсолютной яркости кометы, обозначенная на графике Н, от даты наблюдений (в юлианских днях) в ГисАО, а также ошибки измерений в виде перпендикулярных полос приведены на рис. 4. Как видно, в период мониторинга абсолютный блеск кометы практически был постоянным. Это объясняется тем, что в течение 5 ночей наблюдений геометрический аспект кометы, который используется для нахождения Н, изменялся незначительно. Наши измерения дали оценку абсолютного блеска кометы в фильтре V в диапазоне $14.86^m \pm 0.04$ - $14.89^m \pm 0.05$, в базе данных [3] приведена общая абсолютная яркость кометы в том же фильтре $15.0^m \pm 0.8$. Как видно, наши измерения очень близки к эфемеридной величине, что так же, как и динамические свойства, говорит об отсутствии у кометы нестационарных процессов в этот период.

Таблица 7

Абсолютные звездные величины кометы C/2021 A2 по наблюдениям в ГисАО

Дата (UT) 2021	Фильтр			
	B	V	R	I
фев. 04.05379	15.66±0.01	14.89±0.05	14.42±0.02	14.00±0.02
фев. 11.05429	15.60±0.01	14.86±0.04	14.40±0.02	13.99±0.01
фев. 12.05671	15.71±0.08	14.86±0.03	14.41±0.02	14.00±0.04
фев. 15.03426	15.62±0.01	14.87±0.02	14.41±0.02	13.99±0.02
фев. 16.08107	15.61±0.02	14.86±0.03	14.42±0.02	13.99±0.02

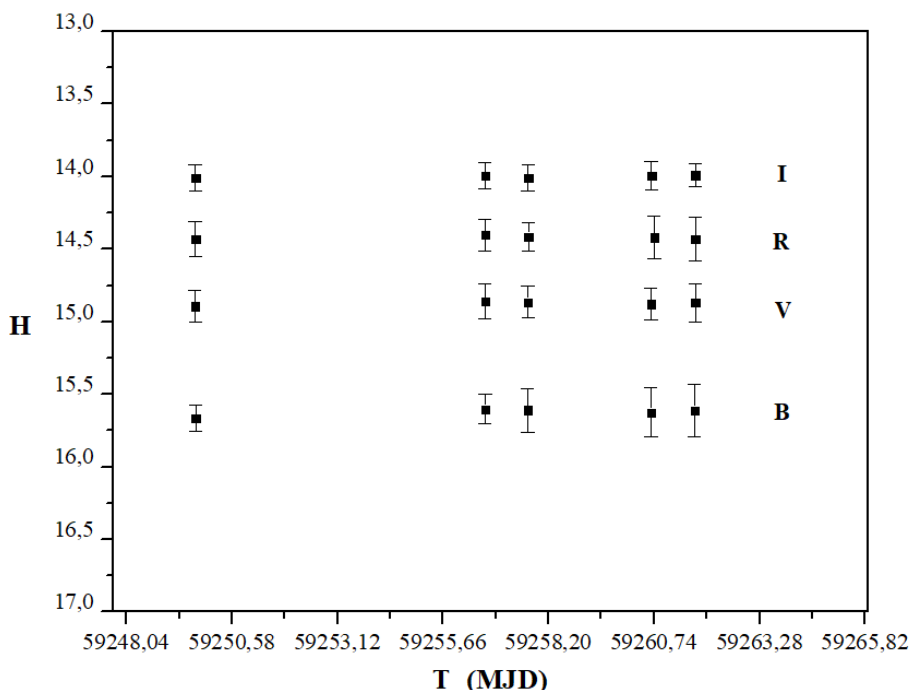


Рис. 4. Абсолютный блеск H (средние значения за ночь) кометы C/2021 A2 (NEOWISE) в фильтрах BVRI по наблюдениям в ГисАО.

Показатели цвета

Разность между значениями абсолютного блеска в разных фильтрах называется показателем цвета (колор-индекс), и эта величина, наряду с альбедо и характеристиками спектра отраженного солнечного света, является важным параметром, позволяющим определить таксономический тип объекта и, таким образом, его состав. Показатели цвета кометы по нашим наблюдениям приведены в табл.8, где для сравнения даны колор-индексы для комет различных популяций Солнечной системы – активных комет семейства Юпитера (АКСЮ), активных долгопериодических комет (АДПК), объектов пояса Койпера (ОПК) и для Солнца (С). Как видно, показатели цвета кометы по наблюдениям в ГисАО хорошо согласуются со средними показателями цвета для АКСЮ и АДПК. Это ожидаемый результат, подтверждающий предположение о том, что показатели цвета активных комет семейства Юпитера и долгопериодических комет имеют схожие величины, и, следовательно, состав их вещества не имеет значительных различий [12-14]. Между тем, колор-индексы C/2021 A2 отличаются от значений для ОПК, и этот факт обосновывает гипотезу о том, что происхождение долгопериодических комет не связано с поясом Койпера.

Таблица 8

Показатели цвета кометы C/2021 A2 в сравнении с данными для комет различных популяций и Солнца

Колор-индекс	C/2021 A2, данная работа, 2021 г. (UT)					АКСЮ		АДПК	ОПК	С
	04.02	11.02	12.02	15.02	16.02	[12]	[13]	[12]	[12]	[14]
B-V	0.78	0.74	0.85	0.75	0.74	0.74	0.75	0.78	0.93	0.64
V-R	0.47	0.46	0.45	0.46	0.44	0.46	0.47	0.47	0.57	0.35
R-I	0.42	0.41	0.42	0.43	0.44	0.44	0.43	0.42	-	0.33
B-R	1.25	1.20	1.22	1.21	1.22	1.10	1.22	1.23	1.52	0.99

Оценка пылепроизводительности

Мы оценили уровень кометной активности с помощью качественного параметра $Af\rho$, который теоретически не зависит от времени и места наблюдения, а также от апертуры измерения [15]. Параметр $Af\rho$ определяется из следующего выражения [16]

$$Af\rho = \frac{4r^2\Delta^2 \cdot 10^{0.4(m_\odot - m_a)}}{\rho}, \quad (2)$$

где A – альbedo, f – коэффициент заполнения апертуры поля зрения, ρ – проекция радиуса фотометрической апертуры на небесную сферу в см, m_\odot и m_a – видимые величины Солнца и кометы соответственно в определенном фильтре, r – гелиоцентрическое расстояние в а.е., Δ – геоцентрическое расстояние в см. Для наших наблюдений параметр $Af\rho$ рассчитывался по изображениям, полученным в полосе R , с радиусом проекции апертуры $\rho=1435.46$ км ($4''$); для абсолютного блеска Солнца в фильтре R использована величина $m_\odot=-27^m.15$ [17]. Значения параметра $Af\rho$ и ошибки измерений по наблюдениям с 04 по 16 февраля 2021 г. приведены в табл. 9. Как видно, наши значения параметра $Af\rho$ находятся в интервале 42-74 см. По данным [18], для параметра $Af\rho$ этой кометы в период с 19 февраля по 12 апреля 2021 г. получены чуть меньшие значения 14-50 см. Во всех случаях, найденные величины параметра $Af\rho$ указывают на повышенный уровень активности кометы.

Диаметр ядра

Размер ядра кометы оценен с использованием известного эмпирического соотношения между измеренным в фильтре V видимым блеском m_V и эффективным радиусом ядра кометы r_N в метрах [10]

$$A r_N^2 = 2.238 \cdot 10^{22} r^2 \Delta^2 10^{0.4(m_\odot - m_V(1,1,0))}, \quad (3)$$

когда абсолютный блеск в фильтре V $m_V(1,1,0)$ определен, радиус вычисляется по упрощенной модификации формулы (3)

$$A r_N^2 = 2.238 \cdot 10^{22} 10^{0.4(m_\odot - m_V(1,1,0))}, \quad (4)$$

где A – геометрическое альbedo и $m_\odot = -26.76$ видимая зв. вел. Солнца [17], причем обе величины в фильтре V . Установлено, что кометы являются исключительно темными объектами, поэтому для их геометрического альbedo (когда оно не измерено) обычно принимается значение $A=0.04$ [11, 19]. Для кометы C/2021 A2 альbedo не установлено, поэтому для него мы использовали значение 0.04. Результаты оценки диаметра ядра кометы приведены в табл. 9. Оценка размера ядра составляет $7.0-7.1 \pm 0.1$ км, причем измерения 5 ночей наблюдений дают близкие значения. В период наблюдений комета находилась в активной фазе, и скорее всего, нам не удалось избежать вклада комы в вычислениях диаметра. К тому же, к настоящему моменту в литературе не имеется данных по оценке размера кометы, и мы не смогли сопоставить наши данные с другими наблюдениями. Поэтому наши данные можно считать исключительно как верхняя оценка диаметра ядра кометы.

Таблица 9

Оценка диаметра ядра и пылепроизводительности кометы C/2021 A2 по наблюдениям в ГисАО

Дата	r , а.е.	Δ , а.е.	ph , град.	m_V , ЗВ.ВЕЛ.	$m_V(1,1,0)$, ЗВ.ВЕЛ.	$Af\rho$, см	D , км
фев. 04.0538	1.425	0.509	24.627	14.58±0.02	14.89±0.05	74±2	7.0±0.1
фев. 11.0543	1.442	0.574	29.967	15.04±0.02	14.86±0.04	56±4	7.1±0.1
фев. 12.0567	1.445	0.591	31.007	15.23±0.02	14.86±0.03	49±5	7.1±0.1
фев. 15.0342	1.455	0.645	33.900	15.46±0.03	14.87±0.02	44±4	7.0±0.1
фев. 16.0811	1.458	0.664	34.749	15.54±0.02	14.86±0.03	42±6	7.1±0.1

З а к л ю ч е н и е

Выполнены оптические многоцветные наблюдения долгопериодической кометы C/2021 A2 в ГисАО в течение 5 ночей в феврале 2021 г. В результате астрометрической и фотометрической обработки изображений определены:

- экваториальные координаты, геоцентрическая траектория и орбита кометы, которые согласуются с данными MPC;

- видимый и абсолютный блеск кометы в фильтрах *BVRI* и построены кривые блеска кометы в период наблюдений, абсолютный блеск в фильтре *V* составил $14.89^m \pm 0.05$, что весьма близко к эфемеридной величине 15.0^m ; кривые видимого блеска показывают тенденцию к его уменьшению, изменение абсолютного блеска имеет регулярный характер;

- показатели цвета соответствуют диапазону значений для активных комет семейства Юпитера и активных долгопериодических комет и подтверждают отсутствие значительных отличий в вещественном составе долгопериодических комет от состава короткопериодических комет;

- параметр пылепроизводительности по нашим наблюдениям составил 42-74 см и указывает на повышенную активность кометы;

- средний диаметр ядра составил 7.0 ± 0.1 км при альбедо 0.04, что можно считать только верхней оценкой размера ядра.

Полученные из наблюдений новые результаты о физических и динамических свойствах кометы C/2021 A2 подтверждают отсутствие нестационарных процессов во время мониторинга и существенно дополняют имеющиеся в различных базах данные. Эти результаты необходимы для решения современных проблем астрономии, связанных с изучением условий образования Солнечной системы, для определения источников происхождения и выявления связей между малыми телами Солнечной системы.

Поступило 02.02.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. <https://www.projectpluto.com/mpecs/2021.htm>, MPC 2021-A100, 2023.

2. <https://www.projectpluto.com/mpecs/2021.htm>, МЕРС 2021-B143, 2023.
3. https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html?sstr=C%2F2021%20A2, 2023.
4. ВАА Comet Section. - <https://people.ast.cam.ac.uk/~jds/coms21.htm>, 2023.
5. Девяткин А.В., Горшанов Д.Л., Куприянов В.В., Верещагина И.А. Программные пакеты «АПЕКС-I» и «АПЕКС-II» для обработки астрономических ПЗС-наблюдений. – *Астрономический вестник*, 2010, т. 44, № 1, с. 74-87.
6. https://www.minorplanetcenter.net/db_search/show_object?utf8=✓ &object_id=C%2F2021+A2, 2023.
7. Львов В.Н., Цекмейстер С.Д. Использование программного пакета ЭПОС для исследования объектов Солнечной системы. – *Астрономический вестник*, 2012, т. 46, № 2, с. 190-192.
8. Orbit determination from observations. URL: <https://www.projectpluto.com/fo.htm>. Дата обращения 5.01.2023.
9. Henden A.A., Templeton M., Terrell D., Smith T.C., Levine S., Welch D. VizieR Online Data Catalog. - AAVSO Photometric All Sky Survey (APASS) DR9, 2016.
10. Snodgrass C., Lowry S.C., Fitzsimmons A. Photometry of cometary nuclei: rotation rates, colours and a comparison with Kuiper Belt Objects. - *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2006, v. 373, pp. 1590-1602.
11. Lamy P.L., Toth I., Fernandez Y.R., Weaver H.A. The sizes, shapes, albedos, and colors of cometary nuclei. – In: *Comets II*, M.C.Festou, H.U.Keller, and H.A.Weaver (eds.), 2004, University of Arizona Press, Tucson, pp. 223-264.
12. Jewitt D. Color systematics of comets and related bodies. – *The Astron. J.*, 2015, v. 150:201, 18 p.
13. Solontoi M. et al. Ensemble properties of comets in the Sloan Digital Sky Survey. – *Icarus*, 2012, v.218, Issue 1, pp. 571-584.
14. Holmberg J., Flynn C., Portinari L. The colours of the Sun.-*MNRAS*, 2006, v. 367, pp. 449-453.
15. A'Hearn M.F., Schleicher D.G., Millis R.L., Feldman P.D., Thompson D.T., Comet Bowell 1980b. – *Astronomical Journal*, 1984, v. 89, pp. 579-591.
16. Kokhirova G.I., Ivanova O.V., Rakhmatullaeva F.D., Baransky A.V., Buriev A.M. Results of observations of dual-status object 2008 GO98 in 2017. – *Advances in Space Research*, 2021, v. 67, Issue 1, pp. 639-647.
17. Willmer N.A. The Absolute Magnitude of the Sun in Several Filters. – *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2018, v. 236, Issue 2, article id. 47, pp. 1-14.
18. Cazadores de cometas. – <http://www.astrosurf.com/cometas-obs>, 2023
19. Russel H.N. On the Albedo of the Planets and Their Satellites. – *Astrophysical Journal*, 1916, v. 43, pp. 173-196.

Г.И.Қохирова, А.М.Буриев, Д.Қ.Аюбов

НАТИЦАИ МОШОҲИДАҶОИ КОМЕТАИ С/2021 А2 (NEOWISE)

ДАР ТОҶИКИСТОН

Институти астрофизикаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Натиҷаи мушоҳидаҳои оптикии кометаи дароздаври С/2021 А2 (NEOWISE), ки бо телескопи АЗТ-8-и Расадхонаи астрономии Ҳисор (РАҲ) Институти астрофизикаи АМИТ дар соли 2021 анҷом дода шудааст, муаррифӣ шудааст. Координатаҳо муайян карда, мадори комета ҳисоб карда шуд. Равшанокии зоҳири ва мутлақи комета дар филтрҳои BVRI муайян карда шуда, ҳатти қачи дурахшонии

комета дар асоси мушоҳидаҳои панҷ шабонарӯз сохта ва нишондоди ранги (колор-индекс) комета ҳисоб карда шуд. Қимати чангҳосилкунӣ комета ҳисоб карда шуд. Диаметри ядрои комета ба $\approx 7.0 \pm 0.1$ км баробар аст. Таҳлили муқоисавии маълумоти нав бо маълумотҳои нашргардида гузаронида шуда, нишон дод, ки дар давраи мушоҳидаҳо ҳодисаҳои ғайрестатсионарӣ вучуд надорад.

Калимаҳои калидӣ: *комета, мушоҳидаҳо, астрометрия, фотометрия, координатаҳо, дақиқӣ, мадор, хатти қачи дурахшонӣ, нишондоди ранг, чангҳосилкунӣ, диаметр.*

G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, D.K.Ayubov

RESULTS OF COMET C/2021 A2 (NEOWISE) OBSERVATION IN TAJIKISTAN

Institute of Astrophysics of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The results of optical observations of long-period comet C/2021 A2 (NEOWISE) carried out of the AZT-8 telescope of the Hissar Astronomical Observatory of the Institute of Astrophysics of the NAST in 2021 are presented. The coordinates are determined and the orbit of comet is calculated. The apparent and absolute brightness of comet was found in the BVRI filters, the light curves were plotted based on the observations of five nights, and the color indices were estimated. The dust production parameter of comet has been calculated; the estimate of the comet's nucleus diameter is 7.0 ± 0.1 km. A comparative analysis of the new data with published information was carried out and the absence of non-stationary phenomena during the observation period was shown.

Key words: *comet, observations, astrometry, photometry, coordinates, accuracy, orbit, brightness, color index, dust production, diameter.*

Сведения об авторах:

Кохирова Гулчехра Исроиловна – доктор физ.-мат. наук, директор Института астрофизики НАНТ;

Буриев А.М. – кандидат физ.-мат. наук.

УДК 541.64:539.2

Специальность: 1.4.7 – Высокомолекулярные соединения

Х.М.Абдуллаев, Э.Д.Шаимов, Р.Т.Кадыров, У.М.Шаимов

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОВЕДЕНИЕ СТРУКТУРЫ ТРЕХКОМПОНЕНТНОГО СОПОЛИЭФИРА*Таджикский национальный университет**(Представлено академиком НАНТ Д.Х.Халиковым 09.01.2023 г.)*

В температурном интервале 23-300°C методами ДСК и дифракции рентгеновских лучей под большими углами проведены исследования температурного поведения структуры волокон трехкомпонентных сополиэфиров на основе полимерного компонента – полиэтилентерефталата, терефталевой кислоты и гидрохинона различного состава в режиме нагревание-охлаждение-нагревание. В тепловых циклах нагревания и охлаждения в сополиэфирах развиваются процессы кристаллизации, плавления и рекристаллизации. На дифрактограммах сополиэфиров большего содержания полимерного компонента ($\geq 85\%$) присутствуют рефлексы слабой интенсивности, соответствующие триклинной решетке кристаллитов полиэтилентерефталата. Волокно малого содержания ПЭТФ (60%) практически аморфно; для него характерно формирование кристаллической фазы при более высокой температуре (130°C), чем для волокон большого содержания ПЭТФ и более низкая температура плавления кристаллитов (260°C). Определены величины температурного коэффициента линейного расширения кристаллических решеток в разных кристаллографических направлениях. Показано, что несмотря на широкое варьирование состава сополиэфиров коэффициенты термического расширения кристаллических решеток практически не изменяются. Увеличение относительной доли фрагментов терефталевой кислоты и гидрохинона в полимерную цепь влияет больше всего на фазовое состояние и кристаллизруемость сополиэфиров. Эти фрагменты не входят в кристаллическую решетку основной полимерной матрицы и, вероятно, располагаются в аморфных межкристаллитных областях.

Ключевые слова: *трехкомпонентный сополиэфир, температурное поведение, структура, кристаллическая фаза, плавление, термическое расширение.*

Термотропные химически нерегулярные жидкокристаллические (ЖК) сополиэфиры (СПЭФ) являются чрезвычайно перспективными полимерами, благодаря уникальной легкости переработки, теплостойкости, химической стабильности и высоким механическим показателям. Одним из первых ЖК полимеров является сополиэфир на основе полиэтилентерефталата (ПЭТФ) и гидроксibenзойной кислоты, структура и реологические свойства которого были изучены в работах [1, 2]. Исследования, посвященные полиэфирным сополимерам, известны также из работ [3-5].

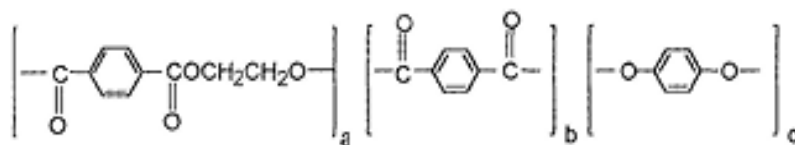
Адрес для корреспонденции: *Абдуллаев Хасан Муминджонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: KhAbdullaev@bk.ru.*

Температурная эволюция структуры сополиэфиров на основе ПЭТФ и *n*-оксисбензойной кислоты (разной удельной вязкости); ПЭТФ, оксисбензойной, терефталевой кислот и гидрохинона, образующих ЖК-фазу, была изучена нами в работах [6-11]. Было установлено, что для таких систем в зависимости от состава и соотношения компонентов существенным образом изменяются характер структурных, релаксационных и фазовых преобразований полимера при циклических тепловых испытаниях.

В настоящее время синтезирован другой класс сополиэфиров на основе ПЭТФ, терефталевой кислоты и гидрохинона. Эти СПЭФ в структурно-морфологическом плане являются малоизученными объектами и в отличие от вышеназванных систем, даже при широком варьировании соотношения компонентов, не переходят в ЖК-состояние. Можно полагать, что включение в полимерную цепь мономерных звеньев терефталевой кислоты и гидрохинона должно дать начало изменениям в структуре, тепловом поведении и фазовом составе СПЭФ.

Объекты и методы исследования

Исследованы сополиэфиры на основе ПЭТФ, терефталевой кислоты и гидрохинона следующего химического строения:



и следующего состава:

Образец	a, %	b, %	c, %
1	95	2.5	2.5
2	90	5.0	5.0
3	85	7.5	7.5
4	60	20	20

Образцы были синтезированы в лаборатории Б.Х. Стрельца (объединение Химволокно г. Санкт-Петербург). Формование волокон проводили на капиллярном микровискозиметре МВ-2м при температуре 290°C с последующей вытяжкой экструдата на приемной галете. Кратность вытяжки равнялась 40.

Рентгеноструктурный анализ

Рентгеновские измерения проводили на большеугловой установке ДРОН-3 с щелевой коллимацией первичного пучка в режиме на просвет с использованием CuK_α излучения, фильтрованного никелем. Опыты проводились в циклах нагревание-охлаждение-нагревание в интервале температур 23-300°C, для чего использовалась специальная термокамера, позволяющая нагревать образец с постоянной скоростью и поддерживать необходимую температуру при снятии дифрактограмм.

Дифференциальная сканирующая калориметрия

Термические характеристики волокон определяли на калориметре DSC-7 «Perkin-Elmer» в интервале температур 23-320°C со скоростью нагревания и охлаждения 20 град/мин. Использовали навески ~10-15 мг, помещенные в герметично запечатанные стандартные кюветы. Измерения проводились на ориентированных волокнах в свободном состоянии. В случаях, когда требовалось устано-

вить зависимость температур переходов от скорости нагревания (охлаждения), последнюю варьировали от 2.5 до 20 град/мин.

ДСК-кривые и рентгенограммы СПЭФ 1-3 принципиально не различались при циклических тепловых испытаниях, поэтому при обсуждении экспериментальных данных основное внимание будет уделено образцам 1 и 4.

Результаты и их обсуждение

На рис. 1 представлены ДСК-термограммы волокон сополиэфиров 1 и 4 в циклах нагревание-охлаждение в интервале температур 23-320°C. На термо-граммах первого цикла нагревания всех сополиэфиров в области температур 75-95°C наблюдается ступенчатое изменение теплоемкости, связанное с интервалом стеклования образцов, среднюю точку которой приняли за температуру стеклования (T_g) полимера. Она для СПЭФ разного состава и разных предысторий лежит в интервале 81-86°C (табл. 1).

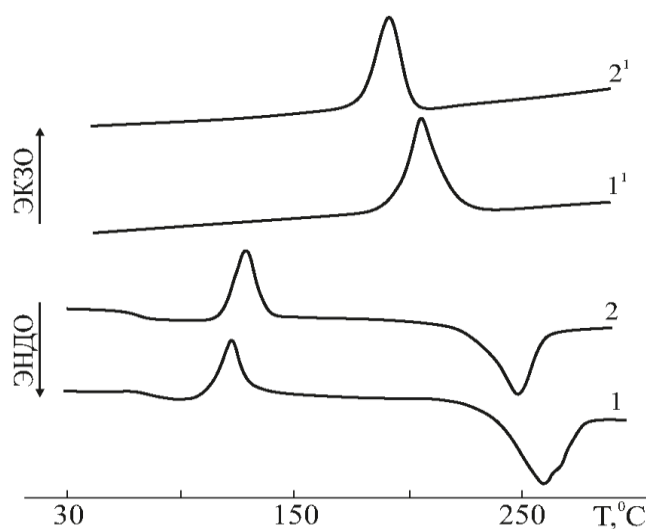


Рис. 1. ДСК-термограммы нагревания (1, 2) и охлаждения (1', 2') волокон сополиэфиров 1 (1, 1') и 4 (2, 2').

Термограммы СПЭФ-1 в цикле нагревания содержат по одному экзо- и эндомаксимуму, которые расположены в относительно широких температурных интервалах 110-140 и 210-270°C и локализованы при ~123 и 258°C. С уменьшением относительной доли полимерного компонента (СПЭФ-4) температура экзомаксимума возрастает до 130°C, а эндомаксимума, наоборот, уменьшается до 246°C.

В цикле охлаждения на термограммах волокон наблюдаются два отчетливых экзомаксимума при 205 и 190°C, для сополиэфиров 1 и 4, соответственно (рис. 1). Вторичное нагревание того же образца дает практически аналогичную первому нагреванию картину, с той лишь разницей, что теплоты эндопроцессов несколько возрастают (~7-9 Дж/г). Величины энтальпий, указанных тепловых процессов, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Значения температур фазовых переходов и соответствующих тепловых характеристик СПЭФ 1-4.

СПЭФ	Нагревание, I-й цикл					Охлаждение	
	$T_g, ^\circ\text{C}$	$T_{кр}, ^\circ\text{C}$	$T_{пл}, ^\circ\text{C}$	$\delta H_{кр}, \text{Дж/г}$	$\delta H_{пл}, \text{Дж/г}$	$T_{кр}, ^\circ\text{C}$	$\delta H_{кр}, \text{Дж/г}$
1	81	123	258	28	41.0	205	48.0
2	81	124	256	34	50.7	204	52.0
3	83	124	253	35	49.7	200	45.4
4	85	130	246	33	43.4	190	41.0
СПЭФ	Нагревание, II-й цикл						
1	83	123	258	28	50.0		
2	83	123	258	35	52.0		
3	85	127	253	35	52.0		
4	86	136	248	33	51.0		

Таким образом, анализ полученных термограмм сополиэфиров 1-4 показывает идентичность происходящих в образцах термических событий в циклах нагревание-охлаждение-нагревание, которые, можно полагать, соответствуют процессам кристаллизации, плавления и рекристаллизации. Смещение же положения экзо- и эндотермических пиков, вариация теплот процессов в зависимости от термомеханической предыстории образцов, по всей видимости, свидетельствуют о разнице в степени совершенства их структуры.

Для идентификации термограмм и получения сведений о характере структурных превращений в изучаемых сополимерах были проведены рентгенографические исследования на больших и малых углах рассеяния.

На дифрактограмме исходного волокна СПЭФ-1 (рис. 2, кривая 1) на фоне широкого диффузного гало в области углов дифракции $2\theta=10-35^\circ$ наблюдаются слабые по интенсивности кристаллические рефлексы (010) и (100), характерные триклинной решетке кристаллов ПЭТФ [12].

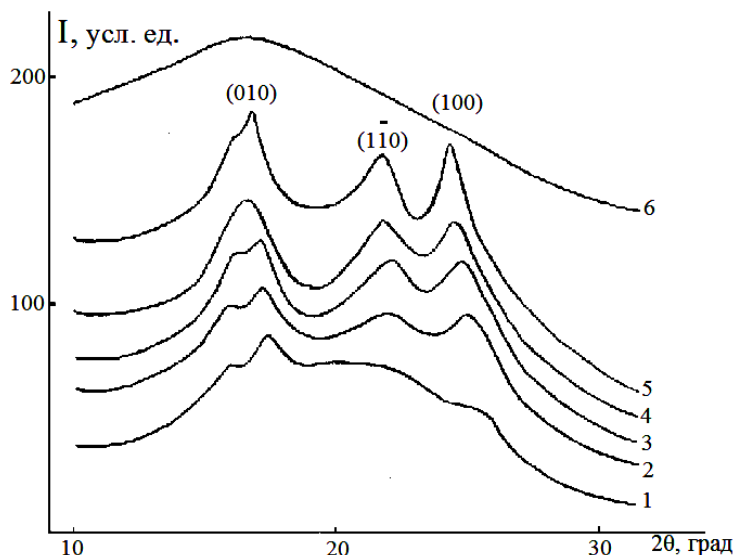


Рис. 2. Дифрактограммы волокон сополиэфира 1 при температурах: 1 – 30, 2 – 100, 3 – 130, 4 – 190, 5 – 250, 6 – 280°C.

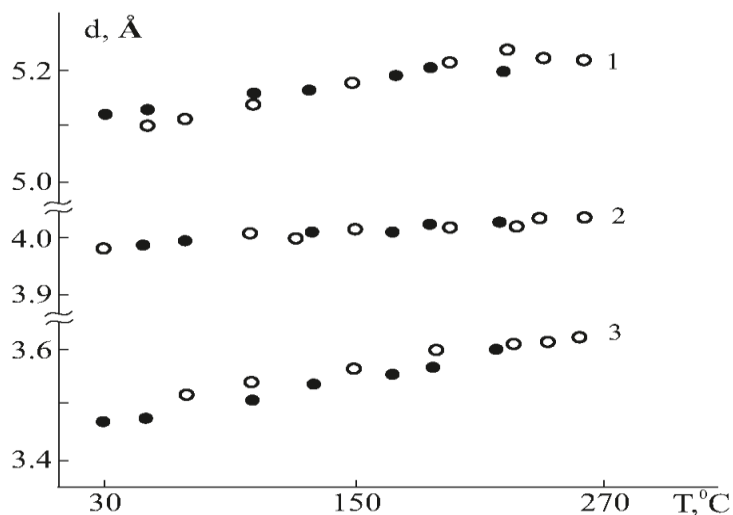


Рис. 3. Температурная зависимость межплоскостных расстояний кристаллических рефлексов (010) – 1, (1-10) – 2, (100) – 3. (o) – нагревание, (•) – охлаждение.

С ростом температуры в интервале 20-260°C наблюдается постепенное повышение интенсивности рефлексов с одновременным увеличением их числа (рис. 2, кривые 2-5). При этом угловые положения рефлексов смещаются в сторону малых углов рассеяния 2θ , их радиальные полуширины уменьшаются, а межцепные расстояния кристаллических участков линейно возрастают (рис. 3). В цикле охлаждения наблюдается практически такое же линейное уменьшение межплоскостных расстояний.

На рис. 4 приведены температурные зависимости степени кристалличности СПЭФ-1 в циклах нагревания и охлаждения. Из рисунка видно, что в цикле нагревания C_k образца линейно возрастает от 12 до 40% при повышении температуры от 30 до 260°C. При этом размеры кристаллитов увеличиваются от 48 до 58 Å и от 55 до 76 Å для рефлексов (010) и (100), соответственно (рис. 5, кривые 1 и 2). При дальнейшем нагревании ($T > 260^\circ\text{C}$) интенсивность кристаллических рефлексов и степень кристалличности образцов незначительно снижаются, а при 280°C кристаллические рефлексы на дифрактограмме сополиэфира 1 исчезают, то есть полимер плавится.

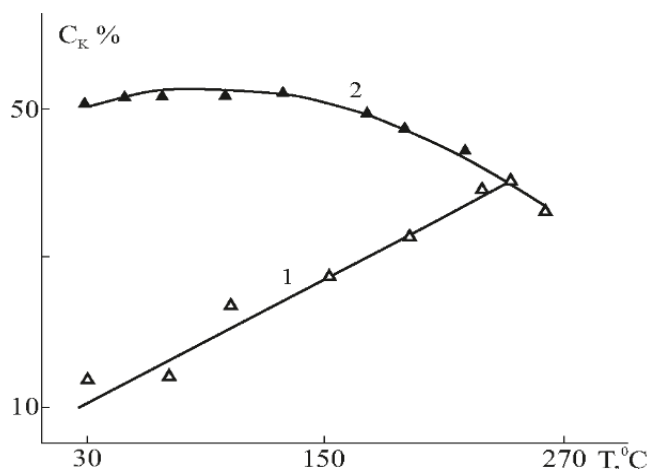


Рис. 4. Зависимость степени кристалличности СПЭФ-1 от температуры в циклах нагревания (1) и охлаждения (2).

Интересно отметить, что в цикле охлаждения СПЭФ-1 размеры кристаллитов рефлекса (010) с понижением температуры возрастают практически линейно от 60 до 75 Å, тогда как размеры кристаллитов рефлекса (100) уменьшаются от 75 до 70 Å (рис. 5, кривые 1', 2').

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что в тепловых циклах нагревания и охлаждения сополиэфиров 1-3 развиваются процессы кристаллизации ($T=20-260^{\circ}\text{C}$), плавления (280°C) и рекристаллизации ($T=270-20^{\circ}\text{C}$). Вторичный цикл нагрева волокон СПЭФ 1-3 практически повторяет цикл охлаждения, поэтому он не представлен.

На рис. 5 приведена температурная эволюция большеугловых дифрактограмм СПЭФ-4. Сравнивая дифрактограммы сополиэфиров 1 и 4 (рис. 2 и 5) можно отметить их идентичность, с той лишь разницей, что в СПЭФ-4 присутствует слабый рефлекс с угловым положением $2\theta=19^{\circ}35'$, которого в СПЭФ-1 нет. Для этого рефлекса по сравнению с другими рефлексами данного СПЭФ характерна существенно более слабая зависимость углового положения и интенсивности от температуры.

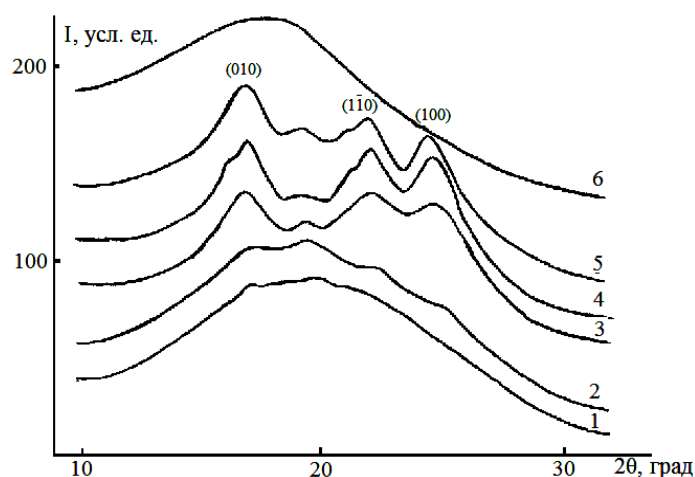


Рис. 5. Дифрактограммы СПЭФ-4 при температурах: 1 – 30, 2 – 100, 3 – 130, 4 – 190, 5 – 250, 6 – 270°C.

Исходное свежесформованное волокно СПЭФ-4 имеет аморфную структуру (рис. 5, кривая 1). Последующее повышение температуры до 240°C приводит к возрастанию интенсивности рефлексов, что свидетельствует о совершенствовании структуры волокон. Формирование кристаллических рефлексов и возрастание их интенсивности наблюдается в температурной области $130-240^{\circ}\text{C}$ (рис. 5, кривые 3-5). В этой температурной области возрастает как степень кристалличности (рис. 6), так и размеры кристаллитов сополиэфира.

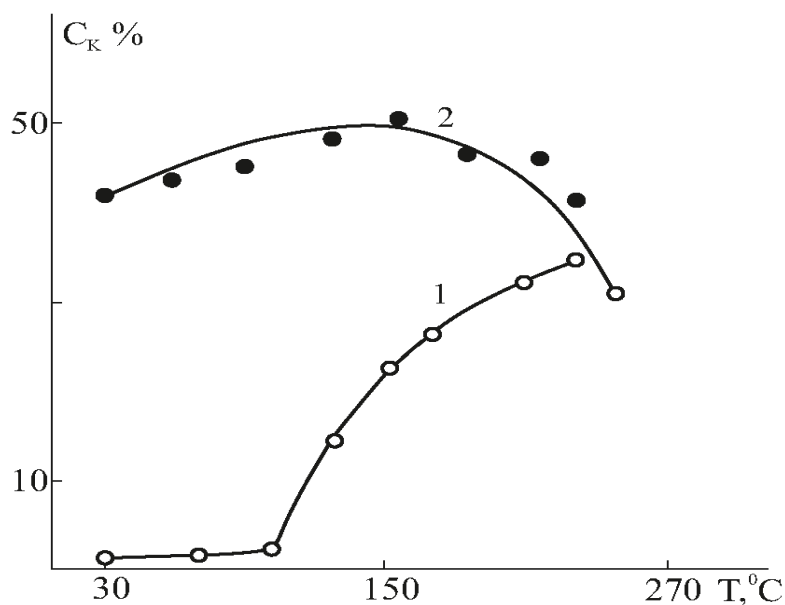


Рис. 6. Температурная зависимость степени кристалличности СПЭФ-4. 1 – нагревание, 2 – охлаждение.

При 250°C параметры упорядоченности структуры СПЭФ-4 несколько снижаются и при 270°C на большеугловой рентгенограмме наблюдается жидкостное рассеяние в виде аморфного гало (рис. 5, кривая б), что соответствует плавлению образца.

В цикле охлаждения так же, как и при вторичном нагревании, в поведении структурных параметров СПЭФ-4 наблюдается аналогичная наблюдаемому для СПЭФ 1-3 картина – возрастание параметров упорядоченности структуры в процессе рекристаллизации ($260-20^\circ\text{C}$) и повторение ветви охлаждения при втором цикле нагрева.

Для сополиэфиров 1 и 4 с ростом температуры и при охлаждении наблюдаются одинаковые и обратимые изменения периодов идентичности структуры d_{hkl} (рис. 3 и 7). Из температурной зависимости углового положения максимумов кристаллических рефлексов были определены величины температурного коэффициента линейного расширения кристаллических решеток β_{hkl} в разных кристаллографических направлениях. Эти данные приведены в табл. 2. Из таблицы видно, что несмотря на широкое варьирование состава изученных сополиэфиров коэффициенты термического расширения кристаллических решеток изменяются слабо.

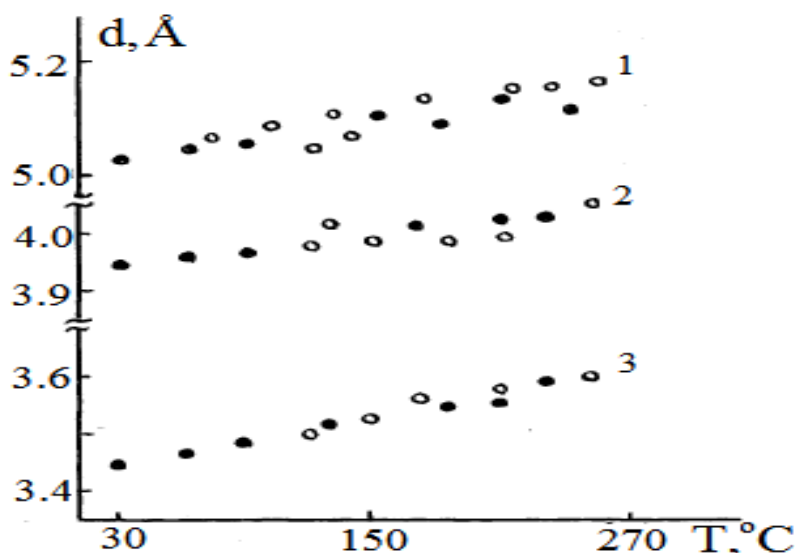


Рис. 7. Зависимость межплоскостного расстояния от температуры для рефлексов: (010) – 1, (110) – 2, (100) – 3. (o) – нагревание, (•) – охлаждение.

Таблица 2

Значения температурных коэффициентов линейного расширения кристаллической решетки сополиэфиров 1 и 4.

Сополиэфир	$\beta_{100} \cdot 10^4, K^{-1}$	$\beta_{010} \cdot 10^4, K^{-1}$	$\beta_{110} \cdot 10^4, K^{-1}$
1	1.81	1.15	1.24
4	1.85	1.31	1.37

Таким образом, из сравнения и анализа полученных из большеугловых дифрактограмм результатов следует, что, во-первых, увеличение относительной доли фрагментов терефталевой кислоты и гидрохинона в полимерную цепь влияет больше всего на фазовое состояние и кристаллизруемость СПЭФ; во-вторых, они не входят в кристаллическую решетку основной полимерной матрицы и, вероятно, располагаются в аморфных межкристаллитных областях; в-третьих, в пределах исследованных концентраций фрагментов исходная плоская конформация цепи не изменяется [13].

Поступило 16.01.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Wissbrun K.F. Observation on the melt rheology of thermotropic aromatic polyesters. – Brit. Polym. J., 1980, v.2, №4, pp. 163-169.
2. Jackson W.J., Kuhfuss H.F. Liquid crystal polymers. 1. Preparation and properties of p-hydroxybenzoate acid copolyesters. – J. Polym. Sci. Polym. Chem. Ed., 1976, v.14, №8, pp. 2043-2058.
3. Куличихин В.Г., Полушкин Е.Ю., Парсамян И.Л. и др. Фазовая гетерогенность расплавов ЖК СПЭФ и ее влияние на реологию, а также механические свойства экструдатов. – Высокомолек. соед., 1990, т. А32, №6, с. 1164-1170.
4. Платэ Н.А., Куличихин В.Г., Антипов Е.М. Эволюция структуры жидкокристаллических полимеров. – Высокомолек. соед., 1993, т. А35, №11, с. 1743-1754.

5. Антипов Е.М., Штамм М., Абетц Ф., Фишер Э. Структура и температурное поведение термотропного трехкомпонентного ЖК-сополиэфира. – Высокомолек. соед., 1994, т. А36, №11, с. 1817-1837.
6. Абдуллаев Х.М., Туйчиев Ш.Т., Шерматов Д.С. Фазовые превращения в сополиэфирах на основе полиэтилентерефталата и оксibenзойной кислоты. – Высокомолек. соед., 1997, т. А39, №5, с. 842-847.
7. Абдуллаев Х.М., Куличихин В.Г. Особенности фазовых переходов в сополиэфирах на основе полиэтилентерефталата и оксibenзойной кислоты. – Тез. докл. межд. конф. «Фундаментальные проблемы науки о полимерах» (К 90-летию акад. Каргина В.А.). – М.: РАН, МГУ, 1997, с. 2-1.
8. Abdullaev Kh.M., Kulichikhin V.G., Antipov E.M., a.o. Temperature evolution of structure and rheological properties of liquid crystal copolyesters: Coll. abstr. 19 Symp. on rheology. – Klaipeda, 1998, p. 9.
9. Абдуллаев Х.М., Куличихин В.Г., Туйчиев Ш.Т. Особенности температурной эволюции структуры, реологических и механических свойств ЖК-сополиэфира. – Высокомолек. соед., 1999, т. А 41, №11, с. 1799-1810.
10. Абдуллаев Х.М., Шаимов Э.Д., Табаров Ф.С., Юлдашев И. Особенности кривых течения жидкокристаллических сополиэфиров и структурно-механические параметры экструдатов, полученных в разных фазовых состояниях расплава. – ДАН РТ, 2014, т. 57, № 4, с. 309-314.
11. Абдуллаев Х.М. Влияние температуры на структуру ориентированных волокон многокомпонентного жидкокристаллического сополиэфира. – ДАН РТ, 2018, т. 61, №5, с. 453-457.
12. Словохотов Ю.Л. Материалы по курсу кристаллохимии. Ч. 2. Кристаллические решетки и пространственные группы. – Баку: Химия, 2012, 32 с.
13. Джейл Ф. Х. Полимерные монокристаллы. – Л.: Химия, 1968, 551 с.

Х.М.Абдуллоев, Э.Ч.Шоимов, Р.Т.Қодиров, У.М.Шоимов

РАФТОРИ ҲАРОРАТИИ СОҲТОРИ СОПОЛИЭФИРИ СЕКОМПОНЕНТА

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар соҳаи ҳароратҳои 23-300°C бо усулҳои калориметрия ва дифраксияи нурҳои рентгенӣ дар таҳти кунҷҳои калон рафтори ҳароратии соҳтори сополи-эфирҳои секомпонентаи полимерӣ – полиэтилентерефталат, туршии терефталӣ ва гидрохинон дар речаи гармкунӣ-хунуккунӣ-гармкунӣ таҳқиқ шудаанд. Дар сиклҳои гармкунӣ ва хунуккунӣ дар сополи-эфирҳо равандҳои кристаллшавӣ, гудозиш ва рекристаллшавӣ рӯй медиҳанд. Дар дифрактограммаҳои сополиэфирҳои компонентаи полимерии зиёддошта ($\geq 85\%$) рефлексҳои интенсивияташон суст мавҷуданд, ки онҳо ба панҷараи триклинӣ кристаллҳои полиэтилентерефталат мансуб мебошанд. Наҳи ПЭТФ-аш кам (60%) амалан аморфӣ аст; дар ин наҳҳо ташаккулёбии фазаи кристаллӣ дар ҳарорати баландтар (130°C) нисбат ба наҳҳои ПЭТФ-ашон калон рӯй медиҳад ва ба онҳо ҳарорати нисбатан пасти гудозиши кристаллитҳо (260°C) хос аст. Бузургҳои зареби васеъшавии ҳароратии панҷараҳои кристаллӣ дар самтҳои гуногуни кристаллографӣ муайян карда шудаанд. Нишон дода шудааст, ки ба тағйирёбии васеи таркиби сополиэфирҳо нигоҳ накарда, зареби васеъшавии ҳароратии панҷараҳои кристаллӣ амалан тағйир намеёбад. Афзоиши ҳиссаҳои нисбии туршии терефталӣ ва гидрохинон дар занҷири полимерӣ бештар ба ҳолати фазавӣ ва кристаллшавии сополиэфирҳо таъсир

мерасонад. Ин ҳиссаҳо ба панҷараи кристаллии матритсаи асосии полимерӣ ворид нагардида, эҳтимол дар соҳаҳои аморфии байникристаллӣ ҷойгир шаванд.

Калимаҳои калидӣ: сополиэфирӣ секомпонента, рафтори ҳароратӣ, сохтор, фазаи кристаллӣ, гу-дозиш, васеъшавии ҳароратӣ.

Kh.M.Abdullaev, E.D.Shaimov, R.T.Kadirov, U.M.Shaimov

TEMPERATURE BEHAVIOUR OF THE STRUCTURE THREE-COMPONENT COPOLYESTER

Tajik National University

In the temperature interval 23-300°C by methods of DSC and X-ray diffraction at large angles the temperature behavior of fiber structure of three-component copolyesters on the basis of polymer component - polyethylene terephthalate, terephthalic acid and hydroquinone of different composition in heating-cooling-heating regime was studied. In thermal cycles of heating and cooling the processes of crystallization, melting and recrystallization are developed in copolyesters. The diffractograms of copolyesters with higher contents of polymer component ($\geq 85\%$) show reflexes of weak intensity which correspond to triclinic lattice of polyethylene terephthalate crystallites. Fibres with low PET content (60%) are practically amorphous; the formation of crystalline phase at higher temperature (130°C) than fibres with high PET content and lower melting temperature of crystallites (260°C) are characteristic for them. The values of temperature coefficient of linear expansion of crystal lattice in different crystallographic directions have been determined. It is shown that regardless of wide variation of copolyesters composition coefficients of thermal expansion of crystal lattices practically does not change. Increase of relative content of terephthalic acid and hydroquinone fragments in polymer chain affects most of all on phase state and crystallizability of copolyesters. These fragments are not included into crystal lattice of the basic polymer matrix and, probably, are located in amorphous intercrystalline regions.

Key words: three component copolyester, temperature behavior, structure, crystalline phase, melting, thermal expansion.

Сведения об авторах:

Абдуллаев Хасан Муминджонович – Таджикский национальный университет, профессор кафедры физики твердого тела ТНУ, доктор физико-математических наук. E-mail: KhAbdullaev@bk.ru.

Шаимов Эркин Джаборович – Таджикский национальный университет, доцент кафедры физики твердого тела ТНУ, кандидат физико-математических наук.

Кадыров Рустам Туранович – Таджикский национальный университет, заведующий кафедрой физики твердого тела ТНУ, кандидат физико-математических наук.

Шаимов Убайдулло Мирзоевич – Таджикский национальный университет, доцент кафедры астрономии ТНУ, кандидат физико-математических наук.

УДК 621.039:661.879.1

Специальность: 1.4.1 – Неорганическая химия

К.О.Бобоев, М.Д.Бобоёров, Б.Б.Баротов, И.Мирсаидзода

ОСОБЕННОСТИ АНАЛИЗА УРАНА В УРАНСОДЕРЖАЩИХ РУДАХ И ОТХОДАХ*Агентство по химической, биологической, ядерной и радиационной безопасности**НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 04.04.2022 г.)*

В статье приведены разработанные способы химического анализа качественными и количественными методами определения содержания урана в рудах, отходах, технических и дренажных водах. Показана эффективность применения титриметрического метода анализа по сравнению с другими методами.

Ключевые слова: уран, анализ, урансодержащие руды, отходы, спектрометрия, титриметрический метод.

Известно, что химический анализ – это совокупности действий, который имеет условно точечные информации о химические составы объекта.

Урансодержащие руды считаются перспективными для переработки, если в рудах содержание урана 0.1% и выше. В табл. 1 приведены химический и минералогический составы урансодержащих руд Таджикистана.

Как видно из табл. 1-3 уран находится в различных видах. Урансодержащие минералы, в составе которых $^{238}_{92}\text{U}$, являются родоначальниками радиоактивного семейства [1]. Известно, что урановый ряд можно разделить на две группы: группа урана (от урана до радия) и группа радия $^{238}_{92}\text{Ra}$ (от радия до радона). Урановые руды Таджикистана относятся к урановой группе.

При разработке методики определения урана в породах и отходах необходимо учитывать выше названные группы.

В литературе имеется множество методов определения урана [2]. Имеется ряд методов качественного и количественного определения урана.

Среди качественных методов определения урана – люминесцентный метод. Метод основан на способности ионов уранила UO_2^{2+} давать жёлто-зелёную флюоресценцию под действием ультрафиолетового излучения. Это самый чувствительный метод, который нами использован при малых количествах урана в отходах.

Адрес для корреспонденции: Баротов Бахтиёр Бурхонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по ХБРЯ безопасности НАНТ. E-mail: info@nrta.tj

Таблица 1

Химический и минералогический состав ураносодержащих руд Таджикистана

Месторождения	Минералогический состав	Химический состав, %	
Северный Таджикистан-1	титанаты урана, силикат урана, настуран, уранинит, пирит, галенит, антимонит, кальцит	U – 0.241 Th – 0.02 Cr – 0.027 Co – 0.033 SiO ₂ – 54.85 Cu – 0.035	TiO ₂ – 1.76 MnO – 1.27 Fe ₂ O ₃ – 19.04 Zn – 0.1 Pb – 0.013 V – 0.07
Центральный Таджикистан	кальциевый титаносиликат урана, коффинит, уранофан, пирит, кварц, кальцит, альбит, магнетит, гематит	U – 0.027 Ca – 5.4 Mg – 0.25 P ₂ O ₅ – 0,12 K ₂ O – 2.89	TiO ₂ – 0.48 MnO – 0.11 Fe ₂ O ₃ – 4.52 Al ₂ O ₃ – 13.55 SiO ₂ – 61.85
Западный Таджикистан	кварц, альбит, мусковит, пирит, уранинит, урановая слюда	U – 0.11 Cr – 0.011 Pb – 0.10 V – 0.05 SiO ₂ – 69.4	TiO ₂ – 0.53 MnO ₂ – 0.08 Fe ₂ O ₃ – 8.13 Al ₂ O ₃ – 13.7 Na ₂ O – 2.40
Северный Таджикистан-2	урановая слюда, уранинит, коффинит, пирит, каолинит, сфен, кварц, альбит	U – 0.033 Cr – 0.064 Pb – 0.283 V – 0.021 SiO ₂ – 81 Zn – 0.404	TiO ₂ – 0.3 MnO ₂ – 0.088 Fe ₂ O ₃ – 3.27 Al ₂ O ₃ – 12.4 Na ₂ O – 2.40 Cu – 0.064

Таблица 2

Содержанию урана в отходах уранового производство

Хвостохранилища	Количество урана, %
Табошарское	0.015-0.030
Дигмайское	0.01-0.03
Адрасманское	0.024
Карта 1-9	0.018
Гафуровское	0.008-0.518

Таблица 3

Содержанию урана в дренажных и шахтных водах

Дренажные и шахтные воды	Количество урана, мг/л
Шахтные воды Киик-Тал	14-16
Дренажные воды г. Истиклол (Табошары)	30-36
Шахтные воды г. Истиклол (Табошары)	1.7-2.0
Озеро Сасыккуль	17-20

В некоторых пробах были использованы неорганические реагенты, такие как роданид калия, роданид аммония, которые дают с ураном жёлтое окрашивание вследствие образования водорастворимых комплексов.

Для качественного определения урана была использованы перекись водорода в среде Na₂CO₃.

Весьма чувствительным методом является использование фероцианида калия по красно-бурой окраске образующегося осадка [3].

Для качественного определения урана были использованы также органические реагенты.

Для количественного определения урана использовались весовой, титриметрический, фотометрический, электрохимический методы. Весовые методы использовали для осаждения урана из раствора с помощью NH_4OH . Осаждения производятся в присутствии NH_4NO_3 или NH_4Cl .



Весовой метод использовали с применением перекиси водорода. UO_2^{2+} осаждает пероксидом водорода при $\text{pH} = 0.5 - 3.5$.

Для определения урана использовался титриметрический метод. Наибольшее распространение получил метод восстановления UO^{2+} до U^{4+} цинком, висмутом, свинцом, кадмием, их амальгамами серебром, титаном, а также электрический и фотохимический. После восстановления проводят титрование растворами окислителей, в качестве которых используют KMnO_4 (перманганат калия), $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ (дихромат калия), $\text{Ce}(\text{SO}_4)_2$ (сульфат церия), ванадаты натрия, калия или аммония, йодометрическое титрование др.

При выполнении работы для некоторых образцов использовали фотометрические методы.

К фотометрическим методам относятся колориметрические и спектрофотометрические методы определения урана в видимой и ультрафиолетовой областях, а также люминесцентный метод.

Колориметрические и спектрометрические методы очень многочисленны и применяются для различных объектов с широким интервалом концентрации урана – от тысячных долей процентов до десятков процентов.

Эти методы включают колориметрическое определение путем визуального сравнения и работы с использованием фотоэлектрических фотометров и спектрофотометров по интенсивности собственной окраски солей урана, а также по реакциям с неорганическими и органическими реагентами (пероксид водорода, 8-оксинолин и др.).

Электрохимические методы также использовали при осаждении урана.

К этой группе относятся методы полярографического, потенциометрического, амперометрического и кулонометрического определения урана.

Широко использованы радиометрические методы с применением спектрометров.

Гамма спектрометрический метод использовался для определения радионуклидов уранового ряда и их активности.

Как видно из рис. 1 в пробе находятся радионуклиды уран-ториевого ряда. Из спектра видны пики урана в энергетическом диапазоне 143 и 186 кэВ. При обработке руды необходимо учитывать, что кроме урана в раствор также могут перейти другие радионуклиды.

Наиболее перспективным методом является титриметрический, основанный на восстановлении урана (VI) до урана (IV) при титровании его растворами окислителей, с последующим титрованием последнего стандартными растворами окислителей.

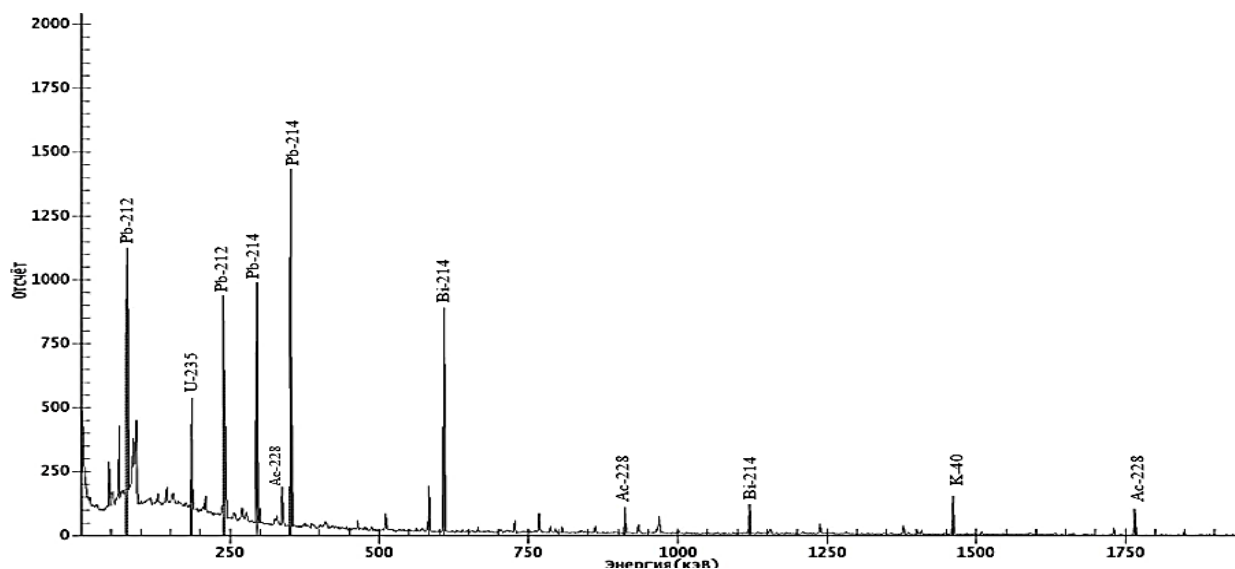
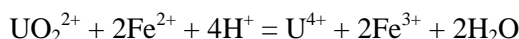
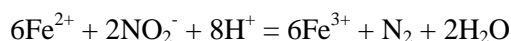


Рис. Энергетический гамма-спектр урансодержащей руды.

Для проведения анализа отобрали 10 мл урансодержащего раствора, предварительно полученного после выщелачивания урановых руд. Если проба меньше десяти мл, то добавляется дистиллированная вода до отметки 10 мл. Затем раствор поместили в колбу объемом 250 мл. Если у пробы среда кислая, то добавляется 1 капля 25% аммиака. К раствору налили 15 мл H_3PO_4 ($\rho = 1.6 \text{ г/см}^3$) и нагревали до кипения. Затем добавили 2% раствор KMnO_4 до устойчивой окраски. После этих процедур, уран полностью переходит в форму UO_2HPO_4 . С целью восстановления UO_2^{2+} до U^{4+} к раствору добавили 5 мл 10% раствора соли Мора ($\text{FeSO}_4 \cdot (\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$):



Раствор охлаждается до комнатной температуры, затем добавили 5 мл 5%-ного раствора нитрита натрия для окисления избыточного Fe^{2+} , перемешивали до полного исчезновения коричневой окраски:



Далее добавили 10 мл 30% - ного раствора мочевины для разрушения остатка нитрита натрия по реакции:



Подготовленный таким образом раствор титровали ванадатом аммония (NH_4VO_3) в присутствии 3-4 капель индикатора – дифениламинсульфоната натрия (полуокисленный) до появления фиолетовой окраски:



Это и есть аналитическая реакция окислительного ванадатометрического титрования урана (IV). Далее вычисляли содержание урана по уравнению реакции титрования урана (IV).

Поступило 20.04.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ласкорин Б.Н., Мясоедов Б.Ф. Химия урана. – М.: Наука, 1989, 466 с.
2. Рябчиков Д.И., Сенявин М.М. Аналитическая химия урана. – М.: Изд-во АН СССР, 1962, 433 с.
3. Марков В.К., Виноградов А.В. Уран, методы его определения. – М.: Атомиздат, 1964 г., 464 с.

К.О.Бобоев, М.Д.Бобоёров, Б.Б.Баротов, И.Мирсаидзода

**ХУСУСИЯТҲОИ ТАШЛИСИ УРАН ДАР МАЪДАНҲО ВА ПАРТОВҲОИ
УРАНДОР**

Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии АМИ Тоҷикистон

Дар мақола усулҳои коркардшудаи таҳлили химиявии сифатӣ ва миқдорӣ оварда шудаанд. Миқдори уран дар маъданҳо, партовҳо, обҳои техникӣ ва чоҳи муфассал нишон дода шудааст. Истифодаи усули спектрометрии таҳлил дар муқоиса бо дигар усулҳо оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: уран, таҳлил, маъдани урандор, партовҳо, спектрометрия.

K.O.Boboev, M.D.Boboyorov, B.B.barotov, I.Mirsaidzoda

**FEATURES OF THE ANALYSIS OF URANIUM IN URANIUM-CONTAINING
ORES AND WASTE**

Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety and Security Agency NAS Tajikistan

In this article the developed methods of chemical analysis by qualitative and quantitative methods are presents. The content of uranium in ores, waste, technical and drainage waters is given in detail. The application of the spectrometric method of analysis in comparison with other methods is shown.

Key words: uranium, analysis, uranium ores, waste, spectrometry.

УДК 546.123.7

Специальность: 1.4.1 – Неорганическая химия

Д.З.Музафарова, М.Т.Жумаев, Л.Солиев**ФАЗООБРАЗОВАНИЕ В СИСТЕМЕ Na, Ca, Al||SO₄, CO₃-H₂O ПРИ 273 К***Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана А.Бадаловым 07.02.2023г.)*

Фазовый комплекс системы Na, Ca, Al||SO₄, CO₃-H₂O при изотерме 273 К исследован методом трансляции. Установлены все возможные фазовые равновесия на геометрических образах исследованной системы. Выявлено, что для данной системы на уровне пятикомпонентного состава при изотерме 273 К характерно следующее количество геометрических образов: дивариантные поля-17, моновариантные кривые-24, нонвариантные точки-6.

Ключевые слова: *диаграмма, метод трансляции, фазообразование, натрий, кальций, алюминий.*

Моделирование многокомпонентных природных и технических систем сводится к изучению комбинаций и взаимоотношений фаз, получающихся в результате перераспределения вещества под влиянием факторов, действующих на систему извне. Поиск закономерностей таких процессов до сих пор носит эмпирический характер, причем даже первые прогнозы могут быть сделаны только по опыту и интуиции исследователей. Ощущается острая необходимость в построении общей теории и алгоритмизации изучения многокомпонентных систем, которые должны опираться на особенности исходных данных, способ их получения и на характер той информации, которую нужно получить для тех или иных целей. Закономерности фазовых равновесий в химических системах, в том числе в системе Na, Ca, Al||SO₄, CO₃-H₂O являются теоретической основой всех технологических процессов, связанных с переработкой природного и технического сырья и определяет условия галургической переработки полиминеральных природных и промышленных отходов, содержащих сульфаты и карбонаты натрия, кальция и алюминия. Как показывает анализ литературы [1], пятикомпонентная взаимная система Na, Ca, Al||SO₄, CO₃-H₂O при изотерме 273 К никем не исследована и, следовательно, её диаграммы фазового комплекса никем не построены.

Указанная выше система нами исследована методом трансляции [2-5]. Метод трансляции исходит из принципа совместности [4], согласно которому добавление последующего компонента в исходную n-компонентную систему сопровождается трансформацией геометрических образов исходной n-компонентной системы с последующей трансляцией их на уровень n+1 компонентного состава. Транслированные геометрические образы n компонентного уровня, согласно своим топологическим свойствам и с соблюдением правил фаз Гиббса, взаимно пересекаясь, образуют геометрические образы n+1 компонентного уровня исследуемой многокомпонентной системы.

Пятикомпонентная система Na, Ca, Al||SO₄, CO₃-H₂O состоит из следующих четырёхкомпонентных систем: Na₂SO₄-CaSO₄-Al₂(SO₄)₃-H₂O; Na₂CO₃-CaCO₃-Al₂(CO₃)₃-H₂O;

Адрес для корреспонденции: Музафарова Дилдодобону Зайнуллоевна, Жумаев Маъруфжон Тагоймуратович, 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет. E-mail: dildodamuzafarova@gmail.com; jumaev_m@bk.ru

Na,Al||SO₄,CO₃-H₂O; Na,Ca||SO₄,CO₃-H₂O; Ca,Al||SO₄,CO₃-H₂O. При анализе данных согласно [1], стало известно, что для них при изотерме 273 К характерны следующие четверные невариантные точки с соответствующими им равновесными твёрдыми фазами, которые приведены в табл. 1.

Таблица 1

Равновесные твёрдые фазы невариантных точек системы Na,Ca,Al||SO₄,CO₃-H₂O при 273 К на уровне четырёхкомпонентного состава

Нонвариантные точки	Равновесные твёрдые фазы	Нонвариантные точки	Равновесные твёрдые фазы
Система Na ₂ SO ₄ -CaSO ₄ -Al ₂ (SO ₄) ₃ -H ₂ O		Система Na,Ca SO ₄ ,CO ₃ -H ₂ O	
E ₁ ⁴	Мб+Гп+ Al·18	E ₆ ⁴	Мб+Гп+С·10
Система Na ₂ CO ₃ -CaCO ₃ -Al ₂ (CO ₃) ₃ -H ₂ O		Система Ca,Al SO ₄ ,CO ₃ -H ₂ O	
E ₂ ⁴	Гл+С·Al+С·10	E ₇ ⁴	Гл+Гп+Сц
E ₃ ⁴	Гл+С·Al+Сц	E ₈ ⁴	Гл+Гп+С·10
Система Na,Al SO ₄ ,CO ₃ -H ₂ O		Система Ca,Al SO ₄ ,CO ₃ -H ₂ O	
E ₄ ⁴	Мб+С·Al+Al·18	E ₉ ⁴	Гп+Сц+Al·18
E ₅ ⁴	Мб+С·Al+С·10	E ₁₀ ⁴	Сц+С·Al+Al·18

В табл. 1 и далее E–обозначение невариантной точки, где её верхний индекс указывает на кратность точки (компонентность системы), а нижний индекс–на порядковый номер точки. Порядковые номера точек, для удобства изложения материала, сохранены как в [2-5]. Приняты следующие условные обозначения равновесных твёрдых фаз [1, 7]: Мб – мирабилит Na₂SO₄·10H₂O; Гп – гипс CaSO₄·2H₂O; Al·18 – гексадекагидрат сульфата алюминия Al₂(SO₄)₃·18H₂O; С·10 – декагидрат карбоната натрия Na₂CO₃·10H₂O; Сц – кальцитCaCO₃; С·Al – карбонат алюминия Al₂(CO₃)₃; Гл – гейлюссит Na₂CO₃·CaCO₃·5H₂O.

На основании данных, приведенных в табл. 1 построена диаграмма фазового комплекса системы Na,Ca,Al||SO₄,CO₃-H₂O при 273 К на уровне четырёхкомпонентного состава в виде «Развёртки» призмы (рис. 1).

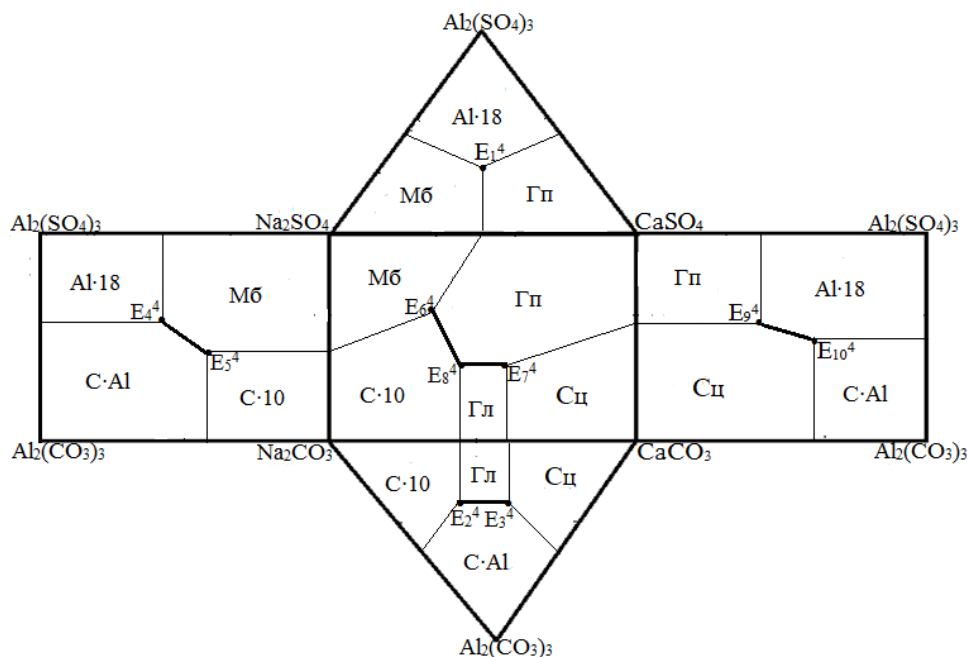


Рис. 1. «Развёртка» диаграммы фазового комплекса системы Na,Ca,Al||SO₄,CO₃-H₂O при 273 К на уровне четырёхкомпонентного состава

Чтобы в дальнейшем использовать построенную диаграмму как основу (матрицу) для нанесения на ней геометрических образов уровня пятикомпонентного состава необходимо объединить идентичные поля кристаллизации индивидуальных равновесных твёрдых фаз разноимённых четырёхкомпонентных систем, то есть необходимо унифицировать её [9], тогда мы получим схематическую [10] диаграмму фазового комплекса системы $\text{Na,Ca,Al}||\text{SO}_4,\text{CO}_3\text{-H}_2\text{O}$ при 273K на уровне четырёхкомпонентного состава (рис. 2).

Построенная методом трансляции схематическая диаграмма фазового комплекса системы $\text{Na,Ca,Al}||\text{SO}_4,\text{CO}_3\text{-H}_2\text{O}$ при 273 K (рис. 2) отражает все возможные фазовые равновесия на её геометрических образах при 273 K и их взаимное расположение на уровне четырёхкомпонентного состава. Фазовый состав осадков дивариантных полей (поля кристаллизации индивидуальных равновесных твёрдых фаз) показаны на рис. 2. Фазовый состав осадков четверных невариантных точек приведен в табл. 1. Моновариантные кривые, проходящие между четверными невариантными точками, характеризуются следующим фазовым составом осадков:

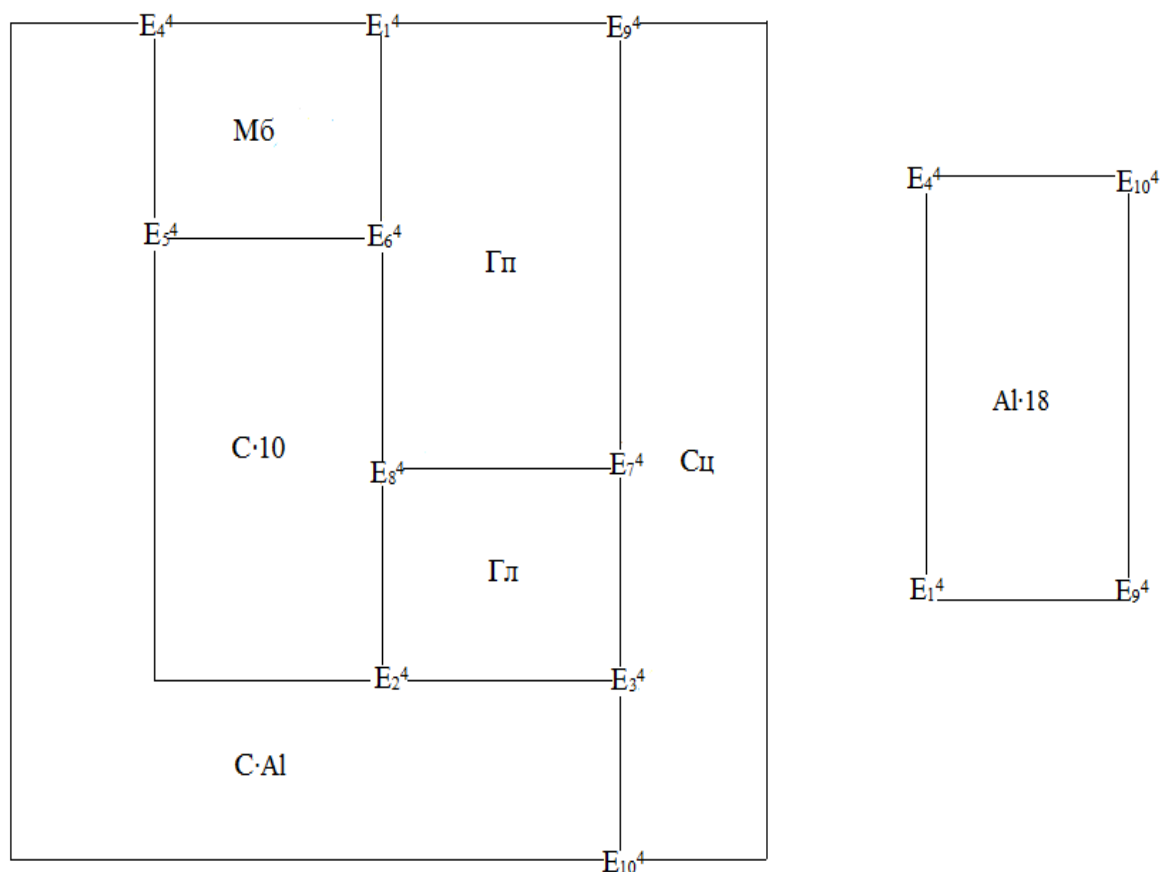
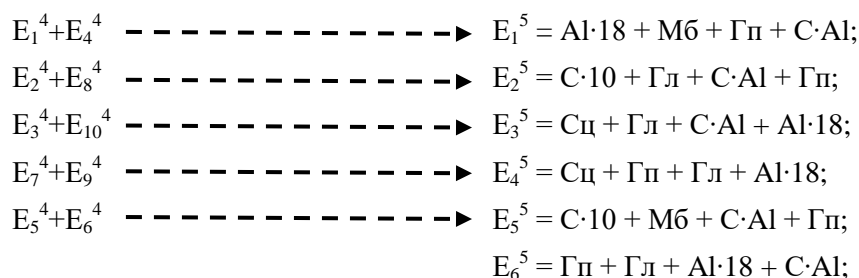


Рис. 2. Диаграмма фазового комплекса системы $\text{Na,Ca,Al}||\text{SO}_4,\text{CO}_3\text{-H}_2\text{O}$ при 273 K на уровне четырёхкомпонентного состава.

Двухсторонняя «сквозная» трансляция [2-5] четверных невариантных точек (табл. 1) на уровень пятикомпонентного состава сопровождается образованием следующих пятерных невариантных точек:



На основании полученных данных, построена совмещенная схематическая диаграмма фазового комплекса системы Na,Ca,Al||SO₄,CO₃-H₂O при 273 К на уровне четырёх-пятикомпонентного составов (рис. 3).

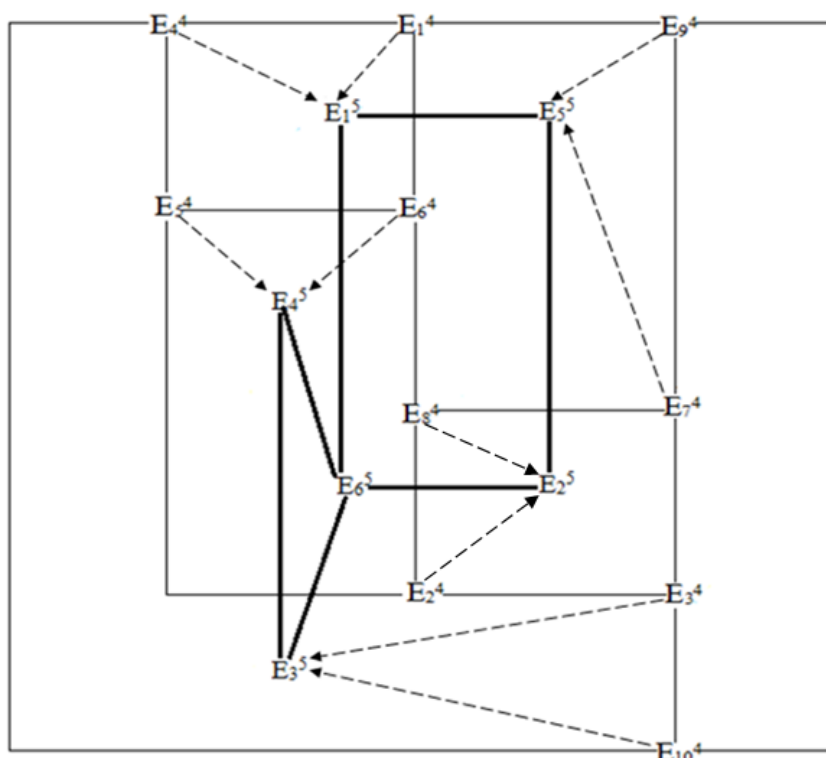


Рис. 3. Совмещенная диаграмма фазового комплекса системы Na,Ca,Al||SO₄,CO₃-H₂O при 273 К на уровне четырёх-пятикомпонентного составов, построенная методом трансляции.

На рис. 3 тонкие сплошные линии обозначают моновариантные кривые уровня четырёхкомпонентного состава. Характерные для них равновесные твёрдые фазы приведены выше. Пунктирные линии обозначают моновариантные кривые, образованные при трансляции четверных невариантных точек на уровень пятикомпонентного состава. Характерные для них равновесные твёрдые фазы идентичны равновесным твёрдым фазам четверных невариантных точек (табл. 1), а стрелки указывают на направления трансляции. Полу жирные сплошные линии также являются моновариантными кривыми уровня пятикомпонентного состава. Они проходят между пятерными невариантными точками и для них характерен следующий фазовый состав осадков:



Построенную методом трансляции диаграмму фазового комплекса системы Na,Ca,Al||SO₄,CO₃-H₂O при 273 К можно фрагментировать по дивариантным полям, что значительно облегчает ее чтение. В табл. 2 приведены перечень и контуры дивариантных полей построенной методом трансляции диаграммы фазового комплекса системы Na,Ca,Al||SO₄,CO₃-H₂O при 273 К.

Таблица 2

Перечень и контуры дивариантных полей системы Na,Ca,Al||SO₄,CO₃-H₂O при 273 К

Равновесные твёрдые фазы полей	Контуры полей на диаграмме (рис. 2)	Равновесные твёрдые фазы полей	Контуры полей на диаграмме (рис. 2)
Мб + Гп		Мб + С·Al	
Гп + Al·18		С·Al + Al·18	
Мб + Al·18		Мб + С·10	
С·Al + С·10		Гп + С·10	
Гл + С·10		Гл + Гп	
Гл + С·Al		Гп + Сц	
Гл + Сц		Сц + Al·18	
Сц + С·Al		Гп + С·Al	
		Al·18 + Гл	

Таким образом, анализ строения фазового комплекса системы Na,Ca,Al||SO₄,CO₃-H₂O при 273 К, установленный методом трансляции, показывает, что для исследованной системы при данной температуре характерно наличие следующего количества геометрических образов на уровнях четырёх-компонентного и пятикомпонентного составов (табл. 3).

Таблица 3

Количество геометрических образов, характерных для системы $\text{Na,Ca,Al||SO}_4,\text{CO}_3\text{-H}_2\text{O}$ при 273 К на уровнях четырёхкомпонентного и пятикомпонентного составов

Геометрические образы	Уровень компонентности	
	Четырёхкомпонентный состав	Пятикомпонентный состав
Нонвариантные точки	10	6
Моновариантные кривые	25	24
Дивариантные поля	7	17

Поступило 16.01.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник экспериментальных данных по растворимости многокомпонентных водно-солевых системах. – СПб.: Химиздат, 2004, т.2, кн. 1-2, 1247 с.
2. Солиев Л. Прогнозирование строения диаграмм фазовых равновесий многокомпонентных водно-солевых систем методом трансляции. – М.: Деп. В ВИНТИ АН СССР 20.12.87 г. № 8990-В87, 1987, 28 с.
3. Солиев Л. Прогнозирование фазовых равновесий в многокомпонентной системе морского типа методом трансляции. (кн.2) – Душанбе: Изд. «Шучойён», 2011, 147 с.
4. Солиев Л., Жумаев М.Т. Строение фазового комплекса и растворимость водно-солевой системы из сульфатов, карбонатов, гидрокарбонатов натрия и кальция. – Душанбе: Балогат, 2020, 212 с.
5. Солиев Л. Прогнозирование фазовых равновесий в многокомпонентной системе морского типа методом трансляции. – Душанбе: Эр-Граф, 2019 (Кн. 3), 232 с.
6. Горощенко Я.Г. Массцентрический метод изображения многокомпонентных систем. – Киев: Наукова думка, 1982, 264 с.
7. Солиев Л. Фазовые равновесия в системе $\text{Na,K,Mg,Ca||SO}_4,\text{Cl-H}_2\text{O}$ при 500°C в области кристаллизации ангидрита. – Журнал неорганической химии, 2011, т. 56, № 10, с. 1739-1745.
8. Справочник экспериментальных данных по растворимости многокомпонентных водно-солевых систем. Т.1, кн. 1, 2 – СПб.: Химиздат, 2003, 1152 с.
9. Солиев Л., Жумаев М.Т. Фазовый комплекс системы $\text{Na,Ca||SO}_4,\text{CO}_3,\text{HCO}_3\text{-H}_2\text{O}$ при 25°C. Химический журнал Казахстана. – 2020, № 1(69), с. 72-82.
10. Солиев Л. Схематические диаграммы фазовых равновесий многокомпонентных систем. – Журн. неорган. химии, – 1988, т. 33, № 5, с. 1305-1312.

Д.З.Музафарова, М.Т.Жумаев, Л.Солиев

ФАЗАҲОСИЛШАВӢ ДАР СИСТЕМАИ $\text{Na,Ca,Al||SO}_4,\text{CO}_3\text{-H}_2\text{O}$ ДАР 273 К

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Комплекси фазагии системаи $\text{Na,Ca,Al||SO}_4,\text{CO}_3\text{-H}_2\text{O}$ дар ҳарорати 273 К бо усули трансляция таҳқиқ карда шуд. Мувозинатҳои фазагии имконпазир дар шаклҳои геометрии системаи таҳқиқшуда муайян карда шуд. Маълум шуд, ки барои системаи додашуда дар сатҳи панҷкомпонентагӣ дар

изотермаи 273К теъдоди зерини шаклҳои геометрӣ ҳос мебошад: майдонҳои дивариантӣ-17, хатҳои моновариантӣ-24, Нуқтаҳои нонвариантӣ-6

Калимаҳои калидӣ: диаграмма, усули транслятсия, фазаҳосилишавӣ, натрий, калтсий, алюминий.

D.Z.Muzafarova, M.T.Jumaev, L.Soliev

PHASE FORMATION IN THE SYSTEMS Na,Ca,Al||SO₄,CO₃-H₂O AT 273 K

S.Ainy Tajik State Pedagogical University

The phase complex of the Na,Ca,Al||SO₄,CO₃-H₂O system at the 273 K isotherm was studied by the translation method. All possible phase equilibria on the geometric images of the studied system are established. It was revealed that for this system at the level of a five-component composition with an isotherm of 273K, the following number of geometric images is characteristic: divariant fields-17, monovariant curves-24, invariant points-6.

Key words: diagram, translation method, phase formation, sodium, calcium, aluminum.

Сведения об авторах:

Музафарова Д. – докторант (PhD) кафедры «Общая и неорганическая химия»;

Жумаев М. – кандидат хим. наук, доцент кафедры «Общая и неорганическая химия».

УДК 662.7

Специальность: 2.6.7 – Технология неорганических веществ

З.Х.Гайбуллаева, Т.Х.Гадоев^{*}, Б.И.Асроров, Ш.Б.Бахриддинзода, А.Шарифов^{}**
РЕСУРСОСБЕРЕГАЮЩАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПЕРЕРАБОТКИ УГЛЯ
МЕСТОРОЖДЕНИЯ ФАН-ЯГНОБ

Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими,

^{}ОАО «АЗОТ»,*

*^{**}Институт химии им.В.И.Никитина НАН Таджикистана*

(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 08.02.2023 г.)

В статье предложена ресурсосберегающая технология переработки угля месторождения Фан-Ягноб. Она условно делится на три стадии: 1) выделение летучих и смолистых веществ состава угля от углерода, их разделение на отдельные компоненты, получение пластифицированного углерода; 2) газификация углерода веществами окислителями; 3) получение газов-энергоносителей H_2 и CO .

Ключевые слова: *уголь, технология, переработка, газификация, углерод, водород, оксид углерода.*

В настоящее время в Таджикистане принят ряд программ по индустриализации экономики страны. Бурно развивается использование угля в качестве основного энергоносителя для обеспечения потребностей ТЭС, промышленных предприятий и других объектов. Запасы угля в Таджикистане оцениваются в более 4.5 млрд тонн. В стране действуют 14 предприятий по добыче угля в 11 угольных шахтах [1]. Прогнозы на добычу и использование угля на ближайшие годы оцениваются до 5 млн тонн ежегодно. Это огромное количество использования угля может превратить рейтинг Таджикистана из зеленой страны в страну с большими выбросами парникового газа. Этому также может способствовать развитие цементной промышленности, где вдобавок к использованию угля в качестве энергоносителя, он ещё становится основным сырьём для производства цементного клинкера. Известняк сам является источником образования CO_2 , ведь при разложении 1 кг $CaCO_3$ выделяется 440 г CO_2 , который выбрасывается в атмосферу. Поэтому, чтобы сохранить «зеленый» статус страны, следует в корне изменять политику использования угля, переходя от традиционного его сжигания к способам его комплексной переработки и использования продуктов его состава. В настоящее время такие ресурсосберегающие технологии переработки угля и использования продуктов его состава разработаны, но чтобы их внедрить в производство материалов и тепла необходимо в первую очередь менять психологию специалистов топливно-энергетических и промышленных отраслей экономики, чтобы они осознали, что уголь, прежде чем быть теплоносителем, является многокомпонентным ценным сырьём [2], на основе которого можно получить до 300 наименований химических веществ, применяемых в различных отраслях экономики. В работе изложена ресурсосберегающая технология

Адрес для корреспонденции: *Гайбуллаева Зумрат Хабибовна. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. академиков Раджабовых 10, Таджикский технический университет.*

газификации угля, в которой все компоненты состава угля в определённом порядке выделяются в отдельности для использования [3]. В исследованиях использована проба угля Фан-Ягнобского месторождения следующего состава, мас. %: С – 81.0; Н – 5.2; N – 1.0; О – 2.0; S – 1.4; зола – 5.3; влажность угля – 4.0, содержание летучих веществ – 0.98%, содержание смолы – 4.5%.

Ресурсосберегающая технология газификации угля

На рис. 1 приведена технологическая схема переработки угля при его газификации для получения горючих газов H_2 и CO . Схему условно можно разделить на три стадии: I) выделение летучих и смолистых веществ состава угля от углерода, их охлаждение и разделение на отдельные компоненты, получение углеродистого материала; II) газификация углерода и получение смеси газов ($CO+H_2$); III) выделение чистого H_2 и его использование в качестве энергоносителя или газа восстановителя металлов из их соединений.

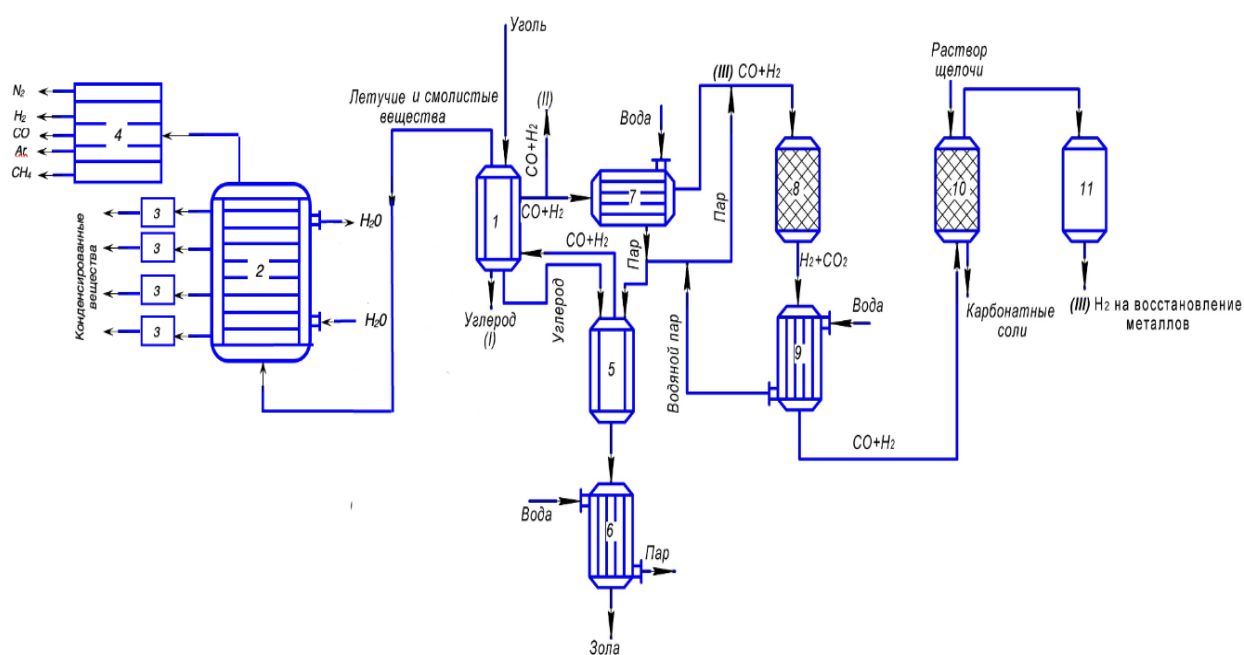


Рис. 1. Технологическая схема безотходной газификации угля: 1 – реактор нагрева угля; 2 – конденсационная колонна с тарелками; 3 – сборники конденсированных веществ; 4 – мембранный разделитель газовой смеси; 5 – газогенератор; 6 – теплообменник-утилизатор тепла I; 7 – теплообменник-утилизатор тепла II; 8 – реактор конверсии CO; 9 – теплообменник-утилизатор тепла III; 10 – щелочной абсорбер CO_2 ; 11 – конденсатор водяных паров.

Предложенная технология осуществляется следующим образом: уголь подаётся во внешне обогреваемый реактор 1 и нагревается через внутренний корпус реактора до температуры $680\text{--}700^\circ\text{C}$. При этом, из состава угля сначала испаряется влага, при температуре до 350°C уголь очищается от летучих и легко выделяемых компонентов, затем при температурах $500\text{--}550^\circ\text{C}$ выделяются все смолистые и другие сопутствующие углероду компоненты, при этом уголь переходит в пластическое состояние и начинается его графитизация и при температурах $680\text{--}700^\circ\text{C}$ он превращается в чистый углеродистый материал.

Выделенные летучие и смолистые вещества, а также газы, выводятся из реактора 1, они поступают снизу в конденсационную колонну 2, охлаждаемую водой. Внутри конденсационной колонны с тарелками 2 выдерживается регулируемый температурный градиент по убывающей зависимости согласно температурам конденсации конденсируемых веществ. Тарелки конденсационной колонны 2 соединены со сборниками конденсированных веществ 3. Конденсация газообразных веществ происходит в обратной зависимости от их температуры испарения из состава угля. Привязанный к составу смеси выделяемых веществ температурный градиент режима охлаждения по высоте конденсационной колонны позволяет осуществить полное разделение смеси на чистые компоненты. Конденсация и разделение выделенных из состава угля веществ происходит в следующем порядке согласно их температуры конденсации каждого вещества в интервалах:

- 360– 500°C – каменноугольный пек;
- 270– 360°C – антрацены;
- 230– 270°C – метилнафталены;
- 210– 230°C – нафталиновая фракция;
- 170– 200°C – фенолы и пиридины;
- 90– 170°C – бензол и его гомологи.

После выделения всех конденсированных веществ, из конденсационной колонны (2) смесь неконденсируемых газов N_2 , H_2 , CO , SO_2 , образующихся при переработке угля в реакторе 1, охлаждается для её разделения на чистые газы в мембранном разделителе 4.

Полученный углерод в реакторе 1 можно использовать в металлургии как вещество восстановитель металлов (линия 1) или газифицировать в газогенераторе 5. В зависимости от назначения и требуемого состава генераторного газа для газификации углерода в качестве окислителя применяется O_2 , H_2O , воздух или их смеси. Применяя водяной пар, нами получен генераторный газ, состоящий из H_2 и CO .

Для получения эквимолярной смеси газов H_2 : $CO=1:1$ газификацию углерода осуществили водяным паром при соблюдении стехиометрического соотношения C : $H_2O=1:1$ с тем, чтобы в газогенераторе протекала реакция неполного окисления углерода с образованием равных количеств CO и H_2 :



Поскольку реакция (1) является эндотермической, то нагрев газогенератора 5 осуществляется извне любым возможным способом: сжиганием топлива, электронагревом и т.п. Однако, при этом, следует предпринять меры, чтобы также не было выбросов газов в атмосферу.

Генераторный газ с температурой до 1100°C после газогенератора поступает в межкорпусное пространство реактора 1 для нагрева угля до 680-700°C. После реактора 1 его можно использовать как восстановитель металлов (линия 11) или охлаждая в теплообменнике-утилизаторе тепла 7, снижая его температуру, получая при этом водяной пар, который обратно направляется в газогенератор для окисления углерода.

Из газогенератора 5 также выносятся зола угля, которая после охлаждения в котле-утилизаторе тепла 6 используется или в производствах цемента и бетона в строительном комплексе

или для иных нужд. В наших исследованиях зола угля Фан-Ягнобского месторождения показала свою эффективность в качестве минеральной добавки к цементам в составе бетонов, повышая их прочность и коррозионностойкость в агрессивных средах. При этом также снижает количество цемента до эквивалентного дозированному количеству золы в его составе. Также она может применяться как минеральный наполнитель в составе гипсовых композиций [4].

Полученные в газогенераторе 1 газы CO и H₂ являются сильными восстановителями, однако при температурах 800-830°C восстановительная способность CO выше, чем у H₂, а при температурах 830-850°C наоборот восстановительная способность водорода преобладает над свойством CO. Поэтому, в зависимости от предполагаемой температуры при осуществлении процесса восстановления металлов используют смесь H₂+CO, или проводя водяную конверсию CO с эквимолярным получением H₂, в дальнейшем отделяя CO₂ от водорода, используют только H₂ в качестве восстановительного реагента. Исходя из данного положения, в первом случае генераторный газ непосредственно направляется в металлургическое или химическое производство в качестве реагента восстановителя металлов (линия 11), а во втором случае газовая смесь поступает для охлаждения до 320-350°C в теплообменник–утилизатор тепла 7 (линия 111), из которого охлаждённый генераторный газ направляется в реактор 8 для осуществления каталитической реакции конверсии оксида углерода



При поступлении генераторного газа в реактор 8 для конверсии CO, в реактор подаётся водяной пар в количестве, которому соответствует содержание CO в составе водяного газа. Наиболее оптимальным режимом осуществления каталитической конверсии CO является температура 350-380°C, поэтому при подаче водяного пара регулируется его температура до значения, которое обеспечило бы с учётом экзотермичности реакции (2) температуру среды реакции в данных пределах.

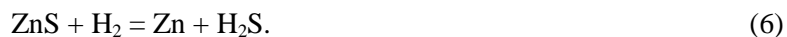
Конвертированный газ, состоящий из эквимолярных количеств H₂ и CO₂, охлаждается до температуры 18-20°C в теплообменнике-утилизаторе тепла 9, при этом образуется водяной пар, а конвертированный газ подаётся в абсорбер 10, где CO₂ абсорбируется растворами щелочей. Наиболее простым способом выделения CO₂ из смеси газов является его поглощение щелочами по реакциям



Карбонатные соединения выпадают в осадок, а газообразный H₂ после сушки от паров воды используется по назначению. Для этого, по выходу из абсорбера 10, поток водорода направляется в конденсатор 11, где из него при температуре до -5°C выделяются пары воды, оставшийся сухой H₂ можно использовать и как энергоноситель, и как химический реагент в химической и металлургической отраслях промышленности.

Использование чистого водорода H₂ в качестве восстановительного реагента сульфидов металлов состава полиметаллических концентратов до металлов можно рассматривать на примере восстановления галенита и сфалерита водородом по реакциям





Результаты исследования получения восстановительных газов по вышеописанной технологии и применения этих газов для восстановления металлов приведены в работах [5-7].

З а к л ю ч е н и е

Предложена ресурсосберегающая технология переработки угля, которая позволяет выделить все компоненты его состава в виде отдельных веществ. В предложенной технологии, образующиеся на одних стадиях вещества, используются для осуществления других стадий. На разных стадиях можно будет получать углерод, смесь горючих газов ($\text{H}_2 + \text{CO}$) и чистый H_2 , которых можно будет использовать как энергоноситель и как химическое сырьё для производства других химических веществ.

Поступило 08.02.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ризвоншоева А. Угольные ресурсы – неисчерпаемое богатство Таджикистана. – Народный журнал, 2022, 23 с.
2. Шарифов А. Экологические проблемы использования угля в качестве энергоносителя и способы их решения. – Вестник Таджикского технического университета, 2015, №4(32), с.183-187.
3. Евразийский патент № 037398. Способ газификации угля для производства тепла и химических веществ. – З.Х.Гайбуллаева, Ш.Г.Шодиев, Ф.Х.Хамроев, Ф.Шарифов.
4. Плакиткина Л.С. Интенсификация инновационного процесса в угольной промышленности. – Журнал Горная промышленность, 2011, №3 (97), с. 4-12.
5. Гайбуллаева З.Х., Безотходная технология газификации угля для получения тепла и химических веществ. – Горный журнал, №9, 2022, с. 62-68.
6. Гайбуллаева З.Х. Получение восстановительных газов способом переработки углей Фан-Ягноб. – Политехнический вестник. Серия Инженерные исследования, 2021, №4 (52), с.15-20.
7. Гайбуллаева З.Х. Совмещенный способ получения восстановительных газов и переработки галенитсодержащих концентратов Кони Мансур. – Журнал “Цветные металлы”, 2022, №1, с.18-22.

З.Х.Гайбуллаева, Т.Х.Гадоев*, Б.И.Асроров, Ш.Б.Бахриддинзода, А.Шарифов**

ТЕХНОЛОГИЯ И САРФАНОКИ ЗАХИРАҲО ДАР ИСТИФОДАИ АНГИШТИ КНИ ФОН-ЯГНОБ

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ,

**ҶСК «АЗОТ»,*

***Институти химия ба номи В.И. Никитин Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола технологияи сарфаноки захираҳо дар истифодаи ангишти кони Фон-Ягноб оварда шудааст. Он ба се марҳила тақсим карда шудааст: 1) ҷудошавии газҳои сабук ва катрондори

таркиби ангишт, чудокунии онҳо ба компонентҳои алоҳида, ҳосилкунии карбони нарм шуда; 2) газноккунии карбон бо моддаҳои оксидкунанда; 3) ҳосилкунии газҳои энергиябарандаи H_2 ва CO .

Калимаҳои калидӣ: ангишт, технология, коркард, газноккунӣ, карбон, гидроген, оксиди карбон.

Z.H.Gaibullaeva, N.H.Gadoev*, B.I.Asrorov, Sh.B.Bahriddinzoda, A. Sharifov**

STUDYING THE PROCESS OF OBTAINING HYDROGEN-CONTAINING GASES

M.S.Osimy, Tajik technical University,

**OAO «AZOT»,*

***V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National academy of sciences of Tajikistan*

The article proposes a resource-saving technology for the processing of coal of the deposit of the Von-Yagnob. It is conditionally divided into three stages: 1) the release of volatile and tarry substances of the coal composition from carbon, their separation into individual components, obtaining plasticized carbon; 2) carbon gasification by substance oxidizing agents; 3) receipt of energy gases H_2 and CO .

Key words: coal, technology, processing, gasification, carbon, hydrogen, carbon monoxide.

Сведения об авторах:

Гайбуллаева Зумрад Хабибовна – кандидат хим. наук, доцент кафедры технологии химических производств Таджикского технического университета им. М.С.Осими

УДК 666.112.7

Специальность: 1.4.1 – Неорганическая химия;

1.4.4 – Физическая химия;

2.6.7 – Технология неорганических веществ.

А.С.Курбонов, К.И.Нематуллоев, М.М.Тагоев, А.П.Тагаев,
академик НАН Таджикистана У.М.Мирсаидов

ПОЛУЧЕНИЕ БОРОСИЛИКАТНОГО СТЕКЛА ИЗ МЕСТНЫХ СЫРЬЕВЫХ МАТЕРИАЛОВ ТАДЖИКИСТАНА

Институт химии им. В.И. Никитина НАН Таджикистана

В работе исследуется боросиликатное стекло, синтезированное из местного сырья, с целью использования в дальнейшем в качестве стекловолоконистых материалов в строительстве, в области ядерной безопасности, как материал для защиты от нейтронов, в химической промышленности. Проведены исследования по выбору оптимального химического состава и режиму синтеза стекла. Разработана технологическая схема получения боросиликатного стекла, согласно которой боросиликатную руду Ак-Архарского месторождения обрабатывали соляной или серной кислотой для удаления железа. Сухой остаток нагревали в печи до 1200-1500°C, гомогенизировали и охлаждали. Для полученного боросиликатного стекла были проведены исследования его термического расширения и плотности, а также снижения потока нейтронов. Результаты испытаний показали эффективность полученных образцов и снижение потока нейтронов на 20%.

Ключевые слова: боросиликатное стекло, синтез, радиационная защита, химический состав, поток нейтронов.

Боросиликатное стекло является многофункциональным материалом и находит широкое применение в разных отраслях промышленности. У боросиликатного стекла коэффициент теплового расширения очень мал, среди стёкол он меньше только у кварцевого стекла (почти в 10 раз), что позволяет стеклу не трескаться при резких изменениях температуры. Этим также обусловлено его применение в качестве противопожарного и в других случаях, когда необходима термическая стойкость. Поскольку коэффициент плотности у боросиликатной основы выше, чем у силикатных стёкол, оно лучше защищено от риска физических повреждений.

Для их изготовления применяют стёкла, химический состав которых представлен в табл.1.

Таблица 1

Химический состав боросиликатного стекла

Компоненты	SiO ₂	B ₂ O ₃	CaO	Na ₂ O	SO ₃
Мас%	68-73	2.5-8.5	6-11	7-10.5	0.3-0.5

Адрес для корреспонденции: Курбонов Амиршо Сохибназарович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: amirsho_77@mail.ru

Известен способ получения стекла на основе доменных шлаков [1], включающий плавление шихты, варку при 1450-1500°C, гомогенизацию и охлаждение, причём варку стёкол ведут при весовом соотношении в шихте избыточной сульфидной серы и сульфата натрия 1:(5-20) в окислительной или нейтральной среде.

Боросиликатное стекло получено также из сырьевых материалов состава: SiO₂ (кремнезём) – 65-70%; сода кальцинированная – 20-25%; сульфат натрия – 0.1-1.0%; каменный уголь – 0.5-2.0%; полевой шпат – 5-10%; мел – 9-13%; доломит – 5-8%; борная кислота – 1-3%. Сущность указанного способа заключается в том, что стекольную шихту получают путём перемешивания предварительно увлажнённого песка с кальцинированной содой, красителями, полевым шпатом, мелом, доломитом, борной кислотой и сульфатом натрия и плавят при температуре 1450-1550°C.

В качестве основных сырьевых материалов предлагаются использовать боросиликатные руды месторождения Ак-Архар Таджикистана, которые по составу совпадают с составами шихты для получения борного стекла, что позволяет сэкономить на транспортировке (табл.2).

Таблица 2

Химический состав боросиликатной руды Ак-Архарского месторождения

Содержание, мас%	Компоненты										
	B ₂ O ₃	SiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	CaO	MgO	TiO ₂	MnO	K ₂ O	Na ₂ O	П.п.п.
	12.5	32.4	1.58	3.05	32.4	0.75	0.15	0.29	0.1	0.03	3.91

Для выбора оптимального состава обратились к литературным источникам [2] и патентам [3]. Синтез проводили в силитовой лабораторной печи при 1200-1500°C, стекломассу выливали на металлическую подложку.

Сущность метода получения боросиликатного стекла заключается в том, что боросиликатную руду Ак-Архарского месторождения сначала измельчают, затем для удаления железа измельчённое сырьё обрабатывают соляной или серной кислотой, сухой остаток нагревают (варка стекла) в печи до 1200-1500°C, гомогенизируют и охлаждают. По следующей технологической схеме получают боросодержащее стекло (рис.1).

Полученное боросиликатное стекло исследовали экспериментально: измерены термическое расширение и плотность; снижение потока нейтронов на установке (рис.2 и 3).

Образец боросиликатного стекла толщиной 3 мм вставлялся у входа контейнера, где выходят потоки нейтронов, и нейтронным детектором (Inspector 1000, Canberra USA) измерялось ослабление потока.

Результаты испытания показали эффективность полученных образцов и снижение потока нейтронов на 20%.

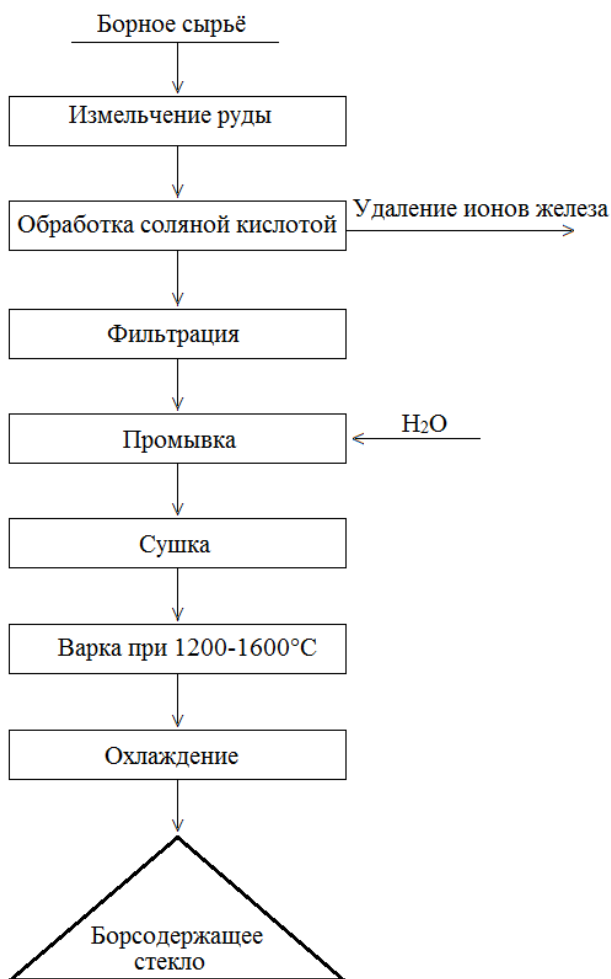


Рис. 1. Технологическая схема получения боросиликатного стекла.



Рис. 2. Контейнер нейтронный источник.

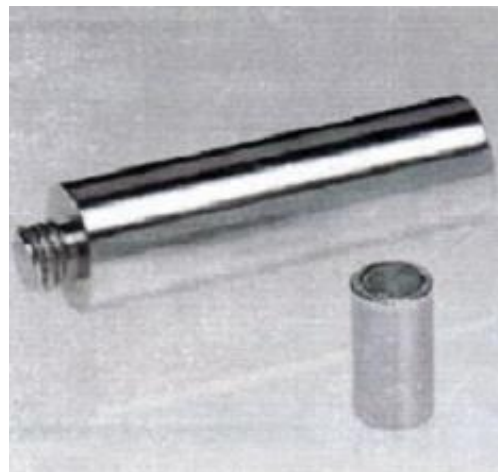


Рис. 3. Нейтронный детектор.

С целью получения эффективных образцов борного стекла со значительным количеством бора, в технологическую схему варки добавляется 10-15% борангидрида натрия от веса руды. Получено

боросиликатное стекло с содержанием бора 12%, которое обладает повышенной термической стойкостью к механическим повреждениям.

Образцы боросиликатного стекла также были испытаны в потоке нейтронов и показали снижение потока нейтронов до 35%.

Таким образом, многие технические проблемы, где требуется снижение веса при низкой теплопроводности, достаточной прочности и экономии объёма, высокой химической стойкости материала для защиты от нейтронов, могут быть решены с применением боросиликатного стекла. Оно намного долговечнее других материалов, используемых сегодня в качестве заполнителей.

Поступило 13.01.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шульц М.М., Мазурин О.В. Современные представления о строении стекла и его свойствах. – Л.: Наука, 1998, 197с.
2. Гулоян Ю.А. Технология стекла и стеклоизделий. – Владимир: Транзит-Икс, 2015, 712 с.
3. Валеев М.Я. Пат. №2215699 (РФ). Способ получения стекла.
4. Бутт Л.М. Технология стекла. – М.: Стройиздат, 1971, с.102-117.

А.С.Курбонов, К.И.Нематуллоев, М.М.Тағоев, А.П.Тағоев, У.М.Мирсаидов

ҲОСИЛКУНИИ ШИШАИ БОРОСИЛИКАТӢ АЗ МАЪДАНҲОИ ҲОМИ МАҲАЛЛИИ ТОЧИКИСТОН

Институти химияи ба номи В.И.никитини Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола тадқиқотҳо оид ба шишаи боросиликатӣ, ки аз маъданҳои маҳаллӣ ба даст омадааст ва бо мақсади дар оянда ба сифати нахи шиша барои сохтмонҳо, дар соҳаи бехатарии ядрои ҳамчун маводи муҳофизатӣ аз нейтронҳо, дар саноати химиявӣ истифода шудан, гузаронида шудааст. Тадқиқотҳо оид ба интихоби таркиби оптималии химиявӣ ва речаи синтези шиша гузаронида шуд. Нақшаи технологии истехсоли шишаи боросиликатӣ тартиб дода шудааст, ки мувофиқи он маъдани боросиликати кони Ак-Архар бо кислотаи хлорид ё сулфат барои баргараф кардани оҳан коркард карда шуда, боқимондаи хушк дар печь то ҳароратҳои 1200-1500°C гарм карда мешавад ва сипас якҷинса (гомогенизатсия) намуда хунук карда мешавад. Барои шишаи боросиликати ба даст овардашуда васеъшавии термикӣ ва зичии он, инчунин муқовимат ба сели нейтронҳо тадқиқотҳо гузаронида шуд. Натиҷаҳои санҷиш нишон дод, ки намунаҳои ба даст омада сели нейтронҳо то 20% кам мекунад.

Калимаҳои калидӣ: шишаи боросиликатӣ, синтез, муҳофизати радиатсионӣ, таркиби химиявӣ, сели нейтронҳо.

A.S.Kurbonov, K.I.Nematulloev, M.M.Tagoev, A.P.Tagaeв, U.M.Mirsaidov

OBTAINING BOROSILICATE GLASS FROM LOCAL RAW MATERIALS OF TAJIKISTAN

V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National Academy of Sciences of Tajikistan

In this paper investigates borosilicate glass, synthesized from local raw materials, with the aim of further use as glass fiber materials in construction, in the field of nuclear safety, as a material for protection against neutrons, in the chemical industry. Studies have been carried out on the choice of the optimal chemical composition and the mode of glass synthesis. A technological scheme for the production of borosilicate glass has been developed, according to which the borosilicate ore of the Ak-Arkhar deposit was treated with hydrochloric or sulfuric acid to remove iron, the dry residue was heated in a furnace to 1200-1500°C, homogenized and cooled. For the obtained borosilicate raw materials, studies of its thermal expansion and density, as well as a decrease in the neutron flux, were carried out. The test results showed the efficiency of the obtained samples and a decrease in the neutron flux by 20%.

Key words: *borosilicate glass, synthesis, radiation protection, chemical composition, neutron flux.*

Сведения об авторах:

Курбонов Амиршо Сохибназарович – директор филиала Агентства ХБРЯ г.Бохтар, доктор хим. наук.

УДК 549.66 (575.3)

Специальность: 1.6.4 – Минералогия, кристаллография. Геохимия, геохимические методы поисков полезных ископаемых

М.А.Мираков

**НИОБИЙ-ТАНТАЛОВАЯ МИНЕРАЛИЗАЦИЯ В ПЕГМАТИТОВОЙ ЖИЛЕ
ЛЕСХОЗОВСКАЯ ИЗ ШАХДАРИНСКОГО ПЕГМАТИТОВОГО ПОЛЯ
(ЮГО-ЗАПАДНЫЙ ПАМИР)***Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии**НАН Таджикистана**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана А.Р.Файзиевым 04.01.2023 г.)*

Данная работа посвящена изучению ниобий-танталовой минерализации в пегматитовой жиле Лесхозовская на Ю-З Памире. В статье дано подробное описание рудных минералов из группы колумбит-танталита и пирохлор-микролита с приведением их химического состава, карт распределения элементов, рентгеновских дифрактограмм, а также описания оптических свойств минералов, наблюдаемых под рудным микроскопом.

Ключевые слова: *ниобий, тантал, колумбит-танталит, пирохлор-микролит, пегматит, шахдаринское пегматитовое поле, Юго-Западный Памир.*

В в е д е н и е

Собственные минералы ниобия и тантала в основном связаны с гранитными пегматитами редкометалльного и редкометалльно-самоцветного типов. Минералы группы колумбита стехиометричны и содержания примесных компонентов в них, как правило, невысоки. Из значимых примесей могут присутствовать Ti^{4+} и W^{6+} , реже Sn^{4+} , Sc^{3+} . Ниобиевые члены группы называются колумбитами, танталовые – танталитами, видовое же название дается по преобладающему А-катиону: ферроколумбит – колумбит-(Fe), ферротанталит – танталит-(Fe), манганоколумбит – колумбит-(Mn), манганотанталит – танталит-(Mn), магнизоколумбит – колумбит-(Mg), магнизотанталит – танталит-(Mg).

Главными носителями ниобия и тантала в исследуемой пегматитовой жиле являются минералы группы колумбита-танталита и пирохлора-микролита. Из группы колумбита-танталита наиболее распространенным минералом является манганоколумбит (колумбит-Mn). Минералы группы пирохлора-микролита, в данном пегматите встречаются так же часто и образуют изоморфный ряд от микролита к пирохлору. Также, в пегматитовой жиле Лесхозовская нами обнаружены другие редкие минералы ниобия и тантала из группы сложных оксидов – ферсмит – $CaNb_2O_6$ и открытый в этом

Адрес для корреспонденции: Мираков Мирак абдурашулович. 734069, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ.
E-mail: mirakov.bobish@mail.ru

пегматите новый минерал шахдараит-(Y) – ScYNb_2O_8 [1]. Ниобий и тантал также изоморфно входят в состав других акцессорных минералов пегматита.

Краткая характеристика пегматита Лесхозовский

Пегматитовая жила Лесхозовская находится на правом борту р. Шахдара в 8 км к востоку от районного центра Рошткала (Шугнанский хребет), напротив кишлака Бидиз, приблизительно в 250 м вверх по склону от автодороги Хорог-Джавшангоз. Пегматит представляет собой крутопадающую жилу, мощностью от 0.5 до 3.5 м, (рис. 1) прорезающую докембрийские гранат-биотитовые гнейсы шахдаринской серии [2,3]. В краевых частях пегматита наблюдается мелкозернистый агрегат кварца, калиевого полевого шпата и кислого плагиоклаза с небольшим количеством турмалина и слюды. Средняя часть пегматита сложена неровномернозернистым пегматитом с ортоклазом, шерлом и желто-зеленым эльбаитом, а также встречаются участки с кварц-полевошпатовой графикой. В центральной части пегматита встречаются преимущественно мелкие полости (размерами 2-5 см в диаметре) с кристаллами альбита, бесцветного прозрачного кварца, ортоклаза и светло-розового и желтовато-зеленого турмалина (эльбаита). Из акцессорных минералов в полостях встречаются пироклор-микролит, касситерит, колумбит-танталит, фторапатит, циркон, ксенотим-(Y), монацит-(Ce), уранинит, ильменит, берtrandит и шахдараит-(Y).



а



б

Рис. 1. Пегматитовая жила Лесхозовская, правый борт р. Шахдара:
а – общий вид пегматита; б – контакт пегматита с вмещающими породами.

Методы исследования

Для определения химического состава и физических свойств минералов из штучных образцов были изготовлены прозрачно-полированные шлифы и препараты в виде шашек в эпоксидной смоле. Изучение морфологии и определение состава проводилось на сканирующем электронном микроскопе JSM-35CF JEOL с Si(Li) – энергодисперсионным спектрометром и системой анализа ISIS Link Oxford

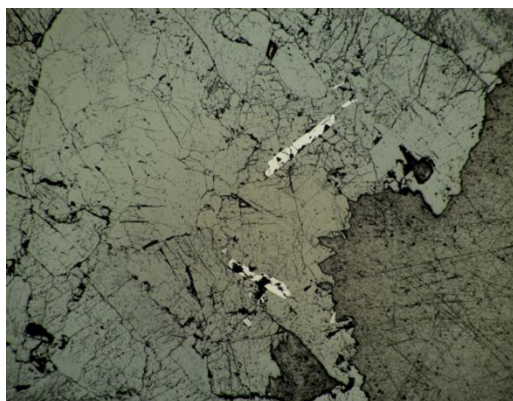
при ускоряющем напряжении 20 кВ и токе зонда 1 нА (Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ). Микронзондовые анализы выполнены на приборе JCXA-733 фирмы JEOL с помощью Si(Li)-энергодисперсионного спектрометра и системы анализа INCA Energy 350 фирмы Oxford при ускоряющем напряжении $U = 20$ кВ и токе зонда $I = 1$ нА (Лаборатория Минералогического музея им. А.Е.Ферсмана РАН). Минералы диагностированы методом рентгенофазового анализа, определением их оптических и физических свойств.

Описание минералов

Колумбит. Из минералов изоморфного ряда колумбита-танталита в пегматитовой жиле Лесхозовская встречается колумбит. Минерал попадает часто в виде длиннопризматических, тонкопластинчатых кристаллов размерами от 0.1 до 0.5 мм в ассоциации с гранатом спессартин-альмандинового ряда, калиевым полевым шпатом, иногда в мелких пустотах с розовым турмалином (эльбаитом), а также в виде вросших кристаллов в прозрачном кварце (рис. 2). Цвет минерала от черного до красновато-коричневого. В основном колумбиты здесь черные с металловидным блеском, но с повышением величины Mn:Fe-отношения у них появляется красноватый оттенок. Иногда наблюдаются высокомарганцевые колумбиты с красным или коричневато-красным цветом, изредка встречаются прозрачные светло-красные. В отраженном свете минерал светло-серый с умеренной отражательной способностью, двуотражение в воздухе очень слабое (рис. 3а-в). В скрещенных николях минерал анизотропный с цветными эффектами анизотропии. Цвета анизотропии от коричневого до темно-синего (рис. 3б-г). Внутренние рефлексии красные. В отраженных электронах (BSE) иногда в колумбите наблюдается зональность (рис. 4). По химическому составу минерал изучаемого объекта чаще относится к манганоколумбиту (табл. 1). Отличительная черта манганоколумбита, позволяющая его отличить от ферроколумбита в полевых условиях – его красновато-коричневый цвет и бурая черта. Как правило, для ферроколумбита характерен черный цвет и черная черта, а также более высокая магнитная восприимчивость. Особенностью состава манганоколумбита исследуемого пегматита является наличие в нем примеси скандия и высокое содержание вольфрама. Содержание скандия в изученных образцах составляет от 0.2 до 1.4 мас.% Sc_2O_3 . Вольфрам отмечается как постоянная примесь в составе манганоколумбита и его содержания варьируют от 2.0 до 4.1 мас.% WO_3 . Содержание тантала в манганоколумбите из Лесхозовской жилы колеблется в диапазоне от 10.5 до 26.8 мас.% Ta_2O_5 .



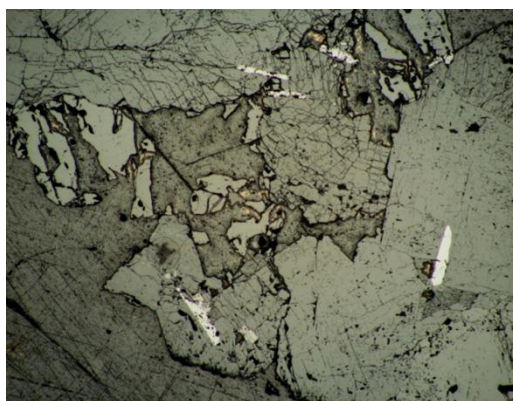
Рис. 2. Кристалл манганокolumбита в кварце. Фото под бинокулярным микроскопом (МБС-2).
Ширина поля 3 мм.



а



б



в



г

Рис. 3. Длиннопризматические кристаллы маганокolumбита в кварц-альбитовом агрегате. Полированный препарат. Изображения в отраженном свете: а, в – при одном николе; б, г – в скрещенных николях.
Ширина поля зрения 5 мм.

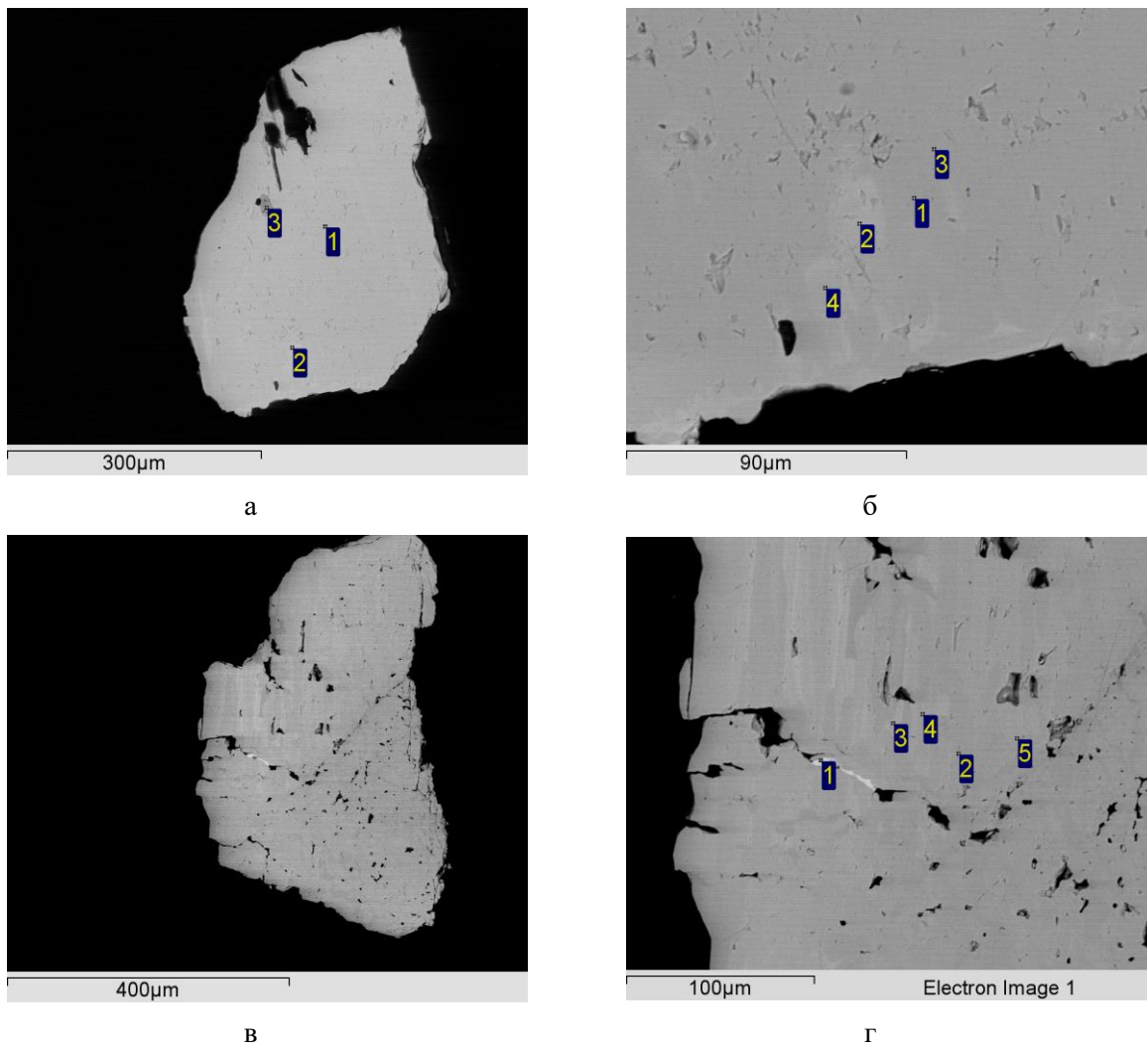


Рис. 4. Полированные срезы кристаллов колумбита. Изображения в отраженных электронах BSE.

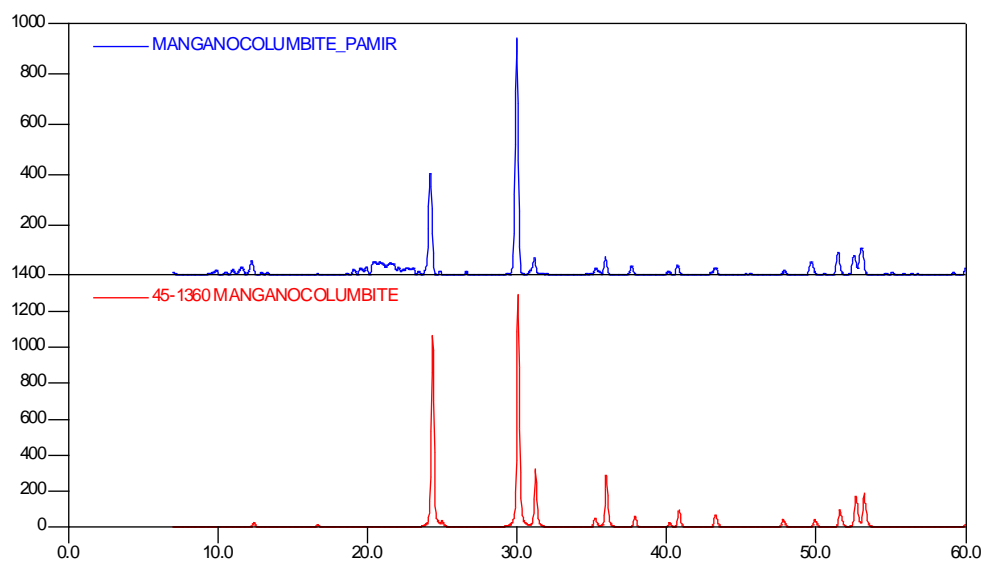


Рис. 5. Рентгеновские дифрактограммы манганоколумбита. Верхний спектр – минерала из пегматита Лесхозовский, нижний – из рентгеновской базы данных PDF-2, карточка 45-1360.

Таблица 1

Химический состав колумбита-(Mn) (мас.%) из пегматитовой жилы Лесхозовская,
Юго-Западный Памир

Оксиды	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MnO	17.23	16.39	16.76	17.31	14.03	17.81	14.82	17.69	14.46	18.44
FeO	0.26	0.09	0.25	0.10	5.12	0.84	4.53	0.97	4.77	0.96
Sc ₂ O ₃	1.31	1.39	1.44	1.40	0.52	0.20	0.53	0.30	0.63	0.53
TiO ₂	2.06	3.20	2.86	2.59	2.52	1.48	2.4	1.44	2.22	1.37
Nb ₂ O ₅	57.5	49.33	54.68	55.15	63.31	58.3	63.52	58.52	63.47	62.28
Ta ₂ O ₅	20.72	26.75	23.5	23.04	10.6	18.67	10.5	19.09	10.81	14.14
WO ₃	2.00	3.29	1.98	2.51	4.13	3.96	4.01	4.07	3.36	3.70
Сумма	101.08	100.44	101.47	102.1	100.23	101.26	100.31	102.08	99.72	101.42
Коэффициенты атомов в формуле при расчете O = 6										
Mn+2	0.87	0.86	0.85	0.88	0.69	0.91	0.73	0.89	0.72	0.92
Fe+2	0.01	0.00	0.01	0.00	0.25	0.04	0.22	0.05	0.23	0.05
Sc+3	0.07	0.07	0.08	0.07	0.03	0.01	0.03	0.02	0.03	0.03
∑A	0.95	0.93	0.94	0.95	0.97	0.96	0.98	0.96	0.98	1.00
Ti+4	0.09	0.15	0.13	0.12	0.11	0.07	0.11	0.06	0.10	0.06
Nb+5	1.56	1.38	1.48	1.49	1.67	1.58	1.68	1.58	1.69	1.66
Ta+5	0.34	0.45	0.38	0.37	0.17	0.30	0.17	0.31	0.17	0.23
W+6	0.03	0.05	0.03	0.04	0.06	0.06	0.06	0.06	0.05	0.06
∑B	2.02	2.03	2.02	2.02	2.01	2.01	2.02	2.01	2.01	2.01

Примечание: микрозондовые анализы выполнены на приборе JСХА-733 фирмы JEOL с помощью Si(Li)-энергодисперсионного спектрометра и системы анализа INCA Energy 350 фирмы Oxford при ускоряющем напряжении U = 20 кВ и токе зонда I = 1 нА. Аналитик Л.А.Паутов.

Пирохлор – микролит. Минералы группы пирохлора-микролита в пегматитовой жиле Лесхозовская были установлены в шлихах из продуктов разрушения пегматита в виде октаэдрических кристаллов темно-красного цвета (рис.6а). В образцах они обнаружены в мелких полостях из центральной части пегматита в ассоциации с ферсмитом, колумбитом, шахдараитом -(Y), бертрандитом и вторичным минералом – ярозитом (рис. 6б). Размеры отдельных кристаллов колеблются от 0.3-0.5 до 2-3 мм. В отраженном свете при одном никеле минералы надгруппы пирохлора белые с умеренной отражательной способностью, изотропны, часто с сильными внутренними рефлексами, а в проходящем свете темно-красные. В отраженных электронах (BSE) в кристаллах минерала выявляется зональность, обусловленная прежде всего колебаниями Nb/Ta соотношения. Центральная часть зерен минерала более светлая (в BSE) и по составу является микролитом, а краевые зоны кристаллов серые и соответствуют пирохлору (рис. 6в). Химический состав зерен весьма изменчив, от центра к периферии кристаллов содержание ниобия растет, а содержание тантала резко падает (рис. 6г, табл. 2). Это хорошо наблюдается и на картах распределения элементов, снятых с полированного среза кристалла (рис. 7). Следует отметить, что микролит и пирохлор из пегматита Лесхозовский кристаллические и дают хорошие рентгенограммы без прокаливании материала (рис. 8).

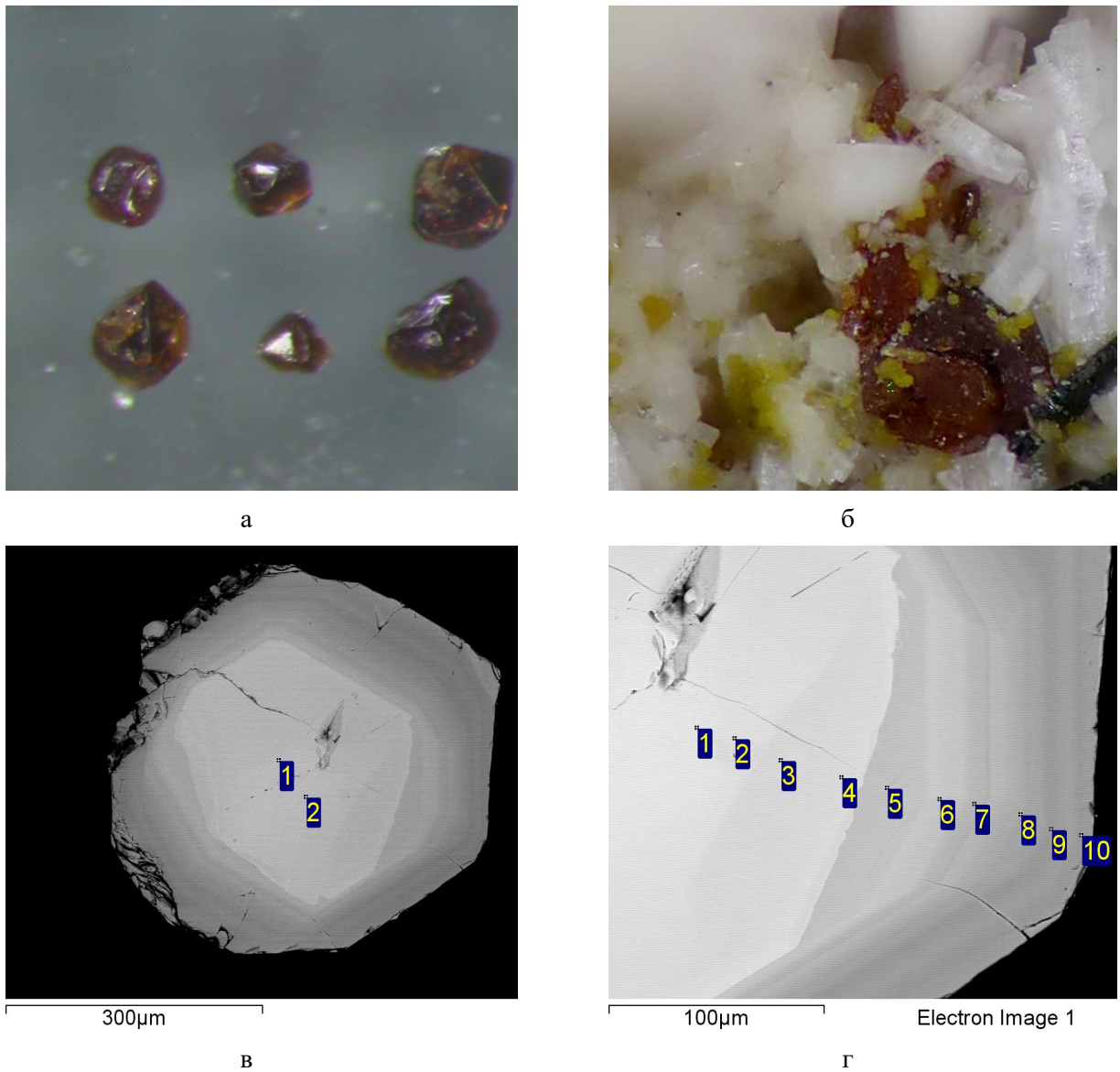


Рис. 6. Хорошо образованные октаэдрические кристаллы минерала серии микролита-пироклора: а – из немагнитной фракции шлиха; б – в мелких пустотах в ассоциации с колумбитом, берtrandитом и ярозитом. Изображения под бинокулярным микроскопом МБС-2. Ширина поля зрения 2.5 мм, в-г – Зональный кристалл микролита-пироклора в отраженных электронах BSE. Прозрачно полированный шлиф.

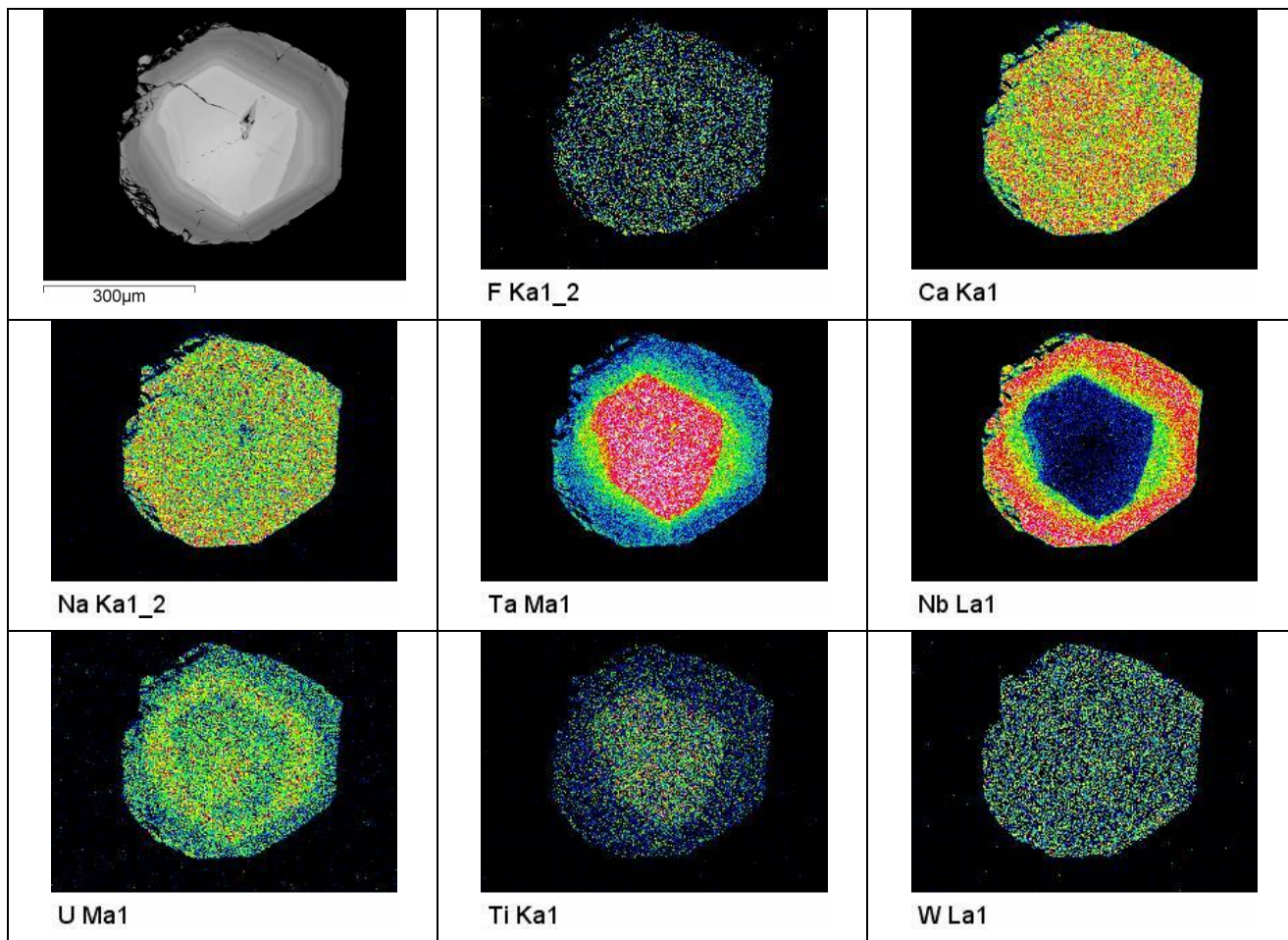


Рис. 7. Зональный кристалл микролит-пирохлора в отраженных электронах и карты распределения в нем указанных элементов. Карты распределения элементов получены с помощью Si(Li)-энергодисперсионного спектрометра и системы анализа INCA Energy 350 фирмы Oxford.

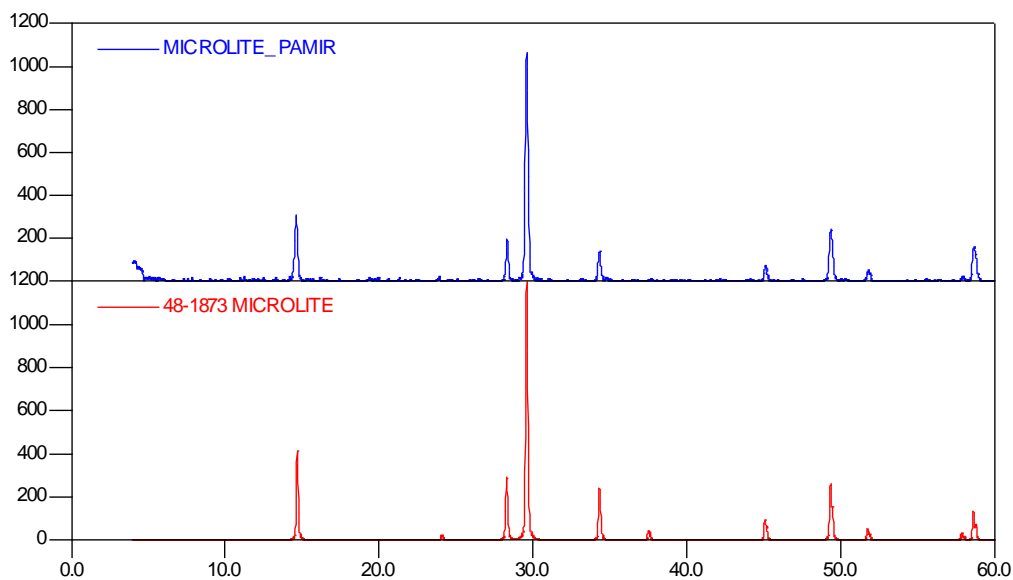


Рис. 8. Рентгеновские дифрактограммы микролита. Верхний спектр – из пегматита Лесхозовский, нижний – из рентгеновской базы данных PDF-2, карточка 48-1873.

Таблица 2

Химический состав минералов серии микролита-пирохлора (мас.%)
из пегматитовой жилы Лесхозовская, Юго-Западный Памир

Оксиды	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Na ₂ O	5.88	6.06	5.75	6.39	3.81	7.55	7.87	8.05	8.31	7.54
CaO	9.87	10.36	10.64	10.17	6.84	9.04	9.42	10.8	11.64	11.43
TiO ₂	1.77	2.19	2.00	1.93	0.72	0.67	0.42	0.37	0.42	0.17
Nb ₂ O ₅	9.36	11.17	14.2	15.06	33.16	31.52	38.8	42.87	46.60	46.25
SnO ₂	1.15	0.99	1.00	1.49	0.94	0.37	0.74	0.79	0.27	0.60
Sc ₂ O ₃	0.00	0.00	0.00	0.00	0.16	0.00	0.16	0.18	0.17	0.00
Ta ₂ O ₅	62.80	60.41	59.24	57.67	35.04	36.82	29.12	24.84	19.87	18.12
ThO ₂	0.44	0.38	0.35	0.50	0.00	0.00	0.16	0.00	0.00	0.00
UO ₂	5.27	5.52	3.56	5.39	8.35	8.44	7.44	4.98	3.00	3.05
F	2.81	3.31	3.71	3.42	2.29	2.59	3.76	4.13	4.13	4.06
Сумма	99.35	100.39	100.45	102.02	91.31	97.00	97.89	97.01	94.41	91.22
-O=F ₂	1.18	1.39	1.56	1.44	0.96	1.09	1.58	1.74	1.74	1.71
	98.17	99.00	98.89	100.58	90.35	95.91	96.31	95.27	92.67	89.51

Примечание: Микронзондовые анализы выполнены на приборе JXA-733 фирмы JEOL с помощью Si(Li)-энергодисперсионного спектрометра и системы анализа INCA Energy 350 фирмы Oxford при ускоряющем напряжении U = 20 кВ и токе зонда I = 1 нА. Аналитик Л.А.Паутов.

Обсуждение результатов и выводы

В пегматитовой жиле Лесхозовская на Юго-Западном Памире ниобий-танталовая минерализация представлена минералами изоморфных серий колумбита-танталита и пирохлора-микролита, а также ферсмитом. По химическому составу минералы этих групп сильно изменчивы. Микролит и пирохлор помимо основных компонентов также содержат примеси титана и олова. Содержание этих элементов (в мас.%): TiO₂ до 2.2 и SnO₂ до 1.5. Особенностью минералов надгруппы пирохлора Лесхозовской жилы является обратная зональность: ядерная часть кристаллов представлена микролитом, а внешняя зона – пирохлором. Обычный тренд эволюции состава минералов этой надгруппы в ходе пегматитового процесса – нарастание содержания тантала к поздним стадиям кристаллизации. Случаи возрастания Nb/Ta отношения в кристаллах пирохлора-микролита известны, но крайне редки.

Минералы группы колумбита-танталита в пегматите Лесхозовском представлены в основном манганколумбитом. Максимальное зафиксированное содержание Ta₂O₅ в минерале из этого пегматита – 26.8 мас.%. В составе колумбита наиболее важными являются повышенные содержания скандия и вольфрама. В литературе приведен анализ манганоколумбита из Западной Монголии, в котором содержание WO₃ – 3.91 и Ta₂O₅ – 19.88 мас. % [4], еще более высокие концентрации вольфрама, тантала и скандия отмечены в колумбите из пегматитовых полей Ильменских гор, в которых содержания WO₃ достигают 4.5 мас.% , Ta₂O₅ – 40.13 и Sc₂O₃ до 2.2 мас.% [5], что немногим больше, чем в манганколумбите из Лесхозовской пегматитовой жилы Шахдаринского пегматитового поля. Также есть описание значительно более вольфраmistых тантало-ниобатов из других пегматитовых тел на Юго-Западном Памире: манганоколумбита с содержанием WO₃ до 23 мас.%, стибикоколумбита – до 13, пирохлора – до 11 мас.% WO₃ и сильно зонального вольфраmistого иксиолита, содержащего до 15 мас. % WO₃ [6]. Ранее нами изучались колумбиты из Намангутского пегматитового поля (Юго-Западный Памир), которые отличаются от колумбита Лесхозовской жилы наличием в их составе олова, отсутствием на уровне чувствительности микронзондового анализа скандия и вольфрама [7]. Важ-

но отметить, что автором планируется в будущем более подробно изучать ниобий-танталовую минерализацию в других пегматитовых полях Памира.

Благодарности. Автор благодарит Т.Г.Бахтибекова, М.А.Шодибекова, С.Махмадшарифа и П.В.Хворова за помощь в проведении полевых работ на Юго-Западном Памире. Автор глубоко признателен Л.А.Паутову за выполнения микрозондовых анализов и обсуждение результатов. Также автор благодарит Ф.Ш.Искандарова за помощь при обработке и изучении шлиховых проб.

Поступило 11.01.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pautov L.A., Mirakov M.A., Sokolova E., Day M.C., Hawthorne F.C., Schodibekov M.A., & Faiziev A.R. Shakhdaraitе-(Y), ScYNb₂O₈, from the Leskhozovskaya granitic pegmatite, the valley of the Shakhdara River, southwestern Pamir, Gorno-Badakhshanskii Autonomous Region, Tajikistan: New mineral description and crystal structure. – The Canadian Mineralogist, 2022, vol. 60, №2, pp. 369-382.
2. Коноваленко С.И., Сазонтова Н.А., Смирнов С.З. Состав, строение и режим формирования миароловых пегматитов Лесхозовской жилы (Юго-Западный Памир). – Петрология магматических и метаморфических комплексов, 2001, Вып. 2, с. 226-228.
3. Сазонтова Н.А., Коноваленко С.И. Смирнов С.З. Магматическая кристаллизация двуполевошпатового неравномернoзернистого пегматита жилы Лесхозовская (Юго-Западный Памир): Изучение расплавных и флюидных включений. – Вестник Отделения наук о Земле РАН, 2003, №1, (21), с. 1-3.
4. Коноваленко С.И., Баева А.А. Минералы ниобия и тантала в гранитных пегматитах монгольского Алтая. – Материалы XII международной научной конференции 18-21 сентября 2015 г. Ховд, Монголия. Естественные науки, 2015, т. I, с. 89-91.
5. Леванов А.А., Пospelова Л.Н., Муфтахов В.А. Состав колумбитов из гранитных пегматитов Таткульского, Миассово-Татакульского и Савелькульского жильных полей Ильменских гор. – Уральский минералогический сборник, 2001, № 11, с. 22-30.
6. Коноваленко С.И., Волошин А.В., Пахомовский Я.А., Россовский Л.Н., Ананьев С.А. Вольфрамсодержащие разновидности танталониобатов из миароловых гранитных пегматитов Юго-Западного Памира. – Минералогический журнал, 1982, т.4, №1, с. 65-74.
7. Мираков М.А., Файзиев А.Р., Паутов Л.А., Шодибеков М.А. К минералогии пегматитов Намангутского пегматитового поля (Юго-Западный Памир). – Известия Академии наук Республики Таджикистан, 2018, №1, (170), с. 84-96.

М.А.Мираков

МИНЕРАЛИЗАЦИЯ НИОБИЙ ВА ТАНТАЛ ДАР ПЕГМАТИТИ ЛЕСХОЗ, АЗ МАЙДОНИ ПЕГМАТИТИ ШОҲДАРА (ҶАНУБУ ҒАРБИИ ПОМИР)

Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи АМИ Тоҷикистон

Кори мазкур оид ба омӯзиши минерализатсияи ниобий ва тантал дар пегматити Лесхоз равона гардидааст. Дар мақола тавсифи муфассали минералҳои маъданӣ аз гурӯҳҳои колумбит-танталит ва

пироклор-микролит бо овардани таркиби кимиёвии онҳо, харитаи тақсимои элементҳо, маълумот оид ба хосияти рентгении онҳо ва инчунин хосиятҳои оптикии минералҳо, ки дар зери микроскоп мушоида шуданд, оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: ниобий, тантал, колумбит-танталит, пироклор-микролит, пегматит, пегматитҳои Шоҳдара, Ҷанубу Фарбиш Помир.

M.A.Mirakov

**NIOBIUM-TANTALUM MINERALIZATION IN THE LESHOOVSKAYA
PEGMATITE VEIN FROM THE SHAKHDARA PEGMATITE FIELD
(SOUTH WESTERN PAMIR)**

*Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology,
National Academy of Sciences of Tajikistan*

In this work to the study of niobium-tantalum mineralization in the Leskhozovskaya pegmatite vein is devoted . The article gives a detailed description of ore minerals from the group of columbite-tantalite and pyrochlore-microlite with their chemical composition, element distribution maps, X-ray diffraction patterns, as well as a description of the optical properties of minerals observed under an ore microscope.

Key words: niobium, tantalum, columbite-tantalite, pyrochlore-microlite, pegmatite, Shahdara pegmatite field, Southwestern Pamir.

Сведения об авторах:

Мираков Мирак Абдурасулович – старший научный сотрудник Института геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана.