

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- З.Х.Рахмонов, Ф.З.Рахмонов.** Проблема Варинга с почти пропорциональными слагаемыми481
- Ш.А.Хайруллоев.** О равномерных по параметрам оценках специальных тригонометрических сумм489
- М.Ш.Шабозов, Н.О.Гадоев.** О наилучшем линейном методе приближения функций в пространстве Харди $H_{q,\rho}(1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R)$ 496
- Д.К.Тухлиев.** О наилучшем приближении функций в пространстве Бергмана B_2 510
- С.А.Исхоков, Д.С.Гайбов, Ф.Ш.Махмадова.** О резольвенте эллиптических операторов с нестепенным вырождением в ограниченной области522
- К.Ш.Файзода.** О решении задачи Дирихле для одной эллиптической системы шестого порядка с разрывным коэффициентом530

АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, С.Н.Сафаров.** Определение некоторых особенностей потенциально опасного астероида 1998 OR2 по наблюдениям в Таджикистане540
- М.Нарзиев, Х.Ф.Худжаназаров, Т.Й.Йопек.** Январские метеорные потоки и ассоциации по результатам радиолокационных наблюдений в ГисАО550

ФИЗИКА

- Т.Х.Салихов, Ю.П.Ходжаев, А.Э.Сулейманов, А.Махмалатиф.** Вклад релаксации потока тепла в поглощающей подложке в характеристики фотоакустического сигнала прозрачных образцов561

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

- Д.Н.Низомов, Б.А.Турсунов.** Численное решение статических задач плит на упругом основании методом сосредоточенных деформаций568

ЭКОЛОГИЯ

- Ш.С.Сагдиева, М.У.Шарофова, С.Б.Самиев, Ш.Ш.Самиева, Ф.Рахими, М.Миршохи.** Анализ среднесуточных показателей некоторых поллютантов в составе атмосферного воздуха в городе Душанбе в период с 2017 по 2021 гг.579

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Д.Х.Халиков, Х.К.Махкамов, С.Халикова, Д.С.Мухиддинов, Х.Х.Авлоев.** Сравнительное изучение кислотной гидролиз-экстракции протопектинов корзинки подсолнечника и свекловичного жома588

М.Д.Бобоёров, Ф.Дж.Саломов, Б.Б.Баротов, А.Ш.Насруллоев, И.Мирсаидзода. Сравнительная оценка термодинамических процессов разложения урансодержащих руд Таджикистана.....	595
В.Д.Абулхаев, М.А.Балаев, И.Н.Ганиев, Х.Х.Назарзода, Б.Д.Сайдалиев, С.О.Убайдов. Синтез и магнитные свойства твёрдых растворов системы $Tb_5V_{13}-Er_5V_{13}$	600
МЕТАЛЛУРГИЯ	
А.Муродиён, Н.Х.Раджабзода, Ш.Кабир, Н.А.Наимов, Х.А.Мирпочаев, Б.С.Азизов. Экологическая и технико-экономическая оценка работы алюминиевых электролизеров.....	605
ПРИКЛАДНАЯ И МЕДИЦИНСКАЯ ГЕНЕТИКА	
Б.П.Пирмахмадзода. Секвенирование генома микобактерий туберкулёза	615

CONTENTS

MATHEMATICS

Z.Kh.Rakhmonov, F.Z.Rakhmonov. Waring's problem with almost proportional summands.....	481
Sh.A.Khayrulloev. On uniform parameter estimates for special trigonometric sums	489
M.Sh.Shabozov, N.O.Gadoev. On the best linear method of approximation of functions in Hardy space $H_{q,\rho}(1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R)$	496
D.K.Tukhliev. On the best approximation of functions in Bergman space B_2	510
S.A.Iskhokov, D.S.Goibov, F.Sh.Makhmadova. About of a resolvent of elliptic operators with non-power degeneracy in a bounded domain	522
K.Sh.Faizzoda. Of the Dirichlet problem for some elliptic systems of sixes-order differential equations in the plane	530

ASTRONOMY

G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, S.N.Safarov. Determination of some features of the potentially hazardous asteroid 1998 OR2 from observations in Tajikistan.....	540
M.Narziev, H.F.Khujanazarov, T.J.Jopek. January meteor showers and associations according to the results of radar observations in HisAO.....	550

PHYSICS

T.Kh.Salikhov, Y.P.Khodjaev, A.E.Sulaimonov, A.Mahmalatif. Contribution of relaxation of the heat flow of the absorbing substance to the characteristics of the photoacoustic signal of transparent samples	561
--	------------

STRUCTURAL MECHANICS

D.N.Nizomov, B.A.Tursunov. Numerical solution of static problems plates on an elastic base by method of concentrated deformations	568
--	------------

ECOLOGY

Sh.S.Sagdieva, M.U.Sharofova, S.B.Samiev, Sh.Sh.Samieva, F.Rahimi, M.Mirshahi. Analysis of average daily indicators of some pollutants in the composition of atmospheric air in dushanbecity from 2017 to 2021	579
---	------------

PHYSICAL CHEMISTRY

D.Kh.Khalikov, Kh.K.Makhkamov, S.Khalikova, D.S.Mukhiddinov, Kh.Kh.Avloev. Comparative studies of acid hydrolysis extraction of sunflower basket protopectins and beet pulm.....	588
M.D.Boboyorov, F.J.Salomov, B.B.Barotov, A.Sh.Nasrulloev, I.Mirsaidzoda. Comparative assessment of thermodynamic processes of decomposition of uranium-containing ores in Tajikistan.....	595

V.D.Abukhaev, M.A.Balaev, I.N.Ganiev, Kh.Kh.Nazarzoda, B.D.Saydaliev, S.O.Ubaydov.
Synthesis and magnetic properties of solid solutions of the Tb_5Bi_3 - Er_5Bi_3 system.....**600**

METALLURGY

A.Murodijon, N.Kh.Rajabzoda, Sh.Kobir, N.A.Naimov, Kh.A.Mirpochaev, B.S.Azizov. Ecological and technical-economic assessment of electrolyzers for aluminum production.....**605**

APPLIED AND MEDICAL GENETICS

B.P.Pirmakhmadzoda. Mycobacteria tuberculosis genome sequencing.....**615**

УДК 511.344

Специальность: 1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Академик НАН Таджикистана З.Х.Рахмонов, Ф.З.Рахмонов
**ПРОБЛЕМА ВАРИНГА С ПОЧТИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ
 СЛАГАЕМЫМИ**

*Национальная академия наук Таджикистана,
 Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана*

Доказана асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального N в виде суммы $r=2^n+1$ слагаемых, каждый из которых является n -ой степенью натурального числа x_i , $i = \overline{1, r}$, удовлетворяющее условиям

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq H, \quad H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}, \quad \theta(n,r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)},$$

где μ_1, \dots, μ_r – положительные фиксированные числа и $\mu_1 + \dots + \mu_r = 1$. Этот результат является усилением теоремы Е.М.Райта.

Ключевые слова: *проблема Варинга, почти пропорциональные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма Г.Вейля, малая окрестность центров больших дуг.*

Лагранж доказал, что любое натуральное число представимо в виде суммы не более четырёх квадратов натуральных чисел. Обобщая эту теорему, Варинг в 1770 г. сформулировал проблему, которая утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нём базис конечного порядка $G(n)$, то есть каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_r^n = N, \tag{1}$$

где x_1, x_2, \dots, x_r – натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированной величины $G(n)$, называемой порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди. Проблему Варинга в 1909 г. решил Д.Гильберт, тем самым он установил существование функции $G(n)$. В 1920 г. Харди и Литтлвуд доказали проблему Варинга новым методом, который затем получил название круговой метод Харди-Литтлвуда-Рамануджана. Они ввели функцию $G(n)$ и доказали, что

$$n < G(N) \leq n2^{n-1}h; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h = 1.$$

Адрес для корреспонденции: *Рахмонов Зарулло Хусенович, Рахмонов Фируз Заруллоевич. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики АН РТ. E-mail: zarullo_r@mail.ru, rakhmonov.firuz@gmail.com.*

Самым же основным результатом было то, что Харди и Литтлвуд при

$$r > (n - 2)2^{n-1} + 5$$

для числа $J_{n,r}(N)$ представлений числа N в виде (1) нашли асимптотическую формулу вида

$$J_{n,r}(N) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \left(\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)\right)^{-1} N^{\frac{r-1}{n}} \mathfrak{S}_{n,r}(N) + O(N^{\frac{r-1}{n} - c(n,r)}),$$

где $\mathfrak{S}_{n,r}(N)$ – некоторый особый ряд, сумма которого, как они показали, превосходит некоторое положительное число $c_{n,r}(N)$.

В 1924 г. И.М.Виноградов [1], применяя к проблеме Варинга свой метод тригонометрических сумм, нашёл асимптотическую формулу Харди и Литтлвуда при

$$r \geq 2[n^2(2 \ln n + \ln \ln n + 3)].$$

В 1934 г. И.М.Виноградову [1] удаётся доказать, что

$$G(n) < n(2 \ln n + 4 \ln \ln n + 2 \ln \ln \ln n + 13).$$

А.А.Карацуба [2], применяя к оценке $G(n)$ p -адический метод, нашёл более точную оценку

$$G(n) < n(2 \ln n + 2 \ln \ln n + 12).$$

Т.Вули [3] показал, что

$$G(n) < n \ln n + n \ln \ln n + O(1).$$

Значение $G(n)$ известно всего лишь для $k = 2$ и $k = 4$, а именно $G(2) = 4$, $G(4) = 16$, что в свою очередь доказали Лагранж и Давенпорт.

Проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми впервые исследовал М.Е.Райт [4]. Для количества представлений достаточно большого числа N в виде (1) при

$$r \geq (n - 2)2^{n-1} + 5,$$

он нашёл асимптотическую формулу при выполнении условий

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq N^{1-\theta}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = 1,$$

где число $\theta = \theta(n, r)$ определяется из соотношения

$$\theta = \frac{1}{n} \min \left(\frac{(r - 2^n)(2^{n-1} + 1)}{(nr + n - 2^n - 3)2^{n-1} + r}, \frac{r - (n - 2)2^{n-1} - 4}{r + 2^{n-1} - 4}, \frac{r - 2^{n-1}}{nr - 2^{n-1} + n - 1} \right).$$

Отсюда, в частности при $n = 3, 4, 5, 6$ и $r = (n - 2)2^{n-1} + 5$ для $\theta(n, r)$, имеем

$$\theta(3,6) = \frac{1}{51}, \quad \theta(4,21) = \frac{1}{100}, \quad \theta(5,53) = \frac{1}{325}, \quad \theta(6,133) = \frac{1}{966}.$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon \tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Для некоторого P , $P < 0,1\tau$ через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим числа α , для которых $q \leq P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α . $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

После создания метода тригонометрических сумм И.М.Виноградова вывод асимптотических формул для количества решений в классических аддитивных проблемах, к которым относится проблема Варинга, тернарная проблема Гольдбаха, проблема Варинга-Гольдбаха, проблема Эстермана, круговым методом Харди-Литтлвуда-Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова сводится к двум следующим задачам:

- исследованию поведения тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T_n(\alpha, x) = \sum_{m \leq x} e(\alpha m^n), \quad S_n(\alpha, x) = \sum_{p \leq x} e(\alpha p^n),$$

в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$,

- получение нетривиальных оценок этих сумм в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$.

Вывод асимптотических формул для количества решений в классических аддитивных проблемах становится гораздо труднее, если требовать, что все слагаемые почти пропорциональны или все они почти равны (аддитивная задача с почти пропорциональными слагаемыми при $\mu_1 = \dots = \mu_r$ превращается в задачу с почти равными слагаемыми), так как вместо тригонометрических сумм Г.Вейля $T_n(\alpha, x)$ и $S_k(\alpha, x)$ возникают короткие тригонометрические суммы Г.Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^n), \quad S_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < p \leq x} e(\alpha p^n),$$

причём, если $n > 1$, то длина и границы коротких тригонометрических сумм зависят от чисел μ_i . Это означает, что каждой из r слагаемых соответствует своя короткая тригонометрическая сумма, а в случае аддитивных задач с почти равными слагаемыми все эти суммы совпадают. Более конкретно решения этих классических аддитивных проблем с почти пропорциональными слагаемыми круговым методом Харди-Литтлвуда-Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова сводятся к трём следующим задачам:

- исследование поведения коротких тригонометрических сумм $T_n(\alpha; x, y)$ и $S_n(\alpha; x, y)$ в малых окрестностях центра больших дуг $\mathfrak{M}(P)$;
- нахождение нетривиальных оценок этих сумм в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$ за исключением малых окрестностей их центров;

- получение нетривиальных оценок этих сумм в малых дугах $m(P)$.

Поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T_n(\alpha; x, y)$ для фиксированного n в больших дугах было исследовано в работах [5,6]. Воспользовавшись этими результатами (см. ниже лемма 1 и следствия 1.1 и 1.2) в сочетании с нетривиальными оценками сумм $T_n(\alpha; x, y)$ в малых дугах [7], были доказаны асимптотические формулы для количества решений в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

- в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми для $n = 3, 4, 5$ [8,9,6], то есть для количества решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$\left| x_i - \left(\frac{N}{2^n + 1} \right)^{\frac{1}{n}} \right| \leq H, \quad i = 1, \dots, 2^n + 1, \quad H \geq N^{\frac{1}{n} - \theta(n) + \varepsilon},$$

при

$$\theta(3) = \frac{1}{30}, \quad \theta(4) = \frac{1}{108}, \quad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

- в обобщении [10,5,11] тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде

$$p_1 + p_2 + m^n = N,$$

при $n = 2, 3, 4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m , с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| m^n - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{1 - \theta(n)} \mathcal{L}^{c_n},$$

соответственно при

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \quad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \quad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

Авторам удалось доказать, что теорема Е.М.Райта об асимптотической формуле в обобщении проблемы Варинга с почти пропорциональными слагаемыми имеет место при условии

$$\theta(n, r) = \frac{2}{(r+1)(n^2 - n)} + \varepsilon, \quad r = 2^n + 1.$$

Теорема 1. Пусть N – достаточно большое натуральное число, $n \geq 3$ – натуральное число, $r = 2^n + 1$, μ_1, \dots, μ_r – положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию

$$\mu_1 + \dots + \mu_r = 1,$$

$J_{n,r}(N, H)$ – число решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq H, \quad i = 1, \dots, r \quad \theta(n, r) = \frac{2}{(r+1)(n^2 - n)}. \tag{2}$$

Тогда при $H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N, H) = \frac{2^r \gamma(n, r)}{n^r} \prod_{i=1}^r \mu_i^{-1+\frac{1}{n}} \mathfrak{S}(N) \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}}\right),$$

где $\gamma(n, r)$ – абсолютная постоянная, которая определяется соотношением

$$\gamma(n, r) = \frac{r^{r-1} - \frac{r}{1!}(r-2)^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2!}(r-4)^{r-1} - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(r-6)^{r-1} + \dots}{2^r (r-1)!},$$

$\mathfrak{S}(N)$ – особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное, а постоянное под знаком O зависит от чисел μ_1, \dots, μ_r .

Отсюда, в частности, имеем

$$\theta(9, 3) = \frac{1}{30}, \quad \theta(4, 17) = \frac{1}{108}, \quad \theta(5, 33) = \frac{1}{340}, \quad \theta(6, 65) = \frac{1}{990}.$$

Частный случай теоремы 1 при $n = 3$ ранее был доказан в работе [12].

Из теоремы 1 следует асимптотическая формула в обобщении проблемы Варинга с почти равными слагаемыми.

Следствие 1. Пусть N – достаточно большое натуральное число, $n \geq 3$ – натуральное число, $r = 2^n + 1$, $J_{n,r}(N, H)$ – число решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$\left| x_i^n - \frac{N}{r} \right| \leq H, \quad i = 1, \dots, r \quad \theta(n, r) = \frac{2}{(r+1)(n^2 - n)}.$$

Тогда при $H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N, H) = \frac{2^r r^{r-\frac{r}{n}} \gamma(n, r)}{n^r} \mathfrak{S}(N) \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}}\right).$$

Теорема 1 доказывается круговым методом Харди-Литтлвуда-Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова с применением теории коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида $T_n(\alpha; x, y)$ и основными утверждениями, позволившими доказать эту теорему, являются

- асимптотическая формула для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T_n(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг (следствие 1.1 леммы 1);
- нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T_n(\alpha; x, y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров (следствие 1.2 леммы 1);

- нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T_n(\alpha; x, y)$ в малых дугах (лемма 2);
- обобщение известной теоремы Хуа Ло-кена для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T_n(\alpha; x, y)$ (лемма 2).

Обозначения. $N > N_0$ – натуральное число, ε – произвольное положительное число, не превосходящее 0.00001, $\mathcal{L} = \ln N$,

$$S(a, q) = \sum_{m=1}^q e\left(\frac{am^n}{q}\right), \quad \gamma_n(\lambda; x, y) = \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2} + yu\right)^n\right) du.$$

Лемма 1. [5,6]. Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ и $\lambda \geq 0$, тогда при $\{n\lambda x^{n-1}\} \leq \frac{1}{2q}$, имеет место

формула

$$T_n(\alpha, x, y) = \frac{S_n(a, q)}{q} T_n(\lambda; x, y) + O\left(q^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\right),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T_n(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2 \leq k \leq n} \left(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{\frac{1-n}{k}} q^{\frac{1}{n}} \right).$$

Следствие 1.1. [5,6]. Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, тогда имеет место

соотношение

$$T_n(\alpha, x, y) = \frac{y}{q} S_n(a, q) \gamma_n(\lambda; x, y) + O\left(q^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\right).$$

Следствие 1.2. [5,6]. Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$, тогда имеет место

оценка

$$T_n(\alpha; x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2 \leq k \leq n} \left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{\frac{1-n}{k}} q^{\frac{1}{k} - \frac{1}{n}} \right).$$

Лемма 2. [7]. Пусть $x \geq x_0 > 0$, $y_0 < y \leq 0.01x$, $\tau(h)$ – функция делителей, α – вещественное число,

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

то справедлива оценка

$$|T_n(\alpha; x, y)| \leq 2y \left(4n! \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q \ln q}{y^n} \right) \max_{h < y^{n-1}} \tau(h) \right)^{\frac{1}{2^{n-1}}},$$

Лемма 3. [12]. Пусть x и y – натуральные числа, $\sqrt{x} < y \leq x \mathcal{L}^{-1}$, тогда имеет место оценка

$$\int_0^1 |T_n(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \ll y^{2^k - k + \varepsilon}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Эта оценка нетривиальна при $q \gg 2^{2n-1} 4n! \tau(y^{n-1})$, то есть $q \gg y^\varepsilon$.

Поступило 12.01.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов И.М. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1952.
2. Карацуба А.А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга. – Известия Академии наук СССР. Серия математическая, 1985, т. 49, №5, с. 935-947.
3. Wooley T.D. Large improvements in Waring's problem. – Ann of Math, 1992, v. (2)135, №1, pp. 131-164.
4. Wright E.M. Proportionality conditions in Waring's problem. – Mathematische Zeitschrift, 1934, v. 38, p. 730-746.
5. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2014, т. 95, вып. 3, с. 445-456.
6. Рахмонов З.Х., Назрублов Н.Н., Рахимов А.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения. – Чебышевский сборник, 2015, т. 16, в. 1(53), с. 232-247.
7. Рахмонов З. Х., Азамов А.З., Назрублов Н.Н. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малых дугах. – ДАН РТ, 2018, т. 61, №7-8, с. 609–614.
8. Рахмонов З.Х., Мирзоабдугафуров К.И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми. – ДАН РТ, 2008, т. 51, №2, с. 83-86.
9. Рахмонов З. Х., Азамов А.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми. – ДАН РТ, 2011, т. 54, №3, с. 34-42.
10. Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2003, т. 74, вып. 4, с. 564-572.
11. Рахмонов Ф. З., Рахимов А. О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми. – Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского. ISSN: 1810-4134, 2016, №8, с. 87-99.
12. Рахмонов З.Х.Обобщение проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов – Чебышевский сборник, 2023, т. 24, №3, с. 71-94.

З.Х.Рахмонов, Ф.З.Рахмонов

МУАММОИ ВАРИНГ БО ҶАМЪШАВАНДАҶОИ ҚАРИБ МУТАНОСИБ

*Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви**Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Барои миқдори тасвирҳои адади кифоя калони натуралии N дар намуди суммаи $r = 2^n + 1$ – то дараҷаҳои ададҳои натуралии x_i , $i = \overline{1, r}$ бо шартҳои

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq H, \quad H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}, \quad \theta(n,r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)},$$

μ_1, \dots, μ_r – ададҳои мусбати фиксиронидашуда ва $\mu_1 + \dots + \mu_r = 1$, формулаи асимптотӣ гирифта шудааст. Ин натиҷа аз теоремаи Е.М.Райт қавитар мебошад.

Калимаҳои калидӣ: муаммои Варинг, ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб, суммаи кӯтоҳи тригонометрии Г.Вейл, атрофи хурди марказҳои камонҳои калон.

Z.Kh.Rakhmonov, F.Z.Rakhmonov

WARING'S PROBLEM WITH ALMOST PROPORTIONAL SUMMANDS

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan

An asymptotic formula is proven for the number of representations of a sufficiently large natural number N in the form of a sum of $r = 2^n + 1$ terms that are n -th power of natural numbers x_i , $i = \overline{1, r}$, satisfying the conditions

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq H, \quad H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}, \quad \theta(n,r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)},$$

where μ_1, \dots, μ_r – are positive fixed numbers and $\mu_1 + \dots + \mu_r = 1$. This result is a strengthening of E.M.Wright's theorem.

Key words: Waring's problem, almost proportional Summands, H.Weil's short exponential sum, small neighborhood of centers of major arcs.

Сведения об авторах:

1. **Рахмонов Зарулло Хусенович** – доктор физ.-мат. наук, Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, директор. E-mail: zarullo-r@rambler.ru;
2. **Рахмонов Фируз Заруллоевич** – кандидат физ.-мат. наук, Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, заведующий отделом. E-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com.

УДК 511.331

Специальность: 1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Ш.А.Хайруллоев

О РАВНОМЕРНЫХ ПО ПАРАМЕТРАМ ОЦЕНКАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

Национальная академия наук Таджикистана,

Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 16.08.2023 г.)

В работе получена новая равномерная по параметрам оценка специальных тригонометрических сумм $W(T)$, которая улучшает оценки А.А.Карацубы в случае, когда промежуток $(T, T+H)$ имеет более короткую длину.

Ключевые слова: тригонометрическая сумма, экспоненциальная пара, короткий промежуток, критическая прямая, функция Дэвенпорта-Хейльбронна.

При изучении нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой основным моментом является оценка тригонометрических сумм вида

$$W = W(T) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P} \frac{a(\lambda_1)d(\lambda_1)\bar{a}(\lambda_2)\bar{d}(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

где

$$P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}}, \quad T \geq T_0(\varepsilon) > 0, \quad 0 < \varepsilon < 0,01, \quad 0 < H < T^{\frac{1}{3}}, \quad X = T^{0,01\varepsilon},$$

$$a(\lambda) = \sum_{\substack{m_1=\lambda \\ v_2 \\ v_1, v_2 < X}} \frac{h(v_1)h(v_2)r(n)}{v_2}, \quad d(\lambda) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu} du, \quad 0 < h < h_1 < 1,$$

$$r(n) = \frac{1-i\varepsilon}{2} \chi(n) + \frac{1+i\varepsilon}{2} \bar{\chi}(n), \quad h(v) = \beta(v)\chi(v) = \beta(v)\bar{\chi}(v).$$

Эти суммы и близкие к ним суммы ранее изучал А.А.Карацуба [1,2]. Он доказал, что при $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, для суммы $W(T)$ справедлива следующая оценка $W(T) \ll h^2 T^{-\varepsilon}$.

Адрес для корреспонденции: Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: shamsullo@rambler.ru.

В настоящей работе, применяя метод экспоненциальных пар [3], следуя работам [4,5], получена новая равномерная по параметрам оценка специальных тригонометрических сумм $W(T)$, которая улучшает оценки А.А.Карацубы в случае, когда промежуток $(T, T + H)$ имеет более короткую длину.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть (κ, λ) – произвольная экспоненциальная пара, ε – произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01, $\mathcal{L} = \ln P$,

$$\theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2}, \quad \sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathcal{L}}{(\kappa + 1) \ln T}.$$

Тогда для суммы $W(T)$, при $H = T^{\theta(\kappa, \lambda) + \varepsilon + \sigma(\kappa)}$ справедлива оценка

$$W(T) \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.$$

Отметим, что показатель $\theta(\kappa; \lambda)$ в теореме также рассматривался в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2 + y^2 \leq R$, также при оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xu \leq N$, $x > 0$, $y > 0$. Наилучшую для $\theta(\kappa; \lambda)$ оценку сверху на данный момент получили J.Bourgain and N.Watt [6]. Они доказали, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa, \lambda \in \mathcal{P}} \theta(\kappa, \lambda) = \min_{\kappa, \lambda \in \mathcal{P}} \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2} \leq \frac{1515}{4816} = \frac{1}{3} - \frac{271}{3 \cdot 4816} \approx 0.314576,$$

где \mathcal{P} – множество всех экспоненциальных пар.

Из теоремы вытекает следующее

Следствие. Пусть ε – произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01. Тогда при $H = T^{\frac{1515}{4816} + \varepsilon}$ справедлива оценка:

$$W(T) \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.$$

Доказательство теоремы. Оценим часть суммы $W(T)$ с условием $\lambda_2 > \lambda_1(1 + \mathcal{L}H^{-1})$.

Используя неравенства $\ln(1 + x) > 0.5x$, $0 < x \leq 0.5$, имеем

$$\exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) < \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln\left(1 + \frac{\mathcal{L}}{H}\right)\right)^2\right) < \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{16}\right).$$

Для интеграла $d(\lambda)$ имеет место оценка $|d(\lambda)| \leq \sqrt{\pi h}$.

Обозначим через $W'(T)$ часть суммы $W(T)$ при $\lambda_2 - \lambda_1 > \mathcal{L} / H$, находим

$$|W'(T)| < \pi h^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{16}\right) \left(\sum_{\lambda < P} \frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\right)^2.$$

Далее, воспользовавшись определением суммы $A(\lambda)$ и соотношениями $|r(m)| \leq 1$ и $|h(\nu)| \leq 1$, имеем

$$W'(T) \ll h^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{16}\right) PX^2 \ln^2 X.$$

А теперь рассмотрим случай, когда $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_1(1 + \mathcal{L}H^{-1})$. Разобьём промежуток $0 < \lambda_1 < P$ в сумме $W(T)$ на $\ll \mathcal{L}$ промежутки вида $\Lambda < \lambda_1 \leq \Lambda_1 \leq 2\Lambda$, и, обозначая через $W(\Lambda)$ максимальную из получившихся таких сумм, находим

$$W(T) \ll \mathcal{L} |W(\Lambda)| + h^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{16}\right) PX^2 \ln^2 X. \tag{1}$$

Далее оценим сумму $W(\Lambda)$ при выполнении условия $\Lambda \leq HX^{-2} \mathcal{L}^{-1}$. Поступая подобно тому, как для $W'(T)$, получим

$$W(\Lambda) \ll h^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{64}\right) PX^2 \ln^2 X. \tag{2}$$

Теперь рассмотрим сумму $W(\Lambda)$ при условии $\Lambda > HX^{-2} \mathcal{L}^{-1}$ и выразим её через $C(u, h)$ и $F_j(h, \nu)$. Имеем

$$W(\Lambda) = \sum_{\Lambda < \lambda_1 \leq \Lambda_1} \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_1 \left(1 + \frac{\mathcal{L}}{H}\right)} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-iT} d(\lambda_1) \bar{d}(\lambda_2) \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Применяя определения функции $A(\lambda)$, сумму $W(\Lambda)$ представляем в следующем виде:

$$W(\Lambda) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 < X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\sqrt{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}} W(\Lambda, \nu), \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4), \tag{3}$$

где

$$W(\Lambda, \nu) = \sum_{\frac{\Lambda \nu_2}{\nu_1} < n_1 \leq \frac{\Lambda_1 \nu_2}{\nu_1} \leq \frac{n_1 a}{b} < n_2 \leq \frac{n_1 a}{b} (1 + \mathcal{L}H^{-1})} \sum r(n_1)r(n_2)\Phi(n_1, n_2, \nu) \left(\frac{n_1 a}{n_2 b}\right)^{-iT},$$

$$\Phi(n_1, n_2, \nu) = \frac{\exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{n_1 a}{n_2 b}\right)^2\right)}{\sqrt{n_1 n_2}} d(\lambda_1) \bar{d}(\lambda_2).$$

Числа n_1 и n_2 представим в виде членов арифметических прогрессий с разностью $5a$ и $5b$ и суммирования по b_1 и a_1 делая внешними, последовательно, приходим к формуле

$$W(\Lambda, \nu) = \sum_{0 \leq b_1 < 5b} r(b_1) \sum_{0 \leq a_1 < 5a} r(a_1) W(\Lambda, \nu, m, m_1), \tag{4}$$

$$W(\Lambda, \nu, m, m_1) = \sum_{N < m \leq N_1} \sum_{\alpha < h \leq \alpha + \omega(m)} \Phi(5bm + b_1, 5a(m+h) + a_1, \nu) \times \left(\frac{m + \frac{b_1}{5b}}{(m+h) + \frac{a_1}{5a}} \right)^{iT}.$$

В последней сумме заменяем порядок суммирования, имея ввиду обозначения $N_2 = \max(N, H / \mathcal{L}(h - \alpha) - b_1 / 5b)$, находим

$$W(\Lambda, \nu, m, m_1) = \sum_{\alpha < h \leq \alpha + \omega(N_1)} \sum_{N_2 < m \leq N_1} \Phi(5bm + b_1, 5a(m+h) + a_1, \nu) \times \left(\frac{m + \frac{b_1}{5b}}{m+h + \frac{a_1}{5a}} \right)^{iT}.$$

Применяя преобразование Абеля к сумме по m , приходим к формуле

$$W(\Lambda, \nu, m, m_1) = \sum_{\alpha < h \leq \alpha + \omega(N_1)} \left(- \int_{N_2}^{N_1} C(u, h) f'(u, h) du + C(N_1, h) f(N_1, h) \right),$$

$$f(u, h) = \Phi(5bu + b_1, 5a(u+h) + a_1, \nu), \quad C(u, h) = \sum_{N_2 < m \leq u} \left(\frac{m + \frac{b_1}{5b}}{m+h + \frac{a_1}{5a}} \right)^{iT}.$$

Полученную формулу подставляем в (4), затем в формулу (3), находим

$$W(\Lambda) \leq \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 < X} \frac{1}{\sqrt{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}} \sum_{0 \leq b_1 < 5b} \sum_{0 \leq a_1 < 5a} \sum_{\alpha < h \leq \alpha + \omega(N_1)} F(h, \nu) \max_{N_2 < u \leq N_1} |C(u, h)|, \tag{5}$$

$$F(h, \nu) = \int_{N_2}^{N_1} |f'(u, h)| du + |f(N_1, h)|.$$

Для интеграла $F(h, \nu)$ можно получить следующую оценку [4]:

$$F(h, \nu) \leq \sqrt{\frac{\nu_1 \nu_3}{\nu_2 \nu_4}} \cdot \frac{\pi h^2}{\Lambda}. \tag{6}$$

Далее сведём оценки суммы $W(\Lambda)$ к оценке суммы $C(u, h)$. Подставляя полученную оценку (6) в (5), находим

$$W(\Lambda) \ll \frac{h^2}{\Lambda} \sum_{v_1, v_2, v_3, v_4 < X} \frac{1}{v_2 v_4} \sum_{0 \leq b_1 < 5b} \sum_{0 \leq a_1 < 5a} \sum_{\alpha < h \leq \alpha + \omega(N_1)} \max_{N_2 < u \leq N_1} |C(u, h)|. \quad (7)$$

Оценим внутреннюю сумму

$$C(u, h) = \sum_{N_2 < m \leq u} e \left(\frac{T}{2\pi} \ln \frac{m + h + \frac{a_1}{5a}}{m + \frac{b_1}{5b}} \right),$$

где

$$N_2 = \max \left(\frac{\Lambda v_2}{5bv_1} - \frac{b_1}{5b}, \frac{H}{\mathcal{L}} (h - \alpha) - \frac{b_1}{5b} \right), \quad u \leq \frac{\Lambda_1 v_2}{5bv_1} - \frac{b_1}{5b}.$$

Для этого применяем метод экспоненциальных пар. Полагая

$$f(y) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{y + h + \frac{a_1}{5a}}{y + \frac{b_1}{5b}}, \quad A = \frac{T|h - \alpha|}{N_2^2} \ll \frac{T|h - \alpha| b^2 v_1^2}{\Lambda^2 v_2^2}, \quad B = u - N_2 \ll \frac{\Lambda v_2}{bv_1};$$

$$f^{(s)}(y) = \frac{(-1)^s s! T (h - \alpha)}{2\pi} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{(y + h + \frac{a_1}{5a})^{s-j} (y + \frac{b_1}{5b})^{j+1}}.$$

Следовательно,

$$AB^{1-s} \ll f^{(s)}(u) \ll AB^{1-s}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Таким образом, для любой экспоненциальной пары (κ, λ) имеет место оценка

$$|C(u, h)| \ll \left(\frac{T(h - \alpha) b^2 v_1^2}{\Lambda^2 v_2^2} \right)^\kappa \left(\frac{\Lambda v_2}{bv_1} \right)^\lambda = \frac{T^\kappa b^{2\kappa - \lambda} v_1^{2\kappa - \lambda}}{\Lambda^{2\kappa - \lambda} v_2^{2\kappa - \lambda}} (h - \alpha)^\kappa.$$

Подставляя полученную оценку суммы $|C(u, h)|$ в формулу (7), находим

$$W(\Lambda) \ll \frac{h^2 T^\kappa}{\Lambda^{1+2\kappa - \lambda}} \sum_{v_1, v_2, v_3, v_4 < X} \frac{v_1^{2\kappa - \lambda} a b^{1+2\kappa - \lambda}}{v_2^{1+2\kappa - \lambda} v_4} (\omega(N_1))^{\kappa+1}.$$

Учитывая эту оценку и соотношения

$$\omega(N_1) = \left(N_1 + \frac{b_1}{5b} \right) \frac{\mathcal{L}}{H} = \frac{\Lambda_1 v_2 \mathcal{L}}{5H b v_1}, \quad a = \frac{v_1 v_4}{(v_1 v_4, v_2 v_3)}, \quad b = \frac{v_2 v_3}{(v_1 v_4, v_2 v_3)},$$

находим

$$\begin{aligned}
 W(\Lambda) &\ll \frac{h^2 T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}} \sum_{v_1, v_2, v_3, v_4 < X} \frac{(v_1 v_3)^{\kappa-\lambda}}{(v_1 v_4, v_2 v_3)^{1+\kappa-\lambda}} \leq \\
 &\leq \frac{h^2 T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}} \sum_{v_1, v_2, v_3, v_4 < X} (v_1 v_3)^{\kappa-\lambda} \ll h^2 \frac{T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa} X^{4+2\kappa-2\lambda}}{H^{\kappa+1}}.
 \end{aligned}$$

Так как $0 \leq \lambda - \kappa \leq 1$, $0 \leq \kappa \leq 0.5$, используя неравенства $2\Lambda < P$ и подставляем значения следующих параметров

$$X = T^{0.01\varepsilon}, \quad H = T^{\frac{\kappa+\lambda}{2} + \varepsilon + \sigma(\kappa)}, \quad \sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathcal{L}}{(\kappa+1) \ln T},$$

имеем

$$\begin{aligned}
 W(\Lambda) &\ll h^2 \frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2}} X^{4-2(\lambda-\kappa)}}{H^{\kappa+1}} \leq h^2 \frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2}} X^2}{H^{\kappa+1}} = h^2 \left(\frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} + 0.01\varepsilon \cdot \frac{2}{\kappa+1}}}{H} \right)^{\kappa+1} = \\
 &= h^2 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} + \frac{0.02\varepsilon}{\kappa+1} + \sigma(\kappa)}}{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} + \varepsilon + \sigma(\kappa)}} \right)^{\kappa+1} = h^2 \mathcal{L}^{-1} \left(T^{-(\kappa+1)\varepsilon + 0.02\varepsilon} \right) = \\
 &= h^2 \mathcal{L}^{-1} T^{-\varepsilon + \varepsilon(0.02-\kappa)} \leq h^2 \mathcal{L}^{-1} T^{-\varepsilon + 0.02\varepsilon} = h^2 \mathcal{L}^{-1} T^{-0.98\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Подставляя найденную оценку суммы $W(\Lambda)$ и оценку (2) в формулу (1), найдём

$$\begin{aligned}
 W(T) &\ll \mathcal{L} \left(h^2 \mathcal{L}^{-1} T^{-0.98\varepsilon} + h^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{16}\right) P X^2 \ln^2 X \right) + \\
 &+ h^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{64}\right) P X^2 \ln^2 X \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Поступило 17.10.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карацуба А.А. Дзета-функция Римана и её нули. – УМН, 1985, т. 40, №5, в. 245, с. 19-70.
2. Карацуба А.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения. – Известия РАН, серия математическая, 1993, т. 57, №5, с. 3-14.
3. Graham S.W., Kolesnik G. Vander Corput’s Method of Exponential sums. – Cambridge university press., 1991, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney.

4. Рахмонов З.Х, Хайруллоев Ш.А., Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой. – Чебышевский сборник, 2019, т. 20, в. 4(72), с. 271-293.
5. Хайруллоев Ш.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. Н., 2018, №4(173), с. 7-25.
6. Bourgain J. and Watt N. Decoupling for perturbed cones and mean square of $|\zeta(0,5+it)|$. – <http://arxiv.org/abs/1505.04161v1> [math.NT], 15 May 2015.

Ш.А.Хайруллоев

ОИД БА БАҶОИ АЗ РҶИ ПАРАМЕТРҶО МУНТАЗАМИ СУММАҶОИ МАХСУСИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Баҳои нави аз рӯи параметрҷо мунтазами суммаҳои махсуси тригонометрии намуди $W(T)$ гирифта шудааст, ки он баҳои маълуми А.А.Каратсубаро ҳангоми кӯтоҳ будани порчаи $(T, T+H)$ беҳтар менамояд.

Калимаҳои калидӣ: *суммаи тригонометрӣ, ҷуфти экспоненсиалӣ, порчаи кӯтоҳ, хати рости критикӣ, функцияи Дэвенпорт-Хейлбронн.*

Sh.A.Khayrulloev

ON UNIFORM PARAMETER ESTIMATES FOR SPECIAL TRIGONOMETRIC SUMS

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan

In this work, we obtain a new parameter-uniform estimate for special trigonometric sums $W(T)$, which improves A.A.Karatsuba's estimates in the case when the interval $(T, T+H)$ has a shorter length.

Key words: *trigonometric sum, exponential pair, short interval, critical line, Davenport-Heilbronn function.*

Сведения об авторе:

1. **Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич** – доктор физико-математических наук, Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, главный научный сотрудник Отдела алгебры, теории чисел и топологии. E-mail: shamsullo@rambler.ru

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Академик НАН Таджикистана М.Ш.Шабозов, Н.О.Гадоев

О НАИЛУЧШЕМ ЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$)

*Национальная академия наук Таджикистана,
Институт математики им. А.Джусраева НАН Таджикистана,
Таджикский национальный университет*

В пространстве Харди $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$, $R \geq 1$) найден наилучший линейный метод совместного приближения функций и их производных $f^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots, r$; $f^{(0)} = f$) класса функций $W^{(r)}H_{q,R}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$), у которых $\|f^{(r)}\|_{H_{q,R}} \leq 1$.

Ключевые слова: наилучший линейный метод, совместное приближение функций и их производных, пространство Харди.

1. Введение и постановка задачи

Введем необходимые обозначения и понятия нужные нам в дальнейшем. Пусть \mathbb{N} , $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, \mathbb{C} – множество натуральных, целых неотрицательных и комплексных чисел, $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг радиуса $R \geq 1$ в комплексной плоскости \mathbb{C} , а $A(U_R)$ – множество аналитических в U_R функций. Для произвольной функции $f \in A(U_R)$ при любом $\rho \in (0, R]$ положим

$$M_q(f, \rho) := \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty; \\ \max_{0 \leq t < 2\pi} |f(\rho e^{it})|, & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Символом $H_{q,R}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$) обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H_{q,R}} = \lim_{\rho \rightarrow R-0} M_q(f, \rho).$$

Адрес для корреспонденции: Шабозов Мирганд Шабозович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: shabozov@mail.ru

Известно [1, с.279], что норма реализуется на угловых граничных значениях $f(Re^{it})$ функций $f \in H_{q,R}$, то есть

$$\|f\|_{q,R} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty; \\ \text{esssup}\{|f(Re^{it})|: 0 \leq t < 2\pi\}, & \text{если } q = \infty. \end{cases}$$

В случае $R = 1$ полагаем $U := U_1, H_q = H_{q,1}$ и $\|f\|_{H_q} := \|f\|_{H_{q,1}}$.

Для $r \in \mathbb{N}$ введем обозначение

$$H_{q,R}^{(r)} := \{f \in A(U) : f^{(r)} \in H_{q,R}\}, f^{(r)}(z) = \frac{d^r f(z)}{dz^r}.$$

Каждой функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in A(U_R)$$

сопоставим посредством произвольной треугольной матрицы чисел $\Lambda := \{\lambda_{k,n}\}_{k=0}^n$ последовательность полиномов

$$V_{\Lambda,n}(f, z) = \sum_{k=0}^n \lambda_{k,n} c_k z^k.$$

Величина

$$\mathcal{E}_n(f, \Lambda)_{q,\rho} := \|f(z) - V_{\Lambda,n}(f, z)\|_{H_{q,\rho}}$$

характеризует скорость приближения функций $f(z)$ полиномами $V_{\Lambda,n}(f)$ в метрике $H_{q,\rho}$, или, что тоже самое, линейным методом Λ . *Наилучшим линейным методом* приближения на классе $\mathfrak{M} \subset H_{q,\rho}$ называется треугольная матрица $\Lambda^* := \{\lambda_{k,n}^*\}_{k=0}^n$, такая, что

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}; \Lambda^*)_{H_{q,\rho}} := \inf_{\Lambda} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_n(f; \Lambda)_{H_{q,\rho}} = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_n(f, \Lambda^*)_{H_{q,\rho}}.$$

Обозначим через $W^{(r)}H_{q,R}$ ($r \in \mathbb{Z}_+, W^{(0)}H_{q,R} \equiv H_{q,R}, 1 \leq q \leq \infty, R \geq 1$) – класс функций $f \in H_{q,R}^{(r)}$, у которых $\|f^{(r)}\|_{q,R} \leq 1$.

Поскольку в данной работе используются нормы только пространств $H_{q,\rho} (1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R)$, то всюду далее вместо нормы $\|\cdot\|_{H_{q,\rho}}$ коротко запишем $\|\cdot\|_{q,\rho}$. Аналогично будем поступать и с величинами, определяемыми с помощью этих норм, так вместо $\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}, \Lambda^*)_{H_{q,\rho}}$, будем писать $\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}, \Lambda^*)_{q,\rho}$.

2. История вопроса

Вопросам отыскания наилучших линейных методов различных классов функций посвящены, например, работы [1]-[18] и многие другие.

Первая работа, в которой был построен наилучший линейный метод приближения класса $W^{(r)}H_{\infty,\rho}$ была работа К.И.Бабенко [2]. Пользуясь этим результатом, В.М.Тихомиров [3] вычислил точное значение колмогоровского n -поперечника класса $W^{(r)}H_{\infty,\rho}$ в пространстве H_{∞} .

Л.В.Тайков [4] нашел наилучший линейный метод класса $W^{(r)}H_{1,\rho}$ и чуть позже в работе [5] – наилучшее приближение класса $W^{(r)}H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq 1$) и вычислил колмогоровский n -поперечник этого класса в H_q ($1 \leq q \leq \infty$). Обобщение всех перечисленных результатов дано в статьях J.T.Sheik [6] и В.И.Белого и М.З.Двейрина [7].

Результаты перечисленных выше авторов [2-6] можно сформулировать в виде следующего утверждения

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$. Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}H_{q,\rho}, \Lambda^*)_{q,\rho} = \frac{\rho^n}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}. \quad (1)$$

М.З.Двейрин и И.В.Чебаненко [8] обобщили результаты (1) на классах функций $W^{(\alpha)}H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq 1, \alpha > 0$), задаваемых дробными производными $f^{(\alpha)}(z)$ в смысле Лиувилля, удовлетворяющих условию $\|f^{(\alpha)}\|_{q,\rho} \leq 1$.

В дальнейшем эта тематика нашла свое отражение в работах Ю.А.Фаркова [9-11], А.Пинкуса [12], К.Ю.Осипенко [13,14], С.Б.Вакарчука [15-17], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [18], М.Ш.Шабозова и М.Р.Лангаршоева [19] и др.

Целью настоящей статьи является получение новых результатов, связанных с построением наилучших линейных методов приближения классов функций аналитических в круге $U_R, R \geq 1$.

В следующей теореме дадим обобщение результата (1) для класса $W^{(r)}H_{q,R}$ ($1 \leq q \leq \infty, R \geq 1$).

Всюду далее введем обозначения

$$\alpha_{n,r} := n(n-1)\cdots(n-r+1), \quad n > r, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad \alpha_{n,0} \equiv 1, \quad \alpha_{n,1} = n.$$

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$, $R \geq 1$. Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}H_{q,R}, \Lambda^*)_{q,\rho} = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}}, \quad (2)$$

где наилучший линейный метод Λ^* есть треугольная матрица с элементами

$$\lambda_{k,n}^* := \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \dots, r-1, \\ 1 - \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(n-k)}, & k = r, r+1, \dots, n-1; \end{cases} \quad (3)$$

а наилучший линейный метод приближения имеет вид

$$V_{\Lambda^*, n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f) z^k + \sum_{k=r}^{n-1} \left(1 - \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \left(\frac{|z|}{R}\right)^{2(n-k)} \right) c_k(f) z^k. \quad (4)$$

Теорема 2 вытекает как следствие из более общей теоремы 3, приведенной в пункте 3 и по понятным причинам ее доказательство здесь не приводится. Отметим лишь что все приведенные выше результаты работ [2-7] являются частными случаями теоремы 2. Так, например, из (2) при $R = 1$, $q = \infty$ вытекает результат К.И.Бабенко [2], а при $\rho = R = 1$, $q = 1$ результат Л.В.Тайкова [4].

3. О наилучшем совместном линейном методе приближения класса $W^{(r)}H_{q,R}$ ($r \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq q \leq \infty, R \geq 1$)

Хорошо известно [20], что для произвольной функции $f \in H_{q,\rho}^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R$) наравне с функцией f и ее производной r -го порядка $f^{(r)}$, пространству $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R$) также принадлежат последовательность промежуточных производных $f^{(s)}(z)$, ($s = \overline{1, r-1}$) и так как

$$V_{\Lambda,n}^{(s)}(f, z) = V_{\Lambda,n-s}(f^{(s)}, z) \quad (s = \overline{0, r}; V_{\Lambda,n}^{(0)}(f, z) \equiv V_{\Lambda,n}(f, z)),$$

то имеет смысл найти величину

$$\mathcal{E}_{n-s}(f^{(s)}, \Lambda_{(s)})_{q,\rho} := \| f^{(s)} - V_{\Lambda_{(s)}, n-s}(f^{(s)}) \|_{q,\rho}, \quad (5)$$

которая характеризует скорость приближения функции f и ее последовательность производных $f^{(s)}$ ($s = \overline{1, r}$) линейным методом $\Lambda_{(s)} := \{\lambda_{k,n,s}\}$, в пространстве $H_{q,\rho}$.

Наилучшим линейным методом совместного приближения на классе $\mathfrak{M} \in H_{q,\rho}$ называется треугольная матрица $\Lambda_{(s)}^* := \{\lambda_{k,n,s}^*\}$ такая, что

$$\mathcal{E}_{n-s}(\mathfrak{M}, \Lambda_{(s)}^*)_{q,\rho} = \inf_{\Lambda_{(s)} \in \mathfrak{M}} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_{n-s}(f, \Lambda_{(s)})_{q,\rho} = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}_{n-s}(f, \Lambda_{(s)}^*)_{q,\rho}.$$

В следующей теореме дадим обобщение равенства (2) для случая совместного приближения, когда \mathfrak{M} есть класс функций $W^{(r)}H_{q,R}$ ($1 \leq q \leq \infty, R \geq 1$).

Теорема 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}H_{q,R}, \Lambda_{(s)}^*)_{q,\rho} = R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}, \tag{6}$$

где $\Lambda_{(s)}^*$ есть треугольная матрица с элементами

$$\lambda_{k,n-1,s}^* := \begin{cases} 1, & k = s, s+1, \dots, r-1; \\ 1 - \frac{\alpha_{2n-k,s}}{\alpha_{2n-k,r}} \cdot \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{k,s}} \cdot \left(\frac{|z|}{R}\right)^{2(n-k)}, & k = r, r+1, \dots, n-1, \end{cases} \tag{7}$$

а наилучший линейный метод совместного приближения имеет вид

$$V_{\Lambda_{(s)}^*, n-s-1}(f, z) = \sum_{k=s}^{r-1} \alpha_{k,s} c_k(f) z^{k-s} + \sum_{k=r}^{n-1} \alpha_{k,s} \left(1 - \frac{\alpha_{2n-k,s}}{\alpha_{2n-k,r}} \cdot \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{k,s}} \cdot \left(\frac{|z|}{R}\right)^{2(n-k)}\right) c_k(f) z^{k-s}.$$

Доказательство. Так как функция $f \in W^{(r)}H_{q,R}$, то ее коэффициенты Тейлора можно выразить по формуле Тейлора равенством

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi i \alpha_{k,r}} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta^r f^{(r)}(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta, k \geq r. \tag{8}$$

Подставляя вместо $c_k(f)$ в формуле

$$\begin{aligned} f^{(s)}(z) - V_{\Lambda, n-s-1}(f^{(s)}, z) &= \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s} c_k(f) z^{k-s} - \sum_{k=s}^{n-1} (1 - \lambda_{k,n-1,s}) \alpha_{k,s} c_k(f) z^{k-s}, \end{aligned} \tag{9}$$

правую часть формулы (8), после выполнения некоторых арифметических операций для разности (3.5) получаем следующее интегральное представление

$$\begin{aligned} f^{(s)}(z) - V_{\Lambda, n-s-1}(f^{(s)}, z) &= \\ &= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} f^{(r)}(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k-n} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=s}^{n-1} (1 - \lambda_{k,n-1,s}) \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k-n} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned} \tag{10}$$

Так как первые r коэффициентов в рядах Тейлора функций класса $W^{(r)}H_{q,R}$ произвольны, то будем рассматривать только треугольные матрицы $\Lambda_{(s)} := \{\lambda_{k,n-1,s}\}$, у которых $\lambda_{k,n-1,s}$ определены

равенством (7). Подставляя указанные значения $\lambda_{k,n-1,s}^*$ во вторую сумму внутри интеграла в правой части (3.6), с учетом аналитичности f в круге U_R получаем

$$\begin{aligned}
 & f^{(s)}(z) - V_{\Lambda_{(s)}^*, n-s-1}(f^{(s)}, z) = \\
 &= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} f^{(r)}(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k-n} + \right. \\
 &+ \sum_{k=r}^{n-1} \frac{\alpha_{2n-k,s}}{\alpha_{2n-k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k-n} \left| \frac{z}{\zeta} \right|^{2(n-k)} \left. \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} f^{(r)}(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + \right. \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k + \sum_{k=1}^{n-r} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}}\right)^k + \sum_{k=n-r+1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}}\right)^k \left. \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} = \\
 &= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} f^{(r)}(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left[\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k + \left(\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}}\right)^k \right] \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} = \\
 &= \frac{z^{r-s}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} f^{(r)}(\zeta) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{11}
 \end{aligned}$$

Полагая в равенстве (3.7) $z = \rho e^{it}$, $\zeta = R e^{i\theta}$, $0 < \rho \leq R$, $R \geq 1$, будем иметь

$$\begin{aligned}
 & f^{(s)}(\rho e^{it}) - V_{\Lambda_{(s)}^*, n-s-1}(f^{(s)}, \rho e^{it}) = \\
 &= R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-s} \cdot \frac{e^{i(r-s)t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-r)(t-\theta)} f^{(r)}(R e^{i\theta}) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + \right. \\
 &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k(t-\theta) \left. \right\} d\theta = \\
 &= R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-s} \frac{e^{i(r-s)t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-r)\tau} f^{(r)}(R e^{i(t-\tau)}) \left\{ \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + \right. \\
 &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k\tau \left. \right\} d\tau. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что числовая последовательность

$\left\{ \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \right\}_{k=1}^{\infty}$ является выпуклой вниз и ее общий член стремится к нулю. Но тогда в силу леммы

2.3 из монографии [11, с.251-252] функция

$$\Phi_{\Lambda_{(s)}^*} \left(\frac{\rho}{R}, \tau \right) := \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+k,s}}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \cos k\tau \geq 0 \tag{13}$$

при всех $\tau \in [0, 2\pi]$ и $\rho \in (0, R]$, причем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{\Lambda_{(s)}^*} \left(\frac{\rho}{R}, \tau \right) d\tau = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \tag{14}$$

Неравенство (12) с учетом обозначения (13) запишем в виде

$$\begin{aligned} & f^{(s)}(\rho e^{it}) - V_{\Lambda_{(s)}^*, n-s-1} (f^{(s)}, \rho e^{it}) = \\ & = R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-s} \frac{e^{i(r-s)t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-r)\tau} \Phi_{\Lambda_{(s)}^*} \left(\frac{\rho}{R}, \tau \right) f^{(r)}(Re^{i(t-\tau)}) d\tau. \end{aligned} \tag{15}$$

Пользуясь соотношением (15), запишем

$$\begin{aligned} & \left\| f^{(s)} - V_{\Lambda_{(s)}^*, n-s-1} (f^{(s)}) \right\|_{q, \rho} := \\ & = \left\| f^{(s)}(\rho e^{i(\cdot)}) - V_{\Lambda_{(s)}^*, n-s-1} (f^{(s)}(\rho e^{i(\cdot)})) \right\|_q = R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-s} \times \\ & \times \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{i(r-s)t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-r)\tau} \Phi_{\Lambda_{(s)}^*, n-1} \left(\frac{\rho}{R}, \tau \right) f^{(r)}(Re^{i(t-\tau)}) d\tau \right|^q dt \right)^{1/q} \leq \\ & \leq R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-s} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \Phi_{\Lambda_{(s)}^*, n-1} \left(\frac{\rho}{R}, \tau \right) \right| \cdot |f^{(r)}(Re^{i(t-\tau)})| d\tau \right)^q dt \right)^{1/q}. \end{aligned} \tag{16}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского [21, с.299] к правой части (16), для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_{q,R}$ получаем

$$\begin{aligned} & \left\| f^{(s)} - V_{\Lambda_{(s)}^*, n-s-1} (f^{(s)}) \right\|_{q, \rho} \leq \\ & \leq R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-s} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \Phi_{\Lambda_{(s)}^*, n-s-1} \left(\frac{\rho}{R}, \tau \right) \right| d\tau \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(Re^{it})|^q dt \right)^{1/q} \leq R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \|f^{(r)}(Re^{i(\cdot)})\|_q = \\ & = R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \|f^{(r)}\|_{q,R} \leq R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда сразу следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (6)

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}H_{q,R}, \Lambda_{(s),n-s-1}^*)_{q,\rho} \leq R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-s} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \tag{18}$$

Для получения аналогичной оценки снизу введем в рассмотрение функцию

$$f_0(z) = \frac{z^n}{R^{n-r} \alpha_{n,r}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad n > r. \tag{19}$$

Для этой функции при любом $s = 0, 1, \dots, r$ имеем

$$f_0^{(s)}(z) = \frac{z^{n-s}}{R^{n-r}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}; \quad \|f_0^{(s)}\|_{q,\rho} = \frac{\rho^{n-s}}{R^{n-r}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} = R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-s} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}, \tag{20}$$

и так как $\|f_0^{(r)}\|_{q,R} = 1$, то функция $f_0 \in W^{(r)}H_{q,R}$. Кроме того, при любой матрице чисел $V_{\Lambda_{(s),n-s-1}}(f_0^{(s)}) \equiv 0$ ($s = 0, 1, \dots, r$), пользуясь которой и учитывая (20), запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}H_{q,R}, \Lambda_{(s),n-s-1}^*)_{q,\rho} \geq \|f_0^{(s)} - V_{\Lambda_{(s),n-s-1}}(f_0^{(s)})\|_{q,\rho} = \\ & = \|f_0^{(s)}\|_{q,\rho} = R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-s} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Сопоставляя неравенства (18) и (21), получаем требуемое равенство (6), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

4. О верхней грани наилучшего совместного приближения класса $W^{(r)}H_{q,R}$, ($r \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq q \leq \infty, R \geq 1$)

В предыдущем пункте мы отметили, что для произвольной функции $f \in H_{q,\rho}^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R$) все ее промежуточные производные $f^{(s)}$ ($s = \overline{1, r-1}, r \geq 2, r \in \mathbb{N}$) также принадлежат пространству $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R$). Представляет интерес отыскание точных значений наилучших совместных полиномиальных приближений функций f и их производных $f^{(s)}$ ($s = \overline{1, r}, r \geq 2, r \in \mathbb{N}$):

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{q,\rho} := \inf \left\{ \|f^{(s)} - p_{n-1}^{(s)}\|_{q,\rho} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} \tag{22}$$

на некотором подмножестве $\mathfrak{M}^{(r)} \in H_{q,\rho}^{(r)}$ или на самом классе $H_{q,\rho}^{(r)}$. Таким образом, требуется найти точное значение экстремальной величины

$$E_{n-s-1}(\mathfrak{M}^{(r)})_{q,\rho} := \sup \{ E_{n-s-1}(f^{(s)})_{q,\rho} : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \}, \tag{23}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$.

Здесь приводим решение задачи (23), в случае, когда $\mathfrak{M}^{(r)} = W^{(r)}H_{q,R}$.

Теорема 4. При любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$, $R \geq 1$, имеет место равенство

$$E_{n-s-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} = R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-r} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \tag{24}$$

Доказательство. Очевидно, что для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_{q,R}$ в силу определения класса из (5) и (22) вытекает неравенство

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{q,\rho} \leq \mathfrak{E}_{n-s-1}(f^{(s)}, \Lambda_{(s)})_{q,\rho},$$

откуда, переходя к верхней грани по всем функциям класса с учетом равенства (6) запишем оценку сверху величины, стоящей в левой части (24):

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} &\leq \mathfrak{E}_{n-s-1}(W^{(r)}H_{q,R}, \Lambda_{(s)}^*)_{q,\rho} \leq \\ &\leq R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \end{aligned} \tag{25}$$

Для получения аналогичной оценки снизу указанной величин заметим, что для функции

$$f_0(z) = \frac{z^n}{R^{n-r} \cdot \alpha_{n,r}} \in W^{(r)}H_{q,R}$$

рассмотренной нами при доказательстве теоремы 3, кроме равенства (20), также имеет место равенство

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{q,\rho} = R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}$$

пользуясь которым запишем оценку снизу

$$E_{n-s-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} \geq E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{q,\rho} = R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-s} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \tag{26}$$

Требуемое равенство (24) получаем из сопоставления оценок сверху (25) и снизу (26). Теорема 4 доказана.

Замечание. Заметим, что при любых $n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, n > r \geq s$ отношение

$$\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} = \alpha_{n-s,r-s} = \frac{1}{(n-s)(n-s+1)\cdots(n-r+1)}. \quad (27)$$

Пользуясь равенством (27), результат теорем 3 и 4 запишем в виде

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} &= \mathcal{E}_{n-s-1}(W^{(r)}H_{q,R}, \Lambda_{(s)}^*) = \\ &= R^{r-s} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-s} \frac{1}{(n-s)(n-s+1)\cdots(n-r+1)}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$, $R \geq 1$.

5. Значения n -поперечников класса $W^{(r)}H_{q,R}$ в пространстве $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R, R \geq 1$)

Результаты теорем 3 и 4 представляют возможность вычислить точные значения различных n -поперечников класса $W^{(r)}H_{q,R}$ в пространстве $H_{q,\rho}$.

Пусть \mathbb{B} – единичный шар в $H_{q,\rho}$, $\mathcal{L}_n \subset H_{q,\rho}$ – n -мерное подпространство; $\mathcal{L}^n \in H_{q,\rho}$ – подпространство коразмерности n ; $\mathcal{L}: H_{q,\rho} \rightarrow \mathcal{L}_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования, \mathfrak{N} – выпуклое центрально-симметричное подмножество из $H_{q,\rho}$. Величины

$$\begin{aligned} b_n(\mathfrak{N}; H_{q,\rho}) &:= \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon \mathfrak{B} \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{N} : \mathcal{L}_{n+1} \subset H_{q,\rho} \}, \right. \\ d_n(\mathfrak{N}; H_{q,\rho}) &:= \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \|f - g\|_{q,\rho} : g \in \mathcal{L}_n \} : f \in \mathfrak{N} \right\} : \mathcal{L}_n \in H_{q,\rho} \right\}, \\ \delta_n(\mathfrak{N}; H_{q,\rho}) &:= \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\|_{q,\rho} : f \in \mathfrak{N} \} : \mathcal{L}H_{q,\rho} \subset \mathcal{L}_n \right\} : \mathcal{L}_n \in H_{q,\rho} \right\}, \\ \Pi_n(\mathfrak{N}; H_{q,\rho}) &:= \\ &:= \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\|_{2,\rho} : f \in \mathfrak{N} \} : \mathcal{L}^\perp H_{q,\rho} \subset \mathcal{L}_n \right\} : \mathcal{L}_n \in H_{q,\rho} \right\}, \\ d^n(\mathfrak{N}; H_{q,\rho}) &:= \inf \left\{ \sup \{ \|f\|_{q,\rho} : f \in \mathfrak{N} \cap \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset H_{q,\rho} \right\} \end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *проекционным*, *гельфандовским n -поперечниками* подмножества \mathfrak{N} в пространстве $H_{q,\rho}$. Между перечисленными n -поперечниками справедливы соотношения [12, 22]

$$\delta(\mathfrak{N}, H_{q,\rho}) \leq d_n(\mathfrak{N}, H_{q,\rho}) \leq \delta_n(\mathfrak{N}, H_{q,\rho}) = d^n(\mathfrak{N}, H_{q,\rho}). \quad (29)$$

Имеет место следующая

Теорема 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$, $R \geq 1$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \gamma_n(W^{(r)}H_{q,R}, H_{q,\rho}) &= E_{n-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} = \\ &= \mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}}, \end{aligned} \tag{30}$$

где $\gamma_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников, перечисленных выше. При этом:

- (1) $\mathcal{S}_{n-1} := \text{span}\{1, z, \dots, z^{n-1}\}$ является оптимальным подпространством для n -поперечника $d_n(\cdot)$;
- (2) $\mathcal{L}_n := \{f : f \in H_{q,\rho}, f^{(k)}(0) = 0, k = \overline{1, n-1}\}$ является оптимальным подпространством для n -поперечника d^n ;
- (3) $V_{\Lambda^*, n-1}(f)$ – определенным равенством (4) является оптимальным линейным методом для $\delta_n(\cdot)$;
- (4) \mathcal{F}_n является оптимальным подпространством для n -поперечника $b_n(\cdot)$.

Доказательство. Оценка сверху всех перечисленных n -поперечников в силу соотношения (29) следует из неравенств (25) при $s = 0$, поскольку в этом случае

$$\begin{aligned} \gamma_n(W^{(r)}H_{q,R}, H_{q,\rho}) &\leq E_{n-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} \leq \\ &\leq \mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}H_{q,R})_{q,\rho} \leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \end{aligned} \tag{31}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу бернштейновского n -поперечника введем в рассмотрение шар

$$\mathbb{B}_{n+1} := \left\{ p_n : p_n \in \mathcal{F}_n, \|p_n\|_{q,\rho} \leq R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} \right\},$$

и покажем, что $\mathbb{B}_{n+1} \subset W^{(r)}H_{q,R}$.

В [12, гл. III, §2, с.252] доказано, что для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{F}_n$ имеет место неравенство

$$\|p_n^{(r)}\|_{q,R} \leq R^{n-r} \alpha_{n,r} \|p_n\|_q \quad (1 \leq q \leq \infty, R \geq 1) \tag{32}$$

и так как в силу неравенства, доказанного Е.Хиллом, Г.Сеге и Я.Д.Тамаркиным (см., например, [23, с.15])

$$\|p_n\|_q \leq \rho^{-n} \|p_n\|_{q,\rho} \quad (1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R) \tag{33}$$

то из (32), учитывая (33), получаем

$$\|p_n^{(r)}\|_{q,R} \leq \frac{1}{R^r} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \cdot \alpha_{n,r} \cdot \|p_n\|_{q,\rho}. \quad (34)$$

Если теперь предполагать, что $p_n \in \mathbb{B}_{n+1}$, то из (34) следует, что

$$\|p_n^{(r)}\|_{q,R} \leq \frac{1}{R^r} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \cdot \alpha_{n,r} \cdot R^r \cdot \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} = 1.$$

Этим установлено, что шар \mathbb{B}_{n+1} принадлежит классу $W^{(r)}H_{q,R}$. Но тогда в силу определения *бернштейновского* n -поперечника запишем оценку снизу

$$b_n(W^{(r)}H_{q,R}, H_{q,\rho}) \geq b_n(\mathbb{B}_{n+1}, H_{q,\rho}) = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \quad (35)$$

Требуемое равенство (29) получаем из сопоставления неравенств (31) и (35). Теорема 5 доказана.

Поступило 20.09.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.-Л.: Наука, 1964.
2. Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций. – Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, т.22, №5, с.631-640.
3. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. – УМН, 1960, т.15, №3, с.81-120.
4. Тайков Л.В. О наилучших линейных методах приближения функций классов \mathcal{B}^r и H^r . – УМН, 1963, т.18, №4, с.183-189.
5. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1967, т.1, №2, с.155-162.
6. Sheik J.T. Polynomial Approximation of functions analytic in a disc. – Proc. Amer. Math. Soc., 1966, v.17, №6, p.1238-1243.
7. Белый В.И., Двейрин М.З. О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами. – Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наукова думка, 1971, вып.2, с.37-54.
8. Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимация в банаховых пространствах аналитических функций. – Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наукова думка, 1983, с.63-73.
9. Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из \mathbb{C}^n . – УМН, 1990, т.45, №3, с.197-198.

10. Fisher S.D., Stessin M.I. The n -width of the unit ball of H_q . – Journal of Approximation Theory, 1991, v.67, №3, p.347-356.
11. Фарков Ю.А. О наилучшем линейном приближении голоморфных функций. – Фундаментальная и прикладная математика, 2014, т.19, №5, с.185-212.
12. Pinkus A. n -Widths by Approximation Theory. – Berlin: Springer, 1985.
13. Осипенко К.Ю. Оптимальная интерполяция аналитических функций. – Мат. заметки, 1972, т.12, №4, с.465-476.
14. Осипенко К.Ю., Стесин М.И. О поперечниках класса Харди H_2 в n -мерном шаре. – УМН, 1990, т.45, №5, с.193-194.
15. Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций. – Мат. заметки, 1995, т.57, №1, с.30-39.
16. Вакарчук С.Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций. – Мат. заметки, 1999, т.65, №2, с.186-193.
17. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. О наилучших линейных методах приближений функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$ $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$. – 2009, т.85, №3, с.323-329.
18. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге. – Мат. сборник, 2010, т.201, №8, с.3-22.
19. Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций. – Сиб. мат. журнал, 2019, т.60, №6, с.1414-1423.
20. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенство типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации. – Укр. мат. журнал, 2011, т.63, №12, с.1579-1601.
21. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976, с.320.
22. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – МГУ, 1976, с.325.
23. Шихалиев Н.И. Неравенства типа С.Н.Бернштейна-А.А.Маркова для аналитических функций. – Докл. АН АзССР, 1975, т.31, №8, с.9-14.

М.Ш.Шабозов, Н.О.Гадоев

ДАР БОРАИ БЕХТАРИН НАЗДИКУНИИ ХАТТИИ ФУНКСИЯҶО ДАР ФАЗОИ

ХАРДИ $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$)

Институти математика ба номи А. Ҷӯраеви

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар фазои Харди $H_{q,\rho}$ ($q \geq 1, 0 < \rho \leq 1$) беҳтарин усули хаттии наздиккунии якҷои функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо $f^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, r$) аз синфи функсияи $W^{(r)}H_q$ ($r \in \mathbb{Z}_+, q \geq 1$), ёфта шудааст, ки барои он $\|f^{(r)}\|_{H_q} \leq 1$.

Калимаҳои калидӣ: беҳтарин усули хатӣ, наздиккунии якҷояи функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо, фазои Харди.

M.Sh.Shabozov, N.O.Gadoev

**ON THE BEST LINEAR METHOD OF APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN
HARDY SPACE $H_{q,\rho}(1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R)$**

*A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan,
Tajik National University*

In the Hardy space $H_{q,\rho}(1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq R)$ the best linear method of joint approximation of functions and their derivatives $f^{(s)}(s = 1, 2, \dots, r)$ of the class of functions $W^{(r)}H_{q,R}$ ($r \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq q \leq \infty, R \geq 1$), is found for which $\|f^{(r)}\|_{H_{q,R}} \leq 1$.

Key words: *best linear method, joint approximation of functions and their derivatives, Hardy space.*

Сведение об авторах:

1. **Шабозов Мирганд Шабозович** – доктор физ.-мат. наук, академик НАН Таджикистана, Таджикский национальный университет, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений;
2. **Гадоев Н.О.** – Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, главный научный сотрудник, докторант PhD кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета.

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д.К.Тухлиев

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА B_2

*Худжандский государственный университет им. Б.Гафурова**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш. Шабозовым 06.06.2023 г.)*

В работе изучаются экстремальные задачи, связанные с наилучшим полиномиальным приближением аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2 . Получен ряд точных теорем и вычислены значения верхних граней наилучших полиномиальных приближений функций на классе $B_2^{(r)}$ комплексных функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2 .

Ключевые слова: экстремальные задачи, приближение функций, модуль непрерывности, верхние грани, пространство Бергмана.

1. Введение. Экстремальные задачи наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций в различных нормированных пространствах изучались, например, в работах [1-14] и многих других. В данной работе требуется найти верхние грани наилучших приближений функций комплексными алгебраическими полиномами в пространстве Бергмана B_2 .

Пусть \mathbb{N}, \mathbb{Z}_+ – соответственно множество натуральных и целых неотрицательных чисел. Пусть далее \mathbb{C} – комплексная плоскость, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг в \mathbb{C} , $A(U)$ – множество функций, аналитических в круге U .

Определение [8]. Говорят, что аналитическая в единичном круге U функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1)$$

принадлежит пространству Бергмана B_2 , если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_U |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty. \quad (2)$$

Производную r -го порядка функции $f \in A(U)$ определим, как обычно,

Адрес для корреспонденции: Тухлиев Дилиод Камаридинович. 735700, Республика Таджикистан, г.Худжанд, ул.Мавлонбекова, 1, Худжандский государственный университет. E-mail: dtukhliev@mail.ru.

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f(z)}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)c_k(f)z^{k-r}, r \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Ради краткости, введём обозначение

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1) = k!/(k-r)!, k, r \in \mathbb{N}, k > r. \quad (4)$$

Всюду далее символом $B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+, B_2^{(0)} = B_2$) обозначим множество функций $f \in A(U)$, принадлежащих пространству B_2 , производная r -го порядка $f^{(r)}(z)$ которых также принадлежит B_2 , то есть

$$B_2^{(r)} := \{f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty\}.$$

Пусть \mathcal{P}_n – подпространство комплексных алгебраических многочленов степени n вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, a_k \in \mathbb{C}.$$

Величину

$$E_n(f)_2 := E(f, \mathcal{P}_n)_{B_2} = \inf \{\|f - p_n\|_2 : p_n \in \mathcal{P}_n\} \quad (5)$$

называют наилучшим полиномиальным среднеквадратическим приближением функции $f \in B_2$ подпространством \mathcal{P}_n .

Хорошо известно [15, с.203], что для произвольной функции $f \in B_2$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \quad (6)$$

где $T_{n-1}(f)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда (1).

Запишем норму (1) в более удобном виде

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2},$$

и символом

$$\Delta_h^m f(\rho e^{it}) := \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(\rho e^{i(t+kh)})$$

обозначим конечную разность m -го порядка функции $f \in B_2$ по аргументу t с шагом h . Равенством

$$\|\Delta_h^m(f)\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_h^m f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2}$$

обозначим норму разности m -го порядка функции $f \in B_2$.

Модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in B_2$ определим, как обычно, равенством

$$\omega_m(f, \tau)_2 := \sup\{\|\Delta_h^m(f)\|_2 : |h| \leq \tau\}. \tag{7}$$

Пользуясь соотношениями (3) и (4), для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\Delta_h^m f^{(r)}(\rho e^{it}) = \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) \rho^{k-r} e^{i(k-r)t} (1 - e^{i(k-r)h})^m.$$

Отсюда, применяя тождество Парсеваля, получаем

$$\|\Delta_h^m f^{(r)}\|_2^2 = 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} (1 - \cos(k-r)h)^m \tag{8}$$

и, следовательно,

$$\omega_m^2(f^{(r)}, \tau)_2 = 2^m \sup_{|h| \leq \tau} \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} (1 - \cos(k-r)h)^m. \tag{9}$$

2. Основные результаты. В этом пункте излагаем основные результаты, полученные в данной статье. Имеет место следующая

Теорема 1. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left\{ \frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f, t)_{B_2} \sin ntdt \right\}^{1/2}} = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \tag{10}$$

Доказательство. Будем следовать схеме рассуждений, приведенной в работе [16]. Так как в силу равенства (8)

$$\|\Delta_t^{(m)}(f)\|_{B_2}^2 = 2^m \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot (1 - \cos kt)^m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \left(2 \sin \frac{kt}{2} \right)^m, \tag{11}$$

то, воспользуясь известной формулой [17, с.101]

$$\left(2 \sin \frac{\tau}{2} \right)^{2m} = C_{2m}^m - 2 \cdot \sum_{l=1}^m (-1)^{l+1} C_{2m}^{m-l} \cdot \cos lk\tau,$$

из (11) по определению модуля гладкости порядка m запишем

$$\omega_m^2(f, t)_{B_2} \geq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \left\{ C_{2m}^m - 2 \cdot \sum_{l=1}^m (-1)^{l+1} C_{2m}^{m-l} \cdot \cos l k \tau \right\}. \quad (12)$$

Сгруппируем члены с чётными и нечётными l , получаем

$$\begin{aligned} \omega_m^2(f, t)_{B_2} \geq & \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \left\{ C_{2m}^m - 2 \cdot \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s} \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{m+2s}{m-2s+1} \cdot \cos(2s-1)kt - \cos 2s k t \right] - 2a_m \cos m k t \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $[d]$ – целая часть числа d , а

$$a_m := \begin{cases} 0, & \text{если } m = 2k, k \in \mathbb{N}; \\ 1, & \text{если } m = 2k - 1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В правой части неравенства (11), добавляя и вычитая дробь $1/(4s^2 - 1)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_m^2(f, t)_{B_2} \geq & \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \left\{ C_{2m}^m - 2 \cdot \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s} \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{m+2s}{m-2s+1} \cdot \cos(2s-1)kt - \cos 2s k t - \frac{1}{4s^2-1} + \frac{1}{4s^2-1} \right] - 2a_m \cos m k t \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда сразу получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ C_{2m}^m - 2 \cdot \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s} \frac{1}{4s^2-1} \right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \leq \\ & \leq \omega_m^2(f, t)_{B_2} + 2 \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s} \left[\frac{m+2s}{m-2s+1} \cdot \cos(2s-1)kt - \right. \\ & \left. - \cos 2s k t - \frac{1}{4s^2-1} \right] + 2a_m \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \cos m k t. \end{aligned} \quad (14)$$

Введём обозначение

$$K := \left\{ C_{2m}^m - 2 \cdot \sum_{s=1}^{[m/2]} \frac{1}{4s^2-1} C_{2m}^{m-2s} \right\}^{-1/2}.$$

Тогда неравенство (14) запишется в виде

$$\begin{aligned} K^{-2} \cdot E_{n-1}^2(f)_{B_2} \leq & \omega_m^2(f, t)_{B_2} + 2 \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s} \times \\ & \times \left[\frac{m+2s}{m-2s+1} \cdot \cos(2s-1)kt - \cos 2s k t - \frac{1}{4s^2-1} \right] + \end{aligned}$$

$$+2a_m \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \cos mkt. \tag{15}$$

Умножая обе части неравенства (15) на $\sin nt$ и интегрируя по t от 0 до π/n , с учётом обозначения

$$\gamma_{mk} := \int_0^{\pi/n} \cos mkt \sin ntdt = -\frac{2n}{m^2k^2 - n^2} \cdot \cos^2 \frac{mk\pi}{2n} \leq 0, \quad (k \geq n); \tag{16}$$

$$\gamma_{(2s-1)k} = -\frac{2n}{(2s-1)^2k^2 - n^2} \cdot \cos^2 \frac{(2s-1)k\pi}{2n} \leq 0, \quad (k \geq n)$$

и равенства $\int_0^{\pi/n} \sin ntdt = \frac{2}{n}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \cdot K^{-2} \cdot E_{n-1}^2(f)_{B_2} &\leq \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f, t)_{B_2} \sin ntdt + 2 \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s} \times \\ &\times \frac{m+2s}{m-2s+1} \cdot \left[\gamma_{(2s-1)k} - \gamma_{2sk} - \frac{1}{4s^2-1} \cdot \frac{2}{n} \right] + 2a_m \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \gamma_{mk}. \end{aligned} \tag{17}$$

Покажем, что

$$-\gamma_{2sk} - \frac{1}{4s^2-1} \cdot \frac{2}{n} \leq 0, \quad k \geq n. \tag{18}$$

Учитывая (16), получаем

$$\begin{aligned} -\gamma_{2sk} - \frac{1}{4s^2-1} \cdot \frac{2}{n} &= \frac{2n}{4s^2k^2 - n^2} \cdot \cos^2 \frac{sk\pi}{n} - \frac{1}{4s^2-1} \cdot \frac{2}{n} = \\ &= \frac{2n}{4s^2k^2 - n^2} \cdot \left(1 - \sin^2 \frac{sk\pi}{n} \right) - \frac{1}{4s^2-1} \cdot \frac{2}{n} = \\ &= -\frac{2n}{4s^2k^2 - n^2} \cdot \sin^2 \frac{sk\pi}{n} + \frac{2n}{4s^2k^2 - n^2} - \frac{1}{4s^2-1} \cdot \frac{2}{n} = \\ &= -\frac{2n}{4s^2k^2 - n^2} \cdot \sin^2 \frac{sk\pi}{n} - \frac{8s^2(k^2 - n^2)}{(4s^2k^2 - n^2)(4s^2-1)n} \leq 0, \quad k \geq n. \end{aligned} \tag{19}$$

При этом, в случае $k = n$, имеем

$$\gamma_{mn} = 0, \quad \gamma_{(2s-1)n} = 0, \quad -\gamma_{2sn} - \frac{1}{4s^2-1} \cdot \frac{2}{n} = 0. \tag{20}$$

Поэтому для всех $k \geq n$ из (18)-(20) следует, что

$$2 \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s} \cdot \left[\frac{m+2s}{m-2s+1} \cdot \gamma_{(2s-1)k} - \gamma_{2sk} - \frac{1}{4s^2-1} \cdot \frac{2}{n} \right] +$$

$$+2a_m \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \gamma_{mk} \leq 0,$$

и мы из неравенства (17) получаем

$$\frac{2}{n} \cdot K^{-2} \cdot E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f, t)_{B_2} \sin ntdt.$$

Следовательно, для произвольной функции $f \in B_2$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq K \cdot \left\{ \frac{n}{2} \cdot \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f, t)_{B_2} \sin ntdt \right\}^{1/2}. \tag{21}$$

Из (21) сразу следует, что

$$\sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left\{ \frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f, t)_{B_2} \sin ntdt \right\}^{1/2}} \leq K. \tag{22}$$

Теперь покажем, что для функции $f_0(z) = z^n \in B_2$ в (22) имеет место знак равенства. В самом деле,

для функции f_0 норма $\|\Delta_t^m f_0\|_{B_2}^2 = \frac{1}{n+1} \left(2 \sin \frac{nt}{2} \right)^{2m}$ не убывает для всех $t \in (0, \pi/n]$, а потому

$$\begin{aligned} \omega_m^2(f_0, t)_{B_2} &= \|\Delta_t^m f_0\|_{B_2}^2 = \frac{1}{n+1} \left(2 \sin \frac{nt}{2} \right)^{2m} = \\ &= \frac{1}{n+1} \left\{ C_{2m}^m - 2 \cdot \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s} \left[\frac{m+2s}{m-2s+1} \cdot \cos(2s-1)nt - \cos 2snt \right] - 2a_m \cos mnt \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f_0, t)_{B_2} \sin ntdt &= \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{2}{n} \cdot C_{2m}^m - 2 \cdot \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{m+2s}{m-2s+1} \cdot \gamma_{(2s-1)n} - \gamma_{2sn} \right] - 2a_m \gamma_{mn} \right\} = \\ &= \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{2}{n} \cdot C_{2m}^m - 2 \cdot \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s} \cdot \frac{2n}{(4s^2-1)n^2} \right\} = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot K^{-2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Но так как

$$E_{n-1}^2(f_0)_{B_2} = \frac{1}{n+1},$$

то из (23) следует, что

$$K \left\{ \frac{n}{2} \cdot \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f_0, t)_{B_2} \sin ntdt \right\}^{1/2} = E_{n-1}(f_0)_{B_2},$$

пользуясь которой, запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left\{ \frac{n}{2} \cdot \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f, t)_{B_2} \sin ntdt \right\}^{1/2}} &\geq \\ &\geq \frac{E_{n-1}(f_0)_{B_2}}{\left\{ \frac{n}{2} \cdot \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f_0, t)_{B_2} \sin ntdt \right\}^{1/2}} = K. \end{aligned} \tag{24}$$

Сопоставляя неравенства (22) и (24), получаем

$$\sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left\{ \frac{n}{2} \cdot \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f, t)_{B_2} \sin ntdt \right\}^{1/2}} = K. \tag{25}$$

Остаётся показать, что

$$K := \left\{ C_{2m}^m - 2 \cdot \sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s} \cdot \frac{1}{4s^2 - 1} \right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \tag{26}$$

Это следует из того же равенства (23), согласно которому, с одной стороны

$$\sqrt{n+1} \cdot \left\{ \frac{n}{2} \cdot \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f_0, t)_{B_2} \sin ntdt \right\}^{1/2} = K^{-1},$$

а с другой стороны, учитывая, что

$$\omega_m^2(f_0, t)_{B_2} = \frac{2^m}{n+1} (1 - \cos nt)^m,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} K^{-1} &= \sqrt{n+1} \cdot \left\{ \frac{n}{2} \cdot \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f_0, t)_{B_2} \sin ntdt \right\}^{1/2} = \\ &= \sqrt{n+1} \cdot \left\{ \frac{n}{2} \cdot \int_0^{\pi/n} \frac{2^m}{n+1} (1 - \cos nt)^m \sin ntdt \right\}^{1/2} = \end{aligned}$$

$$= \left\{ 2^{m-1} \cdot \int_0^{\pi/n} (1 - \cos nt)^m \sin ntdt \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ 2^{m-1} \cdot \frac{2^{m+1}}{m+1} \right\}^{1/2} = \frac{2^m}{\sqrt{m+1}},$$

откуда

$$K = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \tag{27}$$

Из равенств (25) и (27) следует (26) и вместе с ним доказано равенство (11), и этим теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. Для любых $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, n > r$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left\{ \frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^2(f^{(r)}, t)_{B_2} \sin(n-r)tdt \right\}^{1/2}} = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \tag{28}$$

Доказательство. Из утверждения теоремы 1 вытекает, что для любой функции $f \in B_2$ выполняется неравенство

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \left\{ \frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f, t)_{B_2} \sin ntdt \right\}^{1/2}. \tag{29}$$

Если теперь предположить, что функция f принадлежит классу $B_2^{(r)}$, то, заменяя в (29) функцию f на производную $f^{(r)}$, а число n на $n-r$, будем иметь

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{B_2} \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \left\{ \frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^2(f^{(r)}, t)_{B_2} \sin(n-r)tdt \right\}^{1/2}. \tag{30}$$

В работе [18, с. 621] доказано, что для любых $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, n > r$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_{B_2}} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}}, \tag{31}$$

откуда следует, что для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{B_2}. \tag{32}$$

Учитывая (30), из (32) получаем

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \left\{ \frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f^{(r)}, t)_{B_2} \sin(n-r)t dt \right\}^{1/2},$$

откуда сразу следует оценка сверху для величины, лежащей в левой части равенства (28):

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left\{ \frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^2(f^{(r)}, t)_{B_2} \sin(n-r)t dt \right\}^{1/2}} \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \tag{33}$$

Для рассмотренной ранее нами функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$ в силу равенств (6) и (9) имеем

$$E_{n-1}(f_0)_{B_2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}; \quad \omega_m^2(f_0^{(r)}, t)_{B_2} = 2^m \cdot \frac{\alpha_{n,r}^2}{n-r+1} \cdot (1 - \cos(n-r)t)^m,$$

$$\left\{ \frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^2(f^{(r)}, t)_{B_2} \sin(n-r)t dt \right\}^{1/2} = \frac{2^m}{\sqrt{m+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}},$$

пользуясь которыми получаем оценку снизу указанной величины

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left\{ \frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^2(f^{(r)}, t)_{B_2} \sin(n-r)t dt \right\}^{1/2}} \geq \\ & \geq \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f_0)_{B_2}}{\left\{ \frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^2(f_0^{(r)}, t)_{B_2} \sin(n-r)t dt \right\}^{1/2}} = \\ & = \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} / (n+1)}{2^m / \sqrt{m+1} \cdot \alpha_{n,r} / \sqrt{n-r+1}} = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \end{aligned} \tag{34}$$

Требуемое равенство (28) получаем из сопоставления неравенств (33) и (34), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

3. Неравенство Джексона. Выше (см.(5)) мы обозначили через $E_{n-1}(f)_{B_2}$ величину среднеквадратичного приближения $f \in B_2$ подпространством \mathcal{P}_{n-1} алгебраических комплексных полиномов степени $n-1$. Нас интересует вопрос отыскании точной константы $K := K(m, \mathcal{P}_{n-1})$ в следующем неравенстве типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq K \omega_m(f, \frac{\gamma}{n})_{B_2}, \tag{35}$$

где γ – некоторое число, $0 < \gamma \leq 2\pi$.

Таким образом требуется найти константу

$$K := \sup \left\{ \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{\omega_m(f, \frac{\gamma}{n})_{B_2}} : f \in B_2 \right\}, \quad (36)$$

которую называют константой Джексона-Стечкина. В (36) предполагается, что $0/0 = 0, c/0 = +\infty$ при $c > 0$.

Из доказанной теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1. В условиях теоремы 1 при любых $m, n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \omega_m \left(f, \frac{\pi}{n} \right)_{B_2}. \quad (37)$$

Неравенство (37) является следствием монотонно возрастающей функции $\omega_m^2(f, t)_{B_2}$ на отрезке $[0, \pi/n]$. Но, если функция $\omega_m^2(f, t)_{B_2}$ выпукла вверх на $[0, \pi/n]$, то есть удовлетворяет условию

$$\omega_m^2(f, t)_{B_2} + \omega_m^2 \left(f, \frac{\pi}{n} - t \right)_{B_2} \leq 2\omega_m^2 \left(f, \frac{\pi}{2n} \right)_{B_2}, \quad (38)$$

то неравенство (37) можно уточнить. Повторяя выкладки, приведенные в [19, с.266] применительно к интегралу в правой части (21), где в качестве функции $l(t)$ вместо линейной функции взяты функции

$$l(t) = \omega_m^2(f, t)_{B_2} \quad \text{при} \quad t \in [0, \pi/(2n)] \quad \text{и} \quad l(t) = 2 \cdot \omega_m^2 \left(f, \frac{\pi}{2n} \right)_{B_2} - \omega_m^2 \left(f, \frac{\pi}{n} - t \right)_{B_2} \quad \text{при}$$

$t \in [\pi/(2n), \pi/n]$, получим такое следствие

Следствие 2. На множестве функций $f \in B_2$, у которых функция $\omega_m(f, t)_{B_2}$ выпукла вверх на $[0, \pi/n]$, справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \omega_m \left(f, \frac{\pi}{2n} \right)_{B_2}. \quad (39)$$

Таким образом, из неравенств (37) и (39) следует, что для точной константы (36) при всех $\gamma \in [0, \pi/n]$ имеет место оценка сверху

$$K := K(m) \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \quad (40)$$

Вопрос о точной константе в неравенствах (37) и (39) остаётся открытым.

Поступило 06.06.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций. – Изв. АН СССР, 1958, т.22, №5, с. 631-640.
2. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1967, т.1, №2, с. 155-162.
3. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1977, т.22, №2, с. 285-295.
4. Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций. – Киев: ИМ АН УССР, 1983.
5. Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций. – Матем. заметки, 1986, т.40, №3, с. 341-351.
6. Horowitz Charles. Zeros of functions in Bergman Space. – Bull. Amer. Math. Soc., 1974, vol.80, №4, pp. 713-714.
7. Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций I, II. – Укр. матем. журнал, 1990, т.42, №7-8, с. 873-881, 1019-1026.
8. Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций. – Матем. заметки, 1995, т.57, №1, с. 30-39.
9. Вакарчук С.Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1999, т.65, №2, с. 186-193.
10. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации. – Укр. матем. журнал, 2011, т.63, №12, с. 1579-1601.
11. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 . – Матем. заметки, 2000, т.68, №5, с. 796-800.
12. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве $H_{q,\rho}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$. – Сиб. матем. журнал, 2016, т.57, №2, с. 469-478.
13. Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций. – Сиб. матем. журнал, 2019, т.60, №6, с. 1414-1423.
14. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам. – Труды ИММ УрО РАН, 2019, т.25, №2, с. 258-272.
15. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.- Л.: Наука, 1964, с.201-202.
16. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 . – Матем. заметки, 1967, т.2, №5, с. 513-522.
17. Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 . "Применение функционального анализа в теории приближений". – Калинин, 1988, с. 100-114.
18. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n -поперечников. – Матем. заметки, 2018, т.103, №4, с. 617-631.

19. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987, с. 264-267.

Д.К.Тухлиев

ОИДИ НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ФУНКСИЯҲО

ДАР ФАЗОИ БЕРГМАН B_2

Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи Б.Ғафуров

Дар мақола масъалаҳои экстремалие, ки бо наздиккунии полиномиалии беҳтарини функсияҳо дар доираи воҳидӣ ба фазои Бергман B_2 таалуқ доранд, омӯхта шудаанд. Як қатор теоремаҳои аниқ исбот карда шуда, қимати сарҳади саҳеи наздиккунии полиномиалии беҳтарини функсияҳое, ки ба фазои Бергман B_2 таалуқ доранд, дар синфи $B_2^{(r)}$ ёфта шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: масъала экстремалӣ, наздиккунии функсияҳо, модули бефосилагӣ, сарҳади болои, фазои Бергман.

D.K.Tukhliev

ON THE BEST APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN BERGMAN SPACE B_2

B. Gafurov Khujand State University

The paper studies extremal problems associated with the best polynomial approximation of analytic functions in the unit circle belonging to the Bergman space. A number of exact theorems are obtained and the values of the upper faces of the best approximations of functions by algebraic complex polynomials on the class $B^{(r)}$ of complex functions belonging to the Bergman space B_2 are calculated

Key words: extremal problem, approximation of functions, continuity modulus, upper edges, Bergman space.

Сведения об авторе:

1. Тухлиев Дилшод Камаридинович – кандидат физ.-мат. наук, Худжандский государственный университет имени Б.Гафурова, доцент кафедры "Информатики и вычислительной математики".
E-mail: dtukhliev@mail.ru.

УДК 517.957

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Член-корреспондент НАН Таджикистана С.А.Исхоков, Д.С.Гаибов*, Ф.Ш.Махмадова

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С НЕСТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

*Национальная академия наук Таджикистана,
Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана,
Российско-Таджикский (Славянский) университет

В работе изучаются эллиптические операторы высшего порядка в ограниченной области, которые имеют нестепенное вырождение вдоль всей границы области. Изучаемые операторы порождаются с помощью полуторалинейных форм, которые могут не удовлетворять условию коэрцитивности. Получены формулы представления для резольвенты двух видов вырождающихся эллиптических операторов в виде композиции трех операторов, два из которых являются квадратными корнями из обратных операторов.

Ключевые слова: эллиптический оператор, ограниченная область, нестепенное вырождение, резольвента, некоэрцитивная форма.

Пусть G – ограниченная область в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , удовлетворяющая условию конуса (определение см., например, [1, стр. 390]). Точки пространства \mathbb{R}^n обозначим через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для мультииндекса $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ через

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

обозначим обобщенную в смысле С.Л.Соболева производную функции $u(x)$ мультииндекса k . Здесь и далее $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ – длина мультииндекса k .

Обозначим через $\rho(x), x \in G$, бесконечно-дифференцируемую функцию, удовлетворяющую неравенствам

$$C_1 \operatorname{dist}(x, \partial G) \leq \rho(x) \leq C_2 \operatorname{dist}(x, \partial G), \quad |\rho^{(k)}(x)| \leq M_k \rho^{1-|k|}(x)$$

для любой точки $x \in G$ и любого мультииндекса k . Здесь C_1, C_2, M_k – некоторые положительные постоянные. О существовании такой функции $\rho(x)$ см, например, [2, стр. 203].

Адрес для корреспонденции: Исхоков Сулаймон Абунасович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: sulaimon@mail.ru

Для описания нестепенной части вырождения коэффициентов изучаемых эллиптических операторов вводим функциональный класс $\Psi(G)$, который состоит из всех положительных функций $\psi(x), x \in G$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\rho(x) \leq \varepsilon} \frac{|\nabla \psi(x)| \rho(x)}{\psi(x)} = 0.$$

Отметим, что функции $\psi(x) = |\ln \rho(x)|$, $\psi(x) = |\ln \ln \rho(x)|$ принадлежат классу $\Psi(G)$.

Рассмотрим интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{j \in J} B_j[u, v], B_j[u, v] = \sum_{|k|=|l|=jG} \int p_j^2(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad (1)$$

где r – некоторое натуральное число, J – некоторое подмножество множества $\{0, 1, \dots, r\}$, $r \in J$, и

$$p_j(x) = \rho^{\alpha_j}(x) \psi_j(x). \quad (2)$$

Далее предполагается, что $\alpha_j \geq 0$ для всех $j \in J$, коэффициенты $a_{kl}(x)$ формы (1) являются комплекснозначными ограниченными функциями и функции $\psi_j(x)$, $j \in J$, принадлежат классу $\Psi(G)$.

Для более конкретного определения дифференциального оператора, ассоциированного с формой (1) вводим понятие старшей формы и выделим такие формы из всех форм $B_j[u, v]$, $j \in J$.

Определение. Если $\alpha_r = 0$, то форму $B_r[u, v]$, назовем старшей. Если же $\alpha_r > 0$, то обозначим r через j_0 . Далее через j_1 обозначим наибольший номер, меньший чем j_0 , для которого $j_1 a_{j_0} \geq j_0 a_{j_1}$. Если $a_{j_1} = 0$, то формы $B_{j_0}[u, v], B_{j_1}[u, v]$, назовем старшими. Если $a_{j_1} > 0$, то через j_2 обозначим наибольший номер, меньший чем j_1 , для которого $j_2 a_{j_1} \geq j_1 a_{j_2}$. Если $a_{j_2} = 0$, то формы $B_{j_0}[u, v], B_{j_1}[u, v], B_{j_2}[u, v]$ назовем старшими. Продолжая этот процесс до завершения, мы выделим старшие формы $B_{j_0}[u, v], B_{j_1}[u, v], \dots, B_{j_i}[u, v]$.

Далее, для удобства записи, множество всех индексов старших форм обозначим через I , то есть $I = \{j_1, j_2, \dots, j_i\}$, и элементы этого множества обозначим через i .

Каждой старшей форме $B_i[u, v]$ сопоставим функцию

$$b_i(x, \zeta) = \sum_{|k|=|l|=i} a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l},$$

где $x \in G$ и $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|=i}$ — набор комплексных чисел.

Далее предположим, что для любого $i \in I$ выполняется следующее условие:

Существуют числа φ_i, M_i и отличная от нуля в \bar{G} функция $\gamma_i(x) \in C(\bar{G})$ такие, что для всех $x \in G$ любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|=i}$ выполняются неравенства

$$|\arg b_i(x, \zeta)| < \varphi_i, \tag{3}$$

$$\sum_{|k|=i} |\zeta_k|^2 \leq M_i \operatorname{Re} \{ \gamma_i(x) b_i(x, \zeta) \}. \tag{4}$$

Заметим, что, не ограничивая общности, можно считать, что числа φ_i, M_i и функции $\gamma_i(x)$ в неравенствах (3), (4) не зависят от i . Поэтому далее будем считать, что

$$\varphi_i = \varphi, M_i = M, \gamma_i(x) \equiv \gamma, x \in G, \tag{5}$$

для всех $i \in I$.

Теперь определим функциональные пространства, связанные с формой (1). Для натурального числа m , вещественного числа β и положительной функции $\psi \in \Psi(G)$, вводим пространство $W_{2;\beta;\psi}^m(G)$, которое состоит из всех комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in G$, имеющих все обобщенные в смысле Соболева производные порядка m , со следующей нормой

$$\|u; W_{2;\beta;\psi}^m(G)\| = \left\{ \|u; L_{2;\beta;\psi}^m(G)\|^2 + \|u; L_2^m(G)\|^2 \right\}^{1/2},$$

где

$$\|u; L_{2;\beta;\psi}^m(G)\| = \left\{ \sum_{|k|=m} \int_G \rho^{2\beta}(x) \psi^2(x) |u^{(k)}(x)|^2 dx \right\}^{1/2},$$

$$\|u; L_2(G)\| = \left\{ \int_G |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Вводим также пространство \mathcal{H}_+ комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in G$, с конечной нормой

$$\|u; \mathcal{H}_+\| = \left\{ \sum_{i \in I} \|u; W_{2;\alpha_i;\psi_i}^i(G)\|^2 \right\}. \tag{6}$$

Напомним, что I – множество индексов старших форм и поэтому в определении нормы (6) участвуют только часть индексов из множества J .

Символом \mathcal{H}_+^0 обозначим замыкание множества $C_0^\infty(G)$ по норме (6), а через \mathcal{H}_-^0 обозначим пространство антилинейных непрерывных функционалов, определенных на \mathcal{H}_+^0 , со следующей нормой

$$\|F; \mathcal{H}_-^0\| = \sup |\langle F, u \rangle|,$$

где верхняя грань берется по всем функциям $u \in \mathcal{H}_+^0$ таким, что $\|u; \mathcal{H}_+^0\| = 1$. Здесь и далее символом $\langle F, u \rangle$ обозначено значение функционала F на функцию u .

В ходе исследования свойств дифференциального оператора, порожденного с помощью формы (1), используются некоторые результаты относительно введенных выше пространств, которых мы сформулируем ниже в виде двух лемм.

Лемма 1. Пусть $r > s \geq 0$, $r\alpha_s > s\alpha_r$, $\alpha_r \geq 0$, $\alpha_s \geq 0$, и $\psi_s(x), \psi_r(x) (x \in G)$ – заданный функции из класса $\Psi(G)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $u \in W_{2;\alpha_r;\psi_r}^r(G)$ справедливо неравенство

$$\|u; L_{2;\alpha_s;\psi_s}^s(G)\|^2 \leq \|u; L_{2;\alpha_r;\psi_r}^s(G)\|^2 + M(\varepsilon) \|u; L_2(G)\|^2.$$

Доказательство проводится методами работ [3, 4].

Лемма 2. Пусть

$$\max_{j \in J} (j - \alpha_j) > 0. \tag{7}$$

Тогда вложение $\mathcal{H}_+^0 \rightarrow L_2(G)$ компактно.

Доказательство такое же как доказательство леммы 2 работы [4].

В силу ограниченности коэффициентов $\alpha_{kl}(x)$, $|k|=|l|=j \in J$, $x \in G$, имеем

$$|B[u, v]| \leq M_0 \sum_{|k|=|l|=j \in J} \int_G \rho_j^2(x) |u^{(k)}(x)| |v^{(l)}(x)| dx.$$

Отсюда в силу равенства (2) и неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|B[u, v]| \leq M_1 \sum_{j \in J} \|u; W_{2;\alpha_j;\psi_j}^j(G)\| \cdot \|v; W_{2;\alpha_j;\psi_j}^j(G)\| \tag{8}$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(G)$. Далее отметим, что для любого $j \in J$ найдется хотя бы один индекс i старшей формы, то есть $i \in I$, что в силу леммы 1 имеет место неравенство

$$\|u; W_{2;\alpha_j;\psi_j}^j(G)\| \leq M_2 \|u; W_{2;\alpha_i;\psi_i}^i(G)\|.$$

Поэтому в силу равенства (6) из неравенства (8) находим

$$\begin{aligned} |B[u, v]| &\leq M_1 \sum_{i \in I} \|u; W_{2;\alpha_i;\psi_i}^i(G)\| \cdot \|v; W_{2;\alpha_i;\psi_i}^i(G)\| \leq \\ &\leq M_3 \|u; \mathcal{H}_+ \| \cdot \|v; \mathcal{H}_+ \| \end{aligned} \tag{9}$$

для всех $u, v \in \mathcal{H}_+^0$. Это неравенство означает, что оператор A , определенный равенством $\langle Au, v \rangle = B[u, v] \forall v \in \mathcal{H}_+^0$, действует из \mathcal{H}_+^0 в \mathcal{H}_+^0 .

Вводим вспомогательную полуторалинейную форму

$$P[u, v] = \sum_{|k|=|l|=j \in J} \int_G \rho_j^2(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx + \int_G u(x) \overline{v(x)} dx. \tag{10}$$

Действуя также как при доказательстве неравенства (9) с помощью леммы 1 доказывается, что

$$|P[u, v]| \leq C_1 \|u; \mathcal{H}_+ \| \cdot \|v; \mathcal{H}_+ \| \tag{11}$$

для всех $u, v \in \mathcal{H}_+^0$; C_1 - некоторая положительная постоянная. Также имеет место следующее очевидное неравенство

$$|P[u, u]| \geq \varkappa_1 \|u; \mathcal{H}_+ \|^2 \tag{12}$$

для всех $u \in \mathcal{H}_+^0$; \varkappa_1 - некоторая положительная постоянная.

Далее нам понадобится следующая лемма:

Лемма 3 (см. [6, Глава 10]). Пусть \mathbb{H} – некоторое гильбертово пространство. Тогда каждой замкнутой положительно определенной билинейной форме $\mathbb{B}[u, v]$ с плотной в пространстве \mathbb{H} областью определения $D[\mathbb{B}]$ отвечает самосопряженный положительно определенный оператор \mathbb{A} и притом только один. Форма $\mathbb{B}[u, v]$ и оператор \mathbb{A} связаны равенством

$$\mathbb{B}[u, v] = (\mathbb{A}^{1/2} u, \mathbb{A}^{1/2} v), \quad u, v \in D[\mathbb{B}] = D(\mathbb{A}^{1/2}).$$

В силу леммы 3 из неравенств (11), (12) следует существование единственного самосопряженного оператора P в $L_2(G)$, который связан с формой (10) равенством

$$\mathcal{P}[u, v] = ((P + E)^{1/2}u, (P + E)^{1/2}v)_0 \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_+^0$$

Оператор $(P + tE)^{1/2}, t \geq 1$, допускает продолжение до непрерывного оператора $\mathcal{P}(t): L_2(G) \rightarrow \mathcal{H}_-^0$. Из неравенства (12) следует существование обратного оператора $(P + tE)^{-1/2}$ при $t > 1$. Сужение в $L_2(G)$ оператора $\mathcal{P}^{-1}(t): \mathcal{H}_-^0 \rightarrow L_2(G)$ совпадает с оператором $(P + tE)^{-1/2}$.

Усовершенствуя схему доказательства теоремы 2 работы К.Х.Бойматова [7] получаем следующий результат о представлении резольвенты оператора $\mathcal{A}: \mathcal{H}_+^0 \rightarrow \mathcal{H}_-^0$:

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2)-(5). Тогда для любого замкнутого сектора $S \subset \{z \in \mathbb{C}: |\arg z| > \varphi\} \cup \{0\}$ с вершиной в нуле существует положительное число σ_S такое, что при $\lambda \in S, |\lambda| > \sigma_S$ справедливо представление

$$(\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda|E)^{-1/2} Y(\lambda) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|),$$

где непрерывный оператор $Y(\lambda)$, действующий в $L_2(G)$, такой, что

$$\sup_{\lambda \in S, |\lambda| > \sigma_S} \|Y(\lambda); \mathcal{L}(L_2(G))\| < +\infty.$$

Отметим, что оператор \mathcal{A} определен равенством $\langle Au, v \rangle = B[u, v] \quad v \in \mathcal{H}_+^0$, и действует из \mathcal{H}_+^0 в \mathcal{H}_-^0 . С помощью полуторалинейной формы $B[u, v] \quad u, v \in \mathcal{H}_+^0$, также определяется другой оператор A , который действует в пространстве $L_2(G)$. Основные утверждения о свойствах этого оператора, сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 2. Пусть $\alpha_j \geq -1/2$ для всех $j \in J$ и выполнены условия (2)-(5), (7). Тогда существует единственный замкнутый оператор A в пространстве $L_2(G)$, обладающий следующими свойствами:

1. $D(A) \subset L_2(G), (Au, v) = B[u, v]$ для всех $v \in \mathcal{H}_+^0$ и всех $u \in D(A)$.
2. Найдется комплексное число λ_0 такое, что оператор $A - \lambda_0 E$ непрерывно обратим.
3. Оператор A совпадает с сужением оператора \mathcal{A} в $L_2(G)$.

Согласно свойству 3 операторы \mathcal{A} и A связаны следующим образом

$$D(A) = \{u \in \mathcal{H}_+^0 : Au \in L_2(G)\}, Au = \mathcal{A}u \quad \forall u \in D(A).$$

Нами доказано следующее утверждение о резольвенте оператора A :

Теорема 3. В условиях теоремы 2 справедливо следующее представление

$$(A - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda|E)^{-1/2} Y(\lambda) (P + |\lambda|E)^{-1/2}, \quad \lambda \in S, |\lambda| > \sigma_S. \tag{13}$$

Следует отметить, что из представления (13) вытекает следующая оценка для нормы резольвенты оператора A

$$\|(A - \lambda E)^{-1}; \mathcal{L}(L_2(G))\| \leq |\lambda|^{-1} \lambda \in S, |\lambda| > \sigma_s,$$

и эта оценка играет важную роль в изучении спектральных свойств оператора A .

Поступило 14.06.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир. 1980, 664 с.
2. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Наука, 1973, 342 с.
3. Исохов С.А., Гадоев М.Г. Об одном неравенстве типа Харди для ограниченных областей, удовлетворяющих условию конуса. – Доклады АН ТаджССР, 1991, т. 34, №3, с. 146-151.
4. Исохов С.А. Обобщенная задача Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических систем дифференциальных операторов в ограниченных областях. – Доклады АН ТаджССР, 1991, т. 34, №6, с. 333-337.
5. Гадоев М.Г., Исохов Дж.С. Об одном классе вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области, порожденных некоэрцитивными формами. – ДАН РТ, 2019, т. 62, №7-8, с. 399-405.
6. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Изд-во ЛГУ, 1980, 264 с.
7. Бойматов К.Х. О базисности по Абелю корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами. – Сибирский математический журнал, 2006, т. 47, №1, с. 46-57.

С.А.Исохов, Д.С.Ғоибов*, Ф.Ш.Махмадова

ОИД БА РЕЗОЛВЕНТАИ ОПЕРАТОРҲОИ ЭЛЛИПТИКӢ БО ТАНАЗЗУЛӢБИИ ҒАЙРИ ДАРАҶАГӢ ДАР СОҶАИ МАҲДУД

Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

**Донишгоҳи (Славянии) Россия ва Тоҷикистон*

Дар мақола операторҳои эллиптикии дараҷаи олии дар соҳаи маҳдуд омӯхта мешаванд, ки дар тамоми сарҳади соҳа таназзули ғайри дараҷагӣ доранд. Операторҳое, ки омӯхта мешаванд, бо истифода аз шаклҳои якунимхаттӣ тавлид мешаванд, ки метавонанд шартҳои коэрцитивиро қонеъ накунад. Формулаҳои овардашудаанд, ки дар онҳо резолвентаи ду намуни операторҳои эллиптикии таназзулҷабда ба намуни композитсияи се оператор ифода карда мешавад, ки дутои онҳо решаи квадратӣ аз операторҳои баръакс мебошанд.

Калимаҳои калидӣ: оператори эллиптикӣ, соҳаи маҳдуд, таназзулҷбӣи ғайри дараҷагӣ, резолвента, шакли ғайри коэрситивӣ.

S.A.Iskhokov, D.S.Goibov*, F.Sh.Makhmadova

ABOUT OF A RESOLVENT OF ELLIPTIC OPERATORS WITH NON-POWER DEGENERACY IN A BOUNDED DOMAIN

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan,

**Russian-Tajik (Slavonic) University*

In the paper, higher-order elliptic operators in a bounded domain are studied, which have a non-power degeneracy along the entire boundary of the domain. The operators under study are generated by sesquilinear forms, which may not satisfy the coercivity condition. Representation formulas are obtained for the resolvent of two types of degenerate elliptic operators as a composition of three operators, two of which are square roots of inverse operators.

Key words: *elliptic operator, bounded domain, non-power degeneracy, resolvent, non-coercive form.*

Сведения об авторах:

1. **Исхоков Сулаймон Абунасрович** – доктор физ.-мат. наук, член-корреспондент НАН Таджикистана, Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, заместитель директора. E-mail: sulaimon@mail.ru;
2. **Гаибов Давронбег Сафарович** – кандидат физ.-мат. наук, Российско-Таджикский (Славянский) университет, доцент кафедры математики и физики;
3. **Махмадова Фарангис Шодиевна** – Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, докторант PhD.

УДК 517.968.2

Специальность:1.1.2. – Дифференциальные уравнения, и математическая физика

К.Ш.Файззода

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком НАН Таджикистана Н.Р.Раджабовым 05.07.2023 г.)

В работе изучается вопрос разрешимости задачи Дирихле для эллиптической системы двух уравнений с двумя независимыми переменными шестого порядка с разрывным коэффициентом по ограниченной области. Методом перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области найдены эффективные условия нетеровости и получена формула для подсчета индекса задачи.

Ключевые слова: задача Дирихле, нетеровость, индекс задачи, сингулярный интеграл.

В последнее время Г.Джангибековым были получены (см. напр. ([1-4]) эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса некоторых классов двумерных сингулярных операторов по ограниченной области. Использование этих результатов позволило, в частности, получить в работах [5,6] теорию разрешимости задач Дирихле и Неймана для эллиптических систем уравнений второго и четвертого порядка на плоскости и вычислить индекс этих задач через коэффициенты системы. В данной работе изучается вопрос разрешимости задачи Дирихле для эллиптической системы двух уравнений шестого порядка с разрывным коэффициентом на плоскости методом перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области.

1. Постановка задачи

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости $z = x + iy$. Рассмотрим дифференциальное уравнение 6-го порядка

$$a(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^{-3} \partial \bar{z}^3} + (\bar{z}/|z|)^n b(z) \frac{\partial^6 \bar{\omega}}{\partial \bar{z}^{-6}} + \sum_{k+j=0}^5 [a_{k,j}(z) \frac{\partial^{k+j} \omega}{\partial z^{-k} \partial \bar{z}^j} + b_{k,j}(z) \frac{\partial^{k+j} \bar{\omega}}{\partial \bar{z}^{-k} \partial z^j}] = g(z), \quad (1)$$

где $\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, n – целое число, функции $a(z)$, $b(z)$, $a_{k,j}(z)$, $b_{k,j}(z)$ ($0 \leq k + j \leq 5$) будем считать непрерывными в \bar{D} функциями, $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$,

Адрес для корреспонденции: Файззода Кишвар Шохпулод. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр.Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: Fayzzoda_1996@mail.ru.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

По главной части системы (1) построим матрицу-функцию

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) & (\bar{z}/|z|)^n b(z) (\bar{\sigma}/\sigma)^6 \\ (z/|z|)^n \overline{b(z)} (\sigma/\bar{\sigma})^6 & \overline{a(z)} \end{pmatrix}.$$

Эллиптичность системы (1) означает, что для любой точки $z \in \bar{D}$ и любого не равного нулю комплексного числа $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ должно выполняться неравенство $\det G_z(\sigma) \neq 0$. Очевидно, что

$$\det G_z(\sigma) \equiv |a(z)|^2 - |b(z)|^2 \neq 0$$

для всех $z \in \bar{D}$.

Множество всех полиномиальных матриц вида $G_z(\sigma)$, удовлетворяющих условию $\det G_z(\sigma) \equiv |a(z)|^2 - |b(z)|^2 > 0 (< 0)$ для всех $z \in \bar{D}$, обозначим через $G^+ (G^-)$.

Две матрицы G_z^1, G_z^2 из класса G^+ назовем гомотопными, то есть $G_z^1 : G_z^2$, если существует семейство полиномиальных матриц $G_z^+(\tau)$ из G^+ , непрерывно зависящих от действительного параметра $\tau : 0 \leq \tau \leq 1$, такие, что

$$G^+(0) \equiv G_z^1, \quad G^+(1) \equiv G_z^2.$$

Две эллиптические системы из множества всех эллиптических систем (1) с одинаковой главной частью, такой, что $G_z(\sigma) \in G^+$, можно тогда и только тогда соединить непрерывным путем в G^+ , если характеристические матричные полиномы этих систем гомотопны. Таким образом, соотношение гомотопии разбивает G^+ на два класса гомотопии – связанные открытые компоненты:

класс ε^+ : то есть когда выполняется неравенство $|a(z)| > |b(z)|$ для $\forall z \in \bar{D}$;

класс ε^- : то есть когда выполняется неравенство $|a(z)| < |b(z)|$ для $\forall z \in \bar{D}$.

Эти классы образуют полную систему множества G^\pm , то есть G_z^1 и G_z^2 из F^+ принадлежат некоторому классу ε^\pm тогда и только тогда, когда $G_z^1 : G^1$.

Задача Дирихле. Найти функцию $\omega(z)$ из класса $W_p^6(D) \cap C(\bar{D})$, удовлетворяющую внутри G уравнению (1), а на ее границе Γ двум краевым условиям

$$\omega(z)|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2}|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

где $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ – означает производную по направлению внешней нормали в точках контура Γ .

Отметим, что в работе [7] рассматривалась эллиптическая система (1) в случае, когда $n = 0$, то есть когда коэффициенты системы являются непрерывными функциями в области D . При $n \neq 0$ коэффициент при производной $\frac{\partial^6 \bar{\omega}}{\partial \bar{z}^6}$ имеет в точке $z = 0$ разрыв вида $(z/|z|)^n$ n –(целое число) то есть по разным лучам, выходящим из начала координат имеет разные пределы.

2. Модельное дифференциальное уравнение

В этом пункте будем рассматривать следующее модельное дифференциальное уравнение с разрывным коэффициентом

$$a(0) \frac{\partial^6 \omega}{\partial \bar{z}^3 \partial z^3} + (z/|z|)^n b(0) \frac{\partial^6 \bar{\omega}}{\partial \bar{z}^6} = q(z). \tag{3}$$

Известно ([8,9]), что любая комплекснозначная функция класса $W_p^6(D) \cap C(\bar{D})$, удовлетворяющая на границе Γ однородным краевым условиям (2), представляется в виде

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D G_6(z, \zeta) f(\zeta) ds_\zeta, \tag{4}$$

с произвольной комплекснозначной плотностью $f(z) \in L^p(D), p > 2$, где $G_6(z, \zeta)$ – функция Грина

уравнения $\Delta^3 w \equiv \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^3 \partial \bar{z}^3} = 0$ круговой области $D = \{z : |z| < 1\}$:

$$G_6(z, \zeta) = |\zeta - z|^4 \ln \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 - |\zeta - z|^2 (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) + \frac{1}{2} (1 - |z|^2)^2 (1 - |\zeta|^2)^2.$$

Непосредственный подсчет показывает, что $\frac{\partial^6 \omega}{\partial \bar{z}^6}$ определяется по формуле

$$\frac{\partial^6 \omega}{\partial \bar{z}^6} = \iint_D K(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta(z), \tag{5}$$

где

$$K(z, \bar{\zeta}) = -\frac{3}{\pi} \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2}{(\zeta - z)^4} + K_1(z, \bar{\zeta}), \tag{6}$$

$$K_1(z, \bar{\zeta}) = \frac{3(\bar{\zeta} - \bar{z})^2 \bar{\zeta}^4}{\pi(1 - z\bar{\zeta})^4}.$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial^6 \omega}{\partial z^3 \partial \bar{z}^3} = f(z). \tag{7}$$

Здесь следует отметить, что интегральный оператор с ядром $K(z, \bar{\zeta})$ во внутренних точках области D имеет особенность порядка 2, поэтому интеграл нужно понимать в смысле главного значения по Коши. Что касается точки границы, то есть когда $\zeta \in \Gamma, \bar{\zeta} = 1/\zeta$, то нетрудно проверить, что в этом случае $K(z, \bar{\zeta}) = 0$.

Подставляя значения производных из (4), (6) в исходное дифференциальное уравнение (1), для определения функции $f(z)$ получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение:

$$a(0)f(z) + (z/|z|)^n b(0)(S_3 \bar{f})(z) + (Tf)(z) = g(z), \tag{8}$$

где

$$(S_3 \bar{f})(z) = -\frac{3}{\pi} \iint_D \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2}{(\zeta - z)^4} \overline{f(\zeta)} ds_\zeta -$$

двумерный сингулярный интегральный оператор с четной характеристикой порядка шесть, T – вполне непрерывный оператор.

Интегральное уравнение (8) относится к двумерным сингулярным интегральным уравнениям с четными характеристиками по ограниченной области, которые изучены в работе [2] в более широком (чем $L^p(D), p > 2$) весовом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ ($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$).

Далее без ограничения общности будем считать, что $n = 2$ и будем исследовать модельное интегральное уравнение (8) при $a(0) \neq 0$, ибо в противном случае уравнение (8) эквивалентным образом сводится к уравнению с непрерывными коэффициентами.

Введя обозначение $\lambda = \frac{b(0)}{a(0)}$, перепишем характеристическую часть уравнения (8) (при

$n = 2$) в виде

$$(A_0 f)(z) \equiv f(z) - \frac{3\lambda}{\pi} \frac{z}{|z|} \iint_{|z|<1} \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2}{(\zeta - z)^4} \overline{f(\zeta)} ds_\zeta = q(z), |z| < 1, \tag{9}$$

где $q(z) = \frac{g(z)}{a(0)}$.

Полагая $\zeta = \sigma z, \bar{\zeta} = \rho e^{i\theta}, z = r e^{i\varphi}, \sigma = \tau e^{i\gamma}$, получим

$$f(z) = \frac{3\lambda}{\pi} e^{-4i\varphi} \iint_{|\sigma|<1} \frac{(\bar{\sigma} - 1)^2}{(\sigma - 1)^4} \overline{f(\sigma z)} ds_\sigma + q(z), |z| < 1. \tag{10}$$

Мы будем искать решение $f(z) = f(r, \varphi)$ в виде ряда Фурье относительно полярного угла φ :

$$f(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r) e^{ik\varphi}, f_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi.$$

Аналогичные обозначения используются при разложении $q(z) = q(r, \varphi)$.

Умножая (10) на $e^{-ik\varphi}$ и интегрируя, получим

$$f_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(k+4)\varphi} d\varphi \frac{3\lambda}{\pi} \iint_{\tau r < 1} \frac{(\bar{\sigma}-1)^2}{(\sigma-1)^4} \overline{f(\sigma z)} ds_\sigma + q_k(r) \quad |z| < 1. \tag{11}$$

Предел внутреннего сингулярного интеграла существует равномерно относительно φ , поэтому можно поменять порядок интегрирования. Изменив порядок интегрирования, имеем

$$f_k(r) = \frac{3\lambda}{\pi} \iint_{\tau r < 1} \frac{(\bar{\sigma}-1)^2}{(\sigma-1)^4} \frac{ds_\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(\sigma z)} e^{-i(k+4)\varphi} d\varphi + q_k(r) \quad |z| < 1. \tag{12}$$

Используя периодичность функции $f(z)$ по φ , будем иметь

$$f_k(r) = \frac{3\lambda}{\pi} \iint_{|\sigma| \leq \frac{1}{|z|}} \left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^{k+4} \frac{(\bar{\sigma}-1)^2}{(\sigma-1)^4} \overline{f_{-k-4}(\tau r)} ds_\sigma + q_k(r), \quad |z| < 1. \tag{13}$$

Сделаем теперь в полученном интеграле обратную замену $\sigma = \zeta/z$:

$$f_k(r) = \frac{3\lambda}{\pi} \left(\frac{|z|}{z}\right)^{k-2} \iint_{|\sigma| \leq \frac{1}{|z|}} \left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)^{k+4} \frac{(\bar{\zeta}-\bar{z})^2}{(\zeta-z)^4} \overline{f_{-k-4}(\tau r)} ds_\sigma + q_k(r), \quad |z| < 1. \tag{14}$$

Представим последний двумерный сингулярный интеграл в виде обобщенной производной по z

$$f_k(r) = \frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{|z|}{z}\right)^{k-2} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{|\sigma| \leq \frac{1}{|z|}} \left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)^{k+4} \frac{(\bar{\zeta}-\bar{z})^2}{(\zeta-z)^3} \overline{f_{-k-4}(\tau r)} ds_\sigma + q_k(r), \quad |z| < 1. \tag{15}$$

В стоящем под знаком дифференцирования интеграле со слабой особенностью переходим к полярным координатам, затем к повторному интегрированию и, с помощью теории вычетов, вычисляем интеграл по полярному углу. Далее, выполнив операцию дифференцирования, получим уравнения:

$$\begin{aligned} f_k(r) &= \frac{\lambda}{r} \int_r^1 \Theta_1^k \left(\frac{\rho}{r}\right) \overline{f_{-k-4}(\rho)} d\rho - \lambda \overline{f_{-k-4}(r)}, \text{ или } -1 \leq k \leq N_0, \\ f_k(r) &= \frac{\lambda}{r} \int_0^r \Theta_2^k \left(\frac{\rho}{r}\right) \overline{f_{-k-4}(\rho)} d\rho - \lambda \overline{f_{-k-4}(r)}, \text{ или } -N_0 - 4 \leq k \leq -2, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_1^k(\tau) &= 2\tau^{1-k} \sum_{j=0}^2 \frac{(-1)^j}{j!(2-j)!} (k+3-j)(k+2-j)(k+1-j)\tau^{2(j-2)}, \\ \Theta_2^k(\tau) &= 2\tau^{-k-3} \sum_{j=0}^2 \frac{(-1)^j}{j!(m-1-j)!} (-k+1-j)(-k-j)(-k-1-j)\tau^{2(2-j)}, \end{aligned} \tag{17}$$

N_0 – некоторое натуральное число.

Заменив во вторых уравнениях (16) индекс k на $-k-4$ и поставив выражение для $f_k(r)$ из одной строки (16) в другую, для коэффициентов Фурье $f_{-k-4}(r)$, $-2 \leq k \leq N_0$ при $|\lambda| \neq 1$ получим следующие интегральные уравнения:

$$f_{-k-4}(r) = \frac{\nu}{(k+2)r} [(k-1) \int_r^1 \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k-1} f_{-k-4}(\rho) d\rho - (k+5) \int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^{k+5} f_{-k-4}(\rho) d\rho] + q_{-k-4}^1(r) \text{ при } -1 \leq k \leq N_0, \tag{18}$$

$$f_{-2}(r) = \frac{2\nu}{r} \int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^3 \left(\ln\left(\frac{r}{\rho}\right) - 1\right) f_{-2}(\rho) d\rho + q_{-2}^2(r) \text{ при } k = -2, \tag{19}$$

где $\nu = \frac{6|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}$, а функции $q_k^j(r) (j=1,2)$ выражаются через $\overline{g_k(r)}$ и $g_{-k-4}(r)$.

Ядра интегральных уравнений (18), (19) однородны порядка (-1) и, как нетрудно проверить, удовлетворяют надлежащим условиям суммируемости при всяком $\beta: 0 < \beta < 2$, и поэтому к ним применимы результаты [10,11]. В соответствии с исходным пространством $L_{\beta-2/p}^p$ в круге $|z| < 1$ уравнения (18),(19) следует рассматривать в пространствах $L_{\beta-1/p}^p$ на отрезке (0,1).

При формулировке результатов для исходного двумерного сингулярного интегрального уравнения (9) следует учесть, что для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы были разрешимы все уравнения (18), (19). Каждому решению однородной системы (16) отвечает решение однородного уравнения (9) по формуле

$$f(z) = f_k(r)e^{ik\varphi} + f_{-k-4}(r)e^{-i(k+4)\varphi}, \quad z = re^{i\varphi},$$

причем таким образом исчерпываются все решения однородного уравнения (9). При этом ясно, что функции, построенные по линейно независимым решениям однородной системы (16) с данным номером k , будут линейно независимыми. То же самое относится к функциям, построенным по решениям (16) с различными k .

Положим

$$R_\beta(k) = \sqrt{1 - \frac{12(1-\beta)}{(k-\beta)(k+4)}}, \tag{20}$$

где $0 < \beta < 2, k$ принимает значения из множества целых чисел $k \geq -2$. Обозначим через $\mu_\beta(\lambda)$ число, равное для $|\lambda| < 1$ количеству значений k , при которых $R_\beta(k) < |\lambda|$, а для $|\lambda| > 1$ равное количеству значений k , при которых $R_\beta(k) > |\lambda|$.

Резюмируем окончательный результат для модельного двумерного сингулярного интегрального уравнения (9).

Теорема 1. Для нормальной разрешимости модельного сингулярного интегрального уравнения (9) в $L^p_{\beta-2/p}(|z|<1)$ необходимо и достаточно, чтобы $|\lambda| \neq 1$ и $|\lambda| \neq R_\beta(k)$, где $k \geq -2$ и $k \neq 1$. При выполнении этих условий индекс $u_\beta(\lambda)$ принимает следующие значения:

если $0 < \beta \leq 1$, то $u_\beta(\lambda) = -2\mu_\beta(\lambda)$ при $|\lambda| < 1$ и равно $2(6 - \mu_\beta(\lambda))$ при $|\lambda| > 1$ и $\mu_\beta(\lambda) \neq 3$ и равно 7 при $\mu_\beta(\lambda) = 3$;

если $1 < \beta < 2$, то $u_\beta(\lambda)$ равно $2\mu_\beta(\lambda)$ при $|\lambda| < 1$ и $\mu_\beta(\lambda) \neq 3$ и равно 5 при $|\lambda| < 1$ и $\mu_\beta(\lambda) = 3$ и равно $2(6 + \mu_\beta(\lambda))$ при $|\lambda| > 1$.

При этом если $u_\beta(\lambda) > 0$, то однородное уравнение (9) имеет ровно $\kappa_\beta(\lambda)$ линейно независимых решений, а при $u_\beta(\lambda) < 0$ для разрешимости неоднородного уравнения (9) требуется $-u_\beta(\lambda)$ условия разрешимости, которые выписываются в явном виде.

Вернемся теперь к задаче Дирихле (2) для модельного дифференциального уравнения (3). Для формулировки результатов для указанной задачи, в силу представления (4), в результатах теоремы 1 нужно переходить к безвесовым пространствам $L^p(D)$, $p > 2$, то есть нужно положить $0 < \beta = 2/p < 1$.

Теорема 2. Для того, чтобы задача Дирихле (2) для модельного дифференциального уравнения (3) (при $n = 2$) в классе $W^6_p(D) \cap C(\bar{D})$, $p > 2$ была нетривиальной, необходимо и достаточно выполнение условий

$$|a(0)| \neq |b(0)|, \quad |\lambda| \neq R_{2/p}(k), \quad k \geq -2, \tag{21}$$

причем индекс задачи равен

$$\kappa_{\frac{2}{p}}(\lambda) = \begin{cases} -2\mu_{\frac{2}{p}}(\lambda) & \text{при } |\lambda| < 1; \\ 2(6 - 2\mu_{2/p})(\lambda) & \text{при } |\lambda| > 1, \mu_\beta(\lambda) \neq 3; \\ 7 & \text{при } \mu_{2/p}(\lambda) = 3. \end{cases}$$

3. Исходное дифференциальное уравнение

Перейдем теперь к задаче Дирихле (2) для исходного дифференциального уравнения (1). Используя интегральное представление (4) и формулы для производных (5)-(7), для определения функции $f(z)$ получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) - b(z) \frac{3}{\pi} \left(\frac{z}{|z|} \right)^n \iint_{|z|<1} \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2}{(\zeta - z)^4} f(\zeta) ds_\zeta + (Tf)(z) = g(z), \quad |z| < 1, \tag{22}$$

где T – вполне непрерывный в пространствах $L^p(|z| < 1)$, $2 < p < \infty$ оператор. Непосредственными вычислениями доказывается, что имеет место

Лемма. Пусть функции $a(z), b(z)$ – непрерывные в круге $|z| \leq 1$ функции и $|a(0)| \neq |b(0)|$.

Тогда

$$A = A_0 A_1 + T, \tag{23}$$

где T – вполне непрерывный оператор,

$$\begin{aligned} (A_1 f)(z) = & \\ = & (|a(0)|^2 - |b(0)|^2)^{-1} f(z) + \overline{a(0)b(z) - b(0)a(z)} \frac{z}{\pi z} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta + \\ & + (a(0) + \delta)^{-1} \{a(0)b(0)\overline{b(z)} - |b(0)|^2 a(z) + \delta b(0)\overline{b(z)}\} \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{f(\zeta) ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2}, \end{aligned}$$

A_0 – модельный интегральный оператор из (9), $\delta = 0$, если $a(0) \neq 0$ и равно 1, если $a(0) = 0$.

Теперь, зная результаты для операторов A_0, A_1 , на основе известных фактов теории линейных операторов, можем получить из [5] условия нетеровости уравнения (22) в $L^p_{\beta-2/p}(|z| < 1)$ и формулу для вычисления его индекса. Из этих результатов для задачи сопряжения (1), (2) следует

Теорема 3. Для разрешимости задачи (2) для уравнения (1) (при $n = 2$) в классе $W^6_p(D) \cap C(\overline{D})$, $2 < p < \infty$ была нетеровой, необходимо и достаточно выполнение условий

1. $|a(z)| \neq |b(z)|$ при $|z| \leq 1$, $a(t) \neq 0$ при $|t| = 1$,
2. $|\lambda| \neq R_{2/p}(k)$, $k \geq -2$,

причем индекс задачи равен

$$\varkappa = -6 \ln da(t) + \varkappa_{2/p}(\lambda),$$

где $\varkappa_{2/p}(\lambda)$ определяется из теоремы 2.

Замечание. По изложенной выше схеме, но с более сложными техническими вычислениями, аналогичный результат получается при $n \neq 2$. При этом условия нетеровости и формулы для индекса существенно зависят от значения параметра n .

Поступило 05.07.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джангибеков Г. Нетеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных и интегральных операторов. – Изв. вузов. Матем, 1991, № 1, с. 19-28.

2. Джангибеков Г. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами. – Изв. вузов. Матем, 1992, №9, с. 25-37.
3. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области. – Докл. РАН, 2002, т. 383, №1, с. 7-9.
4. Джангибеков Г. Об условиях нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов. – ДАН СССР, 1991, т. 319, №4, с. 811-815.
5. Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости. – Докл. РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415-417.
6. Джангибеков Г., Худжаназарова Г. О задаче Дирихле для эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка на плоскости. – ДАН России, 2004, т. 398, №2.398:2, с. 151-155.
7. Джангибеков Г., Файззода К.Ш. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области. – Вестник филиала МГУ им.М.В.Ломоносова в г.Душанбе, серия естественных наук, 2022, т.1, №4 (27), с. 21-25.
8. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.: Гостехиздат, 1948, 296 с.
9. Джурев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений – М.: Наука, 1987, 415 с.
10. Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1 . – Душанбе: Дониш, 1966, 49 с.
11. Бильман Б.М. Об интегральных уравнениях с переменными пределами интегрирования, ядра которых имеют особенность типа однородной функции степени -1 . – В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами. – Душанбе: Дониш, 1969, с. 19-40.

К.Ш.Файззода

МАСЪАЛАИ ДИРИХЛЕ БАРОИ БАЪЗЕ СИСТЕМАИ МУОДИЛА ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ШАШ ДАР

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола ҳалшавандагии масъалаи Дирихле барои системаи ду муодилаи дифференсиалии эллиптики аз ду тағирёбандаҳои новобастаи тартиби шаш дар соҳаи маҳдуд омӯхта мешавад. Бо усули ба таври эквивалентӣ гузаштан ба муодилаи интегралӣ сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд шарт эффе́ктивноки не́тровоӣ будан ёфта шуда, формула барои намудани индекси масъала ҳосил карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: масъалаи Дирихле, нетеровӣ будани масъала, индекси масъала, оператори сингулярӣ.

K.Sh.Faizzoda

OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR SOME ELLIPTIC SYSTEMS OF SIXES-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE PLANE

Tajik National University

In this note we consider of the Dirichlet problem for some elliptic systems of sixes-order with two functions of two variables differential equations in the pline. The may be reduced, in an equivalent way, to

two-dimensional singular integral equations in the simply connected domain in the complex plane. For this systems is given effective necessary and sufficient conditions for the property Neter obtained along with a formula for computing the index of the Dirichlet problem.

Key words: *Dirichlet problem, Noethericity property, problem index, singular integral.*

Сведения об авторе:

1. **Файззода Кишвар Шохпулод** – Таджикский национальный университет, доктор PhD кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений. E-mail: Fayzzoda_1996@mail.ru.

УДК 523. 532

Специальность 1.3.1 – Физика космоса, астрономия.

Член-корреспондент НАН Таджикистана Г.И.Кохирова,**А.М.Буриев, С.Н.Сафаров****ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ПОТЕНЦИАЛЬНО
ОПАСНОГО АСТЕРОИДА 1998 OR2 ПО НАБЛЮДЕНИЯМ
В ТАДЖИКИСТАНЕ***Национальная академия наук Таджикистана,**Институт астрофизики НАН Таджикистана*

В результате многоцветных оптических наблюдений потенциально опасного астероида (52768) 1998 OR2 в Гиссарской астрономической обсерватории Института астрофизики НАН Таджикистана в 2020 г. определены высокоточные экваториальные координаты, на основе которых вычислена орбита астероида, оказавшаяся близкой с эфемеридной орбитой. Измерен видимый и абсолютный блеск астероида и выявлено, что в период мониторинга эти характеристики сохранили стабильность. Показатели цвета соответствуют астероидам спектрального типа S, характеризующихся металлическим составом. Оценки диаметра соответствуют имеющимся данным. Значительных изменений основных свойств астероида вследствие его сближения с Землей не установлено.

Ключевые слова: астероид, наблюдения, астрометрия, орбита, фотометрия, кривая блеска, показатель цвета, S-тип, диаметр.

В в е д е н и е

Астероиды и кометы, траектории движения которых проходят на расстоянии около 45 млн. км от орбиты Земли, могут стать для нее потенциально опасными. Ежегодно с помощью наземных и космических телескопов выявляются десятки таких объектов. Кроме дистанции сближения с Землей, уровень опасности зависит и от размера объекта. Потенциально опасным считается объект размером свыше 30 м. Глобальную угрозу представляют астероиды размером более 10 км.

На 10 июля 2023 г. 2344 астероидов, сближающихся с Землей (АСЗ), классифицируются как потенциально опасные астероиды (ПОА) [1]. Поскольку ПОА потенциально могут воздействовать на Землю, то их траектории и орбиты являются объектом пристального внимания ученых, занимающихся проблемой астероидно-кометной опасности. В задачу наблюдателей входит аккуратное систематическое отслеживание изменений орбит ПОА в настоящем, в то время как теоретики моделируют движение ПОА в прошлом, настоящем и будущем, сравнивают модели с наблюдениями и определяют степень вероятности возможных столкновений. Определение размеров, состава и структуры ПОА также являются важными научными целями для астрономов, так как этими параметрами характеризуются

Адрес для корреспонденции: Кохирова Гулчехра Исроиловна, Буриев Анварджон Махмадалиевич. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/5, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: kokhirova2004@mail.ru; anvar10@mail.ru

последствия столкновений. Этим объясняется необходимость и актуальность наблюдений и определения динамических и физических свойств каждого отдельного ПОА, особенно в периоды их сближений с Землей.

Потенциально опасный астероид (52768) 1998 OR2

Околоземный астероид (52768) 1998 OR2 был открыт 24 июля 1998 г. в рамках проекта Near-Earth Asteroid Tracking (NEAT) Лаборатории реактивного движения НАСА (NASA JPL) [1,2]. Минимальное межорбитальное расстояние астероида с Землей MOID = 0.00866 а.е., следовательно, астероид может сближаться с Землей до расстояний порядка 1.3 млн. км. Абсолютный блеск астероида 1998 OR2 составляет $H=16.04$ звездных величин, что соответствует диаметру 1.75 км (в предположении величины альбедо 0.20). В соответствии с MOID и размером, 1998 OR2 был включен в группу ПОА [2]. В ближайшие 100 лет астероид неоднократно сблизится с Землей, наиболее близкий подход произойдет в апреле 2079 года, когда 1998 OR2 приблизится к нашей планете на расстояние 0.0118 а.е., однако вероятность столкновения равна почти нулю [1]. Очередной близкий подход астероида к Земле произошел в апреле 2020 г.

Элементы орбиты ПОА 1998 OR2 приведены в табл. 1, где a – большая полуось, e – эксцентриситет, q , Q – перигелийное и афелийное расстояния, i – наклонение орбиты, ω – аргумент перигелия, Ω – долгота восходящего узла, T_j – критерий Тиссерана [1]. Астероид перемещается по низко наклоненной к эклиптике орбите, угол наклона составляет 5.878 град., с перигелийным расстоянием 1.010 а.е., что очень близко к орбите Земли. Согласно значению критерия Тиссерана, его орбита классифицируется как астероидная.

Таблица 1

Элементы орбиты астероида 1998 OR2

Эпоха	a , а.е.	e	q , а.е.	Q , а.е.	i , град.	ω , град.	Ω , град.	T_j
25.02.23	2.380	0.575	1.010	3.750	5.878	174.580	26.941	3.286

Согласно динамическим расчетам, астероид делает полный оборот вокруг Солнца за три года и восемь месяцев. 15 апреля 2020 г. объект прошел перигелий своей орбиты, а затем в ночь с 28 на 29 апреля астероид пролетел мимо Земли на расстоянии менее 0.042 а.е. (6.3 млн. км). Во время таких явлений очень важно иметь своевременную информацию о движении объекта с целью определения последствий, к которым могло привести это сближение. В этой связи 1998 OR2 представляет несомненный научный интерес, поскольку было необходимо дальнейшее изучение его динамических и физических характеристик и их сравнение с имеющимися данными. Данная работа продолжает цикл статей по мониторингу ПОА и представляет результаты наблюдений астероида 1998 OR2 в апреле 2020 г., и их астрометрической и фотометрической обработки с целью определения динамических и физических свойств астероида в период его сближения с Землей и их анализа с данными, полученными до сближения.

Наблюдения ПОА (52768) 1998 OR2

На телескопе АЗТ-8 Гиссарской астрономической обсерватории (ГисАО) ИА НАНТ с 20 по 24 апреля 2020 г. выполнены наблюдения астероида 1998 OR2 и получено несколько сотен его изображений. Телескоп АЗТ-8 в оптической системе Ньютона имеет светосилу $D/F=700$ мм/2820 мм. Размер и поле зрения камеры АЗТ-8 – 3056x3056 пикселей и 44.5' x 44.5', соответственно, масштаб матрицы – 0.874"/пиксель. Регистрация объекта выполнялась с помощью ПЗС FLI ProLine PL09000 с использованием широкополосных фотометрических фильтров системы Джонсона-Козинса – BVRI.

Для уменьшения уровня шумов ПЗС камеры аппарата была охлаждена до температуры -20°C. Первичная обработка кадров проведена по стандартной процедуре с использованием кадров «Dark», «Flat» и «Bias», полученных в ночи наблюдений и учитывающих темновой сигнал, выравнивание полей изображений, уровень шумов и ошибки матрицы ПЗС-камеры. За весь период наблюдений получено 1400 кадров с экспозицией от 10 до 60 секунд. Изображение 1998 OR2 во время наблюдений приведено на рис. 1. Журнал наблюдений приведен в табл. 2, где даны дата и время наблюдений астероида в долях суток мирового времени, гелио и геоцентрические расстояния r , Δ , фазовый угол ph астероида в этот период, количество полученных изображений N в каком-либо фильтре, время экспозиции t .

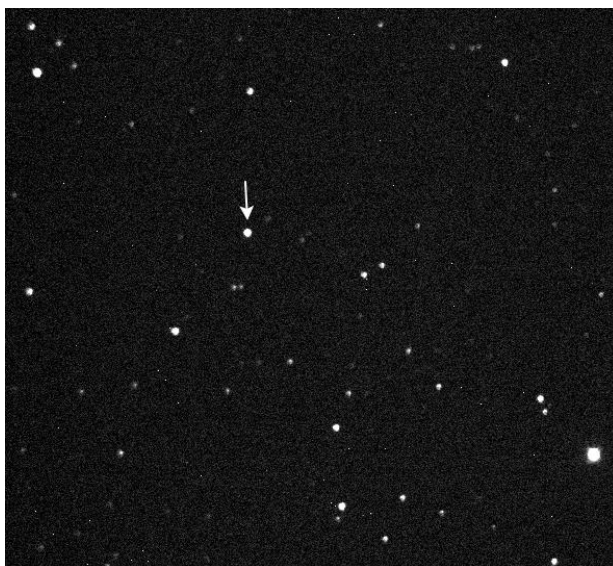


Рис. 1. Астероид 1998 OR2, 21 апреля 2020 г., АЗТ-8 ГисАО, экспозиция 30 сек.

Таблица 2

Журнал наблюдений ПОА (52768) 1998 OR2 в ГисАО

2020, UT	r , а.е.	Δ , а.е.	ph , град.	N x Фильтр	t , с
апрель 20.028	1.019	0.059	73.91	15xB, 15xV, 15xR, 15xI	10-60
апрель 21.039	1.020	0.057	72.46	20xB, 20xV, 20xR, 20xI	10-60
апрель 22.031	1.022	0.053	70.69	15xB, 15xV, 15xR, 15xI	10-60
апрель 23.029	1.023	0.051	68.57	15xB, 15xV, 15xR, 15xI	10-60
апрель 24.025	1.024	0.047	66.10	12xB, 12xV, 12xR, 12xI	10-60

Астрометрическая обработка, определение координат и вычисление орбиты ПОА (52768) 1998 OR2

Для астрометрической обработки изображений астероида использован программный пакет (ПП) АПЕКС-II [3]. Экваториальные координаты астероида, прямое восхождение α и склонение δ определены с использованием каталога UCAC5 (точность положений звезд составляет 0.05") и для избранных моментов наблюдений приведены в табл. 3. Результаты определения координат астероида приведены в графическом виде на рис. 2, где по оси абсцисс даны прямое восхождение α и по оси ординат – склонение δ . На этом графике (рис. 2) слева для сравнения приведены также координаты объекта по другим наблюдениям из базы данных [1].

Таблица 3

Экваториальные координаты астероида 1998 OR2 по наблюдениям в ГисАО

№	Дата, 2020	Момент наблюдений (UT)	α	δ	m (зв.всл.)
1	20 апреля	18 ^h 29 ^m 38 ^s .97	09 ^h 03 ^m 13 ^s .02	+15°49'23".9	11.6
2	20 апреля	18 30 02.30	09 03 13 .13	+15 49 21 .2	11.8
3	20 апреля	18 30 25.62	09 03 13 .23	+15 49 18 .5	11.9
4	20 апреля	18 30 48.96	09 03 13 .34	+15 49 15 .8	11.6
5	20 апреля	18 31 35.61	09 03 13 .56	+15 49 10 .2	11.5
6	20 апреля	18 31 58.94	09 03 13 .68	+15 49 07 .5	11.7
7	20 апреля	18 32 22.27	09 03 13 .79	+15 49 04 .8	11.8
8	20 апреля	18 33 24.48	09 03 14 .10	+15 48 57 .5	10.9
9	20 апреля	18 34 10.27	09 03 14 .32	+15 48 52 .2	11.9
10	20 апреля	18 34 33.60	09 03 14 .43	+15 48 49 .3	12.1
11	21 апреля	17 22 33.60	09 10 35 .42	+13 01 54 .1	11.6
12	21 апреля	17 23 70.29	09 10 35 .56	+13 01 49 .8	11.7
13	21 апреля	17 23 40.13	09 10 35 .75	+13 01 45 .0	11.5
14	21 апреля	17 24 12.96	09 10 35 .92	+13 01 41 .0	11.8
15	21 апреля	17 24 46.65	09 10 36 .10	+13 01 36 .6	11.7
16	21 апреля	17 25 29.85	09 10 36 .33	+13 01 30 .9	11.5
17	21 апреля	17 26 30.55	09 10 36 .49	+13 01 26 .4	11.3
18	21 апреля	17 26 37.25	09 10 36 .67	+13 01 22 .1	11.6
19	21 апреля	17 27 10.08	09 10 36 .84	+13 01 17 .8	11.8
20	21 апреля	17 28 17.47	09 10 37 .17	+13 01 09 .0	11.7
21	21 апреля	17 28 55.48	09 10 37 .37	+13 01 04 .1	11.6
22	22 апреля	17 44 27.74	09 19 11 .98	+09 40 31 .9	12.3
23	22 апреля	17 46 51.17	09 19 12 .80	+09 40 10 .7	12.4
24	22 апреля	17 47 24.86	09 19 12 .99	+09 40 05 .7	11.9
25	22 апреля	17 50 20.25	09 19 14 .01	+09 39 39 .9	11.7
26	22 апреля	17 50 53.08	09 19 14 .19	+09 39 35 .2	11.7
27	22 апреля	17 51 26.78	09 19 14 .38	+09 39 30 .1	11.7
28	22 апреля	17 51 59.67	09 19 14 .58	+09 39 25 .2	11.7
29	22 апреля	17 52 36.77	09 19 14 .79	+09 39 19 .7	11.3
30	22 апреля	17 53 43.29	09 19 15 .19	+09 39 09 .8	11.3
31	22 апреля	17 54 16.99	09 19 15 .37	+09 39 04 .9	11.3
32	23 апреля	18 05 17.95	09 28 43 .43	+05 53 28 .4	12.3
33	23 апреля	18 06 24.48	09 28 43 .86	+05 53 17 .6	12.4
34	23 апреля	18 07 2.496	09 28 44 .11	+05 53 11 .1	12.2
35	23 апреля	18 07 36.19	09 28 44 .32	+05 53 05 .7	11.6
36	23 апреля	18 08 9.024	09 28 44 .54	+05 53 00 .2	11.6
37	23 апреля	18 08 42.72	09 28 44 .75	+05 52 54 .6	11.5
38	23 апреля	18 09 15.55	09 28 44 .97	+05 52 49 .0	11.6
39	23 апреля	18 09 53.57	09 28 45 .22	+05 52 42 .8	11.2
40	23 апреля	18 10 27.26	09 28 45 .43	+05 52 37 .2	11.4

Продолжение табл. 3

№	Дата, 2020	Момент наблюдений (UT)	α	δ	m (зв.вел.)
41	23 апреля	18 11 00.09	09 28 45 .65	+05 52 31 .8	11.2
42	24 апреля	17 43 33.31	09 38 58 .65	+01 46 50 .1	12.3
43	24 апреля	17 44 60.14	09 38 58 .88	+01 46 44 .1	12.3
44	24 апреля	17 45 45.50	09 38 59 .57	+01 46 25 .9	11.7
45	24 апреля	17 46 18.33	09 38 59 .82	+01 46 19 .7	11.9
46	24 апреля	17 46 52.03	09 39 00 .05	+01 46 13 .9	12.6
47	24 апреля	17 47 25.73	09 39 00 .29	+01 46 07 .6	11.7
48	24 апреля	17 47 59.42	09 39 00 .53	+01 46 01 .6	11.7
49	24 апреля	17 48 38.30	09 39 00 .81	+01 45 54 .4	11.3
50	24 апреля	17 49 12.00	09 39 01 .05	+01 45 48 .3	11.1

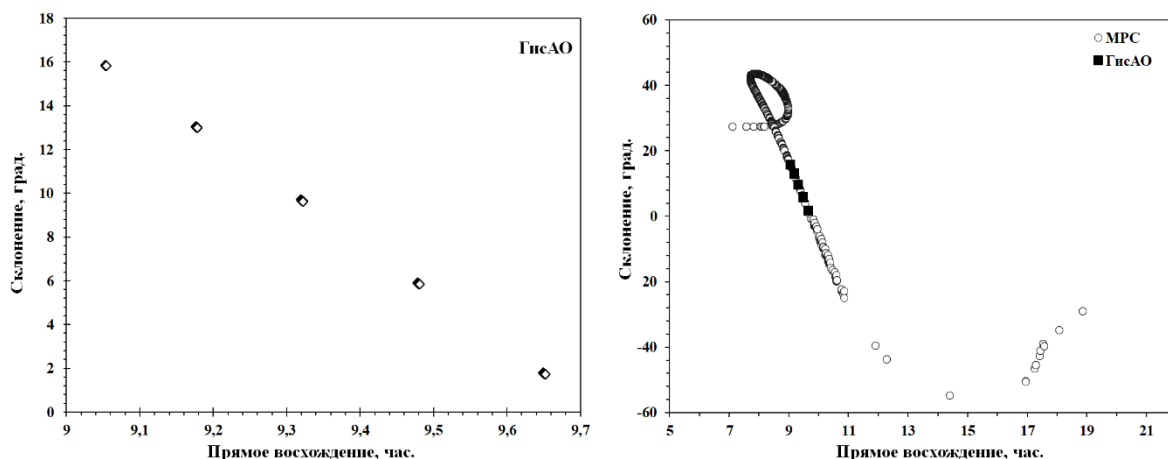


Рис. 2. Видимая траектория ПОА 1998 OR2 по наблюдениям в ГисАО и данным других наблюдений.

Для вычисления орбиты используются координаты, определенные в различные моменты наблюдений. При этом ошибки нахождения координат должны удовлетворять определенным требованиям, а именно не превышать десятой доли секунды дуги. Средние значения отклонений $(O-C)_\alpha$ и $(O-C)_\delta$ для координат α и δ , соответственно, а также их средние квадратичные ошибки σ_α и σ_δ представлены в табл.4, из которой видно, что средняя по всем кадрам ошибка астрометрической редукции не превышает 0.054" и 0.056" для прямого восхождения α и склонения δ , соответственно, что является показателем высокой точности измерений.

Таблица 4

Средние разности $(O-C)$ и их стандартные отклонения по измерениям изображений астероида (52768) 1998 OR2

Дата	$(O-C)_\alpha$	σ_α	$(O-C)_\delta$	σ_δ
20.02833	- 0.012	± 0.026	0.067	± 0.016
21.03897	-0.246	± 0.031	0.150	± 0.019
22.03117	- 0.139	± 0.019	0.119	± 0.017
23.02863	- 0.093	± 0.013	0.128	± 0.019
24.02554	- 0.299	± 0.056	0.286	± 0.054

Для среднего момента наблюдений с использованием 208 измерений и ПП ЭПОС [4] вычислена первоначальная орбита астероида, приведенная в табл. 5. Здесь даны стандартные элементы орбиты в равноденствии 2000.0, а также n – среднее суточное движение, σ – средняя квадратичная ошибка. Для

сравнения в табл. 5 приведена орбита, вычисленная на основе 585 измеренных положений астероида по наблюдениям в различных обсерваториях согласно базе данных MPC [5], и в последнем столбце приведены величины разности между вычисленной нами орбитой и орбитой MPC, обозначенные как χ . Как видно, с учетом разности моментов времени, на которые вычислена орбита, по наблюдениям в ГисАО получена орбита, близкая к орбите MPC.

Таблица 5

Орбита астероида 1998 OR2, вычисленная по наблюдениям в ГисАО, и орбита MPC (J2000.0)

Элементы орбиты	ГисАО [данная работа]	[5]	χ
Кол-во положений, использованное для вычисления орбиты	209	585	-
T	$JD\ 2458955.268$	$JD\ 2458955.293$	-
<i>Эпоха</i>	$JD\ 2458968.5$	$JD\ 2459000.5$	-
e	0.573095 ± 0.000036	0.573084	1.1E-05
a , а.е.	$2.384426 \pm 1.47e-5$	2.384435	-9E-06
q , а.е.	$1.017975 \pm 6.58e-8$	1.017954	2.1E-05
i , град.	5.865420 ± 0.0000170	5.865880	-0.00046
ω , град.	174.566530 ± 0.000014	174.566240	0.00029
Ω , град.	27.015840 ± 0.000013	27.015420	0.00042
n , град./сут.	$0.267667 \pm 2.48e-6$	0.267686	-1.9E-05
σ	0".230	0".440	-

Фотометрия и определение физических свойств ПОА

С целью определения некоторых физических параметров астероида 1998 OR2 по стандартной процедуре и с помощью ПП АПЕКС-II [3] выполнена фотометрическая обработка кадров. Для нахождения видимых звездных величин использовались опорные звезды из каталога APASS, для которых блеск определен с точностью 0.03^m [6]. Средние значения видимых звездных величин объекта, полученные в фильтрах *BVRI*, даны в табл. 6.

Таблица 6

Видимые звездные величины астероида 1998 OR2 по наблюдениям в ГисАО

UT, 2020	20.02833	21.03897	22.03117	23.02863	24.02554
Фильтры					
B	11.77 ± 0.06	11.66 ± 0.06	11.54 ± 0.05	11.44 ± 0.06	11.32 ± 0.04
V	10.94 ± 0.05	10.81 ± 0.04	10.69 ± 0.06	10.58 ± 0.03	10.47 ± 0.06
R	10.46 ± 0.06	10.35 ± 0.04	10.20 ± 0.05	10.13 ± 0.06	9.99 ± 0.05
I	10.03 ± 0.06	9.93 ± 0.03	9.80 ± 0.05	9.72 ± 0.06	9.57 ± 0.05

Абсолютная величина H вычислена по полуэмпирической формуле, учитывающей фазовый угол астероида [7]. Подробно методика изложена в [8].

Найденные таким методом абсолютные звездные величины 1998 OR2 (средние значения за ночь) приведены в табл. 7, где также даны величины показателей цвета *B-V*, *V-R*, *R-I*, *B-R*. Измеренный абсолютный блеск астероида в фильтре *V* находится в диапазоне от $15.99^m \pm 0.06$ до $16.01^m \pm 0.03$, что близко к эфемеридному значению $H=16.04^m$ [2]. В период мониторинга существенных изменений абсолютного блеска не выявлено.

Таблица 7

Абсолютный блеск H и показатели цвета астероида 1998 OR2 по наблюдениям ГисАО в 2020 г.

апрель (UT), 2020 г.	B	V	R	I	B-V	V-R	R-I	B-R
20.02833	16.83 ±0.06	16.00 ±0.05	15.52 ±0.06	15.09 ±0.06	0.83	0.48	0.43	1.31
21.03897	16.84 ±0.06	16.00 ±0.04	15.53 ±0.04	15.11 ±0.03	0.84	0,47	0.42	1.31
22.03117	16.85 ±0.05	15.99 ±0.06	15.51 ±0.05	15.10 ±0.05	0.86	0.48	0.41	1.34
23.02863	16.87 ±0.06	16.01 ±0.03	15.55 ±0.06	15.06 ±0.06	0.86	0.46	0.41	1.32
24.02554	16.85 ±0.04	16.00 ±0.06	15.53 ±0.05	15.10 ±0.05	0.85	0.47	0.43	1.75

Показатель цвета является одной из важных физических величин, позволяющей определить принадлежность астероида к какому-либо таксономическому классу и на этой основе предположить его минералогический состав. Многоцветные наблюдения астероида 1998 OR2 в ГисАО позволили оценить показатели его цвета (табл. 7).

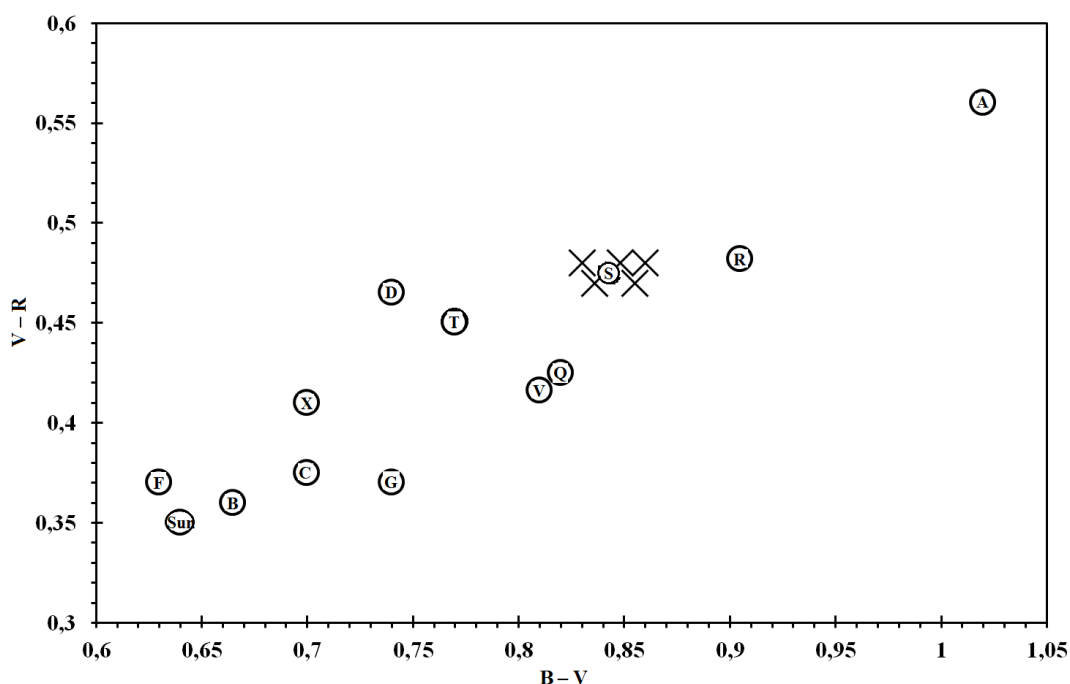


Рис. 3. Зависимость показателей цвета для астероидов различных спектральных классов.

На рис. 3. приведена диаграмма расположения астероидов различных спектральных классов, показанных в кружках по данным Tolen (1989) [9], в соответствии с их показателями цвета $B-V$ и $V-R$. Наши данные для астероида 1998 OR2 нанесены крестиками. Сопоставляя с этой диаграммой полученные в настоящей работе показатели цвета, можно отнести астероид 1998 OR2 к спектральному типу S, металлический состав которых характеризуется содержанием пироксена, оливина, и средним альбедо в диапазоне 0.10-0.30 [10].

Эффективный диаметр астероида D вычислен по известному эмпирическому соотношению, принятому для оценки размеров астероидов [11]. Геометрическое альбедо (в полосе V) 1998 OR2

согласуется со средним альбедо астероидов главного пояса S-типа $p_V=0.174\pm 0.039$ [12]. Используя эту величину альбедо и измерения абсолютного блеска в фильтре V , мы оценили диаметр астероида. Результаты приведены в табл. 8, из которой видно, что оценка диаметра составляет 2.0 ± 0.1 , при этом наблюдения 5 ночей дают близкие величины. В [13-14] приведена оценка диаметра 2.2 км. В последних результатах обзора NEOWISE для астероида 1998 OR2 даны абсолютная звездная величина $H=16.0$ зв.вел., видимое геометрическое альбедо 0.164 ± 0.053 и оценка диаметра 2.51 ± 0.81 км [13-14]. Сравнивая эти данные, можно заключить, что по нашим наблюдениям получена оценка диаметра, близкая к имеющимся данным. Однако требуется дальнейшее уточнение альбедо и размера астероида.

Таблица 8

Оценка диаметра астероида 1998 OR2 по наблюдениям ГисАО в 2020 г.

(UT), 2020 г.	r , а.е.	Δ , а.е.	ph , град.	H_V , зв.вел.	D , км ($p_V=0.174$)
апрель 20.02833	1.019	0.059	73.91	16.00 ± 0.05	2.00 ± 0.07
апрель 21.03897	1.020	0.057	72.46	16.00 ± 0.04	2.00 ± 0.05
апрель 22.03117	1.022	0.053	70.69	15.99 ± 0.06	2.00 ± 0.05
апрель 23.02863	1.023	0.051	68.57	16.01 ± 0.03	2.00 ± 0.08
апрель 24.02554	1.024	0.047	66.10	16.00 ± 0.06	2.00 ± 0.09

З а к л ю ч е н и е

В результате наблюдений потенциально опасного астероида 1998 OR2, выполненных в Гиссарской астрономической обсерватории ИА НАНТ в период его сближения с Землей в апреле 2020 г.:

- определены высокоточные координаты объекта, построена видимая траектория;
- вычислена первоначальная орбита и выявлена ее схожесть с орбитой из базы данных MPC [1];
- измерен видимый блеск в фильтрах $BVRI$, построены кривые блеска по наблюдениям четырех ночей;
- определен абсолютный блеск, по нашим измерениям его величина в фильтре V близка к эфемеридному значению [2];
- выявлено отсутствие нестационарности блеска в пределах ошибок измерений;
- оценены показатели цвета и сделано предположение о принадлежности объекта к астероидам S-типа, характеризующихся металлическим составом;
- средняя оценка диаметра составила 2.0 ± 0.1 км (альбедо 0.174), что согласуется с имеющимися данными по размеру астероида [13-14].

Основные свойства, полученные на основе новых наблюдений, указывают, что, несмотря на сближение астероида с Землей, их величины сохранили стабильность. Необходимы дальнейшие наблюдения астероида 1998 OR2 в периоды сближений с Землей с целью контроля динамических характеристик и уточнения альбедо и размера.

Поступило 24.08.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. The International Astronomical Union – Minor Planet Center. URL: https://www.minorplanetcenter.net/db_search/show_object?object_id=52768 Дата обращения 11.08.2023.
2. JPL Small-Body Database Browser. URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=52768 Дата обращения 11.08.2023.
3. Девяткин А.В., Горшанов Д.Л., Куприянов В.В., Верещагина И.А. Программные пакеты «АПЕКС-I» и «АПЕКС-II» для обработки астрономических ПЗС-наблюдений. – Астрон. Вестник, 2010, № 1, с. 74-87.
4. Львов В.Н., Цекмейстер С.Д. Использование программного пакета ЭПОС для исследования объектов Солнечной системы. – Астрон. Вестник, 2012, т. 46, № 2, с. 190-192.
5. The International Astronomical Union–Minor Planet Center. URL: https://web.archive.org/web/20191215004346/https://www.minorplanetcenter.net/db_search/show_object?object_id/52768. Дата обращения 11.08. 2023.
6. Henden A.A., Templeton M., Terrell D., Smith T.C., Levine S., Welch D. VizieR Online Data Catalog. – AAVSO Photometric All Sky Survey (APASS) DR9, 2016.
7. Penttila A., Shevchenko V.G., Wilkman O., Muinonen K.H. H, G1, G2 photometric phase function extended to low-accuracy data. – Planet. Space Sci., 2016, vol. 123, pp. 117-125.
8. Кохирова Г.И., Буриев А.М., Сафаров С.Н. Определение физических свойств потенциально опасного астероида (163899) 2003 SD220 по наблюдениям в Гиссарской астрономической обсерватории. – ДАН РТ, 2021, т. 64, №7-8, с. 676-681.
9. Tholen D.J. Asteroid Taxonomy from Cluster Analysis of Photometry. Ph.D. Thesis, Univ. of Arizona. 1984, pp. 167.
10. Jewitt D. Color systematics of comets and related bodies. – The Astron. J., 2015, v. 150:201, 18 p.
11. Кохирова Г.И., Буриев А.М., Сафаров С.Н., Сатторзода А.А. Динамика и физические особенности потенциально опасного астероида 2009 ХО по наблюдениям в Гиссарской астрономической обсерватории. – Труды Института астрономии РАН, 2022, т. 7, №2, с. 106-114.
12. Harris A.W. On the Slow Rotation of Asteroids. – Icarus, 2002, vol. 156, №1, pp. 184-190.
13. Ryan E. L., Woodward C. E. Rectified Asteroid Albedos and Diameters from IRAS and MSX Photometry Catalogs. – The Astron. J., 2010, v. 140, Issue 4, pp. 933-943.
14. Adam B., Vishnu R., Juan A. S., Benjamin Sh., Neil P., Bryn B. Physical Characterization of Near-Earth Asteroid (52768) 1998 OR2: Evidence of Shock Darkening/Impact Melt. – The Planetary Science Journal, 2022, vol. 3, №9, 13 p.

Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, С.Н.Сафаров

**МУАЙЯН НАМУДАНИ БАЪЗЕ ХУСУСИЯТҲОИ АСТЕРОИДИ ЭҲТИМОЛАН
ХАТАРНОКИ 1998 OR2 АЗ РУЙИ МУШОҶИДАҲО ДАР ТОҶИКИСТОН**

Институту астрофизикаи

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Мувофиқи мушоҳидаҳои оптикӣ ва гуногунрангии астероиди эҳтимолан хатарноки (52768) 1998 OR2 дар Расадохонаи астрономии Ҳисори Институту астрофизикаи АМИТ дар соли 2020, координатаҳои экваториалии дақиқ муайян карда шуданд, ки дар асоси он мадори астероид ҳисоб карда шуд.

Дурахшони намоён ва мутлаки астероид чен карда шуд ва маълум гашт, ки дар давоми мушоҳида ин хусусиятҳо муътадил мемонанд. Нишондиҳандаҳои рангӣ ба астероидҳои намуди тайфии *S*, ки таркиби металлӣ доранд, мувофиқат мекунанд. Баҳодиҳии диаметр бо маълумотҳои мавҷуда мувофиқанд. Тағйироти ҷиддии хусусиятҳои асосии астероид ҳангоми наздик шуданаш ба Замин муайян карда нашудааст.

Калимаҳои калидӣ: астероид, мушоҳидаҳо, фотометрия, хатти каҷи дурахшонх, диаметр, навъи *S*, нишондоди ранг.

G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, S.N.Safarov

DETERMINATION OF SOME FEATURES OF THE POTENTIALLY HAZARDOUS ASTEROID 1998 OR2 FROM OBSERVATIONS IN TAJIKISTAN

Institute of Astrophysics, National Academy of Sciences of Tajikistan

As a result of multicolor optical observations of the potentially hazardous asteroid (52768) 1998 OR2 at the Hissar Astronomical Observatory of the Institute of Astrophysics of the National Academy of Sciences in 2020, high-precision equatorial coordinates were determined, on the basis of which the orbit of the asteroid was calculated, which turned out to be close to the ephemeris orbit. The apparent and absolute brightness of the asteroid was measured and it was revealed that during the monitoring period these characteristics remained stable. The color indices correspond to asteroids of spectral type *S*, characterized by a metallic composition. Diameter estimates are consistent with available data. Significant changes in the basic properties of the asteroid due to its approach to the Earth have not been established.

Key words: *asteroid, observations, astrometry, orbit, photometry, light curve, color index, S-type, diameter.*

Сведения об авторах:

1. **Кохирова Гулчехра Исроиловна** – доктор физ.-мат. наук, член-корреспондент НАН Таджикистана, Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана, директор, заведующая Отделом межпланетных тел. E-mail: kokhirova2004@mail.ru;
2. **Буриев Анварджон Махмадалиевич** – кандидат физ.-мат. наук, Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана, заведующий отделом физики комет и астероидов, ведущий научный сотрудник ОФКА. E-mail: anvar10@mail.ru;
3. **Сафаров Сангин Ниёзович** – Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана, младший научный сотрудник отдела физики комет и астероидов; E-mail: safarov.sangin@mail.ru.

УДК 523.682

Специальность: 01.03.01 – Физика космоса и астрономия

М.Нарзиев, Х.Ф.Худжаназаров, Т.Й.Йопек***ЯНВАРСКИЕ МЕТЕОРНЫЕ ПОТОКИ И АССОЦИАЦИИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ В ГИСАО***Национальная академия наук Таджикистана,**Институт астрофизики НАН Таджикистана,***Институт астрономической обсерватории, физический факультет,**Университет Адама Мицкевича, Познань, Польша**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Г.И.Кохировой 17.08.2023 г.)*

На основе данных радиантов, скоростей и элементов орбит 1767 метеоров, измеренных пеленгационно-временным радиометодом, идентифицированы 99 групп с метеорными потоками и ассоциациями, где для каждого приводятся данные о физических и кинематических параметрах.

Ключевые слова: *метеорные потоки, метеорные ассоциации, критерий схожести орбит, метеороид, радиант, элементы орбиты.*

Малые потоки и ассоциации метеороидов относятся к малоизученной составной части метеорного вещества. Вопрос выявления новых малых метеорных потоков и ассоциаций был и остаётся одним из самых перспективных направлений исследования метеорной астрономии.

Исследование комплексных физико-кинематических и динамических характеристик потоков и ассоциаций метеороидов представляет интерес не только в метеорной астрономии, но и в области космонавтики и космогонии тел Солнечной системы, обеспечении безопасности полетов космических миссий, предотвращения космических угроз Земле телами больших размеров и т.д.

Физические и кинематические характеристики метеороидов, принадлежащих главным ежегодным метеорным потокам, были неоднократно изучены на основании данных оптических наблюдений. Ввиду статистической недостаточности данных оптических наблюдений, которые отчасти связаны с нестабильностью погодных условий, временем года и т.д., физико-кинематические характеристики метеороидов в малых потоках и ассоциациях (особенно дневных) изучены недостаточно.

Единственным способом, который позволяет исследовать метеорные потоки и ассоциации, время действия которых приходится на дневное время суток, является радиолокационный метод. Следовательно, начиная с 60-х гг. прошлого века представляло интерес изучение потоков и ассоциаций метеороидов по результатам базисных радиолокационных наблюдений метеоров. При этом на основании результатов измерения радиантов, скоростей и орбит метеоров по результатам базисных радиолокационных наблюдений с трех приёмных станций в Оттаве, Джодрель Бэнке, Обнинске и Харькове [1-4] выявлены десятки потоков и ассоциаций метеороидов. Причем радианты, скорости и орбиты

Адрес для корреспонденции: Худжаназаров Хабибджон Файзалиевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/5, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: habibjon_2012@mail.ru

радиометеоров были измерены импульсно-дифракционным методом [5], который был использован для редукции 15-25% метеоров. Это приводит к потере большого количества наблюдательного материала. Следовательно, представляет интерес исследование метеорных потоков и ассоциаций на основе пеленгационно-временного радиометода, так как данный метод как по точности измерения в 1.7 раза, так и по чувствительности в три раза превосходит импульсно-дифракционный метод.

Настоящая работа является продолжением исследования, начатого в [6] и посвящается исследованию малых потоков и ассоциаций метеороидов за январь месяц 1970 года. Напомним, что в январе непрерывное круглосуточное наблюдение метеоров проводилось в два этапа. Первый этап охватывал с 1 по 16 января (включая период действия ежегодного метеорного потока Квадрантиды). Основные характеристики наблюдательной аппаратуры Мир-2, методика наблюдений, обработка данных для измерения радиантов, скоростей, расчет элементов орбит и данные атмосферной траектории метеоров приведены в [6].

Идентификация метеороидов потоков и ассоциаций в начале проводилась графическим методом, то есть путем построения двумерного распределения по координатам радиантов и дальше фильтрации по скоростям, и впоследствии с применением D_{SH} критерия Саутворта-Хокинса и D_H критерия Йопека [7,8]. Результаты двумерного распределения метеоров по прямому восхождению и склонению приведены на рис. 1.

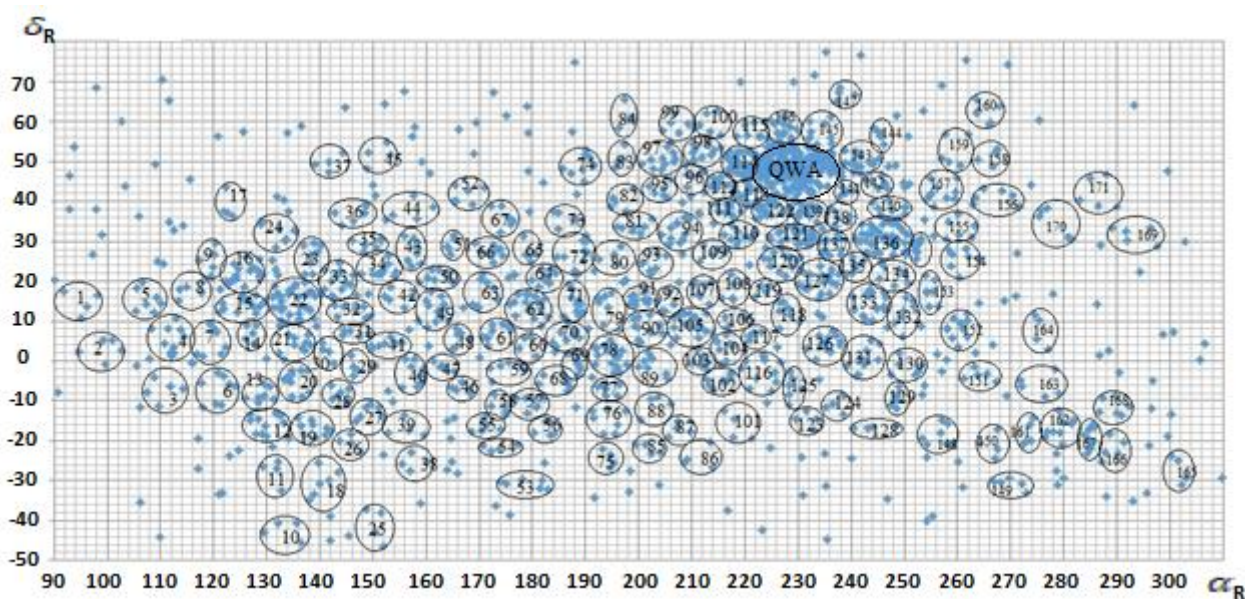


Рис. 1. Двухмерное распределение метеоров по прямому восхождению и склонению для периода наблюдений с 1 по 16 января

В гистограмме четко выделяется концентрация радиантов Квадрантиды (QWA), где форма распределения похожа на эллипсоид. На рис. 1, наряду с областью радиантов метеороидов потока Квадрантиды, наблюдается еще большее количество скоплений радиантов. Общее количество выделяемых скоплений радиантов графическим методом составляет 172 группы. Каждое скопление радиантов метеоров отличается друг от друга по форме и диаметрам.

Окончательный отбор метеороидов, принадлежащих к заданному потоку или ассоциации, осуществлялся с применением критериев Саутворта-Хокинса [7] и Йопека [8] по известным формулам:

$$D_{SH}^2 = (e_1 - e_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 + \left(2 \sin \frac{I_{21}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right)^2 \left(2 \sin \frac{\Pi_{21}}{2}\right)^2,$$

$$D_H^2 = (e_1 - e_2)^2 + \left(\frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2}\right)^2 + \left(2 \sin \frac{I_{21}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right)^2 \left(2 \sin \frac{\Pi_{21}}{2}\right)^2.$$

Обозначение параметров в формулах также как в работах [7,8]. Для окончательного подтверждения принадлежности метеоров к той или иной группе нами проводился расчет критериев Саутворта-Хокинса [7] и Йопека [8]. Принято считать орбиты близкими, когда величины критериев удовлетворяют условия $D_{SH} \leq 0.2$ и $D_H \leq 0.25$ [7,8]. Некоторые члены групп, у которых критерий близости орбит превышает предельное значение $D_H=0.25$, могут быть ассоциативно связанными с группой, согласно принятому критерию для ассоциаций $0.2 < D_H < 0.28$ [8]. В результате фильтрации по соответствующим критериям из 172-х скоплений, выделенных из спорадического фона, только 99 групп удовлетворяют указанным пределам критериев, и они отнесены к каталогу малых потоков и ассоциаций.

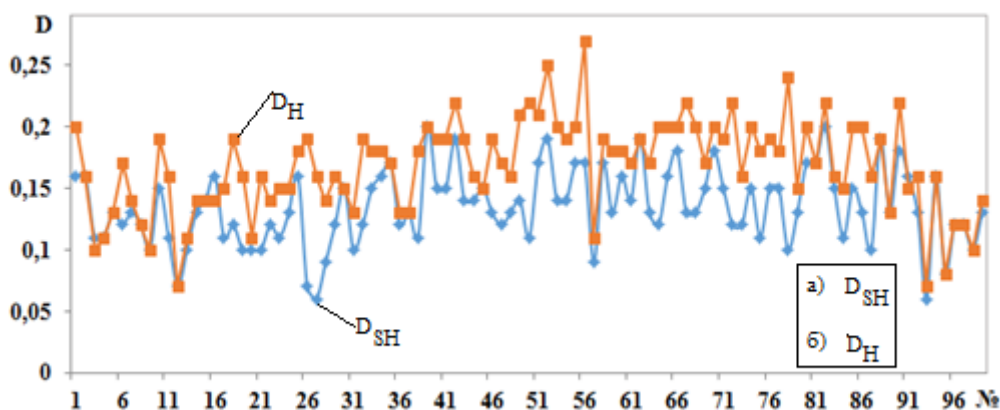


Рис. 2. Результаты вычисления D-критерия:
 а) Саутворта-Хокинса; б) Йопека для метеороидов потоков и ассоциаций.

На рис. 2 показаны результаты расчетов D_{SH} и D_H для каждого метеорного потока и ассоциации. Из рисунка очевидно, что средняя величина D_{SH} для метеороидов разных скоплений сосредоточена в интервале от 0.07 до 0.2 и для D_H в интервале от 0.07 до 0.27. Результаты расчетов по обоим D критериям показывают достоверность идентификации метеороидов с заданными потоками и ассоциациями соответственно.

Массы и плотности индивидуальных метеороидов вычислены по измеренным длительностям радиоэха по формулам, приведенным в работе [9], средние значения приведены в табл. 1. Согласно табл. 1, средние значения масс метеороидов в потоках и ассоциациях находятся в интервале $5 \cdot 10^{-4} \div 0.17$ г. У 69% потоков и ассоциаций среднее значение масс сосредоточено в диапазоне от 0.001 до 0.01 г. Для 18% потоков и ассоциаций среднее значение масс находится в интервале от 0.1 до 0.16 г, а 13% метеороидов имеют среднее значение масс менее 0.001 г.

Среднее значение плотности метеороидов потоков и ассоциаций, находится в интервале от 0.33 до 6.41 г/см³. Причем у 68% метеорных потоков и ассоциаций среднее значение плотности метеороидов сосредоточено в диапазоне от 1 до 4 г/см³. У 21% потоков и ассоциаций среднее значение

плотности метеороидов находится в пределах от 4 до 7 г/см³, а 11% метеороидов из потоков и ассоциаций имеют среднее значение плотности менее 1 г/см³.

Результаты обработки данных потоков и ассоциаций метеороидов за январь 1970 г. приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты идентификации метеорных потоков и ассоциаций в первой половине января 1970 г.

№	1(0)	2(1)	3(2)	4(4)	5(5)	6(6)	7(7)	8(8)	9(9)
Поток и ассоц.	QWA	A	A	A	A	A	A	A	NCC
λ_{\odot} , [град]	283.4±0.4	288.0±2.8	287.6±4.3	292.5±3.5	288.4±5.0	290.3±5.6	291.3±3.6	291.5±1.9	291.3±1.9
α_R , [град]	229.9±3.7	95.3±2.3	99.1±2.8	112.9±0.9	107.9±1.7	120.9±1.6	118.8±2.3	115.0±1.8	119.2±1.2
δ_R , [град]	49.4±2.6	14.6±2.6	2.3±2.2	4.6±3.4	14.9±2.5	-7.6±3.6	3.0±3.4	17.2±1.4	24.2±2.0
V_{∞} , [км/с]	42	22	18.6	23.5	24.3	32.8	29.5	26.1	30
V_g , [км/с]	40.4±1.9	18.9±2.6	14.7±3.3	20.6±2.8	21.5±3.2	30.9±1.6	27.2±3.4	23.5±4.2	27.8±3.8
V_h , [км/с]	38.3±1.6	39.2±2.5	35.3±1.4	36.2±1.6	37.5±2.3	37.9±2.1	37.6±2.2	37.7±2.5	39.2±1.7
D_{SH}	0.12	0.16	0.11	0.11	0.13	0.12	0.13	0.12	0.1
D_H	0.18	0.16	0.1	0.11	0.13	0.17	0.14	0.12	0.1
e	0.633	0.783	0.517	0.663	0.734	0.833	0.8	0.763	0.856
q, [а.е.]	0.976	0.739	0.761	0.61	0.599	0.447	0.46	0.537	0.455
i, [град]	71	4.7	9.5	11.7	5.3	31.3	17.3	3.6	3.1
Ω , [град]	283.4	108	107.5	112.5	108.4	110.3	111.3	111.5	291.4
ω , [град]	170.6	65.3	70.2	87.7	86.4	102.3	101.8	93.2	279.3
N	120	4	4	7	6	6	8	4	4
lg M, [Г]	-2.217	-1.205	-0.776	-1.063	-1.711	-2.153	-1.941	-1.333	-2.141
δ , [г/см ³]	2.8	0.91	0.58	0.33	0.75	2.58	2.13	0.36	1.62

Продолжение таблицы

№	10(12)	11(13)	12(14)	13(15)	14(16)	15(17)	16(18)	17(19)	18(20)
Поток и ассоц.	A	АНУ	A	SCC	A	A	A	A	A
λ_{\odot} , [град]	288.7±4.6	286.2±0.9	294.4±0.8	293.6±2.2	291.4±4.9	290.5±3.0	289.6±6.1	292.1±5.1	286.6±3.1
α_R , [град]	130.6±1.8	128.6±1.7	127.2±0.7	125.4±2.6	126.6±3.1	122.6±0.6	141.1±1.7	137.9±1.1	135.5±1.4
δ_R , [град]	-15.8±2.1	-7.6±1.6	6.6±1.7	14.2±1.6	21.6±1.9	38.6±2.9	-30.4±2.0	-17.2±1.8	-2.9±0.9
V_{∞} , [км/с]	37.4	41.2	25.9	31.7	29.8	27.5	44.6	43	44.8
V_g , [км/с]	35.7±2.8	39.6±3.5	23.3±2.1	29.7±3.0	27.6±4.6	25.0±4.4	43.1±1.1	41.6±1.4	43.4±2.5
V_h , [км/с]	36.0±2.4	38.8±2.6	33.7±1.0	38.2±2.1	36.5±3.1	37.5±2.8	37.4±1.7	37.9±2.5	38.4±3.3
D_{SH}	0.15	0.11	0.07	0.1	0.13	0.14	0.16	0.11	0.12
D_H	0.19	0.16	0.07	0.11	0.14	0.14	0.14	0.15	0.19
e	0.794	0.909	0.684	0.861	0.804	0.764	0.728	0.865	0.952
q, [а.е.]	0.38	0.28	0.42	0.367	0.367	0.522	0.58	0.347	0.155
i, [град]	51.1	50.6	11.1	6.2	3.3	15.3	75.6	64.5	59.1
Ω , [град]	108.7	106.2	114.4	113.5	291.8	290.5	109.6	112.1	106.6
ω , [град]	113.5	120.7	114.4	111.4	294.2	275.4	88.6	113.9	137.4
N	9	4	4	12	16	4	4	4	5
lg M, [Г]	-2.197	-2.372	-1.655	-2.288	-1.873	-1.718	-2.043	-2.051	-2.516
δ , [г/см ³]	2.28	3.29	0.88	2.01	1.31	1.17	2.55	1.6	2.83

Продолжение таблицы

№	19(21)	20(22a)	21(226)	22(23)	23(24)	24(26)	25(28)	26(31)	27(32)
Поток и ассоц.	A	A	A	SNC	A	A	A	A	A
λ_{\odot} , [град]	292.4±4.2	291.7±3.9	290.7±3.6	293.5±1.9	289.3±5.1	294.6±0.8	294.2±2.1	294.2±2.2	289.6±5.1
α_R , [град]	136.0±2.0	133.9±1.9	135.6±2.7	138.5±1.1	133.1±2.4	145.8±1.4	144.2±1.2	146.6±1.8	144.8±2.2
δ_R , [град]	4.5±1.5	14.5±3.5	13.8±2.6	26.8±2.6	32.6±1.3	-20.4±1.7	-8.7±1.2	7.0±0.5	13.1±1.1
V_{∞} , [км/с]	31.7	28.2	37.6	37.1	31.2	44.2	43	40.6	31.8
V_g , [км/с]	29.6±3.1	25.8±3.8	35.9±1.6	35.3±4.0	29.1±3.1	42.7±3.9	41.5±3.3	39.0±2.7	29.7±2.1
V_h , [км/с]	32.6±2.4	32.4±2.5	36.7±2.0	38.4±2.3	35.5±2.2	35.9±2.8	35.9±2.7	34.3±1.8	28.6±3.7
D_{SH}	0.1	0.1	0.1	0.12	0.11	0.13	0.16	0.07	0.06
D_H	0.16	0.11	0.16	0.14	0.15	0.15	0.18	0.19	0.16
e	0.815	0.754	0.927	0.908	0.804	0.81	0.902	0.954	0.873
q, [a.e.]	0.226	0.291	0.154	0.228	0.329	0.335	0.176	0.064	0.123
i, [град]	18.6	3.9	7.2	18.6	18.5	74.3	62.4	24.7	2.5
Ω , [град]	112.4	111.7	110.7	293.5	289.4	114.6	114.2	114.2	109.5
ω , [град]	136.4	130.5	139.7	308	300.2	118.9	137.4	156.6	152.5
N	7	15	12	7	5	4	4	4	4
lg M, [Г]	-2.444	-1.951	-2.285	-2.405	-1.94	-2.54	-3.124	-2.424	-2.217
δ , [г/см ³]	3.34	1.04	1.92	1.73	1.05	6.28	6.25	2.59	2.94

Продолжение таблицы

№	28(33)	29(34)	30(37)	31(44)	32(46)	33(49)	34(56)	35(61)	36(62a)
Поток и ассоц.	A	A	A	A	A	A	A	A	A
λ_{\odot} , [град]	294.2±1.8	292.3±4.5	287.3±5.5	292.9±2.3	291.1±2.9	289.4±4.0	291.8±3.5	287.4±4.3	285.3±2.1
α_R , [град]	143.2±2.1	152.3±1.7	141.7±1.9	156.5±3.6	166.4±1.2	162.4±1.6	182.5±1.3	173.7±2.1	178.4±2.1
δ_R , [град]	18.2±2.1	22.0±0.7	49.7±1.8	36.6±1.3	-6.6±0.8	12.1±2.3	-16.7±1.6	7.0±1.3	15.1±2.1
V_{∞} , [км/с]	37.8	40.9	34.5	35.5	60.1	55.8	60	62.9	56.7
V_g , [км/с]	36.1±2.9	39.4±4.8	32.6±2.7	33.7±3.4	59.0±3.0	54.6±2.4	58.9±1.1	61.9±2.6	55.6±1.1
V_h , [км/с]	35.8±1.9	34.0±4.9	37.7±1.6	33.1±3.6	37.4±3.2	37.2±3.3	32.0±1.5	37.3±3.8	31.5±2.0
D_{SH}	0.09	0.12	0.15	0.1	0.12	0.15	0.16	0.17	0.12
D_H	0.14	0.16	0.15	0.13	0.19	0.18	0.18	0.17	0.13
e	0.921	0.949	0.802	0.805	0.874	0.961	0.416	0.819	0.673
q, [a.e.]	0.131	0.071	0.461	0.251	0.301	0.081	0.664	0.389	0.357
i, [град]	8	38	40.3	43.9	148.2	160.2	150	170.3	147.1
Ω , [град]	294.3	292.3	287.3	292.9	111.1	289.4	111.8	287.4	285.3
ω , [град]	324.1	335.4	281.5	312.9	120.2	331	98.1	291.2	306
N	9	5	4	4	4	4	4	4	5
lg M, [Г]	-2.874	-2.278	-2.71	-2.739	-2.122	-3.189	-2.349	-2.491	-2.695
δ , [г/см ³]	4.27	3.46	2.92	3.36	3.63	5.77	3.31	2.04	2.45

Продолжение таблицы

№	37(626)	38(64)	39(68)	40(70)	41(71)	42(72)	43(74)	44(78)	45(90)
Поток и ассоц.	A	A	A	A	A	A	A	ZVD	A
λ_{\odot} , [град]	283.0±0.9	292.9±2.0	290.2±2.9	289.7±4.4	293.6±1.7	291.6±5.2	288.2±5.8	291.3±4.3	293.5±1.9
α_R , [град]	179.1±2.2	183.2±0.8	185.1±2.3	187.1±2.2	187.6±0.8	187.1±2.5	189.9±1.5	193.9±1.8	200.3±1.2
δ_R , [град]	12.1±2.6	21.2±1.4	-5.0±1.2	6.9±1.8	16.1±3.0	25.9±2.9	49.3±1.8	1.6±1.9	8.5±2.4
V_{∞} , [км/с]	66.2	59.2	62.8	67.5	57.7	58.2	36.7	69	61.7
V_g , [км/с]	65.2±1.1	58.2±3.0	61.8±4.3	66.5±1.5	56.6±2.4	57.1±1.8	35.0±2.8	68.1±1.7	60.7±0.9
V_h , [км/с]	38.7±1.5	37.6±3.0	33.2±4.7	39.2±1.8	33.6±0.9	37.5±3.0	31.4±2.2	39.0±1.7	33.3±1.7
D_{SH}	0.13	0.11	0.2	0.15	0.15	0.19	0.14	0.14	0.15
D_H	0.13	0.18	0.2	0.19	0.19	0.22	0.19	0.16	0.15
e	0.773	0.827	0.55	0.781	0.659	0.758	0.455	0.72	0.324
q, [a.e.]	0.662	0.433	0.627	0.727	0.451	0.554	0.599	0.88	0.851
i, [град]	158.1	130.2	174.7	162.1	137.6	121.4	66.4	167.2	148.9
Ω , [град]	283	292.9	110.3	289.7	293.6	291.6	288.2	291.3	293.5
ω , [град]	255.5	284.8	97.7	243.3	291.3	272.1	286.5	217.3	245.3
N	4	5	4	5	4	4	5	8	4
lg M, [Г]	-2.851	-3.06	-2.713	-2.008	-2.936	-3.315	-1.711	-2.602	-2.874
δ , [г/см ³]	4.48	3.23	2.92	1.23	2.32	6.41	1.07	2.83	5.37

Продолжение таблицы

№	46(91)	47(94)	48(97)	49(98)	50(99)	51(100)	52(104)	53(105a)	54(1056)
Поток и ассоц.	A	A	A	A	A	A	A	A	A
λ_{\odot} , [град]	287.8±4.4	291.9±4.5	286.2±4.9	283.4±0.2	283.5±0.0	289.3±5.8	291.3±3.5	288.5±4.7	291.3±4.1
α_R , [град]	199.9±1.6	208.0±1.2	204.5±1.3	211.8±1.6	207.4±1.2	212.6±1.9	215.9±0.9	209.5±2.5	210.4±2.1
δ_R , [град]	15.6±1.3	34.4±1.6	49.8±1.8	52.6±1.8	59.6±1.7	59.0±2.0	4.7±1.3	9.6±1.8	8.3±1.9
V_{∞} , [км/с]	67.7	56.3	41.5	39.1	33.6	33.5	63.3	50.9	68.3
V_g , [км/с]	66.8±1.3	55.2±1.7	39.9±1.7	37.4±2.9	31.7±3.3	31.5±2.4	62.3±2.9	49.6±2.1	67.2±1.7
V_h , [км/с]	40.7±1.5	39.3±1.0	34.5±1.1	34.6±2.1	33.9±1.5	34.6±1.9	35.7±2.8	24.1±1.4	40.2±2.1
D_{SH}	0.13	0.12	0.13	0.14	0.11	0.17	0.19	0.14	0.14
D_H	0.19	0.17	0.16	0.21	0.22	0.21	0.25	0.2	0.19
e	0.847	0.73	0.4	0.365	0.353	0.381	0.512	0.412	0.804
q, [a.e.]	0.947	0.927	0.869	0.934	0.883	0.904	0.828	0.431	0.958
i, [град]	141	104.6	75.3	69.7	58	56.8	145.3	132.7	145.9
Ω , [град]	287.8	291.9	286.2	283.4	283.5	289.3	291.3	288.5	291.2
ω , [град]	199.9	208.8	234.1	218.3	234.2	226.7	121.8	15.2	163.1
N	4	5	4	6	4	4	4	5	4
lg M, [Г]	-2.916	-2.785	-2.409	-1.825	-2.589	-2.027	-2.601	-2.84	-2.793
δ , [г/см ³]	4.46	3.28	2.47	1.9	4.31	2.69	2.86	3.99	3.69

Продолжение таблицы

№	55(109)	56(111)	57(112)	58(113)	59(114)	60(116)	61(118)	62(120)	63(121a)
Поток и ассоц.	A	A	LBO	A	A	A	A	A	A
λ_{\odot} , [град]	292.5±1.8	289.2±5.6	293.6±1.6	288.5±5.1	283.5±0.2	289.9±4.0	289.2±4.0	287.5±4.5	289.4±5.1
α_R , [град]	214.6±2.1	217.2±0.4	215.3±0.7	221.2±1.6	218.9±1.7	222.2±2.3	228.0±1.4	227.0±1.6	230.2±2.4
δ_R , [град]	26.7±1.1	38.5±1.1	44.7±0.7	42.5±0.9	49.4±2.1	-2.1±2.5	12.4±1.6	22.7±1.1	31.6±1.6
V_{∞} , [км/с]	47.7	51.5	43.7	29	40	59.4	54.4	54.4	40
V_g , [км/с]	46.3±3.6	50.3±2.5	42.2±1.3	26.8±3.0	38.4±3.1	58.3±2.2	53.2±1.6	53.2±1.4	38.5±1.5
V_h , [км/с]	29.2±3.5	38.5±1.5	35.3±1.2	26.5±1.2	34.8±1.7	33.4±2.3	33.9±0.9	37.1±2.2	30.0±0.6
D_{SH}	0.17	0.17	0.09	0.17	0.13	0.16	0.14	0.19	0.13
D_H	0.2	0.27	0.11	0.19	0.18	0.18	0.17	0.19	0.17
e	0.231	0.645	0.41	0.231	0.352	0.636	0.572	0.606	0.246
q, [a.e.]	0.761	0.972	0.934	0.624	0.976	0.473	0.58	0.806	0.74
i, [град]	102	93.2	79.7	55.5	71.8	149	115.9	105	79
Ω , [град]	292.5	289.2	293.6	288.5	283.5	289.9	289.2	287.5	289.4
ω , [град]	11.6	185.5	214.3	12.3	192.6	69	82.9	121.5	75.8
N	4	4	4	4	19	5	5	4	6
lg M, [Г]	-2.74	-2.384	-2.558	-1.409	-1.952	-2.943	-2.492	-2.507	-2.506
δ , [г/см ³]	3.53	3.17	1.93	1.18	1.77	3.82	1.69	2.71	2.2

Продолжение таблицы

№	64(121b)	65(122a)	66(122b)	67(126)	68(127)	69(131a)	70(131b)	71(133)	72(134)
Поток и ассоц.	A	A	A	A	A	A	A	A	A
λ_{\odot} , [град]	291.5±3.0	294.2±1.9	294.3±2.1	289.0±3.8	290.5±4.2	288.8±4.1	290.2±5.3	290.1±4.3	293.1±1.5
α_R , [град]	231.0±1.7	224.4±1.7	224.9±1.9	236.1±0.7	235.1±1.9	242.0±2.3	242.6±1.4	244.1±2.0	247.7±2.0
δ_R , [град]	31.4±1.4	39.7±1.4	38.5±1.3	5.5±1.5	20.5±2.1	3.9±2.0	-0.9±1.6	14.0±2.2	22.4±1.2
V_{∞} , [км/с]	47.3	41.1	51	44.7	42.9	37.3	48.8	44	46
V_g , [км/с]	45.9±2.3	39.5±3.0	49.7±2.0	43.2±3.7	41.4±2.0	35.6±1.1	47.5±2.6	42.6±2.9	44.7±2.7
V_h , [км/с]	35.1±1.6	32.4±2.7	39.4±2.3	28.4±3.7	29.8±1.4	26.3±2.6	33.5±3.3	33.0±1.7	37.0±1.9
D_{SH}	0.12	0.16	0.18	0.13	0.13	0.15	0.18	0.15	0.12
D_H	0.2	0.2	0.2	0.22	0.2	0.17	0.2	0.19	0.22
e	0.432	0.21	0.723	0.78	0.484	0.811	0.881	0.688	0.707
q, [a.e.]	0.887	0.949	0.982	0.206	0.505	0.154	0.162	0.394	0.625
i, [град]	88.9	78	90.1	97	86.8	68.6	102.5	82.4	81
Ω , [град]	291.5	294.2	294.3	289	290.5	288.8	290.2	290.1	293.1
ω , [град]	132.6	186.4	177.5	35.2	59.6	27.2	37.8	61.4	96.3
N	8	10	4	5	9	4	4	9	4
lg M, [Г]	-2.662	-2.663	-2.726	-2.685	-2.506	-2.12	-2.911	-2.738	-2.302
δ , [г/см ³]	2.57	2.06	3.66	2.18	3.54	0.95	6.35	3.35	1.04

Продолжение таблицы

№	73(135)	74(136)	75(137a)	76(137b)	77(138)	78(139a)	79(139b)	80(142)	81(143)
Поток и ассоц.	A	ХСВ	A	A	A	A	A	A	A
λ_{\odot} , [град]	292.3±4.5	292.3±3.3	288.9±4.7	291.8±4.8	291.1±5.4	285.1±3.2	291.4±3.6	288.7±4.9	286.2±4.6
α_R , [град]	240.7±1.1	247.1±3.3	235.7±1.0	236.9±1.4	237.8±1.3	232.0±0.5	231.8±1.5	244.6±1.5	239.6±3.0
δ_R , [град]	23.3±1.5	30.6±2.7	29.0±2.2	28.7±1.6	36.1±1.5	37.7±1.0	37.5±0.8	44.3±1.0	49.6±1.9
V_{∞} , [км/с]	43.2	44.8	34.6	41.6	42.2	39.9	46.4	40.5	39.6
V_g , [км/с]	41.7±1.6	43.4±2.9	32.7±1.4	40.1±2.3	40.7±1.8	38.2±2.1	45.0±1.4	39.0±3.2	37.9±2.9
V_h , [км/с]	32.6±1.8	38.4±1.8	27.8±1.2	32.0±1.7	35.3±1.5	33.1±1.2	37.0±1.5	39.0±2.1	38.8±1.8
D_{SH}	0.12	0.15	0.11	0.15	0.15	0.1	0.13	0.17	0.17
D_H	0.16	0.2	0.18	0.19	0.18	0.24	0.15	0.2	0.17
e	0.499	0.711	0.375	0.37	0.441	0.311	0.542	0.711	0.678
q, [a.e.]	0.602	0.782	0.539	0.715	0.882	0.865	0.946	0.931	0.967
i, [град]	82.2	76.3	66.9	79.4	75.8	73.6	83.1	66.4	65
Ω , [град]	292.3	292.3	288.9	291.8	291.1	285.1	291.4	288.7	286.2
ω , [град]	79.4	120.3	47.1	87.3	132.3	118.9	153.2	150.8	164.3
N	4	36	5	4	6	4	7	4	21
lg M, [Г]	-2.78	-2.492	-1.962	-2.449	-2.346	-2.377	-2.672	-2.446	-2.311
δ , [г/см ³]	3.13	3.31	2.66	2.66	2.34	2.23	2.24	4.99	2.56

Продолжение таблицы

№	82(144)	83 (145-146)	84(148)	85(150)	86(152)	87(153)	88(154)	89(156)	90(157)
Поток и ассоц.	A	A	A	A	A	A	A	A	A
λ_{\odot} , [град]	289.5±6.2	286.7±5.0	291.5±3.8	285.9±2.5	288.8±6.1	293.9±1.0	291.5±4.0	289.3±4.6	290.0±5.1
α_R , [град]	247.3±2.6	230.0±3.6	256.9±2.2	266.6±1.4	260.2±1.7	255.3±0.8	259.9±1.2	267.4±3.6	257.1±2.2
δ_R , [град]	58.0±2.2	57.0±1.8	-18.5±2.0	-21.1±2.6	7.6±1.8	16.2±2.8	25.9±2.9	40.6±1.4	43.1±1.9
V_{∞} , [км/с]	27.2	38.7	31.6	30.5	36.7	49.2	35.3	35	32.8
V_g , [км/с]	24.8±3.6	37.0±2.2	29.5±4.4	28.3±6.6	35.0±2.0	47.9±1.9	33.5±5.2	33.1±0.6	30.8±3.2
V_h , [км/с]	34.7±2.4	38.9±1.6	28.6±3.8	34.4±3.0	35.1±3.5	41.2±1.1	35.8±2.3	40.7±1.4	36.7±2.3
D_{SH}	0.2	0.15	0.11	0.15	0.13	0.1	0.19	0.13	0.18
D_H	0.22	0.16	0.15	0.2	0.2	0.16	0.19	0.13	0.22
e	0.339	0.68	0.862	0.788	0.801	0.944	0.62	0.86	0.551
q, [a.e.]	0.98	0.978	0.125	0.28	0.339	0.521	0.638	0.87	0.888
i, [град]	44	63.2	9.9	3.2	49.4	80.1	55.1	50.7	52.1
Ω , [град]	289.5	286.7	291.5	286	288.8	293.9	291.5	289.3	290
ω , [град]	172.3	187	26.9	50.7	60.2	91.7	93.8	138.5	135.2
N	4	19	4	4	4	4	4	5	7
lg M, [Г]	-1.612	-2.353	-1.557	-1.539	-2.263	-2.932	-2.597	-1.859	-2.014
δ , [г/см ³]	2.48	3.56	0.78	1.36	4.09	4.03	2.73	1.72	1.67

Продолжение таблицы

№	91(160)	92(161)	93(162)	94(164)	95(166)	96(167)	97(168)	98(170)	99(171)
Поток и ассоц.	A	A	A	A	A	A	A	A	A
λ_{\odot} , [град]	288.0±5.4	290.4±3.2	289.2±1.6	290.4±3.3	286.3±2.1	290.3±3.5	288.2±3.2	293.0±1.6	292.0±4.6
α_R , [град]	265.0±1.7	273.4±0.7	279.3±1.8	275.5±1.1	289.2±1.7	284.8±0.6	289.9±1.9	278.4±2.9	286.5±2.4
δ_R , [град]	62.7±2.1	-18.2±2.6	-16.8±2.5	7.5±3.5	-22.9±1.7	-19.7±2.3	-11.9±1.8	33.9±2.3	42.0±3.5
V_{∞} , [км/с]	28.5	31	32.2	31.8	21.4	26.7	28.6	28.1	20.4
V_g , [км/с]	26.2±2.6	28.9±5.4	30.2±1.1	29.7±4.6	18.2±2.7	24.2±3.9	26.3±1.5	25.8±2.4	16.9±3.1
V_h , [км/с]	39.0±1.9	35.6±3.5	38.9±1.2	38.0±3.0	35.8±1.3	36.8±3.3	40.7±2.4	37.9±0.9	35.5±1.6
D_{SH}	0.16	0.13	0.06	0.16	0.08	0.12	0.12	0.1	0.13
D_H	0.15	0.16	0.07	0.16	0.08	0.12	0.12	0.1	0.14
e	0.692	0.814	0.88	0.791	0.624	0.756	0.918	0.664	0.449
q, [а.е.]	0.981	0.299	0.37	0.499	0.635	0.478	0.562	0.818	0.912
i, [град]	42.1	6.9	7.6	31.9	0.9	2.6	8.5	37.8	25.9
Ω , [град]	288	290.4	289.3	290.4	106	290.4	288.3	293	292
ω , [град]	175.1	55.7	70.4	82.7	274.6	78.3	95.3	125.2	139.1
N	5	5	8	4	4	7	5	4	5
lg M, [г]	-1.531	-1.698	-1.875	-1.811	-0.839	-1.146	-1.748	-2.406	-0.967
δ , [г/см ³]	1.18	1.4	1.51	2.32	0.49	0.62	2.59	3.05	0.64

Здесь в первой строке № – порядковый номер, во второй – наименование потока или ассоциации (A), в третьей – средние значения долготы Солнца, в четвертой – α_R – прямое восхождение радианта, в пятой – δ_R – склонение, в шестой, седьмой и восьмой строках даны внеатмосферные V_{∞} , геоцентрические V_g и гелиоцентрические V_h значения скорости, в девятой и десятой – значения параметра D_{SH} и D_H , в одиннадцатой – значения эксцентриситета e, в двенадцатой – перигелийное расстояние q в а.е, в тринадцатой i – наклон орбиты к эклиптике [в град.], в четырнадцатой Ω – долгота восходящего узла [в град.], в пятнадцатой ω – аргумент перигелия [в град.], в шестнадцатой N – число метеоров, в семнадцатой – логарифм массы lgM [г] и в восемнадцатой δ – плотность метеорных тел в потоках и ассоциациях [г/см³].

З а к л ю ч е н и е

В результате фильтрации данных радиолокационного измерения радиантов, скоростей и орбит метеоров, наблюдаемых с четырёх пунктов с 1 по 16 января 1970 г. в ГисАО Института астрофизики НАН Таджикистана выявлено 99 малых метеорных потоков и ассоциаций.

Для метеороидов потоков и ассоциаций вычислены массы и плотности метеороидов. Среднее значение плотностей метеороидов потоков и ассоциаций заключается в интервале 0.3-6.4 г/см³.

Поступило 17.08.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кащеев Б.Л., Лебединец В.Н., Лагутин М.Ф. Метеорные явления в атмосфере Земли. – М.: Наука.1967. 260 с.
2. Gartrell G., Elford W.G. Southern hemisphere meteor stream determinations. – Austral. J. Phys., 1975, v.28, №5, pp. 591-620.
3. Корпусов В.Н. Исследование метеорных потоков и ассоциаций радиолокационным методом. Дис....канд. физ.-мат. наук. – Обнинск, 1971, 170 с.
4. Волощук Ю.И., Горелов Д.Ю. Метеорные потоки и ассоциации, выявленные по результатам многолетних радиолокационных наблюдений метеоров в Харькове. – Харьков: из-во “НТМТ”, 2011, 383 с.
5. Gill J.C., Davie J.G. A radio echo method of meteor orbit determination. – Mon. Not. Roy. Astr. So., 1956, v.116, pp.105-113.
6. Narziev M. Physical and kinematic characteristics of meteoroids producing bright radio meteors, Meteor showers and associations, Meteoroids 2013. – Proceedings of the Astronomical Conference, held at A.M.University, Poznan. – Poland, 2013. pp.163-176.
7. Southworth R.B. and Hawkins G.S. Statistics of meteor streams. – Smith. Contrib. Astrophys. 1963. v.7. pp.261-285.
8. Jopek T.J. Remarks on the meteor orbital similarity D-criteria. – Icarus, 1993, v.106, pp. 603-607.
9. Бибарсов Р.Ш. Нарзиев М., Чеботарев Р.П. Определение масс и плотностей метеорных тел по радиолокационным наблюдениям с одного пункта. – Астрономический вестник. 1990, т. 24, № 4, с. 326-332.

М.Нарзиев, Х.Ф.Худжаназаров, Т.Й.Йопек*

**СЕЛҶО ВА АССОТСИАТСИЯҶОИ МЕТЕОРИИ МОҶИ ЯНВАР ДАР АСОСИ
МУШОҶИДАҶОИ РАДИОЛОКАТСИОНӢ ДАР РАҶ**

Институти астрофизикаи

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

**Институти расадхонаи астрономӣ, факултети физика,*

Донишгоҳи Адам Миткевич, Познан, Полия

Дар асоси маълумоти радиантҳо, суръатҳо ва элементҳои мадори 1767 метеорҳои бо усули радиогии пеленгатсионӣ-вақтӣ чен карда шуда, 99 селҳо ва ассотсиатсияҳои метеорӣ ошкор гардиданд, ки барои ҳар кадоми онҳо параметрҳои физикавӣ ва кинематикашон пешниҳод шудааст.

Калимаҳои калидӣ: сели метеорӣ, ассотсиатсияи метеорӣ, критерияи муқоисавии мадор, метеороид, радиант, элементҳои мадор.

M.Narziev, H.F.Khujanazarov, T.J.Jopek*

JANUARY METEOR SHOWERS AND ASSOCIATIONS ACCORDING TO THE RESULTS OF RADAR OBSERVATIONS IN HISAO

Institute of Astrophysics, National Academy of Science of Tajikistan,

**Institute of Astronomical Observatory, Faculty of Physics, Adam Mickiewicz University, Poznan, Poland*

Based on data on radiants, velocities and orbital elements of 1767 meteors, measured by the direction-finding-time radio method, 99 groups of meteor showers and associations were identified, where data on physical and kinematic parameters are provided for each.

Key words: *meteor shower, meteor association, orbital similarity criterion, meteoroid, radiant, orbital elements.*

Сведения об авторах:

1. **Нарзиев Мирхусен** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт астрофизики НАН Таджикистана. E-mail: mirhusseyn_narzi@mail.ru;
2. **Худжаназаров Хабибджон Файзалиевич** – научный сотрудник, Институт астрофизики НАН Таджикистана. E-mail: habibjon_2012@mail.ru;
3. **Тадеуз Йан Йопек** – доктор физико-математических наук, Институт астрономической обсерватории, Физический факультет, Университет Адама Мицкевича, Познань. E-mail: jopek@amu.edu.pl.

УДК 534.16:535.341

Специальность: 1.3.8 – Физика конденсированных сред

Член-корреспондент НАН Таджикистана Т.Х.Салихов,

Ю.П.Ходжаев, А.Э.Сулейманов, А.Махмалатиф

**ВКЛАД РЕЛАКСАЦИИ ПОТОКА ТЕПЛА В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ПОДЛОЖКЕ
В ХАРАКТЕРИСТИКИ ФОТОАКУСТИЧЕСКОГО СИГНАЛА
ПРОЗРАЧНЫХ ОБРАЗЦОВ***Таджикский национальный университет*

Теоретически исследован вклад релаксации потока тепла в поглощающей подложке в параметры фотоакустического сигнала прозрачного образца. Установлено, что зависимости амплитуды и фазы этого сигнала от частоты являются резонансными, что может быть использовано для определения времени релаксации потока тепла в материале подложки.

Ключевые слова: *фотоакустика, поглощающая подложка, поток тепла, релаксация теплового потока, оптоакустика, газомикрофонная регистрация.*

Существующие линейные теории генерации фотоакустического сигнала [1-4], в основном, описывают все особенности его формирования и зависимости ее параметров от частоты возбуждаемого сигнала при низких значениях интенсивности падающего луча. Вместе с тем, справедливости ради отметим, что с ростом интенсивности падающего луча в образце возбуждается нелинейный ФА-сигнал, обусловленный температурной зависимостью теплофизических и оптических величин [5-9]. Отметим, что нелинейный ФА-сигнал состоит из набора гармоник, из которых первые две являются основными. Между тем, очевидно, что в конденсированных системах происходят различные виды релаксационных процессов (см., например, [10-13] и приведенную там литературу). В этой связи в [14] нами были обобщены результаты теории [1] для случая, когда поток тепла исследуемой среды является релаксирующим. Однако в [14] не рассматривался случай прозрачного образца на поглощающей подложке. Восполнение этого пробела и является целью настоящей работы. Обозначим время релаксации потока тепла в подложке через τ_b , а её оптический коэффициент поглощения через β_b .

Будем исходить из трехслойной и одномерной модели ФА-камеры. Для общности рассматриваемой проблемы будем считать, что газ и образец характеризуются собственными временами релаксации τ_g и τ_s соответственно. Тогда систему уравнений теплопроводности с учетом релаксации потока тепла в поглощающей подложке можно записать в следующем виде:

Адрес для корреспонденции: *Салихов Тагаймурод Хаитович, Ходжаев Юнус Пардалиевич, Сулаймонов Айдаршо Эроншоевич, Алишери Махмалатиф, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр.Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: tsalikhov@mail.ru; kh.yunus@mail.ru; aydar81-81@mail.ru; alisher-11.90@mail.ru.*

$$C_g \left[\frac{\partial T_g}{\partial t} + \tau_g \frac{\partial^2 T_g}{\partial t^2} \right] = \kappa_g \frac{\partial^2 T_g}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l_g, \quad (1)$$

$$C_s \left[\frac{\partial T_s}{\partial t} + \tau_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial t^2} \right] = \kappa_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2}, \quad l_g \leq x \leq -l_s, \quad (2)$$

$$C_b \left[\frac{\partial T_b}{\partial t} + \tau_b \frac{\partial^2 T_b}{\partial t^2} \right] = \kappa_b \frac{\partial^2 T_b}{\partial x^2} + D(x, t) + \tau_b \frac{\partial D}{\partial t}, \quad -(l_s + l_b) \leq x \leq -l_s, \quad (3)$$

где $D = 0.5I_0\beta_b A_b (1 - R_s)(1 + e^{i\omega t})e^{\beta_b(x+l_s)}$, C_{pi} , κ_{pi} – теплоемкости единицы объема и коэффициент теплопроводности соответствующих слоев, R_s – оптический коэффициент отражения образца, а A_b – поглощательная способность подложки.

Граничные и начальные условия имеют вид

$$\left(\kappa_g \frac{\partial T_g}{\partial x} + \tau_g \kappa_g \frac{\partial^2 T_g}{\partial t \partial x} \right) \Big|_{x=0} = \left(\kappa_s \frac{\partial T_s}{\partial x} + \tau_s \kappa_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial t \partial x} \right) \Big|_{x=0}, \quad T'_i(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial T'_b}{\partial T} \Big|_{x=0} = 0, \quad T_g(0, t) = T_s(0, t),$$

$$\left(\kappa_s \frac{\partial T_s}{\partial x} + \tau_s \kappa_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial t \partial x} \right) \Big|_{x=l} = \left(\kappa_b \frac{\partial T_b}{\partial x} + \tau_b \kappa_b \frac{\partial^2 T_b}{\partial t \partial x} \right) \Big|_{x=l}, \quad T_s(l, t) = T_b(l, t) = 0, \quad \frac{\partial T_g}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{\partial T_b}{\partial x} \Big|_{x=-(l_s+l_b)} = 0.$$

Возмущения температуры $T'_i(x, t)$ в (1)-(3) представим в виде суммы равновесных $T_{0i}(x)$ и акустических $\Phi_i(x, t)$ частей, то есть в виде $T'_i(x, t) = T_{0i}(x) + \Phi_i(x, t)$. Кроме того, учитывая, что падающий лазерный луч модулирован по гармоническому закону, временное изменение величины $\Phi_i(x, t)$ представим в виде $\Phi(x, t) = \Phi(x, \omega) \exp(i\omega t)$. Тогда из (1)-(3) для $\Phi_i(x, \omega)$ получим систему уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_g}{\partial x^2} - \tilde{\sigma}_g^2 \Phi_g = 0, \quad 0 \leq x \leq l_g, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2} - \tilde{\sigma}_s^2 \Phi_s = 0, \quad 0 \leq x \leq -l_s, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_b}{\partial x^2} - \tilde{\sigma}_b^2 \Phi_b = -\frac{\beta_b A_b (1 - R_s) I_0 (1 + i\omega \tau_b) e^{\beta_b(x+l_s)}}{2\kappa_b}, \quad -(l_s + l_b) \leq x \leq -l_s, \quad (6)$$

где $\tilde{\sigma}_i^2(\omega) = i\omega(1 + i\omega\tau_i) / \chi_i$, $\chi_i = \kappa_i / C_p$ – температуропроводности соответствующих слоев.

Теперь граничные условия примут вид

$$\frac{k_g(1 + i\omega\tau_g)}{k_s(1 + i\omega\tau_s)} \frac{d\Phi_g}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{d\Phi_s}{dx} \Big|_{x=0}, \quad \Phi_{Lg}(0, \omega) = \Phi_{Ls}(0, \omega), \quad \Phi_{Ls}(-l, \omega) = \Phi_{Lb}(-l, \omega),$$

$$\frac{k_b(1 + i\omega\tau_b)}{k_s(1 + i\omega\tau_s)} \frac{d\Phi_b}{dx} \Big|_{x=-l} = \frac{d\Phi_s}{dx} \Big|_{x=-l}, \quad \Phi_{Lg}(l, \omega) = 0, \quad \Phi_{Lb}(-l - l_b, \omega) = 0.$$

Решение системы (4)-(6) можно представить в виде

$$\Phi_g = \Theta e^{-\tilde{\sigma}_g x}, \quad 0 \leq x \leq l_n, \quad (7)$$

$$\Phi_s = \gamma_1 e^{\tilde{\sigma}_s x} + \gamma_2 e^{-\tilde{\sigma}_s x}, \quad -l_s \leq x \leq 0, \quad (8)$$

$$\Phi_b = W e^{\tilde{\sigma}_b(x+l)} - E \exp[\beta_b(x+l_s)], \quad -(l_s + l_b) \leq x \leq -l_s, \quad (9)$$

где $E = \frac{(1+i\omega\tau_b)A_b(1-R_s)\beta_b I_0}{2k_b(\beta_b^2 - \tilde{\sigma}_b^2)}$, а величины Θ , γ_1 , γ_2 , и W являются комплексными амплитудами

колебания температур в соответствующих слоях. Используя вышеприведенные граничные условия, найдем, что

$$\Theta = \frac{(1+i\omega\tilde{\tau}_b)\beta_b I_0}{2k_b(\beta_b^2 - \tilde{\sigma}_b^2)} \frac{(1-R_s)A_b b(\tilde{r}_b - 1)}{[(1+g)(1+b)\exp(\tilde{\sigma}_s l_s) - (g-1)(b-1)\exp(-\tilde{\sigma}_s l_s)]}, \quad (10)$$

где $\tilde{r}_b = \frac{\beta_b}{\tilde{\sigma}_s}$, $g = \frac{\tilde{\sigma}_g k_g}{\tilde{\sigma}_s k_s}$, $b = \frac{\tilde{\sigma}_b k_b(1+i\omega\tau_b)}{\tilde{\sigma}_s k_s}$.

Возмущения давления в газовом слое определяются усреднением $\Phi_g(x, \omega) = \Theta \exp(-\sigma_g x)$ по длине тепловой диффузии в газе, то есть выражением [1]

$$\delta p(\omega) = \frac{\gamma p_0 2\pi\mu_g}{T_0 l_g} \bar{\Phi}_g(\omega) = \frac{\gamma p_0}{T_0 l_g} \int_0^{2\pi\mu_g} \Phi_g(\omega, x) dx, \quad (11)$$

где $\mu_g = \sqrt{2\chi_g/\omega}$ – длина тепловой диффузии, γ – показатель адиабаты, а p_0 и T_0 – соответственно начальные значения давления и температуры.

Представив эту величину в виде $\delta p(t) = Q \exp[i(\omega t - \pi/4)]$ и, выполняя соответствующие вычисления, для комплексной амплитуды ФА-сигнала будем иметь

$$Q = \frac{\gamma p_0}{T_0 l_g a_g} \frac{(1+i\omega\tilde{\tau}_b)\beta_b I_0}{2k_b(\beta_b^2 - \tilde{\sigma}_b^2)} \frac{(1-R_s)A_b b(\tilde{r}_b - 1)}{[(1+g)(1+b)\exp(\tilde{\sigma}_s l_s) + (g-1)(b-1)\exp(-\tilde{\sigma}_s l_s)]}. \quad (12)$$

В дальнейшем учтем, что всегда выполняется условие $g \ll 1$. Тогда выражение (12) можно написать в следующем виде:

$$Q = \frac{\gamma p_0}{T_0 l_g a_g} \frac{(1+i\omega\tilde{\tau}_b)\beta_b I_0 b}{2k_b(\beta_b^2 - \tilde{\sigma}_b^2)(1+b)} \frac{(1-R_s)A_b(\tilde{r}_b - 1)}{[\exp(\tilde{\sigma}_s l_s) + R \exp(-\tilde{\sigma}_s l_s)]}, \quad (13)$$

где $R = (1-b)(1+b)^{-1}$ – коэффициент отражения тепловой волны. Выражение (13) является общим решением сформулированной задачи и позволяет рассматривать наиболее интересные частные случаи.

Предположим, что подложка является оптически толстой и хорошим проводником тепла, тогда $\tilde{r}_b \gg 1$, $b \gg 1$ и $R = -1$. В дальнейшем также воспользуемся опеределением $\tilde{\sigma}_s l_s = \xi + i\Psi$, где

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta \Omega \left[\sqrt{1 + \frac{1}{\Omega^2}} - 1 \right]^{1/2}, \quad \Psi = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta \Omega \left[\sqrt{1 + \frac{1}{\Omega^2}} + 1 \right]^{1/2}, \quad \Omega = \omega \tau_b,$$

а $\delta = \frac{l_s}{\sqrt{\chi_s \tau_s}}$ – безразмерная толщина образца. Тогда из (13) будем иметь

$$p(\omega) = \frac{\gamma P_0 A \sqrt{\chi_g \chi_b} \tau_b}{2 T_0 l_g k_b} \frac{\tau_b}{\Omega} \left[1 + \Omega^2 \right]^{1/4} \left[Sh^2 \xi + Cos^2 \Psi \right]^{-1/2} \exp[i(\omega t - \pi / 4)], \quad (14)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} - arctg(\Omega) - arctg [tg \Psi \cdot th \xi]. \quad (15)$$

Выражения (14) и (15) являются достаточно сложными и поэтому для детального исследования особенностей генерации ФА-сигнала, соответствующих рассматриваемому случаю, необходимо проведение численного расчёта частотной зависимости параметров амплитуды и фазы сигнала по этим же выражениям.

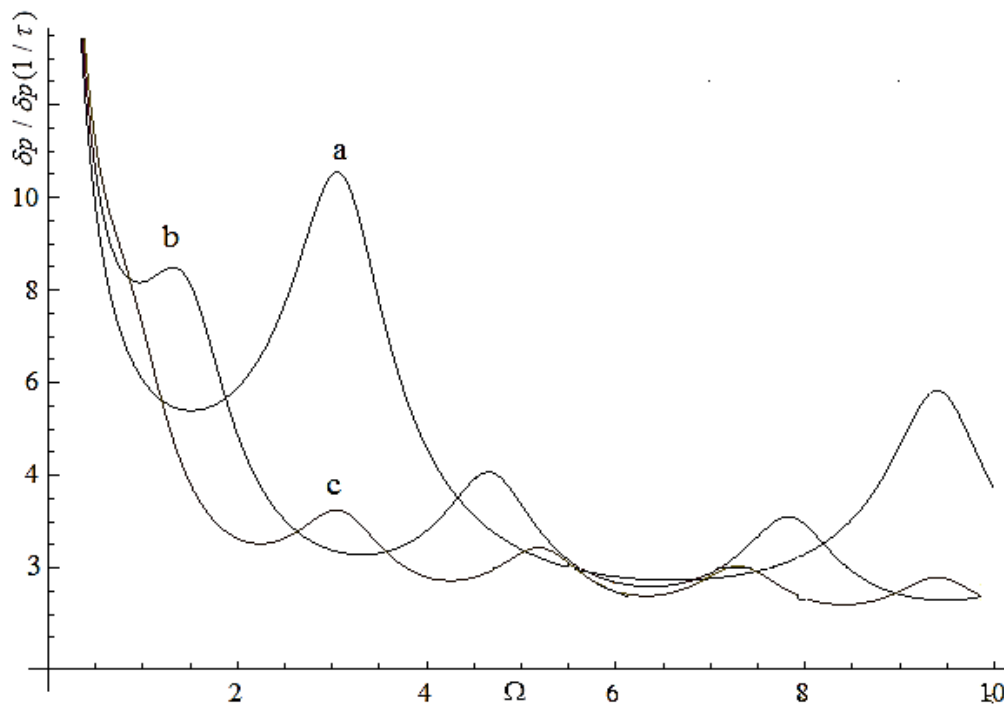


Рис. 1. Зависимость приведенной амплитуды ФА-сигнала $p(\Omega) / p(1)$ для случая а) $\delta = 0.5 - a$, б) $\delta = 1 - b$ и с) $\delta = 1.5 - c$.

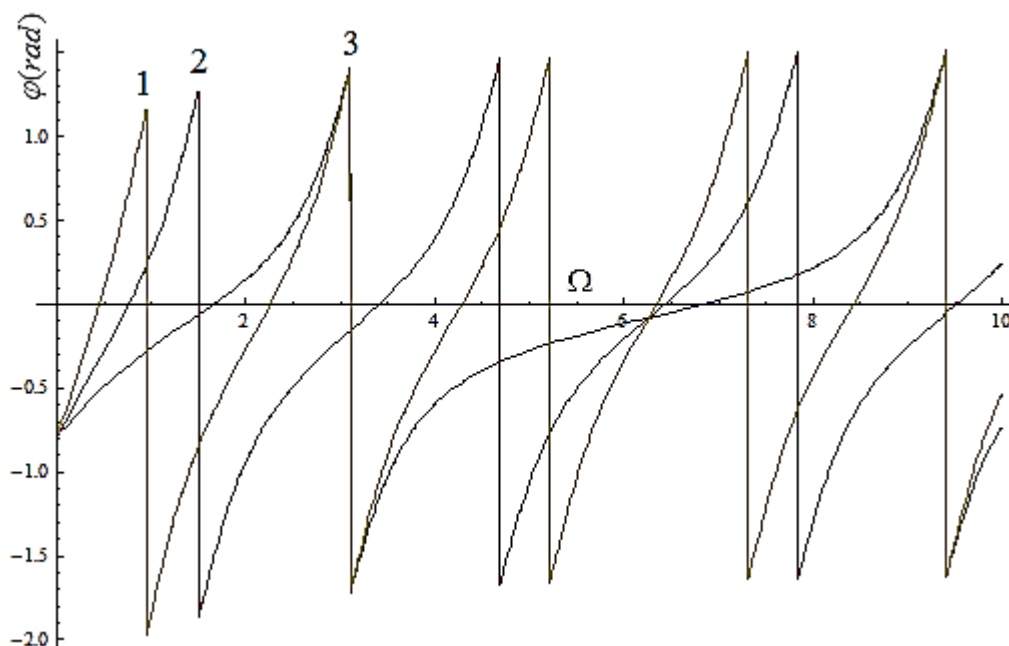


Рис. 2. Частотная зависимость фазы $p(\Omega)/p_{RG}$ для случая 1) $\delta = 0.5 - a$, 2) $\delta = 1 - b$ и 3) $\delta = 1.5 - c$.

На рис. 1 и 2 представлены результаты выполненного нами расчёта. Из зависимостей частотной зависимости нормированной амплитуды $f(\Omega) = p(\Omega)/p(1)$ (рис. 1) обнаруживается, что в области частот $\Omega \geq 1$ эта зависимость представляет собой набор резонансных контуров, значения максимумов которых уменьшается с ростом частоты. Также видно, что с ростом приведенной толщины образца происходит резкий спад амплитуды ФА-сигнала. Зависимости фазы возбуждаемого сигнала от частоты при различных значениях безразмерной толщины (рис. 2) показывает, что эти зависимости проходят через нули и максимальные значения плавно увеличиваются.

Таким образом, в рамках данной работы нами теоретически определён вклад релаксации потока тепла в поглощающей подложке в параметры возбуждаемого ФА-сигнала и установлено, что зависимости амплитуды и фазы этого сигнала от частоты являются резонансными и эта особенность может быть использована для определения времени релаксации потока тепла в материале подложки.

Поступило 20.07.2023 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosencwaig A., Gersho A. Theory of the photoacoustic effect with solids. – J. Appl. Phys., 1976, v.47, №1, pp.64-69.
2. Fujii Y., Akihiro Moritani and Junkichi Nakai Photoacoustic Spectroscopy Theory for Multi-Layered Samples and Interference Effect. – Jpn. J. Appl. Phys., 1981, v.20, №2, pp.361-367.
3. Barros W.L., Faria R.M. Photoacoustic procedure for measuring thermal parameters of transparent solids. – Appl. Phys.Lett., 1995, v.67, №26, 3892-3894.

4. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А. Генерация фотоакустического сигнала двухслойными прозрачными образцами с поглощающей подложкой. – Письма в журнал технической физики, 2019, т.45, вып.9, с.30-31.
5. Gusev V., Mandelis A., Bleiss R. Nonlinear photothermal response of thin solid films and coatings. – Mater. Sci. Eng., 1994, B26, №1, pp.111-119.
6. Gao R., Xu Z., Ren Y., Song L., Liu C. Nonlinear mechanism in photoacoustic – powerful tools in photoacoustic imaging. – Photoacoustics, 2021, v.22, pp.100-243.
7. Проскурин М.А., Хабибулин В.Р., Усольцева Л.О., Вырко Е.А., Михеев И.В., Волков Д.С. Фототермическая и оптоакустическая спектроскопия: Современное состояние и перспективы. – Успехи физических наук, 2022, т.192, №3, с.294-340.
8. Салихов Т.Х., Шарифов Д.М., Туйчиев Х.Ш. Вклад температурной зависимости теплофизических параметров подложки на параметры второй гармоники фотоакустического сигнала непрозрачных сред. – ДАН РТ, 2008, т. 51, № 8, с. 588-593.
9. Салихов Т.Х., Шарифов Д.М., Туйчиев Х.Ш. Влияние температурной зависимости оптических величин на характеристики основной гармоники нелинейного фотоакустического сигнала твердых тел с объёмным поглощением луча. – ДАН РТ, 2011, т. 54, № 6, с. 465-472.
10. Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П. Основы молекулярной акустики. – М.: Наука, 1964, 516 с.
11. Литовиц Т., Дэвис К. Структурная и сдвиговая релаксация в жидкостях. – Там же, с.298-370.
12. Одинаев С., Адхамов А. А. Молекулярная теория структурной релаксации и явлений переноса в жидкостях. – Душанбе, 1998, 230 с.
13. Бартенев Г.М., Бартенева А.Г. Релаксационные свойства полимеров. – М.: Химия, 1992, 382 с.
14. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П., Сулаймонов А.Э. О вкладе релаксации потока тепла в характеристики фотоакустического сигнала твердотельных образцов. – Вестник ТНУ. Серия естественных наук, 2023, №1, с.149-159.

Т.Х.Салихов, Ю.П.Хочаев, А.Э.Сулаймонов, А.Махмалатиф

САҶМИ РЕЛАКСАТСИЯИ СЕЛИ ГАРМОИ ТАКЯГОҲИ ФУРЌБАРАНДА БА ПАРАМЕТРҲОИ СИГНАЛИ ФОТОАКУСТИКИИ НАМУНАИ ШАФОФ

Донишгоҳи милли Тоҷикистон

Ба таври назарияви саҳми релаксатсияи сели гармои такягоҳи фурўбаранда ба параметрҳои сигнали фотоакустикии намунаҳои шафоф омӯхта шудааст. Муқарар карда шудааст, ки вобастагии амплитуда ва фазаи ин сигнал аз басомад хусусияти резонанси дора два ин хусусият барои муайян кардани вақти релаксатсияи сели гармо истифода бурдан мумкин аст.

Калимаҳои калидӣ: фотоакустика, такягоҳи фурўбаранда, сели гармо, релаксатсияи сели гармо, оптоакустика, сабти микрофони сигнал.

T.Kh.Salikhov, Y.P.Khodjaev, A.E.Sulaimonov, A.Mahmalatif

CONTRIBUTION OF RELAXATION OF THE HEAT FLOW OF THE ABSORBING SUBSTANCE TO THE CHARACTERISTICS OF THE PHOTOACUSTIC SIGNAL OF TRANSPARENT SAMPLES

Tajik National University

The contribution of the relaxation of the heat flux of the absorbing substrate to the parameters of the photoacoustic signal was theoretically studied for the case when the sample is transparent. It has been established that the dependence of the amplitude and phase of this signal on frequency is resonant and this feature can be used to determine the relaxation time of the heat flow of the substrate material.

Key words: *photoacoustic, absorbing substrate, heat flow, heat flow relaxation, optoacoustic, gas microphone recording.*

Сведения об авторах:

1. **Салихов Тагаймурод Хаитович** – доктор физ.-мат. наук, член-корреспондент НАН Таджикистана, НИИ Таджикского национального университета, главный научный сотрудник отдела «Физики конденсированного состояния». E-mail: tsalikhov@mail.ru;
2. **Ходжаев Юнус Пардалиевич** – кандидат физ.-мат. наук, НИИ Таджикского национального университета, ведущий научный сотрудник отдела «Физики конденсированного состояния». E-mail: kh.yunus84@mail.ru;
3. **Сулаймонов Айдар Эроншоевич** – НИИ Таджикского национального университета, соискатель отдела «Физики конденсированного состояния». E-mail: aidar81_81@mail.ru;
4. **Алишери Махмалатиф** – кандидат физ.-мат. наук, НИИ Таджикского национального университета, ведущий научный сотрудник отдела «Физики конденсированного состояния». E-mail: alisher-11.90@mail.ru;

УДК 624.04

Специальность: 2.1.9 – Строительная механика

Член-корреспондент НАН Таджикистан Д.Н.Низомов, Б.А.Турсунов

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПЛИТ НА УПРУГОМ
ОСНОВАНИИ МЕТОДОМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ***Национальная академия наук Таджикистана,**Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана*

В статье изложен алгоритм расчета изотропной плиты на упругом основании от действия статической нагрузки методом сосредоточенных деформаций (МСД). Получены результаты численного моделирования на примере тестовой задачи. Разработана компьютерная программа, которая позволяет проводить исследования напряженно-деформированного состояния плит на упругом основании при различных воздействиях.

Ключевые слова: упругое основание, модель Винклера, матрица жесткости, изгибающие моменты, фиктивные связи, квадратичная аппроксимация, поперечные силы, угловые перемещения, конечный элемент.

Плита на упругом основании является важнейшим конструктивным элементом зданий и сооружений. Исследование напряженно-деформированного состояния плит на упругом основании, которые воспринимают действие упругих реакций грунта, имеет особое значение. Бетонные фундаментные плиты зданий и сооружений, которые взаимодействуют с грунтом основания, моделируются как конструкция на упругом основании. При исследовании изгиба таких конструкций обычно предполагается, что интенсивность реакции упругого основания в произвольной точке подошвы фундаментной плиты пропорциональна прогибу этой точки (модель Винклера).

Согласно модели Винклера, дифференциальное уравнение прогиба плиты на упругом основании представляется в виде

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + kw = q, \quad (1)$$

где w – прогиб, $D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2)$ – жесткость плиты при изгибе, h – толщина плиты, считается малой в сравнении с другими ее размерами, μ – коэффициент Пуассона, q – интенсивность поперечной нагрузки, kw – реакция основания, k – коэффициент жесткости грунта основания (коэффициент постели) имеет размерность – $\text{т/м}^2 / \text{м} = \text{т/м}^3$. Этот коэффициент изменяется в пределах от $3 \cdot 10^3$ до $22 \cdot 10^3 \text{ т/м}^3$ [1].

Адрес для корреспонденции: Низомов Джахонгир Низомович. 734029, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 129, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ. E-mail: tiees@mail.ru; nizomov-jn@mail.ru; Турсунов Бахтиёр Абдуалимович. E-mail: bahtiyor_71bta@mail.ru.

Численное моделирование. Рассмотрим решение статической задачи изгиба плиты на упругом основании методом сосредоточенных деформаций [2]. Исследуется прямоугольная пластина на упругом основании, внутренняя ее область которая разбивается на прямоугольные элементы размерами $a_k \times b_k$, $k = 1, 2, \dots, m$; при равномерной разбивке $a_k = l_x / n_x$, $b_k = l_y / n_y$ (рис. 1). Узлы, в которых сосредоточены деформации изгиба, кручения и сдвига, располагаются посередине граней элементов (рис. 2). Следующую группу узлов составляют узлы, расположенные в центре элементов, в которых накладываются по три связи, препятствующие их линейным перемещениям по оси z и поворотам вокруг осей x и y . В эти же узлы будут приложены внешние сосредоточенные силы и моменты.

Матрица внутренней жесткости. Исходя из жесткостей сосредоточенных фиктивных связей, формируется диагональная матрица внутренней жесткости. Для k -го элемента (рис. 2) матрица внутренней жесткости представляется в виде

$$C_k = \text{diag}[C_1 | C_2 | C_3 | C_4],$$

$$C_1 = (\omega_{k,k-1}, \psi_{k,k-1}, \xi_{k,k-1}), \quad C_2 = (\omega_{k,k-m}, \psi_{k,k-m}, \xi_{k,k-m}),$$

$$C_3 = (\omega_{k,k+m}, \psi_{k,k+m}, \xi_{k,k+m}), \quad C_4 = (\omega_{k,k+1}, \psi_{k,k+1}, \xi_{k,k+1}),$$

где $\omega_{ij}, \psi_{ij}, \xi_{ij}$ – жесткости фиктивных опорных закреплений, установленных по соответствующим граням элемента. Значения этих коэффициентов определяются исходя из деформации конечного элемента на изгиб, кручения и сдвиг [2]. Например, коэффициенты жесткости на изгиб, кручения и сдвиг, соответствующие грани 1 (рис. 2) будут равны:

$$\omega_{k,k-1} = 2E_k I_k / a_k \cdot (1 - \mu_k^2),$$

$$\psi_{k,k-1} = \frac{4G_k I_k}{a_k} = \frac{G_k b_k h_k^3}{3a_k} = \frac{G_k J_k}{a_k},$$

$$\xi_{kx} = \frac{5G_k b_k h_k}{3a_k},$$

где E_k, G_k – модули Юнга и сдвига, $I_k = b_k h_k^3 / 12$ – момент инерции грани, $J_k = \lambda_k b_k h_k^3$ – геометрическая характеристика крутильной жесткости прямоугольной грани элемента, $\lambda_k = 1/3$ при отношении сторон $b_k / h_k > 10$ [3].

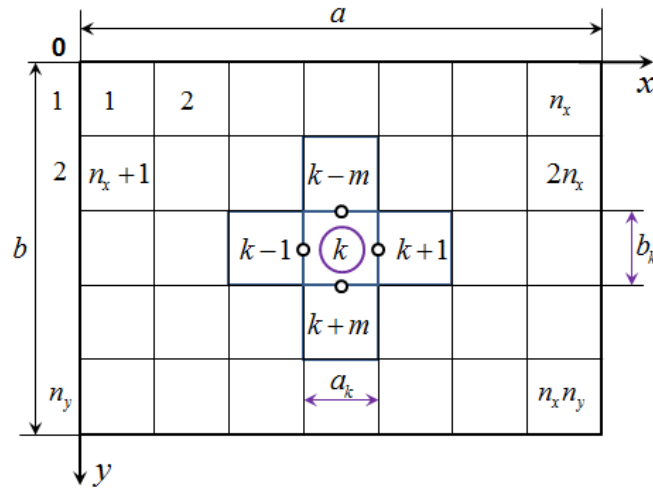


Рис. 1. Разбивка пластинки на конечные элементы МСД.

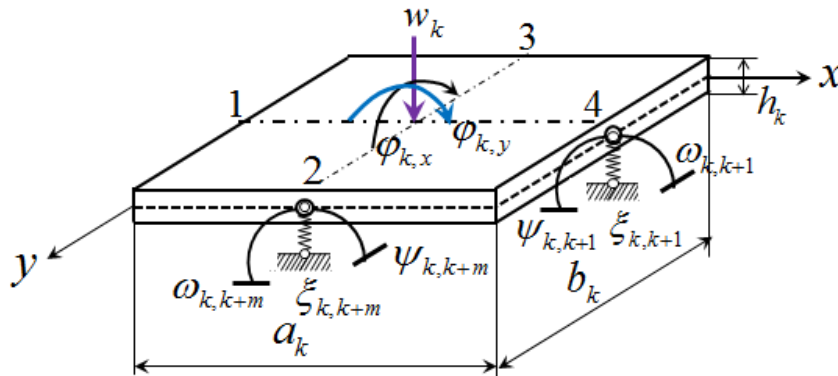


Рис. 2. Конечный элемент с фиктивных связей.

Матрица внутренней жесткости для всей системы представляется в виде

$$C = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_m). \tag{2}$$

Диагональная матрица внутренней жесткости состоит из $3n$ элементов, где $n = 2n_x n_y + n_x + n_y$ – число сечений на гранях элементов с неизвестными усилиями.

Матрица коэффициентов. Рассмотрим условия равновесия k -го конечного элемента пластинки, которая подвергается действию внешних сил (рис. 3). При этом вектор внешних сил для каждого элемента, в общем, состоит из трех составляющих: $P_k = (M_{xk} \ M_{yk} \ P_{zk})^T$, где M_{xk}, M_{yk}, P_{zk} – заданные сосредоточенные изгибающие моменты и вертикальная сила. Уравнения равновесия k -го элемента (рис. 3) выражают равенство нулю суммарного момента всех сил вокруг осей x, y , проходящих по центру элемента и сумму проекций всех сил элемента на вертикальную ось z :

$$\begin{aligned} -M_{y_{k,k-m}} + M_{y_{k,k+m}} - H_{k,k-1} + H_{k,k+1} - Q_{y_{k,k-m}} b_k / 2 - Q_{y_{k,k+m}} b_k / 2 - M_{xk} &= 0, \\ M_{x_{k,k-1}} - M_{x_{k,k+1}} + H_{k,k-m} - H_{k,k+m} + Q_{x_{k,k-1}} a_k / 2 + Q_{x_{k,k+1}} a_k / 2 + M_{yk} &= 0, \\ -Q_{x_{k,k-1}} + Q_{x_{k,k+1}} - Q_{y_{k,k-m}} + Q_{y_{k,k+m}} + P_{zk} - R_k &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$R_k = k_0 a_k b_k w = c_k w$, где $c_k = k_0 a_k b_k$ – сила упругого основания от единичного смещения, k_0 – коэффициент постели, имеющий размерность т/м³.

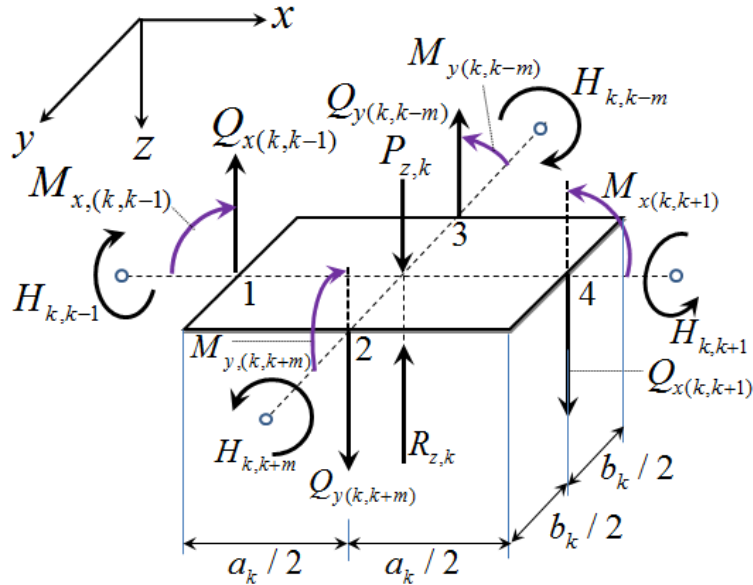


Рис. 3. Моменты и поперечные силы в срединной плоскости конечного элемента.

Систему уравнений (2) можно представить в матричной форме

$$\mathbf{A}_k \mathbf{S}_k + \mathbf{P}_k = 0, \tag{4}$$

где матрица коэффициентов \mathbf{A}_k размера 3×12 и вектор внутренних усилий \mathbf{S}_k размера 12×1 записываются в виде

$$\mathbf{A}_k = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4), \mathbf{S}_k = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4)^T.$$

Элементы блочной матрицы \mathbf{A}_k состоят из элементарных матриц:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a_k/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_k/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -b_k/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a_k/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Элементы вектора \mathbf{S}_k в (4) состоят из компонентов внутренних усилий, соответствующих сечениям 1, 2, 3 и 4 элемента k (рис.3)

$$\mathbf{S}_1 = (M_{k,k-1} \ H_{k,k-1} \ Q_{k,k-1})^T, \mathbf{S}_2 = (M_{k,k+m} \ H_{k,k+m} \ Q_{k,k+m})^T,$$

$$\mathbf{S}_3 = (M_{k,k-m} \ H_{k,k-m} \ Q_{k,k-m})^T, \mathbf{S}_4 = (M_{k,k+1} \ H_{k,k+1} \ Q_{k,k+1})^T. \tag{6}$$

Записав уравнения типа (5) для всех конечных элементов, а также учитывая неразрывность внутренних усилий на линиях сосредоточенных деформаций, получим систему уравнений, которую можно представить в матричной форме

$$\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{P} = \mathbf{0}, \tag{7}$$

здесь \mathbf{A} – прямоугольная матрица коэффициентов размера $3m \times 3n$, где $m = n_x n_y$ – общее число элементов, $n = 2n_x n_y + n_x + n_y$ – число сечений с неизвестными усилиями, n_x, n_y – число конечных элементов по оси x и y соответственно, \mathbf{S} – вектор усилий размера $3n \times 1$

$$\mathbf{S} = (S_1 | S_2 | \dots | S_n)^T,$$

где $S_j = (M_j | H_j | Q_j)^T$, M_j, H_j, Q_j – изгибающий момент, крутящий момент и поперечная сила в j -м сечении. Вектор нагрузки состоит из $3m$ элементов

$$\mathbf{P} = (M_{x1} | M_{y1} | P_{z1} | M_{x2} | M_{y2} | P_{z2} | \dots | M_{xm} | M_{ym} | P_{zm})^T,$$

где M_{xj}, M_{yj}, P_{zj} – заданные изгибающие моменты и сосредоточенная сила.

Система уравнений совместности. От действия внешней нагрузки элементы дискретной модели исследуемого объекта деформируются, но при этом они должны сохранять неразрывность. Это требование можно записать в виде уравнений совместности деформаций, которые имеют геометрический смысл. Каждый узел в центре конечного элемента имеет три перемещения: φ_x, φ_y – угловые; w – вдоль оси z

$$W_j = (\varphi_{xj} | \varphi_{yj} | w_j)^T.$$

Исходя из принципа возможных перемещений, связь между перемещениями системы и деформациями ее элементов можно представить в матричном виде [4,5]

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} + \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \tag{8}$$

где \mathbf{A}^T – матрица размера $3n \times 3m$, взаимно транспонированная с матрицей \mathbf{A} ; \mathbf{W} – $3m$ -мерный вектор перемещений; $\boldsymbol{\lambda}$ – $3n$ -мерный вектор деформаций системы. Векторы перемещений и деформаций состоят из $3m$ элементов

$$\mathbf{W} = (\varphi_{x1} | \varphi_{y1} | w_1 | \varphi_{x2} | \varphi_{y2} | w_2 | \dots | \varphi_{xm} | \varphi_{ym} | w_m)^T,$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{x1} | \lambda_{y1} | \Delta_1 | \lambda_{x2} | \lambda_{y2} | \Delta_2 | \dots | \lambda_{xm} | \lambda_{ym} | \Delta_m)^T.$$

Матричное уравнение совместности деформаций (8), которое является геометрическим, соответствует уравнению равновесия (7), где используется одна и та же матрица \mathbf{A} . Использование матрицы \mathbf{A} в двух случаях соответствует принципу двойственности.

Матрица внешней жесткости. Из рассмотрения конечных элементов с фиктивными связями, в соответствии с законом Гука, можно получить вектор внутренних усилий [2,6]

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}, \tag{9}$$

где \mathbf{C} – диагональная матрица внутренней жесткости порядка $3n$. Из совместного рассмотрения (7), (8) и (9), получим

$$\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{A}^T \mathbf{W}, \tag{10}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{C}\mathbf{A}^T \mathbf{W}, \tag{11}$$

$$-\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^T \mathbf{W} + \mathbf{P} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{K}\mathbf{W} = \mathbf{P}, \tag{12}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^T, \tag{13}$$

$\mathbf{K} = [r_{ij}]$ – квадратная матрица внешней жесткости порядка $3m$.

Следует отметить, что реакция упругого основания учитывается только в главных коэффициентах матрицы внешней жесткости по направлению третьей степени свободы k -го конечного элемента пластинки (рис. 4)

$$r_{kk} = Q_{k,k-1} + Q_{k,k+1} + Q_{k,k-m} + Q_{k,k+m} + c_k, \tag{14}$$

здесь Q_j – вертикальные реакции в фиктивных связях, установленных на контурах конечных элементов, где сосредоточены деформаций, c_k – реакция упругого основания от единичного перемещения.

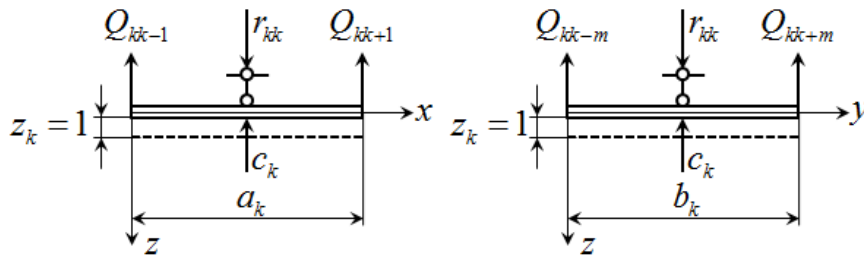


Рис. 4. К определению коэффициентов жесткости для k -го элемента от податливости грунта.

Следовательно, матрица внешней жесткости пластины на упругом основании формируется, как сумма двух матриц

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K} + \mathbf{R}_0, \tag{15}$$

где \mathbf{K} – матрица жесткости плиты без упругого основания, \mathbf{R}_0 – диагональная матрица жесткости упругого основания порядка $3m$

$$\mathbf{R}_0 = \text{diag} (00 c_1 | 00 c_k | \dots | 00 c_m). \tag{16}$$

Таким образом, система алгебраических уравнений, полученная для расчета плиты на упругом основании, представляется в виде

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{W} = \mathbf{P}. \tag{17}$$

По формуле (15) формируется матрица жесткости и из решения (17) определяется вектор перемещений, а затем из (10) и (11) вычисляются векторы деформаций и внутренних усилий. Следует отметить, что в результате решения системы алгебраических уравнений (17) итерационным методом Зейделя [7] определяется вектор \mathbf{W} , который состоит из угловых и линейных перемещений. Каждый конечный элемент МСД имеет два угловых и одно линейное перемещение, которые соответствуют точке в центре конечного элемента (рис. 2). С целью определения компонентов вектора перемещений на внешних контурах плиты используем квадратичную аппроксимацию. Проведя вдоль оси x через точки в элементах e_n , e_{n+1} и e_{n+2} (рис. 5) квадратную параболу

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

с началом координат в точке n , получим формулу для определения перемещений на свободном крае плиты

$$w_B = (15w_{n+2} - 10w_{n+1} + 3w_n) / 8.$$

По аналогичной формуле, с заменой w на φ , определяются и угловые перемещения.

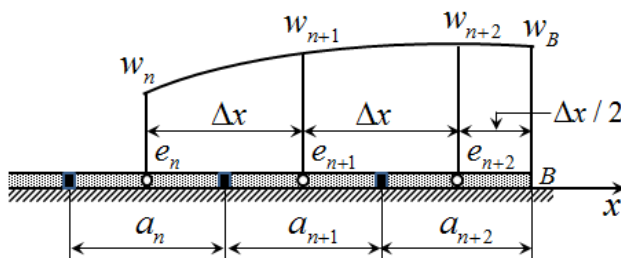


Рис. 5. Квадратичная аппроксимация.

На основе изложенного алгоритма разработана компьютерная программа **PLASTINA-UO** на языке Фортран и проведены исследования сходимости и точности численного решения при различных разбиениях на примере плиты без упругого основания [2, стр.338]. Ниже рассмотрим примеры расчета плиты на упругом основании по МСД при различных видах нагружения.

Пример 1. С целью сравнения и подтверждения достоверности результатов была исследована квадратная бетонная плита размером 600×600 см, толщиной 40 см, на сплошном упругом основании с коэффициентом постели $k_0 = 1.27 \text{ кг/см}^3$, от действия нагрузки $q = 10 \text{ кг/см}^2$, равномерно распределенной в центре на площадке 191×191 см [8]. Модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно равны $E_0 = 310000 \text{ кг/см}^2$, $\nu = 0.15$.

На рис.6 эпюра изгибающих моментов, полученная по МСД для грузового квадрата 200×200 см, сравнивается с результатами, полученными на основе разностных уравнений метода

последовательных аппроксимаций [9] для грузового квадрата 189×189 см. Видно достаточно хорошее совпадение результатов, меньше чем на 5% они отличаются в центре плиты.

В табл. 1 приведен изгибающий момент в центре плиты, полученный различными методами. Аналитическое решение, полученное в рядах [8], равняется 397,0 кНм/м. В работе [10] задача решена по методу конечных элементов (МКЭ) для квадратной сетке 6×6, где площадка загрузки принята 200×200 см, изгибающий момент $M_x = 385.4$ кНм/м. В работе [11] данная задача решена методом конечных разностей (МКР), где получен $M_x = 391.7$ кНм/м. Результат $M_x = 395.3$ кНм/м, полученный Р.Ф.Габбасовым на сетке 38×38, отличается от аналитического решения на 0.4%. Результат, полученный по МСД, отличается от аналитического решения на 3.8%.

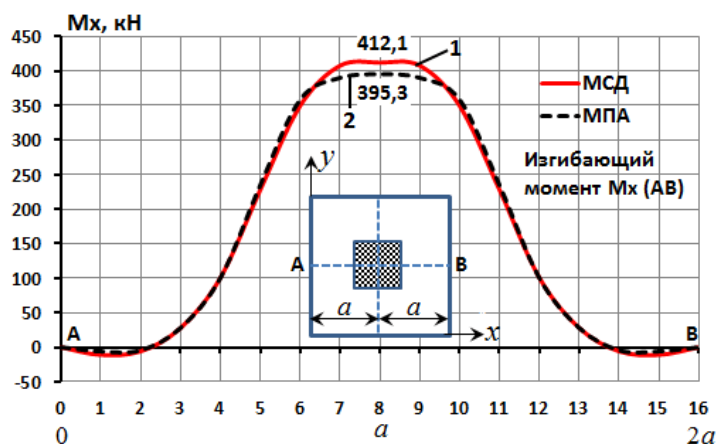


Рис. 6. Эпюра изгибающих моментов по линии АВ.

Таблица 1

Сравнение результатов

Момент	Аналитическое решение	МКЭ	МПА	МКР	МСД
$M_x, \text{кНм/м}$	397.0	385.4	395.3	391.7	412.1

Из полученных результатов следует, что разработанный алгоритм на основе МСД может быть использован для решения задач по расчету плит на упругом основании.

Пример 2. Плита, несущая несколько рядов равностоящих колонн и равные нагрузки, каждая из которых равномерно распределена на площади прямоугольника [1]. В качестве примера рассматриваются квадратная бетонная плита со свободными краями (рис. 7), размером 600×600 см, толщиной 40 см, на упругом основании с коэффициентом постели $k_0 = 1.27 \text{ кгс/см}^3$ (12.7 мН/м^3), всё также как в примере 1. Если принять, что колонны сечением $c \times d = 40 \times 40$ см, то сосредоточенная нагрузка от каждой колонны будет равняться

$$P = qcd = 10 \cdot 40 \cdot 40 = 1600 \text{ кг} = 16 \text{ кН.}$$

Понятно, что интенсивность нагрузка q , действующая на колонны, зависит от конструкции рассматриваемого здания.

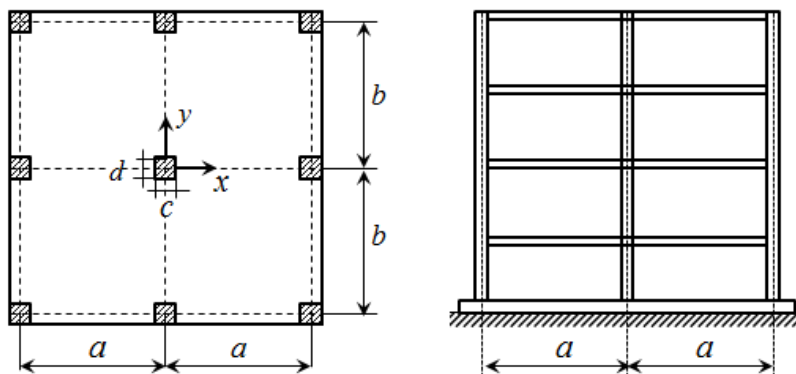


Рис. 7. Плита на упругом основании с рядами колонн

На рис. 8 представлены графики изменения перемещений по линиям, проходящим посередине, по диагонали и по краю плиты, полученные на сетке 15×15 по МСД. Видно, что максимальное перемещение возникает в угловых точках плиты. В табл. 2 приведены значения изгибающего момента M_x , возникающего на контурах конечных элементов по линии ВС. Знак «минус» указывает на то, что от заданной нагрузки в виде девяти сосредоточенных сил (рис. 7), растягиваются верхние волокна плиты. Это связано с тем, что элементы контура плиты перемещаются больше, чем её центральная часть.

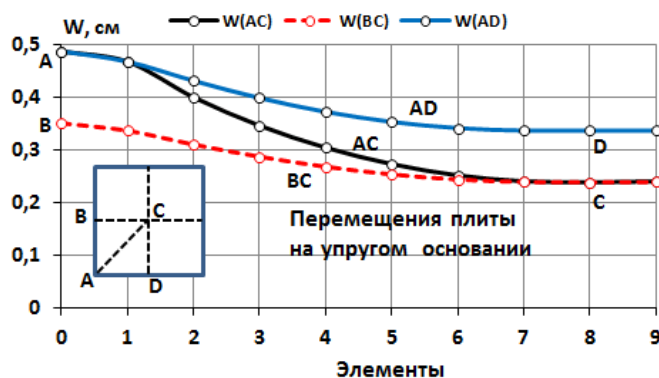


Рис. 8. Перемещения плиты от действия сосредоточенных сил

Таблица 2

Изменение изгибающего момента по линии ВС

$x, м$	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2
$M_x, кН$	0	-13.13	-36.13	-45.01	-49.79	-51.28	-47.82	-29.00	-29.00

Вывод. На основе полученных результатов можно заключить, что алгоритм и компьютерная программа, разработанных на основе метода сосредоточенных деформаций, позволяют исследовать плиту на упругом основании при различных воздействиях. Достоверность результатов подтверждается сравнением результатов, полученных по МСД с данными других авторов и аналитическим решением.

Поступило 21.07.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963, 635 с.
2. Низомов Д.Н., Каландарбеков И. Метод сосредоточенных деформаций. – Душанбе: Дониш, 2015, 436 с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1963, 539 с.
4. Ржаницын А.Р. Расчет сплошных конструкций методом упругих сосредоточенных деформаций. – Стр. мех. и расчет соор., 1980, № 5, с. 15-20.
5. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991, 439 с.
6. Низомов Д. Н., Каландарбеков И. Метод сосредоточенных деформаций в решении статических и динамических задач строительной механики. – Душанбе: Ирфон, 2005, 289 с.
7. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970, 664 с.
8. Палатников Е.А. Прямоугольная плита на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1964, 236 с.
9. Габбасов Р.Ф., Габбасов А.Р., Филатов В.В. Численное построение разрывных решений задач строительной механики. – М.: АСВ, 2008, 277 с.
10. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами. – Л.: ЛГУ, 1987, 225 с.
11. Соломин В.И., Сытников А.С. К расчету фундаментных плит сложной конфигурации и переменной жесткости. – Основания, фундаменты и механика грунтов, 1974, №5, с.16-19.

Д.Н.Низомов, Б.А.Турсунов

ҲАЛЛИ РАҚАМИИ МАСЪАЛАҲОИ СТАТИКИИ ПЛИТАҲОИ ДОРОИ АСОСИ ЭЛАСТИКӢ БО МЕТОДИ ДЕФОРМАТСИЯҲОИ МУТАМАРКАЗШУДА

Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола алгоритми ҳисоб кардани плитаи изотропӣ дар таҳкурсии чандирӣ зери таъсири бори статикӣ бо усули деформатсияҳои мутамарказшуда тасвир шудааст. Натиҷаҳои моделсозии ададӣ бо истифода аз масъалаи тестӣ ҳамчун намуна ба даст оварда шуданд. Барномаи компютерие тартиб дода шудааст, ки имкон медиҳад, ки ҳолати шиддатнокӣ ва деформатсияи плитаҳои таҳкурсии эластикӣ дошта, дар зери таъсири гуногун омӯхта шавад.

Калимаҳои калидӣ: таҳкурсии чандирӣ, модели Винклер, матритсаи сахтӣ, моментҳои ҳамшавӣ, пайваस्ताгиҳои фиктивӣ, наздикиаҳои квадратӣ, қувваҳои арзӣ, ҷойивазкуниҳои кунҷӣ, элементи ниҳой.

D.N.Nizomov, B.A.Tursunov

NUMERICAL SOLUTION OF STATIC PROBLEMS PLATES ON AN ELASTIC BASE BY METHOD OF CONCENTRATED DEFORMATIONS

*Institute of Geology, Earthquake Resistant Construction and Seismology,
National Academy of Sciences of Tajikistan*

The article describes an algorithm for calculating an isotropic slab on an elastic foundation under the action of a static load using the concentrated deformation method (MSD). The results of numerical simulation were obtained using the test problem as an example. A computer program has been developed that allows one to study the stress-strain state of slabs on an elastic foundation under various influences.

Key words: *elastic foundation, Winkler model, stiffness matrix, bending moments, fictitious connections, quadratic approximation, transverse forces, angular displacements, finite element.*

Сведение об авторах

1. **Низомов Джахонгир Низомович** – доктор технических наук, член-корреспондент НАН Таджикистана, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана, заведующий лабораторией сейсмостойкости зданий и сооружений. E-mail: tiess@mail.ru, nizomov-jn@mail.ru;
2. **Турсунов Бахтиер Абдуалимович** – Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана, соискатель. E-mail: bahtiyor_71bta@mail.ru.

УДК 504.064

Специальность: 1.5.15 – Экология

3.2.1 – Гигиена

Ш.С.Сагдиева, М.У.Шарофова, С.Б.Самиев*, Ш.Ш.Самиева,
академик НАН Таджикистана Ф.Рахими**, М.Миршохи

**АНАЛИЗ СРЕДНЕСУТОЧНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НЕКОТОРЫХ
ПОЛЛЮТАНТОВ В СОСТАВЕ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА В ГОРОДЕ
ДУШАНБЕ В ПЕРИОД С 2017 ПО 2021 гг.**

*Национальная академия наук Таджикистана,
Центр по исследованию инновационных технологий НАН Таджикистана,*

**Агентство по гидрометеорологии Республики Таджикистан,*

***Национальная академия наук Таджикистана,*

Физико-технический институт им.С.У.Умарова НАН Таджикистана

В статье представлен анализ мониторинга среднесуточных показателей некоторых загрязнителей воздуха в городе Душанбе в период с 2017 по 2021 год.

Исследования показали, что эпизоды загрязнения атмосферного воздуха оксидами углерода и азота за исследованный период носили временный характер, повышаясь, в основном, в осенне-зимний период года. Показатели уровней серного ангидрида за период наблюдения оставались ниже предельно допустимых концентраций.

Ключевые слова: *загрязнение атмосферного воздуха, монооксид углерода (CO), монооксид азота (NO), диоксид азота (NO₂), серный ангидрид (SO₂).*

Одной из наиболее важных проблем современных городов представляется состояние загрязненности атмосферного воздуха в результате комбинированных воздействий природного и антропогенного характера на окружающую человека среду [1]. Пыльные бури, степные и лесные пожары, выделения животных, пыльца растений, выветривание горных пород, испарения заболоченных местностей и многие другие факторы относятся к разряду естественных загрязнений природного происхождения. Загрязнения антропогенного характера, которым значительно содействуют процессы урбанизации, появляются в связи с функционированием стационарных источников: производственных предприятий топливно-энергетической, атомной, химической, металлургической и других видов промышленности, сельскохозяйственных комплексов. Передвижными источниками загрязнения являются различные виды наземного транспорта, использующие дизельное топливо [2]. В промышленных зонах городов атмосферный воздух «обогащён» повышенным содержанием множества опасных примесей: пыли и взвешенных частиц, оксидов углерода, азота, серы, элементов свинца, меди, ртути, никеля, кадмия и других тяжелых металлов [3-5].

Адрес для корреспонденции: Шарофова Мижгона Умеджоновна. E-mail: mijgona72@mail.ru.

Атмосферный воздух, как основной компонент окружающей среды, обладает наибольшим влиянием на состояние здоровья населения. Всемирная организация здравоохранения (ВОЗ) определила загрязнение воздуха вне помещений как одну из серьёзнейших экологических угроз развития неинфекционной патологии у человека [6,7].

Город Душанбе не обладает развитой промышленной инфраструктурой, однако предприятия, которые в определённой степени способствуют загрязнению атмосферного воздуха, на его территории функционируют. Среди них цементный завод, теплоэлектростанция, текстильный комбинат, небольшие мастерские. Следует отметить негативное влияние на атмосферный воздух скоплений мусора, сточных вод, различных отходов и др.

Производство цемента с использованием высокотемпературных процессов неизбежно приводит к образованию газообразных выделений из печей, которые, наряду с огромным количеством пылевых компонентов, выбрасываются из дымовых труб в атмосферу. Основными газами, образующимися в процессе производства цемента, являются быстроиспаряющиеся в атмосферу оксиды азота, углерода, серы, аммиак, летучие органические соединения и другие [8].

Для функционирования крупнейшей в стране тепловой электростанции используется угольное топливо, приводящее при его сгорании к выбросам в атмосферу вредных веществ (угарный газ, оксиды азота, диоксид серы, взвешенные частицы, зола, пыль, ртуть, мышьяк и др.), которые могут распространяться с воздушными потоками на сотни километров от источника загрязнения [9].

В текстильном производстве в качестве отбеливающего средства для шелковых и шерстяных тканей используется диоксид серы [10]. Кроме того, дезинфицирующие свойства диоксида серы широко используются в сельском хозяйстве и, в том числе, в качестве консерванта при производстве отдельных видов пищевых продуктов, в частности, сухофруктов и газированных напитков.

Доминирующая роль в процессе загрязнения воздуха принадлежит автомобильному транспорту, который, по результатам многочисленных опубликованных исследований, выделяет в атмосферу от 80 до 95% вредных, токсических веществ. Список вредных выбросов, наносящих существенный вред здоровью человека, довольно внушителен. Он включает выхлопные газы, нефтепродукты, бензол, твердые частицы, канцерогенные вещества, свинец, формальдегид, бензопирен, оксиды азота, углерода, диоксид серы и др. Неуклонный рост числа автомобилей, активная эксплуатация в черте города грузового автотранспорта, особенно подержанных автомобилей, асфальтная пыль способствуют значительному увеличению концентрации вредных веществ в приземных слоях атмосферы [11].

Таким образом, изучение проблематики загрязнения окружающей человека среды и атмосферного воздуха показало, что среди множества загрязняющих воздух веществ первостепенное значение придаётся определению уровней следующих загрязнителей: оксида углерода (CO), образующегося при неполном сгорании углеродсодержащих видов топлива, монооксида (NO) и диоксида азота (NO₂), которые образуются при сгорании топлива на транспорте и в промышленности, а также двуокиси серы (SO₂), образующейся при сгорании ископаемых видов топлива в производственном процессе [2-11].

Целью данного исследования явилось изучение динамики показателей среднемесячного уровня загрязнённости приземного слоя атмосферного воздуха города Душанбе некоторыми газообразными поллютантами в период с 2017 по 2021 год.

Материалы и методы исследования

Измерение содержания изучаемых параметров проводилось ежесуточно на протяжении 5 лет с 2017 по 2021 гг. с определением среднесуточных показателей за каждый месяц пятилетнего периода исследования.

Для измерения концентрации изученных газов использовались следующие приборы:

- концентрацию окиси углерода (угарного газа – CO) в атмосферном воздухе измеряли с использованием анализатора Thermo Scientific Model 48-i (диапазон измерения 0-100 ppm);
- концентрацию двуокиси серы (сернистого ангидрида – SO₂) определяли с помощью Импульсного флуоресцентного анализатора Thermo Scientific Model 43-i (диапазон измерения 50-1000 ppm);
- измерение концентраций оксида азота NO и диоксида азота NO₂ проводили на анализаторе Thermo Scientific Model 42-i и компенсационном анализаторе (диапазон измерения 500-1000 ppm).

Постоянный мониторинг содержания газов в приземном слое атмосферы проводился на территории Агентства по Гидрометеорологии Республики Таджикистан (координаты: широта 38°34'06.76"с.ш., долгота 68°46'50.99"в.д., высота 824 м).

Результаты собственных исследований и обсуждение

Монооксид углерода или угарный газ (CO) образуется в процессе сгорания топлива на транспорте, в бытовых и промышленных печах и любых материалов, содержащих углерод. Среднемесячная предельно допустимая концентрация этого газа установлена ВОЗ в размере 3 мг/м³ атмосферного воздуха [6].

CO считается значимым индикатором загрязнения воздушной среды автотранспортом, выделяющим свыше 50% угарного газа в атмосферу. Увеличению поступления CO в атмосферу способствуют: скопление автотранспорта на перекрестках и в пробках, частая смена режимов торможения и ускорения автомобилей, длительный срок эксплуатации автотранспорта и многое другое. Имеются данные, что CO может скапливаться в закрытых жилых зонах и задерживаться там до двух месяцев.

Следует отметить, что в последние годы в Душанбе увеличилось число личного и общественного автотранспорта, сдана в эксплуатацию Душанбинская ТЭЦ.

При поступлении в организм при вдохе, CO активно проникает в кровь, образуя карбоксигемоглобин, что с течением времени неизбежно приводит к развитию гипоксии, анемии, патологии дыхательной, сердечно-сосудистой, эндокринной, иммунной систем, астенических состояний или ухудшению уже имеющихся заболеваний [12].

Как показали наши наблюдения за динамикой изменения среднемесячных показателей концентрации монооксида углерода в городе Душанбе в период с 2017 по 2021 гг., уровень CO в основном не превышал ПДК по данному показателю. Исключением были среднемесячные показатели монооксида углерода за сентябрь 2017 г., когда уровень угарного газа превысил допустимую норму на 16% и составил 3.47 мг/м³, а также данные за январь 2020 г., когда показатель составил 3.39 мг/м³, что превысило ПДК на 13% (рис.1).

Изучение динамики изменений среднемесячного содержания монооксида азота (NO) в приземном атмосферном воздухе в г. Душанбе показало, что данный показатель практически не превышал установленную предельно допустимую концентрацию на протяжении всего периода исследования.

Исключение составили среднемесячные значения монооксида азота в октябре 2018 г. и в декабре 2021 г., превысив нормативные показатели соответственно на 12% и 18% (рис. 2). Оценивая динамику изменений данного показателя, в целом, в течение периода наблюдений, можно отметить, что относительное его увеличение наблюдается в осенне-зимние и снижение в весенне-летние периоды. Анализ изменений показателя загрязнённости воздуха диоксидом азота в г. Душанбе выявил, что максимальное превышение ПДК по данному показателю на 17.5% наблюдалось в августе 2017 г., однако, далее отмечалась тенденция к снижению концентрации NO_2 . В октябре этого года показатель исследуемого загрязняющего вещества превышал его ПДК на 2.5%, но уже в ноябре – нормализовался. В течение 2018 и 2019 гг. превышения ПДК диоксида азота выявлено не было. В 2021 г. наблюдалось однократное увеличение среднемесячного показателя NO_2 на 12.5% в декабре месяце (рис. 3).

Диоксид азота, будучи тяжелее воздуха, скапливается в приземном слое атмосферы. Даже при высоких концентрациях оксидов азота человек, вдыхающий их, не испытывает неприятных ощущений [12,13]. Оксиды азота поражают альвеолярную ткань, приводя к снижению дыхательных функций и увеличению процента заболеваемости верхних и нижних дыхательных путей, увеличивают содержание в крови метгемоглобина, нитратов, нитритов, азотистых кислот, приводя к развитию патологии сердечно-сосудистой системы. При воздействии ультрафиолетового излучения от Солнца активируются реакции взаимодействия углеводородов с оксидами азота, приводящими к образованию токсических фотооксидантов, составляющих основу «смога» [12-14].

Известно, что диоксид серы также является загрязнителем приземных слоёв атмосферы, выделяемым транспортными средствами. По данным Всемирной организации здравоохранения, увеличение среднесуточной концентрации SO_2 на 0.01 мг/м^3 приводит к росту смертности от заболеваний органов дыхания на 1.2%, от сердечно-сосудистой патологии на 0.6%, прежде всего людей пожилого и старческого возраста.

Наши исследования уровня серного ангидрида в атмосферном воздухе г. Душанбе выявили, что за весь пятилетний период наблюдения уровень SO_2 оставался существенно ниже показателя ПДК (рис. 4).

В ы в о д ы

Исходя из вышеизложенного, можно заключить, что эпизоды загрязнения атмосферного воздуха оксидами углерода и азота за исследованный период носили временный характер. Уровень сернистого газа за весь период наблюдения оставался в пределах допустимой нормы.

Для более точного определения уровней загрязнённости города целесообразно вести мониторинг в нескольких районах, в том числе, в жилых зонах, расположенных вблизи промышленных предприятий и оживлённых автомагистралей.

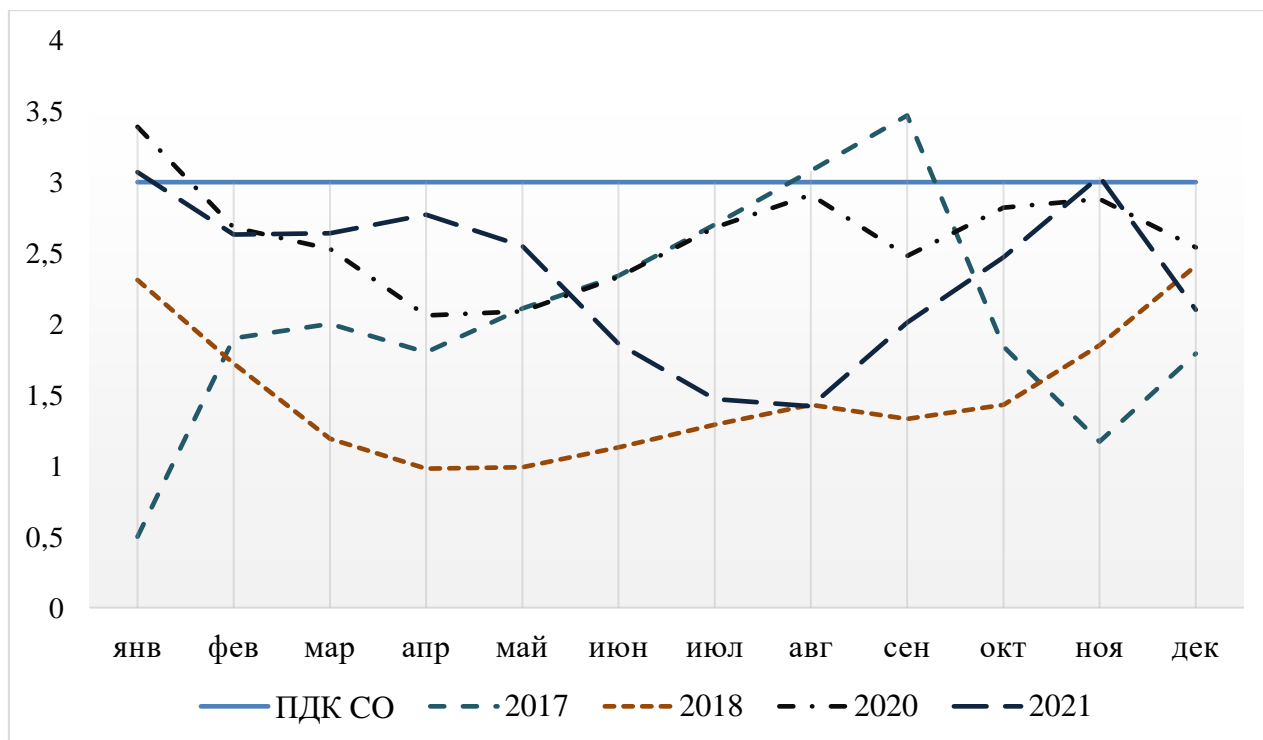


Рис. 1. Динамика среднемесячных показателей содержания монооксида углерода (CO) в атмосферном воздухе г. Душанбе в период с 2017 по 2021 гг. (в мг/м³).

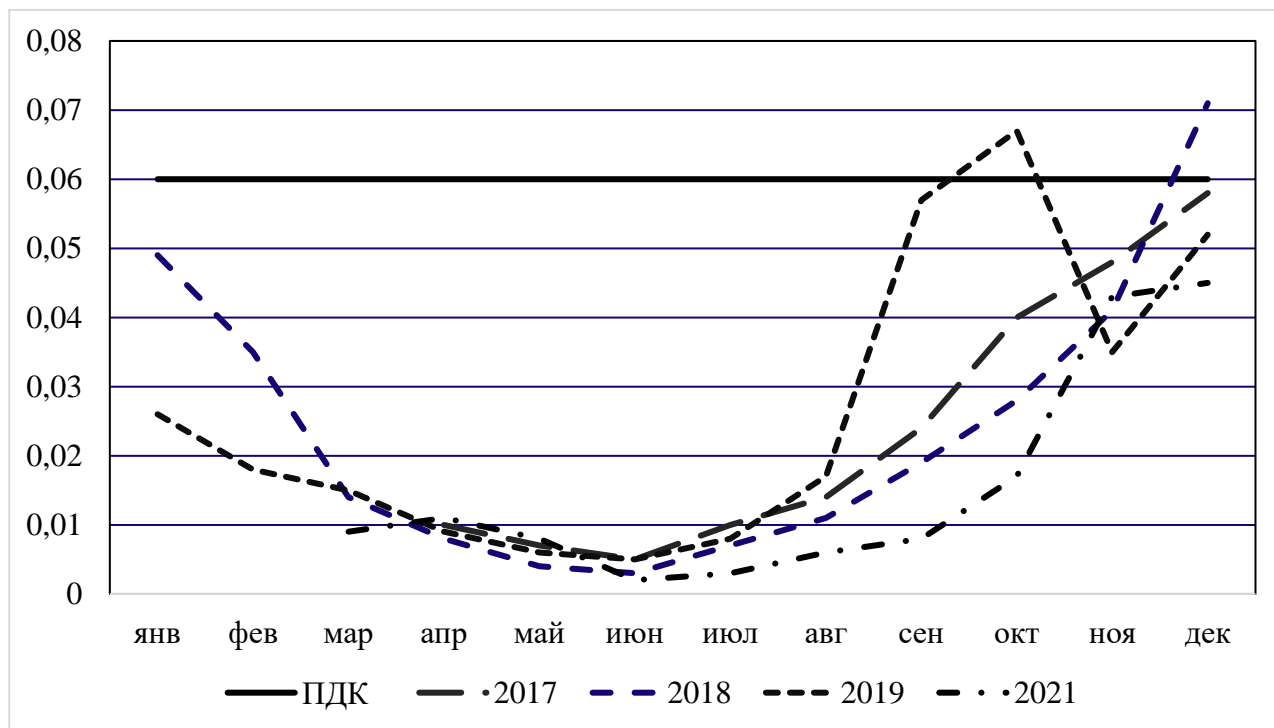


Рис. 2. Динамика среднемесячных показателей содержания монооксида азота (NO) в атмосферном воздухе г. Душанбе в период с 2017 по 2021 гг. (в мг/м³).

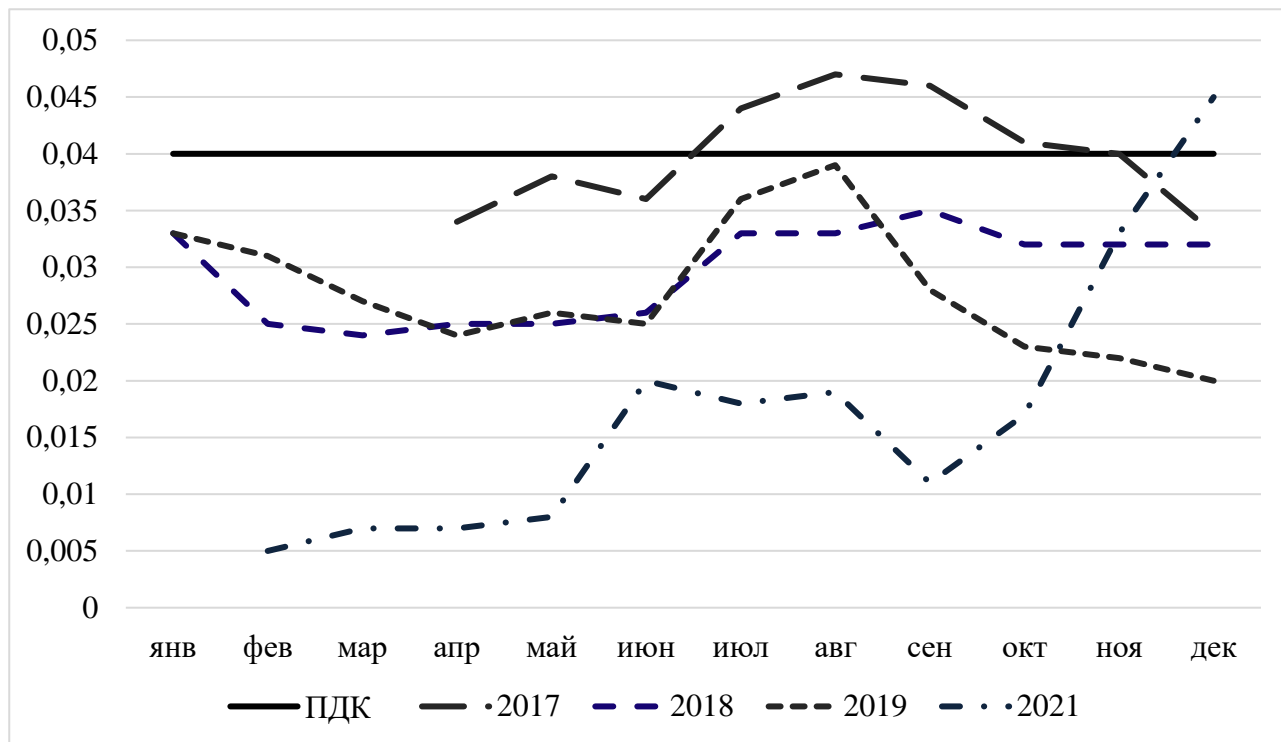


Рис. 3. Динамика среднемесячных показателей содержания диоксида азота (NO₂) в атмосферном воздухе города Душанбе в период с 2017 по 2021 гг. (в мг/м³).

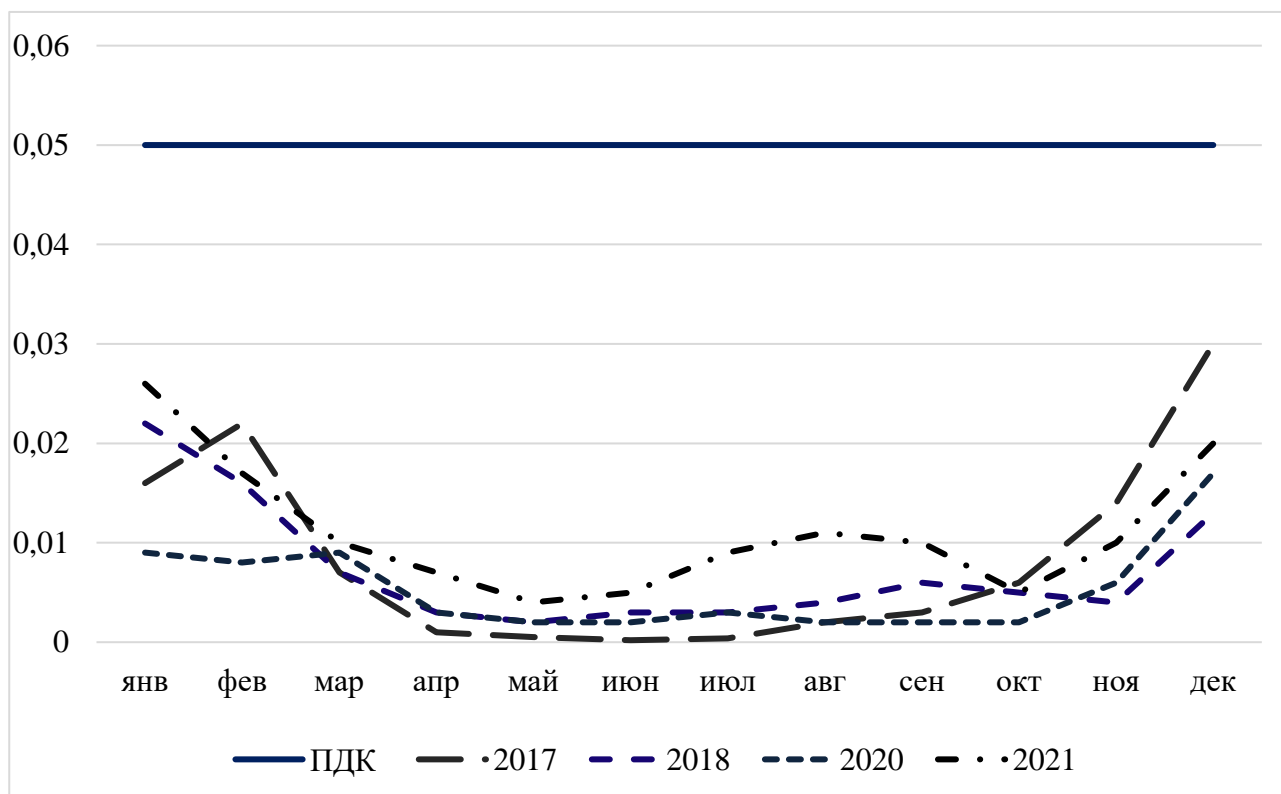


Рис. 4. Динамика среднемесячных показателей содержания диоксида серы (SO₂) в атмосферном воздухе г. Душанбе в период с 2017 по 2021 гг. (в мг/м³).

Поступило 09.11.2023

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Давыдова И.С., Гапоненко А.В. Проблема загрязнения атмосферного воздуха в городах. – *Sciences of Europe*, 2017, №14-2 (14).
2. Ахмадиев Г.М. Алгоритм снижения природных и антропогенных опасных факторов на окружающую среду. – *Ермаковские чтения в Набережных Челнах. Культурно-историческая и социально-экономическая динамика регионов: вызовы и возможности*, 2023, с. 453-456.
3. Дергунова Д.Р., Тулина А.В. О некоторых вопросах загрязнения атмосферного воздуха. – *E-Scio*, 2023, № 8 (83), с. 12-18.
4. Корнилицына М.Д., Барг А.О. Актуализация потребности в улучшении качества атмосферного воздуха в условиях экологического риска. – *Актуальные проблемы моделирования, проектирования и прогнозирования социальных и политических процессов в мультикультуральном пространстве современного общества*, 2022, с. 76-82.
5. Литвинова А.И., Евстигнеева Н.А., Евстигнеева Ю.В. Проблема загрязнения атмосферного воздуха урбанизированных территорий и пути ее решения. Охрана биоразнообразия и экологические проблемы природопользования, 2022, с. 101-105.
6. Cromar K., Lazrak N. Информирование о рисках, связанных с загрязнением атмосферного воздуха в Европейском регионе ВОЗ: обзор индексов качества воздуха и извлеченные уроки. – 2023, с. 5-12.
7. Загрязнение атмосферного воздуха (воздуха вне помещений). – *Информационный бюллетень ВОЗ*, 19 сентября 2022г.
8. Точенов Д.С., Непобедный М.В. Загрязнение окружающей среды при производстве цемента. – *Актуальные проблемы техносферной безопасности-2023*, 2023, с. 58-60.
9. Калашников А.А. Экологическое влияние от тепловых электростанций на окружающую среду. – *Региональные аспекты развития науки и образования в области архитектуры, строительства, землеустройства и кадастров в начале III тысячелетия*, 2022, с. 416-418.
10. Абдуганиев Н.Н. и др. Влияние текстильной промышленности на экологию. – *Conference Zone*, 2022, с. 61-65.
11. Мертвищев Г.А. и др. Проблематика загрязнения окружающей среды городским транспортом. – *Вестник Совета молодых ученых Рязанского государственного агротехнологического университета имени ПА Костычева*, 2022, № 1, с. 69-74.
12. Chen Z. et al. Health effects of exposure to sulfur dioxide, nitrogen dioxide, ozone, and carbon monoxide between 1980 and 2019: A systematic review and meta-analysis. *Indoor air*. – 2022, v. 32, № 11, p. e13170.
13. Jion M.M.M.F. et al. A critical review and prospect of NO₂ and SO₂ pollution over Asia: Hotspots, trends, and sources. – *Science of The Total Environment*, 2023, v. 876, p. 162851.
14. Masroor K. et al. Exposure to ambient gaseous air pollutants and adult lung function: a systematic review. – *Reviews on Environmental Health*, 2023, v. 38, № 1, pp. 137-150.

Ш.С.Сагдиева, М.У.Шарофова, С.Б.Самиев*, Ш.Ш.Самиева, Ф.Рахими**, М.Миршохи
**ТАҲЛИЛИ НИШОНДИҲАНДАҶОИ МИЁНАИ ШАБОНАРЌЗИИ БАЪЗЕ
МОДДАҶОИ ОЛУДАКУНАНДА ДАР ТАРКИБИ ҲАВОИ АТМОСФЕРИИ
ШАҲРИ ДУШАНБЕ ДАР ДАВРАИ АЗ СОЛИ 2017 ТО СОЛИ 2021**

*Маркази тадқиқоти технологияҳои инноватсионии
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,
Озмоишгоҳи фарматсевтика ва пизишкии таҷрибавӣ,
*Агентии обуҳавошиносии Ҷумҳурии Тоҷикистон,
**Институти физикаву техникаи ба номи С.У.Умарови
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола таҳлили мониторинги нишондиҳандаҳои миёнаи шабонарӯзии баъзе моддаҳои олу-
дакунандаи атмосфера дар шаҳри Душанбе дар давраи аз соли 2017 то соли 2021 оварда шудааст.
Тадқиқот нишон дод, ки эпизодҳои ифлосшавии ҳавои атмосферӣ бо оксидҳои карбон ва нитроген дар
давраи тадқиқшуда муваққатӣ буда, асосан дар давраи тирамоҳу зимистони сол зиёд мешуданд. Сатҳи
ангидриди сулфур дар давраи мушоҳида аз консентратсияи ҳадди иҷозат додашуда паст боқӣ монд.

Калимаҳои калидӣ: олудашавии ҳавои атмосфера, оксиди карбон (CO), оксиди нитроген (NO),
диоксиди нитроген (NO₂), ангидри дисулфур (SO₂).

Sh.S.Sagdieva, M.U.Sharofova, S.B.Samiev*, Sh.Sh.Samieva, F.Rahimi**, M.Mirshahi
**ANALYSIS OF AVERAGE DAILY INDICATORS OF SOME POLLUTANTS
IN THE COMPOSITION OF ATMOSPHERIC AIR IN DUSHANBE CITY
FROM 2017 TO 2021**

*Center for Research of Innovative Technologies, National Academy of Sciences of Tajikistan,
*Agency for Hydrometeorology of the Republic of Tajikistan,
**S.U.Umarov physical-technical institute, National Academy of Sciences of Tajikistan*

The article presents an analysis of the average daily indicators of some air pollutants monitoring in the
Dushanbe city for the period from 2017 to 2021. The research has shown that episodes of atmospheric air
pollution with carbon and nitrogen oxides over the period studied were temporary, increasing mainly in the
autumn-winter period of the year. Sulfuric anhydride levels during the observation period remained below the
maximum permissible concentrations.

Key words: atmospheric air pollutions, carbon monoxide (CO), nitrogen monoxide (NO), nitrogen dioxide
(NO₂), sulfuric anhydride (SO₂).

Сведения об авторах:

1. **Сагдиева Шоиста Самаровна** – кандидат медицинских наук, Центр по исследованию инновационных технологий НАН Таджикистана, старший научный сотрудник лаборатории Фармацевтики и экспериментальной медицины. E-mail: shoistass@mail.ru;
2. **Шарофова Мижгона Умеджоновна** – доктор медицинских наук, Центр по исследованию инновационных технологий НАН Таджикистана, главный научный сотрудник, зав. лабораторией Фармацевтики и экспериментальной медицины. E-mail: mijgona72@mail.ru;
3. **Самиев Сангинмурод Боевич** – Агентство по гидрометеорологии, начальник Управления мониторинга окружающей среды. E-mail: sangin712@mail.ru;
4. **Самиева Шамсия Шарифовна** – Центр по исследованию инновационных технологий НАН Таджикистана старший научный сотрудник лаборатории Фармацевтики и экспериментальной медицины. E-mail: shamsiyasamieva@gmail.com;
5. **Фарход Рахими** – доктор физико-математических наук, академик НАН Таджикистана, Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана. E-mail: frahimi-2002@mail.ru;
6. **Массуд Миршохи** – доктор медицинских наук, Центр по исследованию инновационных технологий НАН Таджикистана, главный научный сотрудник лаборатории Фармацевтики и экспериментальной медицины. E-mail: massoud.mirshahi@inserm.fr.

УДК 547.913:543.544.45

Специальность: 1.4.4 – Физическая химия

Академик НАН Таджикистана Д.Х.Халиков,

Х.К.Махкамов, С.Халикова, Д.С.Мухиддинов, Х.Х.Авлоев

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ КИСЛОТНОЙ ГИДРОЛИЗ-ЭКСТРАКЦИИ ПРОТОПЕКТИНОВ КОРЗИНКИ ПОДСОЛНЕЧНИКА И СВЕКЛОВИЧНОГО ЖОМА

*Национальная академия наук Таджикистана,**Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана*

Приводятся результаты гидролиз-экстракции протопектинов (ПП) корзинки подсолнечника (КП) и свекловичного жома (СЖ) при различных рН, температуре 85°C и продолжительности реакции 60 мин. Раствор-гидролизат разделяют по ранее разработанной методике на фракции: микрогель (МГ), пектиновые вещества (ПВ) и олигосахариды (ОС). Предполагается, что процесс гидролиз-экстракции включают в себя комбинации по крайней мере трёх видов реакции: гидролиз солей, гидролиз сложноэфирных и гликозидных связей. В зависимости от содержания ионов металлов (ПВ) и концентрации ионов водорода с одной стороны, и прочности связи ПП с веществами клеточной стенки с другой, оптимальные области рН и температуры при экстракции пектиновых полисахаридов значительно изменяются, что является следствием изменения доли перечисленных реакций. Установлено, что наименьший выход МГ наблюдается при распаде ПП СЖ, а количество фракций ПВ и ОС в этих условиях в 2-3 раза больше, чем содержание этих компонентов при гидролизе ПП КП. Эта разница наиболее ощутима в области рН=1-2. Показано, что наибольшее количество остатков ГК имеет место в ПВ СЖ, а затем по порядку снижения звеньев ГК находятся МГ КП, ПВ КП и МГ СЖ, причём содержание ГК в последнем объекте значительно отличается.

Ключевые слова: протопектин, пектиновые вещества, корзинка подсолнечника, свекловичный жом, микрогель, кислотность раствора, константа скорости реакции.

Основной стадией производства пектиновых полисахаридов является кислотная гидролиз-экстракция растительного сырья [1-3]. Этот процесс включает в себя комбинации по крайней мере трёх видов реакций: гидролиз солей, гидролиз сложноэфирных и гликозидных связей. В зависимости от содержания ионов металлов пектиновых веществ (ПВ) и концентрации ионов водорода с одной стороны, и прочности связи протопектинов (ПП) с веществами клеточной стенки с другой, оптимальные области рН и температуры при экстракции пектиновых полисахаридов значительно изменяются, что является следствием изменения доли перечисленных реакций [4]. Для достижения оптимальных условий выделения нативной формы пектиновых полисахаридов при гидролиз-экстракции необходимо направить процесс так, чтобы увеличивались доли реакции гидролиза солей при одновременном снижении реакции деполимеризации и деэтерификации. При постоянной температуре существенными

Адрес для корреспонденции: Халиков Джурабой Халикович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: dkhalikov@rambler.ru

параметрами оптимизации процесса гидролиз-экстракции являются природа исходного сырья и кислотность раствора гидролизата. Наиболее перспективными видами растительного сырья, представляющими интерес для промышленности при производстве пектиновых полисахаридов, являются свежелевый жом (СЖ), корзинка подсолнечника (КП), яблочные выжимки (ЯВ) и цитрусовые корочки (ЦК). Среди перечисленных объектов наиболее лабильные связи с веществами клеточной стенки образуют ПП ЯВ и ЦК, что является причиной получения достаточно высококачественных ПВ при относительно высоких значениях рН раствора. В то же время для получения пектиновых веществ (ПВ) КП и СЖ нужны более низкие значения рН раствора, что приводит к возрастанию доли двух последних реакций, одновременно со снижением молекулярной массы и изменения первичной структуры ПВ.

Целью настоящей работы явилось сравнительное изучение процесса распада ПП КП и СЖ при широких значениях изменения рН раствора-гидролизата и определение их показателей.

В данной работе в качестве сырья использовались КП, выращенные на опытном участке Института химии и СЖ, любезно предоставленные представителями ООО «Узловский молочный комбинат» (Россия, Тульская область, г. Узловая). Как уже отмечалось ранее [5-7], отличительной чертой КП является высокое содержание в них ионов кальция и для извлечения целевого продукта необходимы высокая температура, воздействие сильных кислот в течение длительного времени. Аналогичные условия были созданы при выделении ПВ СЖ. Исходя из этого, гидролиз-экстракцию растительного сырья проводили в условиях статического режима (СР) при температуре 85°C и продолжительности процесса 60 мин.

Раствор-гидролизат после охлаждения нейтрализовали при помощи аммиака до рН=3.5 и разделяли на три фракции – микрогель (МГ) центрифугированием, ПВ осаждением оставшегося раствора этиловым спиртом, и так называемых олигосахаридов (ОС) путём испарения оставшегося маточного раствора [1]. Остатки клеточной стенки извлекали из экстрактора и высушивали при 55-60°C для установления массы распавшихся компонентов.

На рис. 1 приводится выход МГ, ПВ и ОС при гидролиз-экстракции КП и СЖ. Из рис.1 следует, что наименьший выход МГ наблюдается при распаде ПП СЖ, а количество фракции ПВ и ОС в этих условиях в 2-3 раза больше, чем содержание этих компонентов при гидролизе ПП КП. Эта разница наиболее ощутима в области рН=1-2.

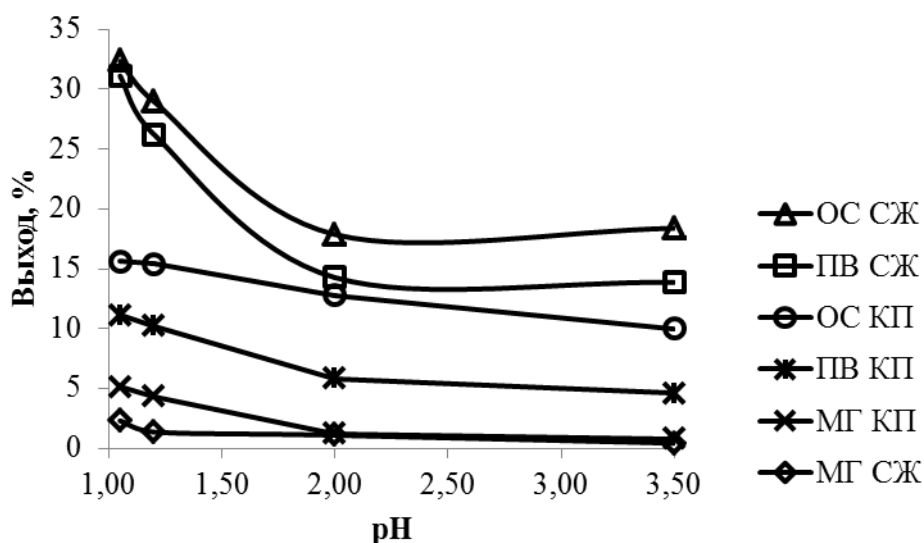


Рис. 1. Выход фракций МГ, ПВ и ОС при изменении рН реакционной среды (Т=85°C, τ=60 мин).

На рис. 2 приводится содержание остатков галактурановой кислоты в двух основных продуктах распада протопектинов КП и СЖ, а именно в МГ и ПВ.

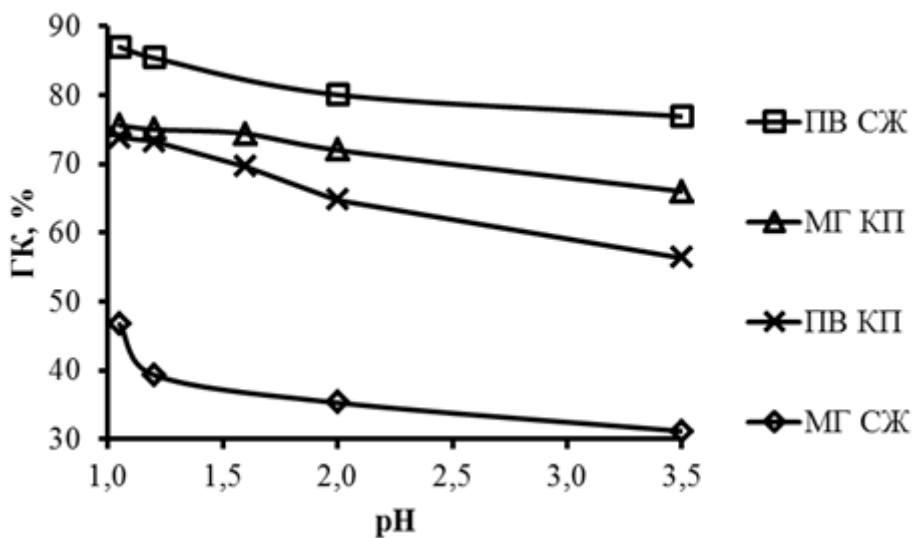


Рис. 2. Содержание остатков галактурановой кислоты во фракциях МГ и ПВ при распаде протопектинов КП и СЖ.

Из рис. 2 видно, что наибольшее количество остатков ГК имеет место в ПВ СЖ, а затем по порядку снижения звеньев ГК находятся МГ КП, ПВ КП и МГ СЖ, причём содержание ГК в последнем объекте значительно отличается.

Учитывая тот факт [2], что фракции ОС содержат, в основном, низкомолекулярные компоненты с низким содержанием ГК, в настоящей работе они не принимаются во внимание. Это не оказывает существенного влияния на установление основных закономерностей процесса распада ПП, но в значительной степени упрощает ход кинетического расчёта. При этом первоначальное содержание ПП в КП принимаются равным суммарному количеству фракций МГ и ПВ (рис. 3) после полного завершения процесса распада.

На рис. 3, наряду с содержанием фракций МГ и ПВ, приводится также их суммарный выход.

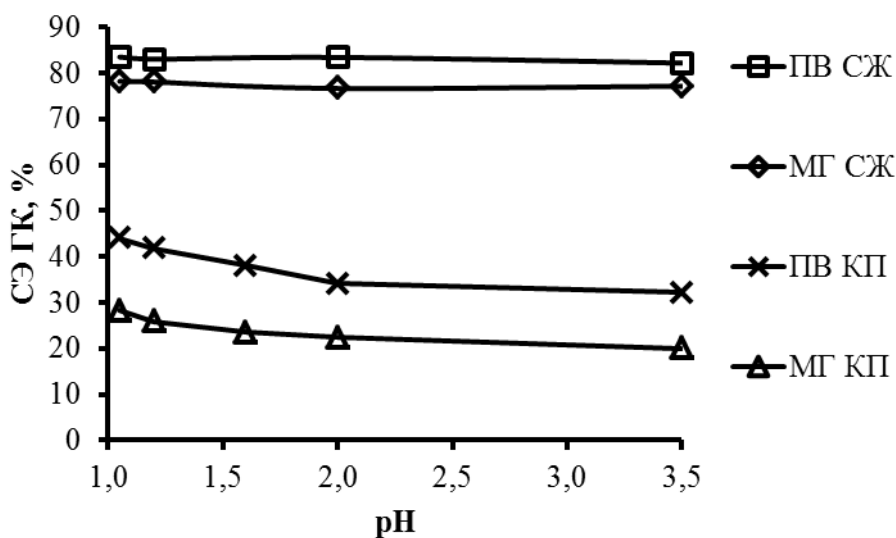


Рис. 3. Изменение степени этерификации остатков ГК в МГ и ПВ в зависимости от pH раствора гидролизата.

Обработку экспериментальных данных по распаду ПП проводили по уравнению скорости химической реакции, протекающей в потоке, полученному с использованием метода гидродинамики [8] в следующем виде:

$$n_o x = -n_o \frac{1+\beta}{\beta} \ln(1-x) - k \frac{PV}{\beta RT}, \quad (1)$$

где: n_o – суммарное содержание остатков ГК (МГ+ПВ) после завершения процесса распада ПП или содержание остатков ГК в исходном ПП в расчёте на один грамм КП, мэк/г-сырья; x – доля остатков ГК в распавшемся ПП при данном объёме элюента; P – давление; V – объём колонки; R – газовая постоянная; T – температура.

Если обозначить $n_o x = Z$ и $-n_o \ln(1-x) = Y$, то уравнение (1) будет описывать прямую линию с отрезком на оси ординат $-k(PV/\beta RT)$ и тангенсом угла φ наклона $\operatorname{tg} \varphi = (1+\beta)/\beta$, что позволяет оценить величины β и k .

На рис. 4 приводится график зависимости величины Z от Y , построенный согласно уравнению (1) для образцов КП, предварительно обработанных раствором NaCl различной концентрации и без соответствующей обработки.

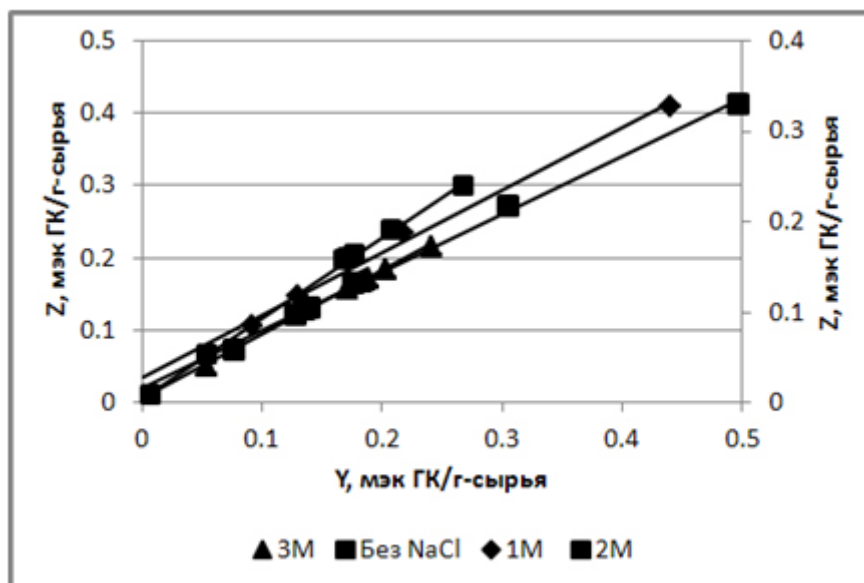


Рис. 4. Зависимость Z от Y для каталитического распада ПП корзинки подсолнечника в потоке растворов различной концентрации NaCl. Линии «Без NaCl» и «3M NaCl» расположены по основной вертикальной оси, а остальные – по вспомогательной оси.

Из рис.4 видно, что для всех исследованных образцов зависимость величин Z и Y достаточно хорошо укладывается в прямолинейную функцию, что позволяет определить величину k и другие параметры уравнения (1). Соответствующие данные приводятся в таблица 1.

Таблица 1

Параметры уравнения (1) для распада ПП КП при предварительной обработке исходного сырья растворами NaCl различной концентрации*

C(NaCl), М	Уравнение корреляции	R ²	β	k
0	Z=0.8035Y+0.0195	0.9983	-5.089	12.09
1	Z=0.691Y+0.0286	0.9964	-3.236	11.28
2	Z=0.8915Y+0.0039	0.9988	-9.217	4.38
3	Z=0.8865Y+0.006	0.9993	-8.696	6.36
*V=241.15 см ³ , P=1 атм, T=358.15 К, R=82.06 (атм·см ³)/((мэк/г-сырья)·К).				

Корреляционные уравнения, представленные в табл. 1, и соответствующие величины коэффициента корреляции (R²) ещё раз свидетельствуют о хорошей применимости уравнения (1) для описания процессов распада ПП КП в динамическом режиме.

Аналогичное исследование было проведено для образцов КП при температуре 60 и 70°C. Показано, что и в этом случае взаимосвязь параметров Z и Y достаточно хорошо описывается корреляционными уравнениями: Z=0.8639Y+0.0031 (R²=0.9994, 60°C) и Z=0.8555Y+0.0067 (R²=0.9978, 70°C). Из этих данных были рассчитаны величины β и k, равные: β =-7.348, k=2.58 (60°C) и β =-6.920, k=5.41 (70°C). На основании этих данных и используя величину k при температуре 85°C (табл. 1) по уравнению Аррениуса был построен график зависимости величин Ln k от 1/T, хорошо описывающийся корреляционным уравнением Ln k=-7322.1(1/T)+22.963 (R²= 0.9949), что позволило оценить энергию активации процесса распада ПП, равную E_a=60.81 кДж/моль (ГК).

Таким образом, экспериментальные данные по распаду протопектина корзинки подсолнечника в динамическом режиме достаточно хорошо можно описать на основании общей закономерности кинетики химической реакции, протекающей в потоке растворителя.

Поступило 05.07.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Халиков Д.Х., Мухидинов З.К., Авлоев Х.Х. – ДАН РТ, 1996, т.39, №11-12, с.76-80.
2. Халиков Д.Х., Горшкова Р.М. и др. – Химия природных соединений, 2002, №2, с.118-120.
3. Горшкова Р.М., Мухидинов З.К. и др. – ДАН РТ, 2010, т.53, №9, с.701-706.
4. Горшкова Р.М., Мухидинов З.К. и др. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук, 2010, №3(140), с.69-75.
5. Lin M.J.Y., Sosulski F.W. et al. – Can. J. Plant Sci., 1975, v.55, pp.507-513.
6. Zitko V., Bishop C.T. – Can. J. Chem., 1966, v.44, pp.1275-1282.
7. O'Neil M.A., York W.S. – Oxford: Blackwell Publishing Ltd., Annual Plant Reviews, 2003, v.8, pp.1-54.
8. Панченков Г.М., Лебедев В.П. Химическая кинетика и катализ. – М.: Изд. МГУ, 1961, с.46-54.

Д.Х.Халиков, Х.К.Махкамов, С.Халикова, Д.С.Муҳиддинов, Х.Х.Авлоев
**ОМУЗИШИ МУҚОИСАВИИ ГИДРОЛИЗ-ЭКСТРАКСИЯИ
 ПРОТОПЕКТИНҲОИ САБАДЧАИ ОФТОБПАРАСТ ВА ЧУХИ ЛАБЛАБУ**

Институти химияи ба номи В.И.Никитин

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар муҳитҳои гуногуни рН натиҷаи гидролиз-экстраксияи протопектини (ПП) сабадчаи офтобпараст (СО) ва чуҳи лаблабу (ЧЛ), ки дар ҳарорати 85°C ва давомнокии реаксия 60 дақ. гузаронида шуд, нишон дода шудааст. Маҳлули гидролизатро аз рӯи усули пешакӣ муайяншуда ба фраксияҳои микрогел (МГ), моддаҳои пектинӣ (МП) ва олигосахаридҳо (ОС) ҷудо карда шудааст. Тахмин карда мешавад дар протсессии гидролиз-экстраксия комбинатсияи се навъи реаксия: гидролизи намакҳо, гидролизи эфирҳои мураккаб ва бандҳои гликозидӣ дарбар мегирад. Вобаста ба миқдори ионҳои металлӣ МП ва концентратсияи ионҳои гидроген аз як тараф, мустақамии банди ПП ба девораҳои ҳуҷайра аз тарафи дигар, ҳарорат ва рН-и оптималӣ баръало тағйир меёбанд, ки аз саҳми реаксияҳои дар боло номбурда шаҳодат медиҳанд. Муайян карда шудааст, ки миқдори МГ ҳангоми тақсимшавии ПП ЧЛ камтарин буда, миқдори компонентҳои МП ва ОС нисбат ба гидролизи ПП СО 2-3 маротиба зиёдтар аст, ки ин фарқият дар рН-ҳои 1-2 баръало мушоҳида мешавад. Миқдори зиёди боқимондаҳои кислотаи галактуронӣ КГ дар МП ЧЛ дида мешавад ва дар қатори МГ СО, МП СО, ва МГ ЧЛ кам мешавад.

Калимаҳои калидӣ: протопектин, моддаҳои пектинӣ, сабадчаи офтобпараст, микрогел, суръати реаксия дар маҳлул, нерӯи фаъолкунанда.

D.Kh.Khalikov, Kh.K.Makhkamov, S.Khalikova, D.S.Mukhiddinov, Kh.Kh.Avloev
**COMPARATIVE STUDIES OF ACID HYDROLYSIS EXTRACTION
 OF SUNFLOWER BASKET PROTOPECTINS AND BEET PULM**

V.I.Nikitin Institute of Chemistry,

National Academy of Sciences of Tajikistan

In this article the results of hydrolysis-extraction of protopectins (PP) from sunflower basket (SB) and beet pulp (BP) at different pH, temperature 85°C and reaction duration 60 minutes are presented. The hydrolyzed solution is divided according to a previously developed method into fractions: microgel (MG), pectin substances (PS) and oligosaccharides (OS). Assuming that the hydrolysis-extraction process involves combinations of at least three types of reactions: hydrolysis of salts, hydrolysis of ester and glycosidic bonds. Depending on the content of metal ions (MI) and the concentration of hydrogen ions, on the one hand, and the strength of the bond between PP and cell wall substances, on the other, the optimal pH and temperature ranges for the extraction of pectin polysaccharides change significantly, which is a consequence of a change in the proportion of the listed reactions. It has been established that the lowest yield of MG is observed during the decomposition of PP BP, and the amount of the PS and OS fraction under these conditions is 2-3 times greater than the content of these components during the hydrolysis of PP, SB. This difference is most noticeable in the pH range of 1-2. It can be seen that the largest amount of HA residues occurs in PS, BP, and then, in order of decreasing HA units, there are MG, SB, PS, BP and MG, BS and the HA content in the latter object differs significantly.

Key words: *protopectin, pectin substances, sunflower basket, beet pulp, microgel, solution acidity, reaction rate constant.*

Сведения об авторах:

1. **Халиков Джурабай Халикович** – доктор хим. наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана. E-mail: dkhalikov@rambler.ru;
2. **Махкамов Хилолиддин Кахрамонович** – кандидат хим. наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, ведущий научный сотрудник;
3. **Халикова Саодатхон** – кандидат хим. наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, ведущий научный сотрудник;
4. **Мухиддинов Диловар Сайфуллоевич** – Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, старший научный сотрудник;
5. **Авлоев Хакбаркул Хайдарович** – кандидат хим. наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, ведущий научный сотрудник.

УДК 544.32

Специальность: 1.4.4 – Физическая химия

М.Д.Бобоёров, Ф.Дж.Саломов, Б.Б.Баротов, А.Ш.Насруллоев, И.Мирсаидзода
**СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
РАЗЛОЖЕНИЯ УРАНСОДЕРЖАЩИХ РУД ТАДЖИКИСТАНА**

*Национальная академия наук Таджикистана,
Агентство по химической, биологической, ядерной и радиационной безопасности*

НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 27.03.2023 г.)

В статье приведён сравнительный термодинамический анализ протекания ряда химических процессов при сернокислотном разложении урансодержащих руд Таджикистана. Показано, что значения энергии Гиббса в рассматриваемых процессах с участием минералов, входящих в урансодержащие руды Таджикистана, подтверждают протекание всех вероятных реакций при стандартных условиях.

Ключевые слова: *сравнительная оценка, термодинамический анализ, энергия Гиббса, урансодержащие руды, разложение.*

Самопроизвольное протекание изобарно-изотермического процесса определяется двумя факторами: энтальпийным, связанным с уменьшением энтальпии системы (ΔH), и энтропийным ($T\Delta S$), обусловленным увеличением беспорядка в системе вследствие роста её энтропии. Разность этих термодинамических факторов является функцией состояния системы, называемой изобарно-изотермическим потенциалом или свободной энергией Гиббса (G , кДж) [1].

Термодинамическое обоснование разложения минералов проведено с использованием следующих уравнений:

$$\Delta H^0_p = \sum \Delta_f H^0_{\text{кон.продукт}} - \sum \Delta_f H^0_{\text{исх. вещ-во}},$$

$$\Delta S^0_p = \sum \Delta S^0_{\text{кон.продукт}} - \sum \Delta S^0_{\text{исх. вещ-во}},$$

$$\Delta G^0_p = \Delta H^0 - T\Delta S^0.$$

Ранее были изучены процессы разложения урансодержащих руд минеральными кислотами, найдены оптимальные условия процессов разложения кислотами и предложены принципиальные технологические схемы переработки урансодержащих руд Таджикистан [2-4].

Руды месторождений “Западный Таджикистан”, “Центральный Таджикистан” и “Северный Таджикистан - 2” имеют сложный состав.

Рентгенофазовым анализом установлено, что в состав этих руд входят следующие минералы (табл. 1).

Адрес для корреспонденции: Бобоёров Мехровар Диловарович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по ХБРЯ безопасности НАНТ. E-mail: m.boboyorov@cbrn.tj.

Таблица 1

Минералы состава урансодержащих руд месторождений “Западный Таджикистан”, “Центральный Таджикистан” и “Северный Таджикистан - 2”

№	Месторождение	Минералогический состав
1	“Центральный Таджикистан”	1. Уранинит 2. Каолинит 3. Доломит 4. Сфен
2	“Западный Таджикистан”	5. Уранинит 6. Альбит 7. Пирит 8. Сфен
3	“Северный Таджикистан - 2”	9. Уранинит 10. Доломит 11. Альбит 12. Каолинит

Для протекающих реакций при разложении руды рассчитаны величины энергии Гиббса, которые обобщены в табл. 2 и в виде графика влияния температуры всех процессов на указанные величины рис 1. Согласно данным табл. 2 и рис. 1, можно констатировать, что сернокислотное разложение вышеуказанных минералов значительно ускоряется во времени при увеличении температуры.

Таблица 2

Величины энергии Гиббса для реакции вышеуказанных минералов серной кислотой в широком интервале температур

№ (минералы)	ΔG^0_{298}	ΔG^0_{313}	ΔG^0_{333}	ΔG^0_{353}	ΔG^0_{373}
	$\Delta G, \text{кДж/моль}$				
1	-192.41	-188.76	-188.64	-188.53	-188.41
2	-737.53	-749.38	-765.18	-780.98	-796.8
3	-245.3	-244.44	-243.3	-242.16	-241.02
4	-359.91	-362.47	-365.88	-369.28	-372.7
5	-192.41	-188.76	-188.64	-188.53	-188.41
6	-387.35	-373.36	-354.9	-336.4	-317.91
7	-65.7	-93.3	-130.1	-166.9	-203.7
8	-359.91	-362.47	-365.88	-369.28	-372.7
9	-192.41	-188.76	-188.64	-188.53	-188.41
10	-245.3	-244.44	-243.3	-242.16	-241.02
11	-317.91	-336.4	-354.9	-373.36	-387.35
12	-737.53	-749.38	-765.18	-780.98	-796.8

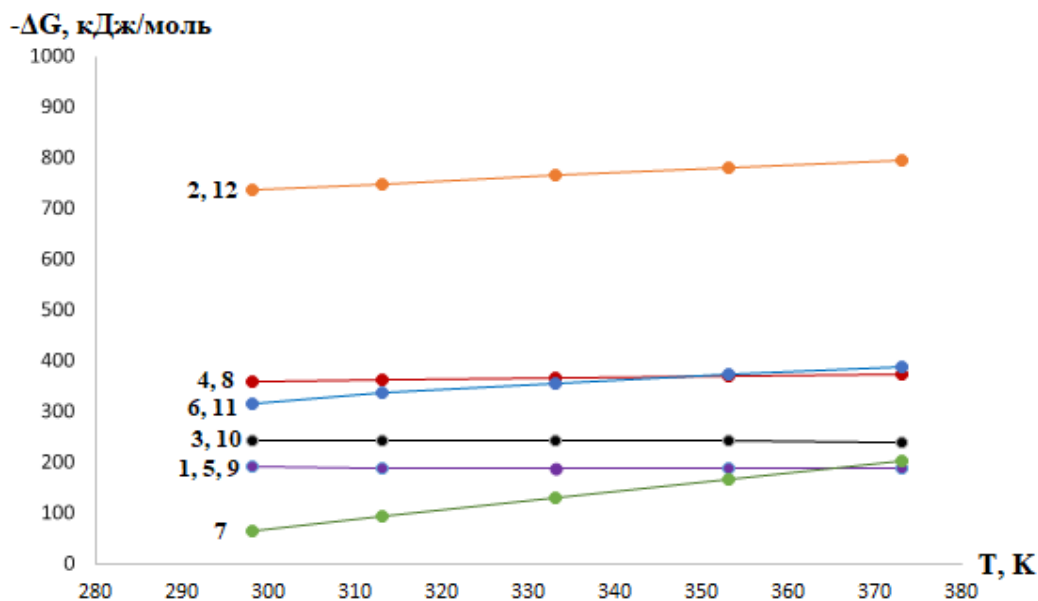


Рис. 1. Зависимость изменения энергии Гиббса (ΔG) от температуры разложения минералов, содержащихся в урановых рудах месторождений Таджикистана (1, 5, 9 – уранинит; 2, 12 – каолинит; 3, 10 – доломит; 4, 8 – сфен; 6, 11 – альбит; 7 – пирит).

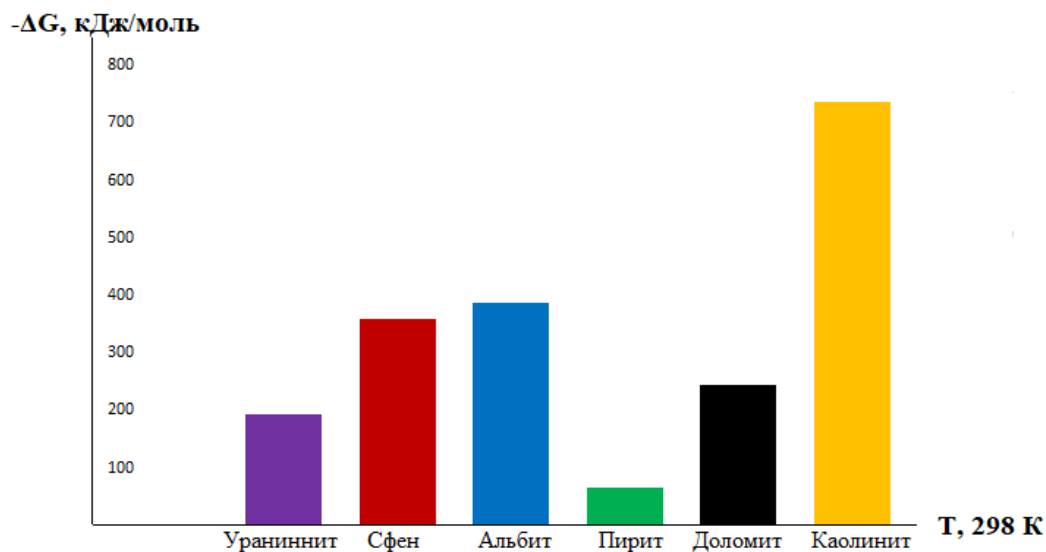


Рис. 2. Термодинамический анализ разложения минералов ураносодержащих руд Таджикистана при стандартных условиях.

Согласно рис. 2, результаты расчётов термодинамических характеристик разложения ураносодержащих руд Таджикистана серной кислотой указывают на вероятность протекания процесса в стандартных условиях.

Таким образом, показана перспективность сернокислотного разложения ураносодержащих руд месторождений Таджикистана при температуре в диапазоне от 298 до 373 К, в котором показано максимальное извлечение как урана, так и других наименований продуктов.

Поступило 27.03.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Краткий справочник физико-химических величин. Под редакцией К.П.Мищенко и А.А.Равделя. – Л.: Химия, 1974, 200 с.
2. Ходжиев С.К., Назаров Х.М., Баротов Б.Б., Бобоёров М.Д., Мирсаидов У.М. Сернокислотное выщелачивание урана из руд месторождения «Центральный Таджикистан». – ДАН РТ, 2017, №4, с.71-75.
3. Ходжиев С.К., Назаров Х.М., Хочиён М.М., Ахмедов М.З., Баротов Б.Б., Пулатов М.С., Мирсаидов И.У. Возможности переработки урансодержащих руд месторождения «Центральный Таджикистан». – ДАН РТ, 2017, т.60, №3-4, с.168-172.
4. Ходжиев С.К., Пулатов М.С., Муминов С.В., Бахронов С.М., Ахмедов М.З., Мирсаидов И.У. Физико-химические основы переработки урановых руд сернокислотным разложением и др. – ДАН РТ, 2017, т.60, №5-6, с.247-250.

М.Д.Бобоёров, Ф.Ҷ.Саломов, Б.Б.Баротов, А.Ш.Насруллоев, И.Мирсаидзода

БАҲОДИҶИИ МУҚОИСАВИИ РАВАНДҶОИ ТЕРМОДИНАМИКӢ ҲАНГОМИ ТАҶЗИЯИ МАЪДАНҶОИ УРАНДОРИ ТОҶИКИСТОН

Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола таҳлили муқоисавии термодинамикии як қатор равандҳои химиявӣ ҳангоми таҷзияи маъданҳои урандори Тоҷикистон тавассути кислотаи сулфат оварда шудааст. Бузургии қимати энергияи Гиббс дар равандҳои баррасишаванда бо иштироки минералҳои ба таркиби маъданҳои урандори Тоҷикистон дохилшаванда аз он шаҳодат медиҳад, ки эҳтимоли газариши ҳамаи реаксияҳо дар шароити муқаррарӣ вучуд дорад.

Калимаҳои калидӣ: баҳодиҷиҳои муқоисавӣ, таҳлили термодинамикӣ, энергияи Гиббс, маъданҳои урандор, таҷзия.

M.D.Boboyorov, F.J.Salomov, B.B.Barotov, A.Sh.Nasrulloev, I.Mirsaidzoda

COMPARATIVE ASSESSMENT OF THERMODYNAMIC PROCESSES OF DECOMPOSITION OF URANIUM-CONTAINING ORES IN TAJIKISTAN

Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety and Security Agency,

National Academy of Sciences of Tajikistan

In this article provides a comparative thermodynamic analysis of the occurrence of a number of chemical processes during the sulfuric acid decomposition of uranium-containing ores in Tajikistan. It is shown that the values of the Gibbs energy in the considered processes involving minerals included in the uranium-containing ores of Tajikistan confirm the occurrence of all possible reactions under standard conditions.

Key words: comparative assessment, thermodynamic analysis, Gibbs energy, uranium-containing ores, decomposition.

Сведения об авторах

1. Бобоёров Мехровар Диловарович – кандидат химических наук, Агентство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, старший научный сотрудник лаборатории технических услуг. E-mail: m.boboerov@cbrn.tj
2. Саломов Фирдавс Джаборович – Агентство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, старший научный сотрудник. E-mail: f.salomov@cbrn.tj
3. Баротов Бахтиёр Бурхонович – кандидат технических наук, Агентство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, начальник научно-исследовательского отдела и технических услуг. E-mail: b.barotov@cbrn.tj
4. Насруллоев Асомуддин Шарифович – Агентство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, докторант PhD. E-mail: nasrulloevasomuddin@gmail.com
5. Мирсаидзода Илхом – доктор технических наук, Агентство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, директор. E-mail: i.mirsaidzoda@cbrn.tj

УДК 546.662'87:669.0.17.1

Специальность: Физическая химия – 1.4.4.

В.Д.Абулхаев, М.А.Балаев*, академик НАН Таджикистана И.Н.Ганиев,

Х.Х.Назарзода, Б.Д.Сайдалиев, С.О.Убайдов

СИНТЕЗ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ТВЁРДЫХ РАСТВОРОВ СИСТЕМЫ

Tb₅Vi₃-Er₅Vi₃*Национальная академия наук Таджикистана,**Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана,***Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими*

В статье приведены результаты исследования синтеза и магнитных свойств твёрдых растворов системы Tb₅Vi₃ - Er₅Vi₃. Кристаллохимический анализ показал, что в системы Tb₅Vi₃ - Er₅Vi₃ образуются твердые растворы замещения, кристаллизующиеся в ромбической сингонии типа Y₅Vi₃. Исследованием магнитных свойств твердых растворов в диапазоне температур 298-500 К, установлено, что в указанном диапазоне температур твердые растворы проявляют парамагнитные свойства. Определена парамагнитная температура Кюри твёрдых растворов.

Ключевые слова: *диаграмма состояния, сплавы, твёрдые растворы, магнитная восприимчивость, температура Кюри.*

Диаграммы состояния систем Tb – Vi и Er – Vi в полном диапазоне концентраций изучены в [1, 2]. Установлено образование в этих системах висмутидов: Tb₅Vi₃, Tb₄Vi₃, TbVi, Er₅Vi₃ и ErVi. Висмутиды Tb₅Vi₃, Tb₄Vi₃, и Er₅Vi₃ при 1763, 1873 и 1703 К, соответственно, плавятся инконгруэнтно, а висмутиды TbVi и ErVi при 2033 и 2073 К, соответственно, плавятся конгруэнтно.

В [3] выявлено, что Tb₅Vi₃ и Er₅Vi₃ являются парамагнетиками с парамагнитной температурой Кюри 146 и 15 К, соответственно.

Целью данной работы явилось синтез и исследование магнитных свойств сплавов системы Tb₅Vi₃ – Er₅Vi₃.

Сплавы системы были приготовлены через каждые 10 мол.% Er₅Vi₃.

В качестве исходных компонентов использовали предварительно синтезированные Tb₅Vi₃ и Er₅Vi₃.

Сплавы системы Tb₅Vi₃ – Er₅Vi₃ получали следующим образом. Порошки предварительно синтезированных соединений Tb₅Vi₃ и Er₅Vi₃, отвечающие конкретному химическому составу сплава Tb_{5-x}Er_xVi₃ (x= 0.5-4.5), тщательно смешивали, спрессовывали, помещали в герметичный молибденовый тигель и нагревали (со скоростью 80 К/мин). Оптимальная температура синтеза составляла

1623±50 К. При этой температуре образцы выдерживали 2±0,5 ч. После этого тигель с веществом охлаждали до комнатной температуры со скоростью 80 К/мин.

Сплавы системы Tb₅Bi₃ - Er₅Bi₃ синтезировали при одном и том же температурном и временном режиме, то есть при 1623±50 К и времени выдержки 2-3 ч.

Полученные твёрдые растворы подвергали рентгенофазовому и металлографическому анализу.

Рентгенофазовый анализ проводили на дифрактометре ДРОН-2 с использованием отфильтрованного CuK_α-излучения (Ni – фильтр). Погрешность в определении параметров элементарной ячейки сплавов составляла ±0.0005 нм.

Металлографический анализ сплавов выполняли на приборе «Neophot-21». Шлифы полировали алмазной пастой, нанесенной на нейлоновую ткань.

Микротвёрдость кристаллов измеряли на микротвердомере ПМТ-2.

Молярную магнитную восприимчивость (χ_m) сплавов измеряли в диапазоне температур 298-500 К по методике, приведенной в [4].

Рентгенофазовый (РФА) и металлографический анализ сплавов указывают на образование во всем исследованном диапазоне концентраций твёрдых растворов замещения Tb_{5-x}Er_xBi₃ (x= 0.5-4.5).

По данным РФА, твёрдые растворы Tb_{5-x}Er_xBi₃ (x= 0.5-4.5) изоструктурны с исходными компонентами – Tb₅Bi₃, Er₅Bi₃, и кристаллизуются в ромбической сингонии типа Y₅Bi₃ с пространственной группой Rnma [5]. Из табл. 1 следует, что концентрационная зависимость параметра элементарной ячейки твёрдых растворов во всем исследованном диапазоне концентраций изменяется аддитивно.

Установлено, что температурная зависимость обратной величины молярной магнитной восприимчивости твёрдых растворов Tb_{5-x}Er_xBi₃ (x= 0.5-4.5) следует закону Кюри-Вейсса, характерного парамагнитным веществам.

Таблица 1

Кристаллохимические характеристики твёрдых растворов системы Tb₅Bi₃ – Er₅Bi₃.

Твёрдые растворы	Параметр элементарной ячейки, ±0.0005 нм			Плотность, кг/м ³		Микротвёрдость, МПа
	a	b	c	расчет.	эксперим.	
Tb _{4.5} Er _{0.5} Bi ₃	0.8162	0.9482	1.1972	10278	10258	2042±110
Tb ₄ ErBi ₃	0.8143	0.9562	1.1960	10272	10250	2043±130
Tb _{3.5} Er _{1.5} Bi ₃	0.8127	0.9582	1.1940	10303	10204	2040±125
Tb ₃ Er ₂ Bi ₃	0.8100	0.9596	1.1925	10364	10342	2036±115
Tb _{2.5} Er _{2.5} Bi ₃	0.8098	0.9672	1.1910	10328	10319	2033±105
Tb ₂ Er ₃ Bi ₃	0.8096	0.9683	1.1890	10367	10352	2030±140
Tb _{1.5} Er _{3.5} Bi ₃	0.8095	0.9782	1.1878	10317	10312	2023±130
TbEr ₄ Bi ₃	0.8093	0.9784	1.1862	10347	10338	2015±115
Tb _{0.5} Er _{4.5} Bi ₃	0.8091	0.9826	1.1838	10356	10349	2010±120

На рисунке представлена температурная зависимость обратной величины молярной магнитной восприимчивости твёрдых растворов Tb_{5-x}Er_xBi₃ (x= 0.5-4.5) в диапазоне температур 298-500К.

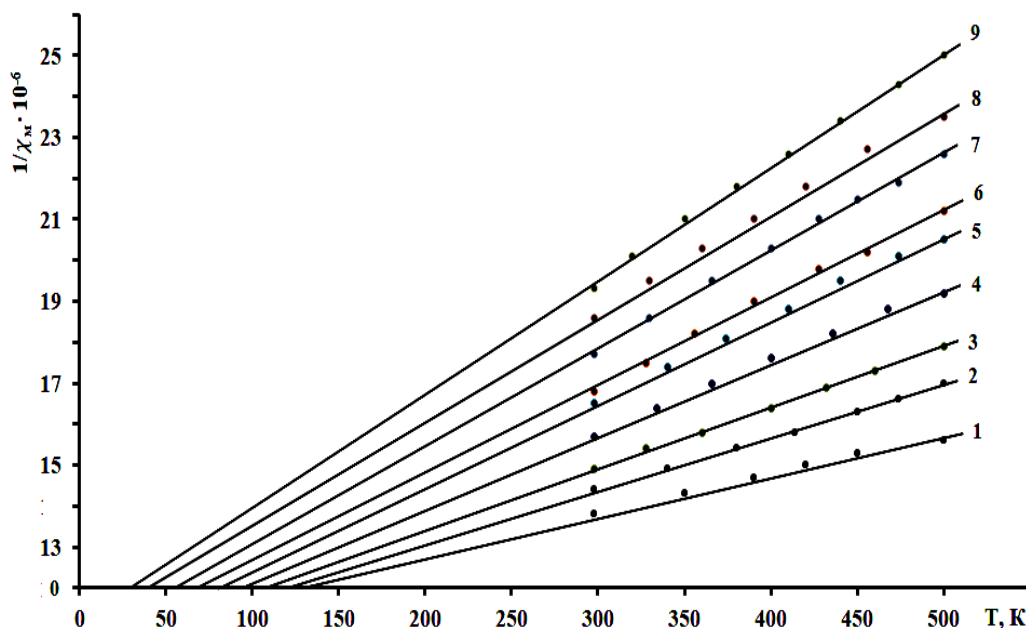


Рисунок. Температурная зависимость обратной молярной магнитной восприимчивости твёрдых растворов Tb_{5-x}Er_xBi₃, содержащих: (1) – 10, (2) – 20, (3) – 30, (4) – 40, (5) – 50, (6) – 60, (7) – 70, (8) – 80, (9) – 90 мол.% Er₅Bi₃ в диапазоне температур 298-500 К.

Значения молярной магнитной восприимчивости (χ_m) и парамагнитной температуры Кюри (θ_p) твёрдых растворов, определенной экстраполяцией линейной части зависимости $1/\chi_m - T$ к оси температур, приведены в табл. 2. Как видно из табл. 2, рост молярной магнитной восприимчивости и парамагнитной температуры Кюри твёрдых растворов проявляется во всем диапазоне концентраций. Это объясняется тем, что тербий, замещая атомы эрбия в кристаллической решетке Er₅Bi₃, усиливает обменное взаимодействие по линии связи Tb – Er, влияние которой на магнитные свойства твёрдых растворов Tb_{5-x}Er_xBi₃ ($x= 0.5-4.5$) проявляется во всем диапазоне концентраций.

Полученные данные по молярной магнитной восприимчивости и парамагнитной температуры Кюри висмутидов и твёрдых растворов были использованы для определения эффективного магнитного момента ионов РЗЭ (табл. 2).

Таблица 2

Магнитные свойства висмутидов и твёрдых растворов Tb_{5-x}Er_xBi₃

Висмутиды и твёрдые растворы	Молярная магнитная восприимчивость $\chi_m \times 10^6$	Парамагнитная температура Кюри, К	Эффективный магнитный момент, $\mu \times 10^{24}, A \cdot m^2$
Tb ₅ Bi ₃	77505.1	146	73.54
Tb _{4.5} Er _{0.5} Bi ₃	72404.2	130	84.3
Tb ₄ ErBi ₃	68981.6	120	85.3
Tb _{3.5} Er _{1.5} Bi ₃	66876.2	108	87.1
Tb ₃ Er ₂ Bi ₃	63624.3	94	90.8
Tb _{2.5} Er _{2.5} Bi ₃	60606.0	80	89.0
Tb ₂ Er ₃ Bi ₃	59 456.4	68	90.8
Tb _{1.5} Er _{3.5} Bi ₃	56426.2	55	91.8
TbEr ₄ Bi ₃	53340.6	40	91.8
Tb _{0.5} Er _{4.5} Bi ₃	52048.6	30	92.7
Er ₅ Bi ₃	39908.2	15	88.3

Таким образом, результаты нашей работы указывают на возможность получения на основе Tb_5Bi_3 и Er_5Bi_3 твёрдых растворов с повышенными магнитными свойствами.

Поступило 01.04.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абулхаев В.Д. Диаграмма состояния $Tb - Bi$. – Изв. РАН. Металлы, 1993, №1, с. 187-190.
2. Абулхаев В.Д. Диаграмма состояния системы $Er - Bi$ – Неорган. материалы, 1992, №10/11, с. 2111-2115.
3. Рахимов, Х.А., Абулхаев В.Д., Убайдов С.О. Магнитные свойства висмутидов состава Ln_5Bi_3 ($Ln = Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Lu$) – Мат-лы междунар. конф. «Комплексные соединения и аспекты их применения». – Душанбе, 2013, с. 91-93.
4. Чечерников В.И. Магнитные измерения – М.: МГУ, 1963, с. 92.
5. Миркин, Л.И. Справочник по рентгеноструктурному анализу кристаллов – М.: Физматгиз, 1961, 863 с.

В.Д.Абулхаев, М.А.Балаев, И.Н.Ганиев, Х.Х.Назарзода, Б.Д.Сайдалиев, С.О.Убайдов СИНТЕЗ ВА ХОСИЯТИ МАГНИТИИ МАҲЛУЛҶОИ САХТИ СИСТЕМАИ

Tb_5Bi_3 - Er_5Bi_3

Институту химияи ба номи В.И.Никитини

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола натиҷаи таҳқиқи синтез ва хосияти магнитии малуҷҳои саҳти системаи $Tb_5Bi_3 - Er_5Bi_3$ оварда шудааст. Таҳлили кристаллохимиявӣ нишон дод, ки дар системаи $Tb_5Bi_3 - Er_5Bi_3$ малуҷҳои саҳти ҷойивазшавӣ ҳосил мешаванд, ки дорои сингонияи ромбии намуди Y_5Bi_3 мебошанд. Бо таҳқиқи хосиятҳои магнитии малуҷҳои саҳт дар ҳудуди ҳароратҳои 298-500 К муайян карда шуд, ки дар ин ҳудуди ҳарорат малуҷҳои саҳт хосияти парамагнитиро зоҳир менамоянд. Ҳарорат парамагнитии Кюрии малуҷҳои саҳт муайян карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *диаграммаи ҳолат, ҳулаҳо, маҳлулҳои саҳт, таъсирпазирии магнитӣ, ҳарорати Кюри*

V.D.Abukhaev, M.A.Balaev, I.N.Ganiev, Kh.Kh.Nazarzoda, B.D.Saydaliev, S.O.Ubaydov.

SYNTHESIS AND MAGNETIC PROPERTIES OF SOLID SOLUTIONS OF THE Tb_5Bi_3 - Er_5Bi_3 SYSTEM

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, National Academy of Sciences of Tajikistan.

Crystal chemical analysis has shown that solid substitution solutions are formed in the $Tb_5Bi_3 - Er_5Bi_3$ systems, crystallizing in a rhombic Y_5Bi_3 -type syngony. By studying the magnetic properties of solid solutions in the temperature range of 298-500 K, it was found that in the specified temperature range, solid solutions exhibit paramagnetic properties. The paramagnetic Curie temperature of solid solutions is determined.

Key words: *state diagram, alloys, solid solutions, magnetic susceptibility, Curie temperature.*

Сведения об авторах:

1. **Абулхаев Владимир Джалолович** – доктор химических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, главный научный сотрудник. E-mail: abulkhaev-48@mail.ru;
2. **Балаев Мухамадшо Ахтамович** – кандидат технических наук, Таджикский технический университет им. акад. М.Осими, доцент кафедры «Электроснабжения». E-mail: muhamad65balaev@mail.ru;
3. **Ганиев Изатулло Наврузович** – доктор химических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, зав. лабораторией «Коррозионностойкие материалы». E-mail: ganiev48@mail.ru;
4. **Назарзода Хайрулло Холназар** – доктор технических наук, доцент, ректор Таджикского государственного университета коммерции. E-mail: nazarov-h2013@mail.ru;
5. **Сайдалиев Бахром Джураевич** – Бохтарский государственный университет им. Н.Хусрава, преподаватель кафедры «Органическая химия и биология», соискатель Института химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана. E-mail: saidaliev_bahrom@mail.ru;
6. **Убайдов Солмоншо Одинаевич** – кандидат технических наук, Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни, доцент кафедры «Технология черчения и дизайна», соискатель Института химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана. E-mail: salmonubaidov@mail.ru.

УДК 669.054:669.071

Специальность: 2.6.2 – Металлургия черных, цветных и редких металлов

А.Муродиён, Н.Х.Раджабзода, Ш.Кабир, Н.А.Наимов, Х.А.Мирпочаев, Б.С.Азизов
**ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ И ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РАБОТЫ
АЛЮМИНИЕВЫХ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРОВ**

Государственное учреждение «Научно-исследовательский институт металлургии»

ОАО «ТАЛКО»

(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 24.05.2023 г.)

В статье приведены экологическая и технико-экономическая оценки электролизеров для производства алюминия с использованием обожжённых анодов, работающих в ОАО «Таджикская алюминиевая компания». Даны общие характеристики производств ТАЛКО Групп. Приведены общие характеристики производственных выбросов, разработаны технологии переработки отходов, определены химический и минералогический составы отходов и полученного из них криолит-глиноземного концентрата. Приведены технико-экономические показатели (ТЭП) работы алюминиевых электролизеров при различных силах тока и показаны преимущества сверхмощных алюминиевых электролизеров относительно электролизёров малой и средней мощности с точки зрения охраны окружающей среды.

Ключевые слова: *технико-экономические показатели, экология, электролизер, электролизный корпус, сила тока, отходы, шламовое поле, модернизация, реконструкция.*

В группу компании ОАО «Таджикская алюминиевая компания» (ОАО «ТАЛКО») и его партнёров входят следующие действующие предприятия химической и металлургической отраслей промышленности Республики Таджикистан: ОАО «ТАЛКО», ООО «ТАЛКО Кемикал», ОАО «Корхонаи бойгардони Такоб», «ТАЛКО Голд», «ТАЛКО Флюорит», «ТАЛКО Ресурс», «ТАЛКО Кабель» и др.

В ОАО «ТАЛКО» производят алюминий электролизом криолит-глиноземного расплава и выпускают обожженные аноды (ОА), используя нефтяной кокс и каменноугольный пек. ООО «ТАЛКО Кемикал» производит серную кислоту (концентрированную и олеум), плавиковую кислоту (концентрацией 99.95%), при этом образуется побочный продукт – смесь плавиковой кислоты с кремнефтористоводородной кислотой (КФВК) ($\text{HF} + \text{H}_2\text{SiF}_6$). Там же запущено производство фторида алюминия (AlF_3) «сухим» способом, синтетического криолита (Na_3AlF_6) из побочных продуктов, образующихся в процессе производства фторида алюминия, простого аммонизированного суперфосфата, коагулянта ($\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 18\text{H}_2\text{O}$) и из смеси кремнефтористоводородной и плавиковой кислот в технопарке ООО «ТАЛКО Кемикал» получают «мокрым» способом фтористые соли (AlF_3 , Na_3AlF_6 , Na_2SiF_6 , NaF), а также HCl [1,2].

Адрес для корреспонденции: *Наимов Носир Абдурахмонович. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Х.Хакимзаде, 17, Государственное учреждение «Научно-исследовательский институт металлургии» ОАО «ТАЛКО». E-mail: nosser2016@outlook.com, inmet.talco@mail.ru*

ОАО «Корхонаи бойгардони Такоб» добывает флюоритовую руду, обогащает и получает флюоритовый концентрат от 92 до 97% (по массе) для нужд ООО «ТАЛКО Кемикал». В процессе обогащения руды образуются отвалы (хвосты), которые накапливаются в хвостохранилище и имеют сложный химический состав.

«ТАЛКО Голд» добывает руду, содержащую благородные, редкие и рассеянные элементы. После обогащения руды получают концентрат, преимущественно содержащий золото, серебро, сурьму, ртуть, мышьяк, а остальные редкие и рассеянные элементы с незначительным количеством благородных металлов попадают в хвостохранилище, которое подлежит переработке с получением чистых элементов. Концентрат перерабатывается пирометаллургическим, гидрохимическим и электролитическим методами.

Цель настоящей работы заключается в рассмотрении и выборе направлений по улучшению технико-экономических и экологических показателей работы ОАО «ТАЛКО».

Начало выпуска первичного алюминия в ОАО «ТАЛКО» – это 31 марта 1975 года, а производства ОА – 20 января 1978 года. ОАО «ТАЛКО» производит алюминий электролизом в электролизерах с ОА на проектную силу тока 160, 175 кА. 6-ая серия ОАО «ТАЛКО» была снабжена электролизерами с ОА на проектную силу тока 255 кА и в силу объективных и субъективных причин данная серия была полностью отключена осенью 1996 г.

Электролизеры с ОА на силу тока 160 и 175 кА были сконструированы в 1960-70 годах прошлого столетия. Процесс электролиза не контролируется с помощью дистанционной системы управления (DCS).

В процессе электролитического получения алюминия происходит выделение значительного количества газопылевой смеси, содержащей глинозем, криолит, фторсоли, уголь, фтороводородный, сульфидный углекислый и угарный газы.

На ряде алюминиевых заводов, в том числе на ОАО «ТАЛКО», эти выбросы очищают на газоочистных установках мокрым способом путем орошения смеси содокарбонатным раствором. Часть отработанного раствора откачивается на переработку в отделение варки регенерационного криолита, а для восполнения концентрации соды в систему непрерывно добавляют свежий раствор.

Накопления в оборотных растворах сульфата натрия и мелкодисперсной пыли приводит к зарастанию газоочистных устройств, поэтому периодически до 20% маточных растворов сбрасывается на шламовые поля. В результате на шламовых полях происходит накопление жидких и твердых отходов, которые ограничивают возможности использования этих сооружений и могут служить источником загрязнения окружающей среды. Кроме этого, на полигонах твердых отходов скапливаются отработанные материалы футеровки электролизеров, а также «возвраты» анодов (огарки). Количество их составляют десятки тысяч тонн. До развала Советского Союза вышеуказанные отходы не перерабатывались, за исключением «огарков», которые использовали как возврат при производстве обожженных анодов.

Основной причиной, препятствующей непосредственному возврату и использованию шлама в производстве алюминия, является высокое содержание в нем углерода, сульфатов и карбонатов натрия.

Для удаления этих вредных примесей из состава шлама в основном используются способы флотации и обжига [3].

Однако технологическое несовершенство, высокая энерго-, материало- и трудоемкость предлагаемых способов затрудняет их широкое использование в промышленном масштабе.

Первыми шагами созданного в конце 2009 года ГУ «НИИМ» ОАО «ТАЛКО» были переработки жидких и твердых отходов, накопившихся в ОАО «ТАЛКО» по новым технологиям с получением целевых продуктов для нужд электролизного производства.

На основе проведенных лабораторных исследований был разработан технологически несложный и экономически выгодный обжиговой способ переработки шлама [4,5].

С целью внедрения разработанного способа переработки шлама в производство были проведены опытно-промышленные испытания на ОАО «ТАЛКО». Была отобрана опытная партия в количестве 60 т шлама, усредненные химический и минералогический составы которого после сушки представлены в табл. 1.

Таблица 1

Химический и минералогический составы исходного сырья и криолит-глиноземного концентрата

Компоненты	Химический состав, мас. %	
	Исходный шлам	Криолит-глиноземный концентрат
Al ³⁺	12.99	25.3
Na ⁺	17.88	21.76
F ⁻	16.21	19.27
SO ₄ ²⁻	5.67	1.89
CO ₃ ²⁻	2.45	-
HCO ₃ ⁻	1.45	-
C	27.3	1.1
Fe ³⁺	0.56	0.84
Si ⁴⁺	0.32	0.51
H ₂ O	2.5	-
Минералогический состав, мас. %		
Al ₂ O ₃	18.2	41.2
Na ₃ AlF ₆	26.7	28.5
Na ₂ SO ₄	8.4	2.8
Na ₂ CO ₃ +NaHCO ₃	6.1	-
C	27.3	1.1
NaF	3.8	8.4
SiO ₂	0.7	1.1
Fe ₂ O ₃	0.8	1.2
Na ₂ O	-	9.3
H ₂ O	2.5	-

Рентгенофазовый анализ шлама показал наличие в нем гамма-глинозема (γ -Al₂O₃), альфа-глинозема (α -Al₂O₃), криолита (Na₃AlF₆), шайрерита (Na₂SO₄*NaF), тенардита (Na₂SO₄), буркеита (2Na₂SO₄*Na₂CO₃), нахколита (NaHCO₃) и графита (C).

Далее шлам увлажняли до содержания воды 20-25 мас.% и с помощью экструдера СМК-117 из него получали брикеты в форме параллелепипеда размером 16х8х4 см, которые высушивали на внешнем своде туннельной печи в течение 7-8 ч или в естественных условиях в течение 20-30 ч, а затем обжигали в зоне нагрева туннельной печи при температуре 850-900°С в течение 4-6 ч. Выход конечного продукта, который с учетом содержания в нем основных компонентов был назван криолит-

глиноземным концентратом (КГК), составил 65%, себестоимость 1 т с учетом всех затрат была около 870 сомони, а ожидаемый экономический эффект при годовом объеме производства 10 тыс. т – 9.95 млн. сомони [3].

Исходя из вышеизложенного, на трех пусковых электролизерах электролизного производства ОАО «ТАЛКО» были проведены опытно-промышленные испытания с использованием КГК в качестве укрывного материала из расчёта (2.2-2.9 т) и корректирующей добавки электролита (190-200 кг/сутки).

Испытания показали, что в течение 15-25 суток основные технологические параметры работы опытных электролизеров стабилизируются и достигают нормативных показателей.

Необходимо отметить, что электролизеры на проектные силы тока 160 и 175 кА, которые смонтированы на ОАО «ТАЛКО», не отвечают современным требованиям, как с точки зрения экологической безопасности, так и с экономической точки зрения: низкий выход по току, большие удельные расходы сырья, материалов и электроэнергии.

Крупнейшими производителями алюминия являются Китай, США, Россия, Канада, Австралия и Бразилия, на долю которых приходится около 70% всего производства этого металла.

В США такие компании представляют: «Alcoa», «Reynolds» и «Kaiser». В Канаде лидирует фирма «Alcan», во Франции – «Pechiney», в Норвегии – «Hydro Aluminium», в Швейцарии – «Moltech», в России – «Русский алюминий».

Алюминиевая компания Америки «Alcoa» – одна из самых крупных, старейшая и процветающая компания в мире является многоотраслевой и производит на своих заводах более 12 млн. т глинозема, более 3 млн. т алюминия в год.

«Русский алюминий» является вторым в мире производителем электролитического алюминия и производит более 6 млн. т глинозема и около 4 млн. т первичного алюминия.

Знаменитая французская фирма «Pechiney» не только владеет большей частью мощностей по производству алюминия во Франции, но по ее технологии работают заводы в Великобритании, Норвегии, Австралии, Индии, Венесуэле. Конструкции электролизеров и работы на них широко известны во всем мире и пользуются заслуженным авторитетом.

Норвежская фирма «Hydro Aluminium», известная не только производственными достижениями своих четырех заводов, но и результатами работы своего научного центра, – также один из крупнейших европейских производителей алюминия. По сухой очистке и улавливания электролизных газов видной компанией является «ALSTOM». Степень улавливания по HF составляет 99.5%.

К числу видных европейских производителей новых технологий в области электрометаллургии алюминия можно отнести фирму «Moltech» (Швейцария), известную своими разработками защитных покрытий катодных блоков, нерасходуемых анодов иподовой массы, не содержащей пек [6].

Широко известны работы французской фирмы «Procedair», специализирующейся в области очистки газов от фтора, смолистых веществ и пр. По всему миру эксплуатируется более 10 тыс. электролизеров, использующих оборудование сухой газоочистки этой фирмы.

Следует отметить, что электролизеры вышеуказанных компаний работают на силу тока 300 кА и более.

В настоящее время среди стран производителей алюминия лидирующее место в мире занимает КНР, производящая более 35 млн. т алюминия в год. Крупнейшими компаниями Китая являются «Chalco», «Hongqiao», «Xinfa Group». Электролизеры этих компаний работают на силу тока от 300 до 500 кА. В компании «Юйлян» из провинции Хенан в 2009 г. запущен алюминиевый завод мощностью 270 000 т/год на силу тока 400 кА. Генеральным проектировщиком являются GAMI (Гуанский алюминиево-магниево-институт) и NFC (международная строительная компания по возведению объектов цветной металлургии и входящий в ее состав Северо-восточный университет с научно-исследовательским центром (NEUI). Кроме того, NFC выступает в роли генподрядчика и может привлекать в качестве подрядчика любую страну. Например, при проектировании и строительстве Казахского алюминиевого завода (АО «КЭЗ») NFC привлекал такие компании, как: «ALSTOM» (Норвегия) по сухой газоочистке, «Элиотт» (США) по компрессорам сжатого воздуха, «NOEL» (Германия) по многооперационным технологическим кранам, «ABB» (Швейцария) по выпрямительным агрегатам, «Брошот» (Франция) по сбору и монтажу анодов [7].

В 2002 г. компания Юйлян одной из первых использовала технологию производства алюминия с электролизерами на силу тока 320 кА с удельным расходом электроэнергии 12940 кВт*ч. Применена новая технология NEUI на силу тока 400 кА, позволяющая повысить коэффициент использования энергии с 50 до 70%. Замена анодов осуществляется при помощи многооперационного технологического крана. На каждой штанге закреплен один анодный блок. Была разработана технология ремонта электролизеров без прекращения подачи тока. Данная технология получила многочисленные государственные премии. Одним из авторов такого метода является профессор Лян Сюэминь – зам. генерального директора компании. В 2007 г. технический центр компании стал центром исследований алюминиевой промышленности. В настоящее время превратилась в Исследовательский центр мирового уровня. В Урумчи (КНР) функционирует алюминиевый завод мощностью 1.5 млн. т/год и электролизеры работают на силу тока 400 и 500 кА [7].

Наньшанские алюминиевые заводы входят в состав промышленного региона Dong Hai Aluminium (Восточно-морской район промышленности Китая), г. Лонкоу. В г. Лонкоу функционируют 3 алюминиевых завода, работающие на силу тока 160, 300 и 320 кА. Завод на 320 кА начал функционировать с апреля 2006 г., он состоит из 2-х электролизных корпусов с общим количеством действующих электролизеров 256 шт. Все электролизеры снабжены обожженными анодами и системой АПП точечного типа. Транспорт глинозема от силосов до электролизеров осуществляется пневмотранспортом (аэрожелобами).

Указанные зарубежные компании работают с электролизерами, отвечающими высокой степени требованиям экологии и экономики.

Главной особенностью применения электролизеров на силу тока 320, 400 и 500 кА является высокая степень автоматизации технологических процессов производства алюминия, а также экологичность и безопасность производства, низкие удельные расходы сырья, материалов, электроэнергии и увеличение удельной мощности на единицу площади [7].

Электролизеры на силу тока 320, 400 и 500 кА полностью невозможно обслуживать вручную, необходима полная механизация и автоматизация технологического процесса с использованием DCS.

Каждый используемый кран (монтажный, технологический, краны общего назначения) должен иметь бункер для сбора и хранения необходимого количества сырья и материала для подпитки электролизера. Люки бункеров должны стыковаться со стыковочными узлами подачи сырья или материала, которые расположены на определенной высоте электролизного корпуса. Например, в АО «КЭЗ» (Казахстанский электролизный завод) монтажный кран в своем бункере запасает оборотный электролит, технологический кран – глинозем, кран общего назначения – фтористый алюминий. При необходимости, во время эксплуатации электролизеров крановщики с помощью пульта управления заполняют бункера кранов соответствующим сырьем и подпитывают далее электролизеры. Человеческий фактор сведен к минимуму.

Многооперационный технологический кран, снабженный манипулятором, выполняет 5 основных операций по обработке электролизёра, а именно пробивку корки электролита, очистку гнезда (грейфером), замену анодов, обработку торцов электролизера и засыпку свежего глинозема, фторсолей.

Обычно торцевые стороны не обрабатываются. Электролизеры снабжены системой АПГ (автоматическая подача глинозема) и АПФ (автоматическая подачи фтористого алюминия). При помощи АПГ в электролизер подается фторированный глинозем, поступающий с газоочистки аэрожелобами, а фтористый алюминий подается через АПФ. Электролизер снабжен соответствующими бункерами с пробойниками и дозаторами; всего шесть пробойников, в том числе 4 для засыпки глинозема, один – для подачи фторсолей и ещё один для прорубки отверстия, предназначенного для выливки металла [8].

Применяемые АПГ и АПФ являются точечными. Для перетяжки анодов предусмотрена временная подвеска анодов (ВПА) в виде «паука», работающего пневматически от линии сжатого воздуха (0.6 МПа). Электролизер более герметичен, имеет хороший газоотсос и процесс полностью автоматизирован. Такие подходы создают благоприятные условия для обслуживающего персонала. Газоотсос от электролизера регулируется при помощи шибера, установленного в газходной трубе электролизера. Общее разряжение в коллекторах регулируется с помощью вентилятора дымовой трубы. Степень улавливания фтористого водорода составляет 99.5%.

При использовании сверхмощных электролизеров важное значение имеет способ очистки отходящих анодных газов: мокрый или сухой способы очистки. В мировой практике заводы, работающие с электролизерами свыше 200 кА, имеют сухую газоочистку. Способ сухой газоочистки имеет следующие преимущества:

1. Высокая степень улавливания фтористого водорода.
2. Экономия фтористых солей при производстве алюминия.
3. Полная автоматизация процессов подачи фторированного глинозема и мониторинга образующихся выбросов, отсюда простота обслуживания.
4. Низкие энергетические и эксплуатационные расходы, отсутствие жидких и твердых отходов.
5. Способ лучше по экологии, так как отпадает необходимость в создании накопителей для шлама.

Этот способ имеет один недостаток – сернистые газы не улавливаются.

Таким образом, сравнивая капитальные затраты на оба способа газоочистки с учетом материальных, энергетических, экологических и трудовых затрат, «сухой» способ считается более выгодным по сравнению с «мокрым». При этом транспортировка глинозема от межкорпусных силосов до систем

газоочистки и далее, подача фторированного глинозема в электролизеры осуществляется пневмотранспортом (аэрожелобами).

Технико-экономические показатели электролизеров на разных силах тока показаны в табл. 2. Например, удельный расход электроэнергии при работе электролизеров на 255 кА в странах СНГ, в среднем составляет примерно 14000 кВт*ч.

В электролизерах не было предусмотрено автоматического контроля и регулировки концентрации глинозема в электролите. Концентрация глинозема в электролите определялся периодически, через сутки, путем отбора проб электролита и далее применялся рентгеноспектральный метод.

Поэтому концентрация глинозема в электролите менялась в широком интервале и происходила скачкообразно. Глинозем подавался системой АПГ через определенные промежутки времени постоянной дозой (из расчета суточной потребности). Рабочее напряжение электролизеров обычно стабилизировалось на 17-18 сутки после начала обжига.

Таблица 2

Технико-экономические показатели работы электролизеров для производства алюминия
с разными силами тока

№ п/п	Наименование показателей	Ед. изм.	Проектные показатели				В АО* «КЭЗ»
1	Сила тока	кА	160	175	255	320	320
2	Среднее напряжение	В	4.25	4.20	4.15	4.10	4.15
3	Выход по току с учётом незавершенного производства	%	89	90	91	94	93
4	Выход по энергии с учетом незавершенного производства	г/ кВт*ч	70.4	72.0	73.7	77.0	76.0
5	Среднесуточная производительность электролизера с учетом незавершен. производства	кг	1148	1270	1871	2420	2400
6	Расход анода на 1 т алюминия	кг	550	520	510	500	520
7	Криолитовое отношение		2.6-2.8	2.6-2.8	2.6-2.8	2.3-2.4	2.4
8	Концентрация глинозема	%	1.5-2.0	1.5-2.0	1.5-2.5	2.0-2.4	2.5
9	Межполюсное расстояние	см	5.5-6.0	5.5-6.0	5.5-6.0	5.5	5.5
10	Уровень металла	см	30.0	25-30	25.0	20-22	21.0
11	Уровень электролита	см	20-22	20-22	20-21	21-23	22,0
12	Температура электролита	°С	965	965	965	950-960	955
13	Содержание фтористого кальция в электролите	%	3.0-4.0	3.0-4.0	4.0-5.0	4.0-6.0	5.0
14	Полный цикл замены анодов	сут.	30	30	30	30	30
15	Частота анодных эффектов	шт/ сутки	1.0-2.0	1.0-2.0	1.0-2.0	0.12	0.13
16	Длительность анодных эффектов	мин.	2.0-3.0	2.0-3.0	2.0-3.0	не >3.0	2.5
17	Напряжение анодных эффектов	В	25-30	25-30	25-30	30-40	32,0
18	Удельный расход криолита	кг/т	10.0	10.0	8.0	0.0-1.0	1.0
19	Удельный расход фтористого алюминия	кг/т	20-25	20-25	20-25	20-22	22
20	Удельный расход электроэнергии	кВт*ч/ т	14214	13620	13575	12980	13000

Примечание: приведенные показатели соответствуют работе электролизеров на 320 кА в АО «КЭЗ» (г. Павлодар, Казахстан).

Таким образом, в настоящее время электролизеры на 160 и 175 кА, работающие в ОАО «ТАЛКО» по своим технико-экономическим и экологическим показателям далеки от проектных, так как технологическое оборудование морально и физически устарело. Из-за разгерметизации

оборудования наблюдаются неорганизованные выбросы, конструкции ошинок не позволяют оптимизировать магнитную гидродинамику (устойчивости волнения зеркала жидкого металла), отсутствует дистанционная система управления, что в комплексе приводит к снижению технико-экономических показателей и выбрасываемых газов, а также к снижению образования отходов и загрязнения окружающей среды.

На основе изложенного назрела необходимость реконструкции в ОАО «ТАЛКО» 6-ой электролизной серии, оснатив электролизерами на силу тока 250, 300 или 320 кА. Также требуется модернизация или реконструкция электролизных корпусов ОАО «ТАЛКО», работающих с электролизерами на силу тока 160 и 175 кА. В этих корпусах целесообразно использовать электролизеры на 200 кА, что повысит ТЭП работы предприятия и улучшит экологическую обстановку в регионе.

Поступило 24.05.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Малый патент РТ №ТJ 1128. Способ комплексной переработки кремнефтористоводородной кислоты / Ш.Кабир, Х.Сафиев, Х.А.Мирпочаев, С.М.Шокаримов, Н.А.Наимов, А.Муродиен, Р.С.Махкамбоев, Н.П.Мухамедиев / Заявл. 12.08.2020, опубл. 28.12.2021, Бюл. 167, 2021
2. Малый патент РТ №ТJ 1319. Способ получения смеси кремнефторида и фторида натрия / Н.Х.Раджабзода, Х.Сафиев, Х.А.Мирпочаев, А.Муродиён, Н.А.Наимов, Дж.Р.Рузиев, С.М.Шокаримов, И.Ш.Ахмадшоев, Р.С.Махкамбоев, Н.П.Мухамедиев /. Заявл. 28.04.2022, опубл. 21.11.2022, Бюл. 189, 2022.
3. Сафиев Х., Азизов Б.С., Рузиев Дж.Р., Кабиров Ш.О., Мирпочаев Х.А., Мухамедиев Н.П., Муродиён А. Опытные-промышленные испытания способа получения и использования криолит-глиноземного концентрата в производстве алюминия. Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., №1(142), 2011 г.
4. Азизов Б.С., Сафиев Х., Рузиев Дж.Р. Комплексная переработка отходов производства алюминия. – Душанбе: ЭР-граф, 2005, 150 с.
5. Мирсаидов У.М., Сафиев Х. и др. Способ переработки твердых отходов шламового поля алюминиевого производства. Евразийский патент №003660. // Бюлл. изобретений ЕАПВ, 2004, №1.
6. Минцис М.Я., Поляков П.В., Сиразутдинов Г.А. Электрометаллургия алюминия. – Новосибирск, Наука, 2001, 364 с.
7. Муродиён А. Ведущие страны производители алюминия. Сб. материалов 5-ой Междунар. научно-практической конференции «Перспективы применения инновационных технологий и усовершенствования технического образования в ВУЗах стран СНГ», ТТУ им. акад. М.С.Осими. – Душанбе, 2011, ч.1, с. 272-275.
8. Кабиров Ш.О., Муродиён А., Сироджев Н.М. Электролизеры с обожженными анодами на силу тока 320 кА. – Вестник Таджикского технического университета им. акад. М.С.Осими, 2013, №4(24), с. 51.

А.Муродиён, Н.Х.Раджабзода, Ш.Кабир, Н.А.Наимов, Х.А.Мирпочаев, Б.С.Азизов
**АРЗЁБИИ ЭКОЛОГӢ ВА ТЕХНИКИЮ ИҚТИСОДИИ КОРИ
ЭЛЕКТРОЛИЗЁРҲОИ ИСТЕҲСОЛИ АЛЮМИНИЙ**

МД «Пажӯҳишгоҳи илмию таҳқиқотии металлургия»-и ҶСК «ШАТ»

Дар мақола арзёбии экологӣ ва техникую иқтисодии электролизёрҳои истеҳсоли алюминий, ки бо истифодаи анодҳои пухта дар ҶСК “Ширкати Алюминийи Тоҷик” фаъолият мекунад, оварда шудааст. Тавсифи умумии истеҳсолоти корхонаҳои ТАЛКО Групп дода шудааст. Инчунин тавсифи умумии партовҳои истеҳсолӣ овардашуда, технологияҳои коркарди партовҳо таҳия гардида, таркиби химиявӣ ва минералогии партовҳо ва концентрати гилҳоку криолити аз онҳо истеҳсолшуда, муайян карда шудааст. Нишондодҳои техникую иқтисодии кори электролизёрҳои алюминий дар қувваи чараёнҳои гуногун дарҷгардида, бартарияти электролизёрҳои фавқулиқдори алюминий нисбат ба электролизёрҳои кам ва миёнақтидор аз нуктаи назари хифзи муҳити атрофнишон дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *экология, нишондодҳои техникую иқтисодӣ, электролизёр, қувваи чараён, партовҳо, майдони шлам, таҷдидсозӣ, бозсозӣ, бинои электролизӣ.*

A.Murodijon, N.Kh.Rajabzoda, Sh.Kobir, N.A.Naimov, Kh.A.Mirpochaev, B.S.Azizov
**ECOLOGICAL AND TECHNICAL-ECONOMIC ASSESSMENT OF
ELECTROLYSERS FOR ALUMINUM PRODUCTION**

State Institution «Scientific Research Institute of Metallurgy» JSC «TALCO»

The article presents environmental and technical and economic assessment of electrolyzers for aluminum production using annealed anodes, operating in JSC «Tajik Aluminum Company». General characteristics of TALCO Group production facilities are given. General characteristics of production emissions are given, waste processing technologies are developed, chemical and mineralogical compositions of waste and cryolite-alumina concentrate obtained from it are determined. Technical and economic indicators of aluminum electrolyzers operation at different current strengths are given and advantages of heavy-duty aluminum electrolyzers in relation to small and medium-duty electrolyzers from the point of view of environmental protection are shown.

Key words: *ecology, technical and economic performance, electrolyser, current strength, waste, sludge field, modernization, reconstruction, electrolysis building.*

Сведения об авторах:

1. **Асрори Муродиён** – доктор технических наук, ГУ «НИИМ» ОАО «ТАЛКО», заместитель директора по научной работе. E-mail: murodiyona@talco-s.tj;

2. **Раджабзода Наджибулло Хабибулло** – ОАО «ТАЛКО», председатель Совета директоров. E-mail: inmet.talco@mail.ru;

3. **Шерали Кабир** – доктор экономических наук, министр промышленности и инновационных технологий РТ;

4. **Наимов Носир Абдурахмонович** – кандидат технических наук, ГУ «НИИМ» ОАО «ТалКо», директор. E-mail: nosser2016@outlook.com;

5. **Мирпочаев Хуршед Абдумуминович** – кандидат технических наук, ГУ «НИИМ» ОАО «ТалКо», заместитель директора по внедрению – главный инженер. E-mail: mir4646@mail.ru;

6. **Азизов Бозорали Сатторович** – доктор технических наук, ГУ «НИИМ» ОАО «ТалКо», научный консультант. E-mail: bobojon1946@mail.ru.

УДК 579.873.22

Специальность: 1.5.7. – Генетика

Б.П.Пирмахмадзода**СЕКВЕНИРОВАНИЕ ГЕНОМА МИКОБАКТЕРИЙ ТУБЕРКУЛЁЗА***ГОУ «Таджикский государственный медицинский университет им. Абуали ибн Сино»**(Представлено академиком НАН Таджикистана С.Дж.Юсуфи 24.06.2023 г.)*

Проведён анализ литературы по эффективности использования метода секвенирования генома микобактерий туберкулёза в разных странах мира. Полногеномное секвенирование позволяет детально изучить геном и ДНК идентифицируя микобактерии туберкулёза, производя их своеобразную геномную «паспортизацию». Данные полногеномного секвенирования можно использовать для быстрого и точного обнаружения мутаций в клинических образцах, связанных с устойчивостью к противотуберкулёзным препаратам.

Ключевые слова: *туберкулёз, полногеномное секвенирование, идентификация, мутации, лекарственная устойчивость.*

По данным Всемирной организации здравоохранения (ВОЗ) Республика Таджикистан (РТ) отнесена к числу 18 стран Европейского региона ВОЗ с высоким бременем заболеваемости туберкулёза (ТБ) и к числу 30 стран мира с высоким бременем лекарственно устойчивых форм ТБ (ЛУ-ТБ).

Несмотря на данные официальной статистики, свидетельствующие о некоторой стабильной тенденции к улучшению эпидемиологической ситуации по ТБ в РТ, отражающиеся в снижении уровня заболеваемости и смертности от ТБ в последние годы, эффективность борьбы с этим недугом всё ещё остаётся недостаточным. Так, если показатели заболеваемости и смертности от ТБ в 2019 г. составляли соответственно 56.5 и 2.2 на 100 тыс. населения, то в последующие годы отмечено значительное уменьшение указанных показателей: в 2020 г. соответственно – 40.5 и 1.4, в 2021 г. – 40.3 и 1.3. В 2021 г. оценочная заболеваемость ВОЗ всех случаев ТБ в РТ составила 88 на 100 тыс. населения, смертность составила 12 на 100 тыс. населения. Указанные данные ВОЗ по заболеваемости и смертности от ТБ превышают таковые за 2020 г., которые составляли соответственно – 84 и 9.6, и за 2019 г. соответственно – 83 и 7.9 на 100 тыс. населения.

На основе вышеизложенного можно заключить, что между данными официальной статистики и оценочными данными ВОЗ отмечается обратная пропорциональная связь: первые дают ежегодное снижение, а вторые – ежегодное повышение двух основных эпидемиологических показателей. Таким образом, данные официальной статистики значительно отличаются от таковых оценочных данных ВОЗ, что свидетельствует о недовыявлении случаев ТБ в среднем более чем на 30%. Также в настоящее время есть необходимость в уточнении бремени по ЛУ-ТБ. Многие инновации в области ТБ, как одного из ведущих смертельных инфекционных заболеваний во многих странах, были внедрены в диагностике

Адрес для корреспонденции: *Пирмахмадзода Бободжон Пирмахмад. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бухоро, 55А, кафедра фтизиопульмонологии ТГМУ. E-mail: sharipovbobojon07@gmail.com.*

развития лекарственной устойчивости. Тестирование на восприимчивость и устойчивость к противотуберкулезным препаратам может осуществляться традиционно с помощью культурального метода. Однако этот метод менее эффективен из-за трудоемкости. Таким образом, необходим более быстрый метод, такой как молекулярно-генетический метод.

Наряду с указанным недостаточным выявлением ТБ и ЛУ-ТБ, клиницисты сталкиваются и с другими проблемами. Так, с внедрением новых высокочувствительных методов диагностики ТБ выделяется когорта больных, у которых микроскопически выявлены кислотоустойчивые микобактерии (МБТ+), однако молекулярно-генетические экспресс-методы GeneXpert MTB-RIF или Hain-test исключили *M. tuberculosis*. Другими словами, речь идет о больных, страдающих заболеваниями лёгких, причиной которых являются нетуберкулёзные, атипичные микобактерии. К сожалению, в клинической практике встречаются единичные случаи установления диагноза микобактериоз легких, что несомненно приводит к гипердиагностике ТБ.

Другой актуальной проблемой инфицирования *M. tuberculosis* является идентификация различных его штаммов, что позволило бы дифференцировать этиологические факторы ТБ у трудовых мигрантов и их семейных контактов. Другими словами, появится возможность ответить на дискутируемый в течение многих лет вопрос: заболел ли ТБ трудовой мигрант в стране миграции или же он уже был инфицирован, и трудовая деятельность в период миграции способствовала активации ТБ процесса.

Имеет место ещё одна проблема, связанная с идентификацией штаммов микобактерий ТБ: это дифференцированная верификация рецидивов ТБ с реинфицированием микобактерией ТБ больных, ранее перенесших ТБ.

В Республике Таджикистан научных исследований по изучению всех вышеперечисленных проблем не проводилось, так как не было внедрено метода верификации этих состояний.

В 2023 г. противотуберкулёзная служба Таджикистана приобрела два аппарата секвенирования генома микобактерии ТБ, который, согласно научным достижениям, имеет возможности дать ответ на все вышеуказанные вопросы. В настоящее время мы собираем для исследования выделенные ДНК от микобактерий ТБ по каждой из указанных выше групп больных.

В этой связи мы провели обзор доступной нам литературы по эффективности использования метода секвенирования генома микобактерии ТБ в разных странах мира.

Результаты исследования

Спектр применения современных молекулярных технологий весьма широк. В дополнение к указанному они позволяют детально изучать геном и ДНК современных микобактерий (производя их своеобразную геномную «паспортизацию»), и это дает возможность изучать эволюцию возбудителя туберкулеза на уровне, совершенно недоступном ранее [1].

Секвенирование нового поколения - мощный инструмент для улучшения ведения и контроля за ТБ [2]. Данные полногеномного секвенирования можно использовать для быстрого и точного обнаружения в клинических образцах мутаций, связанных с устойчивостью к противотуберкулезным препаратам [3, 4].

Данные о первом полном геноме ТБ были опубликованы в 1998 г. из штамма H37Rv [5]. Используя технологии полногеномного секвенирования при ТБ появилась возможность ответить на многие вопросы, перечисленные нами в начале настоящего обзора. Полногеномное секвенирование генома

микобактерий ТБ может предоставить исчерпывающие данные для прогнозирования их чувствительности и резистентности к лекарственным средствам, провести для сравнения эпидемиологический анализ штаммов в разных странах [6]. Кроме того, существование набора данных полногеномного секвенирования позволяет исследователям оценить генетическое разнообразие по всему геному клинических образцов [7].

Технологии секвенирования позволяют определить чувствительность к препаратам примерно через 8-9 дней, в то время как для проведения тестов другими методами на чувствительность и получение результата требуется более 14 дней. Эта технология становится ценным инструментом для мониторинга устойчивости к антибиотикам, что позволяет провести оптимизацию режимов химиотерапии. Полногеномное секвенирование можно провести непосредственно из клинических образцов, поскольку для их интерпретации доступны инструменты в онлайн-версиях. Например, для анализа лекарственной устойчивости существует веб-сервер TB-Profiler, позволяющий пользователям, используя данные секвенирования, анализировать геном *M. tuberculosis* для прогнозирования его происхождения и лекарственной устойчивости [8].

Наряду с трансмиссией в обществе устойчивой формы возбудителя ТБ, одной из причин увеличения числа больных с ЛУ-ТБ в регионах Российской Федерации является распространение штаммов микобактерий ТБ генетического семейства Beijing, отличающихся сильной ассоциацией с лекарственной устойчивостью [9].

Генетическое семейство Beijing является наиболее расшифрованным и относится к восточно-азиатской филогенетической линии микобактерий ТБ [10]. Этот генотип был первоначально охарактеризован путём исследования полиморфизма длины фрагмента рестрикции IS6110 (RFLP) и спейсерного олигонуклеотидного типирования – сполиготипирования (spoligotyping) у штаммов, выделенных в 1992-1994 гг. в Пекинском регионе Северного Китая, что и дало ему определение – Beijing. Штаммы Beijing классифицируются на две крупные филогенетические сублинии: современные штаммы – это генетические кластеры Beijing B0/W148 и Beijing 94-32, а внутри последнего штамма – субкластер Beijing CAO (Central Asian Outbreak), которые циркулируют в странах Центральной Азии; и - древние (или предковые) штаммы, для которых присуща интактная структура локуса NTF и они идентифицируются на ранний древний тип (RD181[+]) и поздний древний тип (RD181[-]). Результаты эпидемиологических исследований штаммов в разных странах выявили более частое наличие штаммов современной сублинии, чем древних сублиний Beijing. Исключением являются Япония и Корея, где штаммы древней сублинии Beijing составляют до 80% популяции [11].

Таким образом можно заключить, что несмотря на то что популяция штаммов генотипа Beijing достаточно раскрыта, для получения информации о штаммах древних сублиний Beijing нужны дополнительные исследования.

В Республике Казахстан эпидемиологическое исследование штаммов выявило более частую их принадлежность к семейству W-Beijing, затем принадлежность двух изолятов к семейству LAM и одного изолята к семейству S-Beijing. Среди изолятов выявлено низкое генетическое разнообразие. Научно доказано, что преобладающее в этой стране генетическое семейство W-Beijing имеет склонность к мутации и развитию множественных и широких форм ЛУ-ТБ (МЛУ и ШЛУ) и это проявляется увеличением распространенности ЛУ-ТБ в Казахстане. Позже было проведено полногеномное секвенирование и генотипическое прогнозирование лекарственной устойчивости в сочетании с

эпидемиологическим генотипированием, которое охватило *in silico* сполиготипирование, присвоение локусов RD, а также вставки IS6110. Полученные геномы предоставили новые данные о генетических вариациях, встречающихся в МЛУ/ШЛУ изолятах семейства LAM, распространенных в странах Центральной Азии. Авторы обнаружили два МЛУ/ШЛУ связанных генотипа семейства LAM, циркулирующих в Казахстане (SIT42 и SIT42/LAM-RUS). Появление приобретенной МЛУ и ШЛУ у этих изолятов семейства LAM обязывают исследователей к более внимательному их изучению, иначе эффективность всех проводимых мероприятий по ликвидации ТБ в Казахстане будут минимизированы. Для выявления генетических различий необходимо сопоставить эти данные полногеномного секвенирования с другими циркулирующими изолятами сублинии LAM 4.3.3, ответственных за вирулентность изолятов LAM [12-14].

Кыргызская Республика, внедряя на практике все новые рекомендации ВОЗ, добилась снижения показателей заболеваемости, распространенности, смертности от ТБ среди населения, однако всё ещё остаётся высокой бремя ЛУ-ТБ. Из общего числа больных чувствительные формы ТБ составили 52.2% новых случаев ТБ, 28.1% – рецидивов и 17.8% – ранее леченых. Из общего числа больных, полирезистентный ТБ составил среди 11.8% новых случаев, 10.8% рецидивов и 8.5% – ранее леченных случаев ТБ. Из общего числа больных ЛУ-ТБ составили 21.9% новых случаев, 49.2% – рецидивов и 64% – ранее леченных случаев [15].

Индонезия – одна из восьми стран, на долю которых приходится две трети от общего числа случаев ТБ в мире с процентом 8.5%. Университетский медицинский центр Гронингена внедрил технологии полногеномного секвенирования для быстрой идентификации различных бактерий. Результаты секвенирования клинических образцов легочного ТБ в Папуа (Индонезия) позволили внести данные для анализа эпидемиологии и эволюции развития ТБ, используются для мониторинга развития генных мутаций штаммов, связанных с устойчивостью к противотуберкулезным препаратам. Например, из данных полногеномного секвенирования стало известно, что большинство образцов, которые ранее были идентифицированы как широкая лекарственная устойчивость, оказались штаммами с множественной лекарственной устойчивостью [16].

Всё чаще научное сообщество обращается к микробиоме (микрофлоре) как фактору, модифицирующему характер развития заболеваний, в том числе ТБ легких. На настоящий момент большинство исследований, проведенных в этой области, посвящено сопоставлениям бактериальных профилей, характеризующих микробиом респираторного тракта у лиц с активным ТБ легких и без такового. Профиль бактериального микробиома мокроты составлен на основе секвенирования амплифицированного участка гена, кодирующего 16S рРНК. Обнаружено снижение равномерности представленности таксонов бактерий в мокроте у больных с ограниченными формами ТБ лёгких при сохранении биологического разнообразия микробиома у пациентов [17].

Таким образом, проведенный анализ результатов исследований последних лет по секвенированию генома микобактерий ТБ позволит нам более рационально и эффективно использовать данный новый метод идентификации возбудителя ТБ.

Поступило 26.07.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Добин В.Л. Представления об эволюции туберкулезных микобактерий. – Туберкулез и болезни лёгких, 2018, т. 96, №8, с. 59-65.
2. Andrews S. FastQC: a quality control tool for high throughput sequence data. – 2019, 38 p.
3. Вязовая А.А., Пасечник О.А., Герасимова А.А., Мокроусов И.В. Структура популяции генетического семейства Beijing *Mycobacterium tuberculosis* на территории Западной Сибири. – Туберкулез и болезни легких, 2020, т. 98, №5, с. 32-36.
4. Barbosa-Amezcuа M., Cuevas-Cordoba B., Fresno C., Haase-Hernández J.I., Carrillo-Sanchez K., Mata-Rocha M. et al. Rapid identification of drug resistance and phylogeny in *M. tuberculosis*, directly from sputum samples. – *Microbiol Spectr*, 2022, №10, p. e0125222.
5. Cabibbe A.M., Spitaleri A., Battaglia S., Colman R.E., Suresh A., Uplekar S. et al. Application of targeted next-generation sequencing assay on a portable sequencing platform for culture-free detection of drug-resistant tuberculosis from clinical samples. – *J. Clin. Microbiol.*, 2020, №58, p. e00632.
6. Спринджук М.В., Титов Л.П., Скрыгин А.Е., Скрыгина Е.М., Кончиц А.П., Залуцкая О.М., Гилеп А.А., Слизень В.В. Программный комплекс для практической обработки геномных данных микобактерий туберкулеза. – Молекулярная и прикладная генетика, 2019, №1, с. 1-14.
7. Besser J., Carleton H.A., Lindsey R.L., Trees E. Next-generation sequencing technologies and their application to the study and control of bacterial infections. – *Clin Microbiol Infect.*, 2018, №24(4), p. 335-41.
8. Colman R.E., Anderson J., Lemmer D., Lehmkuhl E., Georghiou S.B., Heaton H. et al. Rapid drug susceptibility testing of drug-resistant *Mycobacterium tuberculosis* isolates directly from clinical samples by use of amplicon sequencing: a proof-of-concept study. – *J. Clin. Microbiol.*, 2016, №54, p. 2058-67.
9. Старкова Д.А., Журавлев В.Ю., Соловьева Н.С. Лекарственная чувствительность клинических изолятов *Mycobacterium avium* complex. – Туберкулез и болезни легких, 2022, №100(11), с. 39-47.
10. Cohen K.A., Manson A.L., Desjardins C.A., Abeel T., Earl A.M. Deciphering drug resistance in *Mycobacterium tuberculosis* using whole-genome sequencing: progress, promise, and challenges. – *Genome Medicine*, 2019, №11, pp. 1-18.
11. Пасечник О.А., Дымова М.А., Стасенко В.Л., Татаринцева М.П., Колесникова Л.П., Ляпина Е.С. Генетическое разнообразие лекарственно-устойчивых штаммов *Mycobacterium tuberculosis* в Омской области. – Туберкулез и болезни легких, 2017, т. 95, №7, с. 33-39.
12. Кожамкулов У.А., Ахметова А.Ж., Каиров У.Е., Молкенов А.Б., Акильжанова А.Р., Жумадилов Ж.Ш. Полногеномное секвенирование лекарственно-устойчивых штаммов *M. tuberculosis*, циркулирующих в Казахстане. – Фтизиопульмонология, 2018, №1, с. 59-63.
13. Ракишева Ж.К., Баласанянц Г.С., Акишева А.С., Цепке А.Б., Соловьева Н.С. Распространение возбудителя с устойчивостью к препаратам первого ряда среди больных туберкулезом в г. Астане. – Туберкулез и болезни легких, 2018, т. 96, №8, с. 50-54.
14. Тарлыков П.В., Атавлиева С.Ш. Геномный анализ клинических штаммов *Mycobacterium tuberculosis* семейства LAM. – *Eurasian Journal of Applied Biotechnology*, 2021, №4, с. 46-64.
15. Токтогонова А.А., Малюкова Е.А., Муқанбаев К.М., Петренко Т.И., Колпакова Т.А. Частота штаммов *M. tuberculosis* с разной степенью лекарственной устойчивости среди контингентов больных легочным туберкулезом в Кыргызской Республике в 2016 году. – Туберкулез и болезни легких, 2018, т.96, №9, с. 31-37.
16. Maladan Y., Krismawati H., Oktavian A., Lestari C.S.W. Improving multidrug resistance tuberculosis Papua's management using whole genome sequencing. – *Advances in Health Sciences Research*, 2020, №1, pp. 1-7.

17. Дружинин В.Г., Баранова Е.Д., Деменков П.С., Захарова Ю.В., Лавряшина М.Б., Ларионов А.В., Мацкова Л.В., Шабалдин А.В., Пьянзова Т.В. Состав бактериального микробиома мокроты у пациентов с ограниченными формами туберкулеза легких. – Пульмонология, 2023, т. 33, №5, с. 645-656.

Б.П.Пирмахмадзода

СЕКВЕНСИЯИ ГЕНОМИ МИКОБАКТЕРИЯИ СИЛ

*Муассисаи давлатии таълимии «Донишгоҳи давлатии тиббии Тоҷикистон
ба номи Абӯалӣ ибни Сино»*

Дар соли 2023 хадамоти мубориза бо бемории сили Тоҷикистон ду дастгоҳи секвенсияи геноми *Mycobacterium tuberculosis* харидори намуданд. Вобаста ба ин, мо адабиёти дастрасро оид ба самаранокии истифодаи усули секвенсияи геноми *Mycobacterium tuberculosis*-ро дар кишварҳои гуногуни ҷаҳон баррасӣ кардем. Секвенсияи пурраи барангезанда имкон медиҳад, ки геном ва ДНК-и онро муфассал омӯхта, муайян кунем ва "шиносномаи" геноми онҳоро тавлид кунем. Маълумоти секвенсияи пурраи геномро барои зуд ва дақиқ муайян кардани мутатсияҳои марбут ба устуворнокии барангезанда ба доруҳои зидди сил дар намунаҳои клиникӣ истифода бурдан мумкин аст.

Калимаҳои калидӣ: бемории сил, секвенсияи пурраи геном, идентификация, мутатсия, муқовимат ба дору.

B.P.Pirmakhmadzoda

MYCOBACTERIA TUBERCULOSIS GENOME SEQUENCING

State Educational Institution "Avicenna Tajik State Medical University"

In 2023, the anti-tuberculosis service of Tajikistan acquired two devices for sequencing the genome of *Mycobacterium tuberculosis*. In this regard, we reviewed the literature available to us on the effectiveness of using the method of sequencing the genome of *Mycobacterium tuberculosis* in different countries of the world. Whole-genome sequencing allows you to study the genome and DNA in detail, identifying *Mycobacterium tuberculosis*, producing their unique genomic "certification". Whole-genome sequencing data can be used to quickly and accurately detect mutations associated with anti-TB drug resistance in clinical samples.

Key words: tuberculosis, whole genome sequencing, identification, mutations, drug resistance.

Сведения об авторе:

1. **Пирмахмадзода Бободжон Пирмахмад** – Таджикский государственный медицинский университет им. Абуали ибн Сино, ассистент кафедры фтизиопульмонологии. E-mail: sharipovbobojon07@gmail.com