

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- З.Х.Рахмонов, И.Аллаков, Б.Т.Абраев.** Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми.....257
- Д.Дж.Хокиев.** Оценка двойных сумм значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел лежащих в арифметических прогрессиях.....263
- С.М.Лашкарбеков.** Стохастические дифференциальные уравнения с процессом Леви.....268
- М.Ш.Шабозов, А.А.Шабозова, М.М.Миркалонова.** Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций суммами Тейлора в пространстве Харди.....274
- К.К.Палавонов, Х.М.Хуромонов.** Наилучшее среднеквадратическое приближение функций в пространстве Бергмана и значение поперечников некоторых классов функций.....283
- Д.С.Сафаров.** Точное ограниченное периодическое решение обобщенного уравнения Кортвега-де Фриза с постоянными отклоняющимися аргументами290
- Н.Раджабов.** К теории одного класса переопределенной системы интегральных уравнений по цилиндрической области297
- М.Б.Хушвахтзода.** К теории модельных трехмерных интегральных уравнений типа Вольтерра с граничными особыми и слабо особыми областями308

АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, С.Н.Сафаров, Ф.Дж.Рахматуллаева.** Физические свойства астероида 2011 XZ1 по наблюдениям в период сближения с Землей.....317

ФИЗИКА

- М.Ш.Имом, Ф.Рахими.** Изучение потока тепловых нейтронов исследовательского ядерного реактора UTR-KINKI324

ЭКОЛОГИЯ

- М.З.Ахмедов, Х.М.Назаров, Ш.А.Рахимбердиев, У.Мирсаидов.** Естественные радионуклиды в почвах на территории ареала хвостохранилища Адрасман.....331

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- А.Шарифов, У.М.Мирсаидов.** Концепция внедрения водородной энергетики в Таджикистане337

ТЕХНОЛОГИЯ НЕОРГАНИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВ

- У.Х.Усмонова.** Технологические основы сернокислотной переработки обожжённой боросиликатной руды Ак-Архарского месторождения344

Дж.З.Тошов, А.Шарифов, Д.С.Неъматзода, З.А.Гозиев. Изменение свойств дорожного битума под влиянием минеральных добавок разных составов.....349

ГЕОЛОГИЯ

С.Нусратулло. Влияние горнопромышленных предприятий рудного поля Чоре на окружающую среду.....355

CONTENTS

MATHEMATICS

- Z.Kh.Rakhmonov, I.Allakov, B.Kh.Abraev.** Generalization of Goldbach's ternary problem with almost equal terms257
- D.J.Khokiev.** An estimate for double sums of Dirichlet character values from shifted products of two numbers lying in arithmetic progressions.....263
- S.M.Lashkarbekov.** Stochastic differential equations with Levy process268
- M.Sh.Shabozov, A.A.Shabozova, M.M.Mirkalonova.** Estimate of the remainder of the Taylor series for some classes of analytic functions by Taylor sums in the Hardy space.....274
- Q.Q.Palavonov, Kh.M.Khuromonov.** The best root-mean-square approximation of functions in Bergman space and the value of widths of some classes of functions283
- D.S.Safarov.** Exact bounded periodic solution of the generalized Korteweg-de Vries equation (KdV) with constant deviations of the argument290
- N.Rajabov.** To theory one class of the over determined system integral equation by cylindrical domain297
- M.B.Khushvakhtzoda.** On the theory of model three-dimensional Volterra-type integral equations with boundary special and weakly special domains308

ASTRONOMY

- G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, S.N.Safarov, F.J.Rakhmatulloeva.** Physical properties of asteroid 2011 XZ1 from optical observation at the sanglokh observatory.....317

PHYSICS

- M.Sh.Imom, F.Rahimi.** Investigation of the thermal neutron flux in the UTR-KINKI nuclear research reactor324

ECOLOGY

- M.Z.Akhmedov, Kh.M.Nazarov, Sh.A.Rahimberdiev, U.M.Mirsaidov.** Natural radionuclides in soils in the area of the Adrasman tailing dump331

INORGANIC CHEMISTRY

- A.Sharifov, U.M.Mirsaidov.** The concept of implementation of hydrogen energy in Tajikistan337

TECHNOLOGY OF INORGANIC SUBSTANCE

- U.Kh.Usmonova.** Technological foundations of sulfuric acid processing of burnt borosilicate ore of the Ak-Arkhar deposit344

J.Z.Toshov, A.Sharifov, D.S.Nematzoda, Z.A.Goziev. Changing the properties of road bitumen under the influence of mineral additives of different compositions349

GEOLOGY

S.Nusratullo. Impact of mining enterprises of the Chore orfield on the environmental355

УДК 511.344

Специальность: 1.1.5. – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Академик НАН Таджикистана З.Х.Рахмонов, И.Аллаков*, Б.Т.Абраев*

**АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА В ОБОБЩЕНИИ ТЕРНАРНОЙ
ПРОБЛЕМЫ ГОЛЬДБАХА С ПОЧТИ РАВНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ**

*Институт математики им. А.Джусраева НАН Таджикистана,
Термезский государственный университет

Получена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального N в виде $b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N$ с условиями

$$\left| b_i p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq (b_1 b_2 b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}, \quad b_i \leq (\ln N)^{B_i},$$

где b_1, b_2, b_3, N — попарно взаимно простые натуральные числа, B_i — произвольные фиксированные положительные числа.

Ключевые слова: тернарная проблема Гольдбаха, почти равные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма с простыми числами, малая окрестность центров больших дуг.

И.М.Виноградов [1] в 1937 году построил метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляют решето Виноградова и метод сглаживания двойных сумм. В частности, он впервые получил оценку линейной тригонометрической суммы с простыми числами, то есть при $k = 1$ нетривиальную оценку сумму вида

$$S_k(\alpha, x) = \sum_{m \leq x} \Lambda(m) e(\alpha m^k),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathcal{L}_x^b)$, $\mathcal{L}_x = \ln x$ и ему удалось вывести асимптотическую формулу для числа представлений нечётного N в виде суммы трёх простых чисел, что является решением тернарной проблемы Гольдбаха.

Короткую линейную тригонометрическую сумму с простыми числами вида $S_1(\alpha; x, y)$ впервые начал исследовать И.М.Виноградов [1]. Он, воспользовавшись своим методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами, получил нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln \ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при условии $y > x^{\frac{2}{3} + \varepsilon}$.

Адрес для корреспонденции: Рахмонов Зарулло Хусенович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: zarullo-r@rambler.ru. Аллаков Исмаил, Абраев Бахром Торакулович, 190111, Узбекистан, г. Термез, ул. Ф.Ходжаева, 43, Термезский государственный университет, iallakov@mail.ru, babrayev@mail.ru

К.В.Хазелгров [2] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$ получил нетривиальную оценку в малых дугах $m(\mathcal{L}_x^b)$ и асимптотическую формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_x^b)$ при

$$y \geq x^\theta, \quad \theta = \frac{63}{64} + \varepsilon.$$

Пользуясь этими результатами, ему удалось решить тернарную задачу Гольдбаха с почти равными слагаемыми, конкретно для количества решений диофантова уравнения вида

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \quad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^\theta, \tag{1}$$

нашёл асимптотическую формулу.

Пан Чен-дон и Пан Чен-бяю [3] на базе метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова и новых теорем о плотности нулей L -рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы разработали новый метод, с помощью которого доказали для суммы вида $S(\alpha; x, y)$ нетривиальную оценку в малых дугах $m(\mathcal{L}_x^b)$ и формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_x^b)$ при условии

$$y \geq x^\theta, \quad \theta = \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

В 1991 г. Т.Жан [4], используя метод Пан Чен-дона и Пан Чен-бяю и оценку М.Ютилы о четвёртом моменте L -функций Дирихле, заменил показатель θ на

$$\frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Наилучший результат в этой задаче принадлежит Ж.Чаохуа [5]. Он доказал, что диофантово уравнение (1) разрешимо с показателем

$$\theta = \frac{7}{12} + \varepsilon.$$

А.Вакер [6] доказал: *если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – ненулевые действительные числа, не одного знака, причём хотя бы одно из отношений λ_i / λ_j иррационально, тогда для любого натурального n существует бесконечно много простых чисел p_1, p_2, p_3 , удовлетворяющих неравенству*

$$|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3| \leq (\ln p)^{-n}, \quad p = \max(p_1, p_2, p_3).$$

В процессе доказательства этого результата он воспользовавшись круговым методом и поведением линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$S_1(b_i \alpha, N) = \sum_{p \leq N} e(b_i \alpha p),$$

как в больших так и в малых дугах, при выполнении определенных условий исследовал разрешимость уравнения

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N, \tag{2}$$

в простых числах p_1, p_2, p_3 , где b_1, b_2, b_3 и N – целые числа (см. также [7]).

Основным результатом этой работы является теорема 1 об асимптотической формуле для количества решений диофантова уравнения (2) при условии, что слагаемые $b_i p_i$ почти равны, а коэффициенты b_1, b_2, b_3 не превосходят произвольной фиксированной положительной степени логарифма от числа N .

Теорема 1. Пусть b_1, b_2, b_3, N – попарно взаимно простые натуральные числа, $N > N_0, B_1, B_2, B_3$ – произвольные фиксированные положительные числа, $b_i \leq (\ln N)^{B_i}, I(N, H)$ – число решений диофантова уравнения

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N, \quad \left| b_i p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H,$$

в простых числах p_1, p_2 и p_3 . Тогда при $H \geq (b_1 b_2 b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(N, H) = \frac{3\mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N) H^2}{b_1 b_2 b_3 (\ln N)^3} + O\left(\frac{H^2 \ln \ln N}{b_1 b_2 b_3 (\ln N)^4}\right),$$

$$\mathfrak{S}(b_1, b_2, b_3, N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|b_1 b_2 b_3 N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right).$$

С помощью кругового метода Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова для аддитивных задач с почти равными слагаемыми и почти пропорциональными слагаемыми [8-12] доказательство теорема 0 сведено к трём следующим задачам:

- вывод асимптотической формулы для коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(ban),$$

в малых окрестностях центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathcal{L}^{c_1})$;

- нахождение нетривиальных оценок сумм $S_1(b\alpha; x, y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_x^{c_1})$, кроме малых окрестностей их центров;

- получение нетривиальных оценок сумм $S_1(b\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathcal{L}_x^{c_1})$.

Эти задачи решены в теоремах 2 и 3.

Теорема 2. Пусть $x \geq x_0$, A, B, c_1 и c_2 – абсолютные постоянные числа, $c_2 \leq c_1$, b – натуральное число, $b \leq \mathcal{L}_x^B$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq h, \quad h = \mathcal{L}_x^{c_1}, \quad \tau = \frac{y^2}{x\mathcal{L}_x^{c_2}}.$$

Тогда при $y \geq x^{\frac{5}{8}} b h \mathcal{L}_x^{2,25A+81}$ справедливо равенство

$$S_1(b\alpha; x, y) = \frac{\mu\left(\frac{q}{(b, q)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b, q)}\right)} \frac{\sin \pi b \lambda y}{\pi b \lambda} e\left(b \lambda \left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O\left(y \mathcal{L}_x^{-A}\right).$$

Теорема 2 доказывается методом работы [13], где, воспользовавшись вторым моментом L -функций Дирихле на критической прямой для суммы

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^k)$$

в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_x^b)$, $\tau = y^5 x^{-2} \mathcal{L}_x^{-b}$, за исключением малой окрестности их центров

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| > \left(2\pi k^2 x^{k-2} y^2 \right)^{-1}, \quad \text{при } y \geq x^{\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathcal{L}_x^{c_k},$$

$$\eta_k = \frac{2}{4k-5+2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}}, \quad c_k = \frac{2A+22+\left(\frac{2\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}}-1\right)b_1}{2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}-(2k-3)},$$

получена нетривиальная оценка вида

$$S_k(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A},$$

где A, b_1, b – произвольные фиксированные положительные числа, а в малой окрестности центров больших дуг доказана асимптотическая формула.

Теорема 3. Пусть $x \geq x_0$, A – абсолютная постоянная, $y \geq b x^{\frac{2}{3}} \mathcal{L}_x^{\frac{8}{3}A+52}$, b – натуральное число,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad b \mathcal{L}_x^{4A+82} < q \leq \frac{y^2}{x} \mathcal{L}_x^{-4A-82}, \quad |\theta| \leq 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathcal{L}_x^A}.$$

Теорема 3 доказывается методом работы [14], где нетривиальная оценка суммы $S_3(\alpha; x, y)$ в малых дугах $m(\mathcal{L}_x^{32(A+20)})$ при $y \geq x^{\frac{4}{5}} \mathcal{L}_x^{8A+151}$ и $\tau = \frac{y^5}{x^2} \mathcal{L}_x^{-32(A+20)}$ получена методом оценок сумм с простыми числами И.М.Виноградова в сочетании с методом работы [15]. Основными утверждениями, позволившими получить оценку $S_1(b\alpha; x, y)$, являются нетривиальные оценки двойных сумм на малых дугах, соответственно имеющих “длинную” сплошную сумму и, имеющих близкие по порядку суммы, составляющие двойную сумму.

Поступило 19.04.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Виноградов И.М. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1952.
2. Haselgrove C.B. Some theorems in the analytic theory of number. – J. London Math. Soc., 1951, v. 26, pp. 273-277.
3. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III). – Chinese Ann. of Math, 1990, v. 2, pp. 138-147.
4. Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes. – Acta Math Sinica. New ser, 1991, v. 7, №3, pp. 135-170.
5. Jia Chao-hua. Three primes theorem in a short interval (VII). – Acta Mathematica Sinica. New ser, 1994, v. 10, №4, pp. 369-387.
6. Baker A. On some diophantine inequalities involving primes. – J. Reine Angew. Math, 1967, v. 228, pp. 166-181.
7. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел – Термез. Изд. «Сурхан нашр», 2021, 160 с.
8. Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2003, т. 74, вып. 4, с. 564-572.
9. Рахмонов З.Х., Мирзоабдугафуров К.И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми. – ДАН РТ, 2008, т. 51, №2, с. 83-86.
10. Рахмонов З.Х., Азамов А.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми. – ДАН РТ, 2011, т. 54, №3, с. 34-42.
11. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2014, т. 95, вып. 3, с. 445-456.
12. Рахмонов З.Х., Назрублов Н.Н., Рахимов А.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения. – Чебышевский сборник, 2015, т. 16, в. 1(53), с. 232-247.
13. Рахмонов З.Х. Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами в длинных дугах. – Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4(81), с. 199-223.
14. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Короткие кубические суммы простыми числами. – Труды Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук, 2016, т. 296, с. 220-242.
15. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса. – Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып 4, с. 281-305.

З.Х.Раҳмонов, И.Аллаков*, Б.Т.Абраев*

ФОРМУЛАИ АСИМПТОТӢ ДАР МУАММОИ УМУМИКАРДАШУДАИ ГОЛДБАХ БО ЧАМШАВАНДАҲОИ ҚАРИБ БАРОБАР

Институти математикаи ба номи А. Чураеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

*Донишгоҳи давлатии Термез

Барои миқдори тасвирҳои адади кифоя калони натуралии N дар намуди $b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N$ бо шартҳои

$$\left| b_i p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq (b_1 b_2 b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}, \quad b_i \leq (\ln N)^{B_i},$$

ки дар ин ҷо b_1, b_2, b_3, N ададҳои натуралии чуфт-чуфт байни ҳам содда, B_i — дилхоҳ адади мусбати фиксиронидашуда, формулаи асимптотӣ гирифта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: муаммои тернарии Голдбах, чамъшавандаҳои қариб мутаносиб, суммаи кутӯҳи тригонометрӣ бо ададҳои содда, атрофи хурди марказҳои камонҳои калон.

Z.Kh.Rakhmonov, I.Allakov*, B.Kh.Abraev*

GENERALIZATION OF GOLDBACH'S TERNARY PROBLEM WITH ALMOST EQUAL TERMS

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan,

*Termez State University

An asymptotic formula is obtained for the number of representations of a sufficiently large natural N in the form $b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N$ with the conditions

$$\left| b_i p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq (b_1 b_2 b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}, \quad b_i \leq (\ln N)^{B_i},$$

where b_1, b_2, b_3, N are pairwise coprime natural numbers, B_i – arbitrary fixed positive numbers

Key words: ternary Goldbach problem, almost equal terms, short exponential sum with primes, small neighborhood of centers of major arcs.

Сведения об авторах:

Раҳмонов Зарулло Хусенович – доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, директор Института математики им. А.Джураева (г. Душанбе).

Аллаков Исмаил – профессор, доктор физико-математических наук, Термезский государственный университет (Узбекистан, г. Термез).

Абраев Бахром Холгораевич – базовый докторант (PhD), Термезский государственный университет (Узбекистан, г. Термез).

УДК 511.344

Специальность: 1.1.5. – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Д.Дж.Хокиев

ОЦЕНКА ДВОЙНЫХ СУММ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРА ДИРИХЛЕ ОТ СДВИНУТЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДВУХ ЧИСЕЛ ЛЕЖАЩИХ В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 08.03.2023 г.)

При $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ получены нетривиальные оценки коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле по составному модулю q от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, то есть сумм вида

$$W = \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{\substack{U < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (mn, q) = 1, mn \equiv l \pmod{\nu}}} b_n \chi_q(mn - l) \quad (lv, q) = 1.$$

Ключевые слова: характер Дирихле, сдвинутые простые числа, короткая сумма характеров, тригонометрические суммы с простыми числами.

При изучении закона распределения значений производных характеров χ по составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p - l$, $(l, D) = 1$, наряду с задачей получения нетривиальной оценки сумм значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, возникает также задача о нетривиальной оценке двойных сумм $W = W_q(x, M, N, l, \nu)$ вида

$$W_q(x, M, N, l, \nu) = \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ (m, q) = 1}} a_m \sum_{\substack{U < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (n, q) = 1, mn \equiv l \pmod{\nu}}} b_n \chi_q(mn - l), \quad (\nu l, q) = 1,$$

где a_m и b_n – функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leq \tau^c(m)$ и $|b_n| \leq \tau^c(n)$, c – положительное фиксированное число, не все время одно и то же, χ_q – примитивный характер по модулю q . Сумма $W_q(x, M, N, l, \nu)$ называется двойной суммой значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях.

В сумме $W_q(x, M, N, l, \nu)$, не ограничивая общности, можно считать, что $N \leq M$. Отметим, что если в рассматриваемой задаче (закон распределения значений производных характеров χ по

Адрес для корреспонденции: Хокиев Доннер Джалилович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Рудаки 17, Таджикский национальный университет. E-mail: khdj.91@mail.ru.

составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l, D) = 1$) характер χ является примитивным, то есть если $\chi = \chi_q$, то вместо суммы $W_q(x, M, N, l, \nu)$ возникает более простая сумма $W_q(x, M, N, l, 1) = W_q(x, M, N, l)$ вида

$$W_q(x, M, N, l) = \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ (m, q) = 1}} a_m \sum_{\substack{U < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (n, q) = 1}} b_n \chi_q(mn - l), \quad (l, q) = 1.$$

И.М.Виноградов, впервые изучая сумму $W_q(x, M, N, l)$ для простого q , получил её нетривиальную оценку при $x \geq q^{1+\varepsilon}$, а затем нетривиальную оценку короткой суммы $W_q(x, M, N, l)$ при $x \geq q^{0,75+\varepsilon}$ [1]. Наилучшая нетривиальная оценка $W_q(x, M, N, l)$ для простого q при $x \geq q^{0,5+\varepsilon}$ найдена в работе А.А.Карацубы [2].

З.Х.Рахмонов [3,4] изучил сумму $W_q(x, M, N, l, \nu)$ для составного q и получил нетривиальную оценку при $x \geq q^{1+\varepsilon}$. Нетривиальную оценку короткой суммы $W_q(x, M, N, l)$ для составного q при $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ в 2010 году получили Дж.Б.Фридландер, К.Гонг, И.Е.Шпарлинский [5].

З.Х.Рахмонов [6,7] для составного q доказал нетривиальную оценку $W_q(x, M, N, l)$ при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, а в 2017 г. он [8] для модулей q – число свободное от кубов получил нетривиальную оценку суммы $W_q(x, M, N, l, \nu)$ при $y \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Теорема. Пусть M, N, U — целые числа, $N \leq U < 2N \leq q^{\frac{1}{6}}$,

$$W_q(x, M, N, l, \nu) = \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ (m, q) = 1}} a_m \sum_{\substack{U < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (n, q) = 1, mn \equiv l \pmod{\nu}}} b_n \chi_q(mn - l), \quad (\nu l, q) = 1,$$

a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что

$$\sum_{M < m \leq 2M} |a_m|^\alpha \ll M \mathcal{L}^\alpha, \quad \alpha = 1, 2; \quad |b_n| \ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$|W_q(x, M, N, l, \nu)| \ll BM^{\frac{5}{6}} N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\delta} \mathcal{L}^{\frac{4c_1 + c_2 + 1}{6}}.$$

Схема доказательства. Не ограничивая общности, будем считать, что выполняется условие $MN < x$. Сумму $W_q(x, M, N, l, \nu)$ преобразуем в другую так, чтобы интервал суммирования внутренней суммы не зависел от m . Поступая аналогично, как при доказательстве леммы 4.1 в работе [7], имеем неравенство

$$|W_q(x, M, N, l, \nu)| \ll \mathcal{L} \max_{0 \leq j < \nu} \max_{0 \leq k < q} W(j, k), \tag{1}$$

$$W(j, k) = \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ (m, q) = 1}} |a_m| |B(kv + jq, m)|,$$

$$B(kv + jq, m) = \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ (n, q) = 1}} b_n \chi_q(mn - l) e\left(\frac{(kv + jq)n}{qv}\right).$$

Оценим $W(j, k)$. Возведем обе части этого равенства в куб и воспользуемся неравенством Гельдера, полагая в нем $\nu = m$, $a_\nu = |a_m|$, $b_\nu = |B(kv + jq, m)|$. Будем иметь:

$$W^3(j, k) \ll M^2 \mathcal{L}^{2c_1} \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ (m, q) = 1}} |a_m| |B(kv + jq, m)|^3.$$

Возведя обе части последнего неравенства в квадрат, применяя неравенство Коши, и условие $M < q$, найдем

$$\begin{aligned} W^6(j, k) &\ll M^4 \mathcal{L}^{4c_1} \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ (m, q) = 1}} |a_m|^2 \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ (m, q) = 1}} |B(kv + jq, m)|^6 \ll \\ &\ll M^5 \mathcal{L}^{4c_1 + c_2} \sum_{\substack{m=0 \\ (m, q) = 1}}^{q-1} |B(kv + jq, m)|^6. \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись явным видом $B(kv + jq, m)$, получим

$$\begin{aligned} W^6(j, k) &\ll M^5 \mathcal{L}^{4c_1 + c_2} \sum_{\substack{\lambda=0 \\ (\lambda, q) = 1}}^{q-1} \left| \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ (n, q) = 1}} b_n \chi_q(n + \lambda) e\left(\frac{(kv + jq)n}{qv}\right) \right|^6 \ll \\ &\ll M^5 \mathcal{L}^{4c_1 + c_2} \sum_{\substack{N' < n_1, \dots, n_6 \leq 2N \\ (n_1, \dots, n_6, q) = 1}} |b_{n_1} \dots b_{n_6}| \left| \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda + n_1)(\lambda + n_2)(\lambda + n_3)}{(\lambda + n_4)(\lambda + n_5)(\lambda + n_6)}\right) \right|. \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись неравенством $|b_n| \ll B$, затем известной оценкой Д.Берджесса, найдем

$$\begin{aligned} W^6(j, k) &\leq B^6 M^5 \mathcal{L}^{4c_1 + c_2} \sum_{1 \leq n_1, \dots, n_6 \leq 2N} \left| \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda + n_1)(\lambda + n_2)(\lambda + n_3)}{(\lambda + n_4)(\lambda + n_5)(\lambda + n_6)}\right) \right| \ll \\ &\ll B^6 M^5 N^3 q^{1+\delta} \mathcal{L}^{4c_1 + c_2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1) следует утверждение теоремы.

Из этой теоремы, в частности вытекает следующая нетривиальная оценка двойной суммы, имеющей сумму для длины N , которой выполняется неравенство $q^{\frac{1}{12}} \leq N \leq q^{\frac{1}{6}}$.

Следствие Пусть M, N, U – целые числа,

$$N \leq U < 2N, \quad q^\theta \leq N \leq q^{\frac{1}{6}}, \quad D^{\frac{1}{2}} \leq q \leq D, \quad \nu \leq \exp \sqrt{2\mathcal{L}},$$

$$W_q(x, M, N, l, \nu) = \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ (m, q) = 1}} a_m \sum_{\substack{U < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (n, q) = 1, mn \equiv l \pmod{\nu}}} b_n \chi_q(mn - l), \quad (\nu l, q) = 1,$$

a_m и b_n – функции натурального аргумента такие, что

$$|a_m| \leq \tau_5(m), \quad |b_n| \leq 1.$$

Тогда при $x \geq q^{1-2\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка

$$|W_q(x, M, N, l, \nu)| \ll \frac{x}{\nu} \exp(-0,7\sqrt{\mathcal{L}}).$$

Доказательство. Согласно лемме К.К.Марджанашвили, имея в виду, что $\ln M \ll \mathcal{L}$, найдём

$$\sum_{M < m \leq 2M} \tau_5(m) \ll M \mathcal{L}^4, \quad \sum_{M < m \leq 2M} \tau_5^2(m) \ll M \mathcal{L}^{24}.$$

Из теоремы 1 при $c_1 = 4$, $c_2 = 24$, воспользовавшись условием $MN \leq x$, $N \geq q^\theta$ и $x \geq q^{1-2\theta+1,1\delta}$, найдём

$$\begin{aligned} |W_q(x, M, N, l, \nu)| &\ll (MN)^{\frac{5}{6}} N^{-\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\delta} \mathcal{L}^{\frac{20}{3}} \leq x^{\frac{5}{6}} N^{-\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\delta} \mathcal{L}^{\frac{20}{3}} = \\ &= x \left(\frac{N^{-2} q^{1+\delta}}{x} \right)^{\frac{1}{6}} \mathcal{L}^{\frac{20}{3}} \leq x \left(\frac{q^{1-2\theta+\delta}}{x} \right)^{\frac{1}{6}} \mathcal{L}^{\frac{20}{3}} \ll x q^{\frac{\delta}{60}} \mathcal{L}^{\frac{20}{3}}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношениями $D^2 \leq q \leq D$ и $\nu \leq \exp \sqrt{2\mathcal{L}}$, имеем

$$|W_q(x, M, N, l, \nu)| \ll \frac{x}{\nu} \mathcal{L}^{\frac{20}{3}} \exp \sqrt{2\mathcal{L}} D^{-\frac{\delta}{120}} \ll \frac{x}{\nu} \exp(-0,7\sqrt{\mathcal{L}}).$$

Поступило 08.03.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов И.М. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1952.
2. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами. – Известия АН СССР. Серия математическая, 1970, т. 34, с. 299-321.
3. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами. – Доклады АН Таджикской ССР, 1986, т. 29, №1, с. 16-20.
4. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения. – Труды Математического института им. В.А.Стеклова, 1994, т. 207, с. 286-296.
5. Фридландера Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах. – Математические заметки, 2010, т. 88, в. 4. с. 605-619.
6. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел. – ДАН РТ, 2013, т. 56, №1, с. 5-9.
7. Рахмонов З.Х. Суммы характеров с простыми числами. – Чебышевский сборник, 2014, т. 15, в. 2(50), с. 73-100.

8. Рахмонов З.Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел. – Труды Математического института им. В.А.Стеклова, 2017, т. 299, с. 1-27.

Д.Ч.Хокиев

**БАҲОИ СУММАҲОИ ДУКАРАТАИ ҚИМАТҲОИ ХАРАКТЕРИ ДИРИХЛЕ АЗ
ҲОСИЛИ ЗАРБИ ЛАҒЧОНИДАШУДАИ ДУ АДАД ДАР ПРОГРЕССИЯИ
АРИФМЕТИКӢ**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Ҳангоми $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ баҳои ғайритривиалии суммаҳои дукаратаи кӯтоҳи қиматҳои характери Дирихле аз рӯи модули таркибии D аз ҳосили зарби лағҷонидашудаи ду адад дар прогрессияи арифметикӣ, яъне суммаи намуди

$$W = \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{\substack{U < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (mn, q) = 1, mn \equiv l \pmod{\nu}}} b_n \chi_q(mn - l) \quad (lv, q) = 1,$$

гирифта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: характери Дирихле, ададҳои соддаи лағҷонидашуда, суммаи кӯтоҳи характерҳо, суммаи тригонометрӣ бо ададҳои содда.

D.J.Khokiev

**AN ESTIMATE FOR DOUBLE SUMS OF DIRICHLET CHARACTER VALUES
FROM SHIFTED PRODUCTS OF TWO NUMBERS LYING IN ARITHMETIC
PROGRESSIONS**

Tajik National University

For $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, nontrivial estimates are obtained for short double sums of primitive Dirichlet character values modulo q of shifted products of two numbers lying in arithmetic progressions, i.e. sums of the form

$$W = \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{\substack{U < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (mn, q) = 1, mn \equiv l \pmod{\nu}}} b_n \chi_q(mn - l) \quad (lv, q) = 1.$$

Key words: Dirichlet character, shifted primes, short sums of characters, exponential sums over primes.

Сведения об авторах:

Хокиев Дониер Джалилович – кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и теории чисел ТНУ (г. Душанбе).

УДК 511.5

Специальность: 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

С.М.Лашкарбеков

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПРОЦЕССОМ ЛЕВИ

Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Илоловым 05.04.2023 г.)

В работе доказана теорема существования и единственности решений для дифференциальных стохастических уравнений с аддитивным процессом Леви.

Ключевые слова: *стохастический процесс, стационарный процесс, 1-мерный процесс, дифференциальная форма меры Пуассона.*

В работе рассматриваем более общий класс стохастических процессов, по сравнению с процессами Винера, а именно процессы Леви. Основы процесса Леви изложены в работе [1].

Определение 1. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) вероятностное пространство. 1-мерный процесс Леви является стохастическим процессом

$$\eta(t) = \eta(t, \omega) : [0, \infty) \cdot \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

со следующими свойствами:

- 1) $\eta(0) = 0$ почти наверное;
- 2) η имеет независимые приращения;
- 3) η имеет стационарные приращения, то есть для всех фиксированных $h > 0$ процесс приращения

$$I(t) = \eta(t+h) - \eta(t), \quad t \geq 0$$

является стационарным процессом.

Стохастический процесс $\Theta(t)$ является стационарным, если $\Theta(t+t_0)$ имеет тот же закон распределения, что и $\Theta(t), t_0 > 0$;

- 4) η является стохастически непрерывным, то есть для всех $t > 0, \varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{s \rightarrow t} P(|\eta(t) - \eta(s)| > \varepsilon) = 0,$$

и η имеет cadlag траектории, то есть траектории η непрерывны справа и имеют предел слева.

Адрес для корреспонденции: Лашкарбеков С.М. Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр.Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни, E-mail: lashkfrbekov89@bk.ru

Заметим, что если усилим условие 4), требуя, что η имеет непрерывные траектории, то фактически η будет с необходимостью иметь форму

$$\eta(t) = at + \sigma B(t), t \geq 0,$$

где a, σ – постоянные и $B(t)$ – броуновское движение. Таким образом, наличие скачков отличает общий процесс Леви от броуновского движения с постоянным сносом. Скачок η в момент времени t определяется как

$$\Delta\eta(t) = \eta(t) - \eta(t_-).$$

Пусть $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и пусть $\mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$ – семейство всех борелевских подмножеств $U \subset \mathbb{R}$ таких, что $\bar{U} \subset \mathbb{R}_0$. Если $U \subset \mathbb{R}_0$ и $t > 0$, то можно задать множество

$$N(t, U) = \text{число скачков функции } \eta(\cdot) \text{ размера } \Delta\eta(s) \in U; s \leq t.$$

Поскольку траектории η являются cadlag, то легко увидеть, что $N(t, U) < \infty$ для всех $t > 0, U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$.

Можно доказать, что для всех $\omega \in \Omega$ функция

$$(a, b) \times U \mapsto N(b, U) - N(a, U), 0 \leq a < b < \infty, U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$$

задает меру на $\mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$, называемую случайной мерой Пуассона процесса η .

Дифференциальная форма меры Пуассона обозначается как

$$N(dt, dz).$$

Тогда мера Леви определяется в виде

$$\nu(U) = E[N(1, U)]; U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0). \tag{1}$$

Мера Леви не обязана быть конечной. Фактически возможно следующее равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, |z|) \nu(dz) = \infty. \tag{2}$$

С другой стороны, всегда имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, z^2) \nu(dz) < \infty. \tag{3}$$

Мера Леви определяет закон распределения для $\eta(\cdot)$. Имеет место

Теорема 1. (Формула Леви-Хинчина) [2]. Пусть η является процессом Леви с мерой Леви ν .

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, z^2) \nu(dz) < \infty$$

и

$$E[e^{iu\eta(t)}] = e^{i\psi(u)}, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где

$$\psi(u) = -1/2\sigma^2 u^2 + i\alpha u \int_{|z|<1} \{e^{iuz} - 1 - iuz\} \nu(dz) + \int_{|z|\geq 1} \{e^{iuz} - 1 - iuz\} \nu(dz) \tag{5}$$

для некоторых постоянных $\alpha, \sigma \in \mathbb{R}$.

Обратно, если заданы постоянные $\alpha, \sigma \in \mathbb{R}$. и мера ν на $B(\mathbb{R}_0)$ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, z^2) \nu(dz) < \infty,$$

то существует процесс Леви $\eta(\cdot)$ такой, что равенства (4), (5) выполняются.

В общем случае можно доказать, что если определена компенсированная случайная мера Пуассона \hat{N} в виде

$$\hat{N}(dt, dz) = N(dt, dz) - \nu(dz)dt \tag{6}$$

и $\Theta(t, x)_{\mathcal{F}_t}$ – адаптированный процесс такой, что

$$E \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Theta^2(t, z) \nu(dz) dt \right] < \infty,$$

то

$$M(t) = \lim_{s \rightarrow t} \int_{0|z|\geq 1/n}^T \Theta(t, z) \hat{N}(dz, dt), \quad 0 \leq t < T$$

существует как предел в $L^2(P)$ и является мартингалом. Имеет место изометрия Ито

$$E \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Theta(t, z) \hat{N}(dz, dt) \right] = E \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Theta^2(t, z) \nu(dz, dt) \right]. \tag{7}$$

Теорема 2. (Декомпозиционная теорема Ито-Леви). Пусть η процесс Леви. Тогда η может быть записана в виде

$$\eta(t) = a_1 t + \sigma B(t) + \int_{|z|<1} z \hat{N}(dt, dz) + \int_{|z|\geq 1} z N(dt, dz), \tag{8}$$

где a_1, σ – постоянные и $B(\cdot)$ – броуновское движение. В частности, если

$$E[|\eta(t)|] < \infty \text{ для всех } t, \tag{9}$$

то $\int_{|z| \geq 1} z\nu(dz)$ корректно определена и представление (8) примет вид

$$\eta(t) = at + \sigma B(t) + \int_{\mathbb{R}} z \hat{N}(dt, dz). \quad (10)$$

С учетом (10) естественно рассмотреть стохастический процесс вида

$$X(t) = x + \int_0^t \alpha(s, \omega) ds + \int_0^t \beta(s, \omega) dB(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s, \omega) \hat{N}(ds, dz), \quad (11)$$

где α, β и γ предсказуемые процессы такие, что

$$\int_0^T \left\{ |\alpha(s)| + \beta^2(s) + \int_{\mathbb{R}} \gamma^2(s, z) \nu(dz) dz \right\} < \infty \quad \text{п.н.} \quad (12)$$

Такой процесс называется процессом Ито-Леви. По аналогии с броуновским движением можно записать (12) в дифференциальной форме

$$dX(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z) \hat{N}(dt, dz), \quad X(0) = X. \quad (13)$$

Теорема 3. (1-мерная формула Ито). Пусть $X(t)$ – процесс Ито-Леви (10). Пусть $f(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция из $C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ и определим

$$Y(t) = f(t, X(t)).$$

Тогда $Y(t)$ также является процессом Ито-Леви и

$$\begin{aligned} dY(t) = & \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial f}{\partial t}[\alpha(t)dt + \beta(t)dB(t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \partial x^2(t, X(t))\beta^2(t)dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}} \left\{ (f(t, X(t)) + \gamma(t, z)) - (f(t)X(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))\gamma(t, z) \right\} \nu(dz) + \\ & + \int_{\mathbb{R}} f(t)X(t) + \gamma(t, z) - f(t, X(t)) \hat{N}(dt, dz). \end{aligned} \quad (14)$$

Теоремы существования для n -мерных систем.

Теорема 4. Пусть $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ и $\Theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^e \rightarrow \mathbb{R}^{n \times e}$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям:

1) существует постоянная C такая, что

$$|b(t, x)|^2 + \|\beta(t, x)\|^2 + \sum_{k=1}^e \int_{\mathbb{R}} |\Theta_k(t, x, z_k)|^2 \nu_k(dz_k) \leq C(1 + |x|^2) \quad (15)$$

для всех $t \in [0, T]; x \in \mathbb{R}^n$;

2) существует постоянная D такая, что

$$|b(t, x) - b(t, y)|^2 + \|\beta(t, x) - \beta(t, y)\|^2 + \sum_{k=1}^e \int_{\mathbb{R}} |\Theta_k(t, x, z_k)|^2 - \nu_k(t, y, z_k)|^2 \nu_k(dz_k) \leq D|x - y|^2 \tag{16}$$

для всех $t \in [0, T]; x \in \mathbb{R}^n$.

Тогда стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \beta(t, X(t))dB(t) + \int_{\mathbb{R}} \Theta(t, X(t-), z) \hat{N}(dt, dz), \quad 0 \leq t \leq T, \quad X(0) = x \in \mathbb{R}^n \tag{17}$$

имеет единственное F_t -адаптированное *cadlag* решение $X(t)$ такое, что $E[X^2] < \infty$ для всех $t \in [0, T]$

Пример. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY(t) = \mu(t)Y(t)dt + \sigma(t)Y(t)dB(t) + Y(t-) \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, x) \hat{N}(dt, dz), \quad t \geq 0, \quad Y(0) = y > 0, \tag{18}$$

где $\mu(t), \sigma(t), \gamma(t, z)$ – детерминированные числовые функции, $\gamma(t, z) > -1$. Если $\mu(t) = \mu, \sigma(t) = \sigma$ и $\gamma(t, z) = z$ не зависят от t , тогда получим разрывное классическое геометрическое броуновское движение. Такое движение называется движением Леви. Используя формулу Ито находим решение (18) в виде

$$Y(t) = y \exp \left[\left\{ \mu(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right\} ds + \int_0^t \sigma(s) dB(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma(s, z)) \hat{N}(ds, dz) \right]$$

при дробных условиях роста на μ, σ и γ .

В работах [3-5] изучены близкие вопросы для винеровского процесса.

Поступило 05.04.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jaced.J, Shiryaev. A Limit Theorems for Stochastic Processes. – Springer, New York, 2003.
2. Holden H. Oksendal, Ubøe J., Zhong T. Stochastic Partial Differential Equations: A modeling, white noise functional. – Approach Springer, 2010.

3. Polov M., Lashkarbekov S., Rahmatov J.Sh. Fractional stochastic evolution equations with Balakrishnan's white noise. – Global and Stochastic Analysis, 2022, v.9, №3, pp. 53-70.
4. Polov M., Kuchakshoev K., Rahmatov J.Sh. Lyapunov function and stability of solutions of stochastic differential equations with fractional-like derivatives. – Global and Stochastic Analysis, 2021, v.8, №2 (July-December), pp. 87-99.
5. Polov M., Kuchakshoev K.S., Rahmatov J.Sh. Fractional Stochastic Evolution Equations: White Noise Model. – Communications on Stochastic Analysis, October 2020, v. 14, pp. 55-70

С.М.Лашкарбеков

МУОДИЛАИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ СТОХАСТИКӢ БО ПРОСЕССИ ЛЕВИ

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи с. Айнӣ

Дар мақола теоремаи мавҷудият ва ягонагии ҳалли муодилаҳои дифференсиалии стохастикӣ бо просесси аддитивии Леви исбот шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *просесси стохастикӣ, просесси статсионарӣ, просесси 1-ченака, намуди дифференсиалии ченаки Пуассон.*

S.M.Lashkarbekov

STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH LEVY PROCESS

Tajik state pedagogical university

The paper proves the theorem of existence and uniqueness of solutions for differential stochastic equations with an additive Levy process.

Key words: *stochastic process, process stationary, 1-dimensional process, differential type of measurement Poisson.*

Сведения об авторах:

Лашкарбеков С.М. – старший преподаватель кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Академик НАН Таджикистана М.Ш.Шабозов, А.А.Шабозова*, М.М.Миркалонова*
**ОЦЕНКА ОСТАТКА РЯДА ТЕЙЛОРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
 АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ТЕЙЛОРА
 В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ**

*Институт математики им. А.Джусраева НАН Таджикистана,
 Таджикский национальный университет

В пространстве Харди $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho < R$, $R \geq 1$) находится точное значение оценки остатка ряда Тейлора на некоторых классах аналитических функций, у которых r -я производная $f^{(r)}$ удовлетворяет условию $\|f^{(r)}(Re^{it})\|_{q,R} \leq 1$.

Ключевые слова: частная сумма Тейлора, оценка остатка ряда Тейлора, наилучшее приближение, пространство Харди.

1. Введение. Приближение функций в пространстве $H_{q,R}$. Обозначим через $W^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$) класс непрерывных 2π -периодических функций

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1)$$

имеющих производную $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющую условию $|f^{(r)}(x)| \leq 1$.

Через

$$r_n(f, x) := f(x) - S_{n-1}(f, x)$$

обозначим остаток ряда (1), где $S_{n-1}(f, x)$ – частная сумма n -го порядка ряда (1) в точке x , и положим

$$r_n(f) := \|r_n(f, x)\|_{C[0,2\pi]}, \quad r_n(W^{(r)}) := \sup \{r_n(f) : f \in W^{(r)}\}.$$

А.Н.Колмогоров [1] показал, что для любых $n, r \in \mathbb{N}$

$$r_n(W^{(r)}) = \frac{4 \log n}{\pi^2 n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Рассмотрим класс $\mathcal{B}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$ функций

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{2}$$

аналитических в единичном круге $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих для любых $z \in U$ условию $|f^{(r)}(z)| \leq 1$. Если $T_{n-1}(f, z)$ – n -я частная сумма Тейлора ряда (2), то по-прежнему положим

$$r_n(f, z) := f(z) - T_{n-1}(f, z). \tag{3}$$

С.Б.Стечкин [2] доказал, что для остатка (3) при $n \geq r$ справедливо асимптотическое равенство

$$r_n(\mathcal{B}^{(r)}) := \sup_{f \in \mathcal{B}^{(r)}} \|r_n(f, z)\|_{C(U)} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\log n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{4}$$

В этой работе докажем точное равенство вместо асимптотического (4) в более общем пространстве Харди $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho < R, R \geq 1$), из которого $\mathcal{B}^{(r)}$ получается при $q = \infty, \rho = 1$, то есть $H_{\infty,1} \equiv H_{\infty} = \mathcal{B}^{(r)}$.

Пусть $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — круг радиуса $R \geq 1$ в комплексной плоскости \mathbb{C} , а $A(U_R)$ – множество аналитических в круге U_R функций. Для произвольной функции $f \in A(U_R)$ при любом $\rho \in (0, R)$ положим

$$M_q(f, \rho) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty; \\ \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(\rho e^{it})|^q, & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Символом $H_{q,R}, 1 \leq q \leq \infty, R \geq 1$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H_{q,R}} = \lim_{\rho \rightarrow R-0} M_q(f, \rho).$$

Хорошо известно [3, с.279], что норма функции $f \in H_{q,R}$ реализуется на ее угловых граничных значениях $f(Re^{it})$:

$$\|f\|_{q,R} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty; \\ \text{ess sup}_{0 \leq t < 2\pi} |f(Re^{it})|, & q = \infty. \end{cases}$$

В случае $R = 1$ обозначим $U := U_1, H_q := H_{q,1}$ и $\|f\|_q := \|f\|_{q,1}$.

Пусть

$$H_{q,\rho} := \{f \in A(U_\rho) : \|f\|_{q,\rho} = \|f(\rho e^{i(\cdot)})\|_q < \infty\}$$

и для $r \in \mathbb{Z}_+$ полагаем

$$H_q^{(r)} := \{f \in A(U) : f^{(r)} \in H_q\}, \quad f^{(r)}(z) := \frac{d^r f(z)}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

где, ради удобства, обозначено

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1), \quad k \geq r, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad \alpha_{k,0} \equiv 1, \quad \alpha_{k,1} = k.$$

Если \mathcal{S}_n — подпространство алгебраических комплексных полиномов степени $\leq n$, то равенством

$$E_n(f)_{q,\rho} := \inf \{ \|f - p_n\|_{q,\rho} : p_n \in \mathcal{S}_n \} \tag{5}$$

определим наилучшее приближение функций $f \in H_{q,\rho}$ элементами $p_n \in \mathcal{S}_n$. Если $\mathfrak{M} \in H_{q,\rho}^{(r)}$ — есть некоторый подкласс функций $f \in H_{q,\rho}^{(r)}$, то положим

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{q,\rho} := \sup \{ E_{n-1}(f)_{q,\rho} : f \in \mathfrak{M} \}. \tag{6}$$

Всюду далее

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{q,\rho} := \|f - T_{n-1}(f)\|_{q,\rho}, \quad 0 < \rho \leq R. \tag{7}$$

Для $\mathfrak{M} \subset H_{q,\rho}^{(r)}$ также полагаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{q,\rho} := \sup \{ \mathcal{E}_{n-1}(f)_{q,\rho} : f \in \mathfrak{M} \}. \tag{8}$$

Из равенств (5) и (7) следует, что

$$E_{n-1}(f)_{q,\rho} \leq \mathcal{E}_{n-1}(f)_{q,\rho} \tag{9}$$

и в силу равенств (6) и (8) для $\mathfrak{M} \in H_{q,\rho}$ имеем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{q,\rho} \leq \mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{q,\rho}. \tag{10}$$

Известен следующий результат Л.В.Тайкова [4]: для любых натуральных $n > r$ и любых $1 \leq q \leq \infty$ справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_q \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \mathcal{E}_{n-r-1}(f^{(r)})_q, \tag{11}$$

где знак равенства доставляется функцией $f_0(z) = z^n$.

Следующая теорема является обобщением неравенства (11).

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq r$, $1 \leq q \leq \infty$, $\rho \in (0, R)$, $R \geq 1$. Тогда имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f)_{q,\rho} \leq \mathcal{E}_{n-1}(f)_{q,\rho} = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \mathcal{E}_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R}, \tag{12}$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(z) = z^n$.

Доказательство. Будем следовать схеме рассуждения работы [5]. Без ограничения общности рассмотрим только те функции $f \in A(U_R)$, у которых r -я производная $f^{(r)} \in H_{q,R}^{(r)}$ ($1 \leq q \leq \infty, R \geq 1$) и пусть $T_{n-r-1}(f^{(r)}, z)$ – частная сумма $(n-r-1)$ -го порядка $f^{(r)}(z)$ ряда

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}.$$

Положим

$$\mathcal{E}_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R} = \|f^{(r)} - T_{n-r-1}(f^{(r)}, z)\|_{q,R}. \tag{13}$$

Угловые граничные значения функции

$$Q(z) := f^{(r)}(z) - T_{n-r-1}(f^{(r)}, z)$$

будем обозначать через $Q(\zeta) = Q(Re^{i\theta})$, $\zeta \in \Gamma_R$.

Выражая коэффициенты Тейлора по формуле Коши

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi i \alpha_{k,r}} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta^r Q(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta, \quad (k \geq n),$$

получаем следующее интегральное представление остатка ряда Тейлора [5]

$$\begin{aligned} f(z) - T_{n-1}(f, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \zeta^r Q(\zeta) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \frac{d\zeta}{\zeta} = \\ &= \frac{z^r}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} Q(\zeta) \left\{ \frac{1}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned}$$

В силу аналитичности функции $f(z)$ в круге U_R , последнее равенство запишем в виде

$$\begin{aligned} f(z) - T_{n-1}(f, z) &= \\ &= \frac{z^r}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} Q(\zeta) \left\{ \frac{1}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n+k,r}} \left[\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k + \left(\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}}\right)^k \right] \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} = \end{aligned}$$

$$= \frac{z^r}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} Q(\zeta) \left\{ \frac{1}{\alpha_{n,r}} + 2Re \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{14}$$

Полагая в (14) $z = \rho e^{it}$, $\zeta = Re^{i\theta}$, $0 < \rho < R$, $R \geq 1$, получаем

$$\begin{aligned} & f(\rho e^{it}) - T_{n-1}(\rho e^{it}) = \\ & = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-r)(t-\theta)} Q(Re^{i\theta}) \left\{ \frac{1}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k(t-\theta) \right\} d\theta = \\ & = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-r)\tau} Q(Re^{i(t-\tau)}) \left\{ \frac{1}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k\tau \right\} d\tau = \\ & = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-r)\tau} \Phi_{n,r} \left(\frac{\rho}{R}, \tau\right) Q(Re^{i(t-\tau)}) d\tau, \end{aligned} \tag{15}$$

где обозначено

$$\Phi_{n,r} \left(\frac{\rho}{R}, \tau\right) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k\tau. \tag{16}$$

Из леммы 2.3 [6, с.251-252] следует, что функция $\Phi_{n,r}(\rho/R, \tau)$ при всех $\rho \in (0, R)$ и $\tau \in [0, 2\pi]$ всегда неотрицательна, причём

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{n,r}(\rho/R, \tau) d\tau = \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \tag{17}$$

Из (14) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}(f)_{q,\rho} &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it}) - T_{n-1}(f, \rho e^{it})|^q dt \right\}^{1/q} = \\ &= R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-r)\tau} \Phi_{n,r} \left(\frac{\rho}{R}, \tau\right) Q(Re^{i(t-\tau)}) d\tau \right|^q dt \right\}^{1/q} \leq \\ &\leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \left\{ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi_{n,r} \left(\frac{\rho}{R}, \tau\right)| \cdot |Q(Re^{i(t-\tau)})|^q d\tau \right) \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Применяя обобщённое неравенство Минковского к правой части полученного неравенства, с учётом (16) и (13) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}(f)_{q,\rho} &\leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi_{n,r}(\tau)| d\tau\right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(Re^{it})|^q dt\right)^{1/q} = \\ &= R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \mathcal{E}_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R} \end{aligned}$$

и неравенство (12) доказано.

Для функции $f_0(z) = z^n, S_{n-1}(f_0, z) \equiv 0,$

$$\mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{q,\rho} = \rho^n, \quad \mathcal{E}_{n-r-1}(f_0^{(r)})_{q,R} = \alpha_{n,r} \cdot R^{n-r}$$

и так как

$$R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \mathcal{E}_{n-r-1}(f_0^{(r)})_{q,R} = \rho^n = \mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{q,\rho},$$

то теорема 1 доказана.

Из данной теоремы вытекает

Следствие 1. В условиях теоремы 1 справедливо равенство

$$\sup_{f \in H_{q,R}^{(r)}} \frac{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{q,\rho}}{\mathcal{E}_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R}} = \sup_{f \in H_{q,R}^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{q,\rho}}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R}} = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \tag{18}$$

Пусть далее $W^{(r)}H_{q,R}$ – множество функций $f \in H_{q,R}^{(r)}$, у которых $\|f^{(r)}(Re^{i(\cdot)})\|_q := \|f^{(r)}\|_{q,R} \leq 1$. В принятых обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, n \geq r, \rho \in (0, R]$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} E_{n-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} &= \mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} = \\ &= R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-r+1)} R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n. \end{aligned} \tag{19}$$

Из теоремы 2 вытекают ряд следствия.

Следствие 2. В условиях теоремы 2 при $q = \infty, R = \rho = 1$ имеет место равенство

$$E_{n-1}(W^{(r)}H_\infty)_\infty = \mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}H_\infty)_\infty = \frac{1}{\alpha_{n,r}}.$$

Отметим, что равенство

$$E_{n-1}(W^{(r)}H_\infty)_\infty = \frac{1}{\alpha_{n,r}}$$

ранее было доказано в работе К.И.Бабенко [5], а соотношение

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}H_\infty)_\infty = \frac{1}{\alpha_{n,r}}, \tag{20}$$

уточняет результат С.Б.Стечкина (4), который в нашем случае запишется в виде

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}H_\infty)_\infty = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+. \tag{21}$$

Следствие 3. В условиях теоремы 2 при $R = 1$, $\rho \in (0,1)$ и $1 \leq q < \infty$ справедливо равенство

$$E_{n-1}(W^{(r)}H_q)_q = \mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}H_q)_q = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}. \tag{22}$$

В (22) равенство

$$E_{n-1}(W^{(r)}H_q)_q = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}$$

ранее было доказано Л.В.Тайковым [4], а соотношение

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}H_q)_q = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}$$

обобщает равенство (20) в пространстве H_q ($1 \leq q < \infty$).

2. Совместное приближение функций $f \in W^{(r)}H_{q,R}$ в пространстве $H_{q,\rho}$. Хорошо известно [7], что для функции $f \in H_{q,\rho}$ все её промежуточные производные $f^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, r-1$), $r \geq 2$, $r \in \mathbb{N}$ принадлежат также пространству $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R$). В связи с этим имеет смысл найти величину

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} := \sup \left\{ \|f^{(s)} - S_{n-s-1}(f^{(s)})\|_{q,\rho} : f \in W^{(r)}H_{q,R} \right\}. \tag{23}$$

Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $1 \leq q \leq \infty$, $\rho \in (0, R)$, $R \geq 1$. Тогда для любой функции $f \in H_{q,R}^{(r)}$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-s-1}(f^{(s)})_{q,\rho} &\leq R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \mathcal{E}_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R} \leq \\ &\leq R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-s} \frac{1}{(n-s)(n-s-1)\cdots(n-r+1)} \mathcal{E}_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R} \end{aligned} \tag{24}$$

и знак равенства в (24) доставляет функция $f_0(z) = z^n \in H_{q,R}^{(r)}$.

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 4. В условиях теоремы 3 имеет место равенство

$$\sup_{f \in H_{q,R}^{(r)}} \frac{\mathcal{E}_{n-s-1}(f^{(s)})_{q,\rho}}{\mathcal{E}_{n-s-1}(f^{(r)})_{q,R}} = \sup_{f \in H_{q,R}^{(r)}} \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{q,\rho}}{E_{n-s-1}(f^{(r)})_{q,R}} = R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}.$$

Теорема 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $1 \leq q \leq \infty$, $\rho \in (0, R)$, $R \geq 1$. Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} &= E_{n-s-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} = \\ &= R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-s} \frac{1}{(n-s)(n-s-1)\cdots(n-r+1)}. \end{aligned}$$

Отметим, что некоторые вопросы совместного полиномиального приближения аналитических функций и их производных рассмотрены в работах [8, 9].

Поступило 22.12.2022 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmogorov A.N. Zur Grossenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen. – Ann. of Math., 1935, v.36, pp.521-526.
2. Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций. – Известия АН СССР. Сер. матем., 1953, т.17, с. 461-472.
3. Смирнов В.И., Лебедев В.И. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1964, 440 с.
4. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1967, т.1, №2, с. 155-162.
5. Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций. – Известия АН СССР. Сер. матем., 1958, т.22, №5, с. 631-640.
6. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York, Tokyo, 1985, 252 p.
7. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации. – Укр. мат. журнал, 2011, т.63, №12, с. 1579-1601.
8. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди. – Тр. ИММ УрО РАН, 2021, т.27, №4, с. 239-254.
9. Шабозов М.Ш., Кадамшоев Н.У. Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана. – Матем. заметки, 2021, т.110, вып. 2, с. 266-281.

М.Ш.Шабозов, А.А.Шабозова, М.М.Миркалонова

БАҲОИ БАҚИЯИ ҚАТОРИ ТЕЙЛОР БАРОИ БАЪЗЕ СИНФИ ФУНКСИЯҲОИ АНАЛИТИКИ БА ВОСИТАИ СУММАҲОИ ТЕЙЛОР ДАР ФАЗОИ ХАРДИ

*Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,
Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар фазои Харди $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho < R$, $R \geq 1$) қимати аниқи баҳои бақияи қатори Тейлор барои баъзе синфи функцияҳои аналитикӣ, ки ҳосилаи тартиби r -ум $f^{(r)}$ шарти $\|f^{(r)}(Re^{it})\|_{q,R} \leq 1$ -ро қаноат мекунонад, ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *суммаи хусусии Тейлор, баҳои бақияи қатори Тейлор, наздиккунии беҳтарин, фазои Харди.*

M.Sh.Shabozov, A.A.Shabozova, M.M.Mirkalonova

ESTIMATE OF THE REMAINDER OF THE TAYLOR SERIES FOR SOME CLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS BY TAYLOR SUMS IN THE HARDY SPACE

*A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan,
Tajik National University*

In the Hardy space $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho < R$, $R \geq 1$) we find the exact value of the estimate for the remainder of the Taylor series on some classes of analytic functions, whose r^{th} derivative $f^{(r)}$ satisfies the condition $\|f^{(r)}(Re^{it})\|_{q,R} \leq 1$.

Key words: *Taylor partial sum, Taylor series residual estimate, the best approximation, Hardy space.*

Сведения об авторах:

Шабозов Мирганд Шабозович – доктор физ.-мат. наук, профессор, академик НАН Таджикистана, Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана;

Шабозова А.А. – кандидат физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Таджикского национального университета;

Миркалонова М.М. – доцент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Таджикского национального университета. E-mail: mohiramm@mail.ru.

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

К.К.Палавонов, Х.М.Хуромонов*

НАИЛУЧШЕЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА И ЗНАЧЕНИЕ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

*Таджикский государственный университет коммерции,***Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 08.02.2023)*

В работе решается ряд экстремальных задач наилучшего среднеквадратического полиномиального приближения аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Бергмана. Так же найдены точные значения различных n -поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана B_2 .

Ключевые слова: среднеквадратическое приближение аналитических в круге функций, пространство Бергмана, n -поперечники.

1. Вычислению значений n -поперечников различных классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространствам Бергмана B_p ($1 \leq p \leq \infty$), посвящены, например, работы [1-8]. В настоящей статье мы продолжим эту тематику и вычислим точные значения n -поперечников некоторых классов аналитических функций, определяемых модулями непрерывности m -го порядка, усреднённые значения которых ограничены сверху заданной мажорантой в пространстве Бергмана.

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}$ – соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, положительных и вещественных чисел. Пусть далее \mathbb{C} – комплексная плоскость, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг в \mathbb{C} , $A(U)$ – множество функций, аналитических в круге U .

Определение. [1] Говорят, что аналитическая в единичном круге U функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1)$$

принадлежит пространству Бергмана B_2 , если

Адрес для корреспонденции: Хуромонов Хуромон Мамадамонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Борбад, 48/5, Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана.
E-mail: khuroton@mail.ru

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty.$$

Производную r -го порядка функции $f \in A(U)$ определим как обычно

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f(z)}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)c_k(f)z^{k-r}, \quad r \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Ради краткости, введём обозначение

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1) = k! / (k-r)!, \quad k, r \in \mathbb{N}, \quad k > r. \tag{3}$$

Всюду далее символом $B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $B_2^{(0)} = B_2$) обозначим множество функций $f \in A(U)$, принадлежащих пространству B_2 , производная r -го порядка $f^{(r)}(z)$, умноженная на z^r , также принадлежит B_2 , то есть

$$B_2^{(r)} := \{f \in B_2 : \|z^r f^{(r)}\|_2 < \infty\}.$$

Пусть \mathcal{P}_n – подпространство комплексных алгебраических многочленов степени n вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Величину

$$E_n(f)_2 := E(f, \mathcal{P}_n)_{B_2} = \inf \{ \|f - p_n\|_2 : p_n \in \mathcal{P}_n \}$$

называют наилучшим полиномиальным среднеквадратическим приближением функции $f \in B_2$ подпространством \mathcal{P}_n . Хорошо известно [1, с.203], что для произвольной функции $f \in B_2$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2},$$

где $T_{n-1}(f)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда (1). Запишем норму (1) в более удобном нам виде

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2}$$

и символом

$$\Delta_h^m f(\rho e^{it}) := \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(\rho e^{i(t+kh)})$$

обозначим конечную разность m -го порядка функции $f \in B_2$ по аргументу t с шагом h .

Равенством

$$\|\Delta_h^m(f)\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_h^m f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2}$$

обозначим норму разности m -го порядка функции $f \in B_2$.

Модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in B_2$ определим, как обычно, равенством

$$\omega_m(f, \tau)_2 := \sup \{ \|\Delta_h^m(f)\|_2 : |h| \leq \tau \}.$$

Пользуясь соотношениями (2) и (3), для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\Delta_h^m((\rho e^{it})^r f(\rho e^{it})) = \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) \rho^k e^{ikt} (1 - e^{ikh})^m.$$

Отсюда, применяя тождество Парсеваля, получаем

$$\|\Delta_h^m((\rho e^{it})^r f(\rho e^{it}))\|^2 = 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kh)^m$$

и, следовательно,

$$\omega_m^2(z^r f^{(r)}, \tau)_2 = 2^m \sup_{|h| \leq \tau} \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kh)^m.$$

Теорема 1. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $0 < \tau \leq \pi/n$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left\{ \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 + n^2 \int_0^{\tau} (t - \tau) \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, u)_2 du \right\}^{m/2}} = \frac{1}{(n\tau)^m}.$$

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{n^{-m/2} \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left\{ \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(z^{(r)} f^{(r)}, t) \sin ntdt \right\}^{m/2}} = \frac{1}{2^m}.$$

Из теоремы 2 вытекает ряд следствий

Следствие 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для любой функции $f \in B_2^{(r)}$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \cdot \omega_m \left(z^{(r)} f^{(r)}, \frac{\pi}{n} \right)_2. \tag{4}$$

Если функция $\omega_m^{2/m}(z^{(r)} f^{(r)}, t)_2$ для любых $t \in [0, \pi / (2n)]$ удовлетворяет условию

$$2\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}; \pi / (2n))_2 \geq \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 + \omega_m^{2/m}\left(z^{(r)} f^{(r)}, \frac{\pi}{n} - t\right)_2, \tag{5}$$

то неравенство (4) можно уточнить. Повторяя выкладки, приведенные в [9, с.266], применительно к интегралу

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{2^m} \cdot \frac{n^{m/2}}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(z^{(r)} f^{(r)}, t) \sin ntdt \right)^{m/2},$$

где в качестве функции $l(t)$ вместо линейной взята функция

$$l(t) = \omega_m^{2/m}(z^{(r)} f^{(r)}; t)_2 \text{ при } t \in [0, \pi / (2n)] \text{ и}$$

$$l(t) = 2\omega_m^{2/m}(f^{(r)}; \pi / (2n))_2 - \omega_m^{2/m}(z^{(r)} f^{(r)}, \pi / n - t)_2 \text{ при } t \in [\pi / (2n), \pi / n], \text{ получим}$$

Следствие 2. На множестве функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых функция $\omega_m^{2/m}(z^{(r)} f^{(r)}; t)_2$ удовлетворяет условию (5), справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \cdot \omega_m(z^{(r)} f^{(r)}, \pi / (2n))_2,$$

которое для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n > r$, превращается в равенство.

2. Для формулировки последующих результатов напомним необходимые понятия и определения из теории n -поперечников. Пусть $S := \{f : \|f\| \leq 1\}$ – единичный шар в B_2 ; \mathcal{M} – выпуклое центрально-симметричное подмножество из B_2 ; $\mathcal{L}_n \subset B_2$ – n -мерное подпространство; $\mathcal{L} \subset B_2$ – подпространство коразмерности n ; $\Lambda : B_2 \rightarrow \mathcal{L}^n$ – непрерывный линейный оператор; $\Lambda^\perp : B_2 \rightarrow \mathcal{L}^n$ – непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathcal{M}, B_2) = \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathcal{M} \} : \mathcal{L}_{n+1} \subset B_2 \right\},$$

$$d_n(\mathcal{M}, B_2) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \|f - \varphi\| : \varphi \in \mathcal{L}_n \} : f \in \mathcal{M} \right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \right\},$$

$$\delta_n(\mathcal{M}, B_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \Lambda f\| : f \in \mathcal{M} \} : \Lambda B_2 \subset \mathcal{L}_n \right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \right\},$$

$$d^n(\mathcal{M}, B_2) = \inf \left\{ \sup \{ \|f\| : f \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}^n \} : \mathcal{L}^n \subset B_2 \right\},$$

$$\Pi_n(\mathcal{M}, B_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \Lambda^\perp f\| : f \in \mathcal{M} \} : \Lambda^\perp B_2 \subset \mathcal{L}_n \right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \right\}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским* и *проекционным n -поперечниками* подмножества $\mathcal{M} \subset B_2$.

Указанные n -поперечники монотонны по n и в гильбертовом пространстве B_2 связаны соотношениями (см., например, [10, 11]):

$$b_n(\mathcal{M}, B_2) \leq d^n(\mathcal{M}, B_2) \leq d_n(\mathcal{M}, B_2) = \delta_n(\mathcal{M}, B_2) = \Pi_n(\mathcal{M}, B_2).$$

Всюду далее под $\Phi(t)$, $0 \leq t < \infty$, понимаем непрерывную монотонно возрастающую функцию, обращающуюся в нуль в точке $t = 0$. Следуя работе [12], рассмотрим в пространстве B_2 классы функций:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*) := \{f \in B_2^{(r)} : \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 + \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \int_0^t (t-\tau) \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \leq \\ \leq \Phi_*^{2/m}(t), 0 < t \leq 2\pi\}, \end{aligned}$$

где $\Phi_*(t) = t^{4m/\pi^2}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$.

Аналогичным образом, исходя из результата теоремы 2, в B_2 определим классы функций:

$$W_m^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in B_2^{(r)} : \frac{\pi}{2t} \int_0^t \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, \tau)_2 \sin \frac{\pi}{t} d\tau \leq \Phi^2(t), 0 < t \leq 2\pi \right\}.$$

Положим ещё

$$(1 - \cos tu)_* := \begin{cases} 1 - \cos tu, & \text{если } tu \leq \pi; \\ 2, & \text{если } tu > \pi. \end{cases}$$

Теорема 3. Для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\rho_n(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*); B_2) = E_{n-1}(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*))_2 = \frac{1}{\pi^m \alpha_{n,r}} \cdot \left(\frac{\pi}{n}\right)^{4m/\pi^2},$$

где $\rho_n(\cdot)$ – любые из перечисленных n -поперечников.

Теорема 4. Пусть функция $\Phi(t)$ удовлетворяет условию

$$\Phi^2\left(\frac{t}{\mu}\right) \int_0^{\pi\mu} (1 - \cos \tau)_* \sin \frac{\tau}{\mu} d\tau \leq 2\mu\Phi^2(t). \tag{6}$$

Тогда при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ справедливы равенства

$$\rho_n(W_m^{(r)}(\Phi), B_2) = \mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(\Phi))_2 = \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \cdot \Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\rho_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников, перечисленных выше.

В заключение отметим, что функции Φ , удовлетворяющие ограничению (6), существуют [13], а классы функций, подобные введённым выше, в периодическом случае в пространстве L_2 впервые рассмотрел Л.В.Тайков [14, 15].

Теоремы 2 и 4 являются своеобразным обобщением результатов В.В.Шалаева [16], полученных для класса $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ на случай классов аналитических функций $B_2^{(r)}$ в пространство Бергмана B_2 .

Поступило 08.02.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.-Л.: Наука, 1964.
2. Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из \mathbb{C}^n . – Успех. матем. наук, 1990, т. 45, №5, с. 197-198.
3. Двейрин М.З. Поперечники и ϵ -энтропия классов функций, аналитических в единичном круге. – Теория функций, функц. анализ и прил, 1975, т. 23, с. 32-46.
4. Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. – Укр. матем. журнал, 1990, т.42, №7, с. 873-881.
5. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана. – ДАН РТ, 2002, т.383, №2, с. 171-174.
6. Лангаршоев М.Р. Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана. – ДАН РТ, 2005, т.48, №3-4, с. 12-17.
7. Шабозов М.Ш., Хуромонов Х.М. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана. – Изв. вузов. Матем, 2020, вып. 2, с. 74-92.
8. Саидусайнов М.С. Наилучшее полиномиальное приближение и значения поперечников некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана. – ДАН РТ, 2009, т.52, №9, с. 661-668.
9. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближений – М. Наука, 1987, 472 с.
10. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – МГУ, 1976, 325 с.
11. Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo, 1985, pp. 252.
12. Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций. – Укр. матем. журн, 2004, т.56, №1, с.1458-1466.
13. Айнуллоев Н. Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 . – Докл. АН ТаджССР, 1984, т.29, №8, с.415-418.
14. Тайков Л.В. Наилучшее приближение дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 . – Матем. заметки, 1977, т.22, №4, с.536-542.
15. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1977, т.22, №2, с.285-295.
16. Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков. – Укр. матем. журн., 1991, т.43, №1, с.125-129.

Қ.Қ.Палавонов, Х.М.Хуромонов*

НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ МИЁНАКВАДРАТИИ ФУНКСИЯҲО ДАР ФАЗОИ БЕРГМАН ВА ҚИМАТИ ҚУТРҲОИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ ФУНКСИЯҲО

Донишгоҳи давлатии тижорати Тоҷикистон,

**Донишгоҳи байни-милалӣ сайёҳӣ ва соҳибқорӣ Тоҷикистон*

Дар мақола як қатор масъалаҳои экстремалии наздиккунии беҳтарини миёнаквадратии полиномиалии функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ, ки ба фазои Бергман таълуқ дорад, ҳал карда шудаанд. Инчунин қиматҳои аниқи n -қутрҳои гуногуни сифи функсияҳо дар фазои Бергман B_2 ёфта шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии миёнаквадратии функсияҳои аналитикӣ дар давра, фазои Бергман, n -қутрҳо.

Q.Q.Palavonov, Kh.M.Khuromonov*

THE BEST ROOT-MEAN-SQUARE APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN BERGMAN SPACE AND THE VALUE OF WIDTHS OF SOME CLASSES OF FUNCTIONS

Tajik State University of Commerce,

**International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan*

The paper solves a number of extremal problems of the best mean-square polynomial approximation of functions analytic in the unit circle that belong to Bergman space. We also find the exact values of various n -widths of some classes of functions in the Bergman space B_2 .

Key words: root-mean-square approximation of analytic in the circle of functions, Bergman space, n -widths.

Сведения об авторах:

Палавонов Курбоназар Курбонбекович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой естественных дисциплин Таджикского государственного университета коммерции;

Хуромонов Хуромон Манадомонович – кандидат физ.-мат. наук, и.о. доцента Международного университета туризма и предпринимательства Таджикистана.

УДК 517.95

Специальность: 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Д.С.Сафаров

ТОЧНОЕ ОГРАНИЧЕННОЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ПОСТОЯННЫМИ ОТКЛОНЯЮЩИМИСЯ АРГУМЕНТАМИ

Бохтарский государственный университет им. Н.Хусрава

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.И.Илоловым 03.05.2023 г.)

Найдено точное ограниченное и периодическое решение для обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза с постоянными отклоняющимися аргументами с помощью функции Якоби – дельта амплитуды dn .

Ключевые слова: эллиптические функции Якоби, нелинейное уравнение, постоянные отклонения аргумента, точное решение, отклонения аргумента.

Разработка методов поиска точных решений для нелинейных дифференциальных уравнений является одним из самых захватывающих последних достижений в области нелинейной науки и теоретической физики, поскольку многие математические модели описываются нелинейными уравнениями.

В работах [1-3] получены точные периодические решения для некоторых нелинейных уравнений методами \wp -функций Вейерштрасса и эллиптическими функциями Якоби.

В работе [1] найдены точные решения уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ-уравнения)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

с помощью разложения по степеням эллиптической функции Якоби по волновым решениям.

Отыскиваются решения уравнения (1) в виде

$$u(\tau) = a_0 + a_1 sn\tau + a_2 sn^2\tau, \quad (2)$$

где $sn\tau$ – эллиптический синус функции Якоби, $\tau = \theta(x - ct)$, a_0, a_1, a_2 – неизвестные постоянные, а постоянные θ и c – волновые параметры.

Подставляя (2) в (1), получаем точное периодическое решение КдФ уравнения в переменных бегущей волны

$$u = c + 4(1+k^2)\beta\theta^2 - 12k^2\beta\theta^2 sn^2[\theta(x - ct)] =$$

Адрес для корреспонденции: Сафаров Джумабой. 735140, Республика Таджикистан, г. Бохтар, ул. Айни, 67, Бохтарский государственный университет им. Н.Хусрава. E-mail: safarov-5252@mail.ru

$$\begin{aligned} u &= c + 4(1+k^2)\beta\theta^2 - 12k^2\beta\theta^2 sn^2[\theta(x-ct)] = \\ &= c + 4(1-2k^2)\beta\theta^2 + 12k^2\beta\theta^2 cn^2[\theta(x-ct)], \end{aligned} \quad (2')$$

где $0 < k^2 < 1$ – модуль функции.

В данной работе находим точное ограниченное периодическое решение с постоянными отклоняющимися аргументами для уравнения вида

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + [\alpha_1 u(x, t - \tau_1) + \alpha_2 u(x + \tau_2, t) u(x + \tau_3, t) + \\ + \alpha_3 u(x, t) u(x + \tau_4, t) u(x + \tau_5, t)] \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ – постоянные.

Здесь искомая функция $u(x, t)$ по переменной t имеет запаздывающий аргумент, а по x – опережающий аргумент.

В случае, когда $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \tau_1 = 0$ уравнение (3) является уравнением КдФ, а при $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 0, \tau_2 = \tau_3 = 0$ принимает вид модифицированного КдФ (мКдФ) уравнения [2]

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_2 u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (4)$$

Решение этого уравнения в переменных бегущей волны выписывается с помощью функции $sn\tau$ [4].

В данной работе покажем, что при определенных значениях отклонений $\tau_j, j = \overline{1, 4}$ и условиях на коэффициенты, решение уравнения (3) можно найти с помощью решение уравнений (1) и (4).

Как в [1,2], в переменных бегущей волны

$$u(x, t) = \varphi(\tau), \quad \tau = \theta(x - ct), \quad (5)$$

уравнение (3) принимает вид

$$\begin{aligned} -\alpha c \varphi'(\tau) + [\alpha_1 \varphi(\tau + \theta c \tau_1) + \alpha_2 \varphi(\tau + \theta \tau_2) \varphi(\tau + \theta \tau_3) + \\ + \alpha_3 \varphi(\tau) \varphi(\tau + \theta \tau_4) \varphi(\tau + \theta \tau_5)] \varphi'(\tau) + \beta \theta^3 \varphi'''(\tau) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Покажем, что при $\alpha_2 = 0$ и определенных условиях на коэффициентов и отклонений $c\theta\tau_1, \theta\tau_4, \theta\tau_5$ решение этого уравнения можно найти с помощью функции $dn^2\tau$ – дельта амплитуды.

Функция $dn\tau$ связана с $sn\tau, cn\tau$ соотношениями

$$cn^2\tau = 1 - sn^2\tau, \quad dn^2\tau = 1 - k^2 sn^2\tau, \quad (7)$$

где $0 < k < 1$, k – модуль функции и является элементом построения функций Якоби [4].

Заметим, что функции $sn\tau, cn\tau$ имеют период $4K(k)$, а функция $dn\tau$ – период $2K(k)$, где

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi.$$

Так как $sn(\tau + 2K) = -sn\tau, cn(\tau + 2K) = -cn\tau$, то для функций $sn^2\tau, cn^2\tau, dn^2\tau$ основным периодом является $2K$.

Поэтому в (2'), заменяя $k^2 sn^2\tau$ на $1 - dn^2\tau$, мы получим ещё решение уравнения (1) через $dn^2\tau$

$$u = c - 4\beta\theta^2(2 - k^2) + 12\beta\theta^2 dn^2\tau.$$

Функции $sn\tau, cn\tau, dn\tau$ являются ограниченными, причем

$$-1 \leq sn\tau \leq 1, \quad -1 \leq cn\tau \leq 1, \quad k' \leq dn\tau \leq 1,$$

k' – дополнительный модуль, $k^2 + k'^2 = 1$, $0 < k' < 1$.

Так как k^2 является элементом построения таких функций, то при получении решений дифференциального уравнения посредством таких функций необходимо определить модуль k^2 через коэффициенты уравнения.

Производные функций Якоби вычисляются формулами

$$\frac{dsn\tau}{d\tau} = cn\tau dn\tau, \quad \frac{dcn\tau}{d\tau} = -sn\tau dn\tau, \quad \frac{ddn\tau}{d\tau} = -k^2 sn\tau cn\tau. \tag{8}$$

Эти функции на полупериодах удовлетворяют функциональные уравнения

$$sn(\tau + K)dn\tau = cn\tau, \quad cn(\tau + K)dn\tau = -k'sn\tau, \quad dn(\tau + K)dn\tau = k'. \tag{9}$$

Теперь, воспользуясь формулами (7), (8) и (9), решение уравнения (6) будем искать в виде

$$\varphi(\tau) = Adn^2\tau = Adn^2[\tau, k^2], \tag{10}$$

где искомыми являются постоянные A, k^2, k'^2 .

Будем считать, что k^2, k'^2 – заранее известны, $k^2 + k'^2 = 1$, $0 < k < 1$, $0 < k' < 1$ и, после подстановки в уравнении (6), находим их значения. Предположим, что $\alpha_2 = 0$ и числа $\theta c\tau_1, \theta\tau_2$ – кратны периоду $2K(k)$, а $\theta\tau_5 = K(k)$. Тогда $\varphi(\tau)$ будет иметь период $2K$ и должна удовлетворять функциональному уравнению

$$\varphi(\tau + K)\varphi(\tau) = A^2 k'^2, \tag{11}$$

Вычисляем производные $\varphi'(\tau)$, $\varphi''(\tau)$ и $\varphi'''(\tau)$:

$$\varphi'(\tau) = -2Ak^2 \operatorname{snt} \operatorname{cnt} \operatorname{dnt} = -2k^2 \varphi(\tau) \operatorname{snt} \operatorname{cnt},$$

$$\varphi''(\tau) = 2Ak^2 - 2A + 4A(2 - k^2) \operatorname{dnt} - 6A \operatorname{dn}^4 \tau,$$

$$\begin{aligned} \varphi'''(\tau) &= 4(2 - k^2) \varphi'(\tau) - 12\varphi(\tau) \varphi'(\tau) = \\ &= -\{8k^2 A^2 (2 - k^2) \operatorname{dnt} - 24 \operatorname{dn}^3 \tau\} \operatorname{snt} \operatorname{cnt}. \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в (6) с учётом (11) имеем

$$\begin{aligned} &\{[\alpha c - \alpha_1 A \operatorname{dn}^2 \tau - \alpha_3 A^3 k'^2 \operatorname{dn}^2 \tau] 2Ak^2 \operatorname{dnt} + \\ &+ \beta \theta^2 [-8k^2 (2 - k^2) A \operatorname{dnt} + 24Ak^2 \operatorname{dn}^3 \tau]\} \operatorname{snt} \operatorname{cnt} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях dnt , получим:

$$c\alpha - 4\beta\theta^2(2 - k^2) = 0, \quad \alpha_1 A^2 + \alpha_3 A^4 k'^2 - 12A\beta\theta^2 = 0.$$

Из первого уравнения находим модуль k^2 и k'^2

$$k^2 = 2 - \frac{c\alpha}{4\beta\theta^2}, \quad k'^2 = \frac{c\alpha}{4\beta\theta^2} - 1, \tag{12}$$

а для нахождения A получим кубическое уравнение

$$A^3 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3 k'^2} A - \frac{12\beta\theta^2}{\alpha_3 k'^2} = 0. \tag{13}$$

Теперь в формуле (12) и уравнении (13), требуя, чтобы модуль k^2 и его дополнительный модуль k'^2 удовлетворяли условиями $k^2 + k'^2 = 1$, $0 < k < 1$, $0 < k' < 1$ и уравнение (13) имело вещественные корни, получим

Теорема 1. Пусть в уравнении (1) $\alpha_2 = 0$, коэффициенты $\alpha, \alpha_1, \alpha_3$ и волновые параметры c, θ такие, что выполнены условия $\alpha_1 \alpha_3 < 0$

$$1 < \frac{c\alpha}{4\beta\theta^2} < 2, \quad |c| > \frac{4}{9\sqrt{3}} \left| \frac{\alpha_1}{\alpha} \right| \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}, \quad \beta\theta^2 > \frac{c\alpha}{8} + \sqrt{\left(\frac{c\alpha}{8}\right)^2 + \frac{\alpha_1^3}{972\alpha_3}}$$

Тогда, если модуль k^2 и его дополнительный модуль k'^2 функции dnt вычислены формулами (12) и числа $c\theta\tau_1, \theta\tau_4$ – кратны $2K(k)$, а $\theta\tau_5 = K(k)$, то уравнение (1) имеет три решения вида

$$u_j(x, t) = A_j dn^2[\theta(x - ct)], \quad j = 1, 2, 3,$$

где A_j – различные корни уравнения (13).

Теперь рассмотрим случай $\alpha_2 \neq 0$.

В этом случае решение уравнения получим с помощью решения уравнения (4). Если решение уравнения (6) $\varphi(\tau)$ имеет период T и числа $c\theta\tau_1, \theta\tau_2, \theta\tau_3, \theta\tau_4$ кратны T , то $\varphi(\tau)$ также удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} -c\alpha\varphi'(\tau) + \alpha_2\varphi^2(\tau)\varphi'(\tau) + \theta^2\beta\varphi'''(\tau) = \\ = -\varphi(\tau)(\alpha_1 + \alpha_3\varphi(\tau)\varphi(\tau + \theta\tau_3))\varphi'(\tau). \end{aligned} \tag{15}$$

Легко заметить, что при $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, $\varphi(\tau)$ как решение этого уравнения также удовлетворяет уравнению (4).

Решение уравнения (4) можно найти с помощью функции $dn\tau$ (а не $dn^2\tau$).

Будем искать решение уравнения (15) в виде

$$\varphi(\tau) = Adn\tau = Adn[\tau, k^2], \tag{16}$$

где A, k^2, k'^2 – искомые параметры.

Как известно, функция $dn\tau$ является решением некоторого уравнения типа Дуффинга [4]

$$\varphi''(\tau) = (2 - k^2)\varphi(\tau) + \frac{2}{A^2}\varphi^3(\tau) = 0.$$

Отсюда видно, что при дифференцировании этого уравнения получим уравнение вида (4) в переменных бегущей волны.

Вычисляя производные $\varphi'(\tau), \varphi''(\tau), \varphi'''(\tau)$ от функции (16) имеем

$$\begin{aligned} \varphi'(\tau) &= -Ak^2 sn\tau cn\tau, \\ \varphi''(\tau) &= -[Ak^2(2 - k^2) - 6Ak^2 dn^2\tau] sn\tau cn\tau. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая равенство (8) для функции $dn\tau$ и подставляя эти производные в (15), будем иметь

$$\begin{aligned} [c\alpha - \alpha_2 A^2 dn^2\tau] Ak^2 sn\tau cn\tau + \beta\theta^2 [-(2 - k^2) + 6dn^2\tau] Ak^2 sn\tau cn\tau = \\ = -Adn\tau (\alpha_1 + \alpha_3 A^2 k') Ak^2 sn\tau cn\tau. \end{aligned}$$

В этом равенстве приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях $dn\tau$ получим

$$c\alpha - \beta\theta^2(2 - k^2) = 0, \quad -\alpha_2 A^2 + 6\beta\theta^2 = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_3 A^2 k' = 0.$$

Из этих соотношений находим

$$k^2 = 2 - \frac{c\alpha}{\beta\theta^2}, \quad A^2 = \frac{6\beta\theta^2}{\alpha_2}, \quad k' = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{6\alpha_3\beta\theta^2}. \quad (17)$$

Подчиняя k, k' условиями $k^2 + k'^2 = 1$, $0 < k < 1$, $0 < k' < 1$, получим условие на коэффициенты и волновые числа.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть в уравнении (15) коэффициенты и волновые числа такие, что $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1\alpha_3 < 0$ и

$$0 < \frac{1}{6} \left| \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3\beta} \right| < 1, \quad \theta^2 > \frac{1}{6} \left| \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3\beta} \right|, \quad c = \frac{1}{\alpha} \left(\beta\theta^2 + \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{36\alpha_3^2\beta\theta^2} \right).$$

Пусть модуль k^2 и ее дополнительный модуль k' вычислены формулами (17). Тогда, если числа $c\theta\tau_1, \theta\tau_2, \theta\tau_3, \theta\tau_4$ кратны $2K(k)$, а $\theta\tau_5 = K(k)$, то уравнение (3) имеет ограниченные периодические решения

$$u(x, t) = \pm \sqrt{\frac{6\beta}{\alpha_2}} |\theta| \operatorname{dn}[\theta(x - ct)].$$

Поступило 03.05.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Liu S.K., Fu Z.T., Liu S.D. Q. Zhao Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. – J. Physics Letters A. – Moscow, 2001, vol. 289, pp. 69-74.
2. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 360 с.
3. Сафаров Д.С. Об одном обобщении КдФ-уравнения. – Сб. научных трудов «Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения». – Киев, 1996, с. 240.
4. Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических Функций: с приложениями к механике. – М.: КомКнига, 2006, 368 с.

Ҷ.С.Сафаров

**ҲАЛЛИ АНИҚИ МАҲДУД ВА ДАВРИИ МУОДИЛАИ УМУМИКАРДАШУДАИ
КОРТЕВЕГ-ДЕ ФРИЗ БО АРГУМЕНТҲОИ ФАРҚКУНАНДАҲОИ ДОИМӢ**

Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н.Хусрав

Ҳалли аниқи маҳдуд ва даврӣ барои муодилаи умумикардашудаи Кортевег-де Фриз бо ду аргументҳои фарқкунандаи доимӣ бо ёрии функсияи делта амплитудай Якоби dnu ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *функсияҳои эллиптикии Якоби, муодилаи гайрихаттӣ, аргументҳои фарқкунандаи доимӣ, ҳалли аниқ, аргументҳои фарқкунанда.*

D.S.Safarov

**EXACT BOUNDED PERIODIC SOLUTION OF THE GENERALIZED
KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH CONSTANT DEVIATIONS
OF THE ARGUMENT**

N.Khusrav Bokhtar State University

An exact bounded and periodic solution is found for the generalized Korteweg-de Vries equation with two constant deviations of the argument using the Jacobi – delta function of the dnu amplitude.

Key words: *elliptic Jacobi functions, nonlinear equation, constant deviations of the argument, exact solution, argument deviations.*

Сведения об авторах:

Сафаров Джумабой – доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета.

УДК 517.962

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ;

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Академик НАН Таджикистана Н.Раджабов

К ТЕОРИИ ОДНОГО КЛАССА ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Таджикский национальный университет

В работе для переопределенной системы интегральных уравнений, когда основным уравнением является первое уравнение системы и $\lambda < 0$, $\mu < 0$, получено представление многообразия решений через одну произвольную аналитическую функцию комплексного переменного нижнего основания цилиндра. Получена формула обращения интегрального представления. На этой основе ставится и исследуется граничная задача типа Шварца. Изучены случаи, когда система уравнений имеет единственное решение.

Ключевые слова: цилиндрическая область, переопределенная система интегральных уравнений, интегральные представления, задача типа Шварца.

Через Ω обозначим цилиндрическую область $\Omega = \{(t, z) : a < t < b, |z| < R\}$. Боковую поверхность цилиндра обозначим через $S = \{a < t < b, |z| = R\}$ и его нижнее основание обозначим через $D = \{t = a, |z| < R\}$.

В области Ω рассмотрим переопределенную систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(t, z) + \lambda \int_a^t \frac{\varphi(\tau, z)}{\tau - a} d\tau = f(t, z) \\ \varphi(t, z) + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \frac{\exp[i\theta] \varphi(t, \zeta)}{(R - \rho)(\zeta - z)} d\xi d\eta = g(t, z) \end{cases}, \quad (1)$$

где λ , μ – заданные вещественные постоянные, $f(t, z)$, $g(t, z)$ – заданные функции области Ω , $\varphi(t, z)$ – искомая функция, $\theta = \arg \zeta$, $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$.

Решение системы интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $\varphi(t, z) \in C(\overline{\Omega})$, $\varphi(a, z) = 0$ с асимптотическим поведением

$$\varphi(t, z) = O\left[(t - a)^\varepsilon\right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } t \rightarrow a,$$

Адрес для корреспонденции: Раджабов Нусрат. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: nusrat38@mail.ru

$\varphi(t, Re^{i\theta}) = 0$ с асимптотическим поведением

$$\varphi(t, z) = 0 \left[(R-r)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } r \rightarrow R.$$

Проблеме исследования переопределенной линейной системы интегральных уравнений Вольтерра с сингулярными и сверх сингулярными ядрами посвящены работы [1]-[5]. Проблеме исследования переопределенной системы дифференциальных уравнений и вырождающихся дифференциальных уравнений посвящены работы [6]-[12].

Пусть в системе уравнений (1) основным уравнением является первое уравнение и $\lambda < 0$. Тогда его решение, согласно [4], выражается равенством

$$\varphi(t, z) = (t-a)^{|\lambda|} \Phi(z) + f(t, z) - \lambda \int_a^t \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right)^{|\lambda|} \frac{f(\tau, z)}{\tau-a} d\tau \equiv T_1[\Phi(z), f(t, z)], \quad (2)$$

где $\Phi(z)$ – произвольная функция области D , причем $\Phi(Re^{i\theta}) = 0$ с асимптотическим поведением

$$\Phi(z) = 0 \left[(R-r)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } r \rightarrow R.$$

Решение вида (2) существует, если $f(t, z) \in C(\bar{\Omega})$, $f(a, z) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(t, z) = 0 \left[(t-a)^{\gamma_1} \right], \quad \gamma_1 > |\lambda| \text{ при } t \rightarrow a. \quad (3)$$

Полученное решение (2) подставляя во второе уравнение системы (1), получим

$$\begin{aligned} (t-a)^{|\lambda|} \left[\Phi(z) + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \frac{\exp[i\theta] \Phi(\zeta)}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta \right] &= g(t, z) - f(t, z) + \\ + \lambda \int_a^t \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right)^{|\lambda|} \frac{f(\tau, z)}{(\tau-a)} d\tau - \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left[f(t, \zeta) - \lambda \int_a^t \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right)^{|\lambda|} \frac{f(\tau, \zeta)}{(\tau-a)} d\tau \right] &\frac{\exp[i\theta]}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta \equiv \\ \equiv T_{\lambda, \mu} [f(t, z), g(t, z)]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Phi(z) + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \frac{\exp[i\theta] \Phi(\zeta)}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta = (t-a)^\lambda T_{\lambda, \mu} [f(t, z), g(t, z)]. \quad (4)$$

В силу независимости левой части (4) от переменной t следует

$$\lambda(t-a)^{\lambda-1} T_{\lambda, \mu} [f(t, z), g(t, z)] + (t-a)^\lambda \frac{\partial}{\partial t} T_{\lambda, \mu} [f(t, z), g(t, z)] = 0. \quad (5)$$

Заметим, что

$$(t-a)^\lambda T_{\lambda,\mu} [f(t,z), g(t,z)] = (t-a)^\lambda [g(t,z) - f(t,z)] + \\ + \lambda \int_a^t (\tau-a)^\lambda \frac{f(\tau,z)}{(\tau-a)} d\tau - \frac{\mu}{\pi} \iint_D (t-a)^\lambda \left[f(t,\zeta) - \lambda \int_a^t \frac{f(\tau,\zeta)}{(\tau-a)} d\tau \right] \frac{\exp[i\theta]}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} (t-a)^\lambda [g(t,z) - f(t,z)] + \lambda (t-a)^{\lambda-1} f(t,z) - \\ - \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial t} [(t-a)^\lambda f(t,\zeta)] - \lambda \frac{f(t,\zeta)}{(t-a)^{1-\lambda}} \right] \frac{\exp[i\theta]}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta = 0.$$

Из полученных равенств следует

$$\lambda (t-a)^{\lambda-1} f(t,z) + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left[\lambda \frac{f(t,\zeta)}{(t-a)^{1-\lambda}} \right] \frac{\exp[i\theta]}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta = \\ = -\frac{\partial}{\partial t} (t-a)^\lambda [g(t,z) - f(t,z)] + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial t} [(t-a)^\lambda f(t,\zeta)] \right] \frac{\exp[i\theta]}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta \quad (6)$$

Принимая во внимание равенство (6), выражение (4) перепишем в следующем виде

$$\Phi(z) + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \frac{\exp[i\theta] \Phi(\zeta)}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta = (t-a)^\lambda [g(t,z) - f(t,z)] - \frac{\mu}{\pi} \iint_D \frac{\exp[i\theta] f(t,\zeta)}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta + \\ + \int_a^t \left[\lambda (\tau-a)^{\lambda-1} f(\tau,z) + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left[\lambda \frac{f(\tau,\zeta)}{(\tau-a)^{1-\lambda}} \right] \frac{\exp[i\theta]}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta \right] d\tau = \\ = (t-a)^\lambda [g(t,z) - f(t,z)] - \frac{\mu}{\pi} \iint_D \frac{\exp[i\theta] f(t,\zeta)}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta - \\ - \int_a^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ (\tau-a)^\lambda [g(\tau,z) - f(\tau,z)] - \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left[(\tau-a)^\lambda f(\tau,\zeta) \right] \frac{\exp[i\theta]}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta \right\} d\tau = \\ = (t-a)^\lambda [g(t,z) - f(t,z)] - \frac{\mu}{\pi} \iint_D \frac{\exp[i\theta] f(t,\zeta)}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta - (t-a)^\lambda \cdot \\ [g(t,z) - f(t,z)] + \left[(\tau-a)^\lambda [g(\tau,z) - f(\tau,z)] \right]_{\tau=a} - \\ - \left\{ \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left[(\tau-a)^\lambda f(\tau,\zeta) \right] \frac{\exp[i\theta]}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta - \right.$$

$$-\frac{\mu}{\pi} \iint_D \left[[(\tau - a)^\lambda f(\tau, \zeta)]_{\tau=a} \right] \frac{\exp[i\theta]}{(R - \rho)(\zeta - z)} d\xi d\eta \Big\} \tag{7}$$

В силу условия (3) имеем:

$$[(\tau - a)^\lambda f(\tau, \zeta)]_{\tau=a} = 0.$$

Допустим, что в (7) существует предел

$$[(\tau - a)^\lambda g(\tau, z)]_{\tau=a} = G(z). \tag{8}$$

Тогда из (7) приходим к решению следующего интегрального уравнения

$$\Phi(z) + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \frac{\exp[i\theta] \Phi(\zeta)}{(R - \rho)(\zeta - z)} d\xi d\eta = G(z). \tag{9}$$

Если решение интегрального уравнения (9) при $\mu < 0$ существует, тогда оно выражается равенством

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= [(R - r)^{2|\mu|} \omega(z) + G(z) - \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left(\frac{R - r}{R - \rho} \right)^{2|\mu|} \frac{\exp[i\theta] G(\zeta)}{(R - \rho)(\zeta - z)} d\xi d\eta] \equiv \\ &\equiv T_2[\omega(z), G(z)], \end{aligned} \tag{10}$$

где $\omega(z)$ – произвольная аналитическая функция комплексной переменной z в области D . При этом для сходимости интеграла в правой части равенства (10) потребуем, чтобы $G(Re^{i\theta}) = 0$ с асимптотическим поведением

$$G(z) = 0 \left[(R - r)^{\gamma_3} \right], \quad \gamma_3 > 2|\mu| \text{ при } r \rightarrow R. \tag{11}$$

Полученное значение $\Phi(z)$ из равенства (10) подставляя в представление (2), находим значение функции $\varphi(t, z)$ в виде

$$\varphi(t, z) = T_1 \left[T_2[\omega(z), G(z)], f(t, z) \right]. \tag{12}$$

Интегральное представление (12) получено при предположении, что $f(a, z) = 0$ с асимптотическим поведением (3), $f(t, Re^{i\theta}) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(t, z) = 0 \left[(R - r)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } r \rightarrow R$$

и существования предела вида (8).

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть в системе интегральных уравнений (1) основным уравнением является первое уравнение и $\lambda < 0, \mu < 0$. Функция $f(t, z) \in C(\bar{\Omega})$, $f(a, z) = 0$ с асимптотическим поведением (3), причем $G(Re^{i\theta}) = 0$ с асимптотическим поведением (11). Функции $f(t, z)$ и $g(\tau, z)$ удовлетворяют условию совместности (5). Тогда любое решение системы интегральных уравнений (1) из класса $C(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на боковой поверхности и границе нижнего основания D , представимо в виде (12), где $\omega(z)$ – произвольная аналитическая функция комплексной переменной z в области D .

Теперь допустим, что в интегральном представлении (12) решение интегрального уравнения (1) – функция $\varphi(t, z)$ известна и выполнены все условия теоремы 1. Умножая обе стороны равенства (12) на $(t-a)^\lambda$, получим

$$\varphi(t, z)(t-a)^\lambda = \Phi(z) + (t-a)^\lambda \left[f(t, z) - \lambda \int_a^t \left(\frac{t-a}{\tau\tau-a} \right)^{|\lambda|} \frac{f(\tau, z)}{\tau-a} d\tau \right].$$

Отсюда

$$\Phi(z) = \varphi(t, z)(t-a)^\lambda - (t-a)^\lambda \left[f(t, z) - \lambda \int_a^t \left(\frac{t-a}{\tau\tau-a} \right)^{|\lambda|} \frac{f(\tau, z)}{\tau-a} d\tau \right].$$

Вместо функции $\Phi(z)$ подставляя её значение из (10), получим

$$\begin{aligned} (R-r)^{2[\mu]} \omega(z) + G(z) - \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left(\frac{R-r}{R-\rho} \right)^{2[\mu]} \frac{\exp[i\theta]G(\zeta)}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta = \\ = \varphi(t, z)(t-a)^\lambda - (t-a)^\lambda \left[f(t, z) - \lambda \int_a^t \left(\frac{t-a}{\tau\tau-a} \right)^{|\lambda|} \frac{f(\tau, z)}{\tau-a} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega(z) = (R-r)^{2\mu} \left\{ \varphi(t, z)(t-a)^\lambda - (t-a)^\lambda \left[f(t, z) - \lambda \int_a^t \left(\frac{t-a}{\tau\tau-a} \right)^{|\lambda|} \frac{f(\tau, z)}{\tau-a} d\tau \right] \right\} - \\ - (R-r)^{2\mu} \left[G(z) - \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left(\frac{R-r}{R-\rho} \right)^{2[\mu]} \frac{\exp[i\theta]G(\zeta)}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta \right] \equiv \\ \equiv (T_1)^{-1} [\varphi(t, z), f(t, z), G(z)]. \end{aligned} \tag{13}$$

Итак, доказано следующее утверждение

Теорема 2. Пусть в системе интегральных уравнений (1) функции $f(t, z)$, $g(\tau, z)$, параметры λ , μ удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Тогда интегральное представление (12) обратимо, то есть произвольная аналитическая функция $\omega(z)$ в области D находится единственным образом через значение $\varphi(t, z)$ по формуле (13).

Решение вида (12) обладает свойством

$$\left[\varphi(t, z)(t-a)^\lambda \right]_{t=a} = T_2 [\omega(z), G(z)], \tag{14}$$

где

$$T_2 [\omega(z), G(z)] = (R-r)^{2\mu} \omega(z) + G(z) - \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left(\frac{R-r}{R-\rho} \right)^{2[\mu]} \frac{\exp[i\theta] G(\zeta)}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta.$$

Отсюда

$$\left[[(R-r)^{2\mu} \left[\varphi(t, z)(t-a)^\lambda \right]_{t=a}]_{r=R} = [\omega(z)]_{r=R}. \tag{15}$$

Пусть в интегральном уравнении (9) $\mu > 0$. Тогда, согласно [13], решение данного уравнения выражается равенством

$$\Phi(z) = G(z) - \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left(\frac{R-\rho}{R-r} \right)^{2\mu} \frac{\exp[i\theta] G(\zeta)}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta \equiv T_3 [G(z)].$$

В данном случае для сходимости интеграла в полученном решении необходимо выполнение условия $G(Re^{i\theta}) = 0$ с асимптотическим поведением

$$G(z) = O\left[(R-r)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } r \rightarrow R. \tag{16}$$

Подставляя полученное значение $\Phi(z)$ в (4), находим решение системы интегральных уравнений (1) в данном случае:

$$\begin{aligned} \varphi(t, z) &= (t-a)^{|\lambda|} \Phi(z) + f(t, z) - \lambda \int_a^t \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right)^{|\lambda|} \frac{f(\tau, z)}{\tau-a} d\tau \equiv \\ &\equiv T_1 [T_3 [G(z)], f(t, z)]. \end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть в системе интегральных уравнений (1) основным уравнением является первое уравнение системы и $\lambda < 0$, $\mu > 0$. Функция $f(t, z) \in C(\bar{\Omega})$, $f(a, z) = 0$ с асимптотическим поведением (3). Существует предел вида (8), причем $G(Re^{i\theta}) = 0$ с асимптотическим поведением

(16). Функции $f(t, z)$ и $g(t, z)$ удовлетворяют условию совместности (5). Тогда система интегральных уравнений (1) в классе функций $\varphi(t, z)$, обращающихся в нуль на боковой поверхности и границе нижнего основания цилиндра, имеет единственное решение, которое выражается равенством (17).

Пусть основным уравнением в системе интегральных уравнений (1) является первое уравнение системы (1) и $\lambda > 0$. Тогда единственное решение первого уравнения системы, согласно [4], выражается равенством

$$\varphi(t, z) = f(t, z) - \lambda \int_a^t \left(\frac{\tau - a}{t - a} \right)^\lambda \frac{f(\tau, z)}{\tau - a} d\tau. \tag{18}$$

Решение вида (18) получено при условии, что $f(a, z) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(t, z) = 0 \left[(t - a)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } t \rightarrow a. \tag{19}$$

Подставляя значение $\varphi(t, z)$ из (18) во второе уравнение системы уравнений (1), находим условие совместности уравнений системы в этом случае:

$$f(t, z) - \lambda \int_a^t \left(\frac{\tau - a}{t - a} \right)^\lambda \frac{f(\tau, z)}{\tau - a} d\tau + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left[f(t, \zeta) - \lambda \int_a^t \left(\frac{\tau - a}{t - a} \right)^\lambda \frac{f(\tau, \zeta)}{\tau - a} d\tau \right] \frac{d\xi d\eta}{(R - \rho)(\zeta - z)} = g(t, z). \tag{20}$$

Интеграл в правой части равенства (20) сходится, если $f(t, Re^{i\theta}) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(t, z) = 0 \left[(R - r)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } r \rightarrow R. \tag{21}$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение

Теорема 4. Пусть в системе интегральных уравнений (1) основным уравнением является первое уравнение и $\lambda > 0$. Функция $f(t, z) \in C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет условиям (19) и (21). Функции $f(t, z)$ и $g(t, z)$ между собой связаны формулой (20). Тогда система уравнений (1) имеет единственное решение, которое выражается равенством (18).

Интегральное представление (12) и его формула обращения (13) дают возможность для системы интегральных уравнений (1) ставить и исследовать следующую граничную задачу типа Шварца:

Задача D_1 . Требуется найти решение системы интегральных уравнений (1) при $\lambda < 0$, $\mu < 0$ по граничным условиям

$$\operatorname{Re} \left[\left[(R-r)^{2\mu} \left[\varphi(t, z)(t-a)^\lambda \right]_{t=a} \right]_{r=R} \right] = E(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (22)$$

$$\left\{ (R-r)^{2\mu} \left[\varphi(t, z)(t-a)^\lambda \right]_{t=a} \right\}_{z=0} = B, \quad (23)$$

где $E(\theta)$ – заданная функция точек границы нижнего основания цилиндра, B – заданная постоянная на основной оси цилиндра.

Решение задачи D_1 . Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда используя интегральное представление (12) и свойство (15), имеем

$$\left[\operatorname{Re} \left[(R-r)^{2\mu} \left[\varphi(t, z)(t-a)^\lambda \right]_{t=a} \right]_{r=R} \right] = \left[\operatorname{Re} \omega(z) \right]_{r=R} = E(\theta).$$

Таким образом, решение задачи D_1 свелось к решению следующей задачи Шварца теории аналитических функций:

Требуется найти аналитическую функцию $\omega(z)$ в области D по граничному условию

$$\left[\operatorname{Re} \omega(z) \right]_{r=R} = E(\theta) \text{ на окружности } |z| = R.$$

Решение данной задачи, согласно [13], [14], дается формулой

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\theta) \frac{\operatorname{Re}^{i\theta} + z}{\operatorname{Re}^{i\theta} - z} d\theta + ic, \quad (24)$$

где c – произвольная вещественная постоянная.

Отсюда

$$\omega(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\theta) d\theta + ic. \quad (25)$$

С другой стороны, из равенства (14) следует

$$(R-r)^{2\mu} \left[\varphi(t, z)(t-a)^\lambda \right]_{r=a} = \omega(z) + (R-r)^{2\mu} G(z) - \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta] G(\zeta)}{(\zeta-z)} d\xi d\eta.$$

Из полученного равенства следует

$$\begin{aligned} \omega(0) = & \left[(R-r)^{2\mu} \left[\varphi(t, z)(t-a)^\lambda \right]_{t=a} \right]_{z=0} - \left[(R-r)^{2\mu} G(z) \right]_{z=0} + \\ & + \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta] G(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

В силу условия (23) имеем

$$\omega(0) = B - \left[(R-r)^{2\mu} G(z) \right]_{z=0} + \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta]G(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta.$$

В этом равенстве вместо $\omega(0)$ подставляя его значение из равенства (25), получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\theta) d\theta + ic = B - \left[(R-r)^{2\mu} G(z) \right]_{z=0} + \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta]G(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta.$$

Откуда

$$ic = B - \left[(R-r)^{2\mu} G(z) \right]_{z=0} + \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta]G(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\theta) d\theta \equiv E_1 + iE_2. \tag{26}$$

Причём

$$E_1 = \operatorname{Re} \left[B - \left[(R-r)^{2\mu} G(z) \right]_{z=0} + \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta]G(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\theta) d\theta \right] = 0. \tag{27}$$

Подставляя значение ic из (26) в равенство (24), находим значение $\omega(z)$ в виде

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\theta) \frac{\operatorname{Re}^{i\theta} + z}{\operatorname{Re}^{i\theta} - z} d\theta + iE_2.$$

Полученное значение $\omega(z)$, подставляя в равенство (12), находим решение задачи D_1 в виде

$$\varphi(t, z) = T_1 \left[T_2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\theta) \frac{\operatorname{Re}^{i\theta} + z}{\operatorname{Re}^{i\theta} - z} d\theta + iE_2, G(z) \right], f(t, z) \right]. \tag{28}$$

Таким образом, доказана

Теорема 5. Пусть в системе интегральных уравнений (1) параметры λ , μ и функции $f(t, z)$ и $g(t, z)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Функции $G(z)$, $E(\theta)$, число B такие, что выполнено условие (27). Тогда задача D_1 имеет единственное решение, которое выражается равенством (28).

Поступило 03.04.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Раджабов Н. Переопределенная линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверх сингулярные интегральные уравнения типа Вольтерра третьего рода с логарифмическими и сверх-сингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе: изд. ТНУ, 2021, 317 с.
2. Rajabov N. Volterra type Integral Equation with Boundary and Interior fixed singularity and super-singularity kernels and their application. – Dushanbe, Tajik State University, Irfon, 2010, 295 p.
3. Раджабов Н. Граничные задачи для одного класса переопределенных систем интегральных уравнений Вольтерра с двумя сингулярными линиями. – Мат-лы респ. науч.-практ. конф. “Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества”. – Худжанд, 2021, с. 140-141 .
4. Раджабов Н. Переопределенная линейная система двух интегральных уравнений Вольтерровского типа с двумя фиксированными граничными сингулярными линиями в ядре. – Мат-лы междунар. науч. конф. “Современные проблемы математики и физики”, посвящ. 70-летию чл.-корр. АНРБ Сабитова К.Б. (12-15 сентября 2021, г. Стерлитамак), 2021, с. 85-90.
5. Rajabov N. An explicit solution to a class of a second kind complex integral equation with singular and super-singular kernel. Functional – Analytic and Complex Methods, their Interactions, and Applications to Partial Differential Equation (Proceedings of the international Graz workshop) – World Scientific, New Jersey-London-Singapore-Hong Kong, 2001, p.318-329.
6. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. – М.: Наука, 2016, 271 с.
7. Сабитов К.Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Высшая школа, 2005, 670 с.
8. Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. – Актюбе, 2018, 263 с.
9. Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром однородной степени -1. – Душанбе, Изд-во “Дониш”, 1966, 47 с.
10. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. – Душанбе, Изд-во АН Таджикской ССР, 1963.
11. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешано-составного типа. – Ташкент: ФАН, 1979, 240 с.
12. Салахиддинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. – Ташкент: Universidad, 2005, 224 с.
13. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977, 640 с.
14. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959, 628 с.

Н.Рачабов

ОИД БА НАЗАРИЯИ ЯК СИНФИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ БАРЗИЕДМУАЙАНШУДАИ ИНТЕГРАЛИ ДАР СОҲАИ СИЛИНДРӢ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола барои системаи барзиёдмуайаншудаи муодилаҳои интегралӣ, дар ҳолате ки муодилаи якум муодилаи асосии система ва $\lambda < 0$, $\mu < 0$ мебошад, тасвири бисершаклии ҳалҳо ба воситаи як функсияи ихтиёрии аналитикии тағйирёбандаи комплекси нуктаҳои асоси поёнии цилиндр ёфта шудааст. Формулаи гардиши тасвири интегралӣ ёфта шудааст. Дар ин асос масъалаи канории намуди Шварс гузошта шуда, тадқиқ карда шудааст. Ҳолатҳои омӯхта шудаанд, ки системаи муодилаҳо ҳалли ягона дорад.

Калимаҳои калидӣ: соҳаи цилиндрӣ, системаи барзиёдмуайаншудаи муодилаҳои интегралӣ, тасвириҳои интегралӣ, масъалаи намуди Шварс.

N.Rajabov

TO THEORY ONE CLASS OF THE OVER DETERMINED SYSTEM INTEGRAL EQUATION BY CYLINDRICAL DOMAIN

In this work for over determined system integral equation type by cylindrical domain, when the first equation of the system is the main one and $\lambda < 0$, $\mu < 0$, obtained integral representation manifold solution by arbitrary analytic function one variable. Obtained inverse formula. In this basis, stand and solving Schwartz problem. The cases when the system of equations has a single solution are studied.

Key words: cylindrical domain, over determined system integral equation, integral representation, a Schwartz type problem.

Сведения об авторах:

Раджабов Нусрат – доктор физ.-мат. наук, академик НАН Таджикистана, профессор кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета.

УДК 517.968.220

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

М.Б.Хушвахтзода

К ТЕОРИИ МОДЕЛЬНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ГРАНИЧНЫМИ ОСОБЫМИ И СЛАБО ОСОБЫМИ ОБЛАСТЯМИ

*Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана Н.Раджабовым 21.12.2022 г.)*

В статье исследуется модельное трехмерное интегральное уравнение типа Вольтерра с граничными особыми и слабо особыми областями в случае, когда коэффициенты уравнения связаны между собой. В зависимости от знаков коэффициентов уравнения, решение интегрального уравнения может содержать от одного до трех произвольных функций, зависящих от двух переменных и выделяется случай, когда решение интегрального уравнения единственно.

Ключевые слова: модельное интегральное уравнение, трехмерное интегральное уравнение, граничные особые области, произвольная функция.

Через Ω обозначим $\Omega = \{(x, y, z), 0 \leq a < x < \infty, 0 \leq b < y < b_0, c < z < c_0\}$. Пусть $D_1 = \{(x, y), 0 \leq a < x < \infty, 0 \leq b < y < b_0, z = c\}$, $D_2 = \{(x, z), 0 \leq a < x < \infty, c < z < c_0, y = b\}$, $D_3 = \{(y, z), 0 \leq b < y < b_0, c < z < c_0, x = \infty\}$, $\tilde{J}_1 = \{x; 0 \leq a < x < \infty, y = b, z = c\}$, $\tilde{J}_2 = \{y, 0 \leq b < y < b_0, x = a, z = c\}$, $\tilde{J}_3 = \{z, c < z < c_0, x = a, y = b\}$. В области Ω рассмотрим трехмерное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} & \varphi(x, y, z) + A \int_x^\infty \frac{\varphi(t, y, z)}{(t-a)^\alpha} dt + B \int_b^y \frac{\varphi(x, s, z)}{s-b} ds + C \int_c^z \frac{\varphi(x, y, \tau)}{\tau-c} d\tau + \\ & + A_1 \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{\varphi(t, s, z)}{s-b} ds + B_1 \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_c^z \frac{\varphi(t, y, \tau)}{\tau-c} d\tau + C_1 \int_b^y \frac{ds}{s-b} \times \\ & \times \int_c^z \frac{\varphi(x, s, \tau)}{\tau-c} d\tau + D \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{ds}{s-b} \int_c^z \frac{\varphi(t, s, \tau)}{\tau-c} d\tau = f(x, y, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где $A, B, C, A_1, B_1, C_1, D$ – заданные постоянные, $f(x, y, z)$ – заданная функция, $\varphi(x, y, z)$ – искомая функций, $0 < \alpha < 1$.

Адрес для корреспонденции: Хушвахтзода Мухидин Бурак. 734055, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Борбад, 48/5. Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана. E-mail: muhuddin_93@mail.ru

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $\varphi(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, обрашающихся в нуль при $x \rightarrow \infty, y \rightarrow b, z \rightarrow c$ соответственно с асимптотическими поведением:

$$\varphi(x, y, z) = o[x^{-\zeta_1}], \quad \zeta_1 > 1 - \alpha, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$\varphi(x, y, z) = o[(y - b)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \quad y \rightarrow b,$$

$$\varphi(x, y, z) = o[(z - c)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \quad z \rightarrow c.$$

В работах [1-8] изучены интегральные уравнения с однородным ядром -1 степени, также изучены одномерные, двумерные и некоторые случаи многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода с фиксированными граничными и внутренними сингулярными или сверхсингулярными точками, линиями или областями.

Исследованию модельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями и немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями на полосе посвящены работы [9-14].

Отметим, что в [15] исследованы некоторые случаи модельного трехмерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми и слабо особыми областями.

В данной работе находим решение трехмерного интегрального уравнения (1), когда коэффициенты уравнения связаны условиями:

$$A_1 = AB, B_1 = AC, D = AC_1. \tag{2}$$

Интегральное уравнение (1) при помощи интегральных операторов представим в виде [9,10] :

$$\begin{aligned} \varphi + AT_x^\infty(\varphi) + BT_b^y(\varphi) + CT_c^z(\varphi) + A_1T_x^\infty T_b^y(\varphi) + B_1T_x^\infty T_c^z(\varphi) + \\ + C_1T_b^y T_c^z(\varphi) + DT_x^\infty T_b^y T_c^z(\varphi) = f, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$T_x^\infty \varphi = \int_x^\infty \frac{\varphi(t, y, z)}{(t - a)^\alpha} dt, \quad T_b^y \varphi = \int_b^y \frac{\varphi(x, s, z)}{s - b} ds, \quad T_c^z \varphi = \int_c^z \frac{\varphi(x, y, \tau)}{\tau - a} d\tau.$$

В случае, когда коэффициенты уравнения (3) между собой связаны равенствами (2), уравнение (1) представим в виде:

$$L(\varphi) = \prod_A^\infty \prod_B^y \prod_C^z(\varphi) = f(x, y, z), \tag{4}$$

где

$$\prod_A^\infty(\varphi) = \varphi + AT_x^\infty \varphi, \quad \prod_B^y(\varphi) = \varphi + BT_b^y \varphi, \quad \prod_C^z(\varphi) = \varphi + CT_c^z \varphi.$$

В уравнении (4) введём в рассмотрение неизвестные функции:

$$\varphi_1(x, y, z) = \prod_C^z(\varphi), \varphi_2 = \prod_B^y \varphi_1, \varphi_3 = \prod_A^\infty \varphi_2 = f,$$

тогда придем к решению модельного двумерного интегрального уравнения следующего вида:

$$\prod_A^\infty \varphi_2 = f. \tag{5}$$

Как известно [9,10], решение уравнения (5) при $A < 0$ выражается равенством:

$$\varphi_2(x, y, z) = e^{-A\omega_a^\alpha(x)} \rho(y, z) + (\prod_A^\infty)^{-1}(f), \tag{6}$$

где

$$(\prod_A^\infty)^{-1}(f) = f(x, y, z) - A \int_x^\infty e^{A\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \frac{f(t, y, z) dt}{(t-a)^\alpha}$$

и $\rho(y, z)$ – произвольная функция точек области D_3 .

Соответственно при $A > 0$, решение уравнения (5) выражается равенством:

$$\varphi_2(x, y, z) = (\prod_A^\infty)^{-1}(f).$$

В равенстве $\varphi_2 = \prod_B^y \varphi_1$ при $A < 0$ вместо функции $\varphi_2(x, y, z)$, подставляя её значение из равенства (6), находим решение уравнения :

$$\prod_B^y \varphi_1 = e^{-A\omega_a^\alpha(x)} \rho(y, z) + (\prod_A^\infty)^{-1}(f). \tag{7}$$

Согласно [10], решение интегрального уравнения (7) выражается равенством:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= (y-b)^{-B} \psi(x, z) + e^{-A\omega_a^\alpha(x)} (\prod_B^y)^{-1} \rho(y, z) + \\ &+ (\prod_B^y)^{-1} (\prod_A^\infty)^{-1}(f). \end{aligned} \tag{8}$$

В равенстве $\varphi_1 = \prod_C^z(\varphi)$ вместо функции $\varphi_1(x, y, z)$, подставляя её значение из равенства (8), находим решение уравнения :

$$\varphi(x, y, z) + AT_C^z \varphi = \varphi_1.$$

При выполнении всех вышеуказанных условий, общее решение уравнения (1) при $A < 0$, $B < 0$, $C < 0$ представимо в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= (z-c)^{-C} \nu(x, y) + e^{-A\omega_a^\alpha(x)} \left(\prod_C^z\right)^{-1} \cdot (\prod_B^y)^{-1} \rho(y, z) + \\ &+ (y-b)^{-B} \left(\prod_C^z\right)^{-1} \psi(x, z) + \left(\prod_C^z\right)^{-1} (\prod_B^y)^{-1} (\prod_A^\infty)^{-1}(f). \end{aligned} \tag{9}$$

Из вышеприведенных рассуждений вытекает следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть в интегральном уравнении (1) коэффициенты удовлетворяют условиям (2), $A < 0$, $B < 0$, $C < 0$. Далее, пусть функция $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y, z) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$f(x, y, z) = o\left[e^{|A|\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_3}\right], \quad \zeta_3 > 1 - \alpha, \quad x \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$\lim_{y \rightarrow b} f(x, y, z) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$f(x, y, z) = o\left[(y - b)^{\gamma_1}\right], \quad \gamma_1 > |B|, \quad y \rightarrow b, \quad (11)$$

$\lim_{z \rightarrow c} f(x, y, z) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$f(x, y, z) = o\left[(c - z)^{\eta_1}\right], \quad \eta_1 > |C|, \quad z \rightarrow c. \quad (12)$$

Тогда интегральное уравнение (1) в классе $C(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на \mathcal{D}_i ($1 \leq i \leq 3$), всегда разрешимо, общее решение содержит три произвольные функции двух переменных и выражается равенством (9), где $\rho(y, z) \in C(\bar{\mathfrak{J}}_1)$, $\psi(x, z) \in C(\bar{\mathfrak{J}}_2)$, $\nu(x, y) \in C(\bar{\mathfrak{J}}_3)$ – произвольные функции точек $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$, причём $\rho(b, c) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$\rho(y, z) = o\left[(y - b)^{\gamma_1} (c - z)^{\eta_1}\right], \quad \gamma_1 > |B|, \quad y \rightarrow b, \quad \eta_1 > |C|, \quad z \rightarrow c, \quad (13)$$

$\psi(\infty, c) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$\psi(x, z) = o\left[e^{-A\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_3} (c - z)^{\eta_1}\right], \quad \zeta_3 > 1 - \alpha, \quad x \rightarrow \infty, \quad \eta_1 > |C|, \quad z \rightarrow c, \quad (14)$$

$\nu(x, y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$\nu(x, y) = o\left[e^{|A|\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_3} (y - b)^{\gamma_1}\right], \quad \zeta_3 > 1 - \alpha, \quad x \rightarrow \infty, \quad \gamma_1 > |B|, \quad y \rightarrow b. \quad (15)$$

Теорема 2. Пусть в интегральном уравнении (1) коэффициенты удовлетворяют условиям (2), $A < 0$, $B < 0$, $C > 0$. Далее, пусть функция $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y, z) = 0$ соответственно с асимптотическими поведением (10), (11) и $\lim_{z \rightarrow c} f(x, y, z) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$f(x, y, z) = o\left[(c - z)^\varepsilon\right], \quad \varepsilon > 0, \quad z \rightarrow c. \quad (16)$$

Тогда интегральное уравнение (1) в классе $C(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на \mathcal{D}_i ($1 \leq i \leq 3$), всегда разрешимо, общее решение содержит две произвольные функции и выражается равенством:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & e^{-A\omega_a^\alpha(x)} \left(\prod_C^z\right)^{-1} \cdot \left(\prod_B^y\right)^{-1} \rho(y, z) + (y-b)^{-B} \left(\prod_C^z\right)^{-1} \psi(x, z) + \\ & + \left(\prod_C^z\right)^{-1} \left(\prod_B^y\right)^{-1} \left(\prod_A^\infty\right)^{-1} (f), \end{aligned} \tag{17}$$

где $\rho(y, z) \in C(\bar{\mathfrak{J}}_1)$, $\psi(x, z) \in C(\bar{\mathfrak{J}}_2)$ – произвольные функции точек $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$, причём $\rho(b, c) = 0$, $\psi(\infty, c) = 0$ соответственно с асимптотическими поведением (13), (14).

Теорема 3. Пусть в интегральном уравнении (1) коэффициенты удовлетворяют условиям (2) $A < 0$, $B > 0$, $C < 0$. Далее, пусть функция $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow c} f(x, y, z) = 0$ соответственно с асимптотическими поведением (10), (12) и $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y, z) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$f(x, y, z) = o\left[(y-b)^\varepsilon\right], \quad \varepsilon > 0, \quad y \rightarrow b. \tag{18}$$

Тогда интегральное уравнение (1) в классе $C(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на \mathcal{D}_i ($1 \leq i \leq 3$), всегда разрешимо, общее решение содержит две произвольные функции двух переменных и выражается равенством:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & (z-c)^{-C} \nu(x, y) + e^{-A\omega_a^\alpha(x)} \left(\prod_C^z\right)^{-1} \cdot \left(\prod_B^y\right)^{-1} \rho(y, z) + \\ & + \left(\prod_C^z\right)^{-1} \left(\prod_B^y\right)^{-1} \left(\prod_A^\infty\right)^{-1} (f), \end{aligned}$$

где $\rho(y, z) \in C(\bar{\mathfrak{J}}_1)$, $\nu(x, y) \in C(\bar{\mathfrak{J}}_3)$ – произвольные функции точек $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_3$, причём $\rho(b, c) = 0$, $\nu(\infty, b) = 0$ соответственно с асимптотическими поведением (13) и (15).

Теорема 4. Пусть в интегральном уравнении (1) коэффициенты удовлетворяют условиям (2), $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$. Далее, пусть функция $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow c} f(x, y, z) = 0$ соответственно с асимптотическими поведением:

$$f(x, y, z) = o\left[x^{-\zeta_3}\right], \quad \zeta_3 > 1 - \alpha, \quad x \rightarrow \infty, \tag{19}$$

(18) и (12).

Тогда интегральное уравнение (1) в классе $C(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на \mathcal{D}_i ($1 \leq i \leq 3$), всегда разрешимо, общее решение содержит одну произвольную функцию и выражается равенством:

$$\varphi(x, y, z) = (z - c)^{-C} v(x, y) + \left(\prod_C^z\right)^{-1} \left(\prod_B^y\right)^{-1} \left(\prod_A^\infty\right)^{-1}(f),$$

где $v(x, y) \in C(\bar{\mathfrak{J}}_3)$ – произвольные функции точек \mathfrak{J}_3 , причём $v(\infty, b) = 0$ с асимптотическим поведением (15).

Теорема 5. Пусть в интегральном уравнении (1) коэффициенты удовлетворяют условиям (2), $A < 0$, $B > 0$, $C > 0$. Далее, пусть функция $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow c} f(x, y, z) = 0$ соответственно с асимптотическими поведением (10), (18), (16).

Тогда интегральное уравнение (1) в классе $C(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на \mathcal{D}_i ($1 \leq i \leq 3$), всегда разрешимо, общее решение содержит одну произвольную функцию и выражается равенством:

$$\varphi(x, y, z) = e^{-A\omega_a^x(x)} \left(\prod_C^z\right)^{-1} \cdot \left(\prod_B^y\right)^{-1} \rho(y, z) + \left(\prod_C^z\right)^{-1} \left(\prod_B^y\right)^{-1} \left(\prod_A^\infty\right)^{-1}(f),$$

где $\rho(y, z) \in C(\bar{\mathfrak{J}}_1)$ – произвольные функции точек \mathfrak{J}_1 , причём $\rho(b, c) = 0$ с асимптотическим поведением (13).

Теорема 6. Пусть в интегральном уравнении (1) коэффициенты удовлетворяют условиям (2), $A > 0$, $B < 0$, $C > 0$. Далее, пусть функция $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow c} f(x, y, z) = 0$ соответственно с асимптотическими поведением (19), (18), (12).

Тогда интегральное уравнение (1) в классе $C(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на \mathcal{D}_i ($1 \leq i \leq 3$), всегда разрешимо, общее решение содержит одну произвольную функцию и выражается равенством:

$$\varphi(x, y, z) = (y - b)^{-B} \left(\prod_C^z\right)^{-1} \psi(x, z) + \left(\prod_C^z\right)^{-1} \left(\prod_B^y\right)^{-1} \left(\prod_A^\infty\right)^{-1}(f),$$

где $\psi(x, z) \in C(\bar{\mathfrak{J}}_2)$ – произвольные функции точек \mathfrak{J}_2 , причём $\psi(\infty, c) = 0$ с асимптотическим поведением (14).

Теорема 7. Пусть в интегральном уравнении (1) коэффициенты удовлетворяют условиям (2), $A > 0$, $B < 0$, $C < 0$. Далее, пусть функция $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y, z) = 0$

$\lim_{y \rightarrow b} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow c} f(x, y, z) = 0$ соответственно с асимптотическими поведением (16), (11), (12).

Тогда интегральное уравнение (1) в классе $C(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на \mathcal{D}_i ($1 \leq i \leq 3$), всегда разрешимо, общее решение содержит две произвольные функции двух переменных и выражается равенством:

$$\varphi(x, y, z) = (z - c)^{-C} v(x, y) + (y - b)^{-B} \left(\prod_C^z\right)^{-1} \psi(x, z) + \left(\prod_C^z\right)^{-1} \times \\ \times \left(\prod_B^y\right)^{-1} \left(\prod_A^\infty\right)^{-1}(f),$$

где $v(x, y) \in C(\bar{\mathfrak{J}}_3)$, $\psi(x, z) \in C(\bar{\mathfrak{J}}_2)$ – произвольные функции точек $\mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$, причём $v(\infty, b) = 0$, $\psi(\infty, c) = 0$ соответственно с асимптотическими поведением (15), (14).

Теорема 8. Пусть в интегральном уравнении (1) коэффициенты удовлетворяют условиям (2), $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$. Далее, пусть функция $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y, z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow c} f(x, y, z) = 0$ соответственно с асимптотическими поведением (19), (18), (16).

Тогда интегральное уравнение (1) в классе $C(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на \mathcal{D}_i ($1 \leq i \leq 3$), имеет единственное решение, которое выражается равенством

$$\varphi(x, y, z) = \left(\prod_C^z\right)^{-1} \left(\prod_B^y\right)^{-1} \left(\prod_A^\infty\right)^{-1}(f).$$

Поступило 18.05.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962, 254 с.
2. Бильман Б.М. Об интегральных уравнениях с переменными пределами интегрирования, ядра которых имеют особенность типа однородной функции степени -1. – В.сб. «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами», Изд-во «Дониш», Душанбе, 1969, с. 19-40.
3. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений – М.: Наука, 1987, 415 с.
4. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах. – Матем. Заметки, 1989, т.46, №46, с. 91-93.
5. Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1. – Душанбе, Дониш, 1966, 49 с.
6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968.

7. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962, с. 254.
8. Раджабов Н. Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе, 2007, 221 с.
9. Раджабов Н., Раджабова Л.Н. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. – Germany; LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011, 502 p.
10. Раджабова Л.Н., Раджабов Н. К теории одного класса двумерного слабо сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра на первом квадранте. – ДАН РТ, 2014, т. 57, №6, с. 443-451.
11. Раджабова Л.Н., Хушвахтов М.Б. К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой. – ДАН РТ, 2018, т. 61, №4, с. 331-337.
12. Раджабова Л.Н., Хушвахтов М.Б. Граничные задачи для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо особой линией на полосе. – Вестник ТНУ. Серия естественных наук, 2019, №2, с. 20-24.
13. Rajabova L.N., Khushvakhtov M.B. To the theory of non-model two-dimensional integral equations of Volterra type with a strongly singular and weakly singular line on a strip. – Bulletin of L.N.Gumilyov Eurasian national University. – Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2019, №4 (129), pp. 67-72.
14. Раджабова Л.Н., Хушвахтзода М.Б. О некоторых случаях модельных трехмерных интегральных уравнений типа Вольтерра с граничными особыми и слабо-особыми областями. – Мат-лы межд. науч.-практической конф., посвящ. 20-летию развития естественных точных и математических наук 2020-2040, «Современные проблемы математики её приложения». (Таджикистан, г. Душанбе, 20-21 октября 2022г.), с. 172-176.

М.Б.Хушвахтзода

ОИД БА НАЗАРИЯИ МУОДИЛАИ МОДЕЛИИ ИНТЕГРАЛИИ СЕЧЕНАКАИ НАМУДИ ВОЛЬТЕРРА БО СОҶАҶОИ МАҲСУС ВА МАҲСУСИЯТИ СУСТИ САРҶАДӢ

Донишгоҳи байналмилалӣ сайёҳӣ ва соҳибкорӣ Тоҷикистон

Дар мақолаи мазкур муодилаи моделии интегралӣ сеченакаи намуди Вольтерра бо соҳаҷои маҳсус ва маҳсусияти сусти сарҷадӣ дар ҳолате, ки коэффитсиентҳои муодилаи интегралӣ байни ҳам вобастагӣ доранд, тадқиқ шудааст. Вобаста аз аломати коэффитсиентҳои муодилаи интегралӣ, ҳалли умумии муодилаи интегралӣ дорои аз як то се функцияҳои ихтиёрии аз ду тағйирёбанда вобастабуда мебошад. Инчунин, ҳолате, ки муодилаи интегралӣ ҳалли ягона дорад, муайян карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *муодилаи моделии интегралӣ, муодилаи сеченакаи моделии интегралӣ, соҳаҷои маҳсуси сарҷадӣ, соҳаҷои маҳсуси сарҷадӣ, функцияи ихтиёрий.*

M.B.Khushvakhtzoda

**ON THE THEORY OF MODEL THREE-DIMENSIONAL VOLTERRA-TYPE
INTEGRAL EQUATIONS WITH BOUNDARY SPECIAL AND WEAKLY SPECIAL
DOMAINS**

International University of tourism and entrepreneurship of Tajikistan

In this article, we study a model three-dimensional integral equation of the Volterra type with boundary special and weakly special domains in the case when the coefficients of the equation are interconnected. Depending on the signs of the coefficients of the equation, the solution of an integral equation can contain from one to three arbitrary functions, depending on two variables, the case is determined when solution of the integral equation is unique .

Key words: *model integral equation, three-dimensional integral equation, boundary special domains, weakly special domains, arbitrary function.*

Сведения об авторах:

Хушвактзода Мухиддин Бурак – кандидат физ.-мат. наук, ассистент кафедры «Математика в экономике» Международного университета туризма и предпринимательства Таджикистана.

УДК 523. 532

Специальность: 1.3.1 – Физика космоса, астрономия

Член-корреспондент НАН Таджикистана Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, С.Н.Сафаров,**Ф.Дж.Рахматуллаева****ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АСТЕРОИДА 2011 XZ1 ПО НАБЛЮДЕНИЯМ В ПЕРИОД СБЛИЖЕНИЯ С ЗЕМЛЕЙ***Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана*

На телескопе Цейсс-1000 Международной астрономической обсерватории Санглох (МАОС) Института астрофизики НАНТ в августе 2020 г. проведен мониторинг астероида 2011 XZ1. В этот период астероид сблизился с Землей на расстоянии 0.2 а.е. В результате фотометрии избранных фильтров, измерен видимый блеск астероида в фильтрах BVRI, определен абсолютный блеск $H=17.70^m \pm 0.02$ (фильтр V), значительных вариаций блеска не обнаружено. Величина альбедо 0.20 и полученные показатели цвета указывают на принадлежность астероида к S типу, вещество которого богато содержанием оливина, пироксена. Диаметр оценен как 0.85 ± 0.05 км, что соответствует имеющимся данным. Физические характеристики астероида не подверглись изменениям из-за его сближения с Землей в августе 2020 г.

Ключевые слова: астероид, наблюдения, фотометрия, блеск, кривая блеска, диаметр, показатели цвета.

Введение

Астероидом, сближающимся с Землей (АСЗ), называется малая планета, движущаяся по орбите, которая вследствие гравитационных возмущений может пересечь орбиту Земли. Перигелийные расстояния q орбит АСЗ удовлетворяют условию $q \leq 1.3$ а.е. В настоящий момент открыто свыше 31.5 тысяч АСЗ, в мире действует десятки автоматических программ, нацеленных на открытие новых объектов, в том числе АСЗ, и поэтому с каждым днем число известных АСЗ увеличивается. Среди АСЗ имеются потенциально опасные астероиды (ПОА), к которым относят все астероиды, орбиты которых в настоящую эпоху сближаются с орбитой Земли до расстояний, меньших или равных 0.05 а.е. (около 7.5 млн. км), и абсолютная звездная величина которых не превышает 22^m , что подразумевает, что их размеры составляют свыше 140 м.

Имеется несколько доступных баз данных наземных наблюдений астероидов, курируемых Международным астрономическим союзом, которые содержат элементы орбит, информацию о физических свойствах известных астероидов, сведения о проведенных оптических и радарных наблюдениях. Однако, учитывая число открытых АСЗ, оптические наземные наблюдения астероидов продолжают сохранять значимость и актуальность. Далеко не для всех астероидов определены орбита, диаметр и геометрическая форма, структура и состав поверхности, период и ориентации оси вращения и др. параметры. Поэтому крайне важно иметь как можно больший набор наблюдательных данных по АСЗ, для того, чтобы получать более точные орбиты, блеск, периоды вращений, диаметры, показатели цвета и, по крайней мере, предположительный минералогический состав тел. Наблюдения и определение физических свойств одного из АСЗ являются целью представленной работы.

Адрес для корреспонденции: Кохирова Гулчехра Исроиловна, Буриев Анварджон Махмадалиевич. 736063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/5, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: kokhirova2004@mail.ru, anvar10@mail.ru

Наблюдения астероида 2011 XZ1

Астероид, сближающийся с Землей далее (АСЗ), получивший обозначение (420302) 2011 XZ1 далее 2011 XZ1, был открыт 6 декабря 2011 г. в рамках автоматической программы наблюдений околоземных объектов «Pan-STARRS-1», выполняемой на Гавайях в США [1]. Абсолютная звездная величина астероида 2011 XZ1 составляет $H=17.79$ звездных величин, геометрическое альbedo не известно. Оценка диаметра составляет 0.95 км, по другим данным эквивалентный диаметр оценен от 0.73 до 1.64 км [2].

В августе 2020 г. астероид сближился с Землей на расстоянии 0.18 а.е., благодаря чему создались благоприятные условия для его наблюдений и, следовательно, исследования его физических свойств. Нами проведены наблюдения астероида 2011 XZ1 на телескопе Цейсс-1000 Международной астрономической обсерватории Санглох (МАОС) Института астрофизики НАНТ в течение трех ночей 6-8 августа 2020 г. Регистрация объекта выполнялась с помощью ПЗС камерой, со следующими характеристиками: $D/F=1000$ мм/13 300 мм, CCD FLI Pro Line 09000, FOV 10'x10', масштаб 0.579 arcsec/pixel с использованием широкополосных фотометрических фильтров системы Джонсона-Козинса – *BVRI*, экспозиции наблюдений составляли 20-120 секунд. Для уменьшения уровня шумов ПЗС камеры аппарата была охлаждена до температуры -20°C . За период наблюдений в фильтрах *BVRI* получено 400 кадров, журнал наблюдений приведен в табл.1, где r и Δ – расстояния астероида от Солнца и Земли, ph – фазовый угол, N и t – количество и время экспозиций. Изображение АСЗ 2011 XZ1 приведено на рис. 1.

Таблица 1

Сводка наблюдений астероида 2011 XZ1 в МАОС

Дата	r , а.е.	Δ , а.е.	ph , град.	N x Фильтр	t , с
				МАОС	
06.08.2020	1.157	0.197	41.072	27xB, 27xV, 27xR, 27xI	20-120
07.08.2020	1.158	0.198	40.016	15xB, 15xV, 15xR, 15xI	20-60
08.08.2020	1.159	0.200	39.907	36xB, 36xV, 36xR, 36xI	20-60



Рис. 1. Астероид 2011 XZ1, 8 августа 2020 г., экспозиция 60 сек Цейсс-1000 МАОС.

Определение физических свойств астероида 2011 XZ1

Первичная обработка кадров проведена с использованием кадров “flat”, “dark” и “bias”, полученных во время наблюдений и необходимых для учета неравномерности поля, темнового тока и ошибок матрицы. Фотометрическая обработка кадров выполнена с использованием программного пакета (ПП) АПЕКС-II [3], выполняющего калибровку кадров, идентификацию изображений звёзд и объектов, и отождествление звёзд с заданными каталогами. Видимые звездные величины астероида определены с использованием звезд сравнения из каталога APASS, для которых блеск определен с точностью равной 0.03^m [4]. Измеренные таким методом видимые звездные величины астероида 2011 XZ1 в фильтрах *BVRI* приведены в виде кривых блеска на рис. 2. где по оси ординат отложены видимые звездные величины m и по оси абсцисс – даты наблюдений в юлианских днях. Средние значения видимых звездных величин объекта, полученные в разных фильтрах, даны в табл. 2.

Таблица 2

Видимые звездные величины астероида 2011 XZ1 по наблюдениям в МАОС в августе (UT) 2020 г.

август (UT), 2020 г.	B	V	R	I
6.04636	16.35±0.018	15.50±0.018	15.04±0.015	14.63±0.018
7.03533	16.41±0.019	15.55±0.019	15.07±0.014	14.65±0.019
8.11168	16.32±0.016	15.51±0.018	15.05±0.017	14.64±0.014

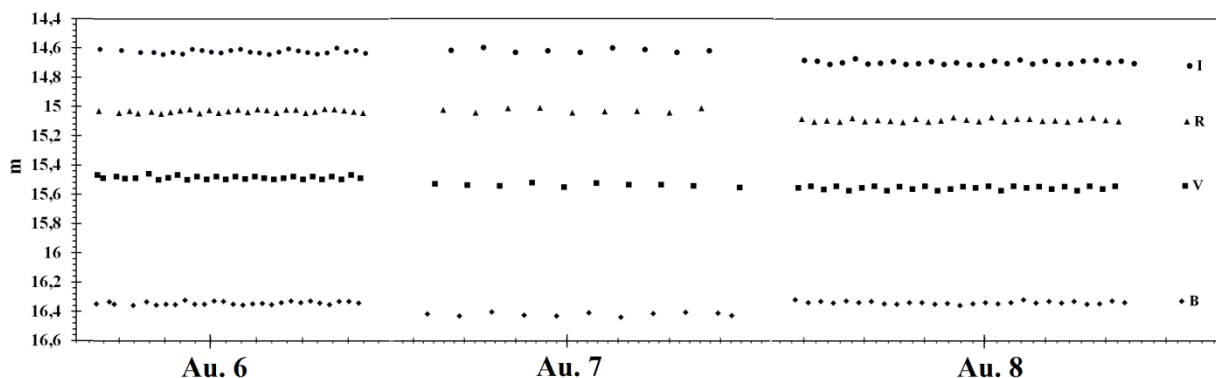


Рис. 2. Кривые блеска астероида 2011 XZ1 в четырех фильтрах по наблюдениям в МАОС 6-8 августа (UT) 2020 г.

Для оценки диаметра необходимо определить абсолютный блеск объекта. Видимые звездные величины астероидов m конвертируются в абсолютные величины H по следующей полуэмпирической формуле, учитывающей изменение блеска в диапазоне фазовых углов от 0 до 120 град. [5]:

$$H = m - 5 \log(r\Delta) + 2.5 \log[(1-G)\Phi_1 + G\Phi_2],$$

$$\Phi_i = \exp\left[-A_i \left\{ \operatorname{tg}(\beta/2) \right\}^{B_i}\right], i = 1, 2, \quad (1)$$

где β – фазовый угол (ph) объекта, G – параметр наклона, найденный лишь для небольшого числа астероидов, для остальных принято значение $G=0.15$; Φ_1 , Φ_2 – функции угла фазы, $A_1=3.33$, $A_2=1.87$, $B_1=0.63$ и $B_2=1.22$ – коэффициенты, значения которых приведены в работе [6].

Абсолютный блеск астероида H (средние значения за ночь) в четырех фильтрах, найденный из соотношения (1), приведен в табл. 3, где также даны величины показателя цвета. Как видно, H

астероида в фильтре *V* находится в интервале $17.68-17.72 \pm 0.01$ зв. вел., что соответствует его эфемеридному значению $H=17.79$ зв. вел. [1-2]. Изменения величины *H* в течение мониторинга незначительны, скорее всего, они связаны с ошибками измерений. Можно заключить, что абсолютный блеск астероида за три ночи наблюдений был постоянным.

Таблица 3

Абсолютный блеск *H* и показатели цвета астероида 2011 XZ1 по наблюдениям в МАОС 6-8 августа (UT) 2020 г.

август (UT), 2020 г.	B	V	R	I	B-V	V-R	R-I	B-R
6.04636	18.54 ± 0.018	17.69 ± 0.018	17.23 ± 0.025	16.82 ± 0.018	0.85	0.47	0.41	1.31
7.03533	18.58 ± 0.019	17.72 ± 0.019	17.24 ± 0.026	16.82 ± 0.019	0.86	0,48	0.42	1.34
8.11168	18.51 ± 0.016	17.68 ± 0.018	17.22 ± 0.017	16.81 ± 0.014	0.83	0.46	0.41	1.29

Показатель цвета является одной из физических величин, позволяющих определить принадлежность астероида к какому-либо таксономическому классу и на этой основе предположить его минералогический состав. Величины показателей цвета *B-V*, *V-R*, *R-I*, *B-R* астероида приведены в табл.3. Сопоставляя данные табл. 3 с диаграммой расположения различных популяций малых тел в соответствии с показателями цвета *B-V* и *V-R* из [7] и с учетом таксономической классификации астероидов по Толену [8], можно отнести астероид 2011 XZ1 к спектральному классу S. Для наглядности мы построили диаграмму *B-V* и *V-R* для астероидов различных типов [7,8] и нанесли на нее наши измерения (рис.3). В класс S входят объекты, имеющие металлический состав с преимущественным содержанием пироксена, оливина, и со средним альбедо – от 10% до 30%.

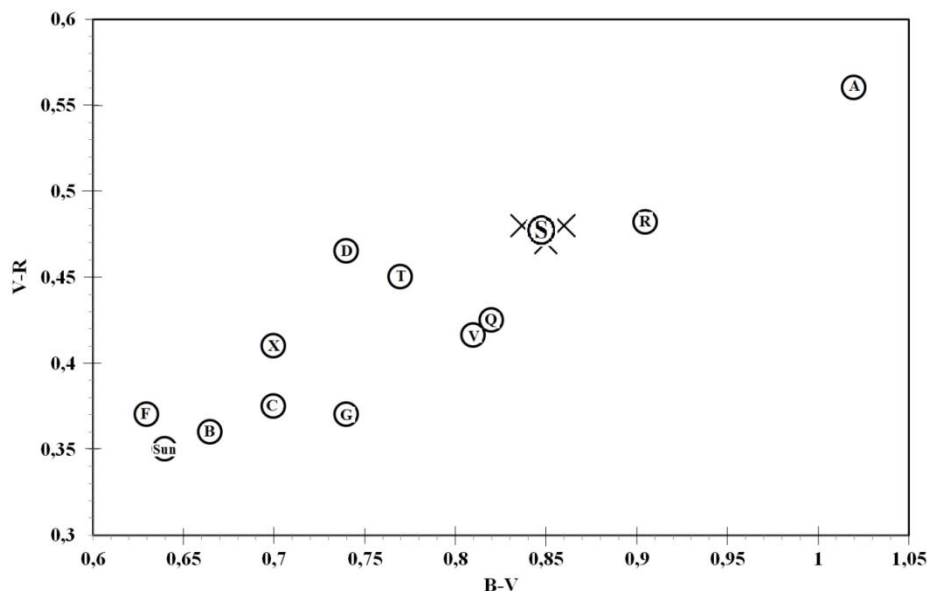


Рис. 3. Зависимость показателей цвета *V-R* от *B-V* для астероидов различных спектральных классов A, B, C, D, F, G, Q, R, S, T, V приведённых в кружках по данным Tolen (1989) [8]. Данные астероида 2011 XZ1 нанесены крестиками.

Мы оценили эффективный диаметр астероида D , используя эмпирическое соотношение [9]:

$$D = \frac{1329}{\sqrt{p_v} \cdot 10^{0.2H}}, \quad (2)$$

где p_v – геометрическое альbedo астероида, H – абсолютная яркость в соответствующем фильтре. Альbedo 2011 XZ1 не измерено, поэтому для p_v мы использовали значение 0.20, принятое для оценки размера AC3 с неизвестным альbedo [10]. Кроме того, астероид, скорее всего, относится к S типу, для которого среднее альbedo также 0.20. Оценки диаметра астероида по измерениям в фильтре V приведены в табл. 4, средняя величина составила 0.86 ± 0.04 км. С учетом имеющихся оценок, таких как 0.95 км [1-2], 0.73 - 1.65 км [2], наши данные по размеру объекта вполне достоверны, что свидетельствует о приемлемой точности фотометрических измерений. В будущем необходимо уточнить альbedo и размер астероида.

Таблица 4

Оценка диаметра астероида 2011 XZ1 по наблюдениям МАОС в 2020 г.

август (UT), 2020 г.	r , а.е.	Δ , а.е.	ph , град.	H_v , зв.вел.	D , км ($p_v=0.20$)
6.04636	1.158	0.198	40.063	17.69 ± 0.01	0.86 ± 0.04
7.03533	1.159	0.199	39.988	17.72 ± 0.01	0.85 ± 0.02
8.11168	1.160	0.201	39.888	17.68 ± 0.01	0.86 ± 0.05

З а к л ю ч е н и е

В результате многоцветных наблюдений астероида 2011 XZ1, выполненных в Международной астрономической обсерватории Санглох (МАОС) Института астрофизики НАНТ в период его сближения с Землей в августе 2020 г.:

- измерен видимый блеск, построены кривые блеска в фильтрах *BVRI* по наблюдениям трёх ночей;
- в фильтре V определен абсолютный блеск $H=17.70^m \pm 0.02$, его величина близка к эфемеридному значению [2];
- в течение 3-х ночей наблюдений блеск астероида оставался постоянным;
- оценены показатели цвета и сделано предположение о принадлежности астероида к S-типу [7], включающему астероиды металлического состава со средним альbedo в интервале 10% -30%;
- средняя оценка диаметра составила 0.85 ± 0.05 км при альbedo 0.20 и соответствует имеющимся данным по размеру астероида, что свидетельствует о приемлемой точности измерений блеска.

Сближение астероида с Землей в августе 2020 г. не оказало влияния на его физические свойства.

Поступило 17.04.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. CNEOS, https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=420302&view=OPD, Дата обращения 03.04.2023.
2. Amor-class-Asteroids.URL:<https://www.spacereference.org/asteroid420302-2011-xz1>, Дата обращения 03.04.2023.
3. Девяткин А.В., Горшанов Д.Л., Куприянов В.В., Верещагина И.А. Программные пакеты «АПЕКС-I» и «АПЕКС-II» для обработки астрономических ПЗС-наблюдений. – Астрон. вестник, 2010, №1, с. 74-87.
4. Henden, A.A., Templeton, M., Terrell, D., Smith, T.C., Levine, S., Welch, D., 2016. VizieR Online Data Catalog: AAVSO Photometric All Sky Survey (APASS) DR9 (Henden, 2016). – VizieR Online Data Catalog 2336
5. Bowell E., Hapke B., Domingue D. Application of photometric models to asteroids – Asteroids. Ed. Binzel R.P., Gehrels T., Matthews M.S. – Tucson: Univ. of Arizona Press, 1989, pp. 524-556.
6. Penttila A., Shevchenko V.G., Wilkman O., Muinonen K.H. H, G1, G2 photometric phase function extended to low-accuracy data. – Planet. Space Sci., 2016, vol. 123, pp. 117-125.
7. Jewitt D. Color systematics of comets and related bodies. – The Astron. J., 2015, v. 150:201, 18 p.
8. Tholen D.J. Asteroid Taxonomy from Cluster Analysis of Photometry. – Ph.D. Thesis, Univ. of Arizona, 1984, p. 167.
9. Harris A.W. On the Slow Rotation of Asteroids. – Icarus, 2002, vol. 156, № 1, pp. 184-190.
10. Taylor et al. Arecibo Radar Observations of 14 High-Priority Near-Earth Asteroids in CY2020 and January 2021. – URL: <https://www.naic.edu/~pradar/Taylor-R3037-HighPriority-2020.pdf>. Дата обращения 04.04.2023.

Г.И.Қохирова, А.М.Буриев, С.Н.Сафаров, Ф.Ч.Раҳматуллоева

**ХУСУСИЯТИ ФИЗИКИИ АСТЕРОИДИ 2011 XZ1 ДАР АСОСИ
МУШОҲИДАҶО, ҲАНГОМИ НАЗДИК ШУДАН БА ЗАМИН**

Моҳи августи соли 2020 астероиди 2011 XZ1 дар телескопи Сейсс-1000-и Расадхонаи астрономии байналмилалӣ Санглох (РАБС)-и Институти астрофизикаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон мушоҳида карда шуд. Дар ин давра астероид ба Замин ба масофаи 0,2 в.а. наздик шуд. Дар натиҷаи фотометрияи аксҳо дурахшонии зоҳирии астероид дар филтрҳои BVRI чен карда шуда, дурахшонии мутлақ $H=17,70^m \pm 0,02$ (филтри V) муайян карда шуд ва ҳеҷ гуна тағироти назарраси дурахшони мушоҳида нашуд. Қимати албедро 0,20 ва нишондиҳандаҳои ранги бадастомада нишон медиҳанд, ки астероид ба навъи S тааллуқ дорад, ки моддаи он аз оливин ва пироксен бой аст. Диаметраш $0,85 \pm 0,05$ км ҳисоб шудааст, ки ин ба маълумоти мавҷуда мувофиқ аст. Хусусиятҳои физикии астероид бинобар наздик шудани он ба Замин дар моҳи августи соли 2020 тағйир наёфтааст.

Калимаҳои калидӣ: астероид, мушоҳидаҷо, фотометрия, хатти қачи дурахшонӣ, диаметр, нишондоди ранг.

G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, S.N.Safarov, F.J.Rakhmatulloeva

PHYSICAL PROPERTIES OF ASTEROID 2011 XZ1 FROM OPTICAL OBSERVATION AT THE SANGLOKH OBSERVATORY

Institute of Astrophysics of the National Academy of Sciences of Tajikistan

In August 2020, asteroid 2011 XZ1 was monitored at the Zeiss-1000 telescope of the International Astronomical Observatory Sangloch (IAOS) of the Institute of Astrophysics of the National Academy of Science. During this period, the asteroid approached the Earth at a distance of 0.2 AU. As a result of image photometry, the apparent brightness of the asteroid was measured in BVRI filters, the absolute brightness $H=17.70m\pm 0.02$ (V filter) was determined, and no significant brightness variations were found. The albedo value of 0.20 and the obtained color indices indicate that the asteroid belongs to the S type, the substance of which is rich in olivine and pyroxene. The diameter is estimated as 0.85 ± 0.05 km, which is consistent with the available data. The physical characteristics of the asteroid were not changed due to its close approach to Earth in August 2020.

Key words: *asteroid, observations, photometry, magnitude, light curve, diameter, color indices.*

Сведения об авторах:

Кохирова Гулчехра Исроиловна – доктор физ.-мат. наук, директор Института астрофизики НАН Таджикистана, зав. Отделом межпланетных тел;

Буриев Анвар Мамадалиевич – кандидат физ.-мат. наук, зав. Отделом физики комет и астероидов Института астрофизики НАН Таджикистана, старший научный сотрудник;

Сафаров Сангин Ниёзович – доктор PhD, младший научный сотрудник Отдела физики комет и астероидов Института астрофизики НАН Таджикистана;

Рахматуллаева Фируза Джамшедовна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Отдела межпланетных тел.

УДК 539.173.8

Специальность: 1.3.8 – Физика конденсированного состояния

М.Ш.Имом, академик НАН Таджикистана Ф.Рахими

**ИЗУЧЕНИЕ ПОТОКА ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНОВ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА UTR-KINKI***Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана*

В работе анализированы результаты проведенных экспериментальных работ по измерению потока тепловых нейтронов тепловыделяющих сборок исследовательского ядерного реактора UTR-KINKI. В процессе работы также проведены эксперименты по определению эффективности скоростей счета детектора, активности Ba и Cd.

Ключевые слова: *исследовательский ядерный реактор (ИЯР), тепловые нейтроны, фольга, канал облучения, активная зона (АЗ), тепловыделяющая сборка (ТВС), эффективность счета, мишень, активность.*

В в е д е н и е

Ядерными реакторами являются устройства, предназначенные для создания управляемой, самоподдерживающейся цепной реакции деления, в которых выделяются свободные нейтроны, необходимые для деления новых ядер. Важным свойством цепной реакции деления является отношение числа нейтронов данного поколения к числу нейтронов предыдущего поколения [1].

Исследовательские ядерные реакторы используются для облучения образцов и различных детекторов ионизирующего излучения в научных исследованиях, медицине и промышленности. Данный тип реактора по сравнению с энергетическими реакторами имеет чаще всего низкую температуру и мощности, и это показывает высокую оценку безопасности [2].

Одним из таких типов реакторов является построенный исследовательский и промышленный гомогенный ядерный реактор на растворах солей «Аргус-ФТИ» в Таджикистане, и есть план по запуску данного реактора. Изучение и использование подобного реактора имеет большой интерес и прикладное значение. Основным назначением данного реактора является наработка изотопов из продуктов деления урана, например ^{99}Mo , в медицинских целях.

Адрес для корреспонденции: Имом Мирахмади Шарофиддин, Фарход Рахими. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Физико-технический институт НАНТ. E-mail: emtirshar@gmail.com; frahimi-2002@mail.ru.



Рис. 1. Макет исследовательского ядерного реактора «АРГУС».

Исследовательский ядерный реактор «Аргус-ФТИ» представляет собой бак из нержавеющей стали, в который залито 22 литра водного раствора уранилсульфата UO_2SO_4 . Циркуляция раствора естественная, рабочая температура $\sim 80^\circ C$. Общее содержание ^{235}U около 2 кг. Бак охлаждается змеевиком, погруженным в топливный раствор. В активной зоне находятся три борных регулирующих стержня. Бак окружён графитовым отражателем нейтронов и помещён в бетонную защитную оболочку толщиной около метра. Для облучения образцов в реакторе имеется три канала: один по центру с флюенсом 10^{12} нейтронов/см·сек и два периферийных. Тепловыделение работающего реактора около 20 кВт [3].

Реактор «Аргус-ФТИ» позволяет применять топливо разного обогащения по ^{235}U . При использовании урана низкого обогащения повышают концентрацию урана в растворе. Обогащение российского реактора 90%, для экспортных будет использоваться обогащение не выше 20% для соблюдения международных соглашений. Перезагрузку топлива в экспортной версии реактора предполагается делать раз в 10 лет.

Реактор саморегулируемый, обладает естественной безопасностью. При повышении температуры падает реактивность, поэтому при несанкционированном разогреве реактор глушит сам себя. Вода в растворе является замедлителем, поэтому при закипании раствора замедление нейтронов уменьшается и реактор глушится.

Тепловая мощность реактора «Аргус» 20 кВт. Остаточное тепловыделение непосредственно после глушения 1300 Вт, а через час падает до 300 Вт, что недостаточно для тепловых повреждений реактора даже при полной потере принудительного охлаждения. Из-за небольшой мощности выгорание ничтожно (за год непрерывной работы расходуется 0.5 г урана), поэтому реактор может работать без перегрузки топлива десятки лет.

В 90-х годах спрос на химический анализ геологических проб упал и реактор стали использовать для других целей, например, для наработки искусственных радиоактивных изотопов. В первую

очередь для наработки молибдена-99 в целях медицинской диагностики. Современный спрос на этот изотоп превышает 10 тыс. Ки в неделю.

Преимуществом растворных реакторов является теоретическая высокая эффективность по урану при наработке короткоживущих изотопов из осколков деления урана. В обычном гетерогенном реакторе наработка извлекаемых короткоживущих изотопов ведется в специальных мишенях. Уран мишени отделен от топлива реактора для технологического удобства.

При этом наработанные в топливном уране короткоживущие изотопы не могут быть экономически эффективно извлечены и использованы. Более того, даже уран мишени используется только на доли процента по причине короткой кампании облучения при наработке короткоживущих целевых изотопов. В растворном же реакторе наработанный изотоп может извлекаться непрерывно из всего объема активной зоны. Поэтому эффективность наработки изотопа в пересчете на уран и мощность примерно на два порядка выше, чем в гетерогенных реакторах. Потому концепция растворных реакторов с непрерывным извлечением целевого изотопа непосредственно из топливного раствора позволяет получать значимые количества изотопов даже на маломощных реакторах с небольшой загрузкой урана. Поэтому возможности «Аргус»-а по наработке короткоживущих изотопов из осколков деления урана примерно равны возможностям гетерогенного реактора мощностью десятки мегаватт.

Исследовательский ядерный реактор UTR-KINKI относится к классификации «Argonaut» и мощность данного реактора составляет 0.1 Вт. Активная зона ИЯР UTR-KINKI разделена на две части, пространство между которыми заполнено графитом (отражателем). В качестве охлаждаемой части активной зоны используется легкая вода. Между двумя составными частями располагается центральный канал, с размещенным в нём графитовым блоком, который можно извлечь и заменить на мишени с облучаемыми ядерными материалами.

Реактор UTR-KINKI является пластинчатым реактором. Тепловыделяющая сборка состоит из композиции – UAl_4-Al . Толщина топливных пластин – 1 мм. В каждой ТВС содержится 12 топливных пластин [4].

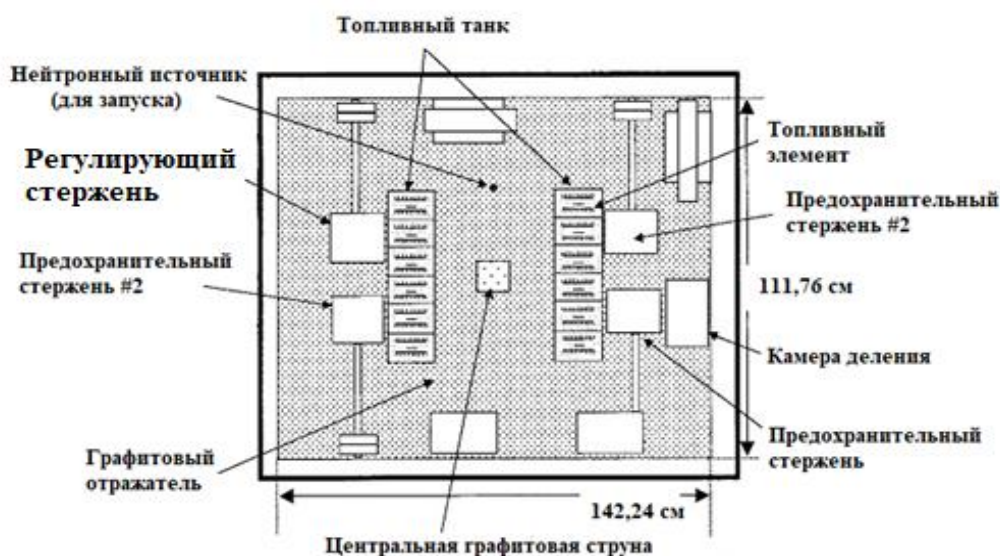


Рис. 2. Макет активной зоны исследовательского ядерного реактора UTR-KINKI.

Процесс цепной реакции деления ядер в АЗ сопровождается испусканием нейтронов. В связи с этим, реактор является генератором нейтронного потока. Пролетая через вещество, нейтроны могут взаимодействовать с ядрами атомов [5].

При взаимодействии нейтронов с ядрами среды важнейшее внимание уделяется расчету скоростей процессов различного типа. Для её вычисления, кроме характеристики ядер среды, важно знать характеристики ансамбля нейтронов. Поток нейтронов является число нейтронов, пересекающих единичную площадку мишени в единицу времени [7].

Понятия принципа измерения потока тепловых нейтронов активационным методом и практическая часть исследовательской работы

Информация о потоках тепловых нейтронов в местах облучения и детекторов является необходимой для проверки экспериментальных условий. Измерения потока тепловых нейтронов в ИЯР UTR-KINKI проводится активационным методом. В качестве целевых материалов для мишени была использована золотая фольга (^{197}Au).

Реакция активации: $^{197}\text{Au}(n,\gamma) ^{198}\text{Au}$, сечение активации: 98.65 барн и период полураспада ^{198}Au : 2.695 дня.

В мишени с золотой фольгой, облученной в потоке нейтронов, протекает ряд активационных реакций:

$$R = N_t \sigma \phi ,$$

где R – скорость реакции (с^{-1}); N_t – количество атомов мишени в образце; σ – сечение активации (см^2); ϕ – поток нейтронов ($\text{см}^2 \text{с}^{-1}$).

При облучении мишени с золотой фольгой в мишени образуется радиоактивное ^{198}Au , но оно также распадается со временем своего полураспада.

Скорость измерения числа ядер ^{198}Au :

$$\frac{dN_p}{dt} = R - \lambda N_p ,$$

где N_p – количество ядер ^{198}Au , образовавшихся в мишени;

λ – постоянная распада (с^{-1})

$$N_p(t) = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) ,$$

отсюда,

$$A(e) = R(1 - e^{-\lambda t}) .$$

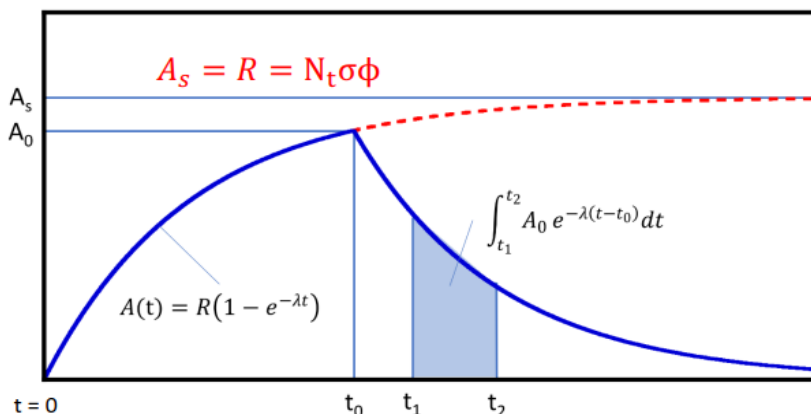


Рис. 3. Измерение активности в мишени в зависимости от времени.

Поскольку активность затухает во время измерения, число отсчетов C , измеренных детектором излучения, равно

$$C = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} A_0 e^{-\lambda(t-t_0)} dt + B = \epsilon \frac{A_0}{\lambda} (e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}) + B,$$

где:

ϵ = эффективность счета детектора; t_1 = начальное время счета;

t_2 = конечное время счета; t_0 = время облучения;

A_0 = активность при $t = t_0$; B = количество фонового счета.

Спектр потока тепловых нейтронов в исследовательском реакторе UTR-KINKI аппроксимируется распределением Максвелла [7].

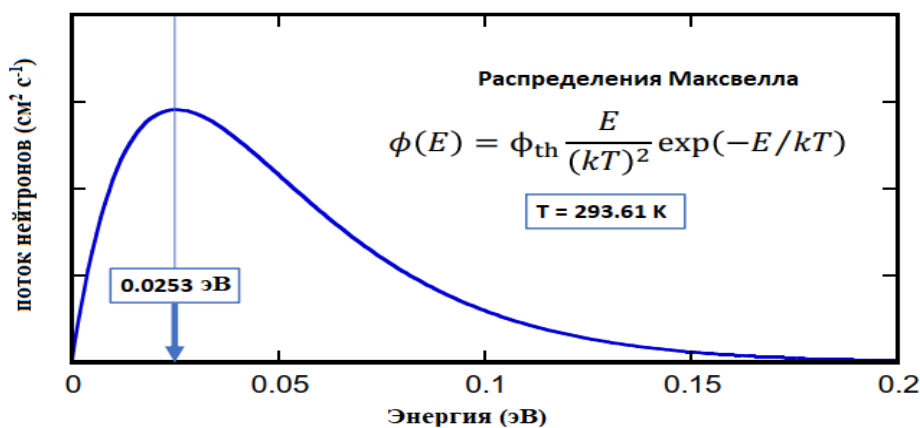


Рис. 4. Спектр потока тепловых нейтронов.

Активность в мишени включает вклад надтепловых нейтронов. Вклад от надтепловых нейтронов можно разделить с помощью кадмиевого разностного метода. Поперечное сечение кадмия очень велико для области энергий ниже примерно 0.4 эВ и становится очень малой в области более высоких энергий. Кадмий может использоваться как поглотитель тепловых нейтронов [8].

В процессе практической работы подготовлены 6 образцов золотой фольги с различной массой для облучения. Для одной точки активной зоны ИЯР понадобилось подготовить два образца золотой фольги, так как один из них в течение работы покрыт кадмиевым покрытием. Измерен вес ка-

ждого образца с помощью точных электронных весов и рассчиталось количество атомов золота в образце. Каждый образец был завернут в алюминиевую фольгу и образцы пронумерованы. Перед запуском реактора образцы золотой фольги были помещены в нескольких местах АЗ реактора. Пара покрытых и непокрытых экземпляров фольги должны быть размещены в одном месте исследовательского реактора. При запуске реактора образцы облучались в течение 1 часа при мощности 1 Вт в критическом состоянии.

Для определения счета излучений от активированных образцов золотой фольги был использован счетчик Гейгера-Мюллера (GM).

Результаты проведенных практических работ можно посмотреть ниже:

Таблица

Результаты проведенных экспериментальных работ

№	Масса Au (г)	Время счета (с)	t ₁ (с)	t ₂ (с)	Счет (С)	Чистый счет (С-В)	Активность (А ₀) (Бк)	Предельная активность (А _з) (Бк)	Ва или Cd	Позиция	Φ (Е)
1	0.0434	300	6506	6806	64890	21543	1363.48	1.28*10 ⁴	Ва		
2	0.0462	300	6902	7202	13655	4485	284.49	2.72*10 ⁴	Cd	А	7.86*10 ⁶
3	0.0454	300	7273	7573	66246	219097	1386.68	1.3*10 ⁴	Ва		
4	0.0447	300	5640	5940	13398	4409	279.05	2.62*10 ⁴	Cd	В	4.56*10 ⁶
5	0.0461	300	5160	5460	61687	20508	1297.97	1.22*10 ⁴	Ва		
6	0.0455	300	6000	6350	12868	4242	268.48	2.52*10 ⁴	Cd	С	6.93*10 ⁶

В таблице приведены результаты проведенных экспериментов в исследовательском ядерном реакторе UTR-KINKI по определению потока тепловых нейтронов образцов золотой фольги.

В ы в о д ы

Был измерен поток тепловых нейтронов в активной зоне (позиция А, В и С) исследовательского ядерного реактора UTR-KINKI и измеренный результат потока составляет в пределе 10⁶ н/см² с⁻¹.

Исследования методов проведения практических работ на реакторе показывают, что ИЯР UTR-KINKI по причине маломощности является относительно безопасным реактором по сравнению с другими типами ядерных реакторов.

Автор выражает глубокую благодарность профессорам, инженерам и ученым Университета Киндай Японии, в частности профессорам и сотрудникам университетского исследовательского ядерного реактора UTR-KINKI города Осака, также особую благодарность коллегам-участникам из Монголии и Южно-Африканской Республики за помощь в проведении экспериментальных работ и обсуждений полученных результатов.

Поступило 01.02.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Широков С.В. Физика ядерных реакторов – Минск: Вышэйшая школа, 2011, с. 32-34.
2. Гончаров В.В. Исследовательские ядерные реакторы. – Советская атомная наука и техника, сб. статей – М.,1967.
3. Павшук В.А., Хвостюнов В.Е. Растворные реакторы «Гидра» и «Аргус». – М., 2010, Атомиздат, с. 24-28.

4. Genichiro Wakabayashi History and Present Situation of Kinki University Reactor (UTR-KINKI), RERTR 2012, Warsaw, 14-17 October 2012, p. 60.
5. Самойлов О.Б., Усынин Г.Б., Бахметьев А.М. Безопасность ядерных энергетических установок. Учебное пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1989, с.280.
6. Бать Г.А., Коченов А.С., Кабанов Л.П. Исследовательские ядерные реакторы. – М.: Атомиздат, 1972, с. 40-46.
7. Satoru Endo et al. Dosimetry of Fission Neutrons in a 1-W Reactor, UTR-KINKI. – J. RADIAT. RES., 43, pp. 381-386, O.-2002.
8. Genichiro Wakabayashi Present Status of UTR KINKI. – International Conference on Research Reactors, Buenos Aires, 25-29 November 2019.

М.Ш.Имом, Ф.Рахимӣ

ТАҲҚИҚИ СЕЛИ НЕЙТРОНҲОИ ҲАРОРАТИИ РЕАКТОРИ ТАҲҚИҚОТИ ҲАСТАИИ UTR-KINKI

Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови АМИТ

Дар кори мазкур натиҷаи гузаронидашудаи корҳои таҷрибавӣ оиди ченкунии сели нейтронҳои ҳароратии васлкунакҳои гармичудоқунандаи реактори таҳқиқоти ҳастаии UTR-KINKI таҳқиқ карда шудаанд. Дар раванди кори таҷрибавӣ ҳамчунин озмоиши муайянсозии таъсирнокии суръати ҳисоби детектор ва фаъолнокии Ba ва Cd гузаронида шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *реактори таҳқиқоти ядрой, нейтронҳои ҳароратӣ, варақа, канали шуоъхурӣ, минтақаи фаъол, васлкунаки гармичудоқунанда, таъсирнокии ҳисоб, нишон, фаъолнокӣ.*

M.Sh.Imom, F.Rahimi

INVESTIGATION OF THE THERMAL NEUTRON FLUX IN THE UTR-KINKI NUCLEAR RESEARCH REACTOR

S.U.Umarov Physical and Technical Institute of the National Academy of Sciences of Tajikistan

In the work, the result of the experimental work on measuring the thermal neutron flux of fuel assemblies of the research nuclear reactor UTR-KINKI is studied. In the course of practical work, experiments were also carried out to determine the efficiency of the counting rate of the detector, the activity of Ba and Cd.

Key words: *research nuclear reactor, thermal neutrons, foil, irradiation channel, active zone, fuel assembly, counting efficiency, target, activity.*

Сведения об авторах:

Имом Мирахмади Шарофиддин – старший научный сотрудник Международного центра ядерно-физических исследований ФТИ им. С.У.Умарова НАНТ. E-mail: emmirshar@gmail.com;

Фарход Рахими – доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, Президент Национальной академии наук Таджикистана. E-mail: frahimi-2002@mail.ru.

УДК 546.79

Специальность: 1.5.15 – Экология

М.З.Ахмедов, Х.М.Назаров, Ш.А.Рахимбердиев,
академик НАН Таджикистана У.Мирсаидов

ЕСТЕСТВЕННЫЕ РАДИОНУКЛИДЫ В ПОЧВАХ НА ТЕРРИТОРИИ АРЕАЛА ХВОСТОХРАНИЛИЩА АДРАСМАН

*Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности
НАН Таджикистана*

В статье приводятся результаты исследования активности естественных радионуклидов в почвах, отобранных вокруг радиоактивного хвостохранилища Адрасман. Установлено, что активность радионуклидов в почве имеет связь с ландшафтом местности и миграцией элементов из них.

Ключевые слова: почва, анализ, радионуклиды, миграция, удельная активность.

Почва является наиболее ёмким и самым инерционным звеном в цепочках переноса радионуклидов. Во все компоненты почвы входят естественные радионуклиды. Особое внимание уделяется определению таких естественных радионуклидов (ЕРН), как ^{40}K , ^{226}Ra , ^{232}Th , так как именно эти радионуклиды вносят основной вклад в формирование фоновой нагрузки на организм человека [1-4].

В работах многих авторов [5-13] рассматривается проблема миграции ЕРН в различных почвах. Основное внимание уделяется формированию дозы излучения на поверхности вследствие влияния на неё природных радионуклидов.

Настоящая работа посвящена установлению особенностей распределения удельной активности естественных радионуклидов (ЕРН – ^{40}K , ^{226}Ra , ^{232}Th) в почвах вокруг радиоактивного хвостохранилища Адрасман.

Для взятия проб заранее определяли координаты точек и их месторасположения (рис.1). Радиоэкологические экспедиции проводились в тёплый сухой летне-осенний период (с июня по сентябрь 2022 г.).



Рис. 1. Точки взятия проб.

Таблица 1

Содержание радионуклидов в материале Адрасманского хвостохранилища и почвах прилегающего к нему посёлка

Радионуклид	А _{уд.} Бк/кг			
	Хвостохранилище		Посёлок	
	минимум	максимум	минимум	максимум
⁴⁰ K	535	1812	963	1734
²²⁶ Ra	2087	29677	114	4205*
²³² Th	30	342	-	-
²³⁸ U	118	1271	-	47

Примечание: *Аномальные значения связаны с хвостовым материалом, занесённым из тела хвостохранилища.

Таблица 2

Суммарная активность ЕРН почв, отобранных вокруг хвостохранилища Адрасман

Дальность от центра хвостохранилища, м	Значение	Суммарная актив-ность, Бк/кг		А _{уд.} Бк/кг			
		альфа	бета	⁴⁰ K	²²⁶ Ra	²²⁸ Th	²³⁸ U
50	минимум	24.75	12.88	865.6	186.2	не обн.	не обн.
	максимум	161.31	143.48	1338.1	8570.5	9697.3	811.1
	средние	61.10	60.8	1024.19	1569.76	1335.96	116.21
100	минимум	26.57	16.76	1107.2	184.3	не обн.	не обн.
	максимум	162.66	88.91	1365.5	8386.2	7388.1	313.2
	средние	60.47	59.95	1197.5	1817.38	1309.73	39.15
200	минимум	35.69	28.40	1107.1	162.7	не обн.	не обн.
	максимум	167.95	147.08	1431.5	4205.5	2285.1	не обн.
	средние	86.05	82.40	1244.9	1048.5	285.63	не обн.
400	минимум	43.08	23.55	963.6	не обн	не обн	не обн.
	максимум	160.04	102.31	1734.0	756.7	499.4	47.1
	средние	91.71	67.97	1238.44	269.73	62.42	5.88
800	минимум	85.95	46.33	1021.4	114.1	не обн.	не обн.
	максимум	159.49	149.73	8609.6	293.9	не обн.	не обн.
	средние	124.0	92.0	2134.6	149.21	не обн	не обн.

Отбор проб почвы проводили согласно ГОСТ 17.4.3.01-2017 от поверхности земли до глуби-ны 25 см [14, 15]. Каждую пробу в точке отбора очищали от камней, корней и других включений. Из

общей массы методом квартования отбирали более 1 л образца. Почвы высушивали до воздушно-сухого состояния, измельчали на мельнице и просеивали через сито с диаметром отверстий 2 мм.

Для радиологического измерения проб использовали стандартный сосуд «Маринелли» объёмом 1 л. Радиологические измерения и анализ исследуемых проб проводились на гамма-спектрометре (CANBERA, программное обеспечение Genie-2000) в аккредитованной Лаборатории технических услуг Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана. Радионуклидный состав представлен в табл. 1 и 2.

Результаты и обсуждение

При изучении особенностей активности естественных радионуклидов почвы вокруг радиоактивного хвостохранилища Адрасман особое внимание уделяли состоянию хвостохранилища. В некоторых его местах имеются нарушения поверхностного покрытия и места смыва.

Анализ содержания ^{226}Ra в почвах исследуемой территории выявил, что данный показатель варьирует в достаточно широких пределах (рис. 2) и находится на уровне 149-8570 Бк/кг. При этом обнаружены аномальные максимальные значения удельной активности ^{226}Ra в почвах территорий близлежащих посёлков. Это связано со смывом хвостового материала из тела радиоактивного хвостохранилища Адрасман селевыми потоками.

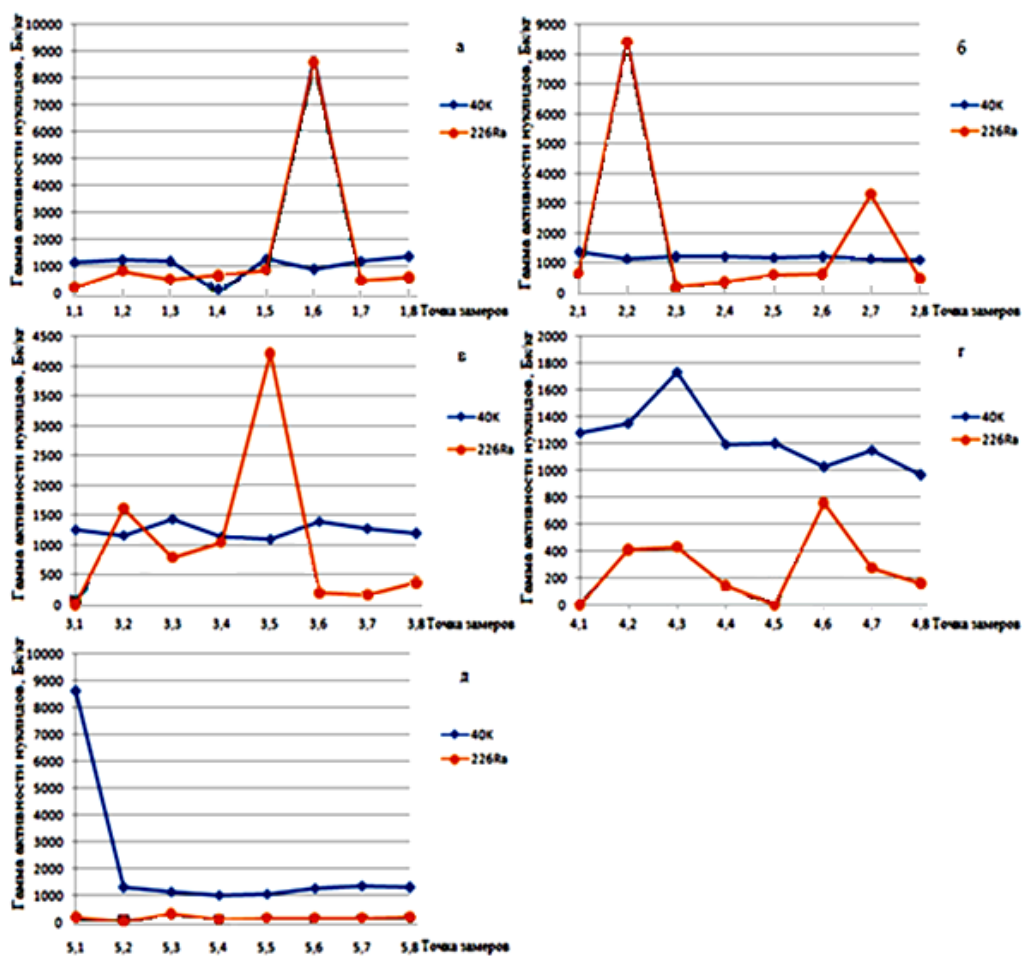


Рис. 2. Удельные активности ЕРН в пробах почв, отобранных вокруг радиоактивного хвостохранилища Адрасман на различных расстояниях: а) 50 м; б) 100 м; в) 200 м; г) 400 м; д) 800 м от центра хвостохранилища.

Вариация значений удельной активности ^{40}K во многом зависит от типов почв. В первичных горных породах его содержание наибольшее в кислых вулканических породах (граниты и др.). Из осадочных пород наибольшим содержанием ^{40}K обладают сланцы и песчаники. В нашем случае данный показатель достигает до 8609.6 Бк/кг. В песках, аллювиальных и супесчаных почвах, как правило, содержание ^{40}K минимально, также как и в почвах с промывным водным режимом. ^{40}K легко окисляющийся щелочной металл, образующий хорошо растворимые соли.

На рис.3 приводится суммарная альфа- и бета-активности проб почв, отобранных вокруг радиоактивного хвостохранилища Адрасман на различных расстояниях от центра хвостохранилища.

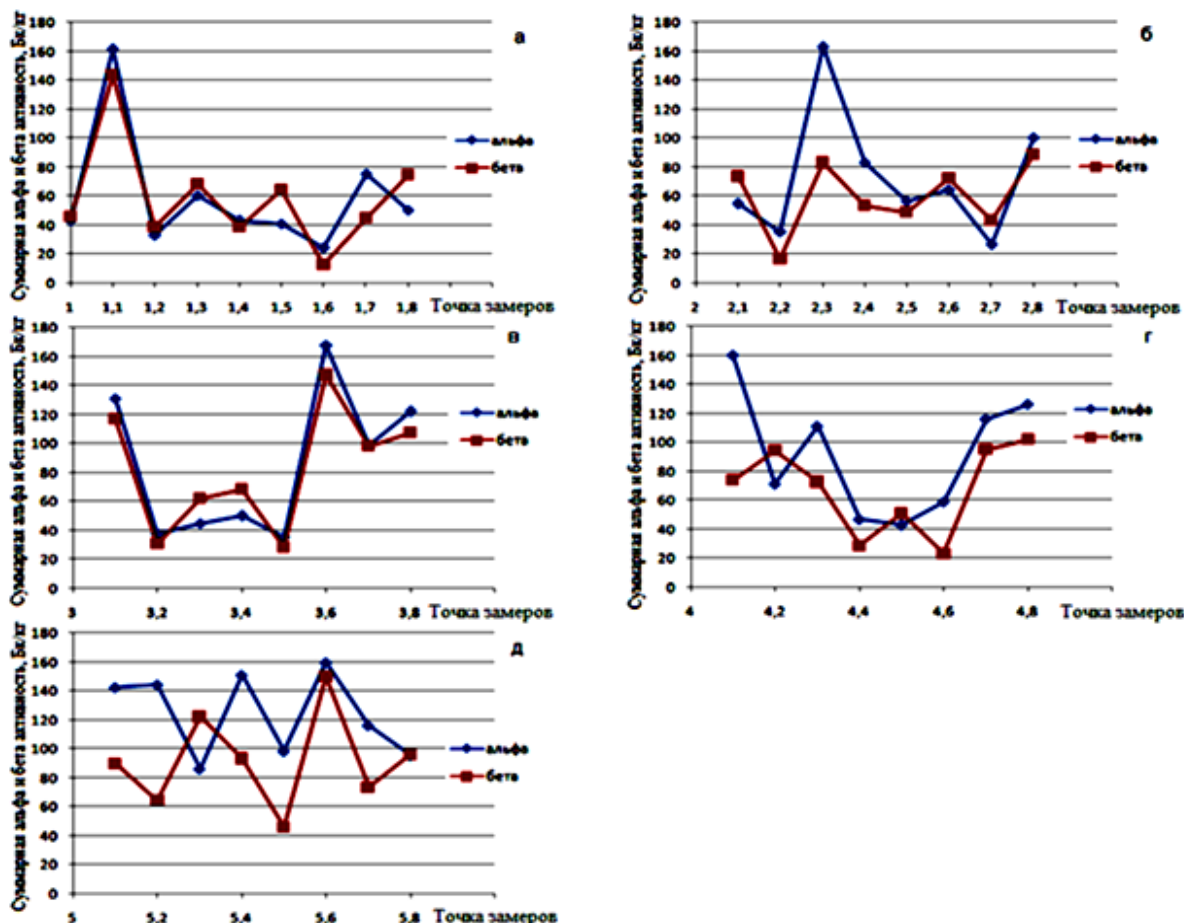


Рис. 3. Суммарная альфа- и бета-активности проб почв, отобранных вокруг радиоактивного хвостохранилища Адрасман на различных расстояниях: а) 50 м; б) 100 м; в) 200 м; г) 400 м; д) 800 м от центра хвостохранилища.

В ы в о д ы

В целом, оценка содержания естественных радионуклидов в почвах в первую очередь необходима для прогноза последствий миграции радионуклидов из радиоактивного хвостохранилища в окружающую среду, а также для расчёта доз облучения населения от природных источников ионизирующего излучения.

Поступило 20.12.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бураева Е.А. Удельная активность радионуклидов в почвах урбанизированных территорий Ростовской области. – Живые и биокосные системы, 2022, №40; URL: <https://jbks.ru/archive/issue-40/article-3/>. DOI: 10.18522/2308-9709-2022-40-3.
2. Голубцов А.Р. Геоэкологическая оценка состояния окружающей среды Новочеркасска. – Устойчивое развитие науки и образования, 2020, №3, с.78-84.
3. Козырев Д.А., Горбов С.Н., Безуглова О.С. и др. Удельная активность радионуклидов и их взаимосвязь с валовым химическим составом почв. – Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2021, №1, с.71-81. DOI: 10.18522/1026-2237-2021-1-71-81.
4. Bezuglova O.S., Gorbov S.N., Tischenko S.A. et al. Accumulation and migration of heavy metals in soils of the Rostov region, south of Russia. – J. of Soils and Sediments, 2016, №16(4), pp. 1203-1213. <https://DOI.1007/s11368-015-1165-8>.
5. Рачкова Н.Г., Шуктомова И.И., Таскаев А.И. Состояние в почвах естественных радионуклидов урана, радия и тория (обзор). – Почвоведение, 2010, №6, с.698-705.
6. Strok M., Smodis B. Fractionation of natural radionuclides in soils from the vicinity of a former uranium mine Zirovskivrh, Slovenia. – J. Environ. Radioactivity, 2010, v.101, №1, pp. 22-28.
7. Alatise, O.O., Babalola I.A., Olowofela J.A. Distribution of some natural gamma-emitting radionuclides in the soils of the coastal areas of Nigeria. – J. Environ. Radioactivity, 2008, v.99, №11, pp. 1746-1749.
8. Quindos L.S., Fernandez P.L., Rodenas C. et al. Conversion factors for external gamma dose derived from natural radionuclides in soils. – J. Environ. Radioactivity, 2004, v.71(2), p.139-145.
9. Dowdall M., O’Dea J. $^{226}\text{Ra}/^{238}\text{U}$ disequilibrium in an upland organic soil exhibiting elevated natural radioactivity. – J. Environ. Radioactivity, 2002, v.59(1), pp. 91-104.
10. Геннадиев А.Н., Голосов В.Н., Чернянский С.С. и др. Сравнительная оценка содержания в почвах магнитных сферул, ^{137}Cs и ^{210}Pb для целей индикации эрозионно-аккумулятивных процессов. – Почвоведение, 2006, №10, с.1218-1234.
11. Doering C., Akber R., Heijnis H. Vertical distributions of ^{210}Pb excess, ^7Be and ^{137}Cs in selected grass covered soil in Southeast Queensland, Australia. – J. Environ. Radioactivity, 2006, v.87(2), pp. 135-147.
12. Linnik V.G., Minkina T.M., Bauer T.V. et al. Geochemical assessment and spatial analysis of heavy metals pollution around coal-fired power station. – J. Environmental Geochemistry and Health, 2020, v.42(12), pp. 4087-4100. DOI: 10.1007/s10653-019-00361-z.
13. Minkina T., Konstantinova E., Bauer T. et al. Environmental and human health risk assessment of potentially toxic elements in soils around the largest coal-fired power station in Southern Russia. – J. Environmental Geochemistry and Health, 2020. DOI: 10.1007/s10653-020-00666-4.
14. ГОСТ 17.4.3.01-2017. Охрана природы (ССОП). Почвы. Общие требования к отбору проб. Межгосударственный стандарт. – М.: Стандартинформ, 2018, 9 с.
15. Карпов Ю.А., Савостин А.П. Методы пробоотбора и пробоподготовки. 3-е изд. (эл). – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2015, 246 с.

М.З.Ахмедов, Х.М.Назаров, Ш.А.Рахимбердиев, У.М.Мирсаидов

РАДИОНУКЛИДҲОИ ТАБИӢ ДАР ХОКҲО ДАР АРЕАЛИ МАҲФУЗГОҲИ АДРАСМОН

Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола натиҷаҳои омӯзиши фаъолияти радионуклидҳои табиӣ дар хокҳо, ки аз атрофи партовгоҳи радиоактивии Адрасмон гирифта шудаанд, оварда шудааст. Муқаррар карда шудааст, ки фаъолияти радионуклидҳо дар хок ба ландшафтҳо ва мигратсияи элементҳо аз онҳо вобаста аст.

Калимаҳои калидӣ: хок, таҳлил, радионуклид, миграция, фаъолнокии хос.

M.Z.Akhmedov, Kh.M.Nazarov, Sh.A.Rahimberdiev, U.M.Mirsaidov

NATURAL RADIONUCLIDES IN SOILS IN THE AREA OF THE ADRASMAN TAILING DUMP

*Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety and Security Agency
of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

This article presents the results of a study of the activity of natural radionuclides in soils taken from the area around the radioactive tailing dump Adrasman. It has been established that the activity of radionuclides in the soil is related to landscapes and the migration of elements from them.

Key words: soil, analysis, radionuclide, migration, specific activity.

Сведения об авторах:

Ахмедов Матин Зафарджонович – заместитель директора Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности Национальной академии наук Таджикистана. E-mail: m.akhmedov@cbrn.tj;

Назаров Холмурод Марипович – доктор технических наук, профессор, директор Филиала Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана. E-mail: holmurod18@mail.ru;

Рахимбердиев Шукуржон Ахматкулович – инженер Филиала Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана. E-mail: alpinist.tj@mail.ru;

Мирсаидов Улмас Мирсаидович – доктор химических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, главный научный сотрудник Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана. E-mail: m.ulmas@nrta.tj.

УДК 549.7-661.663

Специальность: 1.4.1 – Неорганическая химия

А.Шарифов, академик НАН Таджикистана У.М.Мирсаидов
**КОНЦЕПЦИЯ ВНЕДРЕНИЯ ВОДОРОДНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ
В ТАДЖИКИСТАНЕ**

Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана

В статье рассмотрены возможности организации и внедрение водородной энергетики в Таджикистане. Показаны ресурсы Таджикистана для производства водорода, энергопотребители и их перевод на использование водорода. Рассмотрены вопросы научного потенциала для развития водородной энергетики. Показаны возможности внедрения водородной энергетики в производственном масштабе.

Ключевые слова: концепция, водородная энергетика, зелёный энергоноситель, зеленая экономика.

В в е д е н и е

Двадцатый век отличался бурной индустриализацией экономики многих стран мира благодаря широкому использованию ископаемого топлива (уголь, нефть и нефтепродукты, природный газ и др.), которое не только способствовало повышению уровня жизни людей, но и ухудшало экологическое состояние природы в виде потепления климата, таяния ледников, снижения уровня рек и морей и других негативных катаклизмов современного мира. Наглядным примером природного катаклизма является опустошение Аральского моря, которое привело к увеличению площадей пустынь на территориях стран Центральной Азии. Причиной всего этого отрицательного явления в изменении климата являются выбросы газов, образующихся при сжигании ископаемого топлива. Так, при сжигании 1 кг углерода ископаемого топлива образуется 3.67 кг диоксида углерода CO_2 , при этом также образуются такие газы, как CO , NO , SO_2 , P_2O_5 , которые не только создают «парниковый эффект» в атмосфере, но и могут быть источником появления «кислотных дождей» и других явлений, ухудшающих природные условия существования живых организмов на Земле. Чтобы предотвратить риск экологической трагедии современности, страны мира ещё в 1992 году приняли Киотский протокол об изменении климата, который в 2015 году был дополнен Парижским соглашением по климату [1]. Оба эти документы заложили основу для ограничения выбросов CO_2 в атмосферу и стали основополагающим соглашением мирового сообщества для развития водородной энергетики в странах мира.

Суть «водородной энергетики» выражается в использовании водорода в качестве энергоносителя современности. Выбор водорода в качестве энергоносителя будущего объясняется прежде всего чистотой его сжигания, продуктом которого является вода. H_2 – самый распространённый химический элемент во Вселенной с неограниченным сырьевым ресурсом (вода и все органические вещества), его теплотворность в зависимости от разновидности производства оценивается в пределах от 120

Адрес для корреспонденции: Мирсаидов Улмас Мирсаидович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии им. В.И.Никитина НАНТ. E-mail: m.ulmas@nrsta.tj

до 144 мДж/кг, что в среднем превышает теплотворность природного газа и каменного угля соответственно в 3.59 и 4.43 раз. H_2 также является высокоактивным реагентом в многочисленных химических реакциях разного характера. Эти факторы позволяют водородной энергетике стать основой для создания зеленой экономики, в связи с чем в США, Китае, Японии, России, странах ЕС и др. выполняются многочисленные программы научно-исследовательских и производственных работ по развитию водородной энергетике.

Согласно классификации стран мира по «парниковому эффекту», в настоящее время Таджикистан имеет статус «зеленой страны», количество выбрасываемого CO_2 в год меньше 1 т на душу населения и общая доля страны в мировом масштабе составляет до $3 \cdot 10^{-4}\%$ [2]. Однако присходящее сейчас интенсивное развитие промышленности и тепловой энергетике с использованием угля, а также расширение строительства цементных заводов, где, кроме выбросов от сжигания угля, ещё из каждого кг основного сырья – известняка выделяется 440 г CO_2 , если не перейти к водородной энергетике, может изменить статус Таджикистана в общем рейтинге экологической оценки положения стран мира. Поэтому, в русле развития мировой экономики по использованию водорода в качестве будущего основного энергоносителя в Таджикистане также принята государственная программа по созданию зеленой экономики [3].

Государственная программа создания зеленой экономики практически требует проведения технической революции в отраслях использования энергоносителей, в связи с чем возникает необходимость в разработке концепции развития водородной энергетике в Таджикистане. Данная концепция должна охватывать от определения ресурсов Таджикистана для производства водорода до основных его потребителей, способов внедрения водородной энергетике в хозяйственных отраслях экономики, подготовки кадров, принципов эффективного и безопасного пользования водорода, и других вопросов создания новой отрасли.

Ресурсы Таджикистана для производства водорода

Производство водорода в промышленном масштабе осуществляется более 100 лет. Его получают в основном двумя способами: 1 – *электролизом воды* и 2 – *конверсионным превращением углеводородов в CO и H_2* . С 1967 года в г.Сарбанд (Хатлонская область) действует Вахшский азотно-туковый завод (ВАТЗ) для конверсионного получения водорода из природного газа и его применения для синтеза аммиака в производстве карбамида. В Таджикистане пока отсутствует добыча природного газа, однако имеется огромный природный потенциал, способный стать основой развития водородной энергетике. Этот потенциал в основном состоит из двух составляющих: первая составляющая – запасы угольных месторождений, оценённые в более 4.5 млрд.т [4]; вторая составляющая – гидроэнергетическая мощность рек регионов, способная обеспечить производство 527 млрд. кВт·ч электроэнергии в год [5]. Имеется и третий природный потенциал: более 300 дней практически во всех регионах Таджикистана являются солнечными. Получение солнечной электроэнергии позволяет создавать автономное производство водорода и его использование даже в малых хозяйствах, индивидуальных домах, сельскохозяйственных производствах и т.п.

Энергопотребители и их перевод на использование водорода

В настоящее время в развитых странах мира использование водорода как энергоносителя более всего внедряется в энергетических и транспортных отраслях. В условиях Таджикистана, где пока отсутствует собственное производство транспортных средств (автомобилей и др.), приоритетным направлением развития водородной энергетики должен быть перевод энергоёмких производств, применяющих уголь в качестве энергоносителя, на водород, полученный из угля. К таким производствам относятся ТЭС, цементные, кирпичные и другие заводы по производству строительных материалов, горно-металлургические и другие предприятия по переработке минерального сырья и другие. На базе энергетических и промышленных предприятий следует организовать производство водорода. Вид способа получения водорода на предприятиях определяется технико-экономическими оценками. На предприятиях, использующих уголь, применение водорода, полученного конверсионным способом из угля, является более эффективным, поскольку при этом одновременно решаются две принципиально важные проблемы создания водородной энергетики: энергообеспечение производства осуществляется высокотеплоёмким энергоносителем при одновременном устранении проблемы выброса дымовых газов от прямого сжигания угля. Разумеется, что при этом производство водорода из угля должно быть осуществлено по безотходным технологиям с утилизацией всех компонентов состава угля.

На предприятиях энергетического характера (ГЭС, станции распределения электроэнергии, предприятия системы ТалКо и т.п.) эффективным является организация производства H_2 электролизным способом, позволяющим получать зеленый водород особой чистоты (99.99%). В принципе, организация автономного производства водорода электролизным способом возможна на любом предприятии, где имеется хорошее водо- и энергоснабжение.

На ВАТЗ (г.Сарбанд), где водород применяется в качестве сырья для получения аммиака, эффективным является производство водорода по обоим способам: конверсионный способ получения H_2 из угля позволяет одновременно получать H_2 , CO и CO_2 , а при электролизном способе образуются H_2 и O_2 . Водород и диоксид углерода используются для производства аммиака и карбамида, а кислород – для окисления C до CO_2 , сжигания H_2 для теплообеспечения технологических процессов и других целей. Внедрение водородной энергетики на основе использования угля на ВАТЗ, обеспечивающего сельское хозяйство высокоэффективным минеральным удобрением, позволяет существенно увеличить мощность производства карбамида, освободить предприятия от использования импортного природного газа и решить проблему выброса газов в атмосферу. При водяной газификации 1000 кг углерода состава угля образуются 333 кг H_2 и 3667 кг CO_2 . Данное количество H_2 необходимо для получения 1887 кг NH_3 , а из 3667 кг CO_2 образуется 5000 кг $(NH_2)_2CO$.

К месту добавить, что подобные предприятия по производству аммиака, карбамида и других водородсодержащих материалов из угля можно построить и в регионах нахождения месторождения сырья, при этом отпадают проблемы транспортировки сырья на дальние расстояния, снижаются производственные расходы и себестоимость получаемого продукта, появляется возможность создания компактного производства в районах, что в свою очередь способствует их техническому и экономическому развитию.

Другим вариантом является разделение производства: водород и другие газы получать прямо на месторождениях угля, затем по соответствующим газопроводам отправить их на заводы по производству конечного продукта.

Кадры и научный потенциал для развития водородной энергетики

Водородная энергетика является наукоёмкой отраслью, её могут создать высококвалифицированные специалисты в областях химии, физики, энергетики, материаловедения, экологии, безопасности технологических процессов, экономики и др. Также необходимо создание современной научно-технической базы для подготовки специалистов и выполнения исследовательских работ разного характера для обеспечения отрасли методами и способами получения водорода из местного сырья, его хранения и использования в конкретных производствах, разработки новых материалов, оборудования и систем для хранения, транспортировки и пользования водородом, внедрения водородной энергетики в производственный процесс деятельности объектов путём налаживания технологических процессов их действия в соответствии с требованиями долговечности и эффективности производства и с обеспечением безопасности его осуществления.

В Таджикистане имеется несколько вузов технического профиля, которые могут готовить специалистов разного назначения по водородной энергетике. Однако в настоящее время в этих вузах подготовка специалистов осуществляется без увязки с конкретными производствами. При подготовке кадров по водородной энергетике следует устранить эту неувязку, обучение студентов следует провести по согласованным с предприятиями или министерствами программам, определённая часть программ обучения должна охватывать проведение практических занятий на предприятиях, где будет применяться водород. Разумеется, что подготовка данных специалистов в основном должна осуществляться по заказам этих предприятий и с их финансированием.

Относительно научно-технической базы по водородной энергетике: в научных институтах НАНТ (Институт химии им. В.И.Никитина, Физико-технический институт им. С.Умарова, Институт геологии, сейсмологии и сейсмостойкого строительства) функционируют несколько подразделений, которые могли бы быть потенциальными исполнителями научно-технических исследований по разным аспектам водородной энергетики. Однако в настоящее время эти подразделения находятся в разном подчинении, занимаются несущественными исследованиями, порой отдалёнными от проблем экономики страны. Для эффективности использования потенциала этих подразделений их следует объединить в единый *«Центр водородной энергетики»* и определить им целенаправленную программу выполнения научно-технических исследований. Этому центру следует давать определённый статус с соответствующим финансированием и с подчинением непосредственно Президиуму НАНТ или государственному органу, который курирует создание зелёной экономики в стране.

Внедрение водородной энергетики в производственный процесс

В Таджикистане принята государственная политика по развитию водородной энергетики в экономике. Она отражена в Послании Президента РТ Маджлиси Оли страны [6]. Политическое решение принято, теперь наступает время его осуществления. Министерство иностранных дел РТ в соответствии с указанием вице-премьера республики разослало в адрес профильных министерств и ведомств письмо об опыте зарубежных стран по использованию водородной энергетики в различных сферах экономики [7]. Все получатели данного письма согласились с эффективностью водородной

энергетики (копии ответов имеются у авторов статьи), однако эти согласия голословные и в них не имеется конкретных предложений или решений о внедрении водородной энергетики на каком-нибудь предприятии. Поэтому без выполнения определённых и целенаправленных действий соответствующих министерств и ведомств невозможно в стране создавать зеленую экономику благодаря использованию водородной энергетики.

В начале установления советской власти в СССР был принят план ГОЭЛРО по электрофикации всей страны и за короткий срок реализация этого плана позволила обеспечить развивающуюся бурными темпами экономику страны электроэнергией. Таджикистану также необходимо наподобие плана ГОЭЛРО план «Водородной энергетики», расписанный по времени с финансированием конкретных объектов для перехода от традиционного углепользования на использование водорода, производимого из угля или электролизом воды.

Традиционная технология производства водорода электролизом воды отлажена и она стала классической. Многие компании в разных странах производят электролизёры разных мощностей. Для реализации данного производства нужны только инвестиции. В то же время при конверсионном получении водорода из угля традиционная технология газификации угля не отвечает требованиям водородной энергетики. Она малопродуктивна и экологически грязная с выбросами газов в атмосферу. Здесь необходимо осуществить переработку угля по безотходным и комплексным технологиям. Некоторые разработки таких технологий отражены в работах [8–11]. Их суть выражается в том, что первоначально при температурах до 700°C из состава угля выделяются все сопутствующие углероду органические вещества с их последующим охлаждением для использования согласно их составу, а оставшийся углерод газифицируется окислителями H_2O , O_2 , воздухом или их смесью с получением генераторного газа определённого состава. При этом зола угля также выделяется и применяется в составах строительных материалов или для иной цели. Предложенные технологии переработки угля отходов не имеют и малозатратные, поскольку тепло генераторного газа эффективно используется в самом производстве без его потребности тепла извне.

Сложной составляющей водородной энергетики является применение водорода как энергоносителя. Эта сложность связана со свойствами самого водорода: это легкий летучий газ с плотностью 0,0897 г/см³, взрывоопасен (взрывоопасная концентрация H_2 в воздухе 4...75% объём.), имеет высокий коэффициент диффузии в воздухе и другие негативные свойства. Низкая плотность водорода требует, чтобы его хранили и транспортировали при давлениях до 100 МПа, при этом оборудование следует делать из высокопрочных, но легких материалов с высоким коэффициентом конструктивного качества, и оно должно обеспечить абсолютную герметичность во избежание летучести газа. Для горения водорода также необходимо использование индивидуальной системы, зависящей от специфики объекта энергопользования. Однако эта проблема решаемая в русле развития научно-технического прогресса [12–14].

Хранение и транспортировка водорода осуществляются не только в газовом состоянии, но и в связанном виде в составах водородсодержащих химических материалов, в аккумулярованном состоянии веществами-носителями H_2 , например, в составах гидридов металлов, а также в криогенном состоянии, переводя его из газа в жидкость. Состояние водорода при использовании выбирается в зависимости от его функционального назначения. Учёными республики разработаны разные составы веществ, которые являются эффективными носителями водорода [15-18]. Эти разработки позволяют

получить важные водородсодержащие химические вещества, имеющие большой спрос на мировом рынке, они могут стать экспортным товаром для республики.

Исследования по разработке новых методов и способов хранения и получения веществ для аккумуляции H_2 с учетом использования местных видов сырья будут продолжены в рамках программы «Водородная энергетика в Таджикистане».

З а к л ю ч е н и е

Таджикистан имеет все возможности для организации и внедрения водородной энергетике в отраслях своей экономики. Неиссякаемый потенциал водных ресурсов и запасы угля позволят успешно развивать новую отрасль для обеспечения потребности страны в экологически чистом и высокоэффективном энергоносителе зеленой экономики. Переход экономики страны к использованию водорода в качестве энергоносителя является также технически правильным решением предотвращения явления таяния ледников, сохранения водного баланса и чистоты пространства нашей страны.

Поступило 12.12.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Киотский Протокол к Рамочной конвенции ООН об изменении климата, 1992, Парижское соглашение по климату 12.12.2015 – CNN Cable News Network, Tumer Broadcaising System Inc// Desember, 12.2015.
2. Таджикистан: миллиард долларов на борьбу с CO_2 . – <https://livingasia.online>.
3. Стратегия развития «зелёной» экономики в Республике Таджикистан на 2023-2037 годы (Приложение 1 к постановлению Правительство Республики Таджикистан от 30 октября 2022 года) – http://www.adlia.tj^show_doc.
4. Абдурахимов, Б.А., Охунов Р.В. Угольная промышленность Таджикистана, состояние и перспективы развития. – Душанбе: Недра, 2011, 248 с.
5. Гидротехнические ресурсы Таджикистана. – <https://www.mewr.tj>.
6. Послание Президента Республики Таджикистан Маджлиси Оли Республики Таджикистан. – Душанбе, 23 декабря 2022 года.
7. Письмо Министерства иностранных дел РТ № 8592(27–8) от 17 марта 2023 года.
8. Патенты РТ № 974 от 19.06.2018; №1051 от 16.05.2019; №1052 от 05.08.2019.
9. Патенты Евразии № 037398 от 24.04.2021; № 039523 от 07.07.2020.
10. Шарифов А., Хамроев Ф.Б., Шодиев Г.Г. Высокоэффективные технологии газификации угля. – Мат-лы респ. науч.-практ. конф. «Наука – основа инновационного развития». – Душанбе, ТТУ, апрель, 2020, с. 332-336.
11. Шарифов А., Гайбуллаева З.Х., Насимов Г.Т., Безотходная технология газификации угля для получения тепла и химических веществ. – Горный журнал, 2022, №9, с.134-139.
12. Радченко Р.В., Мокрушин А.С., Тюльпа В.В. Водород в энергетике: учебное пособие. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014, 229 с.
13. Фатеев В.Н., Алексеев О.К., Коробцев С.В. и др. – Проблемы аккумуляции и хранения водорода. – Chemical Problems, 2018, №4(16), с.453-483.
14. А.А.Хохонов, Шайхатдинов Ф.А., Бобровский В.А. и др. Технологии хранения водорода. Водородные накопители энергии. – Успехи химии и химической технологии, 2020, т.34, №12, с. 47-52.

15. Мирсаидов У.М. Алюмогидриды металлов. – Душанбе: Дониш, 2004, 86 с.
16. Мирсаидов У.М. Синтез и свойства гидроксида алюминия. – Душанбе: Дониш, 2004, 105 с.
17. Мирсаидов У.М. Борогидриды металлов. – Душанбе: Дониш, 2004, 140 с.
18. Мирсаидов У.М. Синтез, свойства и химические превращения боро- и алюмогидридов металлов – Душанбе: Дониш, 2005, 295 с.

А.Шарифов, У.М.Мирсаидов

КОНСЕПСИЯ И ЧОРИКУНИИ ЭНЕРГЕТИКА И ГИДРОГЕН ДАР ТОҶИКИСТОН

Институту химияи ба номи В.И.Никитини АМИТ

Дар мақола имкониятҳои таъкил ва қорӣ намудани энергияи гидроген дар Тоҷикистон муҳокима мешаванд. Захираҳои Тоҷикистон оид ба истеҳсоли гидроген, истеъмолкунандагони энергия ва гузориши онҳо барои истифодабарии гидроген нишон дода шудаанд. Масъалаҳои потенциали илми азхуд намудани энергетикаи гидроген дида баромада мешаванд. Имкониятҳои дар миқёси саноатӣ қорӣ намудани энергияи гидроген нишон дода шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: *концепсия, энергетикаи гидрогенӣ, энергиябарандаи сабз, иқтисодиёти сабз.*

A.Sharifov, U.M.Mirsaidov

THE CONCEPT OF IMPLEMENTATION OF HYDROGEN ENERGY IN TAJIKISTAN

V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the NAST

The article analyzes the concept of introduction of hydrogen energy in Tajikistan.

The article considers the possibilities of organizing and introducing hydrogen energy in Tajikistan. The resources of Tajikistan for the production of hydrogen, energy consumers and their transfer to the use of hydrogen are shown. The issues of scientific potential for the development of hydrogen energy are considered. The possibilities of introducing hydrogen energy on an industrial scale are shown.

Key words: *concept, hydrogen energy, green energy carrier, green economy.*

Сведения об авторах:

Шарифов А. – доктор технических наук, профессор, зав. отделом «Водородная энергетика» Института химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана. E-mail: sharifov49@mail.ru;

Мирсаидов Улмас Мирсаидович – доктор химических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, главный научный сотрудник Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана. E-mail: m.ulmas@nrta.tj.

УДК 521.633-546.273

Специальность: 1.4.1 – Неорганическая химия

У.Х.Усмонова

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СЕРНОКИСЛОТНОЙ ПЕРЕРАБОТКИ ОБОЖЖЁННОЙ БОРОСИЛИКАТНОЙ РУДЫ АК-АРХАРСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ

Таджикский государственный медицинский университет им. Абуали ибн Сино

(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 16.02.2023 г.)

В работе представлены результаты исследований процесса разложения предварительно обожжённой боросиликатной руды месторождения Ак-Архар Таджикистана серной кислотой. Найдена принципиальная технологическая схема переработки обожжённой боросиликатной руды серной кислотой. Предложены возможности применения продуктов разложения её в сфере медицины.

Ключевые слова: технологическая схема, обожжённая боросиликатная руда, переработка, серная кислота, разложение, извлечение, ортоборная кислота, медицина.

Боросиликатная руда Ак-Архарского месторождения Таджикистана является одной из разновидностей борных руд, которые характерны для известково-скарновых месторождений, и эти огромные ресурсы борных соединений имеют большое промышленное значение [1].

Соединения бора широко используются в разных отраслях народного хозяйства, в том числе в медицине. В связи с этим, борные соединения важны для развития производственной инфраструктуры и, чтобы обеспечить сырьём эти отрасли, важен поиск оптимальных параметров, позволяющих максимально извлечь полезные компоненты [2].

Химический и минералогический составы боросиликатной руды определены объемным, пламенно-фотометрическим и рентгенофазовым методами анализа.

Таблица

Химический состав боросиликатной руды Ак-Архарского месторождения

Содержание, мас%	Компоненты												
	B ₂ O ₃	SiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	FeO	CaO	MgO	TiO ₂	MnO	K ₂ O	Na ₂ O	P ₂ O ₅	П.п.п.
	10.4	59.8	1.27	2.2	1.39	19.6	0.75	0.15	0.29	0.1	0.03	0.11	3.91

Адрес для корреспонденции: Усмонова Умеда Хуршиедовна. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 139, Таджикский государственный медицинский университет. E-mail: umeda0288@mail.ru

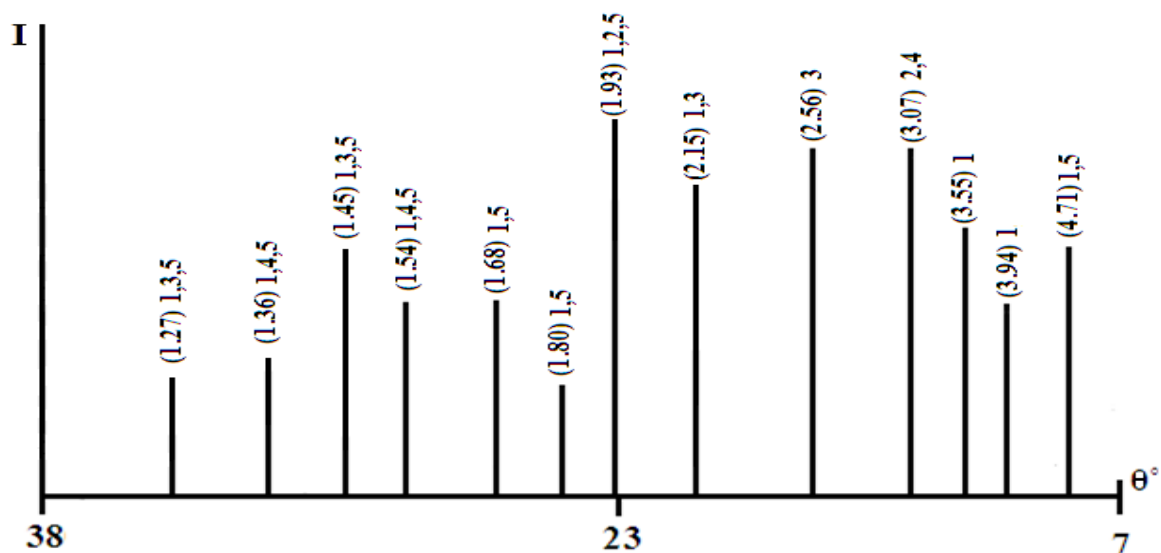


Рис. 1. Штрих-диаграмма боросиликатной руды Ак-Архарского месторождения после предварительного обжига: 1 – данбурит, 2 – дантолит, 3 – гидрослюда, 4 – кальцит, 5 – кварц.

Из штрих-диаграммы, приведённой на рис.1, видно, что основными борсодержащими минералами боросиликатных руд месторождения Ак-Архара являются данбурит и дантолит. Глинистые минералы (гидрослюда, монтмориллонит) гипс и кварц составляют пустую породу.

Результаты анализов боросиликатной руды показывают, что извлечение и промышленное использование бора из нее технически возможно, экономически целесообразно.

В последнее время концентрации борных минералов, разлагающихся кислотами в природном состоянии или после их предварительной обработки имеют промышленный интерес. Это даёт возможность простыми технологическими способами получать из них ортоборную кислоту и другие востребованные соединения.

Имея в виду преимущество небольших по размеру частиц в реакционной среде, руда измельчалась до размера частиц 0.1 мм.

До начала кислотного разложения, в целях изменения физических свойств и химического состава, перевода полезных компонентов в извлекаемую форму и удаления примесей, предложен предварительный обжиг руды при температуре 900-950°C в течение 60 минут. При прокаливании протекает процесс термодеструкции и перестройка кристаллической структуры минералов из α -модификаций в β - или γ -формы, которые отличаются относительно хорошей растворимостью.

После стадии термической обработки обожженную руду измельчали и выщелачивали 30-40% серной кислотой.

Исследованы физико-химические свойства прокаленного сырья, а также продуктов переработки сернокислотного разложения.

Дозирование серной кислоты при разложении сырья рассчитали, учитывая превращение оксидов бора, железа, алюминия в сульфаты и учитывая их содержание в сырье. При данной дозировке кислоты 80-100% от стехиометрического количества, крупности частиц породы в пределах 0.1 мм, при температуре 95°C и продолжительности процесса 45-60 минут степень извлечения оксида бора из руды составила 35.32-42.96% [3].

Основываясь на результатах опытов, разработана принципиальная технологическая схема извлечения ортоборной кислоты из боросиликатной руды Ак-Архарского месторождения сернокислотным способом, которая представлена на рис.2.

Методом перекристаллизации выкристаллизовывали ортоборную кислоту из жидкой фазы и отделяли фильтрованием. После высушивания была получена сухая ортоборная кислота

Все конечные продукты переработки боросиликатной руды имеют применение в сфере медицины и фармации.

Бор в современной медицине нашел эффективную практику при терапии злокачественных опухолей. Бор-нейтронозахватная терапия различных опухолей даёт огромные возможности достигнуть положительных результатов в области онкологии [4].

Водные и спиртовые растворы борной кислоты имеют антибактериальное, антимикотическое, противопаразитарное, вяжущее свойства и широко используются в оториноларингологии, дерматологии и офтальмологии.

По первому тривиальному названию ортоборной кислоты *sal sedativum* («успокаивающая соль») можно сделать вывод, что первоначально ортоборная кислота и тетраборат натрия применялись в медицинских целях [5] и в наше время, особенно последние десятилетия, потребность применения препаратов бора в психиатрии и неврологии увеличилась [6].

Оставшуюся часть жидкой фазы составляют сульфаты алюминия и железа, которые также нашли широкое применение.

В стоматологии сульфатом алюминия пропитывают ретракционные нити [7]. На основе сульфата алюминия производятся гемостатические средства [8]. Изобретен способ получения антацида на основе гидроокислов и сульфатов магния и алюминия [9].

Препараты на основе сульфата железа (II) обладают большой биодоступностью и широко используются для лечения больных с железодефицитной анемией [10].

Промытая твёрдая фаза, полученная фильтрованием, в основном составляет диоксид кремния, который широко применяется как энтеросорбент, стабилизирующее средство суспензий и линиментов, загуститель мазевых основ, наполнитель таблеток и суппозиторий, компонент замедляющий выход БАВ из различных лекарственных форм [11].

Таким образом, разработана принципиальная технологическая схема переработки обожжённой боросиликатной руды серной кислотой, ведущими технологическими этапами которой являются сернокислотное разложение и извлечение продуктов разложения, являющихся ценными продуктами.

На основе проведённых опытов по разложению обожжённой боросиликатной руды серной кислотой можно рекомендовать принципиальную технологическую схему, составляющими этапами которой являются следующие условия: измельчение руды до размера 0.1 мм, обжиг руды при температуре 950-980°C, разложение обожжённой руды серной кислотой, фильтрование пульпы и промывка твёрдого остатка, кристаллизация и сушка ортоборной кислоты, промывка и разделение сульфатов, которые в дальнейшем можно использовать в фармакологии и медицине.

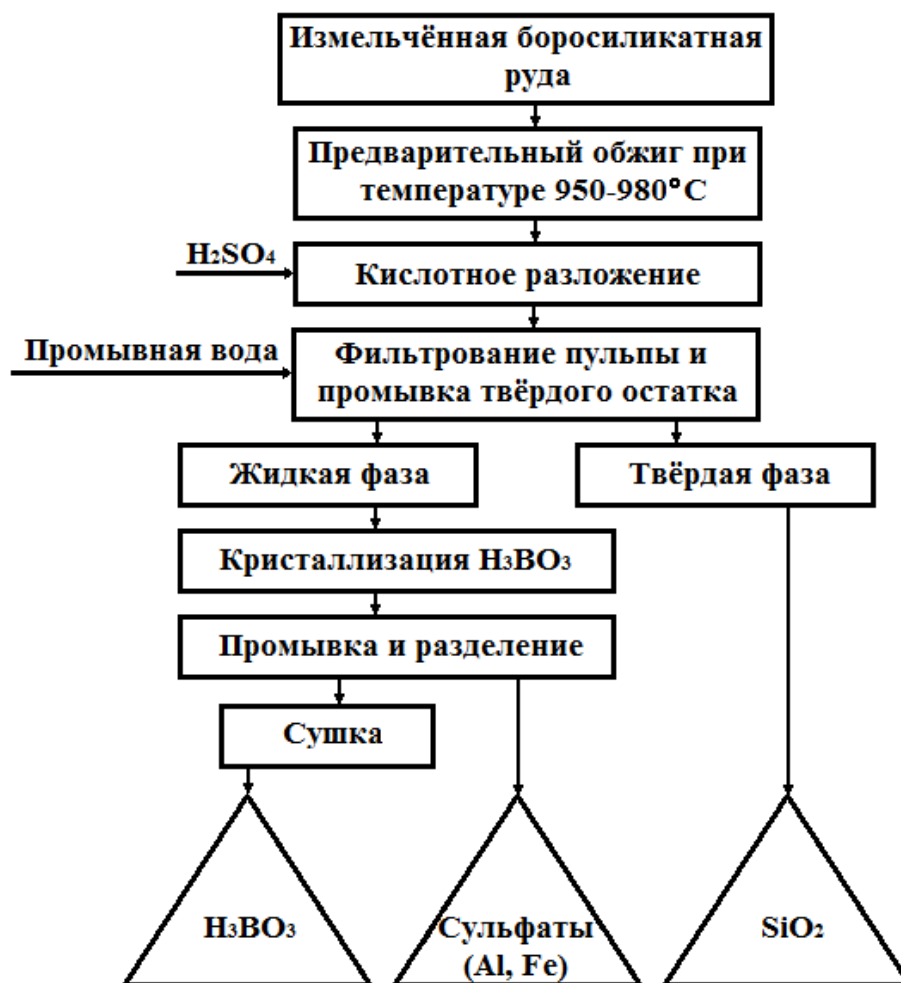


Рис. 2. Принципиальная технологическая схема получения ортоборной кислоты и других сопутствующих соединений из боросиликатной руды месторождения Ак-Архар сернокислотным способом.

Поступило 16.02.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерёмин Н.И. Борные месторождения. – СПб.: Сборник: Российская геологическая энциклопедия, 2010, т.1, (А-И), с.157-158.
2. Бораты народному хозяйству: Сборник науч. трудов / Под ред. Г.К.Годе. – Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, 135 с.
3. Усмонова У.Х., Маматов Э.Д., Курбонбеков А., Мирсаидов У.М. Выщелачивание исходного и обожженного данбурита серной кислотой. – ДАН РТ, 2013, т.56, №4, с.305-309.
4. Таскаев С.Ю. Бор-нейтронозахватная терапия злокачественных опухолей: основы, история и текущее состояние. – Онкологический журнал: лучевая диагностика, лучевая терапия, 2019, т.2, №2, с.66-83.
5. Donald E.G. Borates: Handbook of deposits, processing, properties, and use. – California, USA: Academic Press, 1998, 483 p.
6. Беккер Р.А., Быков Ю.В. Препараты бора в психиатрии и неврологии: их взлёт, падение и возобновление интереса. – Acta Biomedica Scientifica (East Siberian Biomedical Journal), 2018, т.3, № 4, с.85-100.

7. Тагиева Ф.Р. Гемостатические средства местного действия в стоматологической практике. – Здоровоохранение (Минск), 2015, №1, с.27-32.
8. Машковский М.Д. Лекарственные средства. В двух частях. Ч. I. – 12-е изд., перераб. и доп. – М.: Медицина, 1998, 736 с.
9. Авторское свидетельство № 1056876 СССР, МПК А61К 33/06, А61К 33/08, А61Р 1/00. Способ получения антацида на основе гидроокислов и сульфатов магния и алюминия: № 3291150: заявл. 13.05.1981 : опубл. 23.11.1983 / К. Адольф, Ш. Михаэль; заявитель ГЕДЕКЕ АГ (ФИРМА).
10. Дворецкий Л.И. Сульфат железа в лечении железодефицитной анемии: позиции сохраняются. – Терапевтический архив, 2017, т.89, №10, с.108-112.
11. Медицинская химия и клиническое применение диоксида кремния / [А.А.Чуйко, В.А.Тертых, В.В.Лобанов и др.]; Под ред. А.А.Чуйко; Нац. акад. наук Украины. Ин-т химии поверхности. – Киев: Наукова думка, 2003, 415 с.

У.Х.Усмонова

АСОСҶОИ ТЕХНОЛОГИИИ КОРКАРДИ МАЪДАНИ БОРОСИЛИКАТИ СЌЗОНИДАШУДАИ КОНИ АК-АРХАР

Донишгоҳи давлатии тиббии Тоҷикистон ба номи Абуали ибни Сино

Натиҷаҳои тадқиқоти раванди таҷзияи маъдани боросиликати қаблан сўзонидашудаи кони Ак-Архари Тоҷикистон бо кислотаи сулфат, оварда шудааст. Таҳри технологияи принсипиалии коркарди маъдани боросиликати сўзонидашуда бо истифодаи кислотаи сулфат муайян карда шудааст. Имкониятҳои истифодаи маҳсулоти таҷзияи он дар соҳаи тиб пешниҳод карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: таҳри технологӣ, маъдани боросиликати сўзонидашуда, коркард, кислотаи сулфат, таҷзия, ҷудошавӣ, кислотаи ортоборат, тиб.

U.Kh.Usmonova

TECHNOLOGICAL FOUNDATIONS OF SULFURIC ACID PROSESSING OF BURNT BOROSILICATE ORE OF THE AK-ARKHAR DEPOSIT

Avicenna Tajik State Medical University

The results of studies of the decomposition process of pre-fired borosilicate ore of the Ak-Arkhar deposit of Tajikistan with sulfuric acid are presented. A basic technological scheme for processing burnt borosilicate ore with sulfuric acid had been found. The possibilities of using its decomposition products in the field of medicine are proposed.

Key words: technological scheme, burnt borosilicate ore, processing, sulfuric acid, decomposition, recovery, orthoboric acid, medicine.

Сведения об авторах:

Усмонова Умеда Хуршедовна – кандидат химических наук, ассистент кафедры биоорганической и физколлоидной химии Таджикского государственного медицинского университета им.Абуали ибн Сино.

УДК 625.85

Специальность: 2.6.7 – Технология неорганических веществ

Дж.З.Тошов, А.Шарифов*, Д.С.Неъматзода*, З.А.Гозиев**

**ИЗМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ДОРОЖНОГО БИТУМА ПОД ВЛИЯНИЕМ
МИНЕРАЛЬНЫХ ДОБАВОК РАЗНЫХ СОСТАВОВ***Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими,***Дангаринский государственный университет,****Институт технологии, менеджмента и инновации, г. Куляб**(Представлено академиком НАН Таджикистана И.Н.Ганиевым 26.10.2022 г.)*

В статье приведены результаты исследования основных свойств дорожного битума при введении в его состав минеральных порошков из цементной пыли, керамики, золы угля, отходов флотационного обогащения размягчения и растяжимости битума от вида, расхода и тонкости помола минеральной добавки. Вид и количество добавок до 15% от массы битума практически не изменяют температуру размягчения вяжущего, но повышают его твердость и снижают растяжимость при температуре 25°C.

Ключевые слова: *битум, минеральный порошок, цементная пыль, зола угля, отход флотационного обогащения флюоритовой руды, керамика, известняк, твердость, температура размягчения, растяжимость.*

Обычно в качестве минеральной добавки к дорожным битумам в составе асфальтобетона при строительстве автомобильных дорог используют порошки, полученные из карбонатных пород. Их добыча и приготовление до тонкости помола согласно требованиям [1] требует определённых затрат. Кроме того, месторождения карбонатных пород не имеются во многих местах, однако строительство автомобильных дорог ведётся во всех регионах страны. Перевозка минеральной добавки из других мест также требует определённых затрат.

В настоящее время в Таджикистане сравнительно быстрыми темпами развиваются производства цемента и керамического кирпича, широко применяется уголь не только в энергоёмких производствах названных строительных материалов, но и для получения тепла в ТЭС. При производствах цемента и керамического кирпича образуются отходы – цементная пыль печей обжига клинкера и кирпичный бой, а при сжигании угля выделяется зола-унос. Также в Таджикистане развивается горно-обогательная отрасль получения концентратов разных металлов, которая является многоотходной с образованием огромных количеств минеральных порошков. В частности, к таким минеральным

Адрес для корреспонденции: *Тошов Дожон Зухуриддинович. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. акад. Раджабовых, 10, Таджикский технический университет. E-mail: tjz90@mail.ru; Шарифов Абдумумин, Неъматзода Дилишоди Сидик. 735320, Республика Таджикистан, Хатлонская область, Дангаринский район, ул. Маркази, 25, Дангаринский государственный университет. E-mail: Sharifov49@mail.ru; dilshod.nematov92@mail.ru; Гозиев Зоирхон Амирхонович. 735360, Республика Таджикистан, Хатлонская область, г. Куляб, ул. Борбад, Институт технологии и инновационного менеджмента. E-mail: gozievzoirhon@gmail.com.*

порошкам относятся и отходы флотационного обогащения флюоритовой руды (ОФОФР) на Такобском ГОК, объёмы накопления которых ещё в советское время исчислялись многомиллионными тоннами [2].

По степени измельчения и помола, а также по количеству образования вышеназванные отходы могут быть потенциальным сырьём для получения минерального порошка для модифицирования дорожного битума в составе асфальтобетона. Однако, прежде чем использовать их в производстве асфальтобетона, целесообразно исследовать их влияние на основные свойства дорожного битума, также следует определить их исходный гранулометрический состав для определения необходимости дополнительного помола для удовлетворения требования стандарта [1].

В работе [3] проведено исследование по использованию цементной пыли и золы уноса в качестве минеральной добавки битума в асфальтобетоне. Показано, что зола-унос Кураховской ТЭС (Донецк) по гранулометрическому составу не соответствует требованиям для использования в качестве минерального порошка, её необходимо дополнительно подвергать помолу до размера частиц меньше 0.071 мм.

Следует отметить, что составы и свойства отходов промышленных предприятий прежде всего зависят от состава сырья и способов его переработки, поэтому в каждом конкретном случае использование отходов, в том числе и в качестве минеральной добавки к дорожному битуму, требует проведения исследования об их пригодности по функциональным назначениям. С этой целью нами были проведены исследования по определению возможности использования цементной пыли Душанбинского цементного завода, ОФОФР Такобского ГОК, порошка из боя керамического кирпича, золы угля Фан-Ягнобского месторождения, сжигаемого на Душанбинской ТЭС-2, и для сравнения – минерального порошка из известняка месторождения Харангон. В таблице 1 приведены их исходные гранулометрические составы.

Таблица 1

Минеральные добавки к битуму и их исходные гранулометрические составы

Минеральная добавка	Размер сита (мм) и полный остаток порошка на сите (%)					
	1.25	0.63	0.315	0.14	0.071	< 0.071
Известняк	4.0	7.0	12.0	25.0	86.0	14.0
Цементная пыль	3.0	26.0	40.0	73.0	97.0	3.0
Керамика	0	25.0	38.0	50.0	83.0	17.0
Зола угля	0	0	3.0	18.0	84.0	16.0
ОФОФР	0	5.0	27.0	64.0	71.0	29.0

Анализ данных табл. 1 показывает, что практически все исследуемые минеральные порошки для использования в составе битума требуют дополнительного помола до размера частиц 0.071 мм. Затраты на их дополнительный помол зависят от твердости частиц каждого порошка. В данной работе эти затраты не определены, хотя осуществили дополнительный помол всех использованных порошков до размеров меньше 0.071 мм. В табл. 2 указаны значения тонкости помола минеральных порошков на сите 0.071 мм.

Таблица 2

Тонкость помола использованных минеральных добавок в составе битума

Добавка	известняковая	цементная пыль	керамическая	Зола угля	ОФОФР
Тонкость помола частиц на сите 0.071мм. %	88.2	85.8	86.6	87.8	87.3

Как видно, тонкость помола всех добавок сравнительно одинакова и соответствует требованиям стандарта [1].

В табл. 3 приведены усреднённые химические составы используемых в исследованиях минеральных добавок.

Таблица 3

Усреднённые химические составы минеральных добавок

Компоненты	Содержание в составах минеральных добавок, мас.%				
	известняковая	цементная пыль	керамическая	зола угля	ОФОФР
CaO+MgO	58.08	53.38	5.2	2.44	6.73
SiO ₂	-	14.81	43.55	56.06	74.54
Al ₂ O ₃	-	3.65	31.9	20.05	7.33
Fe ₃ O ₄	-	3.08	5.3	0.53	0.1
K ₂ O+Na ₂ O	-	-	4.05	5.50	3.55
S _{общ.}	-	-	5.3	0.53	0.1
CO ₂	41.92	-	-	-	1.62
Другие	-	25.08	4.7	14.89	6.03
Всего	100	100	100	100	100

В составах известняка и цементной пыли преобладают оксиды CaO+MgO, в то же время в составах керамического кирпича, золы угля и ОФОФР содержание SiO₂ соответственно 43.55; 56.06 и 74.54% и Al₂O₃ -31.9; 20.05 и 7.33%, то есть суммарное содержание оксидов кремния и алюминия варьируется в пределах 75.45...81.87%. В составе асфальтобетона химический состав минеральной добавки не играет важную роль, как это наблюдается в составе цементного бетона. В то же время важным фактором использования минеральной добавки в составе битума является обеспечение большой силы сцепления, вяжущего к поверхностям каменных заполнителей, в том числе и к поверхности частиц минеральной добавки. Поэтому определяющим фактором является гранулометрический состав минеральной добавки, чем тоньше слой частиц добавки, тем больше их удельная поверхность. Следовательно, и возрастает вероятность возвышения силы сцепления, вяжущего с поверхностью каменного заполнителя, что приводит к увеличению прочности асфальтобетона.

В исследованиях в составе битума марки БДН 60/90 [4] содержания минеральных добавок варьировали в количествах 5; 7.5; 10 и 15% массы битума. Определили влияние минеральной добавки на изменения твердости, температуры размягчения и растяжимости битума при температуре 25°C согласно требованиям [5-7].

На рисунках 1-3 приведены зависимости изменения температуры размягчения, твердости и растяжимости битума марки БДН 60/90 от вида и содержания минеральных добавок.

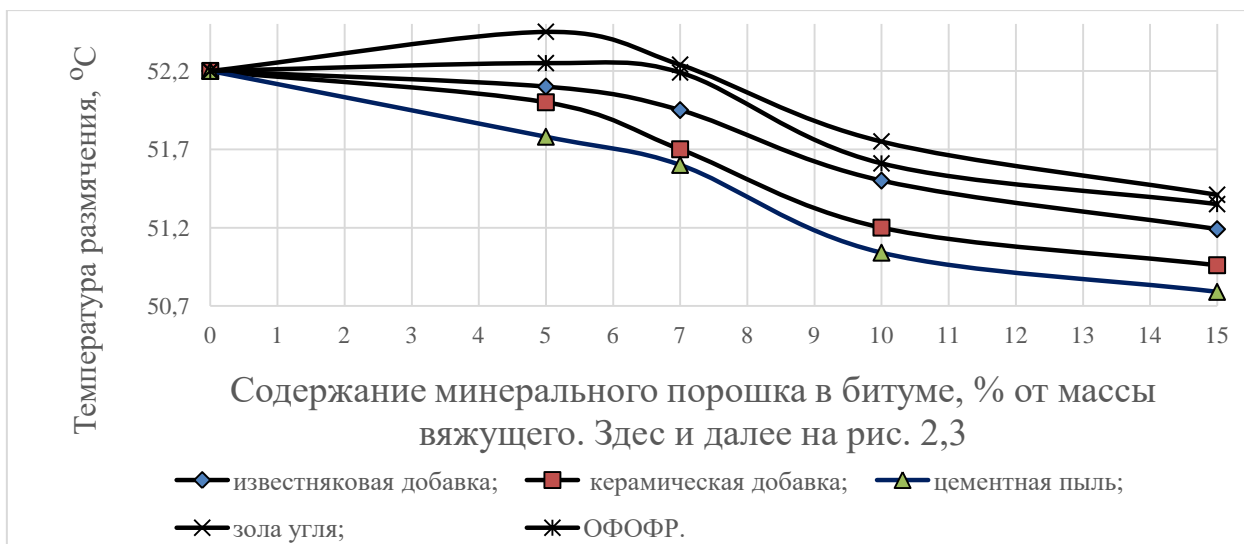


Рис. 1. Зависимость температуры размягчения дорожного битума БНД 60/90 от вида и количества минеральной добавки.

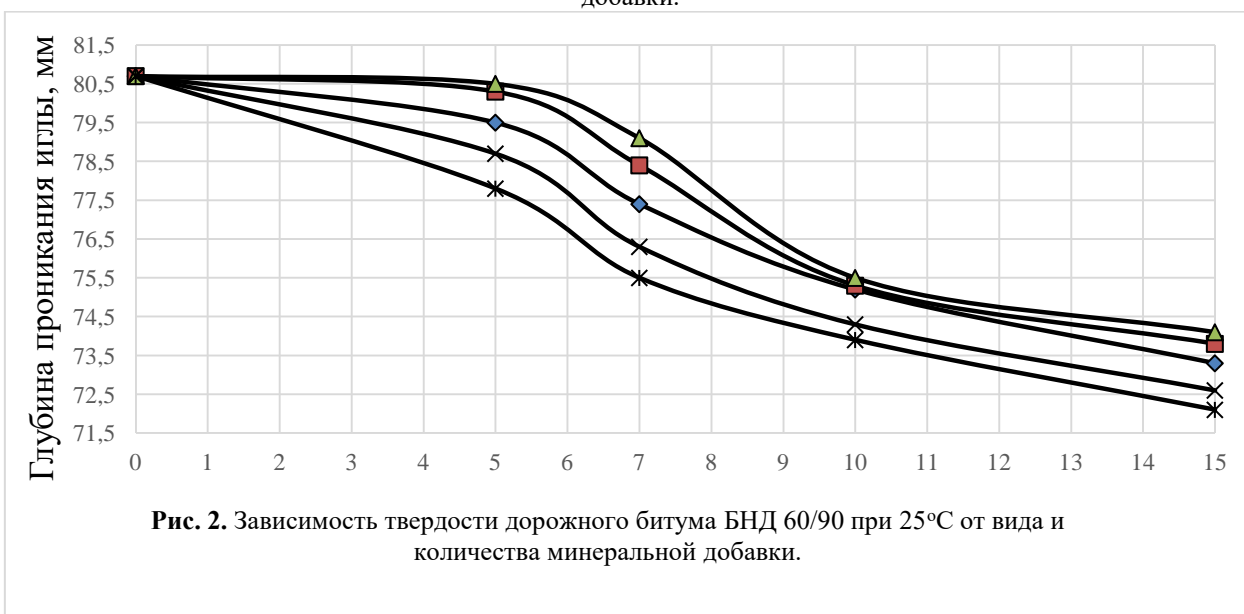


Рис. 2. Зависимость твердости дорожного битума БНД 60/90 при 25°C от вида и количества минеральной добавки.

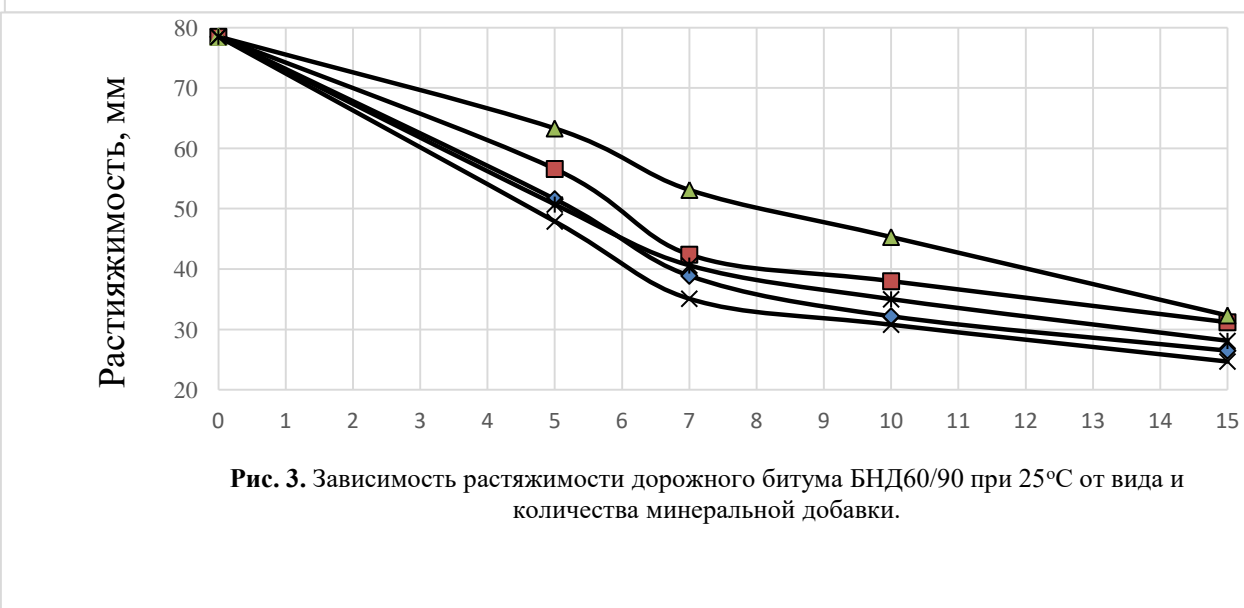


Рис. 3. Зависимость растяжимости дорожного битума БНД60/90 при 25°C от вида и количества минеральной добавки.

Вид и количества добавок в пределах от 5 до 15% мало влияют на температуру размягчения битума. С повышением содержания всех добавок температура размягчения битума практически постоянна, она варьируется в пределах 51...52°C, когда для чистого битума её значение 52.2°C. В то же время твердость смеси битума и минеральной добавки возрастает, а её растяжимость снижается, причём при одинаковом характере изменения данных свойств битума отличие в действиях добавок незначительное. Такое изменение твердости и растяжимости битума объясняется возрастанием вязкости смеси битума и минерального порошка.

Следует отметить, что при расходах минеральной добавки до 15% от массы вяжущего значения температуры размягчения и твердости битумо-минеральной смеси не превышают показателей свойств чистого битума БНД 60/90, в то же время растяжимость смеси снижается значительно ниже показателя чистого битума [4].

З а к л ю ч е н и е

Вышеизложенные результаты экспериментальных исследований указывают на возможность использования золы угля, ОФОФР, отхода керамического кирпича и цементную пыль в качестве минерального компонента дорожных битумов взамен карбонатной добавки. При этом утилизируются промышленные отходы и снижается себестоимость производства минеральной добавки в составе асфальтобетона, что повышает его экологическую и экономическую эффективность при обеспечении требуемых качеств дорожного покрытия.

Поступило 26.10.2022 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. ГОСТ 16557-2003. Минеральный порошок для асфальтобетонных смесей. Технические условия.
2. Шарифов А., Камолов Г. Применение отхода флюоритового производства в составе цементных бетонов. – ДАН ТаджССР, 1989, т. XXXII, № 9, с. 611-614.
3. Доля А.Г., Попов Р.К., Северин Д.В., Терещенко А.О., Катерина А.В. Влияние минеральных порошков различной природы получения на свойства асфальтобетона. – Вестник Донецкой национальной академии строительства и архитектуры, 2018, вып. 1(129), Современные строительные материалы, с.114-117.
4. ГОСТ 22245-90. Битумы нефтяные дорожные вязкие. Технические условия.
5. ГОСТ 11505-75. Битумы нефтяные. Метод определения растяжимости. Издание официальное. – М.: Стандартинформ, 2005.
6. ГОСТ 11506-73. Битумы нефтяные. Метод определения температуры размягчения по кольцу и шару. Издание официальное. – М.: Стандартинформ, 2008.
7. ГОСТ 11501-78. Битумы нефтяные. Метод определения глубины проникания иглы. Издание официальное. – М.: Стандартинформ, 2005.

Ҷ.З.Тошов, А.Шарифов*, Д.С.Неъматзода*, З.А.Ғозиев**

ТАҒЙИРЁБИИ ХОСИЯТҲОИ МУМИ РОҲӢ ЗЕРИ ТАЪСИРИ ИЛОВАҲОИ МИНЕРАЛИИ ГУНОГУНТАРКИБ

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ,

**Донишгоҳи давлатии Дангара,*

***Донишкадаи технологӣ, идоракунии ва инноватсия, ш.Кӯлоб*

Дар мақола натиҷаҳои таҳлили хосиятҳои асосии муми роҳӣ дар вақти ба он ҳамроҳ намудани хокаи минералӣ аз чанги семент, хишти сафолӣ, хокистари ангишт, партови бойгардонии флотатсионии маъдани флюоритдор ва оҳаксанг оварда шудаанд. Нишондиҳандаҳои сахтӣ, ҳарорати мулоимшавӣ ва дараҷаи кашидашавии мум вобаста аз намуд ва миқдори иловаҳои минералӣ муайян карда шудаанд. Намуд ва миқдори маводҳои иловагӣ то 15% аз массаи мум амалан ҳарорати мулоимшавии онро тағйир надида, сахтии онро дар ҳарорати 25°C баланд ва кашидашавиашро паст менамоянд.

Калимаҳои калидӣ: мум, хокаи минералӣ, чанги семент, хокистари ангишт, партови бойгардонии флотатсионии маъдани флюоритдор, сафол, оҳаксанг, сахтӣ, ҳарорати мулоимшавӣ, кашидашавӣ.

J.Z.Toshov, A.Sharifov*, D.S.Nematzoda*, Z.A.Goziev**

CHANGING THE PROPERTIES OF ROAD BITUMEN UNDER THE INFLUENCE OF MINERAL ADDITIVES OF DIFFERENT COMPOSITIONS

M.S.Osimi Tajik Technical University,

**Dangara State University,*

***Institute of Technology and Innovation Management in Kulyab*

In this article the results of a study of the main properties of road bitumen when mineral powders from cement dust, ceramic bricks, coal ash, waste from flotation enrichment, softening and extensibility of bitumen are introduced into its composition, depending on the type, consumption and fineness of grinding of the mineral additive are presents. The type and amount of additives up to 15% by weight of bitumen practically do not change the softening point of the binder, but increase its hardness and reduce extensibility at a temperature of 25°C.

Key words: bitumen, mineral powder, cement dust, coal ash, fluorite ore flotation waste, ceramics, limestone, hardness, softening point, extensibility.

Сведения об авторах:

Шарифов Абдумумин – доктор технических наук, профессор, зав. Отделом «Водородная энергетика» Института химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана. E-mail: sharifov49@mail.ru;

Неъматзода Дилшоди Сиддик – ассистент Дангаринского государственного университета. E-mail: dilshod.nematov92@mail.ru;

Ғозиев Зоҳирхон Амирхонович – зав. кафедрой «Строительство, земледелие и транспорт» Института технологии и инновационного менеджмента г.Куляб. E-mail: zoirkhongoziev@mail.ru.

УДК 591.543, 627, 631

Специальность: 1.6.10 – Геология, поиски, разведка твёрдых полезных ископаемых, минерагения.

С.Нусратулло

ВЛИЯНИЕ ГОРНОПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ РУДНОГО ПОЛЯ ЧОРЕ НА ОКРУЖАЮЩУЮ СРЕДУ

*Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана А.Р.Файзиевым 04.03.2023 г.)*

На исследованной территории все месторождения и рудопроявления близки по минеральному составу, что предполагает их отработку с применением единой технологической схемы переработки руды. В этой связи данный регион можно рассматривать в качестве крупной минерально-сырьевой базы для развития золотодобывающей промышленности, располагающей уже в настоящее время значительными разведанными запасами и прогнозными ресурсами. Все хвостохранилища горнопромышленных предприятий как места для хранения или захоронения токсичных отходов в случае соблюдения норм при их строительстве и эксплуатации не представляют неминуемой опасности. Геоэкологические риски возникают, когда эти нормы сознательно или умышленно нарушаются, например, вследствие размыва хвостохранилищ, попадания загрязненной воды в подземные воды, открытые водоемы, выноса ветром и т.д.

Ключевые слова: рудопроявление, прогнозные ресурсы, хвостохранилища, минерально-сырьевая база, токсичные отходы, отвалы пород, геолого-разведочные работы, месторождение, геоэкологические риски.

Систематические геологические исследования были начаты в прошлом столетии Таджикско-Памирской экспедицией. Этими работами были заложены основы понимания геологического строения этой области и открыты многочисленные рудопроявления цветных и редких металлов: сурьмы, ртути, олова, мышьяка, вольфрама и др.

Месторождение Восточная Дуоба расположено в золоторудной провинции Центрального Таджикистана, входящей в Зеравшано-Гиссарский золото-редкометальный пояс. Последний характеризуется наличием месторождений цветных и редких металлов (сурьма, ртуть, олово, вольфрам и др.), в той или иной мере содержащих золото, и собственно золоторудных месторождений. В 60-х годах прошлого столетия на территории Центрального Таджикистана открыто несколько десятков собственно золоторудных проявлений и месторождений, что позволило выделить здесь по степени разведанности и обнадеживающим перспективам три золоторудных района: Джилау-Тарор-Мосрифский рудный узел в Пенджикентском экономическом районе, Чоринская и Кончочская золоторудные площади в Айнинском геолого-экономическом районе.

Адрес для корреспонденции: Сафари Нусратулло. 734029, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана.
E-mail: safari_nusratullo@mail.ru

В Пенджикентском районе находится ООО СП «Заравшан», которое расположено в 50 км к западу от месторождения Восточная Дуоба (расстояние по автодороге 140 км) и объединяет золоторудные месторождения и проявления, расположенные в бассейне р.Магиан-Дарья и по южному склону Туркестанского хребта в его крайнем западном окончании. Основное промышленное значение здесь имеет Джилау-Тарор-Мосрифский рудный узел, занимающий площадь около 100 км². В пределах этого рудного поля выявлено около 20 рудопроявлений и месторождений золота различных формаций. На базе этих месторождений и начал работать ООО СП «Заравшан», проектная мощность которого составляет 1100 тыс. т руды в год, из них 500 тыс.т руды по месторождению Тарор и 600 тыс.т руды по месторождению Джилау. Помимо этих месторождений, в Джилау-Тарор-Мосрифском рудном узле имеются ранее разведанные небольшие по запасам месторождения Гиждарва, Комизак, Дагами-Дарбаза, Шаршага и др. Здесь же к настоящему времени установлено высокоперспективное месторождение Шахбас, а непосредственно вблизи месторождения Тарор ведётся оценка перспективного серебро-полиметаллического месторождения Мирхант. В целом прогнозная оценка Джилау-Тарор-Мосрифского рудного узла почти в три раза превышает разведанные к настоящему времени в нем запасы. Чоринский рудный район примерно на 50 км вытянут субширотной полосой вдоль северного склона в приосевой части Зеравшанского хребта и включает в себя месторождения и рудопроявления Чоре, Восточная Дуоба, Кум-Манор, Верхний Кумарг, Тагоби-Джуфт, Тагоби Сар, Тагоби Миёна, Альбититовое, Медвежье, Зеленое, Чашма-Зардин, Парз и др.

Все вышеперечисленные месторождения и рудопроявления близки по минеральному составу, что предполагает их отработки применением единой технологической схемы переработки руды [1]. Кончочский рудный район расположен в 20 км юго-западнее месторождения Восточная Дуоба и объединяет сурьмяное с золотом месторождение Скальное, собственно золоторудное месторождение Чульбои и ряд малоизученных, но перспективных золоторудных проявлений Сарытаг, Ковшот и др. Прогнозная оценка этого района также очень высокая. Как видно из вышеприведенного, район месторождений Восточная Дуоба, как и весь Центральный Таджикистан, можно рассматривать в качестве крупной минерально-сырьевой базы для развития золотодобывающей промышленности, располагающей уже в настоящее время значительными разведанными запасами и прогнозными ресурсами. На территории Айнинского района в 10-30 км от месторождения Восточная Дуоба известно более 30 месторождений и проявлений различных строительных материалов.

В связи с интенсивным развитием горнопромышленной деятельности возникает необходимость решения актуальной научно-производственной задачи: оценка негативного воздействия этих предприятий на компоненты природной среды и разработка технологии химической переработки жидких промышленных отходов, захораниваемых на полигоне [2].

В настоящее время ПОО «Талько-ресурс» ведет добычу каменного угля на Джижикрутском и Кантенском участке месторождения производительностью 400 тыс.т угля в год и снабжает им местные предприятия и население. В устье р.Искандер-Дарья (левая составляющая р.Фан-Дарья) действует небольшой карьер по добыче песка и песчано-гравийной смеси и ведется подготовка к организации карьера и шахты по разработке крупного каменноугольного месторождения Фан-Ягноб. Помимо перечисленных действующих и строящихся горных предприятий, вблизи от месторождения Восточ-

ная Дуоба уже длительный период ведут работы ряд стационарных геологоразведочных партий. На рудопроявлениях Верхний Кумарг осуществляет поисково-оценочные работы ПОО «ТВЕА Душанбе-саноати кӯҳӣ», база которой находится в устье руч. Яфч.

В 10 км южнее месторождения расположен Анзобский ГОК, ведущий разработку ртутно-сурьмяного месторождения Джижикрут. Западнее месторождения (в 140 км по автодороге) начал действовать «ООО Талько - Голд» на базе месторождений Тарор и Джилау.

Рельеф площади рудного поля расчлененный, типично горный. Абсолютные отметки составляют от 1500 м (устье руч. Яфч) до 4191.8 м (на водоразделе Яфч-Тагоби-Кумарг). Относительные превышения водоразделов над тальвегами долин составляют 1300-1600 м абсолютные отметки выходов рудоносных зон на поверхность колеблются от 2000 до 2600 м. Скалистые формы рельефа занимают 10-15% площади рудного поля (рис.). С научной точки зрения, хвостохранилища и горные отвалы как места для хранения или захоронения токсичных отходов в случае соблюдения норм при их строительстве и эксплуатации не представляют значительной опасности (таблица).

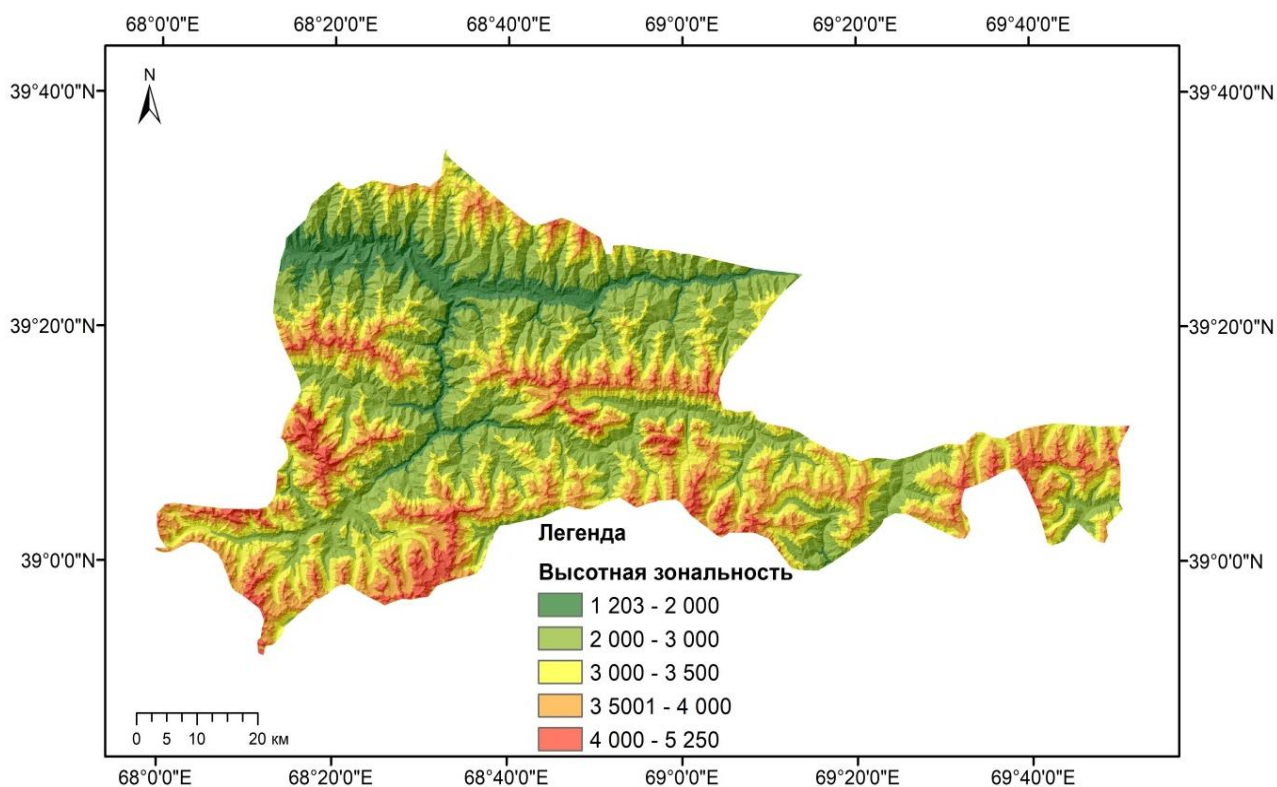


Рис. 1. Карта рельефа местности рудного поля Чоре.

Из карты рельефа местности рудного поля Чоре видно, что абсолютные отметки выходов рудоносных зон на поверхность колеблются от 2000 до 2600 м.

Геоэкологические риски проявляются, когда эти нормы сознательно или умышленно нарушаются. Или потенциальная угроза может наступить, например, вследствие размыва хвостохранилища, попадания загрязненной воды в подземные воды, открытые водоемы, выноса ветром [1,3].

В связи с этим, на данном, первом, этапе предупреждения и реагирования на загрязнение следует организовать и усилить разъяснительные работы среди населения.

Таблица

Горнопромышленные предприятия Чоринского рудного поля

Объект	Координаты с.ш.; в.д.	Назначение	Примечание
ООО СП «Заравшан»	39°23' 67°44'	Открытая и подземная добыча золота, обогащение и аффинаж	Объект в целом включает карьер, серию штолен, рудник, обогатительный комбинат, хвостохранилище
Фан-Ягнобская угольная шахта	38°10' 68°39'	Подземная и открытая разработка угля	Карьер, штольня, угольные склады
Анзобский ГОК	39°11' 68°38'	Подземная добыча сурьмы и ртути, обогащение	Ртутное заражение воды, почвы и воздуха

Известно, что у многих людей, особенно проживающих в ареале, то есть в зоне влияния хвостохранилищ, распространена и устойчива радиофобия, то есть боязнь радиации. Радиофобия связана не столько с опасностью прорыва хвостохранилищ, сколько с тем, что о реальных его характеристиках и свойствах население не имеет полной и, самое главное, достоверной информации.

Другая реальная проблема хвостохранилищ исследуемой территории в настоящее время – это отсутствие базы данных. Несмотря на жизненную важность проблемы, до сих пор нет кадастра хвостохранилищ республики.

Эксперты, как международного, так и регионального уровней, единодушны в том, что токсичные хвостохранилища в рудных полях потенциально представляют угрозу лишь для местных жителей, а в целом хвостохранилища рудного поля не представляют высокой опасности, если только умышленно не проникать в эти хранилища. По их мнению, основная потенциальная угроза связана с возможным размывом этих хвостохранилищ, попаданием загрязненной воды в водоемы, которые могут использоваться для питья и полива.

Все токсичные хвостохранилища и отвалы пород рудного поля оцениваются как низкоактивные отходы. Однако, поскольку они расположены вблизи населенных пунктов, пойм рек, в сейсмоактивной зоне, то могут представлять опасность для населения и территории, а также компонентов среды воздуха, почвы, воды, растений и животных. С учетом перечисленных факторов, хвостохранилища региона представляют серьезную угрозу части Зеравшанской долины, особенно для её нижнего течения.

Среднестатистическое радиоэкологическое состояние и степень опасности хвостохранилищ находятся на околосреднем уровне и классифицируются как некритичные.

Однако хвостохранилища горнопромышленных предприятий по многим международным общепринятым параметрам не отвечают требованиям радиационной безопасности и требуют проведения неотложных реабилитационных работ. Сейчас очевидно, что без содействия международных организаций и доноров полностью реабилитировать хвостохранилища этих предприятия затруднительно.

Поступило 04.03.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Влияние горнопромышленного производства на геохимическое загрязнение прилегающих территорий. – Сб. научных трудов Московского горного института, вып. 1. – М.: Недра, 1991.
2. Абдурахимов С.Я. Геоэкологические проблемы техногенеза на территории Северного Таджикистана. – Пермь: Изд. ПГУ, 2003, 147 с.
3. Беккер А.А., Агаев Т.Б. Охрана и контроль загрязнения природной среды. – Душанбе: Гидрометеоиздат, 1989.
4. Айтматов И.Т., Алешин Ю.Г., Торгоев И.А. Высокогорные хвостохранилища: концептуальные основы обеспечения безопасности. – Известия Национальной академии наук КР, 2011, № 1, с. 53-63.
5. Беляев А.М. Радиоэкология: Учебное пособие. – М.: Просвещение, 2007, 215 с.

С.Нусратулло

ТАЪСИРИ КОРХОНАҲОИ САНОАТИ КЌҲКОРИИ МАЙДОНИ МАЪДАНИИ ЧОРЕ БА МУҲИТИ ЗИСТ

Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар минтақаи таҳқиқот ҳамаи конҳо ва пайдоишҳо аз ҷиҳати таркиби минералогӣ якхеланд, ки коркарди онҳо бо роҳи нақшаи технологияи коркарди ягонаи маъдан мувофиқ аст.

Аз ин сабаб, минтақа ҳамчун манбаи бузурги ашёи минералӣ барои тараққиёти саноати истихроҷӣ тилло, ки айни замон дорои захираҳои бузурги геологӣ-иктишофи ва пешгӯи мебошанд, ба ҳисоб меравад.

Ҳамаи партовгоҳҳои захролуди саноати кўҳӣ ҳамчун ҷойи нигоҳдорӣ ва дафни партовҳои захролуд дар ҳолати риоя гардидани меъёрҳои сохтмонӣ ва истифодабарӣ ҳатарнок нестанд.

Хавфҳои геоэкологӣ дар ҳолате пайдо мешававанд, ки ин талаботҳо қасдан риоя намегарданд барои мисол, шусташавии партовҳо, омехташавии обҳои ифлос бо обҳои зеризаминӣ, зарфҳои обнигоҳдорӣ, паҳншавии бодҳо ва ғайра.

Калимаҳои калидӣ: маъданпайдошавӣ, захираҳои пешгӯӣ, партовгоҳҳо, базаи ашёи минералӣ, партовҳои захролуд, тӯдаҳои ҷинсҳои кўҳӣ, корҳои геологӣ-иктишофӣ, кон, хавфҳои геоэкологӣ.

S.Nusratullo

IMPACT OF MINING ENTERPRISES OF THE CHORE ORFIELD ON THE ENVIRONMENT

Institute of Geologi, Earthquake Engineering and Seismology,

National of Academy Sciences of Tajikistan

In this article all deposits and ore occurrences are similar in mineral composition, which implies their processing using a single technological scheme for processing ore are present. In this regard, this region

can be considered as an aspect of a large mineral resource base for the development of the gold mining industry, which already has significant geological exploration reserves and predicted resources.

The entire tailing dump of a mining enterprise as a facility for the storage or disposal of toxic waste, if the standards are observed during their construction and operation, does not pose an imminent danger.

Geo-environmental risks will occur when these norms are deliberately or intentionally violated, for example, by erosion of a tailing dump, the ingress of polluted water into groundwater, reservoirs, wind removal, etc.

Key words: *ore occurrence, predicted resources, tailings, mineral resource base, toxic waste, rock dumps, geological exploration, manifestation, deposit, geoecological risks.*

Сведения об авторах:

Сафари Нусратулло – соискатель Института геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана. E-mail: safari_nusratullo@mail.ru.