

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- З.Х.Рахмонов.** Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля365
- М.Ш.Шабозов, Г.А.Юсупов.** О наилучшем полиномиальном приближении аналитических функций в пространстве Харди.....372
- Д.А.Кодиров.** О наилучшем приближении функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля в L_2 и некоторые применения к специальным функциям.....379
- И.К.Курбанов, Д.С.Сафаров.** Точное ограниченное и периодическое решение обобщенного уравнения Бюргерса-Кортевега-де Фриза с постоянными отклоняющимся аргументами393
- М.Илолов, Ф.Раимзода.** Решение одной пространственно-одномерной линейной задачи с функциональными условиями.....400
- Н.Раджабов.** Переопределенная система интегральных уравнений по цилиндрической области, когда основным уравнением является второе уравнение408

АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Кохирова, Ф.Дж.Рахматуллаева, Д.Л.Горшанов, В.Н.Львов, А.В.Девяткин, М.Н.Латипов.** Наблюдения покрытия звезды спутником Нептуна Тритоном в обсерватории Сангloch417

ФИЗИКА

- З.Умар, М.У.Шодиев, М.С.Курбониён, Томоюки Ямамото, Ф.Рахими.** Первопринципные расчеты электронной структуры KMgF_3 , легированного ионами Sr^{3+} под давлением426

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

- И.И.Каландарбеков.** Моделирование каркасных зданий с элементами сейсмоизоляции на основе теории подобия.....434

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- К.И.Нематуллоев, Н.А.Ашурзода, А.С.Курбонов, И.М.Рахимов, У.М.Мирсаидов.** Спекательный способ разложения магнетитовой руды месторождения Харангон Таджикистана.....439
- У.Раджабов, С.Г.Ёрмамадова, К.У.Бойназарова.** Физико-химических свойств координационного соединения серебра(I) с альбендазолом.....445

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- В.Д.Абулхаев, М.А.Балаев, Х.Х.Назарзода, Б.Д.Сайдалиев, С.О.Убайдов, И.Н.Ганиев.** Диаграмма состояния и магнитные свойства твёрдых растворов системы $\text{Tb}_4\text{Sb}_3\text{-Yb}_4\text{Sb}_3$453

ФИЗИОЛОГИЯ И БИОХИМИЯ РАСТЕНИЙ

Ш.А.Байрамбекова, М.Б.Ниязмухамедова, М.М.Рахимов. Содержание пластидных пигментов у некоторых сортов ячменя, выращенных в условиях богары.....**458**

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

Л.М.Балхова. Содержание фотосинтетических пигментов в листьях некоторых сортов сафлора**464**

БИОХИМИЯ

З.Б.Давлятназарова. Ферментативные пути адаптации растений в условиях стресса.....**470**

CONTENTS

MATHEMATICS

- Z.Kh.Rakhmonov.** Average value of H.Weil's short exponential sums.....365
- M.Sh.Shabozov, G.A.Yusupov.** On the best polynomial approximation of analytic functions in the Hardy space372
- D.A.Qodirov.** On the best approximation of functions by Fourier series with respect to the eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem in L_2 and some applications to special functions379
- I.K.Kurbanov, D.S.Safarov.** Exact bounded and periodic solution of the generalized Burgers-Korteweg-de Vries equation with constant deviations of the argument393
- M.Ilolov, F.Raimzoda.** Solution of a spatial-one-dimensional linear problem with functional conditions400
- N.Rajabov.** Over determined sistem integral equations by silindtrical domain, when fundamental equation is second equation.....408

ASTRONOMY

- G.I.Kokhirova, F.D.Rakhmatullaeva, D.L.Gorshanov, V.N.L'vov, A.V.Devyatkin, M.N.Latipov.** Observations of the occultation of a star by Neptune's satellite Triton at Sanglokh observatory417

PHYSICS

- Z.Umar, M.U.Shodiev, M.Subhoni, Tomoyuki Yamamoto, F.Rahimi.** The first-principles calculations of the electronic structure of Cr^{4+} doped KMgF_3 426

STRUCTURAL MECHANICS

- I.I.Kalandarbekov.** Modeling of frame with seismic isolation elements based on the theory of similarity.....434

INORGANIC CHEMISTRY

- K.I.Nematulloev, N.A.Ashurzoda, A.S.Kurbonov, I.M.Rakhimov, U.M.Mirsaidov.** Special method of decomposition of magnetite ore of the Kharangon deposit of Tajikistan439
- U.R.Rajabov, S.G.Yormamadova, K.U.Bounazarova.** Study of the physico-chemical properties of the coordination compound of silver (I) with albenzazole445

PHYSICAL CHEMISTRY

- V.D.Abulkhaev, M.A.Balaev, Kh.Kh.Nazarzoda, B.D.Saydaliev, S.O.Ubaydov, I.N.Ganiev.** State diagram and magnetic properties of solid solution of the $\text{Tb}_4\text{Sb}_3\text{-Yb}_4\text{Sb}_3$ system453

PLANT PHYSIOLOGY AND BIOCHEMISTRY

Sh.A.Bairambekova, M.B.Niyazmukhamedova, M.M.Rahimov. Content of plastid pigments in some varieties of barley grown under the conditions of bogara458

PLANT PHYSIOLOGY

L.M.Balkhova. Content of photosynthetic pigments in the leaves of certain saflor varieties464

BIOCHEMISTRY

Z.B.Davlyatnazarova. Enzymatic pathways of plant adaptation under stress conditions470

УДК 511.344

Специальность: 1.1.5. – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Академик НАН Таджикистана З.Х.Рахмонов

СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ КОРОТКИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

Г.ВЕЙЛЯ

*Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана**Обобщена теорема Хуа Ло-кена для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида*

$$T_n(\alpha, x) = \sum_{m \leq x} e(\alpha m^n),$$

а именно найдены правильные по порядку оценки интегралов по периоду от степени модуля этих сумм.

Ключевые слова: короткая тригонометрическая сумма, диофантово уравнение, тригонометрический интеграл, конечные разности.

Хуа Ло-кен ([1] лемма 2.5), для средних значений сумм Вейля вида

$$T_n(\alpha, x) = \sum_{m \leq x} e(\alpha m^n)$$

при фиксированном натуральном n получил правильную по порядку оценку

$$\int_0^1 |T_n(\alpha; x)|^{2^k} d\alpha \ll x^{2^k - k + \varepsilon}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

В работах [2-4] оценка Хуа Ло-кена обобщена для коротких тригонометрических сумм Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m < x} e(\alpha m^n)$$

при $n = 3; 4; 5$, то есть для среднего значения таких сумм получена правильная по порядку оценка

$$\int_0^1 |T_n(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \ll y^{2^k - k + \varepsilon}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

соответственно были приложены при выводе асимптотических формул в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми [4-6].

В этой работе мы обобщаем теорему Хуа Ло-кена для коротких тригонометрических сумм Вейля произвольного порядка.

Адрес для корреспонденции: Рахмонов Зарулло Хусенович. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: zarullo-r@rambler.ru

Теорема. Пусть x и y – натуральные числа, $\sqrt{x} < y \leq x\mathcal{L}^{-1}$, n – произвольное фиксированное натуральное число, тогда имеет место оценка

$$\int_0^1 |T_n(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \ll y^{2^k - k + \varepsilon}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Пусть Δ_k означает k -ое применение разностного оператора, так что для любой функции действительного переменного $f(u)$

$$\Delta_1(f(u); h) = f(u + h) - f(u),$$

$$\Delta_{k+1}(f(u); h_1, \dots, h_{k+1}) = \Delta_1(\Delta_k(f(u); h_1, \dots, h_k); h_{k+1}). \tag{1}$$

Лемма 1. При $k = 1, \dots, n-1$ имеет место соотношение

$$\Delta_k(u^n; h_1, \dots, h_k) = h_1 \dots h_k g_k(u; h_1, \dots, h_k),$$

где $g_k = g_k(u; h_1, \dots, h_k)$ является формой $n-k$ -го порядка с целыми коэффициентами, имеющей относительно u степень $n-k$ и старший коэффициент $n(n-1)\dots(n-k+1)$, то есть

$$g_k(u; h_1, \dots, h_k) = \frac{n!}{(n-k)!} u^{n-k} + \dots$$

Доказательство. Применяя формулу (1), найдём

$$\Delta_1(u^n; h_1) = (u + h_1)^n - u^n = \sum_{i=1}^n C_n^i h_1^i u^{n-i},$$

$$\Delta_2(u^n; h_1, h_2) = \Delta_1(\Delta_1(u^n; h_1); h_2) = \Delta_1\left(\sum_{i=1}^n C_n^i h_1^i u^{n-i}; h_2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n C_n^i h_1^i (u + h_2)^{n-i} - \sum_{i=1}^n C_n^i h_1^i u^{n-i} = \sum_{i=1}^n C_n^i h_1^i \sum_{j=1}^{n-i} C_{n-i}^j h_2^j u^{n-i-j}.$$

Последовательно применяя формулу (1), легко можно показать, что при $k = 1, 2, \dots, n-1$ имеет место

$$\Delta_k(u^n; h_1, \dots, h_k) = \sum_{i_1=1}^n C_n^{i_1} h_1^{i_1} \sum_{i_2=1}^{n-i_1} C_{n-i_1}^{i_2} h_2^{i_2} \dots \sum_{i_k=1}^{n-i_1-\dots-i_{k-1}} C_{n-i_1-\dots-i_{k-1}}^{i_k} h_k^{i_k} u^{n-i_1-\dots-i_k}.$$

Из этой формулы следует, что имеет место формула

$$\Delta_k(u^n; h_1, \dots, h_k) = h_1 \dots h_k g_k(u; h_1, \dots, h_k),$$

где $g_k = g_k(u; h_1, \dots, h_k)$ является формой $n - k$ -го порядка с целыми коэффициентами, имеющей относительно u степень $n - k$ и старший коэффициент $n(n - 1) \dots (n - k + 1)$, то есть

$$g_k(u; h_1, \dots, h_k) = \frac{n!}{(n - k)!} u^{n - k} + \dots .$$

Лемма 2. Пусть $f(m)$ – многочлен степени n , x и y – целые положительные числа, $y < x$,

$$\mathbb{T}(f(m); x, y) = \sum_{x - y < m \leq x} e(f(m)),$$

тогда при $k = 1, \dots, n - 1$ имеет место

$$|\mathbb{T}(f(m); x, y)|^{2^k} \leq (2y)^{2^k - k - 1} \sum_{|h_1| < y} \dots \sum_{|h_k| < y} \mathbb{T}_j, \mathbb{T}_k = \left| \sum_{m \in I_k} e(\Delta_k(f(m); h_1, \dots, h_k)) \right|,$$

где интервалы $I_k = I_k(x, y; h_1, \dots, h_k)$ определяются соотношениями:

$$I_1 = I_1(x, y; h_1) = (x - y, x] \cap (x - y - h_1, x - h_1],$$

$$I_k = I_k(x, y; h_1, \dots, h_k) = I_{k-1}(x, y; h_1, \dots, h_{k-1}) \cap I_{k-1}(x - h_k, y; h_1, \dots, h_{k-1}),$$

то есть, интервал $I_{k-1}(x - h_k, y; h_1, \dots, h_{k-1})$ получается из $I_{k-1} = I_{k-1}(x, y; h_1, \dots, h_{k-1})$ сдвигом на $-h_k$ всех интервалов, пересечением которых он является.

Доказательство. Доказательство проводим методом математической индукции по k . При $k = 1$ имеем

$$\begin{aligned} |\mathbb{T}(f(m); x, y)|^2 &= \sum_{x - y < m \leq x} \sum_{x - y - m < h \leq x - m} e(f(m + h) - f(m)) = \\ &= \sum_{|h| < y} \sum_{m \in I_1} e(\Delta_1(f(m); h)) \leq \sum_{|h| < y} \mathbb{T}_1. \end{aligned}$$

Предположим, что утверждение леммы выполняется при k , $1 \leq k \leq n - 2$, то есть

$$|\mathbb{T}(f(m); x, y)|^{2^k} \leq (2y)^{2^k - k - 1} \sum_{|h_1| < y} \sum_{|h_2| < y} \dots \sum_{|h_k| < y} \mathbb{T}_k.$$

Возводя обе части этого неравенства в квадрат, затем последовательно применяя к суммам по h_1, \dots, h_k неравенство Коши, найдём

$$|\mathbb{T}(f(m); x, y)|^{2^{k+1}} \leq (2y)^{2^{k+1} - (k+1) - 1} \sum_{|h_1| < y} \dots \sum_{|h_k| < y} \mathbb{T}_k^2. \tag{2}$$

Из эквивалентности соотношений $m_1 \in I_k(x, y; h_1, \dots, h_k)$ и $m_1 - m \in I_k(x - m, y; h_1, \dots, h_k)$ имеем

$$\mathbb{T}_k^2 = \sum_{m \in I_k(x, y; h_1, \dots, h_k)} \sum_{m_1 - m \in I_k(x - m, y; h_1, \dots, h_k)} e(\Delta_k(f(m_1); h_1, \dots, h_k) - \Delta_k(f(m); h_1, \dots, h_k)).$$

Обозначая разность $m_1 - m$ через h_{k+1} , затем сделав сумму по h_{k+1} внешней, воспользовавшись эквивалентностью соотношений $h_{k+1} \in I_k(x - m, y; h_1, \dots, h_k)$ и $m \in I_k(x - h_{k+1}, y; h_1, \dots, h_k)$ и соотношением (1), имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_k^2 &= \sum_{|h_{k+1}| < y} \sum_{\substack{m \in I_k(x, y; h_1, \dots, h_k) \\ m \in I_k(x - h_{k+1}, y; h_1, \dots, h_k)}} e(\Delta_{k+1}(f(m); h_1, \dots, h_{k+1})) = \\ &= \sum_{|h_{k+1}| < y} \sum_{m \in I_{k+1}(x, y; h_1, \dots, h_{k+1})} e(\Delta_{k+1}(f(m); h_1, \dots, h_{k+1})) \leq \sum_{|h_{k+1}| < y} \mathbb{T}_{k+1}. \end{aligned}$$

Подставляя правую часть последнего неравенства в (2), получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы. Воспользуемся методом математической индукции по k . При $k = 1$, воспользовавшись тем, что при $x - y < m_1, m_2 \leq x$ диофантовы уравнения $m_1^n = m_2^n$ и $m_1 = m_2$ эквивалентны, имеем

$$\int_0^1 |T_n(\alpha; x, y)|^2 d\alpha = \sum_{x-y < m_1, m_2 \leq x} \int_0^1 e(\alpha(m_1^n - m_2^n)) d\alpha = \sum_{x-y < m_1 \leq x} 1 \ll y.$$

Пусть теперь утверждение теоремы имеет место при $2 \leq k \leq n - 1$, то есть

$$\int_0^1 |T_n(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \leq y^{2k-k+\varepsilon}. \tag{3}$$

В лемме 2, полагая $f(m) = \alpha m^n$, имеем

$$|T_n(\alpha; x, y)|^{2^k} \leq (2y)^{2^k - k - 1} \sum_{|h_1| < y} \dots \sum_{|h_k| < y} \left| \sum_{m \in I_k} e(\alpha \Delta_k(m^n; h_1, \dots, h_k)) \right|.$$

Воспользовавшись леммой 1, находим

$$\Delta_k(m^n; h_1, \dots, h_k) = h_1 \dots h_k g_k(m; h_1, \dots, h_k),$$

где $g_k = g_k(m; h_1, \dots, h_k)$ является формой $n - k$ -го порядка с целыми коэффициентами, имеющей относительно m степень $n - k$ и старший коэффициент $n(n - 1) \dots (n - k + 1)$, то есть

$$g_k(m; h_1, \dots, h_k) = \frac{n!}{(n - k)!} m^{n - k} + \dots .$$

Отсюда и из условий $x - y < m \leq x$, $|h_i| < y$, $i = 1, \dots, k$, $\sqrt{x} < y \leq x \mathcal{L}^{-1}$ следует, что существует x_0 такое, что при $x > x_0$ выполняется неравенство

$$g_k(m; h_1, \dots, h_k) > 0. \tag{4}$$

Обозначая через $r(h)$ – число решений диофантова уравнения

$$h_1 \dots h_k g_k(m; h_1, \dots, h_k) = h,$$

относительно переменных m и $h_1 \dots h_k$, $|h_i| < y$, $m \in I_k$, найдём

$$|T_n(\alpha; x, y)|^{2^k} \leq (2y)^{2^k - k - 1} \sum_h r(h) e(\alpha h), \tag{5}$$

Заметим, что если $h \neq 0$, то $r(h) \ll \tau_{k+1}(h) \ll h^\epsilon$. Из неравенства (4) следует, что уравнение

$$h_1 \dots h_k g_k(m; h_1, \dots, h_k) = 0$$

имеет только решение вида $(0, h_2, \dots, h_k, m)$, $(h_1, 0, h_3, \dots, h_k, m)$, ..., $(h_1, \dots, h_{k-1}, 0, m)$, для количества которых справедлива оценка

$$r(0) \leq \sum_{|h_2| < y} \dots \sum_{|h_k| < y} \sum_{m \in I_3} 1 \leq (2y)^{k-1} |I_k| \leq 2^{k-1} y^k.$$

С другой стороны,

$$|T_n(\alpha; x, y)|^{2^k} = \sum_h \rho(h) (-\alpha h), \tag{6}$$

где $\rho(h)$ – число решений уравнения

$$s_1^n + \dots + s_v^n - t_1^n - \dots - t_v^n = h, \quad x - y < s_1, t_1, \dots, s_v, t_v \leq x, \quad v = 2^{k-1}.$$

В равенстве (6), полагая $\alpha = 0$, находим

$$\sum_h \rho(h) = |T(0; x, y)|^{2^k} \leq y^{2^k}. \tag{7}$$

Пользуясь предположением индукции, то есть соотношением (3), найдём

$$\rho(0) = \int_0^1 |T_n(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \leq y^{2^k - k + \epsilon}.$$

Умножая (5) и (6), интегрируя по α , а затем воспользовавшись значениями $r(0)$, ρ , оценкой $r(h) \ll h^\epsilon$ и соотношением (7), найдём

$$\begin{aligned} \int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^{2^{k+1}} d\alpha &\leq (2y)^{2^k - k - 1} \int_0^1 \sum_h r(h) e(\alpha h) \sum_{h'} \rho(h') e(-\alpha h') d\alpha = \\ &= (2y)^{2^k - k - 1} \left(r(0)\rho(0) + \sum_{h \neq 0} r(h)\rho(h) \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq (2y)^{2^k - k - 1} \left(r(0)\rho(0) + \max_{h \neq 0} r(h) \sum_{h \neq 0} \rho(h) \right) \ll$$

$$\ll y^{2^k - k - 1} \left(y^k \cdot y^{2k - k + \varepsilon} + y^\varepsilon \cdot y^{2^k} \right) \ll y^{2^{k+1} - k - 1 + \varepsilon}.$$

Поступило 17.05.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вон Р. Метод Харди-Литтлвуда. – М.: Изд-во Мир, 1985, 184 с.
2. Азамов А.З. Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени. – ДАН РТ, 2011, т. 54, №1, с. 13-17.
3. Назрублов Н.Н. О среднем значении коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени. – ДАН РТ, 2014, т. 57, №7, с. 531-537.
4. Рахмонов З.Х., Назрублов Н.Н., Рахимов А.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения. – Чебышевский сборник, 2015, т. 16, в. 1(53), с. 232-247.
5. Рахмонов З.Х., Азамов А.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми. – ДАН РТ, 2011, т. 54, №3, с. 165-172.
6. Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля. – Ученые записки Орловского университета, серия естественные, технические и медицинские науки, 2012, 6, часть 2, с. 194-203.

З.Х.Рахмонов

ҚИМАТИ МИЁНАИ СУММАҶОИ КҶТОҶИ ТРИГОНОМЕТРИИ Г.ВЕЙЛ

Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Теоремаи Хуа Ло-кен барои суммаҳои тригонометрии кӯтоҳ Г.Вейли намуди

$$T_n(\alpha, x) = \sum_{m \leq x} e(\alpha m^n),$$

умумӣ карда шудааст, яъне баҳоҳои тартибашон дурусти интегралҳо аз модулҳои дараҷаи ин суммаҳо аз рӯи даврашон ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *суммаи кӯтоҳи тригонометрӣ, муодилаи диофантӣ, интегралҳои тригонометрӣ, фарқҳои охирнок.*

Z.Kh.Rakhmonov

AVERAGE VALUE OF H.WEIL’S SHORT EXPONENTIAL SUMS

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan

The theorem of Hua Lo-Keng for short exponential sums of G. Weyl of the form

$$T_n(\alpha, x) = \sum_{m \leq x} e(\alpha m^n),$$

is generalized: namely, estimates of the integrals over the period of the degree of modulus of these sums, which are correct in order, are found.

Key words: *short exponential sum, diophantine equation, exponential integral, finite differences.*

Сведения об авторе:

1. **Рахмонов Зарулло Хусенович** – доктор физ.-мат. наук, профессор, академик НАН Таджикистана, Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, директор.

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Академик НАН Таджикистана М.Ш.Шабозов, Г.А.Юсупов*

**О НАИЛУЧШЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ***Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана,***Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни*

В работе решается ряд экстремальных задач наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди. Найдены точные неравенства между наилучшим полиномиальным приближением аналитических в круге функций и усреднённым модулем непрерывности угловых граничных значений производных старшего порядка. Для некоторых классов функций, с ограниченной по норме старшего производной, найдены точные значения верхних граней наилучших приближений и вычислены значения колмогоровских и бернштейновских n -поперечников.

Ключевые слова: *наилучшее полиномиальное приближение, пространство Харди, модуль непрерывности, мажоранта, n -поперечники.*

Вычислению точных значений различных n -поперечников классов аналитических в круге функций в различных нормированных пространствах посвящено достаточно много работ (см., например, [1-12]). Следует отметить, что первые результаты, связанные с вычислением колмогоровских n -поперечников в пространстве Харди H_q ($1 \leq q \leq \infty$), принадлежат В.М.Тихомирову [1] ($q = \infty$) и Л.В.Тайкову [2] ($1 \leq q < \infty$). Ранее в работе К.И.Бабенко [3] был получен линейный метод аппроксимации одного класса функций, аналитических в единичном круге, пригодный для оценок поперечников сверху и использованный в [1] и [2], а также во многих других работах. В дальнейшем эта тематика развивалась как в работе Л.В.Тайкова [4], так и в работах других математиков (например, в [5-12]).

Целью данной работы является получение новых результатов, связанных с вычислением точных значений колмогоровских и бернштейновских n -поперечников классов функций, аналитических в произвольном круге радиуса R .

Введём нужные нам в дальнейшем обозначения и определения. Пусть \mathbb{N} , \mathbb{Z}_+ , \mathbb{R}_+ , \mathbb{R} , \mathbb{C} – соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, положительных, вещественных и комплексных чисел; $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг радиуса R в комплексной плоскости \mathbb{C} , $A(U_R)$

Адрес для корреспонденции: Юсупов Гулзорхон Амиришович. 734003, Республика Таджикистан, г.Душанбе, проспект Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни.
E-mail: yusufzoda.gulzorkhon@gmail.com

– множество аналитических в круге U_R функций. Для произвольной функции $f \in A(U_R)$ при $0 < \rho < R$ положим

$$M_q(f, \rho) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty; \\ \max_{0 \leq t < 2\pi} |f(\rho e^{it})|, & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Символом $H_{q,R}$ ($1 \leq q \leq \infty$) обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{q,R} := \|f\|_{H_{q,R}} = \lim_{\rho \rightarrow R-0} M_q(f, \rho).$$

Хорошо известно [13, с.279], что почти везде на окружности $|\zeta| = R$ существуют угловые граничные значения $f(Re^{it}) \in L_q[0, 2\pi]$ ($1 \leq q \leq \infty$), причём норма $f \in H_{q,R}$ определяется равенством

$$\|f\|_{q,R} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty; \\ \text{esssup}\{|f(Re^{it})| : 0 \leq t < 2\pi\}, & q = \infty. \end{cases}$$

В случае $R = 1$ полагаем $U := U_1, H_q = H_{q,1}$ и $\|f\|_q := \|f\|_{q,1}$.

Далее для $r \in \mathbb{Z}_+$ введём обозначение

$$H_{q,R}^{(r)} := \{f \in A(U_R) : f^{(r)} \in H_{q,R}\} \quad (H_{q,R}^{(0)} \equiv H_{q,R}),$$

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f(z)}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

где ради удобства обозначено

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1), \quad k \geq r, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad \alpha_{k,0} \equiv 1, \quad \alpha_{k,1} = k.$$

Пусть

$$\mathcal{P}_n := \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

– множество комплексных алгебраических полиномов степени не более n .

Равенством

$$E_{n-1}(f)_{q,\rho} := \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{q,\rho} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in H_{q,\rho}$ в метрике пространства $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R$).

Приводим формулировки основных результатов данной статьи.

Теорема 1. Для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(r)}$ и любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+, n \geq r, 0 < \rho < R, 1 \leq q \leq \infty$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_{q,\rho} \leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} E_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R} \tag{1}$$

и знак равенства в (1) достигается для функции $f_0(z) = az^n, a \in \mathbb{C}$.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 имеет место равенство

$$\sup_{f \in H_{q,R}^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{q,\rho}}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R}} = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}}.$$

Обозначим через $W^{(r)}H_{q,R} := W^{(r)}H_q(U_R)$ – класс функций $f \in H_{q,R}^{(r)}$, у которых производная $f^{(r)} \in H_{q,R}$ удовлетворяет неравенству $\|f^{(r)}\|_{q,R} \leq 1$. Положим также

$$E_{n-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} := \sup \{E_{n-1}(f)_{q,\rho} : f \in W^{(r)}H_{q,R}\}.$$

Теорема 2. Для любых чисел $n, r \in \mathbb{N}, n > r$ при всех $1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R$ справедливо равенство

$$E_{n-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \tag{2}$$

Доказательство. Так как для любой функции $f \in W^{(r)}H_{q,R}$ величина её наилучшего приближения производной $f^{(r)}$ удовлетворяет соотношению

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{q,R} \leq \|f^{(r)}\|_{q,R} \leq 1,$$

то из неравенства (1) сразу следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (2)

$$E_{n-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} \leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \tag{3}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу указанной величины, воспользуемся функцией

$$f_1(z) = \frac{z^n}{R^{n-r} \alpha_{n,r}}, \text{ принадлежащей классу } W^{(r)}H_{q,R}, \text{ и так как}$$

$$E_{n-1}(f_1)_{q,\rho} = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}},$$

то имеем оценку снизу

$$E_{n-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} \geq E_{n-1}(f_1)_{q,\rho} = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \tag{4}$$

Сопоставляя неравенства (3) и (4), получаем требуемое равенство (2), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Займёмся теперь получением оценкой наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{q,\rho}$ через усредненное значение модуля непрерывности $\omega(f^{(r)}, t)_{q,R}$.

Для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(r)}$ модуль непрерывности производной $f^{(r)}$ определим равенством

$$\omega(f^{(r)}, t)_{q,R} := \sup_{|h| \leq t} \| f^{(r)}(Re^{i(+h)}) - f^{(r)}(Re^{i(\cdot)h}) \|_q.$$

Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$. Тогда для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(r)}$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_{q,\rho} \leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{n-r}{4\alpha_{n,r}} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega(f^{(r)}, t)_{q,R} dt,$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Прежде чем излагать другие результаты, напомним нужные нам далее необходимые понятия и определения. Пусть S – единичный шар в $H_{q,\rho}$; \mathfrak{M} – выпуклое центрально-симметричное множество из $H_{q,\rho}$; $\mathcal{L}_n \subset H_{q,\rho}$ – n -мерное подпространство. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}; H_{q,\rho}) = \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}_{n+1} \subset H_{q,\rho} \right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}; H_{q,\rho}) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \| f - \varphi \| : \varphi \in \mathcal{L}_n \} : f \in \mathfrak{M} \right\} : \mathcal{L}_n \in H_{q,\rho} \right\},$$

называют соответственно *бернштейнтовым* и *колмогоровским* n -поперечниками множества \mathfrak{M} в $H_{q,\rho}$. Указанные n -поперечники монотонно убывают при возрастании n и связаны неравенством [14]:

$$b_n(\mathfrak{M}, H_{q,\rho}) \leq d_n(\mathfrak{M}, H_{q,\rho}).$$

Пусть функция $\Phi(u)$ определена, неотрицательна, выпукла вниз на отрезке $[0, \pi]$, $\lim_{u \rightarrow 0^+} \Phi(u) = \Phi(0) = 0$ и для любых $\lambda \in [0, 1]$ и $t \in (0, \pi]$ удовлетворяет неравенству

$$2\sin^2 \frac{\pi}{4} \lambda \leq \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)} \leq \frac{\lambda}{\pi/2 - (\pi/2 - 1)\lambda}. \tag{5}$$

Класс $W_{q,R}^{(r)}(\Phi)$, ($r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$), состоит из всех функций $f \in H_{q,R}^{(r)}$, для которых при любом $k \in \mathbb{N}$ выполняется условие

$$\int_0^{\pi/k} \omega(f^{(r)}, t)_{q,R} dt \leq \Phi\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

В [15] доказано, что среди всех функций вида $\Phi(t) = t^{1+\alpha}$, где $0 \leq \alpha \leq 1$ только одна функция со значением $\alpha = \pi/2 - 1$ удовлетворяет ограничению (5). Сформулируем основной результат работы.

Теорема 4. Пусть $0 < \rho \leq R, 1 \leq q \leq \infty, n, r \in \mathbb{N}, n > r$ и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (5). Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} b_n(W_{q,R}^{(r)}(\Phi), H_{q,\rho}) &= d_n(W_{q,R}^{(r)}(\Phi), H_{q,\rho}) = \\ &= E_{n-1}(W_{q,R}^{(r)}(\Phi))_{q,\rho} = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{n-r}{4\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right), \end{aligned}$$

где

$$E_{n-1}(W_{q,R}^{(r)}(\Phi))_{q,\rho} := \sup \{E_{n-1}(f)_{q,\rho} : f \in W_{q,R}^{(r)}(\Phi)\}.$$

Поступило 22.05.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. – УМН, 1960, т. 15, №3, с. 81-120.
2. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций. – Мат. заметки, 1967, т. 1, №2, с. 155-162.
3. Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций. – Изв. АН СССР. Сер. матем, 1958, т. 22, №5, с. 631-640.
4. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1977, т. 22, №2, с. 285-292.
5. Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций. – Теория отображений и приближение функций. Киев: Наукова думка, 1983, с. 63-73.

6. Farkov Yu.A. Stessin M.I. The n -width of the unit ball of H^q . – Journal of Approx. Theory, 1991, vol. 67, №3, pp. 347-356.
7. Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo, 1985, 252 p.
8. Вакарчук С.Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения. – Мат. заметки, 2002, т. 72, №5, с. 665-669.
9. Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости. – Укр. матем. журнал, 2004, т. 56, №9, с. 1155-1171.
10. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 . – Мат. заметки, 2000, т. 68, №5, с. 796-800.
11. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций. – Докл. РАН, 2002, т. 382, №6, с. 747-749.
12. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге. – Мат. сборник, 2010, т. 201, №8, с. 3-22.
13. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.-Л.: Наука, 1964, 440 с.
14. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976, 304 с.
15. Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 . – Матем. заметки, 1977, т. 22, №4, с. 535-542.

М.Ш.Шабозов, Г.А.Юсупов*

ОИД БА НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ПОЛИНОМИАЛИИ ФУНКСИЯҲО ДАР ФАЗОИ ХАРДИ

Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

**Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ*

Дар мақола як қатор масъалаҳои экстремалии наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияҳои дар давра аналитикӣ, ки ба фазои Харди тааллуқ доранд, ҳал карда шудаанд. Нобаробариҳои аниқ байни наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияҳои дар давра аналитикӣ ва модули бефосилагии миёнакардашудаи қимати сарҳади кунҷии ҳосилаҳои тартиби олии ёфта шудаанд. Барои баъзе синфи функсияҳо, ки аз рӯи нормаи ҳосилаи тартиби олии маҳдуданд, қимати сарҳади аниқи болоии наздиккунии беҳтарин ва қимати кутрҳои колмогоровӣ ва бернштейнӣ ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарини полиномиалӣ, фазои Харди, модули бефосилагӣ, мажоранта, n -қутрҳо.

M.Sh.Shabozov, G.A.Yusupov*

ON THE BEST POLYNOMIAL APPROXIMATION OF ANALYTIC FUNCTIONS IN THE HARDY SPACE

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan,

**S.Aini Tajik State Pedagogical University*

In the paper, a number of extremal problems of the best polynomial approximation of functions analytic in a circle that belong to the Hardy space are solved. Exact inequalities are found between the best polynomial approximation of functions analytic in a circle and the averaged modulus of continuity of the angular boundary values of higher-order derivatives. For some classes of functions with bounded in the norm of the highest derivative, the exact values of the upper bounds of the best approximations are found and the values of the Kolmogorov and Bernstein n -widths are calculated.

Key words: *the best polynomial approximation, Hardy space, modulus of continuity, majorant, n -widths.*

Сведение об авторах:

1. **Шабозов Мирганд Шабозович** – доктор физ.-мат. наук, академик НАН Таджикистана, Таджикский национальный университет, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений;
2. **Юсупов Гулзорхон Амиршоевич** – доктор физ.-мат. наук, профессор, Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни, заведующий кафедрой математического анализа.

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д.А.Кодиров

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В L_2 И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ К СПЕЦИАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

*Таджикский национальный университет**(Представлено академиком НАНТ М.Ш.Шабозовым 24.04.2023 г.)*

В работе найдены точные верхние грани наилучших приближений суммами ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности. Введение такого модуля непрерывности функции оправдывается связью между скоростью сходимости наилучших приближений суммами Фурье и поведением ее обобщенного модуля непрерывности. Приводится также решение ряда экстремальных задач для конкретных специальных функций математической физики.

Ключевые слова: наилучшие приближения, обобщенный модуль непрерывности, задачи Штурма-Лиувилля.

1. Введение и постановка задачи. Пусть

$$\mathcal{D} := -\frac{1}{p(x)} \left(\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{d}{dx} \right) - q(x) \right)$$

– дифференциальный оператор второго порядка Штурма-Лиувилля, где функции $p(x), q(x) \in C[a, b]$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ для $x \in [a, b]$.

Напомним (см., например, [1, с.346]), что задача Штурма-Лиувилля состоит в отыскании решений на отрезке $[a, b]$ уравнения

$$\mathcal{D}u = \lambda u, \tag{1}$$

удовлетворяющего однородным краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, & \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \\ \gamma u(b) + \mu u'(b) = 0, & \gamma^2 + \mu^2 \neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Задачу (1)–(2) будем рассматривать как задачу на собственные значения оператора \mathcal{D} . При этом нетривиальные решения называются собственными функциями этой задачи, а значения λ , при

которых такие решения существуют, её собственными значениями. Приводим хорошо известные свойства собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ и собственных функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ оператора \mathcal{D} :

- 1) последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ монотонно возрастающая, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \dots$;
- 2) каждому λ_k соответствует единственная $u_k(x)$;
- 3) функции $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ образуют на отрезке $[a, b]$ ортогональную с весом $p(x)$ систему

$$\int_a^b p(x)u_k(x)u_n(x)dx = \begin{cases} \mu_k, & k = n \\ 0, & k \neq n, \quad k, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

которую в силу свойства 2 можно считать ортонормированной.

Пусть $L_2 := L_2(p(x), [a, b])$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f(x)$ с весом $p(x)$ и конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int_a^b p(x)f^2(x)dx \right)^{1/2};$$

- 4) система собственных функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ полна в L_2 ;
- 5) при граничных условиях $u(a) = u(b) = 0$ и $q(x) \geq 0$ значения $\lambda_n > 0$.

Всюду далее именно этот случай и будем рассматривать.

Пусть функция $f \in L_2$ разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty c_k(f)u_k(x), \quad c_k(f) = \int_a^b p(x)f(x)u_k(x)dx. \tag{3}$$

Через

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f)u_k(x) \tag{4}$$

обозначим частные суммы $(n-1)$ -го порядка ряда Фурье (3). Хорошо известно, что среди всех элементов подпространство обобщенных полиномов вида

$$\mathcal{P}_{n-1} := \left\{ p_{n-1}(x) : p_{n-1}(x) := \sum_{k=1}^{n-1} a_k u_k(x) \right\},$$

наименьшее значение величине

$$E_{n-1}(f) := \inf \{ \|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

доставляет частная сумма (4). При этом

$$E_{n-1}(f) = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

В пространстве L_2 определим оператор сдвига $\mathcal{F}_h : L_2 \rightarrow L_2$ равенством

$$\mathcal{F}_h f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(h) c_k(f) u_k(x), \quad (6)$$

где $\varphi_k(x)$ ($k \in \mathbb{N}, 0 < h \leq 1$) – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi_k(h) \neq \text{const}, \quad \varphi_k(h) \geq \varphi_{k+1}(h), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_k(h) = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 1} \varphi_k(h) = 0. \quad (7)$$

Из последних двух предельных соотношений вытекает, что при любом $h \in (0, 1], 0 \leq \varphi_k(h) \leq 1$. Очевидно, что $\mathcal{F}_h : L_2 \rightarrow L_2$ – линейный ограниченный оператор, обладающий следующими свойствами:

- 1) $\mathcal{F}_h(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \mathcal{F}_h f(x) + \mu \mathcal{F}_h g(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L_2;$
- 2) $\|\mathcal{F}_h f\| \leq \|f\|;$
- 3) $\mathcal{F}_h u_n(x) = \varphi_n(h) u_n(x), \quad n \in \mathbb{N};$
- 4) $\|\mathcal{F}_h - \mathbb{I}\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0+.$

Для произвольного вектора $f \in L_2$, как и в классическом случае, определим обобщенные конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h f(x) := \mathcal{F}_h f(x) - f(x) = (\mathcal{F}_h - \mathbb{I})f(x),$$

$$\Delta_h^m f(x) := \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (\mathcal{F}_h - \mathbb{I})^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \mathcal{F}_h^k f(x),$$

где $\mathcal{F}_h^0 f = \mathbb{I}f = f$, $\mathcal{F}_h^k f = \mathcal{F}_h(\mathcal{F}_h^{k-1} f)$, $k = \overline{1, m}, n \in \mathbb{N}$, \mathbb{I} – единичный оператор пространства L_2 .

Величину

$$\Omega_m(f, t) := \sup \{ \|\Delta_h^m f\| : 0 < h \leq t \}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 0 < t \leq 1 \quad (8)$$

назовём обобщённым модулем непрерывности функции $f \in L_2$. Пользуясь разложением функции $f \in L_2$ в ряд Фурье (3) и общим видом оператора сдвига (6), найдем явный вид конечных разностей и обобщенного модуля непрерывности (8). Имеем

$$\Delta_h f(x) = (\mathcal{F}_h - \mathbb{I})f(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \varphi_k(h)) c_k(f) u_k(x),$$

и для любого $m \in \mathbb{N}$ по индукции запишем

$$\Delta_h^m f(x) := (F_h - \mathbb{I})^m f(x) = (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \varphi_k(h))^m c_k(f) u_k(x). \tag{9}$$

Применяя равенство Парсеваля, в силу ортонормированности системы собственных функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ из (9), получаем

$$\|\Delta_h^m f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \varphi_k(h))^{2m} c_k^2(f). \tag{10}$$

Учитывая соотношения (7) и (10), запишем явный вид модуля непрерывности (8):

$$\Omega_m(f, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \varphi_k(t))^{2m} c_k^2(f). \tag{11}$$

Пусть $\mathcal{A} : L_2 \rightarrow L_2$ – симметричный оператор в пространстве L_2 , то есть оператор, заданный в некотором линейном многообразии $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subset H$, удовлетворяющий условию

$$(\mathcal{A}f, g) = (f, \mathcal{A}g)$$

для любых $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ (см., например [2, с.233]).

Пусть теперь оператор \mathcal{A} обладает полной ортонормированной системой собственных векторов $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\mathcal{A}u_k(x) = \lambda_k u_k(x), k \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

причём последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ является монотонно возрастающей:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots.$$

В этом случае из разложения в ряд Фурье (3) в силу (12) вытекает, что

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) \mathcal{A}u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k(f) u_k(x). \tag{13}$$

Если для $r \in \mathbb{Z}_+$ положить $\mathcal{A}^0 f = \mathbb{I}f = f$, $\mathcal{A}^r f = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$, то, пользуясь равенством (12) для любого $r \in \mathbb{N}$ из (13), будем иметь

$$\mathcal{A}^r f(x) := \mathcal{A}(\mathcal{A}^{r-1} f) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^r c_k(f) u_k(x). \tag{14}$$

Пользуясь полученным равенством, непосредственными вычислениями легко доказать, что

$$E_{n-1}^2(\mathcal{A}^r f) = \left\| \mathcal{A}^r f(\cdot) - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^r c_k(f) u_k(\cdot) \right\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2r} c_k^2(f), \tag{15}$$

$$\Omega_m^2(\mathcal{A}^r f; t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \varphi_k(t))^{2m} \lambda_k^{2r} c_k^2(f). \tag{16}$$

Всюду далее через $L_2(\mathcal{A}) := L_2(\mathcal{A}^r), r \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_2$, для которых $\mathcal{A}^r f \in L_2$.

2. В этом пункте мы приведем наши основные результаты, связанные с модулем непрерывности Ω_m .

Будем изучать экстремальную задачу отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина между величиною наилучшего приближения функций $f \in L_2^r$ и характеристикой гладкости Ω_m .

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{A})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{A}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{A}^r f)} = \lambda_n^{-(r-s)}. \tag{17}$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in L_2^r$ при любом s ($0 \leq s \leq r, r \in \mathbb{N}$), учитывая соотношения (15) и монотонно возрастающую последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, оценим величину наилучшего приближения $E_{n-1}(\mathcal{A}^s f)$ посредством величины наилучшего приближения $E_{n-1}(\mathcal{A}^r f)$. В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(\mathcal{A}^s f) &= \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2s} c_k^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{-2(r-s)} \lambda_k^{2r} c_k^2(f) \leq \\ &\leq \lambda_n^{-2(r-s)} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2r} c_k^2(f) = \lambda_n^{-2(r-s)} E_{n-1}^2(\mathcal{A}^r f). \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка сверху величины, расположенной в левой части (17):

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{A})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{A}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{A}^r f)} \leq \lambda_n^{-(r-s)}. \tag{18}$$

Для получения аналогичной оценки снизу указанной величины введем в рассмотрение экстремальную функцию $f_0(x) := u_n(x) \in L_2^{(r)}$, где $u_n(x)$ – n -ая собственная функция из системы собственных функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которой в силу (15) имеем

$$E_{n-1}(\mathcal{A}^s u_n(\cdot)) = \lambda_n^s, \quad s = 0, 1, \dots, r. \tag{19}$$

Используя равенство (19), запишем оценку снизу

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{A})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{A}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{A}^r f)} \geq \frac{E_{n-1}(\mathcal{A}^s f_0)}{E_{n-1}(\mathcal{A}^r f_0)} = \frac{\lambda_n^s}{\lambda_n^r} = \lambda_n^{-(r-s)}. \tag{20}$$

Требуемое равенство (17) получаем из сопоставления неравенств (18) и (20). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < t < 1$. Тогда

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{A})} \frac{\lambda_n^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{A}^s f)}{\Omega_m(\mathcal{A}^r f; t)} = \frac{1}{(1 - \varphi_n(t))^m}. \tag{21}$$

Доказательство. Для произвольного вектора $f \in L_2^r$, пользуясь определением модуля непрерывности (16), а также тем фактом, что последовательность $\{\varphi_k(t)\}$ монотонно убывает, а последовательность $\{\lambda_k\}$ монотонно возрастает, запишем

$$\begin{aligned} \Omega_m^2(\mathcal{A}^r f; t) &\geq \sum_{k=n}^{\infty} (1 - \varphi_k(t))^{2m} \lambda_k^{2r} c_k^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} (1 - \varphi_k(t))^{2m} \lambda_k^{2(r-s)} \lambda_k^{2s} c_k^2(f) \geq \\ &\geq (1 - \varphi_n(t))^{2m} \lambda_n^{2(r-s)} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2s} c_k^2(f) = (1 - \varphi_n(t))^{2m} \lambda_n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(\mathcal{A}^s f). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для произвольной функции $f \in L_2^r$ при любых $m, n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$ и $0 < t < 1$ справедливо неравенство

$$\Omega_m(\mathcal{A}^r f; t) \geq (1 - \varphi_n(t))^m \lambda_n^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{A}^s f), \tag{22}$$

откуда сразу получаем оценку сверху величины, расположенной в левой части равенства (21):

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{A})} \frac{\lambda_n^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{A}^s f)}{\Omega_m(\mathcal{A}^r f; t)} \leq \frac{1}{(1 - \varphi_n(t))^m}. \tag{23}$$

Для функции $f_0 = u_n(x) \in L_2^r$, введённой нами в конце доказательства теоремы 1, кроме равенств (19) в силу (16) имеем

$$\Omega_m(\mathcal{A}^r f_0; t) = (1 - \varphi_n(t))^m \lambda_n^r. \tag{24}$$

Пользуясь равенствами (19) и (24), запишем оценку снизу указанной величины

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^r(\mathcal{A})} \frac{\lambda_n^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{A}^s f)}{\Omega_m(\mathcal{A}^r f; t)} &\geq \frac{\lambda_n^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{A}^s f_0)}{\Omega_m(\mathcal{A}^r f_0; t)} = \\ &= \frac{\lambda_n^{r-s} \cdot \lambda_n^s}{\lambda_n^r (1 - \varphi_n(t))^m} = \frac{1}{(1 - \varphi_n(t))^m}. \end{aligned} \tag{25}$$

Из сопоставления оценки сверху (23) с оценкой снизу (25) получаем требуемое равенство (21), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Всюду далее под весовой функцией на отрезке $[0, h]$ будем понимать любую неотрицательную суммируемую функцию, не эквивалентную нулю на этом же отрезке.

Теорема 3. Пусть $n, m \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s, 0 < p \leq \infty, h \in (0, 1]$ и $q(t)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{A})} \frac{\lambda_n^{r-s} \cdot E_{n-1}(\mathcal{A}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{A}^r f; t) q(t) dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h (1 - \varphi_n(h))^{mp} q(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (26)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для параметра p , удовлетворяющего условию $0 < p \leq \infty$, функционал $\|\Omega_m q^{1/p}\|_p$ в знаменателе дроби в левой части (26) определен соотношением

$$\|\Omega_m q^{1/p}\|_p := \begin{cases} \left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{A}^r f; t) q(t) dt \right)^{1/p}, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ \text{esssup}\{\Omega_m(\mathcal{A}^r f, t) : 0 < t \leq h\}, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Указанный функционал при $1 \leq p < \infty$ является нормой.

Переходим к доказательству равенства (26). Возведём обе части равенства (26) в степень p ($0 < p \leq \infty$), умножим на весовую функцию q и проинтегрируем по t от 0 до h , где $h \in (0, 1)$. В итоге, после возведения обеих частей полученного неравенства в степень $1/p$ приходим к неравенству

$$\lambda_n^{r-s} \cdot E_{n-1}(\mathcal{A}^s f) \left(\int_0^h (1 - \varphi_n(h))^{mp} q(t) dt \right)^{-1/p} \leq \left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{A}^r f; t) q(t) dt \right)^{1/p}.$$

Так как последнее неравенство верно для любой функции $f \in L_2^r(\mathcal{A})$, то из него получаем оценку сверху для величины, стоящей в левой части равенства (26):

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{A})} \frac{\lambda_n^{r-s} \cdot E_{n-1}(\mathcal{A}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{A}^r f; t) q(t) dt \right)^{1/p}} \leq \left(\int_0^h (1 - \varphi_n(h))^{mp} q(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (27)$$

Оценку снизу рассмотренной экстремальной характеристики получаем для ранее введенной нами функции $f_0(x) = u_n(x) \in L_2^r$, для которой имеют место равенства (19) и (26), пользуясь которыми запишем

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{A})} \frac{\lambda_n^{r-s} \cdot E_{n-1}(\mathcal{A}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{A}^r f; t) q(t) dt \right)^{1/p}} \geq \frac{\lambda_n^{r-s} \cdot E_{n-1}(\mathcal{A}^s f_0)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{A}^r f_0; t) q(t) dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int_0^h (1 - \varphi_n(t))^{mp} q(t) dt \right)^{-1/p}. \tag{28}$$

Равенство (26) следует из сравнения неравенств (27) и (28). Теорема 3 доказана.

Приводим применение доказанных теорем 1–3 к вопросу наилучшего совместного приближения некоторых специальных функций математической физики. Уравнения (1) для простейших специальных функций могут быть записаны в виде [3, с.617]

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) + (\lambda p(x) - q(x))u(x) = 0. \tag{29}$$

I. Уравнение Бесселя

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{x^2} \right) u(x) = 0$$

или

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x} \right) u(x) = 0 \tag{30}$$

соответствует случаю $k(x) = x$, $p(x) = x, q(x) = \frac{n^2}{x}$, $a = 0$, $b = 1$.

Хорошо известно [3, с.625], что функция Бесселя

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x}{2} \right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}$$

является системой собственных функций краевой задачи

$$-\frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) + \frac{\nu^2}{x} u = \lambda x u, \quad 0 < x < 1, \quad |u(0)| < +\infty, \quad u(1) = 0, \tag{31}$$

отвечающих собственным значениям $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^{\infty}$. При этом система функций $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ является полной и ортогональной в пространстве $L_2 := L_2([0,1]; x dx)$ – функций суммируемых с квадратом с весом x и конечной нормой

$$\| f \| = \left(\int_0^1 x f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Полагая $\mathcal{B} := \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) - \frac{\nu^2}{x^2}$, дифференциальное уравнение Бесселя (31) запишем в виде

$$\mathcal{B}u = -\lambda u. \tag{32}$$

Введя функцию $T(x, y; t)$ как сумму ряда

$$T(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_{\nu}(\lambda_k x) J_{\nu}(\lambda_k y) t^k, \quad 0 < t < 1$$

в L_2 , введём оператор обобщенного сдвига

$$F_h f(x) = \int_0^1 f(t) T(x, t; 1-h) dt. \tag{33}$$

Используя оператор (33) в работах [4, 5] введён специальный модуль непрерывности

$$\Omega_m(\mathcal{B}^r f; t) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (1-t)^k]^{2m} \lambda_k^{4r} c_k^2(f) \right\}^{1/2}, \quad 0 < t < 1. \tag{34}$$

Заметим, что формула (34) вытекает из (16) в случае когда $\mathcal{A} := \mathcal{B}$, $\varphi_k(t) = (1-t)^k$ и λ_k заменить на λ_k^2 .

Очевидно, что все теоремы 1-3 для оператора Бесселя \mathcal{B} в соответствующих формулировках имеют место:

Теорема 4. Пусть $n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$. Тогда

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{B})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{B}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{B}^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{2(r-s)}}.$$

Теорема 5. Пусть $m, n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s, t \in (0, 1]$. Тогда

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{B})} \frac{\lambda_n^{2(r-s)} E_{n-1}(\mathcal{B}^s f)}{\Omega_m(\mathcal{B}^r f, t)} = [1 - (1-t)^n]^{-m}.$$

Теорема 6. Пусть $m, n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s, 0 < p \leq \infty, 0 < h \leq 1, \varphi$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{B})} \frac{\lambda_n^{2(r-s)} \cdot E_{n-1}(\mathcal{B}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{B}^r f; t) q(t) dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h (1 - (1-t)^n)^{2m} q(t) dt \right)^{-1/p}.$$

Отметим, что теоремы 4-6 в случае $s = 0$ и $0 < p \leq 2$ ранее непосредственным вычислением с привлечением теории бesselовских функций были доказаны в работе К.Тухлиева [5];

II. При $k(x) = 1 - x^2, p(x) = 1, q(x) \equiv 0, a = -1, b = 1$ из (29) получаем уравнение Лежандра

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{du}{dx} \right) + \lambda u = 0, |u(\pm 1)| < \infty. \tag{35}$$

Известно [6, с.116], что полиномы Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

являются решением уравнения (35) с $\lambda = n(n+1)$, то есть $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ являются собственными функциями, а числа $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty := \{n(n+1)\}_{n=0}^\infty$ являются собственными значениями оператора Лежандра

$\mathcal{L} := \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{du}{dx} \right)$ в задаче (35). Для оператора Лежандра \mathcal{L} приводим формулировку теорем 1-3 в следующем виде

Теорема 7. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{D})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{L}^r f)} = \frac{1}{[n(n+1)]^{r-s}}.$$

Теорема 8. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда, при всех $t \in (0,1)$, справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{D})} \frac{[n(n+1)]^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{\Omega_m(\mathcal{L}^r f; t)} = \frac{1}{[1-(1-t)^n]^m}.$$

Теорема 9. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0,1]$ и $q(t)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{D})} \frac{[n(n+1)]^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{L}^r f; t) q(t) dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h [1-(1-t)^n]^{mp} q(t) dt \right)^{-1/p}.$$

III. Дифференциальное уравнение Чебышева-Эрмита

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{du}{dx} \right) + \lambda e^{-x^2} u = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + \lambda u = 0 \tag{36}$$

из дифференциального уравнения (29) получается при $k(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$, $p(x) = e^{-x^2}$, $a = -\infty$, $b = \infty$.

Решением дифференциального уравнения (36) является многочлен Чебышева-Эрмита [6, с.169-176] вида

$$H_n(x) := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}} \cdot e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right)$$

с $\lambda = 2n$. Если ввести дифференциальный оператор Чебышева-Эрмита второго порядка

$$\Lambda := \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx}, \tag{37}$$

то, как показано в [7, 8], для произвольной функции $f \in L_2^r(\Lambda)$ справедливо равенство

$$\Omega_m(\Lambda^r f, t) := \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (1-t^2)^{n/2}]^{2m} \cdot (2n)^{2r}.$$

Теоремы 1-3 для оператора Λ приобретают следующие формулировки:

Теорема 10. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, оператор Λ определен равенством (37). Тогда

$$\sup_{f \in L_2^r(\Lambda)} \frac{E_{n-1}(\Lambda^s f)}{E_{n-1}(\Lambda^r f)} = \frac{1}{(2n)^{r-s}}.$$

Теорема 11. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда

$$\sup_{f \in L_2^r(\Lambda)} \frac{(2n)^{r-s} E_{n-1}(\Lambda^s f)}{\Omega_m(\Lambda^r f, t)} = \frac{1}{[1 - (1-t^2)^{n/2}]^m}.$$

Теорема 12. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1]$, $q(t)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^r(\Lambda)} \frac{(2n)^{r-s} \cdot E_{n-1}(\Lambda^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\Lambda^r f, t) q(t) dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h [1 - (1-t^2)^{n/2}]^{mp} q(t) dt \right)^{-1/p}.$$

Очевидно, что из теорем 11 и 12, соответственно при различных значениях $t \in (0, 1)$ и $h \in (0, 1], q(t) = t$, можно вывести конкретные следствия. Так, например, из теоремы 11 при $t = \sqrt{2/n}$ получаем следующее асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^r(\Lambda)} \frac{(2n)^{r-s} E_{n-1}(\Lambda^s f)}{\Omega_m(\Lambda^r f, \sqrt{2/n})} &= \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{n/2} \right]^m} \sim \\ &\sim \frac{1}{(1 - e^{-1})^m} = \left(\frac{e}{e-1} \right)^m. \end{aligned}$$

Из этого равенства сразу вытекает следующее неравенство типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного полиномиального приближения функции и ее последовательность производных $\Lambda^s f \in L_2$:

$$E_{n-1}(\Lambda^s f) \leq \left(\frac{e}{e-1} \right)^m \cdot \frac{1}{(2n)^{r-s}} \cdot \Omega_m \left(\Lambda^r f, \sqrt{\frac{2}{n}} \right)$$

IV. Уравнение Чебышева-Лагерра

$$\frac{d}{dx} \left(x e^{-x} \frac{du}{dx} \right) + \lambda e^{-x} u = 0 \quad \text{или} \quad u'' + (1-x)u' + \lambda u = 0 \tag{38}$$

соответствует $k(x) = xe^{-x}$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = e^{-x}$, $a = 0$, $b = \infty$. Общее решение дифференциального уравнения (38) дается полиномами Чебышева-Лаггерра [6, с.219]:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}). \tag{39}$$

Легко проверить, что если полагать

$$\mathcal{L} := e^x \frac{d}{dx} \left(x e^{-x} \frac{d}{dx} \right),$$

то собственными функциями операторного уравнения

$$\mathcal{L}u = -\lambda u$$

являются многочлены (39), а собственными числами $\lambda_n = n$. Теоремы 1-3 в этом случае имеют место в следующих формулировках.

Теорема 13. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{L})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{L}^r f)} = \frac{1}{n^{r-s}}.$$

Теорема 14. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{L})} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{\Omega_m(\mathcal{L}^r f, t)} = \frac{1}{[1 - (1-t)^n]^m}, \quad t \in (0, 1).$$

Теорема 15. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1]$, $q(t)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{L})} \frac{n^{r-s} \cdot E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{L}^r f, t) q(t) dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^n]^{mp} q(t) dt \right)^{-1/p}.$$

V. В завершении работы отметим, что аналогичные результаты можно формулировать и для многочленов Якоби, имеющих вид [6, с.268]

$$P_n(x; \alpha, \beta) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}], \alpha, \beta > -1$$

и удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$(1-x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] \frac{du}{dx} + n(n + \alpha + \beta + 1)u = 0. \tag{40}$$

Введя операторное обозначение

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta} := (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] \frac{d}{dx},$$

уравнение (40) запишем

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta} u + \lambda y = 0, \quad \lambda = n(n + \alpha + \beta + 1).$$

Теоремы 1-3 в этом случае формулируются следующим образом:

Теорема 16. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $\alpha, \beta > -1$. Тогда

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^r f)} = \frac{1}{[n(n + \alpha + \beta + 1)]^{r-s}}.$$

Теорема 17. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})} \frac{[n(n + \alpha + \beta + 1)]^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^s f)}{\Omega_m(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^r f, t)} = \frac{1}{[1 - (1-t)^n]^m}.$$

Теорема 18. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1)$, $q(t)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})} \frac{[n(n + \alpha + \beta)]^{r-s} \cdot E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^r f, t) q(t) dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^n]^{mp} q(t) dt \right)^{1/p}.$$

Поступило 24.04.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В.С. Уравнение математической физики. – М.: Наука, 1976, 527 с.
2. Шилов Е.Г. Введение в теорию линейных пространств. – Л.-М., 1952.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966, 725 с.
4. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Приближение функций суммами Фурье–Бесселя. – Изв. вузов. Математика, 2001, т. 18, №8, с. 3-9.
5. Тухлиев К. Среднеквадратическое приближение функций рядами Фурье–Бесселя и значения поперечников некоторых функциональных классов. – Чебышевский сборник, 2016, т. 17, №4, с. 141-156.
6. Суевин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979, 415 с.
7. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье–Эрмита в пространстве $L_2(\mathbb{R}; e^{-x^2})$. – Изв. вузов. Матем., 2006, №1, с. 3-12.
8. Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева–Эрмита и поперечники функциональных классов. – Матем. заметки, 2014, т. 95, №5, с. 666-684.

Д.А.Қодиров

**ОИД БА НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ФУНКСИЯҶО БА ВОСИТАИ ҚАТОРИ
ФУРЬЕ АЗ РЀИ ФУНКСИЯҶОИ ХОСИ МАСЪАЛАИ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ДАР
ФАЗОИ L_2 ВА БАЪЗЕ ТАТБИҚҶО БО ФУНКСИЯҶОИ МАХСУС***Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола сарҳади саҳеҳи наздиккунии беҳтарин ба воситаи суммаи охирноки Фурье аз рӯи функсияҳои хоси масъалаи Штурм-Лиувилл барои баъзе синфи функсияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардашуда муайян шудаанд, ёфта шудааст. Дохилкунии чунин модули бефосилагии функсия имконият медиҳад, ки алоқаи чунин модули бефосилагиро бо суръати наздиккунии беҳтарин ба воситаи суммаи Фурье ва рафтори он омӯхта шаванд. Ҳамзамон ҳалли масъалаҳои экстремалии буъзе функсияҳои махсуси физикаи математикӣ оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин, модули бефосилагии умумикардашуда, масъалаи Штурм-Лиувилл.

D.A.Qodirov

**ON THE BEST APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY FOURIER SERIES WITH
RESPECT TO THE EIGENFUNCTIONS OF THE STURM-LIOUVILLE
PROBLEM IN L_2 AND SOME APPLICATIONS TO SPECIAL FUNCTIONS***Tajik National University*

In the article, the least upper bounds of the best approximations by the sums of the Fourier series with respect to the eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem are found on some classes of functions characterized by a generalized modulus of continuity. The introduction of such a modulus of continuity of a function is justified by the relationship between the rate of convergence of the best approximations by Fourier sums and the behavior of its generalized modulus of continuity. The solution of a number of extremal problems for specific special functions of mathematical physics is also given.

Key words: best approximations, generalized modulus of continuity, Sturm–Liouville tasks .

Сведения об авторе:

1. **Кодиров Далер Абдушукурович** – Таджикский национальный университет, ассистент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета.
E-mail: daler-kodirov@bk.ru

УДК 517.95

Специальность:

Член-корреспондент НАН Республики Таджикистан И.К.Курбанов, Д.С.Сафаров
**ТОЧНОЕ ОГРАНИЧЕННОЕ И ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ
 ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА-КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА
 С ПОСТОЯННЫМИ ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТАМИ**

*Российско-Таджикский (Славянский) университет,
 Бохтарский государственный университет им. Н.Хусрава*

С помощью эллиптической функции Якоби дельта-амплитуды $-dn\tau$ найдено точное ограниченное и периодическое решение для обобщенного уравнения Бюргерса-Кортевега-де Фриза с постоянными отклоняющимися аргументами.

Ключевые слова: эллиптические функции Якоби, периодические решения, аргументы с постоянными отклонениями, точное решение, нелинейное уравнение.

На плоскости переменных (x, t) рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$u_t + u(x, t - \tau_1)u_x + \beta u_{xxx} = [v + \gamma u(x, t)u(x + \tau_2, t)]u_{xx}, \quad (1)$$

где $\tau_1, \tau_2, v, \beta, \gamma$ – постоянные, $u(x, t)$ – искомая функция, имеющая по переменному t запаздывающий аргумент, а по x – опережающий аргумент, причём $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$.

Это уравнение при $v = 0, \gamma = 0, \tau_1 = 0$ принимает вид уравнения КдФ (Кортевега-де Фриза) [1,2]

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad (2)$$

а при $\beta = 0, \gamma = 0, \tau_1 = 0$ – вид уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = \gamma u_{xx}. \quad (3)$$

А в случае $\gamma = 0, \tau_1 = 0$ принимает вид уравнения Бюргерса-Кортевега-де Фриза (Б КдФ)

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \nu u_{xx}. \quad (4)$$

Адрес для корреспонденции: Курбанов Икром Курбанович. 734000, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М.Турсунзаде, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: hudson@gmail.ru;
 Сафаров Джумабой. 735140, Республика Таджикистан, г. Бохтар, ул. Айни, 67, Бохтарский государственный университет. E-mail: safarov-5252@mail.ru

Уравнение (4) встречается при описании волн на воде с учетом диссипативных процессов [1,2].

Уравнение (4) не проходит тест Пенлеве, то есть принадлежит классу неинтегрируемых нелинейных уравнений [2]. Тем не менее, в работах [1,2], используя метод усеченных разложений, показано, что оно имеет частные решения.

В работе [1] методом разложения по эллиптической функции Якоби найдено точное решение уравнения КдФ с помощью функций $sn^2\tau, cn^2\tau$ в переменных бегущей волны $\tau = \theta(x - ct), \theta, c$ – волновые числа.

Уравнения (2),(3) являются эталонными нелинейными уравнениями в нелинейной математической физике [2].

Эти уравнения получаются как частные случаи уравнения Навье-Стокса [2].

Если $u(x, t)$ – решение уравнения (1), то в переменных бегущей волны

$$u(x, t) = \varphi(\tau), \quad \varphi(\tau) = \theta(x - ct),$$

оно удовлетворяет уравнению

$$-c\varphi'(\tau) + \varphi(\tau + \theta c\tau_1)\varphi'(\tau) + \beta\theta^2\varphi'''(\tau) = (\alpha + \gamma\varphi(\tau)\varphi(\tau + \theta\tau_2))\varphi''(\tau). \tag{5}$$

Это уравнение является дифференциально-разностным уравнением третьего порядка.

Если $\varphi(\tau)$ – решение уравнения (5) с периодом $T > 0$ и число $\theta c\tau_1$ – кратно T , то $\varphi(\tau)$ также удовлетворяет уравнению

$$-c\varphi'(\tau) + \varphi(\tau)\varphi'(\tau) + \beta\theta^2\varphi'''(\tau) = (\alpha + \gamma\varphi(\tau)\varphi(\tau + \theta\tau_2))\varphi''(\tau). \tag{6}$$

Покажем, что решение этого уравнения при определенных значениях $\theta\tau_2$ можно получить с помощью решения уравнения

$$-c\varphi'(\tau) + \varphi(\tau)\varphi'(\tau) + \beta\theta^2\varphi'''(\tau) = 0. \tag{6'}$$

Решение этого уравнения получим с помощью функции Якоби $dn\tau$ – дельта-амплитуды. Функции $sn\tau, cn\tau, dn\tau$ связаны соотношениями

$$sn^2\tau + cn^2\tau = 1, \quad k^2 sn^2\tau + dn^2\tau = 1. \tag{7}$$

Функции $sn\tau, cn\tau$ имеют период $4K$, а функция $dn\tau$ – $2K$. Здесь

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-1/2} d\varphi, \tag{7'}$$

где $0 < k < 1$, k – модуль функции.

Так как функции $sn\tau, cn\tau$ – нечетные, а $dn\tau$ – четное, то $T = 2K$ является основным периодом для функций $sn^2\tau, cn^2\tau, dn^2\tau$.

В работе [1], разлагая решение уравнения (6') посредством эллиптической функции $sn\tau$

$$\varphi(\tau) = a_0 + a_1 sn\tau + a_2 sn^2\tau, \quad \tau = \theta(x - ct)$$

и подставляя в (6'), получено решение вида

$$u(x, t) = c + 4(1 + k^2)\beta\theta^2 - 12k^2\beta\theta^2 sn^2\tau.$$

Заменяя в этой формуле $k^2 sn^2\tau$ на $1 - dn^2\tau$, получим ещё одно решение

$$u(x, t) = c + 4\beta\theta^2(k^2 - 2) + 12\beta\theta^2 dn^2\tau. \tag{8}$$

Функции $sn\tau, cn\tau, dn\tau$ ограниченные, то есть

$$-1 \leq sn\tau \leq 1, \quad -1 \leq cn\tau \leq 1, \quad k' \leq dn\tau \leq 1,$$

где k' – дополнительный модуль, который вместе с модулем k удовлетворяет уравнению $k^2 + k'^2 = 1$.

На полупериодах эти функции удовлетворяют функциональным соотношениям

$$sn(\tau + K)dn\tau = cn\tau, \quad cn(\tau + K)dn\tau = -k'sn\tau, \quad dn(\tau + K)dn\tau = k' \tag{9}$$

Теперь, воспользуясь этими соотношениями, будем искать решение уравнения (5) в виде

$$u(x, t) = \varphi(\tau) = Adn^2\tau, \quad \tau = \theta(x - ct), \tag{10}$$

здесь искомыми являются A, k^2, k'^2 и волновые числа θ, c .

Производные функции $sn\tau, cn\tau, dn\tau$ вычисляются формулами

$$\frac{dsn\tau}{d\tau} = cn\tau dn\tau, \quad \frac{dcn\tau}{d\tau} = -sn\tau dn\tau, \quad \frac{ddn\tau}{d\tau} = -k^2 sn\tau cn\tau. \tag{11}$$

Воспользуясь этими формулами вычислим производные функции (10) $\varphi'(\tau), \varphi''(\tau), \varphi'''(\tau)$:

$$\varphi'(\tau) = -2Ak^2 sn\tau cn\tau dn\tau,$$

$$\varphi''(\tau) = 2Ak^2 - 2A + 4A(2 - k^2)dn\tau - 6Adn^4\tau,$$

$$\varphi'''(\tau) = \left[-8Ak^2(2 - k^2)dn\tau + 24Ak^2 dn^3\tau \right] sn\tau cn\tau.$$

Подставляя $\varphi(\tau) = Adn^2\tau$ в функциональное уравнение (9), получим

$$\varphi(\tau + K)\varphi(\tau) = Adn^2(\tau + K)dn^2\tau = A^2k'^2. \tag{11'}$$

Теперь предполагаем, что модуль k^2 функции $dn\tau$ известен, тем самым её период $2K(k)$ вычисляется формулой (7'). При этом предположении, считаем, что в уравнении (5) число $\theta c\tau_1$ – кратно $2K$, а $\theta\tau_2 = K$. Тогда, подставляя функцию (10) и её производные в уравнение (6) и учитывая равенство (11), получим, что если параметры A, k^2, k'^2 и его коэффициенты связаны условиями

$$\alpha + \gamma^2 A^2 k'^2 = 0, c = 4\beta\theta^2(2 - k^2), -A + 12\beta\theta^2 = 0,$$

то функция $\varphi(\tau) = Adn^2(\tau)$ удовлетворяет уравнению (6).

Из этих соотношений находим A, k^2, k'^2

$$A = -12\beta\theta^2, k^2 = 2 - \frac{c}{4\beta\theta^2}, k'^2 = -\frac{\alpha}{144\gamma\beta^2\theta^4}. \tag{12}$$

Подчиняя модули k^2 и k'^2 условиям $0 < k^2 < 1, 0 < k'^2 < 1, k^2 + k'^2 = 1$, имеем: $\alpha\gamma < 0, c > 0, \beta > 0$,

$$\theta^2 > \frac{1}{12|\beta|} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}, c = 4\beta\theta^2 - \frac{\alpha}{36\gamma\beta\theta^2}.$$

Таким образом справедлива

Теорема 1. Пусть в уравнении (5) все постоянные такие, что $\alpha\gamma < 0, c > 0, \beta > 0$ и

$$\theta^2 > \frac{1}{12|\beta|} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}, c = 4\beta\theta^2 - \frac{\alpha}{36\gamma\beta\theta^2}.$$

Тогда, если модули k^2, k'^2 функции $dn\tau$ вычислены формулами (12) и число $\theta c\tau_1$ – кратно $2K$, а $\theta\tau_2 = K$, то уравнение (1) имеет ограниченное периодическое решение вида

$$u(x, t) = 12\beta\theta^2 dn^2[\theta(x - ct)] = 12\beta\theta^2 dn^2\tau.$$

2. Теперь рассмотрим уравнение вида

$$u_t + \alpha u(x, t - \tau_1)u(x + \tau_2, t)u_x + \beta u_{xxx} = [\alpha_1 + \alpha_2 u(x, t)u(x + \tau_3, t)]u_{xx}, \tag{13}$$

где $\alpha, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \beta, \alpha_1, \alpha_2$ – постоянные.

Если $u(x, t)$ – решение этого уравнения с периодом $T > 0$ и отклонения τ_1, τ_2 кратны T и $\alpha_2 = 0$, то $u(x, t)$ также удовлетворяет уравнению

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_{xxx} = \alpha_1 u_{xx}. \quad (14)$$

Это уравнение известно [2], как модифицированное уравнение Бюргерса-Кортевега-де Фриза (м БКдФ).

А при $\alpha_1 = 0$ получим мКдФ уравнение [1]

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (14')$$

В отличие от уравнения КдФ, решение уравнения мКдФ получается с помощью функций $sn\tau, cn\tau, dn\tau$ в первой степени [1,4].

В переменных бегущей волны

$$u(x, t) = \varphi(\tau) = \varphi(\theta(x - ct)),$$

уравнение (13) принимает вид

$$\begin{aligned} -c\varphi'(\tau) + \alpha\varphi(\tau + \theta c\tau_1)\varphi(\tau + \theta\tau_2)\varphi'(\tau) + \beta\theta^2\varphi'''(\tau) = \\ = \theta[\alpha_1 + \alpha_2\varphi(\tau)\varphi(\tau + \theta\tau_3)]\varphi'''(\tau). \end{aligned} \quad (15)$$

В работе [2] решение уравнения (14) найдено в виде

$$u(x, t) = \pm \sqrt{-\frac{6\beta}{\alpha}} k \theta sn\tau, \quad \tau = \theta(x - ct), \quad c = -\beta(1 + k^2)\theta^2,$$

при условии $\alpha\beta < 0$.

Покажем, что решение уравнения (14') можно найти и с помощью функции дельта-амплитуды $-dn\tau$.

В самом деле функция $dn\tau$ является решением уравнения Дуффинга вида

$$(dn\tau)'' = (2 - k^2)dn\tau - 2dn^3\tau,$$

где $0 < k^2 < 1$ – модуль функции.

Дифференцируя это уравнение, получим уравнение вида мКдФ

$$(dn\tau)''' = (2 - k^2)(dn\tau)' - 6dn^2\tau(dn\tau)'$$

С учётом этого уравнения и функционального соотношения (9), решение уравнения (13) будем искать в виде

$$u(x, t) = Adn\tau, \quad \tau = \theta(x - ct). \quad (16)$$

Подставляя производные $\varphi'(\tau)$, $\varphi''(\tau)$ и $\varphi'''(\tau)$ от функции $\varphi(\tau)$ в уравнение (15) при условии, что числа $\theta c\tau_1, \theta\tau_2$ – кратны $2K$, а $\theta\tau_3 = K$ заключаем, что если его коэффициенты и параметры A, k^2, k'^2 связаны условиями

$$\alpha_1 + \alpha_2 A^2 k' = 0, \quad c - \beta\theta^2(2 - k^2) = 0, \quad -\alpha A^2 + 6\beta\theta^2 = 0,$$

то $\varphi(\tau)$ является решением уравнения (15).

Отсюда при $\alpha\beta > 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ имеем

$$A = \pm \sqrt{\frac{6\beta}{\alpha}} |\theta|, \quad k^2 = 2 - \frac{c}{\beta\theta^2}, \quad k'^2 = \frac{\alpha^2 \alpha_1^2}{6\alpha_2^2 \beta^2 \theta^4}.$$

Подчиняя модули k^2, k'^2 присущим им условиям, получим следующую теорему

Теорема 2. Пусть в уравнении (15) коэффициенты такие, что $\alpha\beta > 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$

$$\theta^2 > \frac{1}{6} \left| \frac{\alpha\alpha_1}{\alpha_2\beta} \right|, \quad c = \beta\theta^2 - \frac{\alpha^2 \alpha_1^2}{36\alpha_2^2 \beta\theta^2}.$$

Тогда, если модули k^2, k'^2 вычислены формулами (17) и числа $\theta c\tau_1, \theta\tau_2$ – кратны $2K$, а $\theta\tau_3 = K$, то уравнение (1) имеет ограниченные и периодические решения вида

$$u(x, t) = \pm \sqrt{\frac{6\beta}{\alpha}} |\theta| \operatorname{dn}[\theta(x - ct)].$$

Поступило 03.05.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Liu S.K., Fu Z.T., Liu S.D. Q.Zhao Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations – J. Physics Letters A. – Moscow, 2001, vol. 289, p. 69-74.
2. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 360 с.
3. Сафаров Д.С. Об одном обобщении КдФ-уравнения – Сб. научных трудов «Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения». – Киев, 1996, с. 240.
4. Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических Функций: с приложениями к механике. – М.: КомКнига, 2006, 368 с.

И.К.Курбанов, Д.С.Сафаров

**ҲАЛЛИ АНИҚИ МАҲДУД ВА ДАВРИИ МУОДИЛАИ УМУМИКАРДАШУДАИ
БЮРГЕРС-КОРТЕВЕГ-ДЕ ФРИЗ БО АРГУМЕНТҲОИ ФАРҚКУНАНДАҲОИ
ДОИМӢ**

*Донишгоҳи (Славиянии) Руссия ва Тоҷикистон,
Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н.Хусрав*

Ҳалли аниқи маҳдуд ва даврӣ бо ёрии функсияи эллиптикии Якоби делта-амплитуда dnt барои муодилаи умумикардашудаи муодилаи Бургерс-Кортевег-де Фриза бо аргументҳои фарқкунандаҳои доимӣ ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *Функсияҳои эллиптикии Якоби, ҳалҳои даврӣ, аргументҳои фарқкунандаҳои доимӣ, муодилаи ғайрихаттӣ.*

I.K.Kurbanov, D.S.Safarov

**EXACT BOUNDED AND PERIODIC SOLUTION OF THE GENERALIZED
BURGERS-KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH CONSTANT
DEVIATIONS OF THE ARGUMENT**

*Russian-Tajik (Slavonic) University,
N.Khusrav Bokhtar State University*

An exact bounded and periodic solution for the generalized Burgers-Korteweg-de Vries equation with constant deviations by arguments is found using the elliptic Jacobi delta-amplitude $-dnt$ function.

Key words: *elliptic Jacobi functions, periodic solutions, arguments with constant deviations, exact solution, nonlinear equation.*

Сведения об авторах:

1. **Курбанов Икром Курбанович** – доктор физ.-мат. наук, член-корреспондент НАН Таджикистана, Российско-Таджикский (Славянский) университет, профессор кафедры математики и физики . E-mail: hudson@gmail.ru;
2. **Сафаров Джумабой Сафарович** – доктор физ.-мат. наук, Бохтарский государственный университет, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений. E-mail: safarov-5252@mail.ru.

УДК 517.955

Специальность: 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Академик НАН Таджикистана М.Илолов, Ф.Раимзода*

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ
ЗАДАЧИ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ*Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана,
Таджикский национальный университет

Работа посвящена анализу решений пространственно-однородной задачи с функциональными начальными условиями, описывающими сложные биологические системы. Решение начальной задачи с функциональными условиями для интегро-дифференциальных уравнений получено с помощью интегрального представления. Ядро этого представления является решением интегрального уравнения типа восстановления.

Ключевые слова: *пространственно-одномерная линейная задача, функциональные начальные условия, интегро-дифференциальная задача, интегральное уравнение, интегральное уравнение типа восстановления, преобразование Фурье, численность популяции.*

В первой половине XX века стали интенсивно разрабатываться первые теоретически обоснованные подходы, которые использовались при разработке математических моделей взаимодействующих популяций. В работах В.Вольтерра [1] задачами Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений представлены модели динамики взаимодействующих популяций.

В процессе исследования актуальных проблем математической биологии [2-4], физики, экологии и экономики возникли новые постановки задач для уравнений в частных производных с функциональными условиями. Для уравнения первого порядка линейные задачи с функциональными условиями были изучены в работах В.Вольтерра [1], Дж.Марри [4], Н.Н.Моисеева [5]. В работах М.К.Юнуси [7-9] приведены подробные исследования задач с функциональными условиями.

Рассмотрим следующую начальную задачу для интегро-дифференциального уравнения: требуется найти решение функции $N(x, a, t)$, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial a} + V \frac{\partial N}{\partial x} = F_0(a, t)N + d \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}, \quad (1)$$

в области $0 < a < \infty$, $0 < t \leq t_k$, $-\infty < x < \infty$, с начальными условиями:

$$N(x, a, 0) = N_0(x, a), \quad (2)$$

Адрес для корреспонденции: Илолов Мамадшо. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, НАНТ. E-mail: ilolov.mamadsho@gmail.com.

Раимзода Фаррухшох. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: raimzoda@mail.ru

$$N(x, 0, t) = \int_0^{\infty} B_0(\xi, t) N(x, \xi, t) d\xi, \tag{3}$$

$N = N(x, a, t)$ – численность популяции в точке x возраста a в момент времени t , $F_0(\cdot), B_0(\cdot)$ – соответственно коэффициенты смертности и рождаемости некоторой изолированной популяции, V, D – заданные положительные числа.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $F_0(\cdot) = F_0(a), B_0(\cdot) = B_0(a)$.

Введём последовательно замены:

$$\begin{cases} t = a + \tau, & \phi(x, a, \tau) = N(x, a, a + \tau) \\ \phi(x, a, \tau) = u(x, a, \tau) e^{\int_0^a F_0(\xi) d\xi - \frac{V^2 a + Vx}{4D} + \frac{Vx}{2D}}, \end{cases} \tag{4}$$

и уравнение (1) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < a < \infty, \quad -\infty < x < \infty. \tag{5}$$

Для решения уравнения (5) применим преобразования Фурье по переменной x [8], [10] и через $\bar{U}(\lambda, a, \tau)$ обозначим преобразование Фурье функции $U(x, a, \tau)$:

$$\bar{U}(\lambda, a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, a, \tau) e^{-i\lambda x} dx. \tag{6}$$

Умножим обе части уравнения (5) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x}$ и проинтегрируем по x от ∞ до $-\infty$, предполагая,

что функция u и её производные достаточно быстро стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm \infty$.

Применив интегрирование по частям, получим:

$$1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial a} e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, a, \tau) e^{-i\lambda x} dx = \frac{\partial \bar{U}(\lambda, a, \tau)}{\partial a};$$

$$2) \begin{aligned} D \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\lambda x} dx &= D \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-i\lambda x} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + D \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial u}{\partial x} i\lambda u \cdot e^{-i\lambda x} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \\ -D\lambda^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(x, a, \tau) e^{-i\lambda x} dx &= D\lambda^2 \bar{U}(\lambda, a, \tau), \end{aligned}$$

так как внеинтегральные члены обращаются в нуль в силу ограниченности $e^{-i\lambda x}$ и стремления к нулю

u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $x \rightarrow \pm \infty$.

Следовательно, для преобразования Фурье искомой функции получается уравнение

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial a} + D\lambda^2 \bar{U} = 0, \tag{7}$$

значительно более простое, чем уравнение (5).

Решим уравнение (7):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\bar{u}} = -D\lambda^2 da,$$

следовательно:

$$\ln \bar{U} = -D\lambda^2 a + \ln C,$$

и

$$\bar{U}(\lambda, a, \tau) = \bar{f}(\lambda, \tau) e^{-D\lambda^2 a} \tag{8}$$

где $\bar{f}(\lambda, \tau)$ – произвольная функция.

Чтобы найти $u(x, a, \tau)$, применим к равенству (6) обратное преобразование Фурье:

$$u(x, a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(\lambda, a, \tau) e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda, \tau) e^{-D\lambda^2 a + i\lambda x} d\lambda. \tag{9}$$

С учётом обозначений (4), получим

$$N(x, a, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\int_0^a F_0(\xi) d\xi - \frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda, t-a) e^{-D\lambda^2 a + i\lambda x} d\lambda. \tag{10}$$

Так как $\bar{f}(\lambda, \tau)$ – произвольная функция, то её подбираем так, чтобы она удовлетворяла функциональное начальное условие при $a = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{Vx}{2D}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda, \tau) e^{i\lambda x} d\lambda &= \int_0^{\infty} B_0(\xi) N(x, \xi, t) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} B_0(\xi) e^{\int_0^{\xi} F_0(\eta) d\eta - \frac{V^2 \xi}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda, t-\xi) e^{-D\lambda^2 \xi + i\lambda x} d\lambda d\xi. \end{aligned} \tag{11}$$

Сокращая обе части (11) на $e^{\frac{Vx}{2D}}$, получим:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} B_0(\xi) e^{\int_0^{\xi} F_0(\eta) d\eta - \frac{V^2 \xi}{4D}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda, t-\xi) e^{-D\lambda^2 \xi + i\lambda x} d\lambda d\xi. \tag{12}$$

Внутренний интеграл (12) равен

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda, t - \xi) e^{-D\lambda^2\xi} e^{i\lambda x} d\lambda &= F[\bar{f}(\lambda, t - \xi)] \cdot F[e^{-D\lambda^2\xi}] = F[\bar{f}(\lambda, t - \xi)] \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2\xi + i\lambda x} d\lambda = \\
 &= F[\bar{f}(\lambda, t - \xi)] \times \frac{1}{\sqrt{D\xi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta^2 + i\frac{\delta}{\sqrt{D\xi}}x} d\delta = (\delta = \lambda\sqrt{D\xi}, d\delta = \sqrt{D\xi}d\lambda) = \\
 &= F[\bar{f}(\lambda, t - \xi)] \cdot \frac{1}{\sqrt{D\xi}} e^{-\frac{x^2}{4D\xi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\delta + i\frac{x}{2\sqrt{D\xi}}\delta)^2} d\delta = F[\bar{f}(\lambda, t - \xi)] \frac{1}{\sqrt{D\xi}} e^{-\frac{x^2}{4D\xi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta^2} d\delta = \\
 &= F[\bar{f}(\lambda, t - \xi)] \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{D\xi}} e^{-\frac{x^2}{4D\xi}} = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{D\xi}} f(x - \lambda, t - \xi) d\lambda, \tag{13}
 \end{aligned}$$

так как в силу [9]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta^2} d\delta = \sqrt{\pi}.$$

Подставляя (13) в (12), находим:

$$f(x, t) = \int_0^{\xi} \frac{1}{\sqrt{2D\xi}} B_0(\xi) e^{\int_0^{\xi} F_0(\eta) d\eta - \frac{V^2\xi}{4D}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \lambda, t - \xi) e^{-\frac{\lambda^2}{4D\xi}} d\lambda d\xi.$$

Если ввести обозначение:

$$B(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2D\xi}} B_0(\xi) e^{\int_0^{\xi} F_0(\eta) d\eta - \frac{V^2\xi}{4D}},$$

тогда

$$f(x, t) = \int_0^{\xi} B(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \lambda, t - \xi) e^{-\frac{\lambda^2}{4D\xi}} d\lambda d\xi. \tag{14}$$

Таким образом, для определения функции $f(x, t)$ получим интегральное уравнение типа восстановления (см. [7, 8]).

Чтобы найти $\bar{f}(\lambda, t - a)$, применим обратное преобразование Фурье к функции $f(x, t)$:

$$\bar{f}(\lambda, t - a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t - a) e^{i\lambda x} dx.$$

Подставляя выражение для $\bar{f}(\lambda, t - a)$ в формулу (10), получим:

$$N(x, a, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\int_0^a F_0(\xi) d\xi - \frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-a) e^{-D\lambda^2 a + i\lambda(x-x')} dx d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\int_0^a F_0(\xi) d\xi - \frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', t-a) dx' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} e^{i\lambda(x-x')} d\lambda.$$

В силу формулы Эйлера

$$e^{i\lambda(x-x_1)} = \cos \lambda(x-x_1) + i \sin \lambda(x-x_1),$$

имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\int_0^a F_0(\xi) d\xi - \frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t-a) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} e^{i\lambda(x-x_1)} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\int_0^a F_0(\xi) d\xi - \frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t-a) dx_1 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \cos(x-x_1) d\lambda + \frac{1}{2\pi} e^{\int_0^a F_0(\xi) d\xi - \frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t-a) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \sin(x-x_1) d\lambda, \quad (15)$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \cos(x-x_1) d\lambda \text{ – является чётной функцией } \lambda,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \sin(x-x_1) d\lambda \text{ – является нечётной функцией } \lambda.$$

Поэтому второе слагаемое в правой части (15) обращается в нуль и получаем

$$N(x, a, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\int_0^a F_0(\xi) d\xi - \frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t-a) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \cos(x-x_1) d\lambda = \frac{1}{\pi} e^{\int_0^a F_0(\xi) d\xi - \frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t-a) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \cos(x-x_1) d\lambda. \quad (16)$$

Вычислим интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \cos \lambda y d\lambda, \quad (17)$$

где $D - const > 0, \quad (y = x - x_1).$

Его сходимость следует из сходимости интеграла:

$$\int_0^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} d\lambda.$$

Дифференцируя формально по y , получим равенство:

$$\frac{dI}{dy} = \int_0^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} (-\lambda) \sin \lambda y d\lambda, \tag{18}$$

в самом деле $e^{-D\lambda^2 a} \cos \lambda y$ и $e^{-D\lambda^2 a} \lambda \sin \lambda y$ непрерывны при $-\infty < y < +\infty$, $0 \leq \lambda < +\infty$.

И интеграл (17) сходится при $-\infty < y < +\infty$, а интеграл (18) сходится равномерно относительно y при $-\infty < y < +\infty$, в силу мажорантного признака с мажорирующей функцией

$$g(\lambda) = e^{-D\lambda^2 a}.$$

Таким образом, равенство (18) действительно имеет место по теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру.

Интегрируя по частям получим из (18):

$$\frac{dI}{dy} = e^{-D\lambda^2 a} \frac{\sin \lambda y}{2Da} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{y}{2Da} \int_0^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \cos \lambda d\lambda = -\frac{y}{2Da} I(y).$$

Непосредственные вычисления приводят к выражению

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \cos \lambda y d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{Da}} e^{-\frac{y^2}{4Da}}.$$

Таким образом, подставляя выражение $I(y)$ в формулу (16), получим решение уравнения (1) при начальном условии (3), имеющем вид:

$$N(x, a, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\int_0^a F_0(\xi) d\xi - \frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t-a) e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4Da}} dx_1 \tag{19}$$

где $f(x_1, t)$ – является решением интегрального уравнения (14).

Из формулы (19) для определения функции $f(x_1, t)$ при $t \leq 0$ получим следующее интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi D \xi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4Da}} f(x_1, t-a) dx_1 = \tilde{N}_0(x, a),$$

где $\tilde{N}_0(x, a) = N_0(x, a) e^{\int_0^a F_0(\xi) d\xi - \frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}}$, $-\infty < x < \infty$, $0 < a < \infty$.

Замечание. Если $F_0 = F_0(a, t)$, $B_0 = B_0(a, t)$, то в представлении (19) функция F_0 будет зависеть от $(\xi, \xi + t - a)$, а в уравнении (14) функция B_0 также будет зависеть от t .

Близкие вопросы в нелинейном случае были предметом анализа в работах [13-15].

Поступило 24.04.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование – М.: ИКИ, 2004, 288 с.
2. Одинаев Р.Н. Математическая модель задачи защиты растений в биосистеме типа "вредные насекомые – полезные насекомые" с произвольными трофическими функциями. – Системы и средства информатики, 2019, т. 29, № 1, 96-108 с. – DOI 10.14357/08696527190109. – EDN BDQEJR.
3. Одинаев Р.Н. Необходимое и достаточное условие существования решения задачи защиты растений. – ДАН РТ, 2015, т. 58, № 10, 879-885 с. – EDN WCIHJL.
4. Одинаев Р.Н., Гафоров А.Б. Математическое и компьютерное моделирование агроценоза хлопчатника с учетом возрастной структуры и с произвольными трофическими функциями. – Системы и средства информатики, 2021, т. 31, № 2, с. 173-183. – DOI 10.14357/08696527210216. – EDN HQKZFI.
5. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. – М.: Мир, 1983, 397 с.
6. Моисеев Н.Н. Модели экологии и эволюции. – Новое в жизни науке, технике. Сер. Математика, кибернетика. № 10, М.: Знание, 1983, 64 с.
7. Юнуси М.К. Математические модели борьбы с вредителями агроценозов. – Душанбе: Дониш, 1991, 146 с.
8. Юнусов М.К. Решение одного класса интегро-дифференциальных задач и его приложения в биологии. – Душанбе, 1989, 53 с.
9. Юнуси М.К., Ф. Раимзода. Об одной интегро-дифференциальной задаче с переменными коэффициентами. – Вестник Таджикского национального университета. Душанбе, 2015, -1/4(168), 15-17 с.
10. Будаков Б.М. Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М.:Наука, 1967, 608 с.
11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.:Наука, 1988, 512 с.
12. Раимзода Ф. Математическое моделирование популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений. – Вестник ТНУ. Сер. естественных наук, 2021, №2, 71-80 с.
13. Polov M., Kuchakshoev Kh.S. On abstract equations with unbounded nonlinearity and their applications. – Doklady Mathematics, 2009, v.80, №2, pp.644-669.
14. Илолов М., Кучакшоев Х.С. О модифицированной системе уравнений хемотаксиса. – ДАН РТ, 2010, т. 53, №3, с.165-172.
15. Илолов М., Кучакшоев Х.С. Нелинейная диффузия и хемотаксический коллапс. – ДАН РТ 2011, т.54, №11, с. 873-879.

М.Илолов, Ф.Раимзода *

**ХАЛЛИ ЯК МАСЪАЛАИ ХАТИИ ФАЗОЙ ЯКЧЕНАКА БО ШАРТҲОИ
ФУНКЦИОНАЛӢ**

Маркази рушди иноватсионии илм ва технологияҳои нави АМИ Тоҷикистон,

**Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Мақола ба таҳлили ибтидоии ҳалҳои масъалаи фазои якченака бо шартҳои ибтидоии функционалӣ, ки системаҳои мураккаби биологиро тасвир мекунад бахшида шудааст. Барои ҳали

масъалаи ибтидоӣ бо шартҳои функционалӣ барои муодилаҳои интегро-дифференциалӣ тасвири интегралӣ ёфта шудааст. Ядрои ин тасвир ҳали муодилаи намуди барқарорсозӣ мебошад.

Калимаҳои калидӣ: масъалаи хаттии фазоии якченака, шартҳои ибтидоии функционалӣ, масъалаи интегро-дифференциалӣ, муодилаи интегралӣ, муодилаи интегралӣ навъи барқарорсозӣ, табдили Фурье, андозаи аҳоли.

M.Ilolov, F.Raimzoda*

SOLUTION OF A SPATIAL-ONE-DIMENSIONAL LINEAR PROBLEM WITH FUNCTIONAL CONDITIONS

Center of innovative development of science and new technologies of NAS of Tajikistan,

**Tajik National University*

The paper investigates the solution of a spatially one-dimensional linear problem with functional initial conditions describing the state of biological systems. The representation of the solution of the integro-differential problem is obtained in the form of an integral, and the coefficients of the integral are the solution of an integral equation of the restoration type.

Key words: *spatial-one-dimensional linear problem, functional initial conditions, integro-differential problem, integral equation, restoration-type integral equation, Fourier transform, population size.*

Сведения об авторах:

1. **Мамадшо Илолов** – доктор физ.-мат. наук, академик НАН Таджикистана, профессор, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана, заведующий отделением математического моделирования динамических процессов. E-mail: ilolov.mamadsho@gmail.com;
2. **Фаррухшоҳ Раимзода** – Таджикский национальный университет, соискатель кафедры математического моделирования механико-математического факультета. E-mail: raimzoda@mail.ru.

УДК 517.962

Специальность: 1.1.1. – Вещественный комплексный и функциональный анализ;

1.1.2. – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Академик НАН Таджикистана Н.Раджабов

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ, КОГДА ОСНОВНЫМ УРАВНЕНИЕМ ЯВЛЯЕТСЯ ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ

Таджикский национальный университет

В работе для одной системы интегральных уравнений, когда основным уравнением является второе уравнение, при выполнении условия совместности получено представление многообразия решений через одну аналитическую функцию точек нижнего основания цилиндра. Выделены случаи, когда система имеет единственное решение. В случае, когда общее решение содержит одну функцию комплексного переменного, на сингулярном многообразии, ставится и исследуются граничная задача типа Шварца.

Ключевые слова: цилиндрическая область, переопределенная система интегральных уравнений, интегральные представления, задача типа Шварца.

Через Ω обозначим цилиндрическую область $\Omega = \{(t, z) : a < t < b, |z| < R\}$. Боковую поверхность этого цилиндра обозначим через $S = \{a < t < b, |z| = R\}$ и его нижнее основание обозначим через $D = \{t = a, |z| < R\}$. В области Ω рассмотрим переопределенную систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(t, z) + \lambda \int_a^t \frac{\varphi(\tau, z)}{\tau - a} d\tau = f(t, z) \\ \varphi(t, z) + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \frac{\exp[i\theta] \varphi(t, \zeta)}{(R - \rho)(\zeta - z)} d\xi d\eta = g(t, z) \end{cases}, \quad (1)$$

где λ, μ – заданные постоянные, $f(t, z), g(t, z)$ – заданные функции области Ω , $\varphi(t, z)$ – искомая функция, $\theta = \arg \zeta$, $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$.

Решение системы интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $\varphi(t, z) \in C(\bar{\Omega})$, $\varphi(a, z) = 0$ с асимптотическим поведением

$$\varphi(t, z) = 0 \left[(t - a)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } t \rightarrow a$$

и $\varphi(t, Re^{i\theta}) = 0$ с асимптотическим поведением

$$\varphi(t, z) = 0 \left[(R - r)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } r \rightarrow R.$$

Проблеме исследования переопределенной линейной системы интегральных уравнений Вольтерра с сингулярными и сверх-сингулярными ядрами посвящены работы [1,2]. Проблеме исследования переопределенной системы дифференциальных уравнений и вырождающихся дифференциальных уравнений посвящены [5-11]

Пусть в системе (1) основным уравнением является второе уравнение и $\mu < 0$. Тогда его решение, согласно [2], дается формулой

$$\begin{aligned} \varphi(t, z) &= (R - r)^{2|\mu|} \Phi(t, z) + g(t, z) + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left(\frac{R - r}{R - \rho} \right)^{2|\mu|} \frac{\exp[i\theta] g(t, \zeta)}{(R - \rho)(\zeta - z)} d\xi d\eta \equiv \\ &\equiv K_1 [\Phi(t, z), g(t, z)], \end{aligned} \tag{2}$$

где $\Phi(t, z)$ – произвольная функция области Ω , причем непрерывное по переменному t , аналитическое по переменному z , причем $\Phi(a, z) = 0$ с асимптотическим поведением

$$\Phi(t, z) = 0 \left[(t - a)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } t \rightarrow a. \tag{3}$$

Решение вида (2) существует, если $g(t, z) \in C(\bar{\Omega})$, $g(t, Re^{i\theta}) = 0$ с асимптотическим поведением

$$g(t, z) = 0 \left[(R - r)^{\delta_1} \right], \quad \delta_1 > 2|\mu| \text{ при } r \rightarrow R. \tag{4}$$

Подставляя найденное решение в первое уравнение системы (1), получим

$$\begin{aligned} &(R - r)^{2|\mu|} \left[\Phi(t, z) + \lambda \int_a^t \frac{\Phi(\tau, z)}{\tau - a} d\tau \right] + g(t, z) + \\ &+ \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left(\frac{R - r}{R - \rho} \right)^{2|\mu|} \left[g(t, \zeta) + \lambda \int_a^t \frac{g(\tau, \zeta)}{\tau - a} d\tau \right] \frac{\exp[i\theta]}{(R - \rho)(\zeta - z)} d\xi d\eta = f(t, z). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Phi(t, z) + \lambda \int_a^t \frac{\Phi(\tau, z)}{\tau - a} d\tau = (R - r)^{2\mu} [f(t, z) - g(t, z)] -$$

$$-\frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \left[g(t, \zeta) + \lambda \int_a^t \frac{g(\tau, \zeta)}{\tau-a} d\tau \right] \frac{\exp[i\theta]}{(\zeta-z)} d\xi d\eta. \tag{5}$$

Левая часть этого выражения является аналитической функцией по переменному z , поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ (R-r)^{2\mu} [f(t, z) - g(t, z)] - \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \left[g(t, \zeta) + \lambda \int_a^t \frac{g(\tau, \zeta)}{\tau-a} d\tau \right] \frac{\exp[i\theta]}{(\zeta-z)} d\xi d\eta \right\} = 0,$$

или

$$\mu(R-r)^{2\mu-1} \left[g(t, z) + \lambda \int_a^t \frac{g(\tau, z)}{\tau-a} d\tau \right] \exp[i\theta] = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ (R-r)^{2\mu} [f(t, z) - g(t, z)] \right\}. \tag{6}$$

Принимая во внимание формулу (6), равенство (5) представим в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi(t, z) + \lambda \int_a^t \frac{\Phi(\tau, z)}{\tau-a} d\tau &= (R-r)^{2\mu} [f(t, z) - g(t, z)] - \left\{ (R-r)^{2\mu} [f(t, z) - g(t, z)] \right\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\left[(R-\rho)^{2\mu} [f(t, \zeta) - g(t, \zeta)] \right]_{\rho=R}}{S-z} ds. \end{aligned} \tag{7}$$

В силу условия (6) $\left[(R-r)^{2\mu} [g(t, z)] \right]_{z=S} = 0$.

Пусть существует следующий предел

$$\left[(R-r)^{2\mu} [f(t, z)] \right]_{r=R} = F(t, \theta). \tag{8}$$

Тогда равенство (7) принимает следующий вид

$$\Phi(t, z) + \lambda \int_a^t \frac{\Phi(\tau, z)}{\tau-a} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(t, \theta)}{S-z} ds. \tag{9}$$

При $\lambda < 0$ если решение интегрального уравнения (9) существует, в классе функций в окрестности точек $t = a$, удовлетворяющий условию (3), тогда оно согласно [2], дается формулой

$$\Phi(t, z) = (t-a)^{|\lambda|} \omega(z) + E(t, z) - \lambda \int_a^t \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right)^{|\lambda|} \frac{E(\tau, z)}{\tau-a} d\tau \equiv K_2 [\omega(z), E(t, z)], \tag{10}$$

где $\omega(z)$ – произвольная аналитическая функция комплексного переменного z ,

$$E(t, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(t, \theta)}{S-z} ds.$$

Решение вида (10) получено при предположении, что $E(t, z) \in C(\bar{\Omega})$, $E(a, z) = 0$ с асимптотическим поведением

$$E(t, z) = 0 \left[(t-a)^{\delta_2} \right], \delta_2 > |\lambda| \text{ при } t \rightarrow a. \quad (11)$$

Найденное значение $\Phi(t, z)$, из равенства (10), подставляя в формулу (2) находим общее решение системы интегральных уравнений в этом случае

$$\varphi(t, z) = K_1 \left[K_2 \left[\omega(z), E(t, z) \right], g(t, z) \right] \equiv T_1 \left[\omega(z), E(t, z), g(t, z) \right]. \quad (12)$$

Итак, доказана

Теорема 1. Пусть в системе интегральных уравнений (1) основным уравнением является второе уравнение и $\lambda < 0, \mu < 0$. Функция $g(t, z) \in C(\bar{\Omega})$, $g(t, Re^{i\theta}) = 0$ с асимптотическим поведением (4), существует предел вида (8), причем $E(a, z) = 0$ с асимптотическим поведением (11). Функции $f(t, z)$ и $g(\tau, z)$ удовлетворяют условию совместности (6). Тогда любое решение системы интегральных уравнений (1) из класса $C(\bar{\Omega})$, обращающееся в нуль на боковую поверхность и границе нижнего основания D , представимо в виде (12), где $\omega(z)$ – произвольная аналитическая функция комплексного переменного z в области D .

Теперь допустим, что в интегральном представлении (12) решение интегрального уравнения (1), функция $\varphi(t, z)$ – известна и выполнено все условия теоремы 1. Умножая обе стороны равенства (12) на $(R-r)^{2\mu}$, получим

$$\begin{aligned} (R-r)^{2\mu} \varphi(t, z) &= (t-a)^\lambda \omega(z) + E(t, z) - \lambda \int_a^t \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right)^\lambda \frac{E(\tau, z)}{\tau-a} d\tau + \\ &+ (R-r)^{2\mu} g(t, z) + \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta] g(t, \zeta)}{(\zeta-z)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Умножая обе стороны последнего равенства на $(t-a)^{-\lambda}$, получим

$$\begin{aligned} \omega(z) &= (t-a)^{|\lambda|} (R-r)^{2\mu} \varphi(t, z) - (t-a)^{|\lambda|} E(t, z) + \lambda \int_a^t (\tau-a)^{|\lambda|} \frac{E(\tau, z)}{\tau-a} d\tau - \\ &(t-a)^{|\lambda|} (R-r)^{2\mu} g(t, z) - \frac{\mu(t-a)^{|\lambda|}}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta] g(t, \zeta)}{(\zeta-z)} d\xi d\eta \equiv \\ &\equiv T_1^{-1} \left[\varphi(t, z), E(t, z), g(t, z) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть в системе интегральных уравнений (1) функции $f(t, z)$, $g(\tau, z)$, параметры λ , μ удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Тогда интегральное представление (12) обратимо, то есть произвольная аналитическая функция $\omega(z)$ в области D , через значение $\varphi(t, z)$ находится единственным образом по формуле (13).

Пусть $\lambda > 0$. Тогда, если решение интегрального уравнения (9) существует, тогда она дается формулой [2]

$$\Phi(t, z) = E(t, z) - \lambda \int_a^t \left(\frac{\gamma - a}{t - a} \right)^\lambda \frac{E(\tau, z)}{\tau - a} d\tau \equiv K_3 [E(t, z)]. \tag{14}$$

Подставляя найденное значение $\Phi(t, z)$ в формулу (2), находим решение системы (1) в этом случае

$$\varphi(t, z) = K_1 [K_3 [E(t, z)], g(t, z)]. \tag{15}$$

Решение вида (15) существует, если $E(t, z) \in C(\bar{\Omega})$, $E(a, z) = 0$ с асимптотическим поведением

$$E(t, z) = 0 \left[(t - a)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } t \rightarrow a.$$

Теорема 3. Пусть в системе интегральных уравнений (1) основным уравнением является второе уравнение системы $\lambda > 0$, $\mu < 0$. Функция $g(t, z) \in C(\bar{\Omega})$, $g(t, Re^{i\theta}) = 0$ с асимптотическим поведением (4). Существует предел вида (8), причем $F(t, \tau)$ по второму переменному удовлетворяет условию Гельдера, по первому переменному условию

$$F(t, z) = 0 \left[(t - a)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } t \rightarrow a. \tag{16}$$

Функции $f(t, z)$ и $g(t, z)$ удовлетворяют условию совместности (6). Тогда система интегральных уравнений (1), в классе функций $\varphi(t, z)$ обращающиеся в нуль на боковую поверхность и границе нижнего основания цилиндра, имеет единственное решение, которое дается формулами (14), (15).

Пусть основным уравнением в системе (1) является второе уравнение системы (1) и $\mu > 0$. Тогда единственное решение второго уравнения согласно [2] дается формулой

$$\varphi(t, z) = g(t, z) + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left(\frac{R - \rho}{R - r} \right)^{2\mu} \frac{\exp[i\theta] g(t, \zeta)}{(R - \rho)(\zeta - z)} d\xi d\eta \equiv K_4 [g(t, z)]. \tag{17}$$

Решение вида (17) получено при условии, что $g(t, Re^{i\theta}) = 0$ с асимптотическим поведением

$$g(t, z) = 0 \left[(R-r)^\varepsilon \right], \varepsilon > 0 \text{ при } r \rightarrow R. \tag{18}$$

Подставляя это значение $\varphi(t, z)$ в первое уравнение системы (1), находим условие совместности в этом случае

$$g(t, z) + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left(\frac{R-\rho}{R-r} \right)^{2\mu} \frac{\exp[i\theta] g(t, \zeta)}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta + \lambda \int_a^t \left[g(\tau, z) + \frac{\mu}{\pi} \iint_D \left(\frac{R-\rho}{R-r} \right)^{2\mu} \frac{\exp[i\theta] g(\tau, \zeta)}{(R-\rho)(\zeta-z)} d\xi d\eta \right] \frac{d\tau}{\tau-a} = f(t, z). \tag{19}$$

Интеграл в правой части равенств (19) сходится, если $g(a, z) = 0$ сасимптотическим поведением

$$g(t, z) = 0 \left[(t-a)^\varepsilon \right], \varepsilon > 0 \text{ при } t \rightarrow a. \tag{20}$$

Таким образом, в этом случае имеет место следующее утверждение

Теорема 4. Пусть в системе интегральных уравнений (1) основным уравнением является второе уравнение и $\mu > 0$. Функция $g(t, z) \in C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет условиям (18) и (20) Функции $f(t, z)$ и $g(t, z)$ между собой связаны формулой (19). Тогда система (1) имеет единственное решение, которое дается формулой (17).

Интегральное представление (12) и его формула обращения (13), дают возможности для системы интегральных уравнений (1) ставит и исследовать следующую граничную задачу типа Шварца

Задача D_2 . Требуется найти решение системы интегральных уравнений (1) при $\lambda < 0, \mu < 0$ по граничным условиям

$$Re \left[\left[(R-r)^{2\mu} \left[\varphi(t, z)(t-a)^\lambda \right] \right]_{t=a} \right]_{r=R} = E_1(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi, \tag{21}$$

на границе нижнего основания цилиндра, где $E(\theta)$ – заданная функция точек на границе нижнего основания цилиндра и условию

$$\left\{ (R-r)^{2\mu} \left[\varphi(t, z)(t-a)^\lambda \right]_{t=a} \right\}_{z=0} = B_1, \tag{22}$$

где B_1 – заданная постоянная, на основной оси цилиндра.

Решение задачи D_2 . Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда используя интегральное представление (12) и его формулы обращения (13), имеем

$$\left[Re \left[(R-r)^{2\mu} \left[\varphi(t, z)(t-a)^\lambda \right]_{t=a} \right] \right]_{r=R} = [Re \omega(z)]_{r=R} = E_1(\theta).$$

Таким образом, решение задачи (21), (22) свелось к решению следующей задачи Шварца теории аналитических функций:

Требуется найти аналитическую функцию $\omega(z)$ в области D по граничному условию $[\operatorname{Re}\omega(z)]_{r=R} = E_1(\theta)$ на окружности $r = R$.

Решение этой задачи, согласно [3], [4], дается формулой

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_1(\theta) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + ic, \tag{23}$$

где c – произвольная вещественная постоянная.

Из (23) находим

$$\omega(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_1(\theta) d\theta + ic. \tag{24}$$

С другой стороны, из равенства (15) следует

$$(R-r)^{2\mu} [\varphi(t, z)(t-a)^\lambda]_{t=a} = \omega(z) + (R-r)^{2\mu} G(z) - \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta]G(\zeta)}{(\zeta-z)} d\xi d\eta.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega(0) = & \left[(R-r)^{2\mu} [\varphi(t, z)(t-a)^\lambda]_{t=a} \right]_{z=0} - \left[(R-r)^{2\mu} G(z) \right]_{z=0} - \\ & - \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta]G(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

В силу условия (22) имеем

$$\omega(0) = B - \left[(R-r)^{2\mu} G(z) \right]_{z=0} - \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta]G(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta.$$

В этом равенстве вместо $\omega(0)$, подставляя его значение, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\theta) d\theta + ic = B - \left[(R-r)^{2\mu} G(z) \right]_{z=0} - \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta]G(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} ic = & B - \left[(R-r)^{2\mu} G(z) \right]_{z=0} - \\ & - \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta]G(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\theta) d\theta = E_1 + iE_2. \end{aligned} \tag{25}$$

Причем

$$E_1 = \operatorname{Re} \left[B - \left[(R-r)^{2\mu} G(z) \right]_{z=0} - \frac{\mu}{\pi} \iint_D (R-\rho)^{2\mu-1} \frac{\exp[i\theta] G(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\theta) d\theta \right] = 0. \quad (26)$$

Подставляя найденное значение ic из (25) в формулу (24), находим значение $\omega(z)$ в виде

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\theta) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + iE_2.$$

Подставляя это значение $\omega(z)$ в формулу (12), находим решение задачи D_2 в виде

$$\varphi(t, z) = T_1 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\theta) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + iE_2, E(t, z), g(t, z) \right]. \quad (27)$$

Таким образом, доказана

Теорема 5. Пусть в системе интегральных уравнений (1) параметры λ , μ и функции $f(t, z)$ и $g(t, z)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Функции $G(z)$, $E(\theta)$, число B такие, что выполнено условие (26). Тогда задача D_1 имеет единственное решение которое дается формулой (27).

Поступило 03.04.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Раджабов Н. Переопределенная линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверх-сингулярные интегральные уравнения типа Вольтерра третьего рода с логарифмическими и сверх-сингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе: изд.ТНУ, 2021, 317 с.
2. Rajabov N. Volterra type Integral Equation with Boundary and Interior fixed singularity and super-singularity kernels and heir application. – Dushanbe, Tajik State University, “Irfon”, 2010, 295 p.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977, 640 с.
4. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – Физматгиз, 1959, 628 с.
5. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа. – М.: Наука 2016, 271 с.
6. Сабитов К. Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Высшая школа, 2005, 670 с.
7. Тасмамбетов Ж. Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. – Актюбе, 2018, 263 с.

8. Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром однородной степени -1. – Душанбе: Дониш, 1966, 47 с.
9. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. – Душанбе: Изд-во АН ТаджССР, 1963.
10. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешано-составного типа. – Ташкент: ФАН, 1979, 240 с.
11. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. – Ташкент: Universidad, 2005, 224 с.

Н.Рачабов

СИСТЕМАИ БАРЗИЁДМУАЙАНШУДАИ ИНТЕГРАЛӢ НИСБАТАН БА СОХАИ СИЛИНДРИКИ, ДАР ХОЛАТЕ КИ, МУОДИЛАИ АСОСИ МУОДИЛАИ ДУЮМИ СИСТЕМА МЕБОШАД

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола барои системаи барзиёдмуайаншудаи интегралӣ (1) дар ҳолате ки, муодилаи асоси муодилаи дуум мебошад, тасвири интегралӣ ба воситаи як функсияи аналитикии асоси поёнии цилиндр ёфта шудааст. Инчунин ҳолатҳое омӯхта шудаанд, ки система ҳалли ягона дорад. Дар ҳолате, ки ҳалли умуми функсияи ихтиёрии аналитикиро дар бард мегирад, масъалаи намуди Шварс ба таври корректи гузошташуда, ҳалли он ба намуди шкор ёфта шудааст .

Калимаҳои калидӣ: соҳаи цилиндрики, системаи барзиёдмуайаншудаи интегралӣ, шартҳои ҳамчояшавӣ, тасвирҳои интегралӣ.

N.Rajabov

OVER DETERMINED SYSTEM INTEGRAL EQUATIONS BY SILINDTRICAL DOMAIN, WHEN FUNDAMENTAL EQUATION IS SECOND EQUATION

In this work over determined system integral equations by cylindrical domain , when fundamental equation is second equation system are investigated. The case found, when general solution system integral equation, contain arbitrary analytic function point of the ground basis. In this case, for system stand end investigation Shvarts type problem.

Key words: cylindrical domain, over determined system integral equation, compatibility condition, integral representation.

Сведения об авторе:

1. **Раджабов Нусрат** – доктор физ.-мат. наук, академик НАН Таджикистана, Таджикский национальный университет, профессор кафедры математического анализа и теории функций.

УДК 523. 532

Специальность: 1.3.1 – Физика космоса, астрономия.

Член-корреспондент НАН Таджикистана Г.И.Кохирова, Ф.Дж.Рахматуллаева, Д.Л.Горшанов*,
В.Н.Львов*, А.В.Девяткин*, М.Н.Латипов

НАБЛЮДЕНИЯ ПОКРЫТИЯ ЗВЕЗДЫ СПУТНИКОМ НЕПТУНА ТРИТОНОМ В ОБСЕРВАТОРИИ САНГЛОХ

Институт астрофизики НАН Таджикистана,

**Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН*

6 октября 2022 г. на телескопе Цейсс-1000 обсерватории Санглох были произведены оптические наблюдения покрытия звезды ГYC 5254-00839-1 спутником Нептуна Тритоном. Построена кривая блеска звезды и выявлено, что участки спада и подъема блеска имели конечную продолжительность от 15 до 24 секунд. Это, по-видимому, объясняется наличием атмосферы у Тритона. На кривой блеска этого явления выявлена «ступенька», которая может свидетельствовать о возможном присутствии у покрываемой звезды тесного слабого объекта. Определены высокоточные астрометрические координаты Тритона на средний момент покрытия.

Ключевые слова: Тритон, покрытие звезды, координаты, кривая блеска.

6 октября 2022 года на Земле наблюдалось покрытие звезды из каталога ГYCHO-2 ГYC 5254-00839-1 спутником Нептуна Тритоном. Каталог GAIA DR3 содержит следующие координаты этой звезды: $\alpha=23^{\text{h}} 36^{\text{m}} 52^{\text{s}}.448$, $\delta=03^{\circ} 50' 09''.27$ (эпоха J2000). Её звёздная величина в полосе V, в соответствии с данными каталога ГYCHO-2, составляет 11.61m. Полоса покрытия протянулась через середину Евразийского континента, проходя через Китай и Таджикистан. Ее ширину и протяженность демонстрирует рис. 1.

Инициатором организации наблюдательной кампании выступила команда сотрудников Института планетных наук (PSI) Массачусетского технологического института (MIT) и Лоуэлловской обсерватории, которая обратилась к астрономам Таджикистана с предложением провести наблюдения этого явления. Целью наблюдательной кампании является уточнение параметров атмосферы Тритона. Приведем краткие сведения об атмосфере Тритона.

Наличие у Тритона атмосферы подтвердили данные космического аппарата "Вояджер-2". В августе 1989 г., пролетая мимо Тритона, "Вояджер-2" провел измерения его атмосферы и обнаружил в ней метан, азот и углекислый газ, а также наличие активности в виде гейзерообразных выбросов [см., например, 1-2]. Было установлено, что Тритон имеет разреженную атмосферу, давление паров которой находится в равновесии с его поверхностными льдами, вследствие этого сезонные изменения, вероятно, вызовут значительные изменения атмосферного давления [см., например, 2-3].

Адрес для корреспонденции: Кохирова Гулчехра Исроиловна. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/5, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: kokhirova2004@mail.ru



Рис. 1. Глобус предсказанной траектории тени для затмения Тритона 6 октября 2022 г. Сплошные линии представляют северную, центральную и южную границы тени Тритона, а пунктирные линии – планки погрешностей в три сигмы. Земной шар окрашен в серый цвет, так как Солнце находится за горизонтом.

В качестве альтернативы дорогостоящему запуску космической миссии к спутнику явление звездных покрытий — лучший способ изучения атмосферы Тритона. Серия наблюдений за затмениями в период 1990-2001 гг. подтвердила наличие разреженной атмосферы и выявила увеличение давления и температуры в атмосфере Тритона [4-5]. По результатам наблюдений затмения в 2017 г. установлено, что атмосферное давление снизилось, но четкой тенденции не наблюдается, имеющихся атмосферных измерений недостаточно, чтобы построить модель эволюции атмосферы Тритона [6]. Таким образом, событие 2022 г. имеет решающее значение для понимания поведения и эволюции атмосферы Тритона. После этого явления предсказанных покрытий Тритоном ярких (< 17 -й величины) звезд не будет, по крайней мере, до 2026 г.

Предложение коллег из США было принято и в Международной астрономической обсерватории Санглох Института астрофизики НАНТ 5-6 октября 2022 г. были проведены наблюдения затмения звезды Тритоном. Полученный наблюдательный материал был передан коллегам из Института планетных наук для исследования атмосферы Тритона. С учетом всесторонней научной ценности изучения данного затмения мы посчитали необходимым провести фотометрическую и астрометрическую редукцию полученных изображений и, используя результаты, интерпретировать особенности явления. Обработка кадров и анализ результатов выполнены совместно с сотрудниками Главной астрономической (Пулковской) обсерваторией РАН. Эфемеридные обстоятельства покрытия для обсерватории Санглох были получены с помощью ПП ЭПОС [7].

Наблюдения и их обработка

Фотометрические наблюдения покрытия были проведены в обсерватории Санглох ($\varphi=38^{\circ} 15' 40''$ N, $\lambda=69^{\circ} 13' 04''$ E, $h = 2300$ м, MPC code 193) на 1-метровом телескопе Цейсс-1000 [8]. Телескоп оснащён ПЗС-камерой фирмы FLI, ПЗС-матрица которой содержит 1024×1024 пикселей размером

36 × 36 мкм. Угловые размеры пиксела составляют 0".6 × 0".6. Также телескоп оснащён светофильтрами международной широкополосной системы Джонсона-Козинса *BVRI*.

Для правильной интерпретации результатов наблюдений необходимо было, помимо построения кривой блеска покрытия, определить разность блеска Тритона и звезды, для чего выполнить их фотометрические наблюдения до и после явления, когда их изображения разделены достаточным расстоянием. Однако явление в Таджикистане происходило вскоре после заката Солнца, поэтому наблюдения до явления пришлось производить в предыдущую ночь. Таким образом, наблюдения выполнялись в течение двух ночей.

Накануне явления (5 октября 2022 г.) снималась короткая серия кадров (15 минут) с фильтрами *R* и *I* и экспозициями по 5 секунд. Тритон и звезда находились на расстоянии друг от друга, достаточном для уверенных измерений.

В ночь явления (6 октября 2022 г.) было снято две серии только с фильтром *I* и экспозициями по 2 секунды. Из-за медленного считывания ПЗС-камеры интервал между экспозициями составлял около 8 секунд.

Первая серия началась за 53 минуты до явления и закончилась через 1 час 15 минут после него. В начале первой серии расстояние между звездой и Тритоном позволяло измерить более яркую звезду, но не тусклый Тритон. Затем изображения этих объектов начали сливаться, что не позволило измерить их правильным образом. Примерно за 18 минут до покрытия изображения полностью слились, и измерения были выполнены для суммарного изображения. Примерно через 13 минут после явления суммарное изображение начало деформироваться, что исказило результаты его измерения. Примерно через 38 минут после явления изображения разделились, но находились близко друг к другу, что позволило измерить только более яркую звезду.

Во второй серии, начавшейся через 1 час 20 минут после явления и длившейся примерно 35 минут, изображения разошлись достаточно далеко для уверенного измерения Тритона.

Обработка наблюдений выполнялась с помощью программного пакета АПЕКС-II [9]. Производилась апертурная и PSF-фотометрия. Точность PSF-фотометрии в данном случае оказалась примерно в полтора раза лучше, поэтому ниже приведены именно её результаты.

В качестве опорных объектов для дифференциальной фотометрии использовались две наиболее яркие звезды, изображения которых попали на все кадры всех серий, а также Нептун. На рис. 2 приведён пример кадра, полученного спустя 1 час 50 минут после явления. На нём подписаны все измерявшиеся объекты.

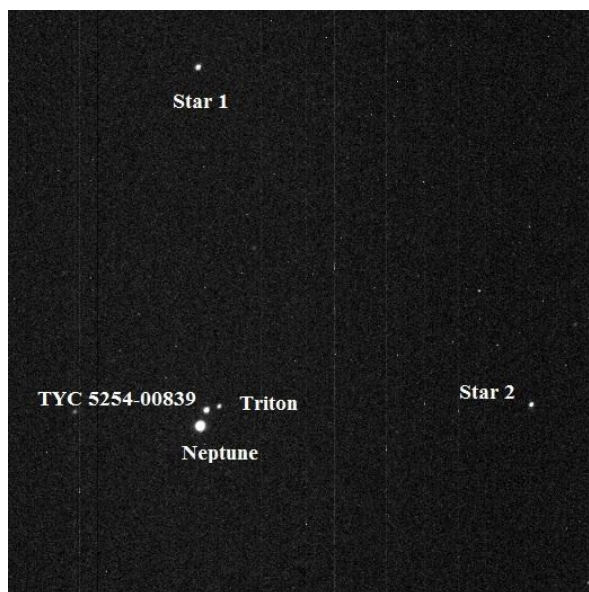


Рис. 2. Кадр с измеренными объектами, полученный 6 октября 2023 г. на телескопе Цейсс-1000 обсерватории Санглох после явления покрытия звезды Тритоном, длительность экспозиции с фильтром I 2 секунды.

Обсуждение результатов

На рис. 3 приведены кривые относительного (относительно опорных объектов) блеска звезды и Тритона до и после явления, а также кривая блеска их суммарного изображения в отрезок времени, охватывающий явление. На рис. 4 в увеличенном масштабе приведена кривая блеска покрытия – изменение суммарного блеска Тритона и звезды. На графиках по оси абсцисс дан относительный блеск m в звездных величинах, по оси ординат – мировое время h в часах, ошибки фотометрических измерений нанесены в виде вертикальных баров.

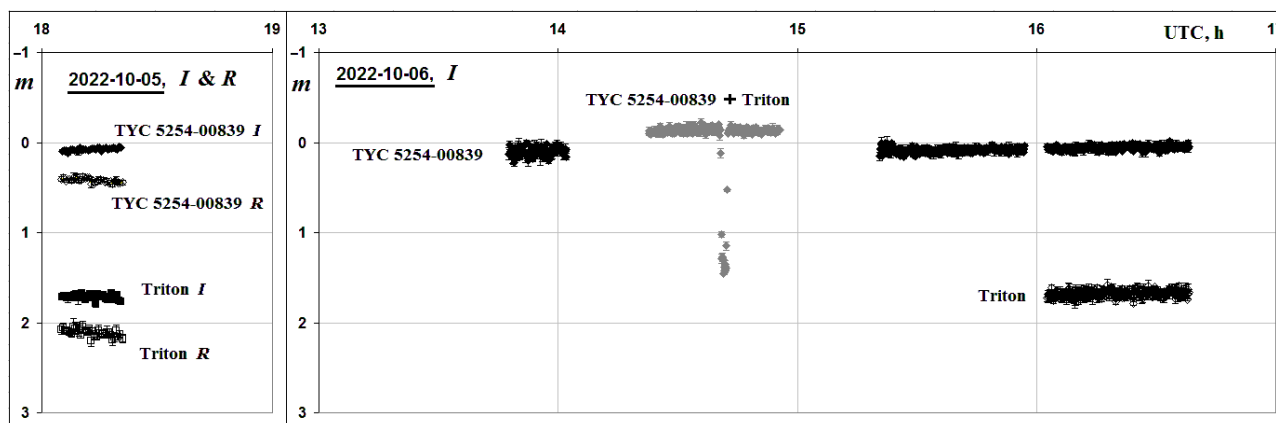


Рис. 3. Кривые относительного блеска звезды TYC 5254-00839-1 и Тритона до явления покрытия (левая панель) и после явления (правая панель), а также кривая блеска их суммарного изображения в отрезок времени, охватывающий явление (в центре правой панели).

Точность фотометрических измерений 5 октября значительно лучше, чем в последующую ночь, так как длительность экспозиций была в 2.5 раза больше. На левой панели рис. 3 бары ошибок ряда измерений звезды, соответствующие одному стандартному отклонению, приблизительно равны размерам точек на графике.

К сожалению, интервал между точками на кривой блеска покрытия весьма велик: около 8 секунд. Это не позволяет с нужной точностью определять моменты времени начала и конца различных участков кривой. Отчасти это компенсируется удовлетворительной фотометрической точностью.

На нисходящий и восходящий участки кривой блеска, соответствующие покрытию звезды атмосферой Тритона, попало по две точки (рис.4). Начало первого покрытия атмосферой произошло между 14:40:42 и 14:40:50, конец – между 14:40:58 и 14:41:06 UTC. Начало второго атмосферного покрытия – между 14:42:08 и 14:42:16, конец – между 14:42:23 и 14:42:31 UTC. Соответственно, продолжительность спада блеска – между 16 и 24 секундами, продолжительность подъёма блеска – между 15 и 23 секундами.

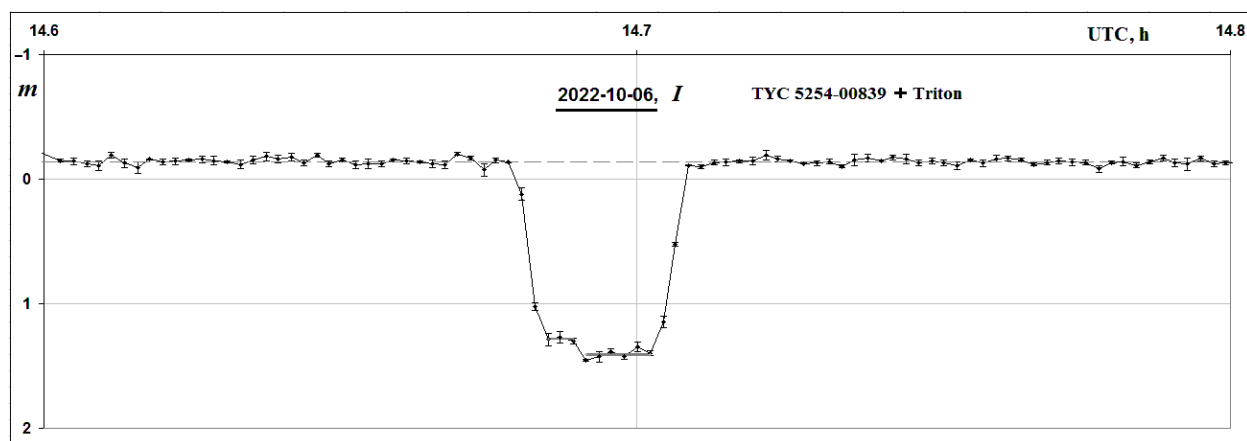


Рис. 4. Увеличенный масштаб кривой суммарного блеска покрытия Тритонем звезды TYC 5254-00839-1.

«Дно» кривой блеска покрытия, соответствующее интервалу времени, когда звезда полностью закрыта Тритонем, состоит из 9 точек, его продолжительность — от 62 до 78 секунд; начало — между 14:40:58 и 14:41:06, конец — между 14:42:08 и 14:42:16 UTC. По расчётам эфемерид явления, выполненным с помощью программного пакета ЭПОС [7], длительность центрального покрытия должна составлять 108 секунд. Из результатов наблюдений видно, что наблюдаемое покрытие было не центральным.

Средний момент покрытия равен $14\text{h } 41\text{m } 37\text{s} \pm 3\text{s}$ UTC.

При этом «дно» кривой блеска почти плоское. При покрытиях звёзд объектами, имеющими атмосферу, часто наблюдается повышение блеска вблизи середины покрытия («центральная вспышка»), вызванное подсветкой атмосферы светом покрытой звезды. Однако в этот раз такого явления на кривой блеска не видно. Вместо этого уровень всего «дна» оказался выше, чем блеск одного Тритона (см. рис. 3).

В таблице даны результаты анализа фотометрических особенностей явления в полосе *I*.

Таблица

Фотометрические показатели явления покрытия Тритонем звезды

1	Разность блеска Тритона и звезды, определённая до явления (накануне)	$1.639\text{m} \pm 0.031\text{m}$
2	Разность блеска, определённая через полтора часа после явления	$1.620\text{m} \pm 0.043\text{m}$
3	Средняя разность блеска вне явления	$1.630\text{m} \pm 0.037\text{m}$
4	Падение блеска во время явления составило	$1.501\text{m} \pm 0.071\text{m}$
5	Разница между пп. 3 и 4 равна	$0.129\text{m} \pm 0.080\text{m}$

Таким образом, во время покрытия не весь свет звезды был экранирован Тритоном. Часть его из-за рассеяния и преломления в атмосфере Тритона продолжала поступать на Землю.

В начале «дна» кривой блеска покрытия есть «ступень», состоящая из трёх точек, высотой $0.118m \pm 0.039m$ относительно среднего уровня остальных шести точек «дна» (см. рис. 4). Длительность её от 15 до 31 сек.

Другие наблюдения данного покрытия были выполнены в Yanqi Lake Observatory ($\varphi = 40^\circ 24' 29''.34 N$, $\lambda = 116^\circ 40' 14'' E$) в Пекине, Китай, на 0.7-м f/6.5 телескопе (с фильтром RC) [10]. В результате обработки этих наблюдений получена кривая блеска явления, представленная на рис. 5 [10]. Интервалы между точками на этой кривой блеска составляют приблизительно 1.7 сек., что позволяет более достоверно проследить все этапы покрытия. Однако фотометрическая точность этой кривой заметно хуже, чем в настоящей работе. На этой кривой блеска в начале «дна» также просматривается «ступень». Из-за худшей фотометрической точности она видна не столь отчётливо, как на нашей кривой. Однако такое совпадение двух кривых позволяет предположить, что эта особенность вызвана не ошибками наблюдений и обработки, а присутствием вблизи покрываемой звезды тусклого компаньона, который был покрыт Тритоном на 15-30 секунд позже самой звезды. По оценкам, сделанным по нашей кривой блеска, расстояние компаньона от звезды может составлять $0''.016-0''.033$ и разность блеска – 2^m-3^m .

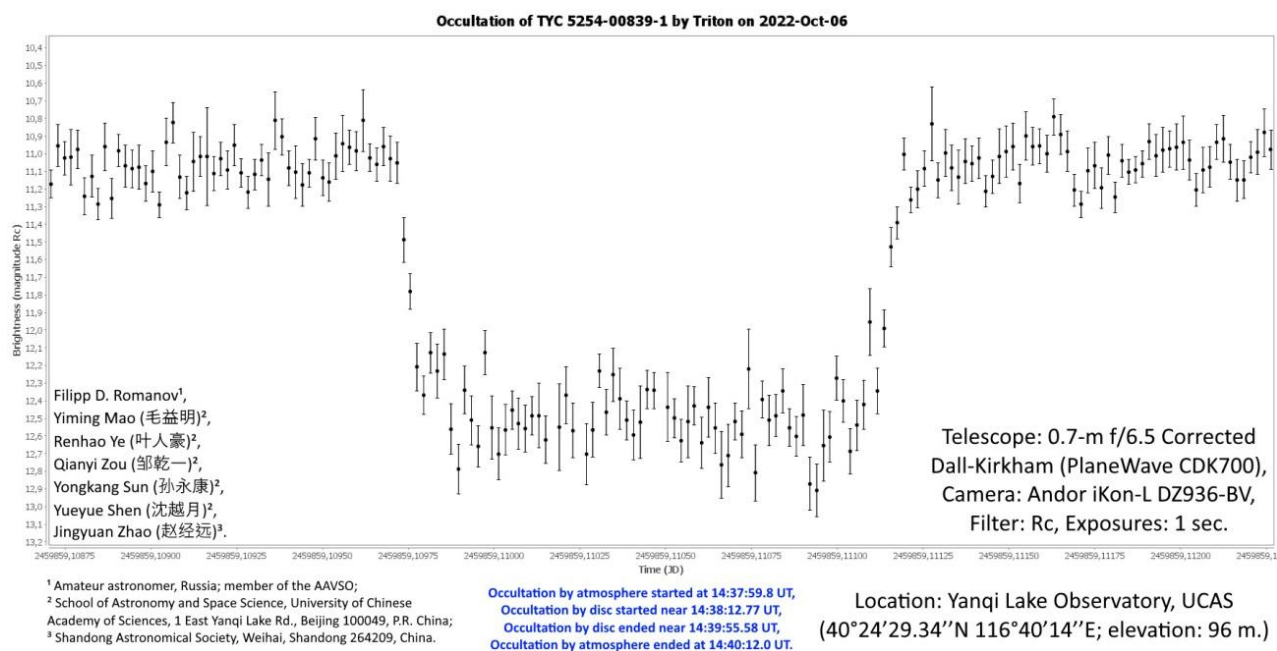


Рис. 5. Кривая блеска по наблюдениям покрытия Тритоном звезды TYC 5254-00839-1 в обсерватории Yanqi Lake Observatory (Китай) [10].

В кривой блеска «ступень» могли бы вызвать следующие объекты: слабая звезда фона, неизвестный спутник звезды, слабый неизвестный спутник Нептуна, объект пояса Койпера и др. Используя ПП ЭПОС, было определено, что если брать все известные на данный момент 1.3 млн. астероидов, то в поле размером 1 угловая минута никаких астероидов нет. Информации о двойственности звезды также нет. Поэтому, вопрос об этом слабом объекте остается открытым.

Астрометрия

Звезда TYCHO-2 TYC 5254-00839-1 в каталоге GAIA DR3 имеет координаты на эпоху J2000 $\alpha=23^{\text{h}} 36^{\text{m}} 52^{\text{s}}.448$, $\delta=-03^{\circ} 50' 09''.27$ и собственные движения $\mu_{\alpha}\cos\delta= 2.279 \mu\text{as}$ $\mu_{\delta}=-22.923$ (в единицах mas/yr). С учетом собственного движения в дату 06 октября 2022 г. на средний момент покрытия $14^{\text{h}} 41^{\text{m}} 37^{\text{s}}$ (UTC) координаты звезды будут следующие: $\alpha=23^{\text{h}} 36^{\text{m}} 52^{\text{s}}.451$, $\delta=-03^{\circ} 50' 09''.79$. Зная скорость видимого движения Тритона, позиционный угол движения и видимый радиус Тритона, мы определили положение Тритона на указанный момент. Координаты положения равны $\alpha = 23^{\text{h}} 36^{\text{m}} 52^{\text{s}}.452$, $\delta = -03^{\circ} 50' 09''.84$ на момент $14^{\text{h}} 41^{\text{m}} 37^{\text{s}} \pm 3\text{s}$ (UTC) и найдены с погрешностью $+0^{\text{s}}.001$ и $+0''.02$, соответственно, относительно нецентрального покрытия.

Заключение

На 1-метровом телескопе обсерватории Санглох Института астрофизики НАН Таджикистана 6 октября 2022 года были произведены оптические наблюдения покрытия звезды TYC 5254-00839-1 спутником Нептуна Тритоном. Показано, что во время покрытия не весь свет звезды был экранирован Тритоном. Часть его из-за рассеяния и преломления в атмосфере Тритона продолжала поступать на Землю. На кривой блеска этого явления выявлена «ступенька», которая может быть вызвана присутствием вблизи у покрываемой звезды слабого объекта, природа которого неизвестна. Определены координаты Тритона на средний момент покрытия.

Поступило 03.04.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Smith B.A., Soderblom L.A., Banfield D. et al. (62 coauthors). Voyager 2 at Neptune – Imaging science results. – Science, 1989, v.246, Issue 4936, pp.1422-1449.
2. Ingersoll A.P. Dynamics of Triton's atmosphere. – Nature, 1990, v.344, pp. 315-317.
3. Yelle R.V., Lunine J.I., Pollack J.B., Brown R.H. Lower atmospheric structure and surface-atmosphere interactions on Triton. – In: Neptune and Triton (ed. D.P. Cruikshank), 1995, Univ. of Arizona Press, Tucson, 1021 p.
4. Elliot J.L., Strobel D.F., Zhu X., Stansberry J.A., Wasserman L.H., Franz O.G. The Thermal Structure of Triton's Middle Atmosphere. – Icarus, 2000, v.143, Issue 2, pp. 425-428.
5. Elliot J.L., Person M.J., McDonald S.W. et al. (15 coauthors). The Prediction and Observation of the 1997 July 18 Stellar Occultation by Triton: More Evidence for Distortion and Increasing Pressure in Triton's Atmosphere. – Icarus, 2000, v.148, Issue 2, pp. 347-369.
6. Benne B., Dobrijevic M., Cavalié T., Loison J-C., Hickson K.M. A photochemical model of Triton's atmosphere with an uncertainty propagation study. – Astronomy & Astrophysics, 2022, v.667, id. A169, 22 p.
7. Львов В.Н., Цекмейстер С.Д. Использование программного пакета ЭПОС для исследования объектов Солнечной системы. – Астроном. вестник, 2012, т.46, №2, с.190-192. (L'vov V.N., Tsekmeister S.D. The use of the EPOS software package for research of the solar system objects. – Solar System Research, 2012, v.46. Issue 2, pp.177-179).

8. Кохирова Г.И., Львов В.Н., Цекмейстер С.Д., Горшанов Д.Л., Девяткин А.В., Хамроев У.Х., Буриев А.М. Определение орбиты астероида 2014 JO25 по наблюдениям в Таджикистане. – ДАН РТ, 2018, т.61, №5, с.440-446.
9. Девяткин А.В., Горшанов Д.Л., Куприянов В.В., Верещагина И.А. Программные пакеты “Апекс-I” и “Апекс-II” для обработки астрономических ПЗС-наблюдений. – Астроном. вестник, 2010, т. 44, № 1, с. 74-87. (Devyatkin A.V., Gorshanov D.L., Kouprianov V.V., Verestchagina I.A. APEX I and APEX II software packages for the reduction of astronomical CCD observations. – Solar System Research, 2010, v.44. pp. 68-80).
10. Романов Ф.Д. <https://astronomy.ru/forum/index.php/topic,283.3260.html>, июнь 2023 г.

Г.И.Кохирова, Ф.Ч.Рахматуллоева, Д.Л.Горшанов*, В.Н.Львов*, А.В.Девяткин*, М.Н.Латипов

МУШОҲИДАҶОИ ГИРИФТИ СИТОРА АЗ ҶОНИБИ РАДИФИ НЕПТУН ТРИТОН ДАР РАСАДҶОНАИ САНГЛОХ

*Институту астрофизикаи АМИ Тоҷикистон,
Саррасадҳонаи астрономии (Пулковои) АИ Россия

6-уми октябри соли 2022 бо телескопи Тсейсс-1000-и расадҳонаи Санглох гирифти ситораи TYC 5254-00839-1 аз ҷониби радифи табиӣ Нептун Тритон мушоҳида шуд. Хати қачи дурахшонии ситора сохта шуда, маълум гардид, ки қитъаҳои камшавӣ ва баландшавии дурахшонӣ давомнокии интиҳоияшон аз 15 то 24 сонияро ташкил медиҳанд. Ин, аз ҳузур доштани атмосфера дар Тритон шаҳодат медиҳад. Дар хати қачи дурахшонии ин падида «қадам» ошкор гардид, ки дар наздикии гирифти ситора, будани ҷирми заифро нишон медиҳад. Координатҳои астрометрии саҳеҳи Тритон барои лаҳзаҳои миёнаи гирифт муайян карда шуданд.

Калимаҳои калидӣ: Тритон, гирифти ситора, координатҳо, хати қачи дурахшонӣ.

G.I.Kokhirova, F.D.Rakhmatullaeva, D.L.Gorshanov*, V.N.L'vov*, A.V.Devyatkin*, M.N.Latipov

OBSERVATIONS OF THE OCCULTATION OF A STAR BY NEPTUNE'S SATELLITE TRITON AT SANGLOKH OBSERVATORY

*Institute of Astrophysics, NAS of Tajikistan,
Main (Pulkovo) astronomical observatory of Russian Academy of Sciences

Optical observations of the occultation of the star TYC 5254-00839-1 by Neptune's satellite Triton were made with the Zeiss-1000 telescope at the Sanglokh observatory on October 6, 2022. The light curve of the star was constructed and it was found that the segments of the decrease and increase in brightness had a finite duration from 15 to 24 seconds. This, apparently, is due to the presence of an atmosphere in Triton. A “step” was revealed on the light curve of this phenomenon, which may indicate the possible presence of a close faint object near the occulted star. The high-precision astrometric coordinates of Triton for the average occultation moment are determined.

Key words: Triton, occultation of a star, coordinates, light curve.

Сведения об авторах:

1. **Кохирова Гулчехра Исроиловна** – доктор физ.-мат. наук, член-корреспондент НАН Таджикистана, Институт астрофизики НАН Таджикистана, директор, заведующая отделом межпланетных тел. E-mail: kokhirova2004@mail.ru.
2. **Рахматуллаева Фируза Джамшедовна** – кандидат физ.-мат. наук, Институт астрофизики НАН Таджикистана, заместитель директора по научной работе, старший научный сотрудник отдела межпланетных тел, . E-mail: rahmat.firuz@gmail.com.
3. **Девяткин Александр Вячеславович** – доктор физ.-мат. наук, Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория Российской академии наук (ГАО РАН), заведующий лабораторией наблюдательной астрометрии. E-mail: adev@gaoran.ru.
4. **Львов Виктор Николаевич** – кандидат физ.-мат. наук, Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория Российской академии наук (ГАО РАН), заведующий сектором эфемеридного обеспечения. E-mail: epos@gaoran.ru.
5. **Горшанов Денис Леонидович** – кандидат физ.-мат. наук, Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория Российской академии наук (ГАО РАН), старший научный сотрудник лаборатории наблюдательной астрометрии. E-mail: dengorsh@mail.ru.
6. **Латипов Манучехр Нурахмадович** – Институт астрофизики НАН Таджикистана, научный сотрудник отдела межпланетных тел. E-mail: manu90_90@mail.ru.

УДК 530.1

Специальность: 1.3.8 – Физика конденсированного состояния

З.Умар, М.У.Шодиев, М.С.Курбониён, Томоюки Ямамото *

академик НАН Таджикистана Ф.Рахими **

**ПЕРВОПРИНЦИПНЫЕ РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРОННОЙ СТРУКТУРЫ $KMgF_3$,
ЛЕГИРОВАННОГО ИОНАМИ Cr^{3+} ПОД ДАВЛЕНИЕМ***Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана,*** Факультет науки и техники Университета Васэда, Токио, Япония**** Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана*

В статье представлены результаты квантово-механических расчетов основного электронного строения кристаллического $KMgF_3$, легированного ионами Cr^{3+} под давлением, в рамках теории функционала плотности. Вычислены параметры кристаллического поля ($10Dq$) и длины красного излучения фосфорного материала $KMgF_3:Cr^{3+}$ в диапазоне давления 0-40 ГПа.

Ключевые слова: фосфор, теория функционала плотности, параметр кристаллического поля ($10 Dq$), энергия излучения, давление.

Нанокристаллические материалы, легированные ионами с $3d^3$ электронной конфигурации (Mn^{4+} , Cr^{3+}), являются перспективным материалом в связи с их потенциальным применением в голографии, оптоэлектронике, спинтронике, лазерной технологии, медицине, агротехнике, дозиметрии и т.д. [1-3].

В частности, нанокристаллические материалы, легированные ионами Cr^{3+} , стали объектом интенсивного исследования в связи с их практическим использованием в качестве источника инфракрасного излучения [4].

В статьях [5, 6] приведены результаты работ по синтезу, структуре и люминесцентным свойствам нанокристаллических оксидов и фторидов, легированных ионами Cr^{3+} . В работах [7-12] нами были исследованы электронные структуры люминофоров, легированных ионами Mn^{4+} в рамках теории функционала плотности, а в работе [13] геометрические, электронные и механические свойства K_2SiF_6 , легированного ионами Mn^{4+} , в рамках теории функционала плотности под давлением.

Согласно многочисленным экспериментальным и теоретическим работам, кристаллические материалы со структурой перовскита могут быть хорошими матрицами для легирования иона Cr^{3+} .

В настоящей работе представлены результаты квантово-механических расчётов электронной структуры фторида со структурой перовскита $KMgF_3$, легированного ионами Cr^{3+} под давлением. Рассчитаны параметры кристаллического поля ($10 Dq$) и длина излучения $KMgF_3:Cr^{3+}$ в диапазоне давления 0-40 ГПа.

Адрес для корреспонденции: Зафари Умар. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАНТ. E-mail: zafari_umar@mail.ru

Метод расчета

Нанокристаллический фторид $KMgF_3$ имеет кубическую структуру с пространственной группой $Fm-3m$ (порядковый номер №221). Оптимизация геометрических структур проведена с помощью программного пакета VASP [14] и GGA-PBE приближения [15].

Для моделирования электронной структуры $KMgF_3$, легированного ионами Cr^{3+} , использовалась суперячейка размером $4 \times 4 \times 4$ из 40 атомов. Далее замещается один атом Mg на ион Cr^{3+} . При этом ион Cr^{3+} находится в октаэдрическом окружении шести ионов F . Для балансировки заряда в системе удаляется один электрон из общего числа электронов.

Результаты и их обсуждение

В таблице приведены оптимизированные значения параметров кристаллической решетки и длина связи в $KMgF_3$ и $KMgF_3$, легированного ионами Cr^{3+} . Из-за разницы в ионных радиусах ионов Mg^{2+} и Cr^{3+} , параметры кристаллической решетки и длина связи $Cr-F$ в $KMgF_3$ после легирования иона Cr^{3+} уменьшается.

Таблица

Значения параметров кристаллической решетки и длина связи в $KMgF_3$ и $KMgF_3:Cr^{3+}$

System		Calc. (Å)	Exp. (Å)
$KMgF_3$	a	4.06	3.989 ^[16]
	Mg-F	2.029	
$KMgF_3:Cr^{3+}$	a	4.02	
	Cr-F	1.931	

На рис. 1 и 2 приведены результаты квантово-механических расчетов электронной структуры нелегированного $KMgF_3$ и $KMgF_3$, легированного ионами Cr^{3+} в рамках GGA-PBE приближения.

В запрещенной зоне $KMgF_3$, легированного ионами Cr^{3+} , формируются новые спин-вверх и спин-вниз электронные состояния. Анализ парциальных электронных состояний показывает, что эти состояния формируются за счет $3d$ -электронных состояний иона Cr^{3+} . В правильном октаэдрическом поле пять d -орбиталей иона Cr^{3+} расщепляются на две группы. Одна группа состоит из трех орбит d_{yz} , d_{zx} , d_{xy} , а другая — из двух $d_{z^2-r^2}$, $d_{x^2-y^2}$. Орбиты первой группы называются t_{2g} , а второй — e_g . Для обозначения энергетической щели между t_{2g} и e_g орбиталями используют символ Δ или $10Dq$. Энергетические разницы t_{2g} и e_g между спин-вверх электронными состояниями отличаются друг от друга. Согласно теории кристаллического поля, энергетическая разница $E(e_g)-E(t_{2g})=10Dq$ определяет параметр кристаллического поля, где q - заряд лиганда, D - величина, зависящая от геометрии кристаллического поля. Исходя из этого, рассчитанный параметр кристаллического поля $10Dq$ в рамках GGA расчётов равен 2.43 эВ. По энергетической разнице спин-вверх t_{2g} и спин-вниз t_{2g} состояния можно определить энергию красной полосы излучения. Согласно нашему расчёту энергия излучения при 0 ГПа равна 3.06 эВ.

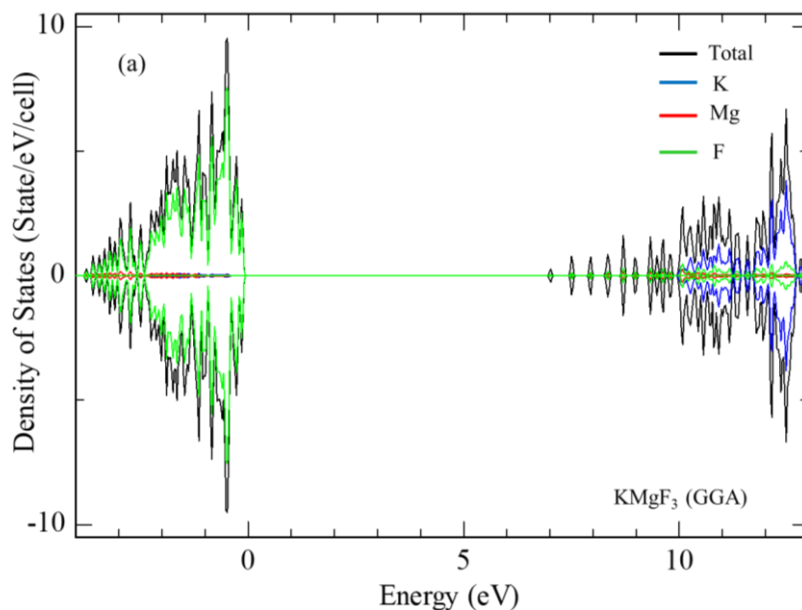


Рис. 1. Общая плотность состояний $KMgF_3$ при GGA расчетах.

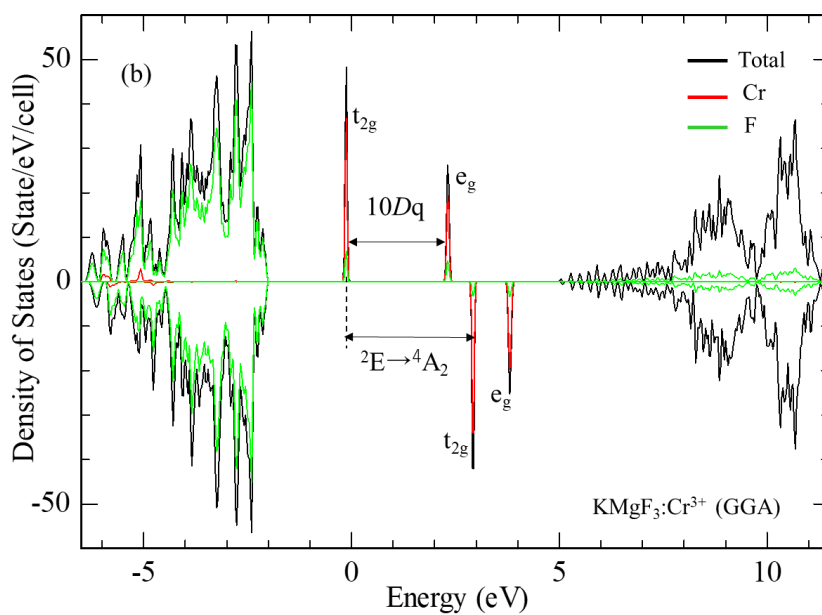


Рис. 2. Общая плотность состояний $KMgF_3$, легированного ионами Cr^{3+} , при GGA расчетах.

Для обсуждения влияния давления на электронную структуру $KMgF_3:Cr^{3+}$, рассчитаны плотности состояния при различных давлениях от 0 до 40 ГПа с шагом 5 ГПа (рис. 3). Энергетические положения t_{2g} и e_g состояния изменяются под давлением. Например, спин-вниз t_{2g} -состояния смещается в сторону более низкой энергии, в то время как e_g -состояния со спином вверх смещается в сторону более высоких энергий с увеличением давления.

Зависимость изменения параметров кристаллического поля $10 Dq$ и энергии излучения ${}^2E-{}^4A_2$ (E_{em}) от давления приведено на рис. 4. Согласно полученным результатам параметр $10 Dq$ линейно увеличивается по мере увеличения давления. Линейное уравнение $10Dq=0.00346P+3.0577$ описывает зависимость параметра $10 Dq$ от давления. На рис. 5 показаны зависимости параметров $10 Dq$ и E_{em}

как функции длины связи Cr-F. Параметр $10 Dq$ линейно уменьшается, а энергия E_{em} линейно увеличивается с увеличением длины связи Cr-F, соответственно. Линейно описывающие уравнения приведены на рис. 5. Этот результат означает, что, используя эти уравнения можно оценить влияние давления на параметр $10 Dq$ и E_{em} для других фторидов, легированных ионами Cr^{3+} .

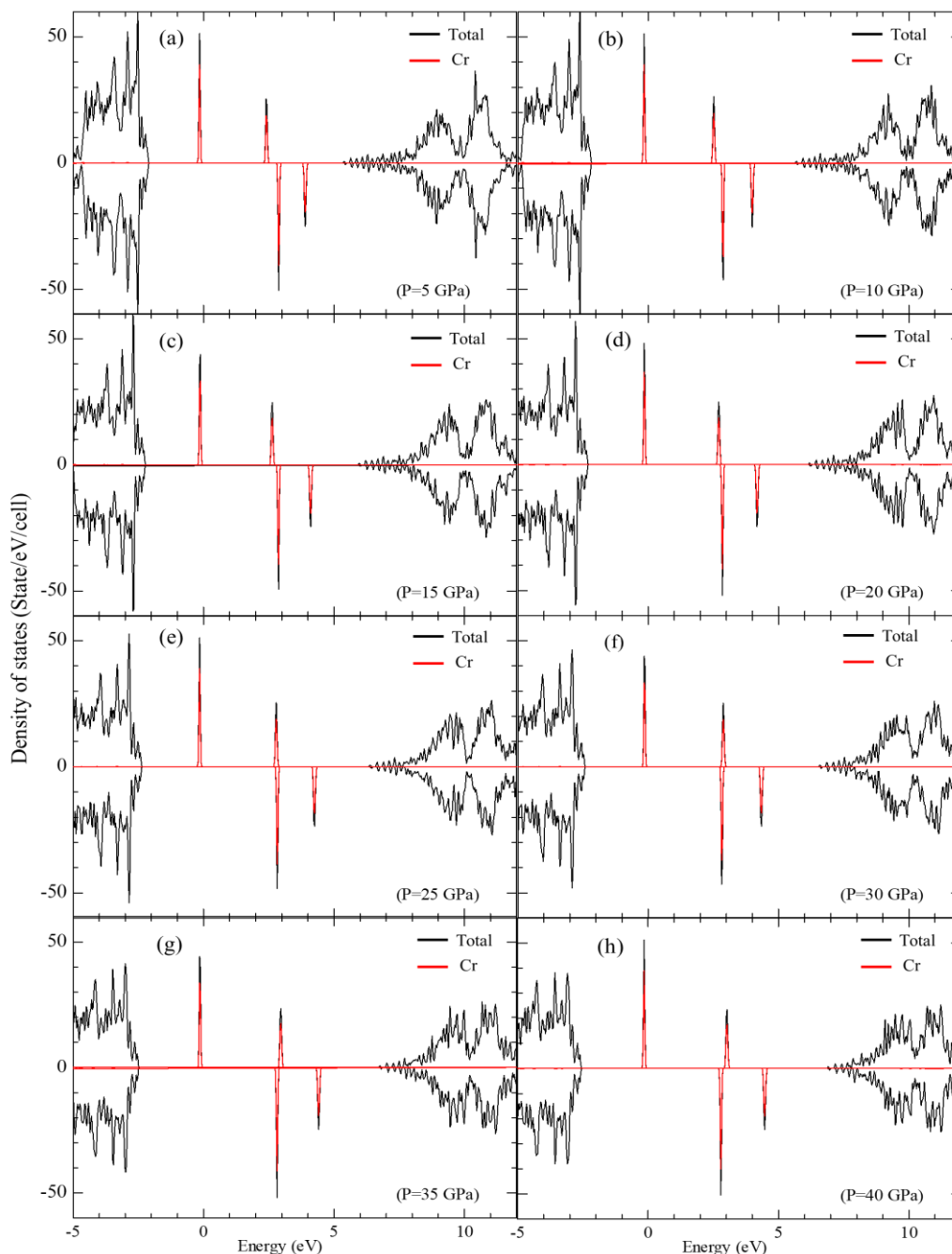


Рис. 3. Общая плотность состояний $KMgF_3$, легированного ионами Cr^{3+} при различных значениях давления (0-40 ГПа), при GGA расчетах.

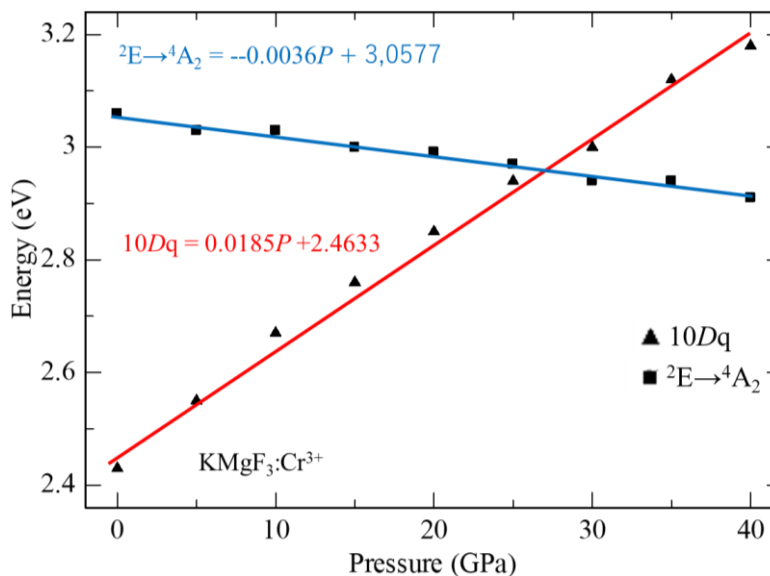


Рис. 4. Энергия излучения E_{em} и параметр $10Dq$ для $KMgF_3$, легированного ионами Cr^{3+} , как функции зависимости от давления. Сплошные линии — линейная аппроксимация методом наименьших квадратов.

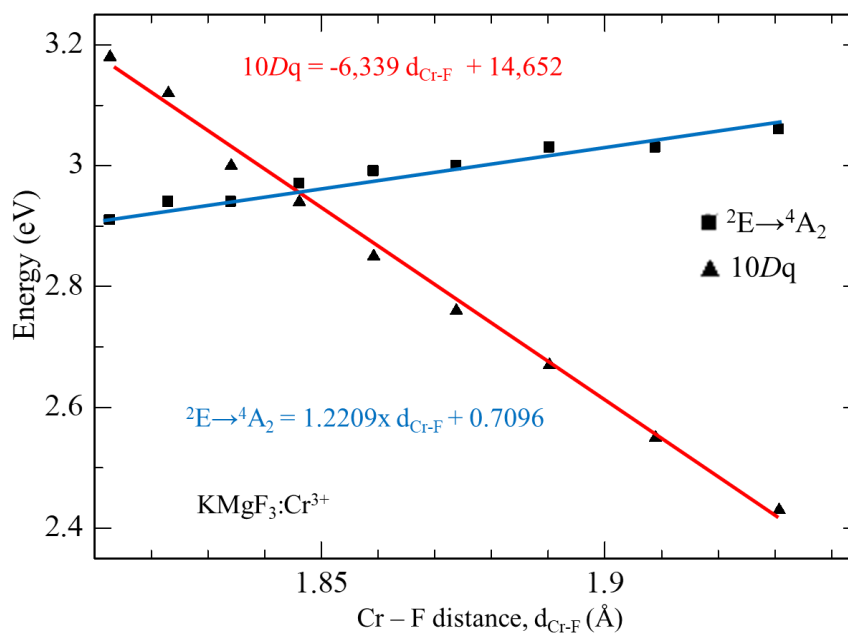


Рис. 5. Параметры $10 Dq$ и E_{em} для $KMgF_3:Cr^{3+}$ как функции зависимости от длины связи Cr-F

З а к л ю ч е н и е

Расчеты из первых принципов были проведены для нелегированного и легированного $KMgF_3:Cr^{3+}$ с целью изучения влияния давления на геометрическую структуру и электронные свойства люминофора $KMgF_3:Cr^{3+}$. Были исследованы зависимости от давления двух важных электронных параметров: $10 Dq$ и энергии излучения ${}^2E \rightarrow {}^4A_2$. Можно отметить, что настоящий анализ влияния давления на $10 Dq$ и энергия излучения ${}^2E \rightarrow {}^4A_2$ позволяет получить эмпирические формулы для получения этих значений в зависимости от длины связи между Cr^{3+} и окружающими ионами F^- , которые

могут использоваться для оценки этих важных параметров для других фторидов, легированных ионами Cr^{3+} .

Б л а г о д а р н о с т ь

Работа была поддержана фондом института ZAIKEN университета Васэда Японии (гранты № 02117, 02021, 02022, 02214, 02215 и 02320).

Поступило 15.03.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Setlur A.A., Radkov E.V., Henderson C.S., Her J.H., Srivastava A.M., Karkada N., Kishore M.S., Kumar N.P., Aesram D., Deshpande A., Kolodin B., Grigorov L.S., Happek U. Energy efficient high color rendering LED lamps using oxyfluoride and fluoride phosphors. – Chem. Mater., 2010, № 22, pp.4076-4082.
2. Loutts G.B., Warren M., Taylor L., Rakhimov R.R., Ries H.R., Miller G., Curley M.A., Noginova N., Kukhtarev N., Caulfeld H.J., Venkateswarlu P. Manganese doped yttrium orthoaluminate: A potential material for holographic recording and data storage. – Phys. Rev. B: Condens. Matter Mater. Phys., 1998, v.57, pp.3706-3709.
3. Zhydachevskii Y., Galanciak D., Kobayakov S., Berkowski M., Kamińska A., Suchocki A., Zakharko Y., Durygin A. Photoluminescence studies of Mn^{4+} ions in YAlO_3 crystals at ambient and high pressure. – J. Phys.: Condens. Matter., 2006, v.18, №49, pp.11385-11397.
4. Sadao Adachi. Review—Photoluminescence Properties of Cr^{3+} -Activated Oxide Phosphors. – ECS Journal of Solid State Science and Technology, 2021, (10) 026001
5. Brik M.G., Camardello S.J., Srivastava A.M., Avram N.M., Suchockic A. Spin-Forbidden Transitions in the Spectra of Transition Metal Ions and Nephelauxetic Effect. – ECS Journal of Solid State Science and Technology, 5 (1) R3067-R3077 (2016).
6. Makoto Sugiyama, Takayuki Yanagida, Daisuke Totsuka, Yuui Yokota, Yoshisuke Futami, Yutaka Fujimoto, Akira Yoshikawa. Crystal growth and luminescence properties of Cr-doped YAlO_3 single crystals. - Journal of Crystal Growth, 2013, 362, pp.157–161
7. Умар З., Курбониён М.С., Томоюки Ямамото, Рахими Ф. Теоретическое моделирование электронного строения $\text{LaScO}_3:\text{Mn}^{4+}$ в рамках теории функционала плотности. – ДАН РТ, 2019, т.62, №3-4, с.175-181.
8. Mekhrdod Subhoni, Umar Zafari, Tomoyuki Yamamoto. Electronic Structure Analysis of Mn-Doped CaMO_3 Perovskites. – AMTC Letter (International Journal of Advanced Microscopy and Theoretical Calculations (ISSN 1892-9465)), 2019, v.6, pp.256-257.
9. Умар З., Курбониён М.С., Томоюки Ямамото, Рахими Ф. Квантово-механический расчет электронной структуры $\text{CaAl}_{12}\text{O}_{19}:\text{Mn}^{4+}$ в рамках теории функционала плотности. – ДАН РТ, 2020, т.63, №1-2, с.64-70.
10. Musashi Sagayama, Umar Zafari, Mekhrdod Subhoni, Alok M Srivastava, William W. Beers, William E. Cohen, Mikhail G. Brik, Tomoyuki Yamamoto. Theoretical and Experimental Investigations of Mn^{4+} Site Occupation in $\text{CaAl}_{12}\text{O}_{19}$. – ECS Journal of Solid State Science and Technology, 2021, v.10, №7, pp.076004.

11. Умар З., Шокир Ф., Рахими Ф., Субхони М., Ямамото Т. Электронная структура фосфорных материалов SrZrO_3 и SrHfO_3 , легированных ионами Mn^{4+} . – Известия национальной академии наук Таджикистана. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. наук, 2021, №1(182), с.58-67.
12. Курбониён М.С., Умар З., Томоюки Ямамото, Рахими Ф. Первопринципные расчеты электронной структуры AMO_3 ($A=\text{Ca, Sr}$; $M=\text{Sn, Zr, Ti, Hf}$), легированного ионами Mn^{4+} . – Доклады национальной академии наук Таджикистана, 2021, т.64, №1-2, с.71-77.
13. Mekhrdod Subhoni, Umar Zafari et al. Influence of Isostatic Pressure on the Elastic and Electronic Properties of $\text{K}_2\text{SiF}_6:\text{Mn}^{4+}$. – Materials, 2022, 15, pp.613.
14. Kresse G., Furthmüller J. Efficient iterative schemes for Ab initio total-energy calculations using a plane-wavebasis set. – Phys. Rev. B 54 (1996), pp.11169-11186.
15. Perdew J.P., Ruzsinszky A., Csonka G.I., Vydrov O.A., Scuseria G.E, Constantin L.A., Zhou X., Burke K. Restoring the density-gradient expansion for exchange in solids and surfaces. – Phys. Rev. Lett. 100 (2008), 136406.
16. Chakhmouradian A.R., Ross K., Mitchell R.H., Swainson I. – Phys. Chem., Miner., 2001, 28, pp.277.

З.Умар, М.У.Шодиев, М.С. Курбониён, Томоюки Ямамото*, Ф.Рахимӣ**

ҲИСОБҲОИ СОҲТОРИ ЭЛЕКТРОНИИ KMgF_3 БО ИОНИ Cr^{3+}

ИЛОВАКАРДАШУДА ДАР ЗЕРИ ФИШОР БО МЕТОДИ ПРИНСИПИ АВВАЛ

Маркази рушди инноватсионии илм ва технологияҳои нави

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

** Факултети илм ва техникаи Донишгоҳи Васэда, Токио, Япония,*

*** Институти физикаву техникаи ба номи С.У.Умарови Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар ин мақола натиҷаҳои ҳисоббарориҳои квантӣ-механикии маводи фосфории бо иони Cr^{3+} иловакардашуда дар зерӣ фишор дар диапозони 0-50 ГПа дар доираи назарияи функционали зичӣ омукта шуда аст. Қиматҳои ададӣ барои ду параметри муҳими электронӣ – параметри майдони кристаллӣ $10Dq$ ва энергияи афканишот E_{em} ҳисоб карда шуда, вобастагии ин параметрҳо аз фишор ва дарозии банди химиявии Cr-F муайян карда шуда аст.

Калимаҳои калидӣ: *фосфор, назарияи функционали зичӣ, параметри кристаллии майдон ($10 Dq$), энергияи афканишот, фишор.*

Z.Umar, M.U.Shodiev, M.Subhoni, Tomoyuki Yamamoto*, F.Rahimi**

THE FIRST-PRINCIPLES CALCULATIONS OF THE ELECTRONIC STRUCTURE OF Cr⁴⁺ DOPED KMgF₃

*Centre for innovative development of science and new technologies
of the National academy of sciences of Tajikistan,*

**Faculty of Science and Engineering Waseda University, Tokyo, Japan,*

***S.U.Umarov physical-technical institut of the National academy of sciences of Tajikistan*

The article presents the results of quantum-mechanical calculations of the electronic structure of Cr³⁺ doped KMgF₃ under pressure in the range 0-50 GPa within density functional theory (DFT). The crystal field parameters (10Dq) and the emission energy of the Cr³⁺ doped KMgF₃ phosphor are estimated. The dependence of crystal field parameters (10Dq) and the emission energy E_{em} of the Cr³⁺ doped KMgF₃ on pressure and Cr-F bond length has been determined.

Key words: *phosphor, density functional theory, band gap, crystal field parameter (10 Dq), emission energy, pressure.*

Сведения об авторах:

1. **Зафари Умар** – кандидат физ.-мат. наук, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана, младший научный сотрудник, Таджикский педагогический университет им. С.Айни, старший преподаватель физического факультета. E-mail: zafari_umar@mail.ru
2. **Шодиев Мехрвар Умарович** – Таджикский технический университет им. М.С.Осими, студент четвертого курса факультета Информационной технологии и коммуникации. E-mail: mehrvarshodiev2406@mail.ru
3. **Курбониён Мехрдод Субхони** – кандидат физ.-мат. наук, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана, ведущий научный сотрудник. E-mail: mehrdod-92@mail.ru
4. **Томоюки Ямамото** – доктор физ.-мат. наук, Университет Васэда Японии, профессор факультета науки и техники, иностранный член НАН Таджикистана. E-mail: tmmt@waseda.jp
5. **Рахими Фарход Кодир** – доктор физ.-мат. наук, профессор, академик НАН Таджикистана, Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана, главный научный сотрудник Сектора теоретической физики. E-mail: frahimi2002@mail.ru

УДК 624.042

Специальность: 2.1.9 – Строительная механика.

И.И.Каландарбеков

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КАРКАСНЫХ ЗДАНИЙ С ЭЛЕМЕНТАМИ
СЕЙСМОИЗОЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ***Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Д.Н. Низомовым 28.01.2023 г.)*

В статье рассматривается применение теории подобия к моделированию фрагмента сейсмоизолированного многоэтажного здания на основе анализа дифференциальных уравнений, описывающих колебательные процессы. Получены коэффициенты подобия, соответствующие свободным и вынужденным колебаниям трехэтажной рамы.

Ключевые слова: *подобие, сейсмоизолированная модель, рама, физическое моделирование, константы подобия, параметры подобия, динамическая нагрузка.*

Сейсмоизоляция является одним из основных способов обеспечения сейсмостойкости зданий и сооружений. В мире построено более 4500 сейсмоизолированных объектов. Сейсмическая безопасность является одной из важнейших задач социально-экономического развития Республики Таджикистан, для решения которой следует использовать систему сейсмозащиты [1-3].

Проведение натуральных экспериментальных исследований, как известно, связано с определёнными трудностями. Поэтому не всегда удаётся проведение экспериментов на натуре. Следовательно, такие испытания необходимо провести на модели. Чтобы параметры, полученные при испытании модели, перенести на натуру следует провести физическое моделирование на основе теории подобия. Физическое моделирование и теория подобия нашли широкое применение в различных отраслях, в том числе при исследовании строительных конструкций зданий и сооружений. Теория подобия позволяет результаты экспериментальных исследований, получаемые на моделях, переносить на реальные объекты [4-7]. Физическое моделирование используется при проектировании и строительстве различных объектов, где предусматривается применение новых конструктивных решений с целью повышения их сейсмостойкости. Если физическая модель подобна натуре, то результаты эксперимента через константы подобия могут быть пересчитаны на оригинале. Безразмерные константы подобия, выражающие отношение одноименных величин в натуре и модели, изменяются от соотношения размеров натуре и модели. Проведение модельных испытаний даёт возможность правильно оценить динамические характеристики будущей конструкции и внести соответствующие изменения в процессе проектирования.

Объектом исследования является модель многоэтажного здания, установленная на виброплатформе.

Адрес для корреспонденции: Каландарбеков Ифтихор Имомёрбекович. 734042, Республики Таджикистан, г. Душанбе, пр. акад. Раджабовых, 10А. Таджикский технический университет. E-mail: iftikhor791@mail.ru

Пример. Сейсмоизолированная модель, установленная на виброплатформе (рис.1а). Предполагается, что металлическая виброплатформа массой m_1 устанавливается на четырёх стойках с жестко заземленными концами. Расчетная модель этой системы представлена на рис.1б. Здесь мы имеем систему с пятью степенями свободы. Система дифференциальных уравнений представляется

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{w}_1 + c_{11} \dot{w}_1 + c_{12} \dot{w}_2 + k_{11} w_1 + k_{12} w_2 &= P \sin \theta t, \\
 m_2 \ddot{w}_2 + c_{21} \dot{w}_1 + c_{22} \dot{w}_2 + c_{23} \dot{w}_3 + k_{21} w_1 + k_{22} w_2 + k_{23} w_3 &= 0, \\
 m_3 \ddot{w}_2 + c_{32} \dot{w}_2 + c_{33} \dot{w}_3 + c_{34} \dot{w}_4 + k_{32} w_2 + k_{33} w_3 + k_{34} w_4 &= 0, \\
 m_4 \ddot{w}_4 + c_{43} \dot{w}_3 + c_{44} \dot{w}_4 + c_{45} \dot{w}_5 + k_{43} w_3 + k_{44} w_4 + k_{45} w_5 &= 0, \\
 m_5 \ddot{w}_5 + c_{54} \dot{w}_4 + c_{55} \dot{w}_5 + k_{54} w_4 + k_{55} w_5 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Коэффициенты затухания и жесткости приобретают следующие значения:

$$\begin{aligned}
 c_{11} = c_1, \quad c_{12} = -c_2 = -c_{eff}, \quad k_{11} = k_1 + k_2, \quad k_{12} = -k_2 = -k_{eff}, \\
 c_{21} = c_{12}, \quad c_{22} = c_2 + c_3, \quad c_{23} = -c_3, \quad k_{21} = k_{12}, \quad k_{22} = k_2 + k_3, \quad k_{23} = -k_3, \\
 c_{32} = -c_3, \quad c_{33} = c_3 + c_4, \quad c_{34} = -c_4, \quad k_{32} = -k_3, \quad k_{33} = k_3 + k_4, \quad k_{34} = -k_4, \\
 c_{43} = -c_4, \quad c_{44} = c_4 + c_5, \quad c_{45} = -c_5, \quad k_{43} = -k_4, \quad k_{44} = k_4 + k_5, \quad k_{45} = -k_5, \\
 c_{54} = -c_5, \quad c_{55} = c_5, \quad k_{54} = -k_5, \quad k_{55} = k_5.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Для виброплатформы AB , которая опирается на стойки с изгибной жесткостью EI_1 , коэффициент жесткости которых равняется $k_1 = n \cdot 12EI_1 / h_1^3$, где n – число стоек. Если предположить, что один конец стоек шарнирно закреплен, то $k_1 = n \cdot 3EI_1 / h_1^3$. Период свободных колебаний самой виброплатформы будет равняться $T_1 = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{m_1 / k_1}$, где m_1 – масса платформы. В (2) характеристики сейсмоизоляции учитываются коэффициентами $k_2 = k_{eff}$ и $c_2 = c_{eff}$. Коэффициенты жесткости и затухания модели определяются по следующим формулам

$$k_i = n \cdot 12EI / h_i^3, \quad c_i = 2\xi \omega_i m_i, \quad \omega_i = \sqrt{k_i / m_i}, \quad i = 3, 4, 5,$$

где ω_i – парциальные частоты свободных колебаний модели.

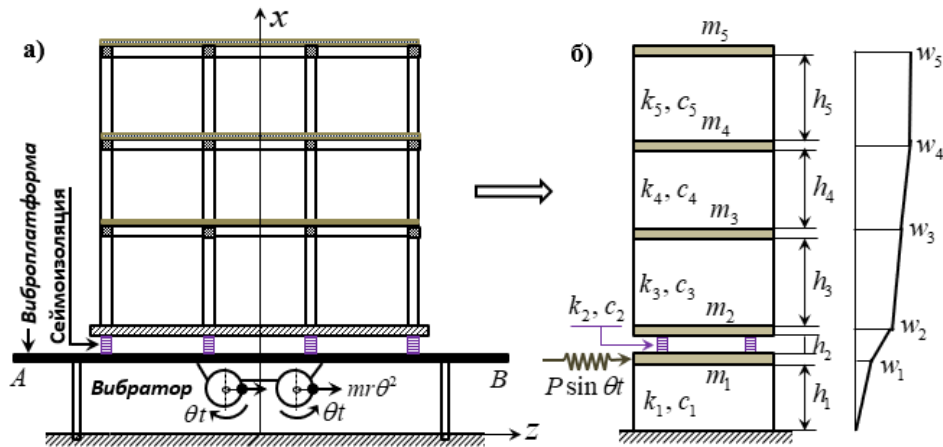


Рис. 1. Система «виброплатформа-изоляция-модель».

Систему уравнений (1), без учета побочных коэффициентов затухания, представим в безразмерном виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{m_0 \bar{m}_1 w_0}{T_1^2} \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{t}^2} + \frac{c_0 \bar{c}_{11} w_0}{T_1} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{t}} + k_0 \bar{k}_{11} w_0 \bar{w}_1 + k_0 \bar{k}_{12} w_0 \bar{w}_2 = P_0 \bar{P} \sin \theta_0 \bar{\theta} T_1 \bar{t}, \\
 & \frac{m_0 \bar{m}_2 w_0}{T_1^2} \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \bar{t}^2} + \frac{c_0 \bar{c}_{22} w_0}{T_1} \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{t}} + k_0 \bar{k}_{21} w_0 \bar{w}_1 + k_0 \bar{k}_{22} w_0 \bar{w}_2 + k_0 \bar{k}_{23} w_0 \bar{w}_3 = 0, \\
 & \frac{m_0 \bar{m}_3 w_0}{T_1^2} \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \bar{t}^2} + \frac{c_0 \bar{c}_{33} w_0}{T_1} \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial \bar{t}} + k_0 \bar{k}_{32} w_0 \bar{w}_2 + k_0 \bar{k}_{33} w_0 \bar{w}_3 + k_0 \bar{k}_{34} w_0 \bar{w}_4 = 0, \\
 & \frac{m_0 \bar{m}_4 w_0}{T_1^2} \frac{\partial^2 \bar{w}_4}{\partial \bar{t}^2} + \frac{c_0 \bar{c}_{44} w_0}{T_1} \frac{\partial \bar{w}_4}{\partial \bar{t}} + k_0 \bar{k}_{43} w_0 \bar{w}_3 + k_0 \bar{k}_{44} w_0 \bar{w}_4 + k_0 \bar{k}_{45} w_0 \bar{w}_5 = 0, \\
 & \frac{m_0 \bar{m}_5 w_0}{T_1^2} \frac{\partial^2 \bar{w}_5}{\partial \bar{t}^2} + \frac{c_0 \bar{c}_{55} w_0}{T_1} \frac{\partial \bar{w}_5}{\partial \bar{t}} + k_0 \bar{k}_{54} w_0 \bar{w}_4 + k_0 \bar{k}_{55} w_0 \bar{w}_5 = 0, \\
 & \bar{m}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{t}^2} + \pi_1 \bar{c}_{11} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{t}} + \pi_2 (\bar{k}_{11} \bar{w}_1 + \bar{k}_{12} \bar{w}_2) = \pi_3 \bar{P}_3 \sin(\pi_4 \bar{\theta} \bar{t}), \\
 & \bar{m}_2 \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \bar{t}^2} + \pi_1 \bar{c}_{22} \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{t}} + \pi_2 (\bar{k}_{21} \bar{w}_1 + \bar{k}_{22} \bar{w}_2 + \bar{k}_{23} \bar{w}_3) = 0, \\
 & \bar{m}_3 \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \bar{t}^2} + \pi_1 \bar{c}_{33} \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial \bar{t}} + \pi_2 (\bar{k}_{32} \bar{w}_2 + \bar{k}_{33} \bar{w}_3 + \bar{k}_{34} \bar{w}_4) = 0, \\
 & \bar{m}_4 \frac{\partial^2 \bar{w}_4}{\partial \bar{t}^2} + \pi_1 \bar{c}_{44} \frac{\partial \bar{w}_4}{\partial \bar{t}} + \pi_2 (\bar{k}_{43} \bar{w}_3 + \bar{k}_{44} \bar{w}_4 + \bar{k}_{45} \bar{w}_5) = 0, \\
 & \bar{m}_5 \frac{\partial^2 \bar{w}_5}{\partial \bar{t}^2} + \pi_1 \bar{c}_{55} \frac{\partial \bar{w}_5}{\partial \bar{t}} + \pi_2 (\bar{k}_{54} \bar{w}_4 + \bar{k}_{55} \bar{w}_5) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

$$\bar{t} = t / T_1, \quad \bar{w}_i = w_i / w_0, \quad \bar{m}_i = m_i / m_0, \quad \bar{k}_{ij} = k_{ij} / k_0, \quad \bar{c}_{ii} = c_{ii} / c_0.$$

Следует отметить, что параметры подобия π_i (3) совпадают с параметрами подобия для системы с одной степенью свободы. Следовательно, с увеличением степеней свободы, число параметров подобия не изменяется. В модели с сейсмоизоляцией дополнительно к параметрам подобия для модели без сейсмоизоляции появляются параметры π_{1b} и π_{2b} . Если в результате эксперимента на модели с сейсмоизоляцией мы получили записи свободных колебаний, то, используя π_{1b} или π_{2b} , в зависимости от заданных характеристик, мы определяем период свободных колебаний природы.

Вывод. На основе теории подобия получены результаты моделирования фрагмента многоэтажного здания с учетом сейсмоизоляции. Получены коэффициенты подобия, которые позволяют переходить от модели объекта к его натуре.

Поступило 10.04.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Низомов Д.Н. Численное моделирование динамических задач по расчету сейсмоизолированных зданий. – Мат. междунар. науч. конф. – НАНТ, Душанбе, 14-15 сентября 2020, с. 62-70.
2. Каландарбеков И.И. Численное моделирование зданий с учётом сейсмоизоляции. Дисс.... канд. техн. н., Душанбе, 2019, 185с.
3. Каландарбеков И.К., Низомов Д.Н., Каландарбеков И.И. Сравнительный анализ различных типов сейсмоизоляции в многоэтажных зданиях. – Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим, геол. и техн. н., 2016, №4 (165), с. 58-64.
4. Кирпичев М.В., Конаков П.К. Математические основы теории подобия. – М.: Изд-во АН СССР, 1949, 103 с.
5. Кирпичев М.В. Беседы о механике. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951, 360 с.
6. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1977, 440 с.
7. Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций. – М.: Машиностроение, 1990, 288 с.

И.И.Каландарбеков

МОДЕЛКУНОНИИ БИНОИ СИНЧЌ ДАР АСОСИ НАЗАРИЯИ МОНАНДЌ

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи акад. М.С.Осимӣ

Дар мақола истифодабарии назарияи монандӣ барои моделкунонии фрагменти бинои бисёррошонаи дорои маҳдудкунакҳои сейсмикӣ дар асоси таҳлили муодилаҳои дифференциалӣ, ки ҷараёни лапширо ифода менамоянд, дида баромада шудааст. Коэффисиентҳои монандӣ, ки ифодакунандаи лапшиши озод ва маҷбурии рамаи сеошона мебошанд, пайдо карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: монандӣ, модели дорои маҳдудкунакҳои сейсмикӣ, рама, моделкунонии физикӣ, монандии доимӣ, параметрҳои монандӣ, борҳои динамикӣ.

I.I.Kalandarbekov

MODELING OF FRAME WITH SEISMIC ISOLATION ELEMENTS BASED ON THE THEORY OF SIMILARITY

M.S.Osimi Tajik Technikal University

The article discusses the application of the similarity theory to modeling a fragment of a seismically isolated multi-storey building based on the analysis of differential equations describing oscillatory processes. Similarity coefficients corresponding to free and forced vibrations of a three-story frame are obtained.

Key words: *similarity, seismically isolated model, frame, physical modeling, similarity constants, similarity parameters, dynamic lo.*

Сведения об авторе:

1. **Каландарбеков Ифтихор Имомёрбекович** – кандидат техн. наук, Таджикский технический университет им. М.С.Осими, заведующий кафедрой гидротехнических сооружений и охраны водных ресурсов факультета «Строительство и архитектура».

УДК 622.341.11

Специальность: 1.4.1 – Неорганическая химия

К.И.Нематуллоев, Н.А.Ашурзода, А.С.Курбонов, И.М.Рахимов,
академик НАН Таджикистана У.М.Мирсаидов

СПЕКАТЕЛЬНЫЙ СПОСОБ РАЗЛОЖЕНИЯ МАГНЕТИТОВОЙ РУДЫ МЕСТОРОЖДЕНИЯ ХАРАНГОН ТАДЖИКИСТАНА

Институт химии им.В.И.Никитина НАН Таджикистана

Представлены результаты исследований спекательно-солянокислотного способа разложения магнетитовой руды Харангонского месторождения Таджикистана. Определены оптимальные условия спекательного солянокислотного разложения спека магнетитовой руды с карбонатом натрия.

Ключевые слова: магнетитовая руда, выщелачивание, спекание, разложение, извлечение, карбонат натрия.

Как известно, железо – самый полезный металл на Земле. По распространению в природе железо занимает среди металлов второе место после алюминия, а по содержанию в земной коре оно стоит на четвёртом месте. Главные руды железа – это гематит Fe_2O_3 , магнетит – Fe_3O_4 , лимонит $\text{FeO}(\text{OH})$ и сидерит – FeCO_3 .

Техническое получение и металлургия железа представляют собой обширную область, которая здесь описана не будет. Химически чистое железо можно получить восстановлением чистой окиси железа (которая получается при термическом разложении оксалата, карбоната или нитрата двухвалентного железа) при действии водорода, электролизом водных растворов солей железа, а также при термическом разложении карбонила железа [1].

Особое значение имеют хлоридные и сульфатные соединения железа. Например, хлорид железа (III) используется для очистки вод (коагулянты), травления и очистки металлов, в органической химии в качестве катализатора и т.д. [2-4].

Для выделения оксидов железа широко используется метод спекания с различными реагентами [5, 6].

Наиболее ценны в промышленном отношении руды, в которых преобладающими минералами являются безводные оксиды железа - магнетит и гематит. В Таджикистане имеется множество месторождений с высокими содержаниями железа.

По геологоразведочным данным, на территории Варзобского ущелья – в Харангоне расположено огромное месторождение железосодержащей руды – магнетита, который содержит более 80% Fe_2O_3 .

Адрес для корреспонденции: Курбанов Амиршо Сохибназарович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ, E-mail: amirsho_77@mail.ru.

В настоящей работе изучено взаимодействие руды магнетита месторождения Харангон Таджикистана спеканием с Na_2CO_3 с последующим выщелачиванием соляной кислотой.

Для химического анализа руды использован метод комплексонометрии, пламенно-фотометрический метод и атомно-абсорбционный метод [7-9]. Методика эксперимента была разработана с учётом параллельных образцов руд, с использованием среднего значения анализа. Спекание руд с содой проводили в муфельной печи СШОЛ. Затем спёк обрабатывали соляной кислотой.

С целью установления минералогического состава вышеуказанной железосодержащей руды, нами проведён РФА проб данной руды, результаты которого представлены на рис.1.

Рентгенофазовый и дифференциально-термический анализы проводили на усовершенствованных аппаратах с программным обеспечением марки ДРОН-2 и на дериватографе Q-1500 фирмы МОМ системы Паулик-Эрдей с рабочим диапазоном температуры от комнатной до 1000°C . Скорость нагрева $10^\circ/\text{мин}$ с автоматической загрузкой образцов.

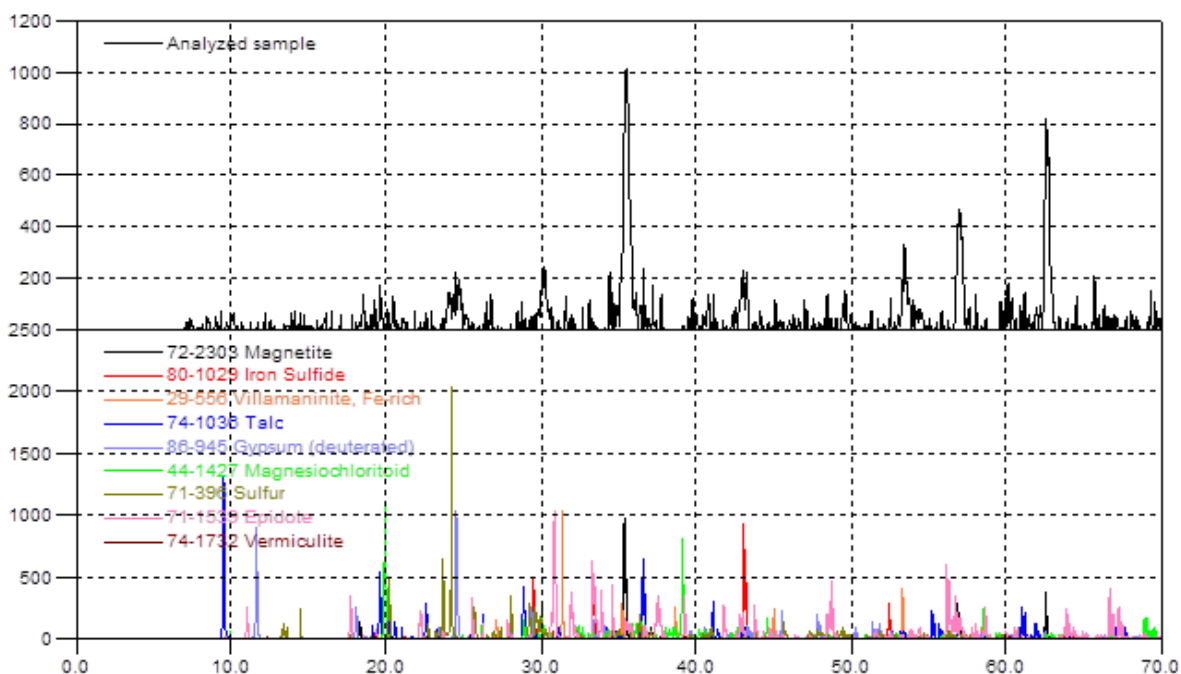


Рис. 1. Рентгенограмма магнетитовой руды месторождения Харангон.

Рентгенофазовый анализ (РФА) проводили на всех этапах работы от исходных веществ до конечных продуктов, учитывая процесс спекания и водно-кислотной обработки. ДТА проводили также последовательно во всех этапах эксперимента.

В таблице приведён химический и минералогический составы магнетитовой руды месторождения Харангон Таджикистана.

Согласно РФА, основными железосодержащими минералами руды являются магнетит – Fe_3O_4 , пирит – FeS_2 , халькопирит – $(\text{Cu}, \text{Fe})\text{S}_2$, магниохлорит – $(\text{Mg}, \text{Fe})\text{Al}_2\text{SiO}_5(\text{OH})_2$ и др.

Разложение руды при более мягких условиях, а также более эффективно достигается при спекании навески с небольшим количеством соды и последующим разложением спёка соляной кислотой. Такой путь разложения обеспечивает почти полное извлечение железа в раствор.

Таблица

Химический и минералогический составы магнетитовые руды
месторождения Харангон Таджикистана

Химический состав магнетитовой руды месторождения Харангон								
Содержание, мас%	Fe ₂ O ₃ ·FeO	Al ₂ O ₃	MgO	CaO	TiO ₂	Na ₂ O	SO ₃	SiO ₂
	63.91	3.8	5.98	0.21	0.18	0.79	0.41	11.52
Минералогический состав								
Главные рудные минералы				магнетит				
Второстепенные рудные минералы				пирит, ярозит				
Редкие рудные минералы				халькопирит				
Главные нерудные минералы				хлорит, эпидот, серпентин, амфибол				
Второстепенные рудные минералы				талк, гипс, сера				

Для этого навеску руды 5 г поместили в платиновый тигель и смешали с помощью стеклянной палочки с 3 г чистого Na₂CO₃. Тигель покрывали крышкой и нагревали в муфельном печи при температуре 900° в течение 2-3 мин. Полученный спёк обработали соляной кислотой, результаты данного исследования приведены на рис. 2.

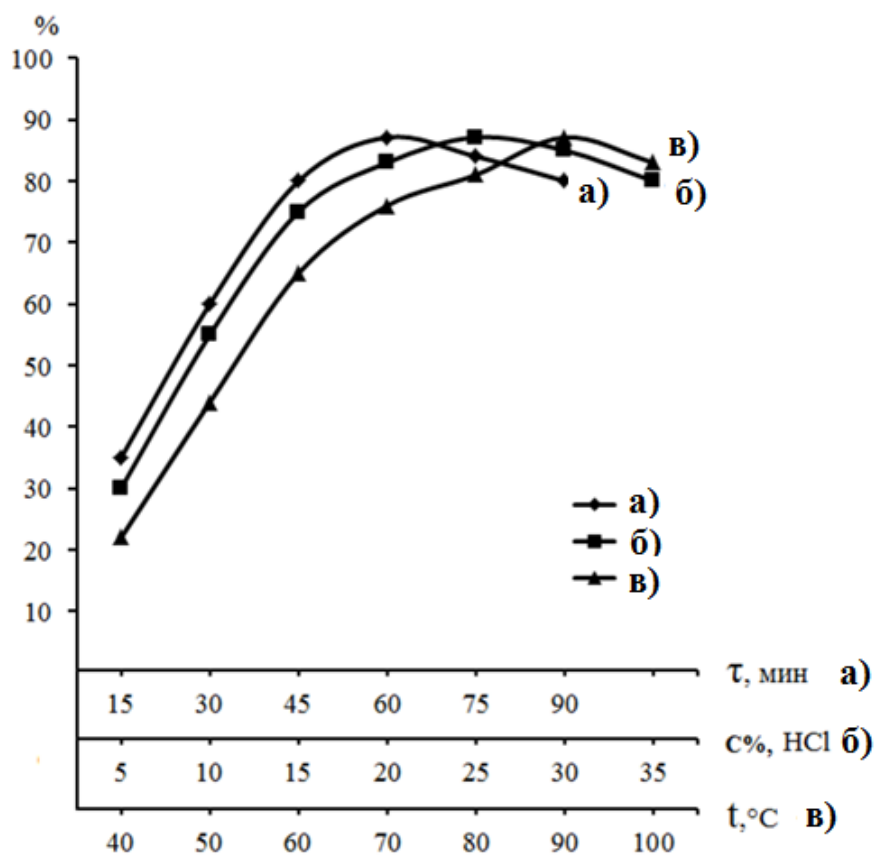


Рис. 2. Зависимости степени извлечения Fe₂O₃ из состава спека магнетитовой руды с использованием Na₂CO₃ от: а) продолжительности процесса; б) концентрации HCl; в) температуры.

Влияние продолжительности процесса на степени извлечения Fe₂O₃ при вскрытии спёка изучали в интервале времени от 15 до 90 мин (рис. 2а). Результаты проведённых опытов показали, что при увеличении времени кислотной обработки до 60 мин степень извлечения Fe₂O₃ постепенно увеличивается и достигает максимального значения 87.3%.

Результаты исследования влияния концентрации соляной кислоты на разложение спекса исходной магнетитовой руды с хлоридом натрия приведены на рис. 26. Концентрация соляной кислоты изменялась от 5 до 35 мас%. С ростом концентрации соляной кислоты 5-25% степень извлечения Fe_2O_3 возрастает, составляя 30.14-87.25%, соответственно.

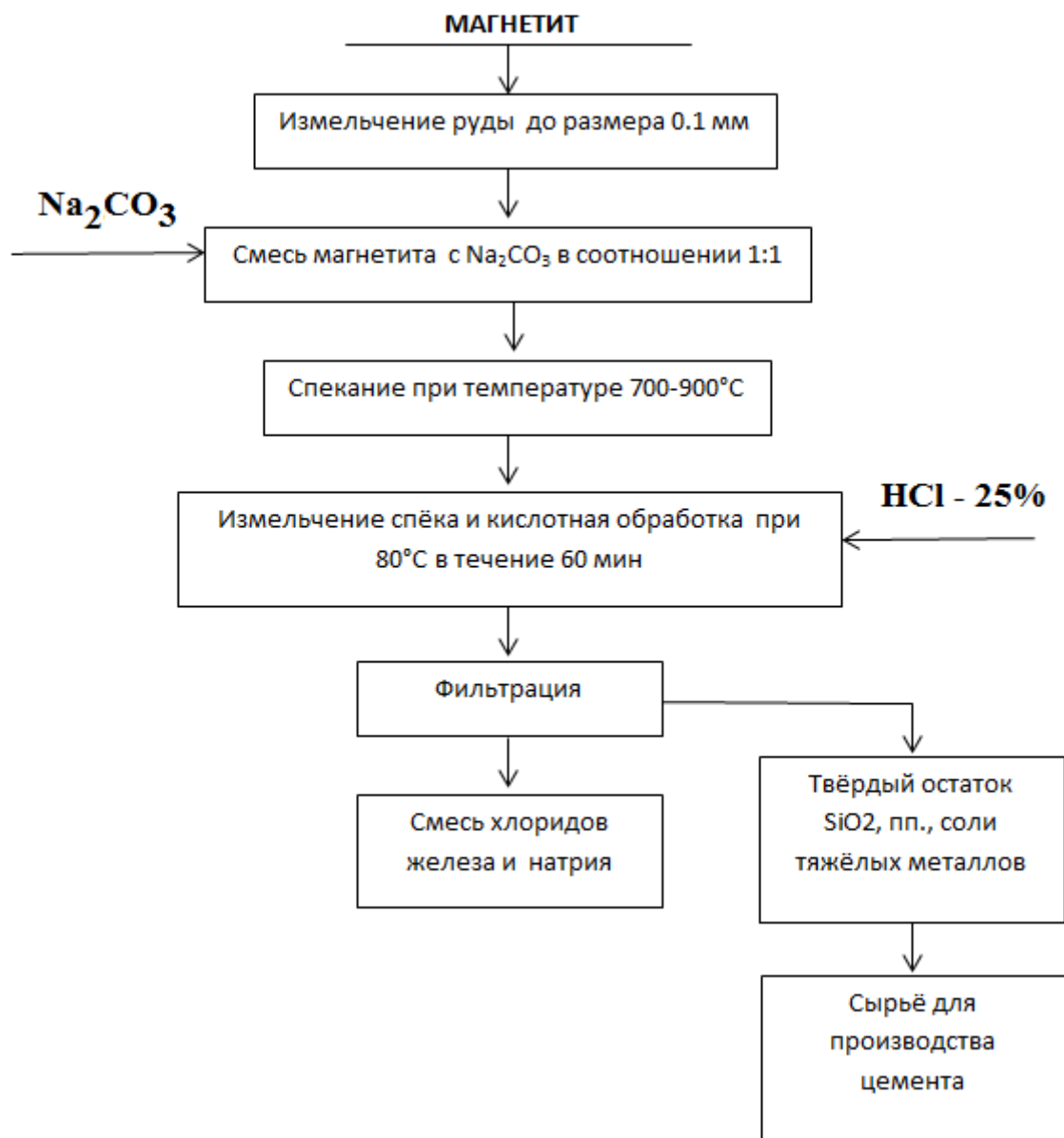


Рис. 3. Принципиальная технологическая схема переработки магнетита спеканием с Na_2CO_3 .

Выявлено, что оптимальной концентрацией соляной кислоты, вводимой в реакцию, является 20-25%. Из рис.26 видно, что дальнейшее увеличение концентрации соляной кислоты вызывает излом кривых вниз. С ростом концентрации соляной кислоты от 25 до 35% извлечение Fe_2O_3 в раствор начинает снижаться вследствие уменьшения соотношения Ж:Т и увеличения вязкости пульпы.

Изучено влияние температуры на ход реакции до 90°C. Как видно из рис.2в, в интервале температур от 40 до 80°C степени извлечения Fe₂O₃ при солянокислотной обработке слёка магнетитовой руды с карбонатом натрия выглядят следующим образом: Fe₂O₃ – 21.5-87.3%.

Таким образом, исходя из проведённых опытов и полученных результатов, можно сделать вывод, что наиболее подходящим способом для разложения магнетитовой руды является спекательный способ, так как, во-первых, процесс протекает в более мягких условиях, во-вторых, степень извлечения целевого продукта достигается намного выше, чем при серноокислотном способе.

На основе найденных оптимальных условий разработана принципиальная технологическая схема переработки магнетита (рис.3).

Поступило 20.02.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Коммон Ф., Уилкинсон Дж. Современная неорганическая химия. – М.: Мир, 1969, 522 с.
2. Тарр Б.Р., Бут Х.С., Доланс А. Безводный хлорид железа (III). – Неорганический синтез, 1950, т.3, с.191-194.
3. Прайс А.Р., Хайтмиллер Р.Ф., Страйкер С. Безводные хлориды металлов. – Неорганический синтез, 1990, т.28, с.321-323.
4. Буджук П., Со Дж.Х., Аккерман М.Н. Сольватированные и нерастворимые безводные хлориды металлов из гидратов хлоридов металлов. – Неорганический синтез, 1992, т.29, с.108-111.
5. Отаев Ш.Д., Мирзоев Д.Х., Джамолов Н.Н., Мирсаидов У.М. Физико-химические основы переработки каолиновых глин месторождения Чашма-Санг Таджикистана спеканием с гидроксидом натрия. – ДНАНТ, 2020, т.63, №3-4.
6. Тагоев М.М., Малышева Е.Ю., Отаев Ш.Д., Аъзамов Ш.О., Мирсаидов У. Получение глинозёма и оксида железа из алюмосиликатных руд Таджикистана спеканием с NaOH. – ДНАНТ, 2021, т.64, №1-2, с.88-91.
7. Крешков А.П. Основы аналитической химии. – М.: Химия, 1970.
8. Пришбил Р. Комплексоны в химическом анализе. – М.: ИЛ, 1960.
9. Полуэктов Н.С. Методы анализа по фотометрии пламени. – М.: Химия, 1967.

Қ.И.Нематуллоев, Н.А.Ашурзода, А.С.Қурбонов, И.М.Раҳимов, У.М.Мирсаидов

ТАҶЗИЯИ МАЪДАНИ МАГНЕТИТИИ КОНИ ХАРАНГОНИ ТОҶИКИСТОН БО УСУЛИ ГУДОЗИШ

Институти кимиёи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон

Натиҷаҳои тадқиқоти таҷзияи маъдани магнетитии кони Харангони Тоҷикистон бо усули гудозиш ва коркарди кислотагӣ бо кислотаи сулфат оварда шудааст. Шароити оптималии таҷзияи маъдани магнетитии бо карбонати натрий бо усули гудозиш ва коркарди кислотагӣ бо кислотаи сулфат муайян карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: маъдани магнетитӣ, шиқорронӣ, гудозиш, таҷзия, ҷудошавӣ, карбонати натрий.

K.I.Nematulloev, N.A.Ashurzoda, A.S.Kurbonov, I.M.Rakhimov, U.M.Mirsaidov

SPECIAL METHOD OF DECOMPOSITION OF MAGNETITE ORE OF THE KHARANGON DEPOSIT OF TAJIKISTAN

V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The results of studies of the sintering-hydrochloric acid method of decomposition of magnetite ore from the Kharangon deposit in Tajikistan are presented. The optimal conditions for sintering hydrochloric acid decomposition of magnetite ore sinter with sodium carbonate are determined.

Key words: *magnetite ore, leaching, sintering, decomposition, extraction, sodium carbonate.*

Сведения об авторах:

1. **Нематуллоев Камараддин Изатуллоевич** – Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, докторант (PhD). E-mail: 909117111@mail.ru;
2. **Ашурзода Наимджон Амонкул** – кандидат техн. наук, Бохтарский Государственный университет им. Н.Хусрава, доцент кафедры общей и неорганической химии. E-mail: naimjon2008@mail.ru;
3. **Курбонov Амиршо Сохибназарович** – доктор хим. наук, филиал Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности Национальной академии наук Таджикистана в Хатлонском области, директор. E-mail: amirsho_77@bk.ru;
4. **Рахимов Илхомиддин Мирзоевич** – кандидат техн. наук, Института химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, заведующий лабораторией «Комплексная переработка минерального сырья и промышленных отходов». E-mail: rahimzod_74@mail.ru;
5. **Мирсаидов Улмас Мирсаидович** – доктор хим. наук, академик, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, главный научный сотрудник. E-mail: ulmas2005@mail.ru.

УДК 541.49:(546.74.2+548.736)

Специальность 1.4.1 – Неорганическая химия

У.Раджабов*, С.Г.Ёрмамадова, К.У.Бойназарова

**ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КООРДИНАЦИОННОГО
СОЕДИНЕНИЯ СЕРЕБРА(I) С АЛЬБЕНДАЗОЛОМ***Таджикский национальный университет,***Таджикский государственный медицинский университет им. Абуали ибн Сино**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана А.Б.Бадаловым 03.03.2023 г.)*

С помощью ИК-спектрального метода установлено, что молекулы альбендазола координируются с серебром(I) посредством атома азота пиридинового альбендазольного кольца. Координационная связь между ионом – металла с альбендазолом осуществляется за счет пиридинового атома азота. Полученные комплексы охарактеризованы различными независимыми физико-химическими методами исследования.

Ключевые слова: альбендазол, нитрат серебра, синтез, ИК-спектроскопия, структура, свойства, комплексное соединение.

На сегодняшний день особый научный интерес к серебру появился вновь в связи с обнаруженным его действием на организм как микроэлемент, который необходим для нормального функционирования органов и систем, обладающий иммунокорректирующими, антибактериальными и противовирусными свойствами [1,2]. Авторами работы [3] показано, что широкий спектр противомикробного действия серебра, отсутствие устойчивости к нему у множества патогенных микроорганизмов, низкая ядовитость, отсутствие в литературе информации об аллергенных качествах серебра, а также хорошая переносимость больными способствовали повышенному интересу к серебру во многих странах мира.

Известно, что соединения серебра(I) обладают противомикробной активностью, а азолы, в частности альбендазол, применяется в медицинской практике в качестве антигельминтного, противомикробного средства широкого спектра действия в дозе 7.5 мг/кг эффективен при нематодозах лёгких и желудочно-кишечного тракта [4].

Новые комплексные соединения, Fe(II) и Cu(II) с альбендазолом, полученные в работе [5], по сравнению с исходными лигандами обладают высокой противомикробной активностью по отношению к *E.coli*, *S.dublin*, *P.multocida* и *Brucella melitensis*.

Целью настоящей работы является синтез и исследование процессов образования координационных соединений серебра(I) с альбендазолом методом ИК-спектроскопии.

Адрес для корреспонденции: Раджабов Умарали. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 139, Таджикский государственный медицинский университет. E-mail: umarali55@mail.ru; Ёрмамадова Саврибегим Гулмамадовна, Бойназарова Кундузмох Усмонкуловна. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: ertamadova2015@mail.ru; kunduzmokh.boynazarova@mail.ru

Экспериментальная часть

В качестве исходных веществ при синтезе координационных соединений серебра(I) нами использованы: дважды перекристаллизованный AgNO_3 , в качестве лиганда-альбендазол (х.ч.), а также органические вещества, этанол, ДМФА, ДМСО, эфир и неорганические растворители – соляная и серная кислоты. Соль NaNO_3 очищена перекристаллизацией насыщенного водного раствора. Азотная кислота марки «х.ч» использована без предварительной очистки. Хромовая и кислотная смеси были приготовлены согласно соответствующим методикам [6].

ИК-спектр альбендазола и синтезированных комплексов в области $400\text{--}4000\text{ см}^{-1}$ зарегистрированы на приборе «Спекорд-IR-75» и «SHIMADZU». Порошковые рентгенограммы сняты на дифрактометре «ДРОН-3» с использованием методов «просвет» и «отражение».

Синтез $[\text{AgAlb}_2\text{NO}_3]$. В 25 мл 96% спирта растворяли 0.21 г альбендазола и небольшими порциями, при интенсивном перемешивании прибавляли раствор 0.31 г AgNO_3 в 25 мл спирта. Мольное соотношение реагирующих компонентов системы составляло 1:1. Реакционная смесь нагревалась при 50°C при постоянном перемешивании в колбе в течение 5 ч. Образовавшееся соединение фильтровали, промывали этанолом (50 мл), дистиллированной водой (20 мл) и сушили в вакуум-эксикаторе над твёрдым КОН до постоянной массы. Соединение имеет кофейный цвет, нерастворимо в воде, спирте, эфире, мало растворимо в ДМСО. Выход комплекса составил 80%.

Результаты и обсуждение

Качественный анализ комплексов состава $[\text{AgAlb}_2\text{NO}_3]$ проведён определением ионов Ag^+ , NO_3^- . Для этого в растворенный комплекс состава $[\text{AgAlb}_2\text{NO}_3]$ добавили хлорид натрия, наблюдали выпадение белого творожистого осадка, который не растворим в воде, но растворим в растворе аммиака. Для определения иона NO_3^- в раствор комплекса $[\text{AgAlb}_2\text{NO}_3]$ добавили реактив дифениламин, была отрицательная реакция на нитрат ион.

Температуру плавления исследуемых соединений определили с помощью аппарата ПТП-М с диапазоном в пределах от 20 до 360°C с электрическим обогревом. Тонкоизмельченные высушенные порошки комплексны соединений серебра(I) с альбендазолом в течении 24 ч хранили в эксикаторе с серной кислотой. Наполнили ими сухой стеклянный капилляр и уплотнили его до получения плотного столбика вещества высотой 3 мм. Капилляр вносили в прибор таким образом, чтобы заполненный его конец находился на нижней части столбика, расположенный на уровне середины ртутного шарика термометра. За процессом наблюдали с помощью специальной лупы, закрепленной в приборе.

Сначала пробным методом определяли примерную температуру плавления комплексов, после чего, начиная с 30°C , температуру постепенно повышали на 2°C в минуту. Измерения повторили по 10 раз и затем, определили среднее значения температуры плавления координационных соединений (табл. 1.)

Таблица 1

Температура плавления комплексных соединений серебра (I) с альбендазолом
(альбендазола, нитрата серебра)

№, п/п	Вещество	Температура плавления, °С
1	[AgAlb ₂ NO ₃]	Выше 360
2	Альбендазол	208-210
3	AgNO ₃	212

Одним из универсальных методов, применяемых для определения функциональных групп и структурных фрагментов веществ, участвующих в процессах комплексообразования, является спектроскопия в ИК-области электромагнитного излучения. Поэтому для определения функциональных групп исследуемых лигандов, участвующих в комплексообразовании с ионами серебра(I), были получены инфракрасные спектры альбендазола и комплексных соединений серебра(I) с альбендазолом в интервале частот от 4000 до 3300, 3300 до 2000, 2000 до и 1000 до 400 см⁻¹. На ИК-спектрах исследованных соединений должны быть обнаружены полосы поглощения, характерные для монозамещенного бензольного кольца, метиленовой группы и гетероциклической системы. Сдвиг или исчезновение характерных полос поглощения в ИК-спектрах серебра и альбендазола по сравнению со спектром комплекса должны свидетельствовать об участии конкретных функциональных групп в образовании координационных соединений. На рис. 1 приведены ИК-спектры комплексов серебра с альбендазолом где действительно наблюдаются характерные полосы поглощения, соответствующие предполагаемым колебаниям. В табл. 2 приведены отнесения частот в ИК-спектрах альбендазола и комплекса [AgAlb₂NO₃].

Неизменными остаются только полосы характеристических колебаний бензольного кольца, которые в координационном соединении имеют меньшую интенсивность, чем полосы лиганда. Одним из признаков координации альбендазола во внутренней координационной сфере комплекса является уменьшение полосы поглощения при 1097 см⁻¹ и образование дополнительной полосы поглощения при 1104 см⁻¹ в спектрах комплекса. В то же время многие интенсивные полосы свободного альбендазола становятся очень слабыми или практически исчезают, когда происходит реакция образования комплексного соединения. В некоординированном лиганде это не наблюдается и в этой области при 1104 см⁻¹ появляется плечо. Полоса поглощения при 1097 см⁻¹ относится к деформационным колебаниям N-H группы, а указанные изменения ее характеристик обусловлены перестройкой водородных связей при протекании реакции образования комплексов. О наличии в молекулах исследуемых соединений СН₂-группы свидетельствуют полосы поглощения в следующих областях: 1270-1273 см⁻¹ – веерные и колебания СН₂-группы, 2958-2960 см⁻¹ характеризует поглощение ароматических групп. К бензольному кольцу можно отнести полосу поглощения при 1525-1539 см⁻¹, характерную для валентных колебаний бензольного кольца, так как она не сдвигается при образовании координационных соединений. Полосы поглощения в области 1269-1195 см⁻¹ характеризуют деформационные колебания –СН₃ в –COOСН₃, входящего в гетероциклическую систему. Отнести ее к этому кольцу позволяет ее сдвиг при образовании координационного соединения. На ИК-спектре альбендазола она расположена при 1360 см⁻¹, комплекса – 1368 см⁻¹. Ион серебра, как образующий более прочные ко-

ординационные соединения, вызывает большой сдвиг этой полосы поглощения. В комплексе состава $[AgAlb_2NO_3]$ наблюдается появление нового колебания сильной интенсивности при 1380 см^{-1} в лиганде данного колебания в этом интервале не найдено.

В ИК-спектре нитрата серебра(I) с альбендазолом отмечается увеличение интенсивности полос поглощения при 1370 и 1340 см^{-1} (валентные колебания $-CH$ связей в $-CH_3$ группах), а также при 1368 см^{-1} (маятниковые колебания $-CH_3$ групп), что может быть отнесено к образованию координационных связей между молекулами нитрата серебра(I) с альбендазолом.

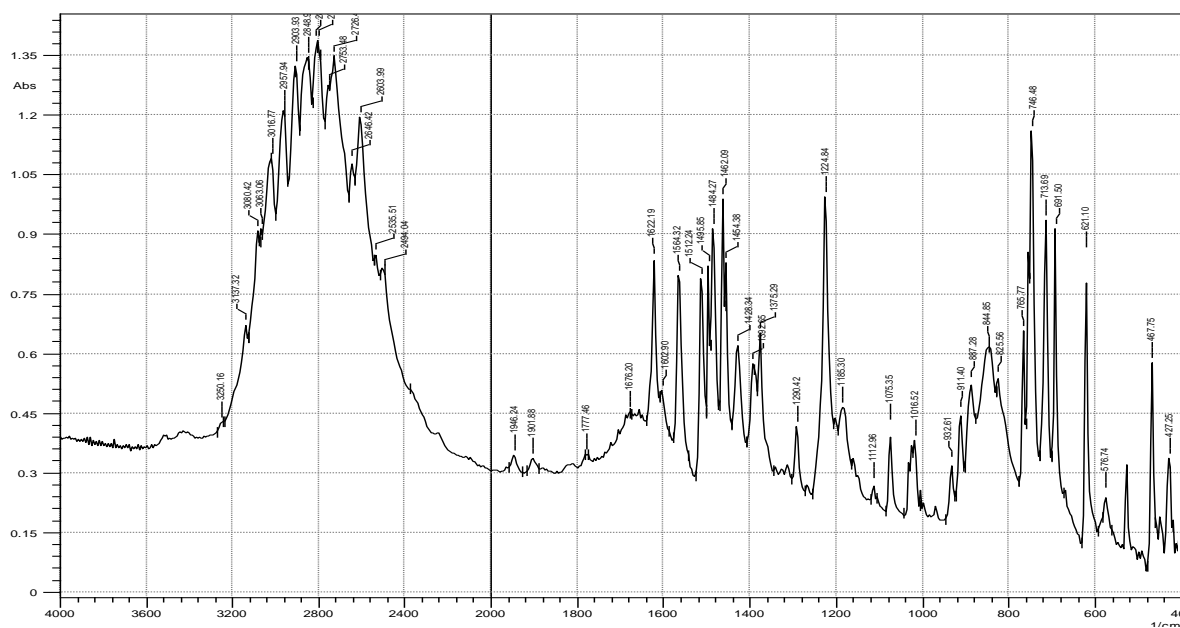


Рис. 1. ИК-спектр молекулы альбендазола.

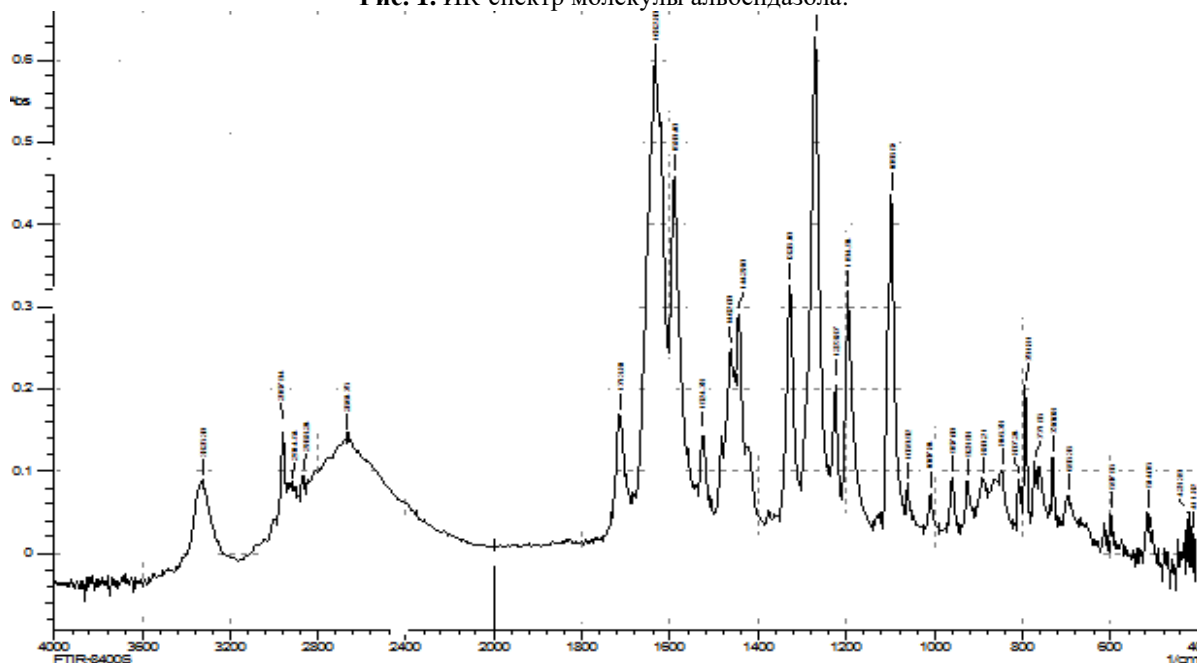
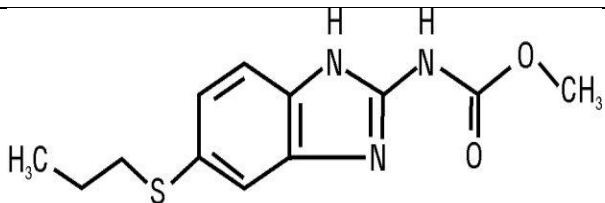


Рис. 2. ИК-спектр молекулы синтезированного комплекса состава $[AgAlb_2NO_3]$.

Таблица 2

Частота колебаний (см^{-1}) в ИК-спектрах альбендазола и синтезированного комплекса состава $[\text{AgAlb}_2\text{NO}_3]$

Соединение		$[\text{AgAlb}_2\text{NO}_3], \text{см}^{-1}$
vas(-O-CH ₃)	2958	2958
(C=O)	1800-1650	1625
$\nu(\text{R}_2\text{NH})$	3325	3326
(R'-COOR)	1269-1195	1271
$\delta_s(-\text{CH}_3)$	1360	1384
(C-N)	1180-1300	1380
(C=N)	1442	1444
(C=C)	1624	1622
(C-S)	750-550	615-620
C-O	1200-1080	1070
(-NO ₃)	1327	1328
(-HSO ₄)	1170-1190 1080-1000	-

В аналогичных условиях провели модифицирование высокодисперсного нитрата серебра (I) с альбендазолом в количестве 0.15 ммоль/г.

Для определения типа электролита (установление внутренней и внешней сферы комплексов), к которым относятся полученные нами координационные соединения по методикам, описанным в литературе [7], изучена их электропроводность в воде, ДМСО и ДМФА.

По данным электрической проводимости комплексное соединение состава $[\text{AgAlb}_2\text{NO}_3]$, растворённое в диметилформамиде, так и в воде имеет электрическую проводимость, соответствующую соединениям электролитного типа. Для указанного комплекса в ДМСО при 298 К электрическая проводимость изменяется от 50.5 до 65.5 $\text{Ом}^{-1}\cdot\text{см}^2\cdot\text{моль}^{-1}$, в ДМФА при данной температуре от 23.5 до 185,5 $\text{Ом}^{-1}\cdot\text{см}^2\cdot\text{моль}^{-1}$, которая близка к проводимости слабого электролита.

Таблица 3

Концентрационная зависимость молярной электрической проводимости комплекса серебра(I) с альбендазолом в ДМСО и ДМФА при 298 К

№ п/п	Соединение	растворитель	$\mu, \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{ см}^2 \cdot \text{ моль}^{-1}$			
			Концентрация комплекса, моль/л			
			0.001	0.0002	0.00004	0.000008
1	[AgAlb ₂ NO ₃]	ДМФА	52.5	60.0	160.0	207.0
2		ДМСО	25.5	45.5	92.5	187.5

Для многих слабых электролитов, не имеются справочные таблицы предельных подвижностей ионов и предельной электролитической проводимости электролита в целом, а без них невозможен расчет констант и степени диссоциации. Полученные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что синтезированное соединение серебра (I) с альбендазолом имеет электропроводность, соответствующую соединениям слабого электролита. Необходимо отметить, что в водных растворах многие соли, в том числе и комплексные соединения, подвергается гидролизу, что сказывается на значениях молярной электрической проводимости.

Величины λ_{∞} определяют экспериментально разными методами. Наиболее простым из них является метод Фуосса и Брея [8]. Согласно этому методу имеем уравнение:

$$K_c = \frac{c\lambda^2}{\lambda_{\infty}(\lambda_{\infty} - \lambda)}, \tag{1}$$

можно привести к виду:
$$x10^{-3} = K_c(\lambda_{\infty})^2 \frac{1}{\lambda} K_c \lambda_{\infty}. \tag{2}$$

Путем простых арифметических преобразований из уравнения (2) получаем равенство (3):

$$\lambda = xV = \frac{x \cdot 10^{-3}}{c}, \tag{3}$$

где: c – молярная концентрация; x – молярная масса эквивалента; V – разведение. Принимают, что при постоянной температуре величины λ_{∞} постоянны. В этом случае, равенство (4) в координатах $x=f(1/\lambda)$ является уравнением прямой. Если $-K_c \lambda_{\infty} = a$ и $K_c \cdot (\lambda_{\infty})^2 = tg\alpha$, то

$$x10^{-3} = tg\alpha \frac{1}{\lambda} + a. \tag{4}$$

Значения $tg\alpha$ и в уравнении (5) находят графически по отрезку на оси ординат находят величину a , по оси абсцисс определяют значения $1/\lambda_{\infty}$ а по углу наклона $-tg\alpha$, так как $K_c(\lambda_{\infty})^2 = tg\alpha$, то:

$$K_c = \frac{tg\alpha}{(\lambda_{\infty})^2}. \tag{5}$$

Найденные описанным выше методом значения $tg\alpha$, λ_{∞} и K_c для синтезированного комплекса [AgAlb₂NO₃] приведены в табл. 4.

Таблица 4

Значения $\text{tg}\alpha$, λ_{∞} и K_d для комплекса серебра(I) с альбендазолом

Соединение	растворитель	$\text{tg}\alpha$	λ_{∞}	K_d
[AgAlb ₂ NO ₃]	ДМФА	0.002	2000	$5 \cdot 10^{-10}$
	ДМСО	0.0004	190	$1.1 \cdot 10^{-8}$

Из данных таблицы видно, что значение констант диссоциации серебра (I) альбендазолом соответствуют электролитам слабого типа.

Таким образом, можно утверждать, что ИК-спектральным методом, впервые установлено, что молекулы альбендазола координируются с серебром(I) посредством атома азота пиридинового альбендазольного кольца.

Поступило 04.03.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нежинская Г.И., Копейкин В.В., Гмиро В.Е. Иммунотропные свойства высокодисперсного металлического серебра. Серебро в медицине, биологии и технике. – 1995, № 4, с. 151-153.
2. Обухов А.В. Перспективы применения препаратов серебра для лечения ВИЧ-инфекции. Применение препаратов серебра в медицине. – М., 1994, № 3, с. 6-12.
3. Федоров С.М. Аллергический дерматит, вызванный металлами-сенсбилизаторами в составе ювелирных изделий и противозачаточной спирали. – Вестник дерматологии и венерологии, 1997, № 1, с. 49-50.
4. Имомов Р.Б., Юсупов З.Н., Раджабов У.Р. Новые биологически активные координационные соединения Fe(II) и Cu(II) с дибазолом. – ДАН РТ, 2008, т. 51, №5, с.362-366.
5. Раджабов У.Р., Ёрмамадова С.Г., Рахимова Р.Н., Шухратзода М. Синтез и применение металлосодержащих биоактивных координационных соединений – Душанбе: Ирфон, 2017, 151с.
6. Шарло Г. Методы аналитической химии. Количественный анализ неорганических соединений. – М.: Химия, 1965, 930 с.
7. Кукушкин Ю.Н. Химия координационных соединений. – М.: Высшая школа, 1985, 455 с.
8. Аминджанов А.А., Сафармамадов С.М., Гозиев Э.Д. Влияния N,N'-этилентимочевинных комплексов рения (V) на электризуемость ДАЦ. Координационные соединения и аспекты их применения. – Душанбе, 2007, с.10-13.

У.Раджабов, С.Г.Ёрмамадова, К.У.Бойназарова

ОМУЗИШИ ХОСИЯТҲОИ ФИЗИКӢ-ХИМИЯВИИ ПАЙВАСТАҲОИ КООРДИНАСИОНИИ НУҚРА (I) БО АЛБЕНДАЗОЛ

Бо истифода аз усули спектралӣ (ИС) бори аввал муайян карда шуд, ки молекулаҳои метронидазол бо нуқра(I) тавассути атоми нитрогени ҳалқаи албендазоли пиридин координатсия карда мешаванд; пайванди координатсияи байни ионҳои металлӣ бо албендазол аз ҳисоби атоми нитрогени пиридин аст.

Калимаҳои калидӣ: албендазол, нитрати нуқра, синтез, спектроскопияи ИС, сохт, хосиятҳо, пайвастагии комплекси.

U.R.Rajabov, S.G.Yormamadova, K.U.Bounazarova

STUDY OF THE PHYSICO-CHEMICAL PROPERTIES OF THE COORDINATION COMPOUND OF SILVER (I) WITH ALBENDAZOLE

Using the IR spectral method, it was first established that metronidazole molecules are coordinated with silver(I) through the nitrogen atom of the pyridine albendazole ring; the coordination bond between the metal ion with albendazole is due to the pyridine nitrogen atom.

Key words: *albendazole, silver nitrate, synthesis, IR spectroscopy, structure, properties, complex compound.*

Сведения об авторах:

1. **Раджабов Умарали** – доктор хим. наук, Таджикский государственный медицинский университет им. Абуали ибн Сино, профессор кафедры фармацевтической и токсикологической химии;
2. **Ёрмамадова Саврибегим Гулмамадовна** – кандидат хим. наук, Таджикский национальный университет, доцент кафедры прикладной химии;
3. **Бойназарова Кундузмох Усмонкуловна** – соискатель, Таджикский национальный университет, заведующий лаборатории кафедры прикладной химии.

УДК 546.662·86:669.0.17.1

Специальность: 1.4.4 – Физическая химия

В.Д.Абулхаев, М.А.Балаев, Х.Х.Назарзода, Б.Д.Сайдалиев, С.О.Убайдов,

академик НАН Таджикистана И.Н.Ганиев

**ДИАГРАММА СОСТОЯНИЯ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ТВЁРДЫХ
РАСТВОРОВ СИСТЕМЫ Tb_4Sb_3 - Yb_4Sb_3** *Институт химии им. В.И.Никитина НАНТ*

В статье приведены результаты исследования диаграммы состояния и магнитные свойства твёрдых растворов системы $Tb_4Sb_3 - Yb_4Sb_3$. Кристаллохимический анализ показал, что твёрдые растворы $Tb_{4-x}Yb_xSb_3$, ($x = 0.4 \div 3.6$) системы $Tb_4Sb_3 - Yb_4Sb_3$ кристаллизуются в кубической структуре типа анти- Th_3P_4 . Определены температура Кюри и магнитные моменты ионов Tb^{3+} и Yb^{3+} .

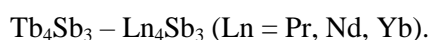
Ключевые слова: сплавы, диаграмма состояния, твёрдые растворы, температура Кюри, магнитная восприимчивость.

Редкоземельные элементы (РЗЭ), сплавы и химические соединения на их основе применяются в различных отраслях техники: производстве стекла и керамики, черной металлургии, электроосветительной, атомной, лазерной технике, телевизионной, химической промышленности, медицине, сельском хозяйстве и в других отраслях. Возможности их использования далеко не исчерпаны и расширяются по мере исследования свойств соединений и сплавов на их основе.

В последние годы расширились работы по поиску новых магнитных материалов на основе РЗЭ. Получены магнитные интерметаллиды YCo_5 , $SmCo_5$, железо-редкоземельные гранаты, а также неодим-железо-боровый сплав ($Nd_2Fe_{14}B$) [1], которые нашли применение в высокочастотной технике и электронных приборах.

В этом плане актуальными являются работы, связанные с получением и исследованием магнитных свойств сплавов и соединений на основе РЗЭ.

Анализ литературных источников свидетельствует о том, что среди соединений и сплавов РЗЭ с сурьмой более подробно изучены моноантимониды РЗЭ. Антимониды других составов изучены крайне мало. При этом в научной литературе нет сведений по твердым растворам систем



Целью настоящего исследования явились диаграммы состояния системы $Tb_4Sb_3 - Yb_4Sb_3$ и магнитных свойств твердых растворов, образующихся в этой системе в диапазоне температур 298-500 К.

Твердые растворы системы были приготовлены через каждые 10 мол.% Yb_4Sb_3 .

Адрес для корреспонденции: Абулхаев Владимир Джалолович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: abulkhaev-48@mail.ru

В качестве исходных компонентов использовали предварительно синтезированные Tb_4Sb_3 и Yb_4Sb_3 .

Сплавы системы Tb_4Sb_3 – Yb_4Sb_3 получали следующим образом. Порошки предварительно синтезированных антимонидов – Tb_4Sb_3 и Yb_4Sb_3 , отвечающие определенному химическому составу твердого раствора $Tb_{4-x}Yb_xSb_3$, ($x = 0.4 \div 3.6$), смешивали, спрессовывали в штабик, помещали в герметичный молибденовый тигель и нагревали (со скоростью 20-40 град./мин) в среде гелия марки ВЧ. Оптимальная температура синтеза составляла 1473 ± 50 К. При этой температуре образцы выдерживали 2 ± 0.5 ч. После чего тигель с веществом охлаждали до комнатной температуры.

Сплавы системы Tb_4Sb_3 – Yb_4Sb_3 синтезировали при одном и том же температурном и временном режиме, то есть при 1473 ± 50 К и времени выдержки 2 ± 0.5 ч.

Диаграмму состояния системы Tb_4Sb_3 – Yb_4Sb_3 исследовали методом дифференциального термического (ДТА), рентгенофазового (РФА) и металлографического анализов.

ДТА сплавов осуществляли на установке ВДТА-8МЗ, при скоростях нагревания и охлаждения 40-80 град./мин, по методике, приведенной в [2]. Погрешность в определении температур термических эффектов не превышала $\pm 1\%$.

РФА сплавов проводили на дифрактометре ДРОН-2 с использованием отфильтрованного CuK_α -излучения (Ni – фильтр). Погрешность в определении параметров элементарной ячейки сплавов составляла ± 0.0005 нм.

Металлографический анализ сплавов выполняли на приборе «Neophot-21». Шлифы полировали алмазной пастой, нанесенной на нейлоновую ткань.

Микротвердость кристаллов твердых растворов измеряли на микротвердомере ПМТ-2.

Плотность сплавов определяли по стандартной методике.

Молярную магнитную восприимчивость (χ_m) твердых растворов измеряли в диапазоне температур 298-773 К по методике, приведенной в [3].

Диаграмма состояния системы Tb_4Sb_3 – Yb_4Sb_3 , построенная по совокупности экспериментальных данных, приведена на рис. 1.

Из рисунка видно, что Tb_4Sb_3 при 2033 К плавится инконгруэнтно, а Yb_4Sb_3 при 1948 К плавится конгруэнтно.

Диаграмма состояния системы Tb_4Sb_3 – Yb_4Sb_3 свидетельствует о неограниченной взаимной растворимости компонентов – Tb_4Sb_3 и Yb_4Sb_3 как в жидком, так и в твердом состоянии. При этом РФА и металлографический анализ сплавов указывают на образование во всем исследованном диапазоне концентраций твердых растворов замещения $Tb_{4-x}Yb_xSb_3$, ($x = 0.4 \div 3.6$).

По данным РФА, твердые растворы $Tb_{4-x}Yb_xSb_3$, ($x = 0.4 \div 3.6$) изоструктурны с исходными компонентами – Tb_4Sb_3 , Yb_4Sb_3 и кристаллизуются в кубической сингонии типа anti- Th_3P_4 , пространственная группа I43d [4, 5]. Из таблицы 1 следует, что концентрационная зависимость параметра элементарной ячейки твердых растворов во всем исследованном диапазоне концентраций изменяется аддитивно. При этом наибольшую микротвердость показывает твердый раствор, содержащий 10 мол. % Yb_4Sb_3 .

Рассчитана также теоретическая плотность кристаллов твердых растворов.

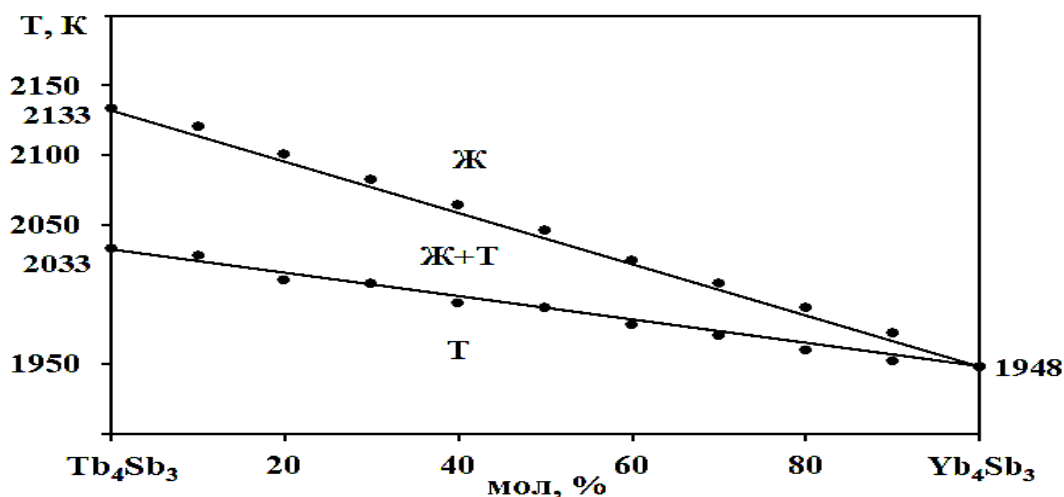
Рис. 1. Диаграмма состояния системы Tb₄Sb₃-Yb₄Sb₃.

Таблица 1

Кристаллохимические характеристики антимонидов и твёрдых растворов

Антимониды и твёрдые растворы	Параметр элементарной ячейки, ±0.0005 нм	Плотность, кг/м ³		Микротвёрдость, МПа
		расчет.	экспер.	
Tb ₄ Sb ₃	0.9165	8665	8660	4950±150
Tb _{3,6} Yb _{0,4} Sb ₃	0.9200	8635	8632	5180±100
Tb _{3,2} Yb _{0,8} Sb ₃	0.9223	8645	8638	5012±210
Tb _{2,8} Yb _{1,2} Sb ₃	0.9224	8665	8662	5000±180
Tb _{2,4} Yb _{1,6} Sb ₃	0.9237	8675	8669	4820±165
Tb ₂ Yb ₂ Sb ₃	0.9252	8680	8678	4542±140
Tb _{1,6} Yb _{2,4} Sb ₃	0.9262	8775	8772	4500±175
Tb _{1,2} Yb _{2,8} Sb ₃	0.9275	8770	8768	4320±135
Tb _{0,8} Yb _{3,2} Sb ₃	0.9282	8765	8759	4230±138
Tb _{0,4} Yb _{3,6} Sb ₃	0.9287	8760	8758	4000±115
Yb ₄ Sb ₃	0.9312	8748	8744	4100±100

Установлено, что температурная зависимость обратной величины молярной магнитной восприимчивости твёрдых растворов Tb_{4-x}Yb_xSb₃, (x = 0.4÷3.6) следует закону Кюри-Вейсса, характерного парамагнитным веществам.

На рис. 2 представлена температурная зависимость обратной величины молярной магнитной восприимчивости твёрдых растворов Tb_{4-x}Yb_xSb₃, (x = 0.4÷3.6) в диапазоне температур 298-500 К.

Значения молярной магнитной восприимчивости (χ_m) и парамагнитной температуры Кюри (θ_p) твёрдых растворов, определенных экстраполяцией линейной части зависимости $1/\chi_m$ - T к оси температур, приведены в таблице 2. Как видно из таблицы 2, рост молярной магнитной восприимчивости и парамагнитной температуры Кюри твёрдых растворов проявляется во всем диапазоне концентраций. Это объясняется тем, что тербий, замещая атомы иттербия в кристаллической решетке Yb₄Sb₃, усиливает обменное взаимодействие по линии связи Tb-Yb, влияние которой на магнитные свойства твёрдых растворов Tb_{4-x}Yb_xSb₃, (x = 0.4÷3.6) проявляется во всем диапазоне концентраций.

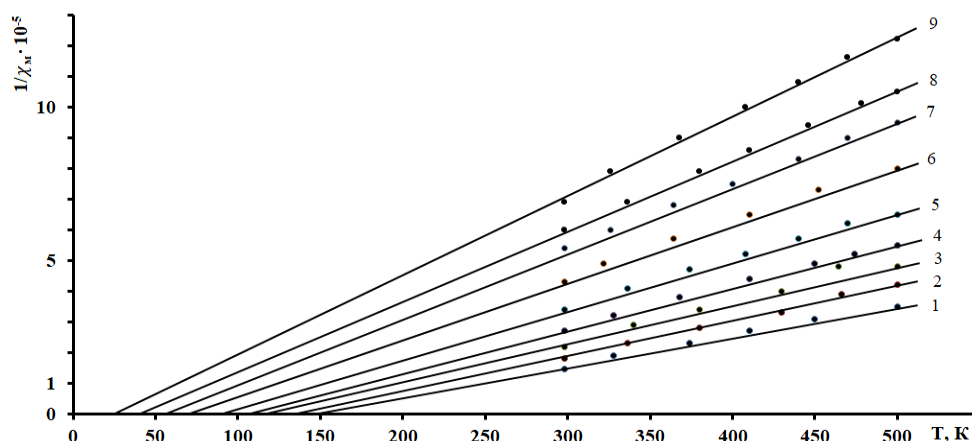


Рис. 2. Температурная зависимость обратной молярной магнитной восприимчивости твердых растворов Tb_{4-x}Yb_xSb₃, содержащих (1) – 10, (2) – 20, (3) – 30, (4) – 40, (5) – 50, (6) – 60, (7) – 70, (8) – 80, (9) – 90 мол.% Yb₄Sb₃ в диапазоне температур 298-500 К

Полученные данные по молярной магнитной восприимчивости и парамагнитной температуры Кюри антимонидов и твёрдых растворов были использованы для определения эффективного магнитного момента ионов РЗЭ (табл. 2).

Таблица 2

Магнитные свойства антимонидов и твёрдых растворов Tb_{4-x}Yb_xSb₃

Антимониды и твёрдые растворы	Молярная магнитная восприимчивость, $\chi_m \times 10^6$	Парамагнитная температура Кюри, К	Эффективный магнитный момент, $\mu \times 10^{24}, \text{A} \cdot \text{m}^2$
Tb ₄ Sb ₃	95087.4	175	90.05
Tb _{3.6} Yb _{0.4} Sb ₃	67420.4	148	76.0
Tb _{3.2} Yb _{0.8} Sb ₃	54942.6	134	72.3
Tb _{2.8} Yb _{1.2} Sb ₃	44287.3	118	68.6
Tb _{2.4} Yb _{1.6} Sb ₃	36015.2	108	64.0
Tb ₂ Yb ₂ Sb ₃	29372.7	90	50.0
Tb _{1.6} Yb _{2.4} Sb ₃	23068.9	70	56.5
Tb _{1.2} Yb _{2.8} Sb ₃	18573.1	56	52.8
Tb _{0.8} Yb _{3.2} Sb ₃	16619.6	40	52.0
Tb _{0.4} Yb _{3.6} Sb ₃	14392.2	25	49.2
Yb ₄ Sb ₃	5811.6	8	32.44

Таким образом, результаты нашей работы указывают на возможность получения на основе Tb₄Sb₃ и Yb₄Sb₃ твёрдых растворов с повышенными магнитными свойствами.

Поступило 20.03.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Белов К.П. Редкоземельные магнетики и их применение. – М.: Наука, 1980, 240 с.
2. Берг Л.Г. Введение в термографию. – М.: Наука, 1969. 395 с.
3. Чечерников В.И. Магнитные измерения. – М.: МГУ, 1963, с. 92.
4. Миркин Л.И. Справочник по рентгеноструктурному анализу кристаллов. – М.: Физматгиз, 1961, 863 с.
5. Недома И. Расшифровка рентгенограмм порошков – М.: Metallurgy, 1975, 423 с.

В.Д.Абулхаев, М.А.Балаев, Х.Х.Назарзода, Б.Д.Сайдалиев, С.О.Убайдов., И.Н.Ганиев
**ДИАГРАММАИ ҲОЛАТ ВА ХОСИЯТҲОИ МАГНИТИИ МАҲЛУЛҲОИ САХТИ
СИСТЕМАИ Tb₄Sb₃-Yb₄Sb₃**

Институти химияи ба номи И.И.Никитини Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақолаи мазкур натиҷаи таҳқиқоти диаграммаи ҳолат ва хосиятҳои магнитии маҳлулҳои сахти системаи Tb₄Sb₃-Yb₄Sb₃ оварда шудааст. Таҳлили кристаллохимиявӣ нишон дод, ки маҳлулҳои сахти Tb_{4-x}Yb_xSb₃, ($x = 0.4 \div 3.6$) системаи Tb₄Sb₃-Yb₄Sb₃ дар панҷараи кубии намуди anti-Th₄P₄ кристаллизатсия мешаванд. Ҳарорати Кюри ва лаҳзаҳои магнитии ионҳои Tb³⁺ ва Yb³⁺ муайян карда шуданд.

Калимаҳои калидӣ: *хӯлаҳо, диаграммаи ҳолат, маҳлулҳои сахт, ҳарорати Кюри, таъсирпазирии магнитӣ.*

V.D.Abulkhaev, M.A.Balaev, Kh.Kh.Nazarzoda, B.D.Saydaliev, S.O.Ubaydov, I.N.Ganiev
**STATE DIAGRAM AND MAGNETIC PROPERTIES OF SOLID SOLUTION OF
THE Tb₄Sb₃-Yb₄Sb₃ SYSTEM**

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, National academy of Sciences of the Tajikistan

The abstract comprises the results of investigation of state diagram and magnetic properties of solid solutions which have been formed in the Tb₄Sb₃-Yb₄Sb₃ system. Crystallochemical investigations have shown, that solid solutions Tb_{4-x}Yb_xSb₃, ($x = 0.4 \div 3.6$) of the Tb₄Sb₃-Yb₄Sb₃ system crystallizes in cubic anti-Th₄P₄ type. Values of Curie temperatures and magnetic moment of Tb³⁺ and Yb³⁺ ions was defined.

Key words: *alloys, state diagram, solid solutions, Curie temperatures, magnetic susceptibility.*

Сведения об авторах:

1. **Абулхаев Владимир Джалолович** – доктор хим. наук, профессор, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, главный научный сотрудник. E-mail: abulkhaev-48@mail.ru;
2. **Балаев Мухамадшо Ахтамович** – кандидат техн. наук, Таджикский технический университет им. М.С.Осими, доцент кафедры «Электроснабжение». E-mail: muhamad65balaev@mail.ru;
3. **Назарзода Хайрулло Холназар** – доктор техн. наук, доцент, Таджикский государственный университет коммерции, ректор. E-mail: nazarov-h2013@mail.ru;
4. **Сайдалиев Бахром Джураевич** – Бохтарский государственный университет им. Н.Хусрава, преподаватель кафедры «Органическая химия и биология», соискатель Института химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана. E-mail: saidaliev_bahrom@mail.ru;
5. **Убайдов Солмоншо Одинаевич** – кандидат техн. наук, Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни, доцент кафедры «Технология черчения и дизайна», соискатель Института химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана. E-mail: salmonubaidov@mail.ru;
6. **Ганиев Изатулло Наврузович** – доктор хим. наук, профессор, академик НАН Таджикистана, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, заведующий лабораторией «Коррозионностойкие материалы». E-mail: ganiev48@mail.ru.

УДК 581.132.633.11

Специальность: 1.5.21 – Физиология и биохимия растений

Ш.А.Байрамбекова, М.Б.Ниязмухамедова, М.М.Рахимов*

**СОДЕРЖАНИЕ ПЛАСТИДНЫХ ПИГМЕНТОВ У НЕКОТОРЫХ СОРТОВ
ЯЧМЕНЯ, ВЫРАЩЕННЫХ В УСЛОВИЯХ БОГАРЫ***Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана,***Таджикский государственный педагогический университет им.С.Айни**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Х.А.Абдуллаевым 19.04.2023 г.)*

В статье приводятся результаты анализа содержания хлорофиллов в процессе вегетации в листьях и стеблях некоторых сортов ячменя, выращенного в условиях богары. Показано, что у интродуцированного сорта ячменя Волжский Первый наблюдается относительно высокое содержание зелёных пигментов. Немного ниже количество хлорофиллов у местного сорта Сафедак, а у других сортов содержание пластидных пигментов было в полтора раза меньше. По содержанию хлорофилла b в стеблях ячменей наблюдается классическая динамика соотношения этого хлорофилла b , к содержанию хлорофилла a .

Ключевые слова: ячмень, лист, стебель, хлорофиллы, вегетация, богара.

Фотосинтетические пигменты у высших растений представлены хлорофиллами и каротиноидами, которые сосредоточены в мембранах тилакоидов хлоропластов. Они обеспечивают протекание световых реакций фотосинтеза, поглощая квант света, трансформируют его в энергию химических связей, которые затем используются в темновых реакциях цикла Кальвина для синтеза органических соединений [1,2].

Содержание фотосинтетических пигментов, динамика и темпы их накопления в течение вегетации в растениях служат важнейшей характеристикой продукционного процесса в фотосинтетической деятельности посевов сельскохозяйственных культур [3].

В последние годы среди зерновых культур в Таджикистане стали больше выращивать ячмень, который является очень ценным продуктом питания, так как его используют при выпечке – в составе различного вида хлеба и хлебобулочных изделий.

В этой связи важное значение имеют исследования, посвящённые выявлению условий адресного выращивания этой культуры.

Целью данной работы являлся анализ содержания пластидных пигментов в листьях и стеблях у 5 сортов ячменя в разные фазы вегетации, выращенных в условиях богары.

Объекты и методы исследования

В качестве объектов исследования были использованы сорта местной селекции – Баракат, Пулоди (Таджикский научно-исследовательский институт Земледелия и Памирский биологический

Адрес для корреспонденции: Ниязмухамедова Мукадам Бабаджановна. 734017, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Карамова, 27, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАНТ. E-mail: mukadam.44@mail.ru

институт и из Памира – Джау-кабутак, Джау-сафедак, и один сорт ячменя Волжский Первый из Российской Федерации. Российский сорт ячменя был любезно предоставлен в наше распоряжение профессором Н.В.Тупицыным из коллекции Ульяновской сельскохозяйственной академии Российской Федерации.

Опыты проводились на экспериментальном участке Института ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана в условиях богары.

Посевы проводили в последней декаде ноября на богарных землях. Применяли общепринятые в Республике Таджикистан агротехнологии выращивания пшеницы [4,5], обычный широкорядный ленточный способ посева (расстояние между рядками составляло 25-30 см). Размер делянок 2 x 2 м. Азотные и фосфорные удобрения вносили три раза: в фазах трубкования, колошения-цветения и молочной спелости.

Анализ содержания пигментов проводили на приборе «Инфралюм» в лаборатории по качеству и стандарту продуктов питания при Госстандарте Республики Таджикистан.

Статистическую обработку результатов исследований проводили по Б.А.Доспехову [6] с использованием программы *Excel Windows 2010*.

Результаты и их обсуждения

Результаты анализа содержания пигментов приведены на рисунке и в таблице.

Как видно из рисунка, содержание пигментов в процессе вегетации ячменя имеет широкий диапазон изменчивости (рис.). Так, уже в фазе кушения в листьях у интродуцированного сорта ячменя Волжский Первый наблюдается относительно высокое содержание пигментов, немного ниже и у местного сорта Сафедак, а у других сортов содержание пластидных пигментов было в полтора раза меньше. Максимальное содержание хлорофилла *a* наблюдается у ячменя сорта Волжский Первый в фазу молочной спелости (2.46 мг/г. сырой массы листа), но, уже в фазу восковой спелости, в полувывсохших листьях содержание хлорофилла *a* понизилось до 0.69 мг/г. сырой массы. У местного сорта ячменя Баракат в фазах молочной спелости содержание пигментов было в полтора раза меньше и почти в 2-2.5 раза меньше у сорта Пулоди в фазу цветения, по сравнению с содержанием хлорофилла *a* у ячменя Волжский Первый в фазу молочной спелости. Уже в фазу восковой спелости, когда жизненным остаётся флаговый лист, чаще полувывсохший, наблюдается резкое снижение хлорофилла до 0.54 мг/г сырой массы листа у местного сорта Баракат и 1.04 мг/г сырой массы листа – у сорта Пулоди и Сафедак. Самое низкое содержание хлорофилла *a* было в фазу трубкования у сортов ячменя – Пулоди, Кабутак и Сафедак, а у 2-х других – Волжский Первый и у Баракат, минимальное содержание хлорофилла *a* в листьях зафиксировали в фазу восковой спелости. Следует отметить, что интродуцированный сорт ячменя Волжский Первый максимально синтезировал пластидные пигменты, проявляя свои потенциальные качества. В стеблях содержание хлорофилла *a* варьировало от 0.44 до 0.12 мг/г сырой массы у ячменя сорта Волжский Первый, а у ячменя сорта Баракат содержание хлорофилла колебалось от 0.59 до 0.17 мг/ г сырой массы. В стебле у ячменя сорта Пулоди колебалось от 0.59 в фазу цветения до 0.12 в фазу кушения, у сорта Кабутак содержание хлорофилла *a* в стебле было максимальным – 0.70, минимальное содержание составило – 0.14 мг/г сырой массы.

У ячменя сорта Сафедак в стебле в процессе вегетации динамика накопления и распределения хлорофилла a была относительно высокой и, начиная с фазы колошения, продолжалось до конца вегетации. Стебель в злаковых культурах выполняет роль «депо» ассимилятов и многие механизмы физиолого-биохимических процессов происходят в его тканях которые, по-видимому по запросу клеток подвергаются распределению.

По содержанию хлорофилла b в стеблях ячменей наблюдается классическая динамика накопления хлорофилла b соответственно содержанию хлорофилла a. За исключением того, что когда содержание хлорофилла b превышает содержание хлорофилла a в стеблях у ячменя Волжский Первый и у местного сорта Баракат в стебле в фазу молочной спелости, у сорта Кабутак в листе в фазу колошения, а у сорта Сафедак наблюдаются небольшие повышения содержания хлорофилла b в листе в фазу трубкования и в стебле в фазу молочной спелости.

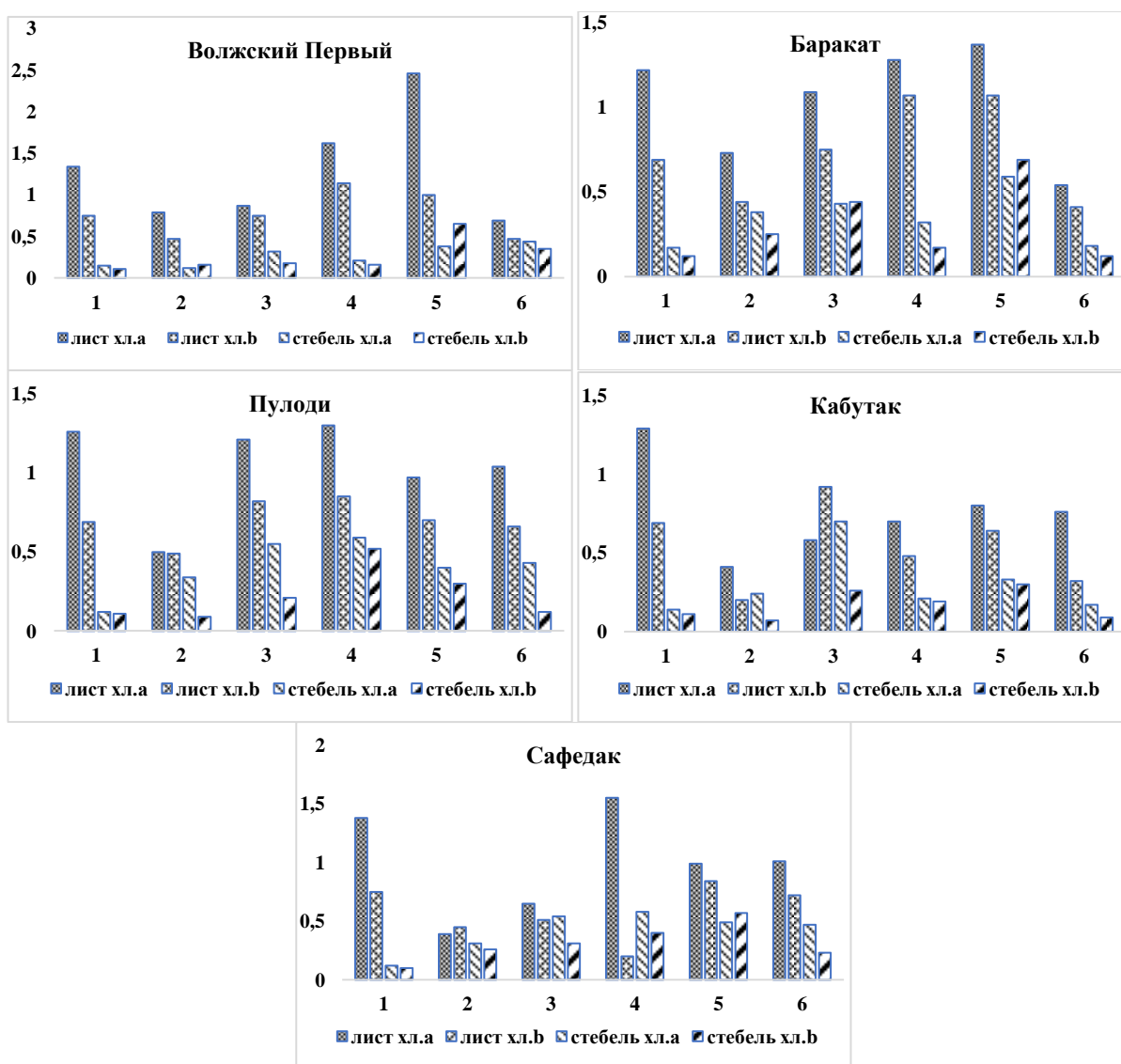


Рис. Содержание хлорофилла a и b в листьях и стеблях у разных сортов ячменя.
 Примечание: 1 – кушение, 2 – трубкование, 3 – колошение, 4 – цветение, 5 – молочная спелость, 6 – восковая спелость.

Таблица

Содержание (суммарное) хлорофилла и соотношение между хлорофиллами a и b в процессе вегетации

Сорт		Волжская Первый		Баракат		Пулоди		Кабутак		Сафедак	
Фаза развития	Хлорофилл	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
		кущение	a+b	2.09	0.26	1.91	0.29	1.95	0.23	1.98	0.25
	a/b	1.78	1.36	1.76	1.41	1.82	1.09	1.86	1.27	1.84	1.2
трубкование	a+b	1.26	0.28	1.17	0.63	0.99	0.43	0.61	0.31	0.84	0.57
	a/b	1.68	0.75	1.65	1.52	1.02	3.77	2.05	3.42	0.86	1.19
колошение	a+b	1.62	0.5	1.84	0.87	2.03	0.76	1.5	0.96	1.16	0.85
	a/b	1.16	1.77	1.45	0.97	1.47	2.61	0.63	2.69	1.27	1.74
цветение	a+b	2.76	0.37	2.35	0.49	2.15	0.11	1.18	0.4	1.75	0.98
	a/b	1.42	1.31	1.19	1.88	1.52	1.13	1.45	1.1	7.75	1.45
молочная спелость	a+b	3.46	1.03	2.44	1.28	1.67	0.7	1.44	0.63	1.83	1.06
	a/b	2.46	0.58	1.28	0.85	1.38	1.33	1.25	1.1	1.17	0.85
восковая спелость	a+b	1.16	0.79	0.95	0.3	1.7	0.55	1.08	0.26	1.73	0.7
	a/b	1.46	1.25	1.31	1.5	1.57	3.58	2.37	1.88	1.4	2.04

Примечание: 1 – лист, 2 – стебель.

Результаты показывают, что в этот период содержание хлорофилла a претерпевает большие изменения, возможно разрушается и или происходит временная деструкция молекул хлорофилла a, поэтому активность вспомогательного хлорофилла b повышается. И, как правило, в последующих фазах содержание хлорофилла a увеличивается, синтез хлорофилла a как бы восстанавливается, соотношение хлорофилла a/b повышается. В литературе известно [7], что соотношение хлорофилла a/b при высокой освещённости выше, чем при низкой. Регулирование синтеза хлорофилла b имеет важное значение для адаптации растений к свету разной интенсивности [8,9] и формирования продуктивности растений. Создание новых сортов ячменя связано с изменениями пигментного состава, которые обусловлены длительным селекционным процессом, направленным на отбор наиболее продуктивных растительных организмов [10].

Такой анализ позволяет получить информацию, за счёт каких фотосинтетических пигментов происходит рост продуктивности, формируется высокая урожайность и качество зерна. Эти данные могут служить основой для создания моделей новых сортов ячменя интенсивного типа с высокой потенциальной урожайностью.

На основании полученных результатов можно заключить, что так как интродуцированный сорт Волжский Первый максимально синтезирует пластидные пигменты, реализуя свои потенциальные качества, то его можно выращивать в условиях богары в Таджикистане. По результатам наших работ содержание зелёных пигментов можно рассматривать как показатель мощности развития фотосинтетического аппарата и продуктивности у ячменя.

Поступило 26.04.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Живлюк Е., Тарасенко С. Пигментный состав сортов мягкой озимой пшеницы в процессе селекции. – В мире науки, 2009, №7(77), с.78-80.
2. Sestak R. Photosynthesis during leaf development. – Praha, Academia, 1985, 396 p.
3. Чайка М.Т. Биосинтез хлорофилла и биогенез фотосинтетического аппарата. – Минск: Ротапринт, 1996, 79 с.
4. Научная система ведения сельского хозяйства Таджикистана. – Душанбе: Матбуот, 2009, 764 с.
5. Научно-обоснованная система земледелия Таджикской ССР. – Душанбе: Ирфон, 1984, 498 с.
6. Доспехов Б.А. Методика полевого опыта. – М.: Колос, 1985, 352 с.
7. Даштоян Ю.В. Метамерные особенности развития мезофилла и содержания пигментов пластид листьев пшеницы: Автореф. дисс.... к. б. н. – Саратов, 2009, 48 с.
8. Тарасенко С.А. Хлорофилловый индекс – показатель продукционного процесса сельскохозяйственных культур. – Гродно, 2004, 211 с.
9. Тютерева Е.В., Дмитриева В.А., Войцеховская О.В. Хлорофилл *b* как источник сигналов, регулирующих развитие и продуктивность растений (обзор). – Сельскохозяйственная биология. 2017, т. 52, № 5, с. 843-855.
10. Sagromsky H. On the importance of chlorophyll *b* for dry matter production and photosynthesis. – In: Productivity of Photosynthetic systems. Inter Symp. – Moscow, 1969, p.141.

Ш.А.Байрамбекова, М.Б.Низмухамедова, М.М.Рахимов*

**МИҚДОРИ ПИГМЕНТҲОИ ПЛАСТИДӢ ДАР БАЪЗЕ НАВЪҲОИ ЧАВ,
КИ ДАР ШАРОИТИ ЛАЛМӢ ПАРВАРИШ ҚАРДА ШУДААНД**

Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани АМИТ,

**Донишгоҳи давлатии омӯзгори ба номи С.Айнӣ*

Дар мақола натиҷаҳои ҷамъи шудани хлорофилл дар давраҳои асосии нашъунамо дар баргуояи ҷав дар шароити лалмӣ оварда шудааст. Нишон дода шудааст, ки дар навъи ҷави интродуксияшудаи «Волжский Якӯм» миқдори хлорофилл нисбатан баланд буда, дар навъи маҳаллии «Сафедак» каме пасттар ва дар навъҳои дигар бошад миқдори пигментҳои пластиди якуним баробар кам буд. Вобаста ба миқдори хлорофилли *b* дар ҷав динамикаи классикии ҷамъшавии хлорофилли *b* нисбат ба хлорофилли *a* мушоҳидаи қарда шуд.

Калимаҳои калидӣ: ҷав, барг, поя, хлорофиллҳо, давраи нашъунамо, лалмӣ.

Sh.A.Bairambekova, M.B.Niyazmukhamedova, M.M.Rahimov*

CONTENT OF PLASTID PIGMENTS IN SOME VARIETIES OF BARLEY GROWN UNDER THE CONDITIONS OF BOGARA

Institute of Botany, Physiology and Plant Genetics, National Academy of Sciences of Tajikistan,

**S.Aini Tajik State Pedagogical University*

In this article the results of the accumulation of chlorophyll content in the process of vegetation in leaves and stems, which shows that the introduced barley variety are presents. Volzhsky First has a relatively high content of pigments, slightly lower in the local variety Safedak, and in other varieties the content of plastid pigments was one and a half times less . According to the content of chlorophyll b in barley stalks, we observed the classical dynamics of the accumulation of chlorophyll b, corresponding to the content of chlorophyll a.

Key words: *barley, leaf, stem, chlorophylls, vegetation, rainfed.*

Сведения об авторах:

1. **Байрамбекова Ширинмо Амирдиновна** – доктор PhD, Институт ботаники, физиологии и генетики НАН Таджикистана, младший научный сотрудник лаборатории генетики и селекции растений;
2. **Ниязмухамедова Мукадам Бабаджановна** – доктор биол. наук, профессор, Институт ботаники, физиологии и генетики НАН Таджикистана, главный научный сотрудник.
E-mail: mukadam.44@mail.ru
3. **Рахимов Махмаднавруз Муродович** – кандидат биол. наук, доцент, Таджикский Государственный педагогический университет им. С.Айни, заведующий кафедрой геоэкологии.
E-mail: navruzzbg@mail.ru

УДК 581.132.633.11

Специальность: 1.5.21 – Физиология и биохимия растений

Л.М.Балхова

СОДЕРЖАНИЕ ФОТОСИНТЕТИЧЕСКИХ ПИГМЕНТОВ В ЛИСТЬЯХ НЕКОТОРЫХ СОРТОВ САФЛОРА

*Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана А.Абдуллаевым 19.04.2023 г.)*

В статье приводятся данные о содержании фотосинтетических пигментов в листьях разных сортов сафлора. Показано, что содержание хлорофиллов *a* и *b* у исследованных растений, начиная от фазы появления 5 и 6 настоящих листьев по цветения увеличивается. Соотношение хлорофиллов, *a/b* было наибольшим у сафлора сорта Махали-288, наименьшим у растений сафлора сорта Джамбули, а высокое содержание суммы хлорофиллов достигается за счет значительного увеличения относительной доли хлорофилла *a*.

Ключевые слова: сафлор, хлорофилл, содержание, сумма хлорофиллов, соотношение.

В последнее время внимание многих исследователей привлекает растение сафлор как ценный дополнительный к системам земледелия, имеющий ряд стратегических, агрономических и финансовых преимуществ. Оно заключается в том, что масличные культуры устойчивы к жаре и засухе, подходят для районов с низким уровнем осадков и устойчивы к нематодам. Также, эта культура используется в качестве мелиоранта для улучшения структуры почвы, альтернативная культура, которая подходит как для засушливых земель, так и для орошаемых, при низких затратах на обслуживание и простоте выращивания [1]. Сафлор (*Carthamus tinctorius* L.) как важная масличная культура возделывается в засушливых и полусушливых регионах мира, таких как Индия, Турция, Иран и другие [2].

Семена сафлора содержат от 27 до 37% масла [3], помимо минералов (Zn, Cu, Mn и Fe), витаминов (тиамин и β-каротин) и токоферолов (α, β и γ) [4], дает высококачественное масло без вкуса и цвета. Поскольку масло по составу аналогично маслу подсолнечника (*Helianthus annuus* L.), оно также может найти широкое применение в потреблении человеком и в промышленных отраслях [5,6]. В народной медицине настой цветков сафлора используют как мочегонное, желчегонное и спазмолитическое средство. В косметологии масло сафлора красильного оказывает смягчающее, укрепляющее и питательное действие на кожу, нормализует клеточные функции, улучшает кровообращение, обладает противовоспалительным действием, высокой влагоудерживающей и влагорегулирующей способностью [7]. Ранее в Таджикистане исследовались разработка и технологии выращивания сафлора на богаре, особенности роста развития и формирования урожая сафлора, продуктивность растений сафлора в зависимости от срока посева, выявление продуктивности растений сафлора в зависимости от

Адрес для корреспонденции: Балхова Латофат Мирзоевна. 734017, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Каримова, 27, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАНТ. E-mail: latofatbalkhova@gmail.com

цели и направленности [8]. Однако не были исследованы некоторые фотосинтетические показатели как содержание зеленых пигментов в листьях разных сортов сафлора, что явилось целью данной работы.

Материалы и методы исследования

Объектами исследования служили сорта сафлора ВИР-483, Джамбули, Махали-288, Шифо, которые были получены из Института земледелия ТАСХН. Полевые опыты проводились на экспериментальном участке Института ботаники, физиологии и генетики растений Национальной академии наук Таджикистана (г. Душанбе), расположенном в восточной части Гиссарской долины на высоте 834 м над ур. м. Содержание хлорофилла определяли согласно методике Д.И.Сапожникова [9] по описанию В.Е.Васильевой [10] с использованием 80% этилового спирта в 0.1 г свежих листьев. Количественное определение суммы хлорофиллов в отфильтрованной вытяжке проводили на спектрофотометре Ultraspec II (Швеция). Содержание хлорофилла рассчитывали по формуле Вернона [11].

Статистический анализ полученных результатов проводили по методике Б.А.Доспехова [12] с использованием программы *Microsoft Excel 2010*. В таблицах приведены среднеарифметические величины и стандартные ошибки из трёх биологических повторностей.

Результаты и обсуждение

На рис. 1 представлены данные по содержанию фотосинтетических пигментов некоторых сортов сафлора, выращиваемых в Таджикистане. Анализ приведённых данных показывает, что самое высокое содержание хлорофиллов a и b в фазе появления 5 и 6 настоящих листьев наблюдается у сорта Джамбули. У сорта Шифо в этой фазе содержание хлорофилла a на 0.2, а содержание хлорофилла b – на 0.1 мг было меньше, чем у сорта Джамбули. Сорт ВИР-483 по содержанию хлорофиллов a и b занимал промежуточное положение и составляло 0.79 и 0.31 мг/г сырой массы, соответственно.

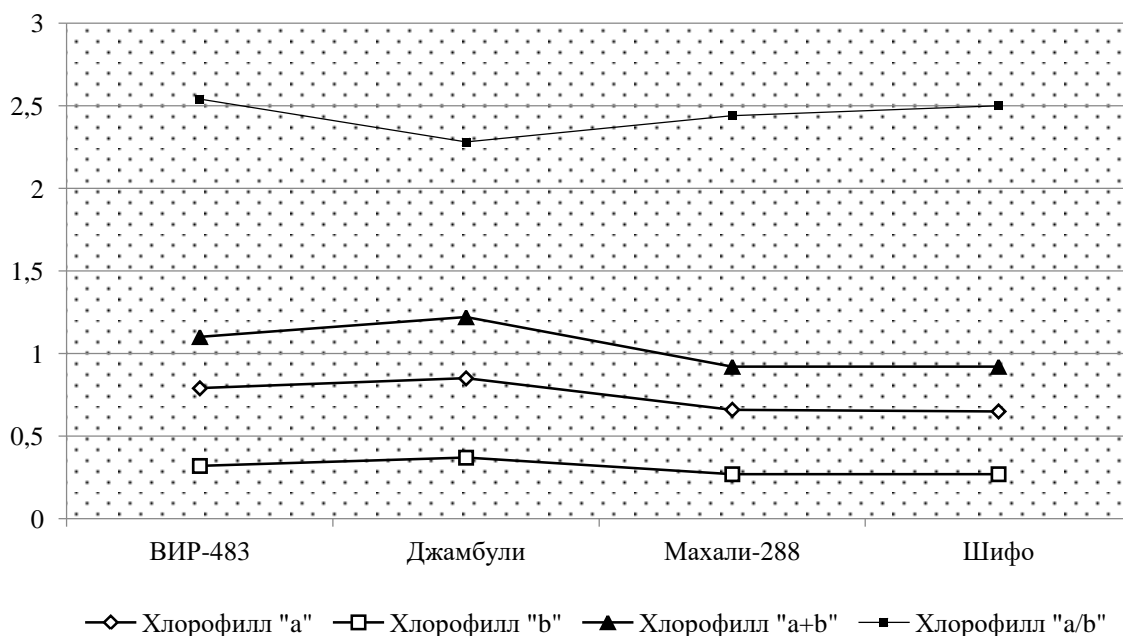


Рис. 1. Содержание фотосинтетических пигментов в листьях разных сортов сафлора в фазе стеблевания (мг/г сырой массы)

В этой фазе самое высокое значение суммы хлорофиллов $a+b$ наблюдалось у сорта Джамбули, а самое низкое значение было у сорта Шифо. Соотношение хлорофиллов a/b было больше у сортов ВИР-483 и Шифо и имело одинаковое значение, чем у других изученных сортов. Низкое значение этого показателя наблюдалось у сортов Джамбули и Махали-288, которые были на одинаковом уровне.

В фазе бутонизации (рис.2) содержание хлорофиллов a и b у исследуемых растений увеличивается по сравнению с предыдущей фазой развития. В этой фазе самая высокая величина наблюдается у сорта Махали-288, у которого содержание хлорофилла a увеличивалось в 1.6 раза, по сравнению с фазой появления 5 и 6 настоящих листьев, а содержание хлорофилла b на 2.6 раза. У сорта Джамбули содержание хлорофилла a увеличивалось в 1.4 раза, содержание хлорофилла b в 1.7 раза. У сорта ВИР-483 содержание хлорофилла a также увеличивалось в 1.4 раза, содержание хлорофиллов b в 2.0 раза. В этой фазе развития у сорта Шифо количество хлорофилла a в 16 раз. Самое высокое значение суммы хлорофиллов наблюдалось у сафлора сорта Махали-288, которое составило 2.08 мг/г сырой массы. У сортов Джамбули, ВИР-483 и Шифо этот показатель составил 1.85, 1.79 и 1.55 мг/г сырой массы, соответственно. Соотношение хлорофиллов a/b было почти одинаковым и колебалось от 1.38 до 2.54.

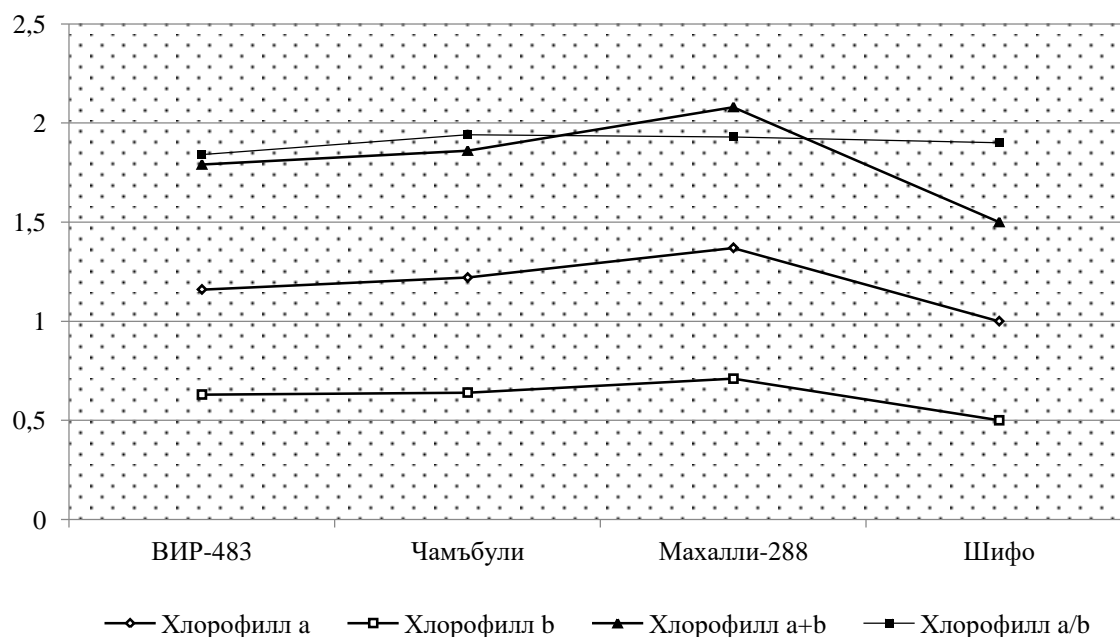


Рис. 2. Содержание фотосинтетических пигментов в листьях разных сортов сафлора в фазе бутонизации (мг/г сырой массы).

Различие в фазе цветения по содержанию хлорофиллов a и b у исследуемых растений, кроме сорта Шифо, у которого хлорофилл a уменьшается – 0.8 мг/г сырой массы, по сравнению с фазой появления 5 и 6 настоящих листьев, незначительно. В исследуемой фазе развития самое высокое значение суммы хлорофиллов наблюдалось у сафлора сорта Джамбули, которое составляло 2.4 мг/г сырой массы и низкое содержание суммы хлорофиллов наблюдалось у сорта Шифо – 1.7 мг/г сырой

массы. Соотношение хлорофиллов a/b у исследуемых объектов отличалось между сортами и колебалось от 1.38 до 1.90 мг/г сырой массы.

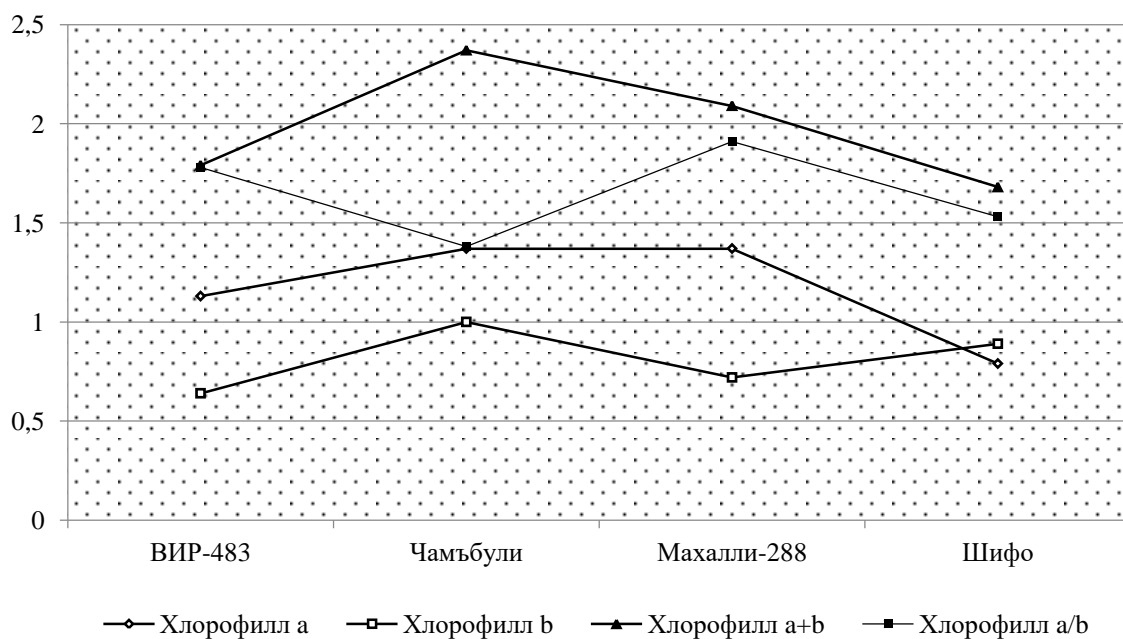


Рис. 3. Содержание фотосинтетических пигментов в листьях разных сортов сафлора в фазе цветения (мг/г сырой массы)

В целом, изучение содержания пластидных пигментов в зависимости от фазы развития сортов сафлора в условиях Центрального Таджикистана показало, что зеленые пигменты в зависимости от фазы развития имели закономерное изменение. Изучение содержания фотосинтетических пигментов в листьях у сортов сафлора в зависимости от фазы их развития показало, что содержание хлорофиллов a и b , начиная с фазы появления 5 и 6 настоящих листьев, увеличивается до фазы цветения, а затем в фазе созревания не обнаруживается. Соотношение хлорофиллов a/b было наибольшим у сафлора сорта Махали-288, наименьшим у растений сафлора сорта Джамбули. При этом высокое содержание суммы хлорофиллов достигается за счет значительного увеличения относительной доли хлорофилла a .

Поступило 12.04.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hertel K. Tactical agronomy of safflower and linseed: place in the rotation, yield potential, time of sowing, plant growth and marketing. GRDC Update Papers 1 March 2016, <https://grdc.com.au/Research-and-Development/GRDC-Update-Papers/2016/03/>.
2. Ravi, S., Channal H.T., Hebsur N.S., Patil B.N., Dharmatti P.R. 2008. Effect of sulphur, zinc and iron nutrition on growth, yield, nutrient uptake and quality of safflower (*Carthamus tinctorius* L.). – Karnataka Journal Agriculture Science 32: 382-385.

3. Siddiqui M.H., Oad F.C. Nitrogen Requirement of Safflower (*Carthamus tinctorius* L.) for Growth and Yield Traits. – Asian Journal of Plant Sciences, 2006, v.5, pp.563-565.
4. Velasco L., Pérez-Vich B., Fernández-Martínez J.M. Identification and Genetic Characterization of a Safflower Mutant with a Modified Tocopherol Profile. – Plant Breeding, 2005, v.124, pp. 459-463.
5. Cerioni G.A., Asnal W.E., Fernández E.M., Cholaki L., Giayetto O. Behaviour of Safflower (*Carthamus tinctorius*, L.) Cultivars in Rio Cuarto Area, Córdoba (Argentina). – Investigación Agraria, 1999, v.14, pp. 203-215.
6. Kaffka S.R., Kearney T.E. Safflower Production in California. – UCANR Publications, California, 1998, pp.5-7.
7. Государственный реестр лекарственных средств. Официальное издание по состоянию на 1 апреля 2009 года: в 2-х т. – М.: Изд-во «Медицинский совет», т.1, 2009, 398 с.
8. Норов М.С. Научное обоснование технологии выращивания сафлора на богаре Центрального Таджикистана – Дисс.... д с.-х. наук, 2006, Москва, 273 с.
9. Сапожников Д.И. Пигменты пластид зеленых растений и методика их исследования. – М.-Л., 1964, 120 с.
10. Васильева В.Е. Пигменты. Методы биохимического анализа растений. – Изд-во Ленинградского университета, 1978, с.90-101.
11. Vernon L.F. Spectrophotometric Determination of Chlorophylls and Pheophytins in Plant Extracts – 1960, v. 32, № 9, pp. 1144-1150/
12. Доспехов Б.А. Методы полевого опыта. – М.: Агропромиздат, 1985, 351 с.

Л.М.Балхова

МИҚДОРИ ПИГМЕНТҲОИ ФОТОСИНТЕТИКӢ ДАР БАРГИ НАВӢҲОИ ГУНОГУНИ МАҲСАР

Институти ботаника, физиология ва генетикаи растаниҳои

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола маълумотҳо оиди миқдори пигментҳои фотосинтетикӣ дар баргҳои навъҳои гуногуни маҳсар оварда шудааст. Нишон дода шуд, ки миқдори хлорофиллҳои *a* ва *b* дар растаниҳои омӯхташуда аз марҳилаи пайдоиши барги ҳақиқӣ 5 ва 6 то гулкунӣ, меафзояд. Таносуби хлорофиллҳои *a/b* дар навъҳои маҳсари Маҳалӣ-288 баландтар, дар навъҳои сафлори Чамъбули пасттар мебошад, зиёдшавии миқдори хлорофиллҳои умумӣ аз ҳисоби хеле зиёд шудани ҳиссаи хлорофилл *a* мебошад.

Калимаҳои калидӣ: маҳсар, хлорофилл, миқдор, чамъи хлорофиллҳо, таносуб.

L.M.Balkhova

**CONTENT OF PHOTOSYNTHETIC PIGMENTS IN THE LEAVES OF CERTAIN
SAFLOR VARIETIES***Institute of Botany, Plant Physiology and Genetics, National Academy of Sciences of Tajikistan*

In this article data on the content of photosynthetic pigments in the leaves of different varieties of safflower are presents. It was shown that the content of chlorophylls a and b in the studied plants, starting from the phase of appearance of 5 and 6 true leaves by flowering, increases. The ratio of chlorophylls a/b was the highest in safflower varieties Makhali-288, the lowest in safflower varieties Chambuli, and a high content of total chlorophylls is achieved due to a significant increase in the relative proportion of chlorophyll a .

Key words: *safflower, chlorophyll, content, sum of chlorophylls, ratio.*

Сведения об авторе:

1. Балхова Латофат Мирзоевна – Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана, младший научный сотрудник . E-mail: latofatbalkhova@gmail.com

УДК 581.19:577.2

Специальность: 1.5.4 – Биохимия

З.Б.Давлятназарова

ФЕРМЕНТАТИВНЫЕ ПУТИ АДАПТАЦИИ РАСТЕНИЙ В УСЛОВИЯХ СТРЕССА

*Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана**(Представлено член-корреспондентом НАН Таджикистана К.Алиевым 31.01.2023 г.)*

В статье рассматриваются некоторые механизмы формирования устойчивости растений картофеля к засухе и засолению в условиях *in vitro*. Показано, что активность антиоксидантных ферментов супероксиддисмутазы (СОД), аскорбатпероксидазы (АПО) и каталазы (КАТ) у контрастных генотипов картофеля в условиях засухи и засоления генетически детерминирована и зависит как от генотипа растения, так и от локализации фермента. Выдвинуто предположение, что уровень ингибирования КАТ выше, чем других ферментов за счёт либо инактивации фермента, либо за счёт трудности перехода фермента из цитоплазмы в хлоропласты и ведущая роль в обезвреживании избытка H_2O_2 , который является продуктом процесса окисления в условиях стресса, принадлежит СОД и АПО.

Ключевые слова: картофель, адаптация, окислительный стресс, антиоксидантные ферменты, АФК, СОД.

Стрессорное воздействие засоления является одним из абиотических факторов среды, который провоцирует засуху и влияет на рост, развитие и продуктивность различных культур. Адаптация растений в ответ на воздействие стрессора происходит на различных уровнях и включает как физиологические, так и биохимические пути [1-4]. К физиологическим относятся изменения транспирационной активности, закрытие устьиц, изменение корневой системы, опушенности листьев и стеблей и т.д. К биохимическим путям адаптации можно отнести изменения трансляционной системы, которая индуцирует синтез новых белков [5], в том числе ферментов, а также аккумуляцию низкомолекулярных метаболитов, способных нейтрализовать действие окислителей, так как засуха и засоление сопровождаются генерацией активных форм кислорода [1, 2, 4].

Активные формы кислорода (АФК) в клетках присутствуют постоянно, как в нормальных условиях произрастания растений, так и при стрессорных воздействиях, но сверхпродукция АФК нарушает клеточный гомеостаз и является причиной развития окислительного стресса [1, 6]. В низких концентрациях АФК играют роль сигнальных молекул и участвуют в регуляции метаболизма, а при высоких концентрациях, наоборот, участвуют в реакции разобщения обменных процессов и активировании процессов перекисного окисления липидов (ПОЛ) мембран [1, 4, 6]. Поэтому исследования окислительных систем растений, толерантных к засолению, представляют удобную модель для изучения механизмов адаптации растений к стрессорным факторам, что имеет не только теоретическую,

Адрес для корреспонденции: Давлятназарова Зулфия Буриевна. 734017, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Каримова, 27, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАНТ. E-mail: zulfiyad@gmail.com

но и практическую ценность, связанную с поиском способов, усиливающих адаптационный потенциал растений к действию стрессоров [7].

Для понимания роли антиокислительных систем защиты растений целесообразно изучение роли ферментов у контрастных генотипов в формировании устойчивости при засухе и засолении [7].

Материалы и методы исследования

В исследовании использовали контрастные по устойчивости к засолению и засухе растения-регенеранты картофеля (устойчивые клон-гибриды №1 и №73 и неустойчивый клон-гибрид №69) из коллекции Института ботаники, физиологии и генетики растений НАНТ. В качестве стрессорного агента *in vitro* в среду культивирования добавляли полиэтиленгликоль (ПЭГ-6000) и 1% NaCl [7]. Содержание ферментов СОД, АПО и КАТ проводили по общепринятым методикам [8].

Статистический анализ данных проводили с использованием *Microsoft Exell 2010*. В работе приведены среднеарифметические величины и стандартные отклонения трёх определений их трёх биологических повторностей с использованием *t*-критерия Стьюдента и $P = 0.01$.

Результаты исследования и их обсуждение

Изучено влияние засоления и засухи на содержание антиоксидантных ферментов растений-регенерантов картофеля в условиях *in vitro*. Как видно из представленных данных, в условиях засухи (ПЭГ-6000) активность фермента супероксиддисмутазы (СОД) уменьшалась в разной степени (рис. 1). При 4-часовом стрессе у неустойчивого генотипа (клон-гибрид №69) активность СОД снижалась на 21%, а у устойчивых генотипов (клон-гибриды №1 и №73) снижение активности было меньше и составило 12 и 8% соответственно. При увеличении длительности стрессорного воздействия до 24 ч активность фермента понижалась у неустойчивого генотипа до 48%, в то время как у устойчивых генотипов процент ингибирования не превышал 20%.

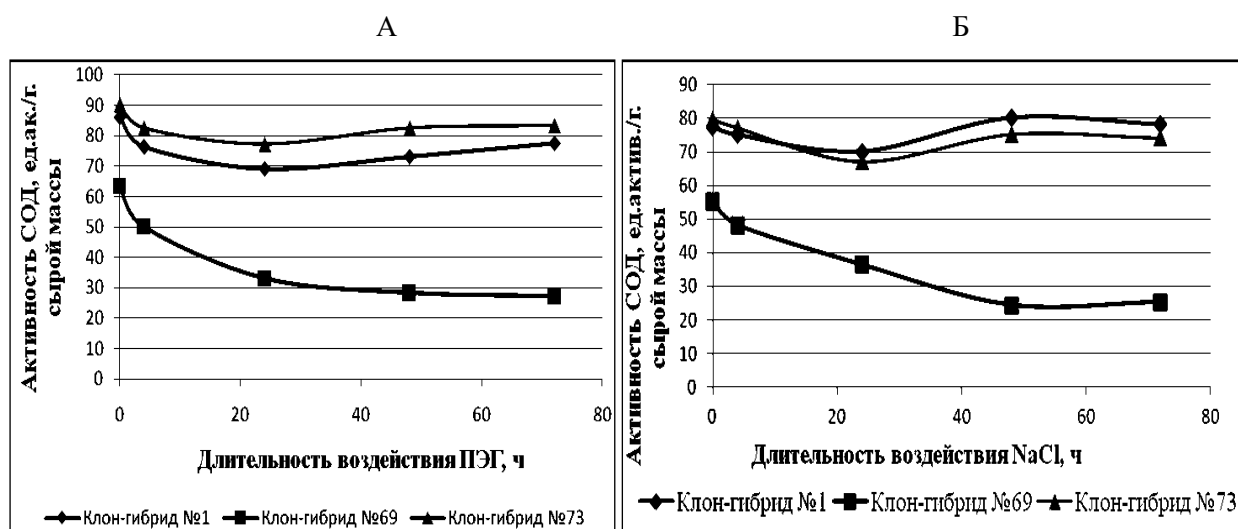


Рис. 1. Активность СОД контрастных генотипов картофеля в условиях засухи (А) и засоления (Б).

По мере увеличения периода воздействия засухи до 72 ч наблюдалась такая же тенденция падения активности фермента. У устойчивых генотипов содержание СОД уменьшилось до 10%, а у неустойчивого до 57%. Можно заключить, что в условиях длительной засухи толерантные генотипы

имели небольшой уровень снижения активности СОД, тогда как у чувствительного генотипа имело место падение активности более чем на 50%.

Изменение активности СОД в условиях засоления (1% NaCl) отличалось от показателей при засухе (рис. 1). За весь период воздействия солевого стрессора активность СОД у устойчивого клон-гибрида №1 снизилась незначительно (от 3 до 15%) и далее при продолжении воздействия соли (после 24 ч) не существенно повышалась.

Такая же тенденция наблюдалась и у клон-гибрида №73, максимум падения активности СОД наблюдался при 24 ч действия стресса (16%) и далее при 48 ч и 72 ч стресса активность снижалась незначительно. У неустойчивого генотипа (клон-гибрида №69) активность СОД падала во все периоды воздействия стресса и составила от 13 до 54%. То есть содержание СОД у устойчивых генотипов при длительном воздействии солевого стресса снижалось незначительно, а у неустойчивых генотипов процент ингибирования составил более 50%. Следует также отметить, что наблюдалась некоторая стабилизация уровня фермента после 24 ч экспозиции у всех контрастных генотипов, но у неустойчивого генотипа в меньшей степени, чем у устойчивого.

Таким образом, активность СОД при длительном воздействии засухи и засоления у контрастных генотипов имела одинаковую тенденцию к понижению, однако у неустойчивого генотипа снижение активности было более выражено. По всей видимости, у устойчивых генотипов в условиях длительного стресса после периода адаптации (24 ч) и истощения пула СОД происходит синтез этого фермента *de novo*, а у неустойчивых генотипов содержание фермента снижается во все периоды стрессорного воздействия и пул фермента не восполняется [7].

Определение содержания аскорбатпероксидазы (АПО) у контрастных генотипов показало, что засуха привела к разной направленности изменения активности фермента (рис. 2). Так, засуха индуцировала небольшое падение активности АПО у устойчивых генотипов (9 и 12%) при 4 ч засухи и значительно повышала ингибирование активности у неустойчивого генотипа до 45% в этих же условиях. Продолжение стрессорного воздействия ПЭГ-6000 после 4-х ч привело к повышению активности фермента у устойчивых генотипов, а у чувствительного генотипа активность АПО значительно и стабильно понижалась.

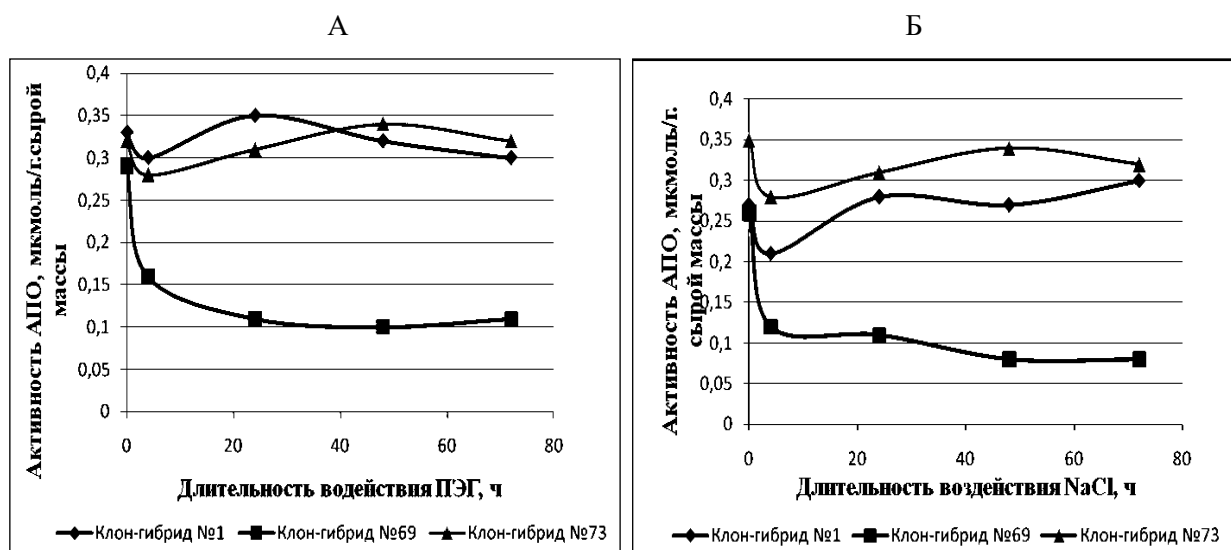


Рис. 2. Активность АПО контрастных генотипов картофеля в условиях засухи (А) и засоления (Б).

При солевом стрессе у устойчивых генотипов (клон-гибриды №1 и №73) активность АПО снижалась в первые 4 ч, а затем при продолжении действия стрессора повышалась. У чувствительного клон-гибрида №69 активность АПО резко ингибировалась при 4-х часовом воздействии (54%) и далее колебалась от 56 до 69% (рис. 2).

Таким образом, в ходе исследования были выявлены различия по активности АПО у контрастных генотипов в динамике стресса (ПЭГ-6000, NaCl). Активность АПО значительно ингибировалась у чувствительного генотипа во все периоды стрессорного воздействия, а у устойчивых генотипов незначительное падение активности АПО наблюдалось только в первые часы воздействия стрессора, тогда как при продолжении стресса значительных изменений активности не наблюдалось.

Активность каталазы (КАТ) в условиях солевого стресса и засухи также различалась у контрастных генотипов (рис. 3). У не устойчивого клон-гибрида №69 активность была ниже, по сравнению с устойчивыми генотипами (клон-гибридами №1 и 73).

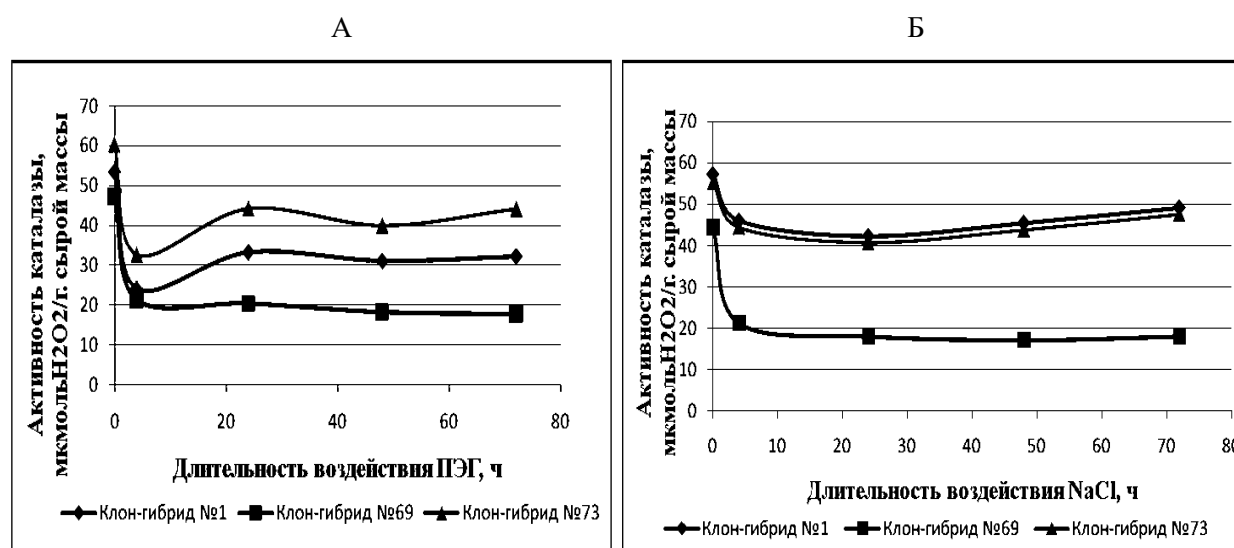


Рис. 3. Активность КАТ контрастных генотипов картофеля в условиях засухи (А) и засоления (Б).

После 4 ч выдерживания растений в условиях солевого стресса ингибирование активности каталазы у устойчивых генотипов достигало 20%, а у неустойчивого генотипа активность была значительно ниже и составила 52% от контроля. При продолжающемся стрессе происходило незначительное увеличение активности КАТ (процент ингибирования падал до 18%). У неустойчивого генотипа активность КАТ была ниже в сравнении с контролем и с устойчивыми генотипами.

В условиях засухи активность КАТ имела другую тенденцию (рис. 3). Так, после 4 ч засухи наблюдалось ингибирование активности КАТ у всех генотипов. При продолжающейся засухе у устойчивых генотипов активность фермента повышалась, а у неустойчивого генотипа (клон-гибрид №69) уменьшалась. Следует отметить, что имело место некоторое колебание активности фермента после 4-часового воздействия стресса.

Таким образом, изучение активности антиокислительных ферментов СОД, АПО и КАТ контрастных генотипов картофеля в условиях засухи и засоления показало, что процент ингибирования активности этих ферментов у неустойчивых генотипов был выше, чем у устойчивых. Было выдвинуто предположение, что КАТ при стрессорном воздействии будет играть одну из основных ролей в

детоксикации H_2O_2 , однако исследования показали, что уровень ингибирования КАТ был выше, чем других ферментов. По всей видимости, наблюдается либо инактивация КАТ, либо имеют место трудности перехода фермента из цитоплазмы в хлоропласты, и ведущая роль в обезвреживании избытка H_2O_2 принадлежит СОД и АПО.

Можно констатировать, что функционирование антиокислительных ферментов при стрессорном воздействии имеет свои генотипические особенности и зависит от компартиментации ферментов.

Поступило 31.01.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мерзляк М.Н. Активированный кислород и жизнедеятельность растений. – Соросовский образовательный журнал, 1999, № 9, с. 20-26.
2. Кузнецов Вл.В., Дмитриева Г.А. Физиология растений: учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2005, 736 с.
3. Якубова М.М. Экологические аспекты биохимической адаптации. – Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение биологических и медицинских наук, 2011, с. 77-88.
4. Колупаев Ю.Е., Кокорев А.И. Антиоксидантная система и устойчивость растений к недостатку влаги. – Физиология растений и генетика, 2019, т. 51, №1, с. 28-54.
5. Мирзохонова Г.О., Давлятназарова З.Б., Назарова Н.Н., Алиев К.А. Действие водного стресса на содержание полирибосом растений-регенерантов картофеля. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2004, т. XLVII, № 11-12, с. 70-78.
6. Foyer C.H., Noctor G. Oxidant and antioxidant signaling in plants: a reevaluation of the concept of oxidative stress in a physiological context. – Plant Cell Environ., 2005, vol. 29, p.1056-1071.
7. Давлятназарова З.Б. Механизмы устойчивости растений картофеля в условиях абиотического стресса: Дисс.... д.б.н., 2020, 270 с.
8. Борисова Г.Г., Малева М.Г., Некрасова Г.Ф., Чукина Н.В. Методы оценки антиоксидантного статуса растений. – Екатеринбург: Из-во Уральского ун-та, 2012, 69 с.

З.Б.Давлятназарова

РОҲҲОИ ФЕРМЕНТАТИВИИ МУТОБИҚШАВИИ РАСТАНИҲО ДАР ШАРОИТИ СТРЕССӢ

Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола роҳҳо ва механизмҳои ташаккули муқовимати растани картошка ба хушкӣ ва шӯрӣ дар шароити *in vitro* баррасӣ карда шудааст. Нишон дода шудааст, ки фаъолнокии ферментҳои антиоксиданти СОД, АПО ва КАТ-и генотипҳои картошка дар шароити хушкӣ ва шӯрӣ аз ҷиҳати генетикӣ идора карда мешавад ва ҳам аз генотипи растани ва ҳам аз макони ҷойгиршавии фермент вобаста аст. Пешниҳод карда шудааст, ки дараҷаи монетаршавии КАТ нисбат ба дигар ферментҳо аз сабаби ғайрифаволнокии фермент ё аз сабаби мушкилии интиқоли фермент аз ситоплазма ба

хлоропластҳо вобаста аст. Дар ин ҳолат дар безаргардони зиёдатии H_2O_2 ферментҳои СОД ва АПО нақши муҳим мебозанд.

Калимаҳои калидӣ: картошка, мутобиқшавӣ, стресси оксидативӣ, ферментҳои антиоксидантӣ, ШОФ, СОД.

Z.B.Davlyatnazarova

ENZYMATIC PATHWAYS OF PLANT ADAPTATION UNDER STRESS CONDITIONS

Institute of Botany, Plant Physiology and Genetics, National Academy of Sciences of Tajikistan

The article discusses some mechanisms of resistance formation to drought and salinity in potato plants in vitro. It was shown that the activity of antioxidant enzymes SOD, APO, and CAT of contrasting potato genotypes under drought and salinity conditions is genetically determined and depends not only from genotype? But also from enzyme localization. It has been suggested that the level of inhibition of CAT is higher than that of other enzymes due to either inactivation of the enzyme or due to the difficulty of the enzyme transfer from the cytoplasm to chloroplasts, and the leading role in the neutralization of excess H_2O_2 , which is a product of the oxidation process under stress, belongs to SOD and APO.

Key words: potato, adaptation, oxidative stress, antioxidant enzymes, ROS, SOD.

Сведения об авторе:

1. Давлятназарова Зульфия Буриевна – доктор биол. наук, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана, заместитель директора по науке и образованию.