

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

- И.К.Курбанов, Х.П.Сайдалиев.** Точное периодическое решение нелинейной задачи электромагнитоупругости для однородной среды .....5
- Г.А.Юсупов, А.А.Шабозова.** Наилучшее полиномиальное приближение производные дробного порядка и поперечники классов функций в  $L_2$ .....11
- М.И.Джангибеков.** О поперечниках некоторых классов дифференцируемых функций в пространстве  $L_2$ .....19
- С.А.Исхоков, К.Б.Пирназаров, Б.А.Рахмонов.** О разрешимости однородной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в полупространстве .....29
- Г.Джангибеков, Г.Х.Худжаназарова, Ш.Мухторова.** О разрешимости некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области.....37

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- М.М.Кабилов, П.Б.Садриддинов.** Методика определения максимальной скорости стационарной волны фильтрационного горения газов .....47

## АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Кохирова, А.И.Джонмухаммади, М.Н.Латипов, У.Х.Хамроев.** Еще раз к вопросу о комплексе Таурид.....55

## ФИЗИКА

- Т.Х.Салихов, А.А.Абдурахмонов.** Математическая модель возбуждения линейных и нелинейных тепловых волн в диэлектрических пленках на подложке при облучении гармонически модулированным ионным пучком .....61

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

- Д.Н.Низомов, И.К.Каландарбеков, Д.Дж.Исвалиев.** Метод сосредоточенных деформаций в решении задачи изгиба плит .....68

## НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- С.М.Досаев, К.И.Нематуллоев, А.С.Курбонов, И.М.Рахимов, У.М.Мирсаидов.** Солянокислотное разложение исходной магнетитовой руды месторождения «Харангон» Таджикистана.....76

## ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Д.С.Мухиддинов, С.Халикова, Д.Х.Халиков.** Определение сорбционных центров пектиновых полисахаридов методом ИК-спектроскопии.....81

**ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОЛОГИЯ**

**Ш.А.Файзуллоев, И.С.Оймухаммадзода.** Оползневая восприимчивость территории Таджикистана.....88

**МЕТАЛЛУРГИЯ**

**С.А.Сатторов, Н.А.Наимов, А.Муродиён, Х.Сафиев, У.М.Мирсаидов.** Технология комплексной переработки побочного продукта производства плавиковой кислоты с каолиновой глиной месторождения «Чашма-Санг» .....95

**ФИЗИОЛОГИЯ И БИОХИМИЯ РАСТЕНИЙ**

**В.Г.Калмыкова, М.К.Бохирова, М.Б.Ниязмухамедова, М.М.Саиднабиев, Х.А.Абдуллаев.** Влияние уменьшения ассимиляционной поверхности на содержание белка в листьях хлопчатника .....104

**БИОХИМИЯ РАСТЕНИЙ**

**Н.С.Диловарова, М.Х.Шукурова, К.Алиев.** Роль трансляционной системы в развитии оксидантной и антиоксидантной активности .....110

**ФАРМАЦЕВТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ**

**У.Р.Раджабов, С.Дж.Юсуфи, Б.Н.Рахимова, С.Г.Ёрмамадова.** Мальбцинкат-субстанция, обладающая гельмицидными свойствами.....116

## CONTENTS

## MATHEMATICS

- I.Kurbanov, H.P.Saidaliev.** Exact periodic solution of the nonlinear electromagnetic elasticity problem for a homogeneous medium .....5
- G.A.Yusupov, A.A.Shabozova.** Best polynomial approximation fractional derivatives and widths of function classes in  $L_2$  .....11
- M.I.Jangibekov.** On the diameter of some classes of differentiable function in  $L_2$  space .....19
- S.A.Iskhokov, K.B.Pirnazarov, B.A.Rakhmonov.** On solvability of homogeneous Dirichlet problem for degenerate elliptic operators in the half-space .....29
- G.Jangibekov, G.Kh.Khujanazarova, Sh.Mukhtorova.** On the solvability of some twodimensional singular integral equations over a bounded domain .....37

## MATHEMATICAL PHYSICS

- M.M.Kabilov, P.B.Sadriddinov.** Methodology for determining the maximum speed of a stationary wave of filtration combustion of gases .....47

## ASTRONOMY

- G.I.Kokhirova, A.I.Jonmuhammadi, M.N.Latipov, U.H.Khamroev.** Once again to the question of the Taurid complex .....55

## PHYSICS

- T.Kh.Salikhov, A.A.Abdurahmonov.** Mathematical model of excitation of the linear and nonlinear thermal waves in dielectric films on a substrate under irradiation with a harmonically modulated ion beam .....61

## STRUCTURAL MECHANICS

- D.N.Nizomov, I.Q.Qalandarbekov, D.J.Isvaliev.** Concentrated strain method solving the problem of plate bending .....68

## INORGANIC CHEMISTRY

- S.M.Dosaev, K.I.Nematulloev, A.S.Kurbonov, I.M.Rahimov, U.M.Mirsaidov.** Hydrochloric acid decomposition of magnetite ore from the Kharangon deposit in Tajikistan .....76

## PHYSICAL CHEMISTRY

- D.S.Mukhiddinov, S.Khalikova, D.Kh.Khalikov.** Determination of sorption centers of pectin polysaccharides by IR spectroscopy method .....81

**ENGINEERING GEOLOGY****Sh.A.Faizulloev, I.S.Oimhammadzoda.** Landslide susceptibility of the Tajikistan territory.....**88****METALLURGY****S.A.Sattorov, N.A.Naimov, A.Murodiyov, H.Safiyev, U.M.Mirsaidov.** Technology of integrated processing of by-product of hydrofluoric acid production with kaolin clay from the Chashma-Sang deposit .....**95****PLANT PHYSIOLOGY AND BIOCHEMISTRY****V.G.Kalmykova, M.K.Bokhirova, M.B.Niyazmukhamedova, M.M.Saidnabiev, Kh.A.Abdullaev.** Influence of reducing assimilation surface on protein content in cotton leaves.....**104****PLANT BIOCHEMISTRY****N.S.Dilovarova, M.Kh.Shukurova, K.Aliev.** Role of the translatory system in the development of oxidant and antioxidant .....**110****PHARMACEUTICAL CHEMISTRY****U.R.Radjabov, S.J.Yusufi, B.N.Rakhimova, S.G.Yormamadova.** Malbzincate-substance, with helmicidal properties .....**116**

УДК 517.346.9:538.3

Специальность: 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**Член-корреспондент НАН Таджикистана И.К.Курбанов, Х.П.Сайдалиев**  
**ТОЧНОЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ**  
**ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ**

*Российско-Таджикский (Славянский) университет,  
 Бохтарский государственный университет им. Н.Хусрава*

Одной из важнейших задач в теории уравнений с частными производными является получение точного решения. Однако, как известно, не для всех уравнений или системы уравнений найдётся точное решение. В настоящей работе определяются точные периодические решения для системы уравнений с частными производными. Поставленная задача относится к задачам электромагнитоупругости. Для получения точных периодических и ограниченных решений поставленной задачи использован метод разложения по эллиптической функции Якоби [1]. В нашей статье для одной квазилинейной системы третьего порядка на основе работы [1] найдены точные периодические решения для разных материальных уравнений.

**Ключевые слова:** эллиптические функции Якоби, периодическое решение, электромагнитоупругость.

На плоскости  $x, t$  рассматривается система вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= f(x, t), \\ -\frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial D(E)}{\partial t} + J(E) + J_{CT}(x, t), \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{\partial B(H)}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1}$$

с определяющими уравнениями

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \tilde{E} \varepsilon_x + \tilde{\varepsilon} E_x, \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ D(E) &= \tilde{\varepsilon} E^2 + \varepsilon, \varepsilon = u, \\ J(E) &= \sigma \frac{\partial^3 E}{\partial x^3}, \\ B(H) &= -\mu H \end{aligned} \tag{2}$$

при  $f(x, t) = 0$ ,  $J_{CT}(x, t) = 0$ , где  $\tilde{\varepsilon}$ ,  $\sigma$ ,  $\tilde{E}$  и  $\mu$  – не равные нулю постоянные.

**Адрес для корреспонденции:** Курбанов Икром Курбанович, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М.Турсунзода, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: hudson90@mail.ru; Сайдалиев Хомид Пирхонович, Бохтарский государственный университет им. Н. Хусрава, ул. Айни, 67. E-mail: homid-1978@mail.ru.

Поставляя (2) в систему (1), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{E} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ -\frac{\partial H}{\partial x} - 2\tilde{\varepsilon} E \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^3 E}{\partial x^3} &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial x} + \mu \frac{\partial H}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

В системе (3), переходя к новой переменной с помощью соотношений вида

$$E = E(\xi), H = H(\xi), U = U(\xi), \xi = k(x - ct),$$

где  $k$  и  $c$  – постоянные соответственно амплитуда и скорость волны, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\tilde{E} - \rho c^2) \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \tilde{\varepsilon} \frac{d^2 E}{d\xi^2} &= 0, \\ \frac{dH}{d\xi} - 2c\tilde{\varepsilon} \cdot E \frac{dE}{d\xi} - c \frac{du}{d\xi} + k^2 \sigma \frac{d^3 E}{d\xi^3} &= 0, \\ \frac{dE}{d\xi} - \mu c \frac{dH}{d\xi} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Методом разложения по эллиптическим функциям Якоби функции  $E(\xi), H(\xi)$  и  $u(\xi)$  могут быть выражены в виде

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sum_{j=0}^n a_j \operatorname{sn}^j \xi, \\ H(\xi) &= \sum_{j=0}^n b_j \operatorname{sn}^j \xi, \\ u(\xi) &= \sum_{j=0}^n c_j \operatorname{sn}^j \xi. \end{aligned} \tag{5}$$

Относительно (5) решение системы (4) будем искать при  $n = 2$  в виде

$$\begin{aligned} E &= a_0 + a_1 \operatorname{sn} \xi + a_2 \operatorname{sn}^2 \xi, \\ H &= b_0 + b_1 \operatorname{sn} \xi + b_2 \operatorname{sn}^2 \xi, \\ u &= c_0 + c_1 \operatorname{sn} \xi + c_2 \operatorname{sn}^2 \xi, \end{aligned} \tag{6}$$

где  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1$  и  $c_2$  пока неизвестные постоянные [1]. Далее, подставляя (6) в систему (4), получаем систему уравнений вида

$$\begin{aligned}
 2dc_2 + 2\tilde{\varepsilon}a_2 &= 0, \\
 -dc_1(1+m^2) - \tilde{\varepsilon}a_1(1+m^2) &= 0, \\
 -4dc_2(1+m^2) - 4\tilde{\varepsilon}a_2(1+m^2) &= 0, \\
 2dc_1m^2 + 2\tilde{\varepsilon}a_1m^2 &= 0, \\
 6dc_2m^2 + 6\tilde{\varepsilon}a_2m^2 &= 0, \\
 b_1 - 2c\tilde{\varepsilon}a_0a_1 - cc_1 - k^2\sigma a_1(1+m^2) &= 0, \\
 2b_2 - 2c\tilde{\varepsilon}(a_1^2 + 2a_0a_2) - 8k^2\sigma a_2(1+m^2) - 2cc_2 &= 0, \\
 -6c\tilde{\varepsilon}a_1a_2 + 6k^2\sigma a_1m^2 &= 0, \\
 -4c\tilde{\varepsilon}a_2^2 + 24k^2\sigma m^2 &= 0, \\
 a_1 - \mu cb_1 &= 0, \\
 2a_2 - 2\mu cb_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Из системы (7), определяя неизвестные постоянные, получаем точное ограниченное и периодическое решение поставленной задачи в виде

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2c\tilde{\varepsilon}} \left[ \frac{d + \mu c^2 \tilde{\varepsilon}}{\mu cd} - 4\sigma k^2 (1+m^2) \right] + \frac{6\sigma k^2 m^2}{c\tilde{\varepsilon}} \operatorname{sn}^2 \xi, \\
 H &= \frac{6\sigma k^2 m^2}{\mu c^2 \tilde{\varepsilon}} \operatorname{sn}^2 \xi, \\
 u &= \frac{-6\sigma k^2 m^2}{cd} \operatorname{sn}^2 \xi,
 \end{aligned} \tag{8}$$

при

$$\mu c^2 \tilde{\varepsilon} d \neq 0, \quad \mu c^2 \tilde{\varepsilon} \neq 0, \quad c\tilde{\varepsilon} \neq 0, \quad cd \neq 0,$$

где  $d = \tilde{E} - \rho c^2$ ,

или

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2c\tilde{\varepsilon}} \left[ \frac{d + \mu c^2 \tilde{\varepsilon}}{\mu cd} - 4\sigma k^2 (1+m^2) \right] + \frac{6\sigma k^2 m^2}{c\tilde{\varepsilon}} \operatorname{sn}^2 (k(x-ct)), \\
 H &= \frac{6\sigma k^2 m^2}{\mu c^2 \tilde{\varepsilon}} \operatorname{sn}^2 (k(x-ct)), \\
 u &= \frac{-6\sigma k^2 m^2}{cd} \operatorname{sn}^2 (k(x-ct)),
 \end{aligned} \tag{9}$$

при

$$\mu c^2 \tilde{\varepsilon} d \neq 0, \quad \mu c^2 \tilde{\varepsilon} \neq 0, \quad c\tilde{\varepsilon} \neq 0, \quad cd \neq 0,$$

где  $d = \tilde{E} - c^2 \rho$ .

Хорошо известно, что функции Якоби связаны между собой. Из этого следует, что точные решения вышеуказанных систем можно получить относительно функций Якоби  $dn\xi$  и  $cn\xi$ . При этом будем искать решение задач (1), (2), (4) в виде конечных рядов вида

$$\begin{aligned} E &= a_0 + a_1 dn\xi + a_2 dn^2\xi, \\ H &= b_0 + b_1 dn\xi + b_2 dn^2\xi, \\ u &= c_0 + c_1 dn\xi + c_2 dn^2\xi. \end{aligned} \tag{10}$$

Из систем (10), (2) и (4), определяя постоянные коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$  подобно (7), получаем следующее точное решение в виде бегущей волны, то есть

$$\begin{aligned} E &= \frac{d + \mu c^2 \tilde{\varepsilon}}{2\mu c^2 \tilde{\varepsilon} d} - \frac{2\sigma k^2 (m^2 - 2)}{c \tilde{\varepsilon}} - \frac{6\sigma k^2}{c \tilde{\varepsilon}} dn^2\xi, \\ H &= -\frac{6\sigma k^2}{\mu c^2 \tilde{\varepsilon}} dn^2\xi, \\ u &= \frac{6\sigma k^2}{cd} dn^2\xi, \end{aligned}$$

при

$$c \tilde{\varepsilon} \neq 0, \mu c^2 \tilde{\varepsilon} \neq 0, cd \neq 0, d = \tilde{E} - \rho c^2,$$

или

$$\begin{aligned} E &= \frac{d + \mu c^2 \tilde{\varepsilon}}{2\mu c^2 \tilde{\varepsilon} d} - \frac{2\sigma k^2 (m^2 - 2)}{c \tilde{\varepsilon}} - \frac{6\sigma k^2}{c \tilde{\varepsilon}} dn^2(k(x - ct)), \\ H &= -\frac{6\sigma k^2}{\mu c^2 \tilde{\varepsilon}} dn^2(k(x - ct)), \\ u &= \frac{6\sigma k^2}{cd} dn^2(k(x - ct)), \end{aligned} \tag{11}$$

при

$$\mu c^2 \tilde{\varepsilon} d \neq 0, c \tilde{\varepsilon} \neq 0, cd \neq 0, d = \tilde{E} - \rho c^2.$$

Подобным образом определим точное периодическое решение задачи (1), (2) с помощью функции Якоби  $cn\xi$  в виде

$$\begin{aligned} E &= a_0 + a_1 cn\xi + a_2 cn^2\xi, \\ H &= b_0 + b_1 cn\xi + b_2 cn^2\xi, \\ u &= c_0 + c_1 cn\xi + c_2 cn^2\xi. \end{aligned} \tag{12}$$



Отсюда, подставляя (12) в систему (4) и после несложных преобразований определяя коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$  (12) подобно (7), получим следующее точное решение поставленной задачи в виде

$$E = \frac{d + \mu c^2 \tilde{\varepsilon}}{2\mu c^2 \tilde{\varepsilon} d} + \frac{2\sigma k^2 (2m^2 - 1)}{c \tilde{\varepsilon}} - \frac{6\sigma k^2 m^2}{c \tilde{\varepsilon}} cn^2 \xi,$$

$$H = -\frac{6\sigma k^2 m^2}{\mu c^2 \tilde{\varepsilon}} cn^2 \xi,$$

$$u = \frac{6\sigma k^2 m^2}{cd} cn^2 \xi,$$

при

$$\mu c^2 \tilde{\varepsilon} \neq 0, \quad c \tilde{\varepsilon} \neq 0, \quad cd \neq 0, \quad (d = \tilde{E} - \rho c^2)$$

или

$$E = \frac{d + \mu c^2 \tilde{\varepsilon}}{2\mu c^2 \tilde{\varepsilon}} + \frac{2\sigma k^2 (2m^2 - 1)}{c \tilde{\varepsilon}} - \frac{6\sigma k^2 m^2}{c \tilde{\varepsilon}} cn^2 (k(x - ct)),$$

$$H = \frac{-6\sigma k^2 m^2}{\mu c^2 \tilde{\varepsilon}} cn^2 (k(x - ct)),$$

$$u = \frac{6\sigma k^2 m^2}{cd} cn^2 (k(x - ct)),$$

при

$$\mu c^2 \tilde{\varepsilon} \neq 0, \quad c \tilde{\varepsilon} \neq 0, \quad cd \neq 0, \quad (d = \tilde{E} - \rho c^2).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Liu S.K., Fu Z.T., Liu S.D., Q.Zhao. Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. – J. Physics Letters A., Moscow, 2001, vol. 289, pp. 69-74.
2. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 360 с.
3. Курбанов И. Краевые задачи электродинамики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989, с. 3-23.
4. Сафаров Д.С. Об одном обобщении КдФ-уравнения. – Сб. научных трудов «Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения», Киев, 1996, с. 240.
5. Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических Функций: с приложениями к механике. – М.: КомКнига, 2006, 368 с.

И.Курбанов, Х.П.Сайдалиев

## ҲАЛҲОИ АНИҚУ ДАВРИИ МАСЪАЛАҲОИ ҒАЙРИХАТТИИ ЧАНДИРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТИ БАРОИ МУҲИТҲОИ ЯКЧИНСА

*Донишгоҳи (Славяни) Тоҷикистон ва Руссия,  
Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав*

Яке аз масъалаҳои асоси дар назарияи муодилаҳои дифференциалӣ бо ҳосилаҳои хусуси ёфтани ҳалҳои аниқ ба ҳисоб меравад. Мутаасифона чи тавре маълум аст на барои ҳамаи чунин муодилаҳо ё системаи чунин муодилаҳо ҳалли аниқ ёфтан мумкин аст. Дар кори мавҷуда ҳалҳои аниқ ва даври барои системаи муодилаҳои дифференциалӣ бо ҳосилаҳои хусуси оварда шудааст. Масъалаи гузошташуда ба масъалаҳои чандирии электромагнити мансуб мебошад. Барои муайян намудани ҳалли аниқ, даври ва маҳдуд, усули паҳнкуни аз руи функсияҳои Якоби истифода шудааст [1]. Дар мақолаи мо барои як системаи квазихатии тартиби сеюм, дар асоси [1] ҳалҳои аниқу даври барои муодилаҳои материалии гуногун ёфта шудааст.

**Калимаҳои калиди:** *функсияҳои эллиптикии Якоби, ҳалҳои даври, чандирии электромагнити.*

I.Kurbanov, H.P.Saidaliev

## EXACT PERIODIC SOLUTION OF THE NONLINEAR ELECTROMAGNETIC ELASTICITY PROBLEM FOR A HOMOGENEOUS MEDIUM

*Russian-Tajik (Slavonic) University,  
N.Husrav Bokhtar State University*

One of the most important problems in the theory of partial differential equations is obtaining an exact solution. However, as is known, not all equations or systems of equations have an exact solution. In this paper, exact periodic solutions are determined for a system of partial differential equations. The stated problem relates to the problems of electromagnetic elasticity. To obtain exact periodic and bounded solutions to the problem posed, the method of expansion in terms of the Jacobi elliptic function was used [1]. Works [1-6] are devoted to the study of such equations and systems. In our article, for one third-order quasilinear system, based on work [1], we found exact periodic solutions for various material equations.

**Key words:** *Jacobi elliptic functions, periodic solutions, electromagnetic elasticity.*

Сведение об авторах:

1. **Курбанов Икром Курбанович** – доктор физ.-мат. наук, Российско-Таджикский (Славянский) университет, профессор кафедры математики и физики. E-mail: hudson90@mail.ru;
2. **Сайдалиев Хомид Пирхонович** – кандидат физ.-мат. наук, Бохтарский государственный университет, старший преподаватель кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений. E-mail: homid-1978@mail.ru.

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Г.А.Юсупов, А.А.Шабозова\*

**НАИЛУЧШЕЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В  $L_2$** *Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни,**\*Таджикский национальный университет**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 02.07.2023)*

На классах аналитических в единичном круге функций  $W^{(\alpha)}(\mathcal{K}_\beta, \Phi)$ , где  $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ , определённых при помощи  $\mathcal{K}$ -функционалов  $\mathcal{K}_\beta$  производных дробного порядка  $\alpha$  и мажорант  $\Phi$ , решен ряд экстремальных задач, в том числе вычислены точные значения различных  $n$ -поперечников.

**Ключевые слова:** наилучшее полиномиальное приближение,  $\mathcal{K}$ -функционал, производная дробного порядка  $\alpha$ ,  $n$ -поперечники.

1. Пусть  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{C}$  – множество натуральных, целых неотрицательных и комплексных чисел,  $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  – открытый единичный круг в  $\mathbb{C}$ ,  $A(U)$  – множество функций, аналитических в круге  $U$ . Обозначим через  $L_2 := L_2[0, 2\pi]$  пространство  $2\pi$ -периодических комплекснозначных функций с обычным скалярным произведением и нормой

$$(f, g) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

$$\|f\|_{L_2} := \sqrt{(f, f)} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Говорят, что аналитическая в круге  $U$  функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 < \rho \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

принадлежит пространству Харди  $H_2$ , если

*Адрес для корреспонденции:* Юсупов Гулзорхон Амиришович. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни.  
E-mail: yusufzoda.gulzorkhon@gmail.com

$$\|f\|_2 := \|f\|_{H_2} = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 dt \right)^{1/2} < \infty. \quad (1)$$

Хорошо известно (см., например, [1, с.78]), что в (1) интеграл не убывает при возрастании  $\rho$  на отрезке  $[0,1]$  и почти всюду на окружности  $|z|=1$  существуют угловые граничные значения  $f(e^{it}) := F(t)$ . При этом  $F \in L_2$  и

$$\|F\|_2 := \|F\|_{H_2} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Если  $\alpha \geq 0$  – произвольное число, то производная дробного порядка  $\alpha$  в смысле Римана-Лиувилля функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in A(U)$$

определяется равенством

$$z^\alpha f^{(\alpha)} = \sum_{k=[\alpha]}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha+1)}{\Gamma(k+1)} c_k z^k. \quad (3)$$

Пусть  $\mathcal{P}_{n-1}$  – подпространство комплексных алгебраических полиномов степени не выше  $n-1$ . Величину

$$E_{n-1}(f)_2 := \left\{ \|f - p_{n-1}\|_2 : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\}$$

называют наилучшим среднеквадратическим приближением функции  $f \in H_2$  элементами  $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$  в пространстве  $H_2$ .

Положим

$$H_2^{(\alpha)} := \left\{ f \in H_2 : \|f^{(\alpha)}\|_2 \leq 1 \right\}.$$

В частности, из результата работы [2] следует равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(H_2^{(\alpha)})_{H_{2,\rho}} := \sup \left\{ E_{n-1}(f^{(\alpha)})_{H_{2,\rho}} : f \in H_{2,\rho}^{(\alpha)} \right\} = \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(n+1)} \cdot \rho^n, \quad (4)$$

где  $H_{2,\rho} := \left\{ f \in H_2 : \|f\|_{H_{2,\rho}} := \|f(\rho \cdot)\|_{H_2} < \infty \right\}$ . Равенством

$$\Delta_h^\alpha f(e^{ix}) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(e^{i(x-kh)})$$

определим разность дробного порядка  $\alpha$  функции  $f \in H_2$  с шагом  $h \in \mathbb{R}_+$ . При этом предполагается,

$$\text{что } \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{\alpha}{k} \right| < \infty.$$

Модуль непрерывности дробного порядка  $\beta \in (0, \infty)$  функции  $f \in H_2$  называют величину

$$\omega_{\beta}(f, \delta)_2 := \sup \left\{ \|\Delta_h^{\beta} f\| : |h| \leq \delta \right\}, \quad (5)$$

где  $\delta > 0$ . Очевидно, что характеристика (5) при  $\beta \in \mathbb{N}$  будет обычным модулем непрерывности соответствующего порядка в  $H_2$ . Свойства модуля непрерывности (5) можно найти в работах [3-5].

Наряду с модулем непрерывности (5), в задачах теории аппроксимации  $f \in H_2$  применяются  $\mathcal{K}$ -функционалы Петре [6, 7]. В нашем случае полагаем

$$\mathcal{K}(f; t, H_2, H_2^{(\beta)}) := \inf \left\{ \|f - g\|_2 + t \|g^{(\beta)}\|_2 : g \in H_2^{(\beta)} \right\}. \quad (6)$$

Далее вместо  $\mathcal{K}(f; t, H_2, H_2^{(\beta)})$  будем писать  $\mathcal{K}_{\beta}(f, t)_2$ .

Повторив схему рассуждений работы [6], между характеристиками (5) и (6) функции  $f \in H_2$ , легко установить, что

$$\omega_{\beta}(f, t)_2 \asymp \mathcal{K}_{\beta}(f, t^{\beta}), \quad \text{где } t > 0.$$

**Теорема 1.** Для произвольной функции  $f \in H_2^{(\alpha)}$  при любом  $n \geq [\alpha]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)} \cdot E_{n-1}(f^{(\alpha)})_2. \quad (7)$$

Знак равенства в (7) реализует функция  $f_0(z) = z^n$ .

**Доказательство.** Пользуясь тем, что

$$c_k(f^{(\alpha)}) = \frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} c_k(f), \quad k \geq [\alpha],$$

для произвольной функции  $f \in H^{(\alpha)}$ , получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &= \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(k - \alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)} \right)^2 \left( \frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} \right)^2 |c_k(f)|^2 \right\}^{1/2} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{k \geq n} \frac{\Gamma(k - \alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} \right)^2 |c_k(f)|^2 \right\}^{1/2} \\ &= \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f^{(\alpha)})|^2 \right\}^{1/2} = \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)} \cdot E_{n-1}(f^{(\alpha)})_2 \end{aligned}$$

и неравенство (7) доказано. Знак равенства в (7) для функции  $f_0(z) = z^n$  проверяется непосредственным вычислением.

**Следствие 1.** В условиях теоремы 1 имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in H_2^{(\alpha)} \\ f \neq const}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{E_{n-1}(f^{(\alpha)})_2} = \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)}.$$

Положим

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_2 := \sup_{f \in \mathfrak{M}} E_{n-1}(f)_2. \tag{8}$$

Через  $W_2^{(\alpha)}$  обозначим множество функций  $f \in H_2^{(\alpha)}$ , у которых  $\|f^{(\alpha)}\|_2 \leq 1$ .

Имеет место следующая

**Теорема 2.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in [0, +\infty)$ ,  $n \geq [\alpha]$ . Тогда

$$E_{n-1}(W^{(\alpha)})_2 = \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)}. \tag{9}$$

**2. Значение  $\mathcal{K}$ -функционалов некоторых классов функций.** В работах [3-5], отмечалось, что  $\mathcal{K}$ -функционалы как модули непрерывности являются характеристиками гладкости функций и их целесообразно применять для определения классов функций при решении ряда задач теории аппроксимации. Здесь мы продолжаем указанные исследования для функционала (6).

**Теорема 3.** Пусть  $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ ,  $n \geq \max\{\alpha, \beta\}$ . Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in H_2^{(\alpha)} \\ f \neq const}} \frac{\Gamma(n + 1) / \Gamma(n - \alpha + 1) E_{n-1}(f)_2}{\mathcal{K}_\beta(f^{(\alpha)}, \Gamma(n - \beta + 1) / \Gamma(n + 1))_2} = 1. \tag{10}$$

**Доказательство.** Пусть  $f$  – произвольная функция из  $H_2^{(\alpha)}$ ,  $f \neq const$ . Тогда в силу равенства (7) имеем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &\leq \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)} E_{n-1}(f^{(\alpha)})_2 \leq \\ &\leq \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)} \|f^{(\alpha)} - S_{n-1}(g)\|_2, \end{aligned} \tag{11}$$

где  $g$  – произвольная функция из  $H_2^{(\beta)}$ , а  $S_{n-1}(g)$  – частная сумма  $n$ -го порядка её ряда Тейлора.

Поскольку

$$\|g - S_{n-1}(g)\| \leq \frac{\Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(n+1)} E_{n-1}(g^{(\beta)})_2, \quad (12)$$

то из соотношений (11) и (12) получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &\leq \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(n+1)} \left\{ \|f^{(\alpha)} - g\|_2 + \|g - S_{n-1}(g)\|_2 \right\} \leq \\ &\leq \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(n+1)} \left\{ \|f^{(\alpha)} - g\|_2 + \frac{\Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \|g^{(\beta)}\|_2 \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Левая часть неравенства (13) не зависит от функции  $g \in H_2^{(\beta)}$ . Перейдя к вычислению нижней грани по всем функциям  $g \in H_2^{(\beta)}$  от правой части, согласно определению  $\mathcal{K}$ -функционала (6) запишем

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(n+1)} \cdot \mathcal{K}_\beta \left( f^{(\alpha)}, \frac{\Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \right)_2. \quad (14)$$

Отсюда следует оценка сверху

$$\sup_{f \in H_2^{(\alpha)}} \frac{\Gamma(n+1)/\Gamma(n-\alpha+1) E_{n-1}(f)_2}{\mathcal{K}_\beta(f^{(\alpha)}, \Gamma(n-\beta+1)/\Gamma(n+1))_2} \leq 1. \quad (15)$$

Для получения аналогичной оценки снизу рассматриваемой экстремальной характеристики для произвольного полинома  $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$  запишем

$$z^\alpha p_n^{(\alpha)}(z) = \sum_{k=[\alpha]}^n \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-\alpha+1)} a_k z^k. \quad (16)$$

Применяя равенство Парсеваля, из (16) имеем

$$\begin{aligned} \|z^\alpha p_n^{(\alpha)}(z)\|_2 &= \|p_n^{(\alpha)}\| = \left\{ \sum_{k=[\alpha]}^n \left( \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \right)^2 |a_k|^2 \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left\{ \sum_{k=[\alpha]}^n |a_k|^2 \right\}^{1/2} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha+1)} \cdot \|p_n\|_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Полагая в соотношении (6) по очереди  $g = 0$  и  $g = p_n$  в силу (6) получаем

$$\mathcal{K}_\beta(p_n, t^\beta)_2 \leq \min \left\{ \|p_n\|, t^\beta \|p_n^{(\beta)}\|_2 \right\}. \quad (18)$$

Рассмотрим функцию  $f_0(z) = z^n \in H_2^{(\alpha)}$  для которой  $E_{n-1}(f_0)_2 = 1$ , и на основании (17) и (18)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\beta \left( f_0^{(\alpha)}, \frac{\Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \right)_2 &\leq \| f_0^{(\alpha)} \| = \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} \cdot \| f_0 \|_2 = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} \cdot E_{n-1}(f_0)_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) сразу следует оценка снизу

$$\begin{aligned} \sup_{f \in H_2^{(\alpha)}} \frac{\Gamma(n+1)/\Gamma(n-\alpha+1)E_{n-1}(f)_2}{\mathcal{K}_\beta(f^{(\alpha)}, \Gamma(n-\beta+1)/\Gamma(n+1))_2} &\geq \\ &\geq \frac{\Gamma(n+1)/\Gamma(n-\alpha+1)E_{n-1}(f_0)_2}{\mathcal{K}_\beta(f_0^{(\alpha)}, \Gamma(n-\beta+1)/\Gamma(n+1))_2} \geq 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Требуемое равенство (10) вытекает из сопоставления неравенств (15) и (20). Теорема 3 доказана.

Пусть  $\mathcal{B}$  – единичный шар в пространстве  $H_2$ ;  $\Lambda_n \subset H_2$  –  $n$ -мерное подпространство;  $\Lambda^n \subset H_2$  – подпространство коразмерности  $n$ ;  $\mathcal{L}: H_2 \rightarrow \Lambda_n$  – непрерывный линейный оператор;  $\mathcal{L}^\perp: H_2 \rightarrow \Lambda_n$  – непрерывный оператор линейного проектирования;  $\mathfrak{M}$  – выпуклое центрально-симметричное подмножество из  $H_2$ . Величины

$$b_n(\mathfrak{M}; H_2) := \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon \mathcal{B} \cap \Lambda_{n+1} \in \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset H_2 \right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}; H_2) := \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \| f - g \|_2 : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \right\} : \Lambda_n \subset H_2 \right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}; H_2) := \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \| f - \mathcal{L} f \|_2 : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L} f \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset H_2 \right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}; H_2) := \inf \left\{ \sup \{ \| f \|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset H_2 \right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}; H_2) := \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \| f - \mathcal{L}^\perp f \|_2 : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}^\perp f \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset H_2 \right\},$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским* и *проекционным*  $n$ -поперечниками множества  $\mathfrak{M}$  в  $H_2$ . Между указанными  $n$ -поперечниками в гильбертовом пространстве  $H_2$  имеют место соотношения

$$b_n(\mathfrak{M}; H_2) \leq \frac{d_n(\mathfrak{M}; H_2)}{d^n(\mathfrak{M}; H_2)} \leq \delta_n(\mathfrak{M}; H_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}; H_2). \quad (21)$$

Неубывающую на  $[0, \infty)$  функцию  $\Phi$ , для которой  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$  и  $\Phi(t)/t$  невозрастает на  $(0, \infty)$ , назовём мажорантой.



Символом  $W^{(\alpha)}(\mathcal{K}_\beta, \Phi)$ , где  $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ , обозначим класс функций  $f \in H_2^{(\alpha)}$ , для которых производные  $f^{(\alpha)}$  удовлетворяют условию

$$\mathcal{K}_\beta(f^{(\alpha)}, t^\beta)_2 \leq \Phi(t^\beta), \quad t > 0.$$

**Теорема 4.** Пусть  $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} \lambda_n(W^{(\alpha)}(\mathcal{K}_\beta, \Phi); H_2)_2 &= E_{n-1}(W^{(\alpha)}(\mathcal{K}_\beta, \Phi))_2 = \\ &= \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(n+1)} \cdot \Phi\left(\frac{\Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(n+1)}\right), \end{aligned}$$

где  $\lambda_n(\cdot)$  – любой из  $n$ -поперечников, перечисленных выше.

Доказательство данной теоремы повторяет схему рассуждений теоремы 2 из [6], а потому опускается.

Поступило 09.07.2023 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.: Гостехиздат, 1950, 350 с.
2. Scheick J.T. Polynomial approximation of functions analytic in disc. – Proc. Amer. Math. Soc., 1966, №17, pp. 1238-1243.
3. Butzer P.L., Dyckoff H., Gorlich E., Stens R.L. Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes. – Canad. J. Math., 1977, v. 29, №4, pp. 781-793.
4. Butzer P.L., Westphal U. An introduction to fractional calculus. – In Book: Application of Fractional Calculus in Physics. Ed. by R.Hilfer. – Singapore, 2000, pp. 1-85.
5. Tikhonov S. On moduli of smoothness of fractional order. – Real Analysis Exchange, 2004/2005, v.30, №2, pp. 507-518.
6. Вакарчук С.Б.  $\mathcal{K}$ -функционалы и точные значения  $n$ -поперечников некоторых классов из  $L_2$  – Матем. заметки, 1999, т.66, №4, с. 494-499.
7. Шабозов М.Ш., Тухлиев К.  $\mathcal{K}$ -функционалы и точные значения  $n$ -поперечников некоторых классов функций в пространстве  $L_2((1-x^2)^{-1/2}; [-1,1])$  – Изв. ТулГУ, 2014, №1, ч. 1, с. 83-97.

Г.А.Юсупов, А.А.Шабозова\*

## НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ПОЛИНОМИАЛИ ҲОСИЛАҲОИ ТАРТИБИ КАСРӢ ВА ҚУТРҲОИ СИНФИ ФУНКСИЯҲО ДАР $L_2$

*Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ,**\*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Барои синфи функцияҳои  $W^{(\alpha)}(\mathcal{K}_\beta, \Phi)$  дар давраи воҳиди аналитикӣ, ки  $\alpha, \beta \in (0, \infty)$  ва ба воситаи  $\mathcal{K}$ -функционалҳо  $\mathcal{K}_\beta$  аз ҳосилаи тартиби касрии  $\alpha$  муайяншудаи бо мажорантаи  $\Phi$  маҳдудшуда, як қатор масъалаҳои экстремалӣ, аз ҷумла қимати аниқи  $n$ -гуногун ҳисоб карда шудааст. **Калимаҳои калидӣ:** наздиккунии беҳтарини полиномиалӣ,  $\mathcal{K}$ -функционал, ҳосилаи тартиби касрии  $\alpha$ ,  $n$ -қутрҳо.

G.A.Yusupov, A.A.Shabozova\*

## BEST POLYNOMIAL APPROXIMATION FRACTIONAL DERIVATIVES AND WIDTHS OF FUNCTION CLASSES IN $L_2$

*S.Aini Tajik State Pedagogical University,**Tajik National University*

On classes of functions  $W^{(\alpha)}(\mathcal{K}_\beta, \Phi)$  analytic in the unit disc, where  $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ , fractional-order derivatives  $\alpha$  and majorant  $\Phi$  defined with the help of  $\mathcal{K}$ -functionals  $\mathcal{K}_\beta$ , a number of extremal problems were solved, including the calculation exact values of various  $n$ -widths.

**Key words:** best polynomial approximation,  $\mathcal{K}$ -functional, fractional derivative  $\alpha$ ,  $n$ -widths.

### Сведения об авторах:

1. **Юсупов Гулзорхон Амиршоевич** – доктор физико-математических наук, профессор, Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни, заведующий кафедрой математического анализа.
2. **Шабозова Адолат Аъзамовна** – кандидат физико-математических наук, Таджикский национальный университет, и.о. доцента кафедры математического анализа и теории функций.

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

М.И. Джангибеков

## О ПОПЕРЕЧНИКАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2$

*Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 16.11.2023 г.)*

Найдены точные значения ряда  $n$ -поперечников для некоторых классов дифференцируемых периодических функций, усреднённые значения модуля непрерывности производной  $r$ -го порядка, которые удовлетворяют ограничению

$$\frac{1}{h} \int_0^h \omega(f^{(r)}, t) dt \leq \Phi(h),$$

где  $h \in \mathbb{R}_+$  и  $\Phi$  – некоторая мажоранта, в нуле равная нулю.

**Ключевые слова:** поперечники, модуль непрерывности, ряд Фурье, наилучшее приближение, совместное приближения функций и их производных.

Вопросы наилучшего среднеквадратического приближения дифференцируемых периодических функций рассматривались, например, в работах [1-10]. В настоящей статье, продолжая исследования, проведенные в указанных работах, найдены точные значения  $n$ -поперечников некоторого класса периодических дифференцируемых функций в  $L_2$ .

1. Пусть  $L_2 := L_2[0, 2\pi]$  – пространство измеримых  $2\pi$ -периодических функций с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty$$

и рядом Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (1)$$

Пусть  $T_{2n-1}$  – подпространство, состоящее из всевозможных тригонометрических полиномов

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

**Адрес для корреспонденции:** Джангибеков Мирзошо Исломбаевич. 736000, Республика Таджикистан, г.Хорог, ул. Ш.Шотемура, 109, Хорогский государственный университет. E-mail: ambarkuh04@list.ru.

порядка  $n-1$ . Хорошо известно, что для произвольной функции  $f \in L_2$  имеющей разложение в ряд Фурье вида (1), величина её наилучшего приближения элементами подпространства  $T_{2n-1}$  равна

$$E_{n-1}(f) := E_{n-1}(f)_{L_2} = \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in T_{2n-1} \} = \\ = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

где  $S_{n-1}(f)$  – частичная сумма порядка  $n-1$  ряда Фурье (1) функции  $f \in L_2$ ,  $\rho_k(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$ ,  $a_k(f)$  – косинус-,  $b_k(f)$  – синус-коэффициент Фурье.

Равенством

$$\omega(f, t) := \sup_{|h| \leq t} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|$$

определим модуль непрерывности функции  $f \in L_2$ . Через  $L_2^{(r)}$ , ( $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $L_2^{(0)} = L_2$ ) обозначим множество функций  $f \in L_2^{(r)}$ , у которых производные  $r-1$ -го порядка абсолютно непрерывны, а  $f^{(r)} \in L_2$ .

Ниже в п.2 при вычислении точных значений различных  $n$ -поперечников на классах функций структурные свойства функции  $f \in L_2$  характеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности  $r$ -й производной  $f^{(r)}$ , задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усреднённой величины  $\omega(f^{(r)}, t)$ .

**2.** Прежде чем сформулировать основной результат работы, напомним необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем.

Пусть  $S$  – единичный шар в  $L_2$ ,  $\mathfrak{M}$  – выпуклое центрально-симметричное подмножество из  $L_2$ ,  $\Lambda_n \subset L_2$  –  $n$ -мерное подпространство,  $\Lambda^n \subset L_2$  – подпространство коразмерности  $n$ ,  $\mathcal{L} : L_2 \rightarrow \Lambda_n$  – непрерывный линейный оператор, приводящий элементы пространства  $L_2$  в  $\Lambda_n$ ,  $\mathcal{L}^\perp : L_2 \rightarrow \Lambda_n$  – непрерывный оператор линейного проектирования пространства  $L_2$  на подпространство  $\Lambda_n$ . Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \|f - g\| : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\| : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \sup \{ \|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\| : f \in \mathfrak{M} \right\} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным  $n$ -поперечниками*. Поскольку  $L_2$  является гильбертовым пространством, то справедливы следующие соотношения между перечисленными  $n$ -поперечниками (см., например, [11, 12]):

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \quad (3)$$

Пусть  $\Phi_i(u)$  ( $i = 1, 2$ ) – две произвольные непрерывные возрастающие при  $u \geq 0$  функции такие, что  $\Phi_i(0) = 0, i = 1, 2$ . Через  $W^{(r)}(\Phi_1)$  обозначим класс функций  $f \in L_2^{(r)}$ , для которых при любых  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, t) dt \leq \Phi_1\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

а через  $W^{(r)}(\Phi_2)$  – аналогичный класс функций, для которых при любых  $h \in \mathbb{R}_+$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{h} \int_0^h \omega(f^{(r)}, t) dt \leq \Phi_2(h).$$

В [3] Л.В.Тайков доказал, что для произвольной функции  $f \in L_2^{(r)}$  при любых  $r, n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{4n^{r-1}} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, t) dt \quad (4)$$

и равенство в (4) достигается для функции  $f_n(x) = a \cos(nx + b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Базируясь на неравенстве (4), Тайков [3] доказал, что если для любых  $\lambda \in [0, 1]$  и  $x \in (0, \pi]$  выполняются неравенства

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{4} \lambda \leq \frac{\Phi(\lambda x)}{\Phi(x)} \leq \frac{\lambda}{\pi/2 - (\pi/2 - 1)\lambda}, \quad (5)$$

то для любых натуральных  $r$  и  $n$  справедливы равенства

$$d_{2n-1}(W^{(r)}(\Phi_1), L_2) = \frac{1}{4n^{r-1}} \Phi_1\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Там же доказано, что среди всех функций вида  $\Phi(u) = u^{1+\alpha}$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , только одна функция с  $\alpha = \frac{\pi}{2} - 1$  удовлетворяет условию (5).

В настоящей работе доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть при некотором  $n \in \mathbb{N}$  мажорирующая функция  $\Phi_2$  удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Phi_2(h)}{\Phi_2(\pi/n)} \geq \frac{\pi}{nh} \begin{cases} 1 - \cos \frac{nh}{2}, & \text{аёёё } 0 < h \leq \pi/n; \\ 1 + \frac{1}{2}(nh - \pi), & \text{аёёё } h \geq \pi/n. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда для этого  $n$  выполнены равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n-1}(W^{(r)}(\Phi_2), L_2) &= E_{n-1}(W^{(r)}(\Phi_2))_{L_2} = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\lambda_n$  – любой из вышеперечисленных  $n$ -поперечников,  $E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} := \sup\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M}\}$  – наилучшее приближение класса  $\mathfrak{M} \subset L_2$  подпространством  $\mathcal{T}_{2n-1}$ . Множество мажорант  $\Phi$  удовлетворяющих (6) не пусто.

**Доказательство.** Для произвольной функции  $f \in W^{(r)}(\Phi_2)$  из неравенства (4) имеем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &\leq \frac{1}{4n^{r-1}} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, t) dt = \\ &= \frac{\pi}{4n^r} \left( \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, t) dt \right) \leq \frac{\pi}{4n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

из которого в силу соотношения (3) запишем оценку сверху всех вышеперечисленных  $n$ -поперечников

$$\lambda_n(W^{(r)}(\Phi_2), L_2) \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi_2\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (8)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу указанных  $n$ -поперечников, введём в рассмотрение  $(2n+1)$ -мерный шар полиномов

$$S_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi_2\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$$

и покажем, что  $S_{2n+1}$  принадлежит классу функций  $W^{(r)}(\Phi_2)$ . Воспользуемся неравенством [3]

$$\omega(T_n^{(r)}, t) \leq 2n^r \left( \sin \frac{nt}{2} \right)_* \cdot \|T_n\| \quad (9)$$

верным для любого полинома  $T_n \in \mathcal{T}_{2n+1}$ , где

$$(\sin u)_* := \{\sin u, \text{ если } 0 < u \leq \pi/2; 1, \text{ если } u \geq \pi/2\}. \quad (10)$$

Докажем, что при любом  $h \in \mathbb{R}_+$  и  $T_n \in S_{2n+1}$  выполняется условие

$$\frac{1}{h} \int_0^h \omega(T_n^{(r)}, t) dt \leq \Phi(h)$$

при выполнении неравенств (6). Для этого рассмотрим два случая  $h \leq \pi/n$  и  $h \geq \pi/n$ .

Пусть сначала  $h \leq \pi/n$ . Тогда для произвольного  $T_n \in S_{2n+1}$  в силу (10) и первого из неравенств (6) запишем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^h \omega(T_n^{(r)}, t) dt &\leq 2n^r \cdot \|T_n\| \cdot \frac{1}{h} \int_0^h \sin \frac{nt}{2} dt \leq \\ &\leq \frac{\pi}{nh} \left(1 - \cos \frac{nh}{2}\right) \cdot \Phi_2\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \Phi_2(h). \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть теперь  $h \geq \pi/n$ . В этом случае в силу (9), (10) и второго неравенства из (6) для любого полинома  $T_n \in \mathcal{T}_{2n+1}$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^h \omega(T_n^{(r)}, t) dt &\leq 2n^r \cdot \|T_n\| \cdot \frac{1}{h} \left( \int_0^{\pi/n} \sin \frac{nt}{2} dt + \int_{\pi/n}^h dt \right) \leq \\ &\leq \frac{\pi}{nh} \left(1 + \frac{1}{2}(nh - \pi)\right) \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \Phi(h). \end{aligned} \quad (12)$$

Из неравенств (11) и (12) следует, что  $S_{2n+1} \subset W^{(r)}(\Phi_2)$ . Но тогда, согласно определению бернштейновского  $n$ -поперечника, получаем оценку снизу

$$\begin{aligned} b_{2n-1}(W^{(r)}(\Phi_2), L_2) &\geq b_{2n-1}(S_{2n+1}, L_2) = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi_2\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Требуемые равенства (7) вытекают из сопоставления неравенств (8) и (13).

Покажем, что неравенство (6) выполняется для  $\Phi_2(u) = u^{\pi/2-1}$ . Полагая в (6)  $\Phi_2^*(u) = u^\alpha$ , получаем

$$\frac{\Phi_2^*(h)}{\Phi_2^*(\pi/n)} \geq \frac{\pi}{nh} \begin{cases} 1 - \cos \frac{nh}{2}, & 0 \leq nh \leq \pi; \\ 1 + \frac{1}{2}(nh - \pi), & nh \geq \pi \end{cases}$$

или, что то же

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^{\alpha+1} \geq \begin{cases} 1 - \cos \frac{nh}{2}, & 0 \leq nh \leq \pi; \\ 1 + \frac{1}{2}(nh - \pi), & nh \geq \pi. \end{cases} \quad (14)$$

Введя обозначение  $nh/\pi = t$ , неравенство (14) запишем в виде

$$t^{\alpha+1} \geq \begin{cases} 1 - \cos \frac{\pi t}{2}, & 0 \leq t \leq 1; \\ 1 + \frac{1}{2}(t - 1), & t \geq 1 \end{cases} \quad (15)$$

которое еще предстоит доказать. Для  $t \in [0, 1]$  рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = t^{\alpha+1} - 1 + \cos \frac{\pi t}{2}.$$

Заметим, что  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  и докажем, что при всех  $t \in [0, 1]$   $\varphi(t) \geq 0$ . Действительно, если бы  $\varphi(t)$  меняла знак на  $(0, 1)$ , то её производная

$$\varphi'(t) = (\alpha + 1)t^\alpha - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{2}$$

имела бы на этом интервале по крайней мере два различных нуля и, кроме того,  $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$ . Поэтому вторая производная

$$\varphi''(t) = \alpha(\alpha + 1)t^{\alpha-1} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi t}{2}$$

должна иметь на интервале  $(0, 1)$  три различных нуля, что невозможно, так как она представлена разностью выпуклой вверх и выпуклой вниз функций. Заметим, что функция  $\varphi(t) > 0$  для достаточно малых значений аргумента  $t$  ( $0 < t < 1$ ) и так как  $\varphi(1) = 0$ , то  $\varphi(t) \geq 0$  при всех  $t \in [0, 1]$ , а это равносильно первому неравенству в (6).

Второе ограничение в (6) равносильно выполнению неравенства

$$t^{\alpha+1} \geq 1 + \frac{\pi}{2}(t - 1), \quad t \geq 1. \quad (16)$$

В самом деле, полагая  $\varphi_1(t) = t^{\alpha+1} - 1 - \frac{\pi}{2}(t - 1)$ , для производной  $\varphi_1'(t)$  находим

$$\varphi_1'(t) = (\alpha + 1)t^\alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(t^{\alpha-1}) > 0,$$

а это означает, что (16) и вместе с ним второе неравенство в (6) имеют место. Теорема 1 полностью доказана.



3. Хорошо известно, что для функции  $f \in L_2^{(r)}$  её промежуточные производные  $f^{(s)}$  ( $s = 1, \dots, r-1, r \geq 2$ ) также принадлежат пространству  $L_2$ , а потому представляет несомненный интерес изучение поведения величин  $E_{n-1}(f^{(s)})$  на самом классе  $L_2^{(r)}$  или на некотором его подклассе  $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ . Таким образом задача наилучшего совместного приближения класса  $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$  формулируется следующим образом: требуется найти величину

$$E_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup\{E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\}. \tag{17}$$

Имеет место следующая

**Теорема 2.** Пусть  $n, r \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, s = \overline{0, r-1}$ . Тогда для произвольной функции  $f \in L_2^{(r)}$  справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{4n^{r-1-s}} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, t) dt, \tag{18}$$

которое обращается в равенство для функции

$$f_n(x) = a \cos(nx + b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

**Доказательство.** Полагая в (4)  $r = 1$  получаем

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{4} \int_0^{\pi/n} \omega(f', t) dt.$$

В этом неравенстве, заменяя функцию  $f$  на  $f^{(r-1)}$ , будем иметь

$$E_{n-1}(f^{(r-1)}) \leq \frac{1}{4} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, t) dt. \tag{19}$$

Если теперь воспользоваться хорошо известным неравенством [7]

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{4n^{r-1-s}} \cdot E_{n-1}(f^{(r-1)}), \quad s = 0, 1, \dots, r-1,$$

то приходим к соотношению (18):

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{4n^{r-1-s}} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, t) dt$$

Точность неравенства (18) на функции  $f_n(x)$  проверяется простым вычислением.

Результат, полученный в теореме 2, представляет возможность вычислить величину (17) для обоих классов функций  $W^{(r)}(\Phi_1)$  и  $W^{(r)}(\Phi_2)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $n, r \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+$ . Тогда справедливы равенства

$$E_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Phi_1))_{L_2} = \frac{1}{4n^{r-1-s}} \cdot \Phi_1\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad (20)$$

$$E_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Phi_2))_{L_2} = \frac{\pi}{4n^{r-1-s}} \cdot \Phi_2\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (21)$$

**Доказательство.** Равенства (20) и (21) доказываются по одной и той же схеме. Поэтому приводим только доказательство (20). Из неравенства (18) для произвольной функции  $f \in W^{(r)}(\Phi_1)$  получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{4n^{r-1-s}} \int_0^{\pi/n} \omega(f^{(r)}, t) dt \leq \frac{1}{4n^{r-1-s}} \cdot \Phi_1\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

откуда сразу вытекает оценка сверху

$$E_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Phi_1))_{L_2} \leq \frac{1}{4n^{r-1-s}} \cdot \Phi_1\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (22)$$

Для получения аналогичной оценки снизу заметим, что в [3] доказано, что при выполнении двойного неравенства (5) функция

$$f_0(x) = \frac{1}{4n^{r-1}} \cdot \Phi_1\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos nx$$

принадлежит классу  $W^{(r)}(\Phi_1)$ . Но так как для этой функции при любом  $s = 0, 1, 2, \dots, r-1$  производные  $s$ -го порядка имеют вид

$$f_0^{(s)}(x) = \frac{1}{4n^{r-1-s}} \cdot \Phi_1\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(nx + \frac{s\pi}{2}\right),$$

и, кроме того,

$$E_{n-1}(f_0^{(s)}) = \frac{1}{4n^{r-1-s}} \cdot \Phi_1\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad (23)$$

то, пользуясь равенством (23), запишем оценку снизу

$$E_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Phi_1))_{L_2} \geq E_{n-1}(f_0^{(s)}) = \frac{1}{4n^{r-1-s}} \cdot \Phi_1\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (24)$$

Равенство (20) получаем из сопоставления неравенств (22) и (24), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

*Поступило 16.11.2023 г.*

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в  $L_2$ . – Матем. заметки, 1967, т.2, №5, с.513-522.
2. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из  $L_2$ . – Матем. заметки, т.20, №3, 1976, с.433-438.
3. Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства  $L_2$ . – Мат. заметки, 1977, т.22, №4, с.535-542.
4. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве  $L_2$ . – Матем. заметки, 1978, т.24, №6, с.785-792.
5. Шалаев В.В. О поперечниках в  $L_2$  классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков. – Укр. матем. журн., 1991, т.43, №1, с.125-129.
6. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в  $L_2$ . – Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.
7. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве  $L_2[0,2\pi]$ . – Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
8. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в  $L_2$  некоторых классов  $2\pi$ -периодических функций и точные значения их поперечников. – Матем. заметки, 2011, т.90, №5, с.764-775.
9. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве  $H_{q,\rho}$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $0 < \rho \leq 1$ . – Сиб. матем. журн., 2016, т.57, №2, с.469-478.
10. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в  $L_2$ . – Матем. заметки, 2013, т.94, №6, с.908-917.
11. Pinkus A.  $n$ -Widths by Approximation Theory. – Berlin: Springer. 1985.
12. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – МГУ, 1976, 325 с.

М.И.Джангибеков

## ОИДИ ҚУТРҲОИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ ФУНКСИЯҲОИ ДИФФЕРЕНСИРОНИДАШАВАНДА ДАР ФАЗОИ $L_2$

*Донишгоҳи давлатии Хоруг ба номи М.Назаршоев*

Қиматҳои аниқи як қатор  $n$ -қутрҳо барои баъзе синфҳои функсияҳои дифференсирунидашавандаи даврӣ, ки қиматҳои миёнакардашудаи модули бифосилагии ҳосилаи тартиби  $g$ -ум маъдудияти зеринро қаноат мекунад:

$$\frac{1}{h} \int_0^h \omega(f^{(r)}, t) dt \leq \Phi(h),$$

$h \in \mathbb{R}_+$  ва  $\Phi$  – мажорантае, ки дар нуқтаи сифр ба сифр баробар аст, ёфта шудаанд.

**Калимаҳои калидӣ:** қутрҳо, модули бифосилагӣ, қатори Фурье, наздиккунии беҳтарин, наздиккунии ҳамҷояи функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо.

M.I.Jangibekov

**ON THE DIAMETER OF SOME CLASSES OF DIFFERENTIABLE FUNCTION  
IN  $L_2$  SPACE***M.Nazarshoev Kharog State University*

The exact values of a number of  $n$ -widths are found for some classes of differentiable periodic functions, the averaged values of the modulus of continuity whose derivatives of  $r^{\text{th}}$  order satisfy the constraint

$$\frac{1}{h} \int_0^h \omega(f^{(r)}, t) dt \leq \Phi(h),$$

where  $h \in \mathbb{R}_+$  and  $\Phi$  are some majorant equal to zero at zero.

**Key words:**  $n$ -widths, modulus of continuity, Fourier series, best approximation, joint approximation of functions and their derivatives.

**Сведения об авторе:**

1. Джангибеков Мирзошо Ислombeкович – Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева, ассистент кафедры математического анализа.

УДК 517.957

Специальность 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

**Член-корреспондент НАН Таджикистана С.А.Исхоков, К.Б.Пирназаров, Б.А.Рахмонов****О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ  
ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ  
В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ***Национальная академия наук Таджикистана,**Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана*

*В работе изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов в полупространстве  $R_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n > 0\}$ , вырождающихся степенным образом на гиперплоскости  $x_n = 0$  и при  $x_n \rightarrow +\infty$ . Эти вырождения связаны друг с другом. Исследуемые операторы ассоциированы с полуторалинейными интегро-дифференциальными формами, которые могут не удовлетворять условию коэрцитивности.*

**Ключевые слова:** эллиптический оператор, степенное вырождение, полупространство, задача Дирихле, некоэрцитивная форма.

1. Разрешимость вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов хорошо изучена в случае, когда полуторалинейные формы, связанные с исследуемыми операторами, удовлетворяют условию коэрцитивности (см. [1-4] и имеющуюся там библиографию). Случай некоэрцитивности соответствующих полуторалинейных форм сначала изучался для эллиптических операторов, заданных в ограниченной области (см. [5-11] и имеющуюся в них библиографию). Разработанный в этих работах метод тесно связан с ограниченностью области  $\Omega$   $n$ -мерного евклидова пространства  $R^n$ , в которой задан исследуемый дифференциальный оператор. Усовершенствование этого метода в работах [12, 13] позволяло лишь исследовать дифференциальные операторы, заданные в неограниченных областях, очень близки к ограниченным (предельно-цилиндрическая область с нулевым диаметром на бесконечности).

В отличие от этого, в работах [14-16] исследовался случай вырождающихся эллиптических операторов во всём пространстве  $R^n$ , ассоциированных с некоэрцитивными полуторалинейными формами. Опираясь на результаты этих работ, здесь мы изучаем разрешимость однородной вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной полуторалинейной формой в полупространстве  $R_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n > 0\}$ . Отметим, что в случае операторов, рассмотренных в ограниченной области, вырождение происходит вдоль границы области и в случае

---

*Адрес для корреспонденции:* Исхоков Сулаймон Абунасович, Пирназаров Камолитдин Бобоназарович, Рахмонов Бахтовар Абдуганиевич 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики им. А.Джуроева НАНТ. E-mail: sulaimon@mail.ru, pirnazarov9797@mail.ru, Bakhtovar-1989@mail.ru.

всего пространства вырождение происходит на бесконечности. В отличие от этого, в нашем случае вырождение происходит в двух случаях, на гиперплоскости  $x_n = 0$  и при  $x_n \rightarrow +\infty$ . Эти вырождения связаны друг с другом.

2. Прежде чем сформулировать нашу основную задачу определим весовые нормированные пространства, в которых ищутся решения изучаемой задачи. В случае ограниченной области  $\Omega \subset R^n$  (см., например, [1]-[3]) весовые функции задаются в виде  $\rho^\alpha(x)$ , где  $\alpha$  – вещественное число и  $\rho(x)$  – регуляризованное расстояние от точки  $x \in \Omega$  до границы  $\partial\Omega$ , а в случае всего пространства  $R^n$  эти функции задаются в виде  $d^\alpha(x)$ , где  $\alpha$  – вещественное число и  $d(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$ . Наш случай, то есть случай полупространства  $R_n^+$ , отличается от этих случаев и в этом случае весовые функции имеют следующий вид

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x_n) = \sigma(x_n)x_n^{-\alpha} + (1 - \sigma(x_n))x_n^\beta \quad (x_n > 0),$$

$\alpha, \beta$  – вещественные числа и функция  $\sigma(x_n) \in C_0^\infty(R_1^+)$  такая, что  $0 \leq \sigma(x_n) \leq 1$  для любого  $x_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$  и  $\sigma(x_n) \equiv 0$ , когда  $x_n \geq 1$ ;  $\sigma(x_n) = 1$  для любого  $x_n \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ .

Пусть  $r$  – некоторое натуральное и  $\alpha, \beta$  – вещественные числа. Определим весовое пространство  $V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)$  комплекснозначных функций  $u(x)$ , определенных в полупространстве  $R_n^+$ , со следующей конечной нормой:

$$\|u; V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)\| = \left\{ \sum_{|k| \leq r} \int_{R_n^+} \left( \varphi_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r+|k|} |u^{(k)}(x)| \right)^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (1)$$

Здесь и далее  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  – мультииндекс,  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  – длина мультииндекса  $k$  и  $u^{(k)}(x)$  – обобщённая в смысле С.Л.Соболева производная функции  $u(x)$  мультииндекса  $k$ .

Сформулируем основные свойства пространства  $V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)$  (см., например, [17]).

**Теорема 1.** При всех вещественных  $\alpha, \beta$  множество бесконечнодифференцируемых финитных в  $R_n^+$  функций  $C_0^\infty(R_n^+)$  плотно в пространстве  $V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)$ , норма (1) эквивалентна величине

$$\left\{ \sum_{|k|=r} \int_{R_n^+} \left( \varphi_{\alpha,\beta}(x_n) |u^{(k)}(x)| \right)^2 dx + \int_{R_n^+} \left( \varphi_{\alpha,\beta}(x_n) x_n^{-r} |u(x)| \right)^2 dx \right\}^{1/2}$$

и при любом целом  $s: 0 \leq s \leq r$  справедливо вложение

$$V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+) \rightarrow V_{2;\alpha+s,\beta-s}^{r-s}(R_n^+)$$

Далее обозначим через  $L_{2;\alpha+r,\beta-r}(R_n^+)$  пространство комплекснозначных функций  $u(x)$ , определённых в полупространстве  $R_n^+$ , со следующей конечной нормой:

$$\|u; L_{2;\alpha+r,\beta-r}(R_n^+)\| = \left\{ \int_{R_n^+} \sigma_{\alpha,\beta}^2(x_n) x_n^{-2r} |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2},$$

а через  $(V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+))'$  обозначим пополнение пространства  $L_{2;\alpha+r,\beta-r}(R_n^+)$  по норме

$$\|f; (V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+))'\| = \sup_{R_n^+} \int \sigma_{\alpha,\beta}^2(x_n) x_n^{-2r} f(x) \overline{v(x)} dx,$$

где верхняя грань берется по всем функциям  $v(x) \in V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)$  таким, что  $\|v; V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)\| = 1$ .

### 3. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u] = \sum_{|k|, |l| \leq r} (-1)^{|l|} \left( \sigma_{\alpha,\beta}^2(x_n) x_n^{-2r+|k|+|l|} a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)}, \tag{2}$$

первоначально определенный на функциях  $u \in C_0^\infty(R_n^+)$ . Постановка и изучение задачи Дирихле в вариационном смысле тесно связаны с интегро-дифференциальной полуторалинейной формой, связанной с оператором (2), которая имеет следующий вид

$$B[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{R_n^+} \sigma_{\alpha,\beta}^2(x_n) x_n^{-2r+|k|+|l|} a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad u, v \in C_0^\infty(R_n^+). \tag{3}$$

Далее считается, что коэффициенты  $a_{kl}(x)$  оператора (2) являются ограниченными комплекснозначными функциями.

Основной целью нашей работы является изучение разрешимости следующей задачи Дирихле:

**Задача  $D_\lambda$ .** Для заданного функционала  $F \in (V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+))'$  требуется найти решение  $u(x)$  уравнения

$$B[u, v] + \lambda \int_{R_n^+} \sigma_{\alpha,\beta}^2(x_n) x_n^{-2r} u(x) \overline{v(x)} dx = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(R_n^+), \tag{4}$$

принадлежащее пространству  $V_{2;\alpha,\beta}^r(R_n^+)$ .

Чтобы сформулировать наш основной результат о разрешимости задачи  $D_\lambda$ , далее будем считать, что функция  $\operatorname{argz}$  принимает значения на полуинтервале  $(-\pi, \pi]$  и вводим основной символ оператора (2) в виде

$$A(x, \zeta) = \sum_{|k|, |l| \leq r} a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l}, \quad x \in R_n^+, \quad \zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \leq r} \subset \mathbb{C}.$$

Сформулируем основной результат работы в виде следующей теоремы:

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия

I) для всех  $x \in R_n^+$ ,  $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \leq r} \subset \mathbb{C}$  выполняется неравенство

$$|\arg A(x, \zeta)| < \varphi,$$

где  $\varphi$  – некоторое число из интервала  $(0, \pi)$ ;

II) существует положительное число  $M$  такое, что

$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \leq M \operatorname{Re} \{ \gamma(x) A(x, \zeta) \}$$

для всех  $x \in R_n^+$ ,  $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \leq r} \subset \mathbb{C}$ , где отличная от нуля комплекснозначная функция  $\gamma(x)$  всюду непрерывна;

III) для любого числа  $\nu > 0$  существует число  $R_\nu > 0$  такое, что  $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$  для всех  $x, y \in R_n^+$  таких, что  $|x| > R_\nu, |y| > R_\nu$ .

Тогда существует число  $\lambda_0 \geq 0$  такое, что если  $\lambda \geq \lambda_0$ , то для любого заданного функционала  $F \in (V_{2,\alpha,\beta}^r(R_n^+))$  задача  $D_\lambda$  имеет единственное решение, и при этом справедлива оценка

$$\|u; V_{2,\alpha,\beta}^r(R_n^+)\| \leq M_1 \left\| F; (V_{2,\alpha,\beta}^r(R_n^+))' \right\|,$$

где число  $M_1 > 0$  не зависит от  $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$  и функционала  $F$ .

Доказательство теоремы проводится усовершенствованием метода работы [16] с использованием теоремы 1.

По этой же схеме исследуется разрешимость вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями на гиперплоскости  $x_n = 0$  для вырождающихся эллиптических операторов в полупространстве  $R_n^+$ , ассоциированных с некоэрцитивными полуторалинейными формами. Вводим пространство  $W_{2,\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)$  с конечной нормой

$$\|u; W_{2,\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{R_n^+} (\sigma_{\alpha,\beta}(x_n) |u^{(k)}(x)|)^2 dx + \int_{R_n^+} (\sigma_{\alpha,\gamma}(x_n) |u(x)|)^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

Обозначим через  $\tilde{C}_0^\infty(R_n^+)$  множество бесконечно дифференцируемых функций, финитных сверху, то есть обращающихся в нуль при больших значениях  $x_n$ , а через  $\tilde{W}_{2,\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)$  обозначим замыкание множества  $\tilde{C}_0^\infty(R_n^+)$  по норме (5).



Пополнение класса  $C_0^\infty(R_n^+)$  по норме (5) обозначим через  $\overset{\circ}{W}_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)$ , а через  $\left(\overset{\circ}{W}_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)\right)'$  обозначим пополнение пространства  $L_{2;\alpha+r,\beta-r}(R_n^+)$  по норме

$$\left\|f; \left(\overset{\circ}{W}_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)\right)'\right\| = \sup_{R_n^+} \int \sigma_{\alpha,\beta}^2(x_n) x_n^{-2r} f(x) \overline{v(x)} dx,$$

где верхняя грань берется по всем функциям  $v(x) \in \overset{\circ}{W}_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)$  таким, что  $\|v; \overset{\circ}{W}_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)\| = 1$ .

Пусть  $-r + \frac{1}{2} < \alpha \leq -\frac{1}{2}$  и  $s_0$  – целое число удовлетворяющее неравенствам  $r + \alpha - 1/2 \leq s_0 < r + \alpha + \frac{1}{2}$ .

Далее изучим разрешимость следующей задачи:

**Задача  $D_\lambda^0$ .** Для заданного функционала  $F \in \left(\overset{\circ}{W}_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)\right)'$  требуется найти решение  $u(x)$

уравнения

$$B[u, v] + \lambda \int_{R_n^+} \sigma_{\alpha,\beta}^2(x_n) x_n^{-2r+|k|+|l|} u(x) \overline{v(x)} dx = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(R_n^+), \quad (6)$$

принадлежащее пространству  $\tilde{W}_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)$  и удовлетворяющее следующим граничным условиям

$$\frac{\partial^s u(x)}{\partial x_n^s} \Big|_{x_n=0} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, s_0 - 1,$$

Относительно разрешимости задачи  $D_\lambda^0$  нами получен следующий результат:

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть числа  $\alpha, \beta, \gamma$ , такие что

$$-\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \dots, r\}, \quad \beta + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \dots, r\}, \quad \beta - r \geq \gamma,$$

$$-r + \frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad r + \frac{1}{2} \geq \beta, \quad r - \beta + 1/2 < s_0,$$

$$\gamma + s_0 < 1/2, \quad \gamma + s_0 \neq -1/2.$$

Тогда существует число  $\lambda_0 \geq 0$  такое, что если  $\lambda \geq \lambda_0$ , то для любого заданного функционала

$F \in \left(\overset{\circ}{W}_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)\right)'$  задача  $D_\lambda$  имеет единственное решение  $u(x)$ , и при этом справедлива оценка

$$\|u; W_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+)\| \leq M_2 \left\| F; \left( W_{2;\alpha,\beta,\gamma}^r(R_n^+) \right)' \right\|,$$

где число  $M_2 > 0$  не зависит от  $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$  и функционала  $F$ .

Отметим, что изученные в нашей работы операторы являются линейными. Некоторые классы вырождающихся нелинейных уравнений в полупространстве  $R_n^+$ , ранее изучались в работах С.А.Исхокова и М.Ш.Ганиева [18,19].

Поступило 02.11.2023 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М, Лирозкин П.И, Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. – Известия вузов. Математика., 1988, №8, с. 4-30.
2. Мирошин Н.В. Вариационная задача Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического оператора. – Дифференциальные уравнения, 1988, т. 24, №3, с. 455-464.
3. Исхоков С.А., Кужмуратов А.Я. О вариационной задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов. – Доклады Академии наук (Россия), 2005, т. 403, №2, с. 165-168.
4. Исхоков С.А., Нематуллоев О.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области. – ДАН РТ, 2013, т. 56, №5, с. 352-358.
5. Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка. – Доклады АН СССР, 1992, т. 327, №1, с. 9-15.
6. Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле, порожденная некоэрцитивной формой. – Доклады АН России, 1993, т. 330, №3, с. 285-290.
7. Бойматов К.Х. О базисности по Абелю корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами. – Сибирский математический журнал, 2006, т. 47, №1, с. 46-57.
8. Бойматов К.Х., Исхоков С.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой. – Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН, 1997, т. 214, с. 107-134.
9. Исхоков С.А. О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами. – Доклады Академии наук (Россия), 1995, т. 342, №1, с. 20-22.
10. Исхоков С.А., Каримов А.Г. О гладкости решения вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов, ассоциированных с некоэрцитивными билинейными формами. – ДАН РТ, 2004, т. 47, №4, с. 68-74.
11. Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Константинова Т.П. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами. – Доклады Академии наук России, 2015, т. 462, №1, с. 7-10.

12. Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными формами. – Доклады Академии наук России, 2003, т. 392, №5, с. 606-609.
13. Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Петрова М.Н. О некоторых спектральных свойствах одного класса вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов. – Математические заметки СВФУ, 2016, т. 23, №2, с. 31-50.
14. Исхоков С.А., Рахмонов Б.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве. – ДАН РТ, 2018, т. 61, №3, с. 224-230.
15. Исхоков С.А., Рахмонов Б.А. Вариационная задача Дирихле, связанная с некоэрцитивной формой во всем пространстве. – Известия АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н., 2018, №2 (171), с. 17-25.
16. Исхоков С.А., Рахмонов Б.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле во всем пространстве, связанной с некоэрцитивной формой. – Уфимский математический журнал, 2020, т. 12, №1, с. 13-29.
17. Исхоков С.А. О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений. – Дифференциальные уравнения, 1995, т.31, №4, с. 641-653.
18. Исхоков С.А., Ганиев М.Ш. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в полупространстве. – ДАН РТ, 2009, т. 52, №4, с. 255-260.
19. Исхоков С.А., Ганиев М.Ш. Вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями для нелинейных дифференциальных уравнений в полупространстве. – ДАН РТ, 2011, т. 54, 2, с. 97-104.

**С.А.Исхоков, К.Б.Пирназаров, Б.А.Рахмонов**

## **ОИДИ ҲАЛШАВАНДАГИИ МАСЪАЛАИ ЯКЧИНСАИ ДИРИХЛЕ БАРОИ ОПЕРАТОРҲОИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАНАЗЗУЛЁБАНДА ДАР НИМФАЗО**

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*Институти математикаи ба номи А.Чўраеви АМИ Тоҷикистон*

Дар мақола ҳалшавандагии масъалаи якчинсаи Дирихле барои операторҳои эллиптикии дар нимфазои  $R_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in R^n : x_n > 0\}$  додашуда, ки ба таври дараҷагӣ дар гиперҳамвории  $x_n = 0$  ва ҳангоми  $x_n \rightarrow +\infty$  таназзул меёбанд, омӯхта шудааст. Ин таназзулҳои бо ҳам алоқаманданд. Операторҳои таҳқиқшаванда бо шаклҳои якунимхаттии интегро-дифференсиалие вобастаанд, ки метавонанд шартҳои коэрцитивиро қаноат накунанд.

**Калимаҳои калидӣ:** оператори эллиптикӣ, таназзулҳои дараҷагӣ, нимфазо, масъалаи Дирихле, шакли гайрикоэрцитивӣ.

S.A.Iskhokov, K.B.Pirnazarov, B.A.Rakhmonov

## ON SOLVABILITY OF HOMOGENEOUS DIRICHLET PROBLEM FOR DEGENERATE ELLIPTIC OPERATORS IN THE HALF-SPACE

*National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*A.Dzhuraev institute of Mathematics, NAS of Tajikistan*

In the paper, we study the solvability of the homogeneous Dirichlet problem for elliptic operators in the half-space  $R_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in R^n : x_n > 0\}$ , which degenerate in the hyperplane  $x_n = 0$  and while  $x_n \rightarrow +\infty$  as a power. These degenerations are related to each other. The operators under study are associated with sesquilinear integro-differential forms, which may not satisfy the coercivity condition.

**Key words:** *elliptic operator, power degeneration, half-space, Dirichlet problem, non-coercive form.*

### Сведения об авторах:

1. **Исхоков Сулаймон Абунасрович** – доктор физ.-мат. наук, Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, заместитель директора. E-mail: sulaimon@mail.ru;
2. **Пирназаров Камолиддин Бобоназарович** – Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, докторант PhD. E-mail: pirnazarov9797@mail.ru;
3. **Рахмонов Бахтовар Абдуганиевич** – кандидат физ.-мат. наук, Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, заведующий отдела дифференциальных уравнений. E-mail: Bakhtovar-1989@mail.ru.

УДК 517.968.2

Специальность: 1.1.1.-Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Г.Джангибеков, Г.Х.Худжаназарова\*, Ш.Мухторова

**О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ**

*Национальная академия наук Таджикистана,*

*Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана,*

*\*Таджикский национальный университет*

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана С.А.Исхоковым 13.03.2024 г.)*

*В работе изучается вопрос разрешимости некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с добавкой интегральных операторов с однородными ядрами порядка -2 по ограниченной области  $D$ . В лебеговых пространствах с весом найдены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и получена формула для подсчета индекса уравнений.*

**Ключевые слова:** *сингулярный интеграл, однородные ядра, нётеровость, индекс оператора.*

Пусть  $D$  – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова  $\Gamma$  и содержащая внутри точку  $z = 0$ ;  $\bar{D} = D \cup \Gamma$ ;  $a(z), b(z), c(z)$  – непрерывные в  $\bar{D}$  функции;  $Q_1(z, \zeta), Q_2(z, \zeta)$  – измеримые ограниченные функции, имеющие пределы  $\lim_{z, \zeta \rightarrow 0} Q_j(z, \zeta) = Q_j(0, 0)$ ;  $ds_\sigma$  – элемент плоской меры Лебега; пусть, наконец,  $B(z, \zeta)$  – ядренная функция Бергмана области  $D$ , представляемая в виде (см., например, [1, с. 252, 258])

$$B(z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{\omega'(z)\overline{\omega'(\zeta)}}{(1 - \omega(z)\overline{\omega(\zeta)})^2},$$

где  $\omega(z)$  – однолистное конформное отображение области  $D$  на единичный круг с центром в начале координат, причем  $\omega(0) = 0, \omega'(0) > 0$ . Штрих обозначает производную, черта над функцией – операцию комплексного сопряжения.

В банаховом пространстве  $L^p_{\beta-2/p}(D)$ :

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \left\{ f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), \|f\|_{L^p_{\beta-2/p}} = \|F\|_{L^p} \right\},$$

$1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$  рассмотрим уравнение

**Адрес для корреспонденции:** Джангибеков Гулходжа. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана. E-mail: gulkhoja@list.ru.

$$\begin{aligned}
 (Af)(z) \equiv & a(z)f(z) - \frac{b(z)}{\pi} \frac{z}{z} \iint_D \frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta + c(z) \iint_D B(z, \zeta) f(\zeta) ds_\zeta + \\
 & + \frac{1}{\pi z} \iint_D \frac{Q_1(z, \zeta)}{\zeta - z} \overline{f(\zeta)} ds_\zeta - \frac{1}{\pi z} \iint_D \frac{Q_2(z, \zeta)}{\zeta - \bar{z}} f(\zeta) ds_\zeta = g(z), \quad z \in D,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Уравнение (1) наряду с сингулярным оператором

$$(Sf)(z) = -\frac{z}{\pi \bar{z}} \iint_D \frac{f(\zeta) ds_\zeta}{(\zeta - z)^2},$$

содержит интегральные операторы с однородными ядрами порядка  $-2$  видов  $1/\bar{z}(\zeta - z)$  и  $1/\bar{z}(\bar{\zeta} - \bar{z})$ . Именно такие интегральные уравнения играют важную роль в теории обобщенных аналитических функций с сингулярными коэффициентами [2,3], в теории краевых задач сопряжения [4], задаче Дирихле и Неймана для эллиптических систем уравнений на плоскости [5-7]. Однако теория разрешимости таких уравнений до сих пор не построена.

В настоящей работе устанавливаются эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости двумерных сингулярных интегральных уравнений вида (1) в лебеговом пространстве  $L^p$  с весом и получена формула для вычисления индекса, при этом коэффициент при сингулярном интеграле имеет в точке  $z = 0$  существенный разрыв.

При этом, поскольку уравнение содержит комплексно-сопряженное значение искомой функции, то естественно пространство  $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$  считать вещественным, то есть рассматривать его как линейное множество над полем вещественных чисел. Тогда все операторы из (1) будут обычными линейными ограниченными операторами.

Всякий линейный ограниченный функционал на вещественном пространстве  $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$  представим единственным образом в виде

$$(f, \psi) = \operatorname{Re} \iint_D f(z) \psi(z) ds_z, \quad \psi(z) \in L^q_{2-\beta-\frac{2}{q}}(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

В соответствии с этим сопряженным к (1) будет уравнение

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{A}^* f)(z) \equiv & a(z)\psi(z) - \frac{1}{\pi} \iint_D \overline{b(\zeta)} \left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}\right) \frac{\overline{\psi(\zeta)} ds_\zeta}{(\zeta - \bar{z})^2} + \frac{1}{\pi} \iint_D c(\zeta) B(\zeta, z) \psi(\zeta) ds_\zeta + \\
 & + \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\overline{Q_1(\zeta, z)}}{\zeta(\zeta - \bar{z})} \overline{\psi(\zeta)} ds_\zeta + \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{Q_2(\zeta, z)}{\zeta(\zeta - \bar{z})} \psi(\zeta) ds_\zeta = q(z),
 \end{aligned}
 \tag{1*}$$

где  $\psi(z), q(z) \in L^q_{2-\beta-\frac{2}{q}}(D)$ .

В случае нётеровости под индексом уравнения (1) понимается разность между количеством линейно-независимых решений однородных уравнений (1) и (1\*).

1. Обычной процедурой вычитания мы выделяем простейшую сингулярную часть, а остальными слагаемыми будут сингулярные операторы с непрерывным коэффициентом с добавлением вполне непрерывным оператором.

Предположив сначала, что  $D = \{z : |z| < 1\}$ , обозначим через  $\mathcal{A}_0$  модельный оператор, образованный левой частью (1):

$$(\mathcal{A}_0 f)(z) \equiv f(z) + \nu(S\bar{f})(z) + \eta(T\bar{f})(z) + \gamma(\bar{T}f)(z) = g_0(z), \quad z \in D, \quad (2)$$

где

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\bar{z}} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} ds_\zeta, \quad (\bar{T}f)(z) = -\frac{1}{z} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} ds_\zeta,$$

$$a(0) \neq 0, \quad \nu = \frac{b(0)}{a(0)}, \quad \eta = \frac{Q_1(0,0)}{a(0)}, \quad \gamma = \frac{Q_2(0,0)}{a(0)}.$$

Из результатов Е.М.Стейна [8] следует, что сингулярный интеграл  $S$  действует и ограничен в пространствах  $L^p_{\beta-2/p}(D)$  ( $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ ). Ядра  $\theta(z, \zeta) = \frac{1}{\pi \bar{z}(\zeta - z)}$  и  $\overline{\theta(z, \theta)}$  операторов  $T$  и  $\bar{T}$  удовлетворяют условию однородности  $\theta(tz, t\zeta) = |t|^{-2} \theta(z, \zeta)$  для любого комплексного  $t$  и условию суммируемости

$$\iint_{|\zeta| < \infty} |\theta(1, \zeta)| |\zeta|^{-\beta} ds_\zeta < \infty \quad \text{при всех } 0 < \beta < \infty.$$

В силу указанных условий интегральные операторы  $T$  и  $\bar{T}$  также ограничены в пространствах  $L^p_{\beta-2/p}(D)$  ( $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ ). Для дальнейшего понадобятся следующие леммы о композиции операторов  $S, \bar{S}$  и  $T, \bar{T}$ :

**Лемма 1.** Если  $f(z) \in L^p_{\beta-2/p}(D)$ , то

$$(S\bar{S}f)(z) = f(z) + \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \Omega_1(z, \zeta) f(\zeta) ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \Omega_2(z, \zeta) f(\zeta) ds_\zeta, \quad |z| < 1,$$

где

$$\Omega_1(z, \zeta) = 2\operatorname{Re} \frac{1}{\bar{z}(\zeta - z)} + \frac{2}{|z|^2} \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right|,$$

$$\Omega_2(z, \zeta) = \frac{\bar{\zeta}}{z(1 - z\bar{\zeta})^2} + \frac{2}{|z|^2} \ln(1 - z\bar{\zeta}),$$

причем ветвь  $\ln(1 - z\bar{\zeta})$  фиксирована условием  $\ln 1 = 0$ .

**Лемма 2.** Если  $f(z) \in L^p_{\beta-2/p}(D)$ , то

$$(S\bar{T}f)(z) = (Tf)(z) + \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \frac{1}{|z|^2} \ln \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right|^2} f(\zeta) ds_\zeta + \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \frac{\bar{\zeta} f(\zeta) ds_\zeta}{\bar{z}(1 - z\bar{\zeta})};$$

$$(T\bar{S}f)(z) = (\bar{T}f)(z) + \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \frac{1}{|z|^2} \ln \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right|^2} f(\zeta) ds_\zeta + \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \frac{\bar{\zeta} f(\zeta) ds_\zeta}{\bar{z}(1 - z\bar{\zeta})};$$

$$(T\bar{T})f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \frac{1}{|z|^2} \ln \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right|^2} f(\zeta) ds_\zeta; \quad (T^2f)(z) = \frac{1}{\pi\bar{z}} \iint_{|\zeta|<1} \frac{\ln \left|\frac{z}{\zeta}\right|^2}{\zeta - z} f(\zeta) ds_\zeta;$$

$$(STf)(z) = (Tf)(z) + \frac{z}{\bar{z}\pi} \iint_{|\zeta|<1} \frac{\ln \left|\frac{z}{\zeta}\right|^2}{(\zeta - z)^2} f(\zeta) ds_\zeta.$$

Для краткости обозначений впредь под буквой  $V$  будем обозначать одно (любое) из пространств  $L^p_{\beta-2/p}(D)$  ( $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ ).

Разложим  $f(z)$  в ряд Фурье относительно полярного угла

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r) e^{ik\varphi}, \quad f_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и  $N$  – некоторое натуральное число. Обозначим через  $V(N)$  следующее подпространство пространства  $V$ :

$$V(N) = \{f(z) : f(z) \in V, f_k(r) \equiv 0 \text{ при } |k| \leq N\}.$$

Подпространство  $V(N)$  замкнуто в  $V$ , то есть является банаховым пространством.

**Лемма 3.** Для любых значениях параметров  $\nu(|\nu| \neq 1), \eta, \gamma$  существует натуральное число  $N_0(\nu, \eta, \gamma)$  такое, что уравнение (2) безусловно разрешимо единственным образом в  $V(N)$  при  $N \geq N_0(\nu, \eta, \gamma)$ .

**Доказательство.** Введ в  $V(N)$  замкнутые подпространства

$$V_+(N) = \{f(z) : f(z) \in V(N), f_k(r) \equiv 0 \text{ при } k < -N\},$$

$$V_-(N) = \{f(z) : f(z) \in V(N), f_k(r) \equiv 0 \text{ при } k > N\}.$$



Можно показать, что всякий элемент  $f \in V(N)$  единственным образом представим в виде

$$f = f_+ + f_-, \text{ где } f_+ \in V_+(N), f_- \in V_-(N)$$

Далее нетрудно увидеть, что подпространства  $V_+(N), V_-(N)$  инвариантны относительно оператора  $\frac{z}{\bar{z}}S$  и  $\overline{f_+(z)} \in V_-(N), \overline{f_-(z)} \in V_+(N)$ . Заметим, что отсюда следует инвариантность  $V(N)$  относительно интегрального оператора из (2). Поэтому уравнение (2) рассматриваемое в  $V(N)$ , может быть переписано в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} f_+(z) + \nu(S\overline{f_-})(z) + \eta(T\overline{f_-})(z) + \gamma(\overline{Tf_+})(z) &= g_+(z), |z| < 1, \\ f_-(z) + \nu(S\overline{f_+})(z) + \eta(T\overline{f_+})(z) + \gamma(\overline{Tf_-})(z) &= g_-(z), |z| < 1. \end{aligned}$$

Переходя в первом уравнении к комплексно сопряженным значениям и подставляя найденное для  $\overline{f_+(z)}$  выражение во второе уравнение, получим

$$\begin{aligned} f_-(z) = & |\nu|^2 (S\overline{Sf_-})(z) + \bar{\nu}\eta(T\overline{Sf_-})(z) + \nu\bar{\eta}(ST\overline{f_-})(z) + \\ & + |\eta|^2 (T\overline{Tf_-})(z) + \gamma(\overline{Tf_-})(z) + \nu\bar{\gamma}(ST\overline{f_+})(z) + \nu\bar{\gamma}(T^2\overline{f_+})(z) = q_-(z). \end{aligned} \tag{3}$$

С учетом результатов лемм 1 и 2, и того факта, что операторы из (3), имеющие особенности лишь на границе единичного круга, исчезают на  $V_-(N)$ , устанавливается существование натурального  $N_0(\nu, \eta, \gamma)$  такого, что при  $N \geq N_0(\nu, \eta, \gamma)$  уравнение (3) будет безусловно разрешимо единственным образом в  $V_-(N)$ . Отсюда, очевидно, вытекает утверждение леммы 3.

Теперь, поскольку  $V(N)$ , а также подпространство функций  $f(z) \in V$ , для которых  $f_k(r) \equiv 0$  при  $|k| > N$ , инвариантны относительно оператора  $\mathcal{A}_0$  из (2), исследование уравнения (2) в  $V$  сводится к изучению конечной совокупности одномерных интегральных уравнений для коэффициентов Фурье искомой функции, которые имеют вид

$$\begin{aligned} f_0(r) = & 2 \int_0^r \frac{\nu + \eta}{r} \left( \frac{\rho}{r} \right) \overline{f_0(\rho)} d\rho - \nu \overline{f_0(\rho)} - \\ & - 2\gamma \int_0^r \frac{1}{r} \left( \frac{\rho}{r} \right) f_0(\rho) d\rho, \text{ при } k = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 f_k(r) &= 2 \int_r^1 \frac{v(k-1) + \eta}{r} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k-1} \overline{f_{-k}(\rho)} d\rho - v \overline{f_{-k}(r)} - \\
 &\quad - 2\gamma \int_0^r \frac{1}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{k+1} f_k(\rho) d\rho + g_k(r), \\
 \overline{f_{-k}(r)} &= 2 \int_0^r \frac{\bar{v}(k+1) - \bar{\eta}}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{k+1} f_k(\rho) d\rho - \bar{v} \overline{f_k(r)} + \\
 &\quad + 2\bar{\gamma} \int_r^1 \frac{1}{r} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k-1} \overline{f_{-k}(\rho)} d\rho + \overline{g_{-k}(r)} \quad \text{при } 1 \leq k \leq N_0,
 \end{aligned} \tag{5}$$

Рассматриваемые в пространствах  $L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)$  ( $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ ) системы (4) и (5)

относятся к системам интегральных уравнений с ядрами однородными порядка  $-1$ , удовлетворяющими надлежащим условиям суммируемости с показателем  $\beta: 0 < \beta < 2$ . Поэтому к ним применимы результаты работы Л.Г.Михайлова [9] и Б.М.Бильмана [10].

Характеристическая матрица функция  $\mathcal{G}_k(ix)$  которая определяет условие нормальной разрешимости систем (4) и (5) при фиксированном значении  $0 \leq k \leq N_0$  определяется по формуле

$$\mathcal{G}_k(\beta, ix) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{2\gamma}{k+z} & v - 2 \frac{v(k-1) + \eta}{k-z} \\ \bar{v} - 2 \frac{\bar{v}(k+1) - \bar{\eta}}{k+z} & 1 - \frac{2\bar{\gamma}}{k-z} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, условие нормальной разрешимости системы (4),(5) при  $|v| \neq 1$  будет иметь вид

$$\mathcal{G}_k(\beta, ix) = 1 - 4 \frac{|\gamma|^2 - |v - \eta|^2 + z(|v|^2 + \text{Re}(\gamma - \bar{v}\eta)) - ik \text{Im}(\gamma - \bar{v}\eta)}{(1 - |z|^2)(k^2 - z^2)} \neq 0, \tag{6}$$

где  $z = 2 - \beta + ix, -\infty < x < \infty$ . При этом условие суммируемости ядра системы имеет вид

$$\text{Re} \mathcal{G}_k(\beta, 0) = 1 - 4 \frac{|\gamma|^2 - |v - \eta|^2 + (2 - \beta)(|v|^2 + \text{Re}(\gamma - \bar{v}\eta))}{(1 - |v|^2)(k^2 - (2 - \beta)^2)} \neq 0.$$

Из результатов [9,10] следует, что если  $|v| \neq 1$  и  $\mathcal{G}_k(\beta, ix) \neq 0$  при всех  $x: -\infty < x < \infty$ , то оператор из  $k$ -ой системы (4),(5) будет нормально разрешимым в пространствах  $L^p_{\beta-\frac{1}{p}}$  на отрезке  $[0,1]$ .

При этом соответствующая однородная система (4),(5) имеет конечное число линейно-независимых решений, а для разрешимости неоднородной системы необходимо и достаточно, чтобы её свободный член удовлетворял конечному числу условий разрешимости и индекс указанной системы будет равен

$$\varkappa_k = -2 \operatorname{Ind}_{-\infty < x < \infty} \mathcal{G}_k(\beta, ix), \quad \text{если } 1 \leq k \leq N_0,$$

$$\varkappa_0 = - \operatorname{Ind}_{-\infty < x < \infty} \mathcal{G}_0(\beta, ix), \quad \text{если } k = 0.$$

Теперь перейдем от этих результатов к формулировке результатов для модельного уравнения (2). Очевидно, что для разрешимости уравнения (2) необходимо и достаточно, чтобы были разрешимы все уравнения (4),(5). Каждому решению однородной системы (4) либо (5) отвечает решение однородного уравнения (2) по формуле

$$f(z) = f_k(r)e^{ik\varphi} + f_{-k}(r)e^{ik\varphi}, \quad z = re^{i\varphi},$$

причём таким образом исчерпываются все решения однородного уравнения (2). При этом функции, построенные по линейно-независимым решениям однородной системы (4) либо (5) с данным номером  $k$ , будут линейно независимыми. То же самое относится к функциям, построенным по решениям (4),(5) с различными  $k$ .

**2.** Пусть теперь  $D$  – произвольная область, описанная в начале статьи. Произведем в уравнении (2) замены переменных:  $z = \chi(\sigma), \zeta = \chi(\omega)$ , где  $\chi(\sigma)$  – отображение, обратное к  $\omega(z)$  из формулы для ядра Бергмана. В результате, учитывая некоторые свойства конформного отображения (см.[11] стр. 399, 411) аналогично [12] получим эквивалентное (2) уравнение с добавкой вполне непрерывных операторов.

Резюмируем окончательный результат для модельного уравнения (2) в случае произвольной области  $D$  в банаховых пространствах  $L^p_{\beta-2/p}(D)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $|v| \neq 0$  и  $\mathcal{G}_k(\beta, ix) \neq 0$  при всех  $x: -\infty < x < \infty$ . Тогда

1) модельное однородное уравнение (2) имеет конечное число  $\varkappa^+$  линейно-независимых над полем вещественных чисел решений одних и тех же во всех пространствах  $L^p_{\beta-2/p}(D)$  ( $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ );

2) для разрешимости неоднородного уравнения в  $L^p_{\beta-2/p}(D)$  необходимо и достаточно, чтобы её свободный член удовлетворял конечному числу  $\varkappa^-$  условий

$$\operatorname{Re} \iint_{|z|<1} g(z)\psi^m(z)ds_z = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \varkappa^-,$$

где  $\{\psi^m(z)\}$  – базис решений сопряженного уравнения в пространствах  $L^q_{2-\beta-2/q}(D)$ .

3) индекс уравнения (2) равен

$$\varkappa^+ - \varkappa^- = -2 \sum_{k=1}^{N_0} \operatorname{Ind}_{-\infty < x < \infty} \mathcal{G}_k(\beta, ix) - \operatorname{Ind}_{-\infty < x < \infty} \mathcal{G}_0(\beta, ix),$$

где  $N_0$  – натуральное число, описанное в лемме 3.

**Теорема 2.** Если  $\mathcal{G}_k(\beta, ix) = 0$  хотя бы при одном значении  $x: -\infty < x < \infty, k = 0, 1, \dots, N_0$ , то оператор  $A_0$  в (2) не является ни  $\Phi$  оператором, ни  $\Phi_{\pm}$  оператором в  $L^p_{\beta-2/p}(D)$ .

3. Переходим к рассмотрению уравнения (1) в случае произвольной области  $D$ , описанной в начале статьи. В случае  $a(0) \neq 0$  условия нётеровости уравнения (1) можно найти с помощью локального метода И.Б.Симоненко [13], исходя из результатов [11], а также теоремы 1 и теоремы 2. Однако при этом останется нерешенной задача нахождения формулы для индексов. Эти трудности удалось преодолеть за счет построения операторов  $A_0$  и  $A_1$ :

$$(A_0 f)(z) = a(0)f(z) + \frac{b(0)}{\pi} \frac{z}{z} \iint_D \frac{\overline{f(\zeta)} ds_{\zeta}}{(\zeta - z)^2} + \delta \iint_D B(z, \zeta) f(\zeta) ds_{\zeta} + \frac{Q_1(0, 0)}{z} \iint_D \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z} ds_{\zeta} + \frac{Q_2(0, 0)}{z} \iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} ds_{\zeta};$$

$$(A_1 f)(z) = (|a(0)|^2 - |b(0)|^2)^{-1} \{ (\overline{a(0)}a(z) - b(0)\overline{b(z)})f(z) + (\overline{a(0)}b(z) - b(0)\overline{a(z)}) \frac{z}{\pi z} \iint_D \frac{\overline{f(\zeta)} ds_{\zeta}}{(\zeta - z)^2} + (a(0) + \delta)^{-1} [a(0)b(0)\overline{b(z)} - |b(0)|^2 a(z) + \delta b(0)\overline{b(z)} + (|a(0)|^2 - |b(0)|^2)c(z)] \iint_D B(z, \zeta) f(\zeta) ds_{\zeta} \},$$

причём

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } a(0) \neq 0, \\ 1, & \text{если } a(0) = 0. \end{cases}$$

Тогда исследование уравнения (1) основывается на следующем утверждении.

**Лемма 4.** Пусть  $a(z), b(z), c(z), Q_1(z, \zeta), Q_2(z, \zeta)$  удовлетворяют указанным выше условиям и  $|a(0)| \neq |b(0)|$ . Тогда

$$A = A_0 A_1 + T_1 \tag{7}$$

где  $T_1$  – вполне непрерывный в  $L^p_{\beta-2/p}(D)$  оператор.

Условия нётеровости оператора  $A_1$  в  $L^p_{\beta-2/p}(D)$  и формула для его индекса вытекают из [12]. Теперь, зная результаты для операторов  $A_0, A_1$ , на основе известных фактов теории линейных операторов можем получить из (7) условия нётеровости уравнения (1) в  $L^p_{\beta-2/p}(D)$  и формулу для вычисления его индекса.

**Теорема 3.** Для того чтобы уравнение (1) было нетеровым в  $L_{\beta-2/p}^p(D)$  ( $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ ), необходимо и достаточно выполнение условий:

- 1)  $|a(z)| \neq |b(z)|$  при  $z \in \bar{D}, a(t) + c(t) \neq 0$  при  $t \in \Gamma$ ,
- 2)  $\mathcal{G}_k(\beta, ix) \neq 0$  при всех  $x: -\infty < x < \infty, k = 1, 2, \dots, N_0$ ,

причем индекс уравнения (1) равен

$$\varkappa = -[2 \operatorname{Ind}_{\Gamma}(a(t) + c(t)) + \\ + 2 \sum_{k=1}^{N_0} \operatorname{Ind}_{-\infty < x < \infty} \mathcal{G}_k(\beta, ix) + \operatorname{Ind}_{-\infty < x < \infty} \mathcal{G}_0(\beta, ix)],$$

где  $N_0$  – натуральное число описанное в лемме 3.

**Теорема 4.** Если условия 1), 2) нарушены, то оператор  $A$ , образованный левой частью (1), не может иметь ни левого, ни правого ограниченных регуляризаторов в  $L_{\beta-2/p}^p(D)$ .

Поступило 24.11.2023 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Курант Р. Принцип Дирихле, конформное отображения и минимальные поверхности. – М., 1953, 310 с.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959, 627 с.
3. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. – Душанбе: Дониш, 1963, 183 с.
4. Джангибеков Г. Задача линейного сопряжения решений эллиптических систем дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами. – ДАН СССР, 1991, т. 317, №7, с. 813-818.
5. Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости. – Доклады РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415-417.
6. Джангибеков Г., Худжаназарова Г.Х. О задаче Дирихле для эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка на плоскости. – Доклады РАН, 2004, т. 398, №2, с. 151-155.
7. Джангибеков Г., Одинабеков Д.М., Худжаназарова Г.Х. Об условиях нетеровости и индексе одного класса сингулярных интегральных операторов по ограниченной односвязной области. – Вестн. Моск.ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2019, №2, с. 9-14.
8. Stein E.M. Note on singular integrals. – Pros. Amer. Math. Soc., 1957, v.8. p. 250-254.
9. Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1. – Душанбе: Дониш, 1966, 49 с.
10. Бильман Б.М. Об интегральных уравнениях с переменными пределами интегрирования, ядра которых имеют особенность типа однородные функции степени -1. – В сб. Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами. – Душанбе: Дониш, 1969, с. 19-40.

11. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966, 626 с.
12. Бильман Б.М., Джангибеков Г. Об условиях  $n$  и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области. – ДАН СССР, 1986, т. 288, №4, с. 792-797.

Г.Чангибеков, Г.Х.Хучаназарова\*, Ш.Мухторова

## ДАР БОРАИ ҲАЛШАВАНДАГИИ БАЪЗЕ МУОДИЛАҶОИ ИНТЕГРАЛИИ СИНГУЛЯРИИ ДУЧЕНАКА АЗ РУИ СОҲАИ МАҲДУД

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*Институти математикаи ба номи А. Ҷураеви АМИ Тоҷикистон,*

*\*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола масъалаи ҳалшавандагии баъзе муодилаҳои интегралӣ сингулярии дученака бо ядро намудани операторҳои интегралӣ бо ядроҳои якҷинсаи тартиби  $-2$  аз руи соҳаи маҳдуди  $D$  тадқиқ карда шудааст. Дар фазои Лебегии вазндор шартҳои зарурӣ ва кифоягии нетеровӣ ёфта шудааст ва формула барои ҳисоб кардани индекси муодила ҳосил карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** *интегралҳои сингулярӣ, ядроҳои якҷинса, нетеровӣ, индекси оператор.*

G.Jangibekov, G.Kh.Khujanazarova, Sh.Mukhtorova

## ON THE SOLVABILITY OF SOME TWODIMENSIONAL SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OVER A BOUNDED DOMAIN

*National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*A.Juraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan,*

*\*Tajik National University*

The work studies the solvability of some two-dimensional singular integral equations with the addition of integral operators with homogeneous kernels of order  $-2$  over a bounded domain  $D$ . In lebesgue spaces with weight, effective necessary and sufficient Noetherian conditions are found and a formula for calculating the index of equations is obtained.

**Key words:** *singular integral, homogeneous kernels, noetherism, index operator.*

### Сведения об авторах:

1. **Джангибеков Гулходжа** – Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, главный научный сотрудник. E-mail: gulkhoja@list.ru.
2. **Худжаназарова Гулшод Худжаназаровна** – Таджикский национальный университет, доцент кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений;
3. **Мухторова Шоира Марватшоевна** – Таджикский национальный университет, соискатель кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений. E-mail: xgulshod@list.ru.

УДК 536.46

Специальность: 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ;  
1.3.17 – Химическая физика, горение и взрыв, физика экстремальных состояний вещества;  
1.3.3 – Теоретическая физика.

М.М.Кабиров, П.Б.Садриддинов\*

## МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ СТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ ГАЗОВ

*Российско-Таджикский (Славянский) университет,*

*\*Национальная академия наук Таджикистана,*

*\*Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана*

*(Представлено академиком НАН Таджикистана М.И.Илоловым 20.09.2023 г.)*

*В статье представлена методика получения формулы максимальной скорости стационарной волны фильтрационного горения газов. Формула найдена на основе соотношения для скорости стационарной волны и условия, что производная функции скорости волны по скорости вдува смеси равна нулю. Установлено, что в экстремальных точках функции скорости волны безразмерная равновесная температура удовлетворяет кубическое уравнение, коэффициенты которого содержат такие параметры, как тепловой эффект реакции, энергия активации молекул, концентрация недостающего компонента смеси и начальная температура среды. Показана достоверность результатов. Отмечено, что установленная формула содержит физико-химические параметры пористой среды и смеси газов и может быть использована при исследовании влияния исходного давления смеси на скорость волны.*

**Ключевые слова:** *скорость волны, стационарная волна, горение газов, скорость вдува, равновесная температура, концентрация, пористая среда.*

Теория фильтрационного горения газов (ФГГ) формировалась, первоначально, в результате выяснения режимов распространения стационарной волны горения газов в инертной пористой среде [1-13], а затем на анализе теплофизики процессов [14-15] и неустойчивости стационарной волны [16-21]. Задача исследования перехода горения смесей от одного скоростного режима к другому не теряет актуальности и до сих пор. Это связано с предсказанием аварийных ситуаций в промышленности и невозможного допущения разрушений или потерь в результате взрыва или пожара. В настоящей работе предпринято приближение по нахождению функциональной зависимости максимальной скорости стационарной волны ФГГ от управляющих и определяющих параметров пористой среды и смеси газов. Исходной точкой исследования являются соотношения (1) для скорости стационарной волны ФГГ, полученной в [12] при рассмотрении математической модели ФГГ, предполагающей интенсивный

---

*Адрес для корреспонденции:* Кабилов Маруф Махмудович. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. М.Турсун-заде, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: maruf1960@mail.ru. Садриддинов Парвиз Бахриддинович, 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: parviz06@list.ru.

межфазный теплообмен и идентичный с моделью горения конденсированных сред [7], о чём отмечается в [5].

$$(v_0 - u)^2 - \frac{(2 - n)(\alpha_2 \lambda_2 + \alpha_1 \lambda_1) k_0 T_0 R T_e}{\rho_{10} Q \eta_0 E} \exp\left(-\frac{E}{RT_e}\right) = 0,$$

$$T_e = T_0 + \frac{Q \eta_0}{c_p \left(1 - \frac{\varphi u}{v_0 - u}\right)}, \quad \varphi = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_{10} c_p}. \tag{1}$$

Здесь  $u, v_0$  – скорости стационарной волны и вдува смеси в пористый блок соответственно;  $\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности смеси и пористой среды;  $\alpha_1, \alpha_2$  – объёмные доля смеси и пористой среды соответственно;  $\rho_{10}, \rho_2$  – приведённые плотности смеси и пористой среды;  $c_p, c_2$  – теплоёмкость смеси и пористой среды;  $\eta_0$  – массовая концентрация недостающего компонента смеси;  $k_0$  – предэкспонент;  $Q$  – тепловой эффект реакции;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $E$  – энергия активации молекул;  $n$  – порядок скорости химической реакции по недостающему компоненту смеси;  $T_0, T_e$  – исходная и равновесная температуры среды;  $\varphi$  – безразмерный параметр, выражающий отношение объёмных теплоёмкостей пористой среды и смеси газов.

В [12] для получения расчётной зависимости скорости стационарной волны  $u$  от скорости вдува смеси  $v_0$  при постоянных значениях физико-химических констант была применена программа «Подбор параметра» к уравнению (1). Примерные варианты такой зависимости приведены на рис.1 при горении заранее перемешанной метано-воздушной смеси (для четырёх составов), подаваемой через инертный пористый слой к зоне горения с различной скоростью

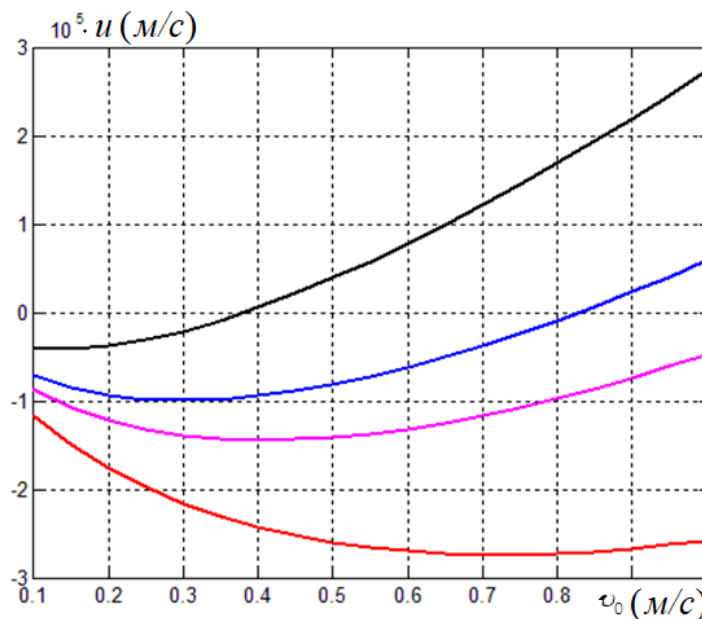


Рис. 1. Кривые зависимости скорости стационарной волны  $u$  (м/с) от скорости вдува газа  $v_0$  (м/с) при разных содержаниях метана в смеси: снизу вверх 9.5% CH<sub>4</sub>, 8.5% CH<sub>4</sub>, 8% CH<sub>4</sub> и 7% CH<sub>4</sub>.



При расчётах использовались следующие характеристики пористой среды и смеси газов [18,19]:

$$\rho_1^0 = 0.6 \text{ кг} / \text{м}^3, \quad \rho_2^0 = 3900 \text{ кг} / \text{м}^3, \quad \alpha_1 = 0.45, \quad \alpha_2 = 0.55, \quad c_p = 1099.525 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К}),$$

$$c_2 = 660 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К}), \quad T_0 = 300 \text{ К}, \quad \lambda_2 = 0.5 \text{ Дж} / (\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}), \quad \lambda_1 = 0.1 \text{ Дж} / (\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}), \quad n = 1,$$

$$E = 226 \cdot 10^3 \text{ Дж} / \text{моль}, \quad R = 8.314 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К}), \quad Q = 21263158 \text{ Дж} / \text{кг}, \quad k_0 = 1 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}.$$

На рис. 1 замечаем минимальные значения скорости стационарной волны на всех кривых, что даёт основание находить минимум функции скорости стационарной волны от скорости вдува смеси. В математике известно, что в экстремальных точках производная функции равна нулю, следуя этому принципу находим производную функции  $u(\nu_0)$  в соотношении (1) и полагаем её равной нулю. Однако функция  $u(\nu_0)$  в соотношение (1) входит неявным образом, поэтому приводим некоторые вспомогательные выкладки, то есть берём производные функции  $u$  по переменной  $\nu_0$  в выражениях (1)

$$2(\nu_0 - u)(1 - u') - AT_e' \exp\left(-\frac{E}{RT_e}\right) - AT_e \left(-\frac{E}{RT_e}\right)' \exp\left(-\frac{E}{RT_e}\right) = 0, \quad (2)$$

$$T_e'(\nu_0, u) = \left( T_0 + \frac{Q\eta_0}{c_p \left(1 - \frac{\varphi u}{\nu_0 - u}\right)} \right)' = \frac{Q\eta_0 \varphi}{c_p \left(1 - \frac{\varphi u}{\nu_0 - u}\right)^2} \cdot \left( \frac{u'(\nu_0 - u) - u(1 - u')}{(\nu_0 - u)^2} \right),$$

если положить  $u' = 0$ , то имеем

$$2(\nu_0 - u) - AT_e' \exp\left(-\frac{E}{RT_e}\right) \left(1 + \frac{E}{RT_e}\right) = 0 \quad (3)$$

$$T_e' = \frac{Q\eta_0 \varphi}{c_p \left(1 - \frac{\varphi u}{\nu_0 - u}\right)^2} \left( -\frac{u}{(\nu_0 - u)^2} \right) \quad (4)$$

Используя формулу равновесной температуры, приведённую в (1), видоизменим правую часть равенства (4)

$$T_e' = \frac{-(T_e - T_0)}{\left(1 - \frac{\varphi u}{\nu_0 - u}\right)} \cdot \frac{\varphi u}{(\nu_0 - u)^2} = -\frac{T_e - T_0}{\left(\frac{\nu_0 - u}{\varphi u} - 1\right)(\nu_0 - u)} \quad (5)$$

Из (1) также находим

$$\frac{\nu_0 - u}{\varphi u} = \frac{1}{1 - \frac{Q\eta_0}{c_p(T_e - T_0)}},$$

и подставляя в (5), относительно  $T_e'$  получим

$$T_e' = \frac{T_e - T_0}{\left( \frac{1 - \frac{1}{1 - \frac{Q\eta_0}{c_p(T_e - T_0)}}}{1 - \frac{Q\eta_0}{c_p(T_e - T_0)}} \right) (\nu_0 - u)}.$$

В результате из (3) имеем

$$2(\nu_0 - u) - \frac{A(T_e - T_0)}{\left( \frac{1 - \frac{1}{1 - \frac{Q\eta_0}{c_p(T_e - T_0)}}}{1 - \frac{Q\eta_0}{c_p(T_e - T_0)}} \right) (\nu_0 - u)} \exp\left(-\frac{E}{RT_e}\right) \left(1 + \frac{E}{RT_e}\right) = 0. \quad (6)$$

Далее, из (1) находим  $(\nu_0 - u)^2$  и подставляя в (6) окончательно имеем

$$2T_e - \frac{(T_e - T_0)}{\left( \frac{1 - \frac{1}{1 - \frac{Q\eta_0}{c_p(T_e - T_0)}}}{1 - \frac{Q\eta_0}{c_p(T_e - T_0)}} \right) (\nu_0 - u)} \left(1 + \frac{E}{RT_e}\right) = 0. \quad (7)$$

Обозначив  $\frac{T_e}{T_0} - 1 = x$  из (7) получим

$$2(x+1) - \frac{x}{1 - \frac{1}{1 - \frac{Q\eta_0}{c_p T_0 x}}} \left(1 + \frac{E}{RT_0(x+1)}\right) = 0. \quad (8)$$

После преобразований уравнение (8) примет вид

$$x^3 + \left(1 + \frac{E}{RT_0} + \frac{Q\eta_0}{c_p T_0}\right) x^2 - \frac{Q\eta_0}{c_p T_0} \left(\frac{E}{RT_0} - 3\right) x + \frac{2Q\eta_0}{c_p T_0} = 0. \quad (9)$$

Как видим корни уравнения (9) зависят от таких параметров как  $Q, E, \eta_0, c_p, T_0$

Так как

$$v_0 - u = \frac{\varphi u}{1 - \frac{Q\eta_0}{c_p T_0 x}}, \tag{10}$$

то, подставляя в уравнение (1), относительно скорости стационарной волны  $u$  получим следующую формулу

$$u = \frac{1}{\varphi} \left( 1 - \frac{Q\eta_0}{c_p T_0 x} \right) \sqrt{A(x+1)T_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_0(x+1)}\right)}, \tag{11}$$

здесь

$$A = \frac{(2-n)(\alpha_2 \lambda_2 + \alpha_1 \lambda_1) k_0 T_0 R}{\rho_{10} Q \eta_0 E}.$$

В итоге заключаем, что подбирая значение  $x$  с помощью программы «Подбор параметра», как решение уравнения (9), находим значение скорости стационарной волны из (11) и скорости вдува смеси из (10). Определённые таким образом значения равновесной температуры, скорости волны и скорости вдува находятся в удовлетворительном согласии со значениями этих же параметров, найденных с помощью уравнения (1) методом «Подбор параметра» (табл. 1, 2). В табл. 1 приведены расчётные значения скорости волны по формуле (11), скорости вдува по формуле (10) и равновесной температуры, как корня уравнения (9). В табл. 2 приведены значения этих же параметров, но скорость волны определялась методом «Подбор параметра» из уравнения (1) при заданной скорости вдува, а равновесная температура рассчитывалась по формуле, приведённой в (1). Кроме того, координаты точки локального минимума функции  $u(v_0)$  для разных составов метановоздушной смеси можно увидеть на рис. 1. Отметим, что рис. 1 приведён в статье для сравнения максимальных скоростей волны, рассчитанных по формуле (11) и методом «Подбор параметра из (1)» при разных содержаниях метана в смеси. Отрицательные значения скорости волны означают, что волна горения распространяется навстречу потоку, поэтому на рис. 1, функция скорости волны от скорости вдува имеет минимум.

Таблица 1

Содержание метана	Значения максимума $u$	Скорость вдува $v_0$	Равновесная температура $T_e$
9.5% CH <sub>4</sub>	-2.74226E-05	0.7265	1856.93
8.5% CH <sub>4</sub>	-1.44242E-05	0.4121	1719.67
8% CH <sub>4</sub>	-9.97242E-06	0.2966	1649.06
7% CH <sub>4</sub>	-4.21368E-06	0.1364	1503.64

Таблица 2

Содержание метана	Значения максимума $u$	Скорость вдува $v_0$	Равновесная температура $T_e$
9.5% CH <sub>4</sub>	-2.74093E-05	0.75	1864.51
8.5% CH <sub>4</sub>	-1.44183E-05	0.4	1686.86
8% CH <sub>4</sub>	-9.97175E-06	0.3	1651.24
7% CH <sub>4</sub>	-4.19468E-06	0.15	1518.74

Следует отметить, что полученная формула (11) для максимальной скорости стационарной волны ФГГ, включающая гидродинамические, теплофизические и химические параметры пористой среды и смеси газов позволяет исследовать влияние исходного давления смеси на данную скорость при каждой комбинации значений остальных параметров.

*Поступило 27.09.2023 г.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Попов О.Е., Когарко С.М., Фотеенко В.А. О быстром горении газовой смеси в средах с высокой пористостью. – Докл. АН СССР, 1974, т. 219, №3, с.1351-1354.
2. Мамонтов Г.М., Митрофанов В.В., Субботин В.А. Режимы детонации газовой смеси в жёсткой пористой среде. – Детонация. – Черноголовка, 1980, с. 106-110.
3. Kauffman C.W., Chuanjun Y., Nicholls J.A. Gaseous detonations in porous media. – 19th Intern. Symp. on Combustion. Pittsburg: The Combustion Institute. 1982, p. 591-597.
4. Коржавин А.А., Бунев В.А., Абдулин Р.Х., Бабкин В.С. О зоне пламени при горении газа в инертной пористой среде. – Физика горения и взрыв, 1982, т. 18, №6, с. 20-23.
5. Лаевский Ю.М., Бабкин В.С., Дробышев В.И., Потытняков С.И. К теории фильтрационного горения газов. – Физика горения и взрыва, 1984, т. 20, №6, с. 3-13.
6. Бабкин В.С., Бунев В.А., Коржавин А.А., Клименко А.С., Зубков В.И., Григорьев В.М. Горение газа в сосуде с высокопористой инертной средой. – Физика горения и взрыва, 1985, т. 21, №5, с. 17-22.
7. Новожилов Б.В. Скорость распространения фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе. – Докл. АН СССР, 1961, т. 141, №1, с. 151-153.
8. Лямин Г.А., Пинаев А.В. Сверхзвуковое (детонационное) горение газов в инертных пористых средах. – Докл. АН СССР, 1985, т. 283, №6, с.592-595.
9. Лямин Г.А., Пинаев А.В. О режимах сгорания газов в инертной пористой среде. – Физика горения и взрыва, 1986, т. 22, №5, с. 64-70.
10. Бабкин В.С., Лаевский Ю.М. Фильтрационное горение газов. – Физика горения и взрыв, 1987, т. 23, №5, с. 27-44.
11. Доброго К.В., Жданок С.А., Крауклис А.В. Переход от режима низких скоростей к режиму высоких скоростей при повышении давления. – Инженерно-физический журнал, 1999, т. 72, №3, с. 440-449.
12. Кабилов М.М., Садриддинов П.Б. Исследование процесса распространения фронта фильтрационного горения газов. – ДАН РТ, 2010, т. 53, №4, с. 272-278.
13. Какуткина Н.А., Рычков А.Д. Моделирование нестационарных процессов фильтрационного горения газа. – Физика горения и взрыва, 2010, т. 46, №3, с. 44-51.
14. Футько С.И., Шабуня С.И., Жданок С.А. Приближенное аналитическое решение задачи распространения фильтрационной волны горения в пористой среде. – Инженерно-физический журнал, 1998, т. 71, №1, с.41-45.
15. Доброго К.В., Жданок С.А. К теории термодинамической неустойчивости фронта фильтрационного горения газов. – Физика горения и взрыв, 1999, т. 35, №5, с. 14-20.
16. Доброго К.В., Жданок С.А. Физика фильтрационного горения газов. – Мн.: Инт. тепло-и массообмена им. А.В.Лыкова НАНБ, 2002, 203 с.

17. Коржавин А.А., Бунев В.А., Бабкин В.С. Эффекты селективной диффузии при распространении и гашении пламени в пористой. – Физика горения и взрыва, 2005, т. 41, №4, с. 50-59.
18. Какуткина Н.А., Коржавин А.А., Намятов И.Г., Рычков Д.А. Закономерности распространения пламени через насадку коммуникационных огнепреградителей. – Физика горения и взрыва, 2007, т. 43, №4, с. 23-37.
19. Какуткина Н.А., Коржавин А.А., Рычков Д.А. Закономерности прогорания пористых огнепреградителей с канальным пламегасящим элементом. – Физика горения и взрыва, 2009, т. 45, №3, с. 35-43.
20. Кабиллов М.М. Исследование диффузионно – тепловой устойчивости волн фильтрационного горения газов в инертной пористой среде. – Физика горения и взрыва, 2012, т. 48, №1, с. 14-20.
21. Кабиллов М.М. Тепловое воспламенение смеси газов в инертной пористой среде. – Доклады Национальной академии наук Республики Таджикистан, 2022, т. 65, №3-4, с. 186-191.

М.М.Қобиллов, П.Б.Садриддинов

## УСУЛИ МУАЙЯН КАРДАНИ КАЛОНТАРИН СУРЪАТИ МАВЧИ СТАЦИОНАРИИ СЌЗИШИ ФИЛТРОНАИ ГАЗҲО

*Донишгоҳи (Славянии) Россияю-Тоҷикистон,*

*\*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*\*Институти математикаи ба номи А.Қўраеви АМИ Тоҷикистон*

Дар мақола усули ба даст овардани формулаи суръати максималии мавчи статсионарии сўзиши филтронаи газҳо оварда шудааст. Формула дар асоси муодилаи суръати мавчи статсионарӣ ва шартҳои ҳосилаи функсияи суръати мавч аз рӯи суръати ҳаводихӣ омехта ба сифр баробар будан, ёфта шудааст. Муайян карда шудааст, ки дар нуқтаҳои экстремалии функсияи суръати мавч, ҳарорати мувозинатии беандоза муодилаи кубиро қонеъ мекунонад, ки коэффитсентҳои он параметрҳоеро дар бар мегиранд, ба монанди эффекти гармии реаксия, энергияи фаъолшавии молекулаҳо, консентратсияи компоненти камтарини омехта ва ҳарорати ибтидоии муҳити ковок. Боэтимодии натиҷаҳо нишон дода шудааст. Қайд карда мешавад, ки формулаи муқарраршуда, параметрҳои физикӣ-химиявии муҳити ковок ва омехтаи газро дар бар мегирад ва метавонад барои таҳқиқи таъсири фишори ибтидоии омехта ба суръати мавч истифода шавад.

**Калимаҳои калидӣ:** *суръати мавч, мавчи статсионарӣ, сўзиши газҳо, суръати ҳаводихӣ, ҳарорати мувозинатӣ, концентрация, муҳити ковок.*

M.M.Kabilov, P.B.Sadriddinov

## METHODOLOGY FOR DETERMINING THE MAXIMUM SPEED OF A STATIONARY WAVE OF FILTRATION COMBUSTION OF GASES

*Russian-Tajik Slavonic University,*

*\*National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*\*A.Juraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan*

The paper presents a methodology for obtaining the formula for the maximum speed of the stationary wave of filtration combustion of gases. The formula is found because of the ratio for the stationary wave velocity and the condition that the derivative of the wave speed function with respect to the mixture feed rate is zero. It was found that at the extreme points of the wave velocity function, the dimensionless equilibrium temperature satisfies a cubic equation whose coefficients contain such parameters as the heat effect of the reaction, the activation energies of molecules, the concentration of the missing component of the mixture, and the initial temperature of the medium. The reliability of the results is shown. It is noted that the established formula contains physicochemical parameters of porous medium and mixture of gases and can be used in the study of the influence of the initial pressure of the mixture on the wave velocity.

**Key words:** *wave velocity, stationary wave, combustion of gases, mixture feed rate, equilibrium temperature, concentration, porous medium.*

### Сведения об авторах:

1. **Кабиллов Маруф Махмудович** – кандидат физико-математических наук, Российско-Таджикский (Славянский) университет, доцент кафедры информатики и информационных систем. E-mail: maruf1960@mail.ru
2. **Садриддинов Парвиз Бахриддинович** – кандидат физико-математических наук, Институт математики им.А.Джуроева НАН Таджикистана, главный научный сотрудник. E-mail: Parviz06@list.ru.

УДК 523. 532

Специальность: 1.3.1 – Физика космоса, астрономия.

Член-корреспондент НАН Таджикистана Г.И.Кохирова,  
А.И.Джонмухаммади, М.Н.Латипов, У.Х.Хамроев  
ЕЩЕ РАЗ К ВОПРОСУ О КОМПЛЕКСЕ ТАУРИД

*Национальная академия наук Таджикистана,  
Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана*

*Кометно-астероидно-метеороидный комплекс Таурид исследуется на протяжении более 50 лет и продолжает быть предметом изучения астрономов. За это время комплекс пополнялся новыми объектами и к настоящему времени ему принадлежат более 40 астероидов, сближающихся с Землей, в действительности с высокой вероятностью, являющимися угасшими фрагментами родительской кометы комплекса Таурид. Мы систематизировали опубликованные данные и впервые приводим полные сведения обо всех членах комплекса, известных к настоящему моменту.*

**Ключевые слова:** комета, астероид, угасшая комета, метеороидный рой, метеорный поток, орбита, радиант.

**Введение.** Комета 2P/Энке является родителем метеороидного роя Таурид, который в свою очередь, порождает метеорные потоки и субпотоки, наблюдаемые на Земле ежегодно в период октябрь-ноябрь и май-июнь. Рой Таурид является наилучшим примером роя, связанного с астероидами, сближающимися с Землей (АСЗ), кометного происхождения. В результате исследований выявлены астероиды кометной природы с размерами несколько декаметров, которые наряду с кометой 2P/Энке движутся по орбитам, находящимся внутри роя Таурид. Так был установлен кометно-астероидно-метеороидный комплекс Таурид, состоящий из кометы 2P, метеороидного роя Таурид и 45 АСЗ, в действительности являющимися угасшими фрагментами родительской кометы. Предполагается, что комплекс был сформирован в результате фрагментации гигантской родительской кометы приблизительно 20-30 тысяч лет назад [1]. Следовательно, все известные к настоящему моменту члены комплекса имеют единое общее происхождение.

**Компоненты комплекса Таурид.** Главные метеорные потоки, которые порождает метеороидный рой Таурид, в базе данных МАС [2] имеют следующие обозначения: Северные Тауриды - 00017 NTA, Южные Тауриды - 00002 STA, Дневные  $\zeta$ -Персеиды - 00172 ZPE и Дневные  $\beta$ -Тауриды - 00173 BTA. Элементы орбиты родительской кометы 2P/Энке и роя Таурид [3,4] приведены в табл.1, где  $a$  – большая полуось,  $e$  – эксцентриситет,  $q$  – перигелийное расстояние,  $i$  – наклонение,  $\Omega$  – долгота восходящего узла,  $\omega$  – аргумент перигелия,  $\pi$  – долгота перигелия,  $D_{SH}$  - критерий Саутворта-Хокинса [5].

*Адрес для корреспонденции:* Кохирова Гулчехра Исроиловна. 736063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/5, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: kokhirova2004@mail.ru

Таблица 1

Элементы орбиты кометы 2P/Энке и метеороидного роя Тауриды (Равноденствие 2000.0)

ОЗО	a (а.е.)	e	q (а.е.)	i°	Ω°	ω°	π°	$D_{SH}$
2P/Энке	2.21	0.85	0.34	11.8	334.57	186.55	161.11	0.20
Рой Таурид	2.12	0.83	0.35	3.1	226.20	294.90	161.10	

В отсутствии достоверных данных о физических свойствах, родственная связь между объектами определяется на основе их динамических свойств. В этом подходе основной вклад принадлежит установлению меры схожести орбит объектов. Для измерения близости орбит существуют несколько критериев, среди которых наиболее известным и широко используемым является  $D_{SH}$  критерий [5]. Когда  $D_{SH}$  не превышает значения 0.25, то предполагается, что эти два тела имеют общее происхождение [5].

Значение  $D_{SH}$  критерия, приведенное в табл.1, указывает на родственную связь между кометой 2P и роем Таурид.

Отметим, что строго говоря, величина  $D_{SH} \leq 0.25$  является необходимым, но не достаточным условием для определения родства. Для большей достоверности необходимо вычислить эволюцию орбит, выявить условия пересечения орбит с орбитой Земли, вычислить теоретические радианты и скорости метеорных потоков, связанных с объектом, провести поиск наблюдаемых потоков близких по параметрам с теоретически предсказанными потоками. В этом подходе для исследования выбираются объекты только с кометоподобными орбитами. Речь идет о так называемом «метеорном признаке», апробированном и достоверном методе, разработанным в Институте астрофизики НАНТ под руководством П.Б.Бабаджанова. Использование этого метода значительно усиливает заключение о генетическом родстве объектов.

Как было сказано выше, в результате многочисленных исследований на основе разных методов и подходов выявлено более 40 АСЗ кометной природы, принадлежащих комплексу Таурид. То есть, эти околоземные объекты (ОЗО) с размерами порядка нескольких декаметров наряду с кометой 2P/Энке двигаются по орбитам, находящимся внутри роя Таурид. Мы систематизировали все опубликованные данные по этим телам и представляем результат в табличном виде. Кроме того, нами вычислены теоретические радианты для некоторых ОЗО в виду отсутствия их в источниках, а также вычислены значения критерия схожести орбит объектов.

В табл. 2 приведены основные параметры объектов родственных с роем Таурид и, соответственно, с метеорными потоками, порождаемыми роем, по данным [1,6-15]. Не все имеющиеся литературные источники использовали в своих исследованиях метод «метеорного признака», однако их критика и детальный анализ не являются предметом данной работы, и поэтому мы приводим только их конечные результаты.

В табл. 2 даны названия наблюдаемых метеорных потоков (жирным шрифтом), и под названием потока приведено его обозначение согласно базе данных метеорных потоков МАС [2]. Также приведены наименования 45 ОЗО, связанных с роем Таурид, при этом мы дифференцировали связь, приписав ОЗО к тому метеорному потоку, где имеется наибольшая схожесть их современных орбит. Далее в табл.2 приведены средние орбиты метеорных потоков и элементы орбит родственных с ними



ОЗО:  $q$  – перигелийное расстояние,  $e$  – эксцентриситет,  $i$  – наклон,  $\lambda$  – долгота Солнца, соответствующая активности потока,  $\alpha_g$  – прямое восхождение и  $\delta_g$  – склонение геоцентрического радианта,  $V_g$  – геоцентрическая скорость. Здесь также даны значения  $D_{SH}$  критерия [5], который определяет меру сходства орбит метеорного потока и ОЗО. В последнем столбце табл.2 дана ссылка на публикацию, где приведены данные. Отсутствие данных по радиантам и скоростям у некоторых АСЗ связано с невозможностью их определения.

Таблица 2

Элементы орбиты околоземных объектов и средние орбиты метеорных потоков  
в кометно-астероидно-метеороидном комплексе Тауриды (Равноденствие 2000.0)

Название объектов	$q$ (а.е.)	$e$	$i^\circ$	$\lambda^\circ$	$\alpha^\circ$	$\delta^\circ$	$V_g$ (км/с)	$D_{SH}$	Источник
<b>Северные Тауриды NTA (00017)</b>	<b>0.35</b>	<b>0.83</b>	<b>3</b>	<b>226</b>	<b>59</b>	<b>22</b>	<b>28</b>	-	[4]
1984 KB	0.52	0.76	5	226	50	14	26	0.20	[1,6,11]
1988 VP4	0.79	0.65	12	280	70	51	14	0.19	[1,6]
1990 HA	0.78	0.70	4	247	50	25	18	0.20	[1,6,7,11]
1991 BA	0.71	0.68	2	299	111	18	18	0.16	[1,6,7]
1998 VD31	0.52	0.80	10	247	70	11	25	0.21	[10,11]
1999VK12	0.50	0.78	10	229	54	8	24	0.16	[10,11]
1999 VR6	0.53	0.76	9	232	50	28	23	0.20	[10,11]
2002 XM35	0.38	0.84	3	252	81	25	28	0.03	[8,9,11]
2003 WP21	0.49	0.79	4	242	66	17	25	0.15	[8-11]
2003 UL3	0.46	0.80	15	91	82	29	26	0.26	[8-11]
2004 TG10	0.32	0.86	4	224	55	22	30	0.06	[8-11]
2005 UY6	0.30	0.87	12	217	52	20	33	0.19	[13,15]
2008 NS1	0.48	0.80	14	226	53	26	28	0.19	[15]
2008 XM1	0.45	0.81	4	252	78	28	26	0.16	[14,15]
2011 UE256	0.51	0.80	12	242	64	27	26	0.20	[15]
2012 UR158	0.32	0.86	3	288	96	21	29	0.05	[15]
2014 NK52	0.35	0.84	3	225	57	22	30	0.02	[15]
2014 XQ7	0.66	0.75	31	239	61	29	27	0.12	[15]
5025 P-L	0.44	0.90	6	226	51	15	29	0.14	[7,11]
<b>Южные Тауриды STA (00002)</b>	<b>0.35</b>	<b>0.82</b>	<b>5</b>	<b>217</b>	<b>49</b>	<b>13</b>	<b>28</b>	-	[4]
1996 SK	0.51	0.80	2	196	16	10	24	0.17	[7,11]
1999 RK45	0.36	0.77	6	-	-	-	-	0.07	[8,9]
2003 QC10	0.37	0.74	5	180	16	1.2	24	0.11	[8,9]
2003 SF	0.48	0.79	6	-	-	-	-	0.12	[8,9]
2005 TF50	0.30	0.87	11	218	52	15	31	0.15	[15]
2005 UR	0.27	0.88	7	216	51	15	32	0.11	[15]
2010 TU149	0.38	0.83	2	214	45	16	29	0.07	[12,15]
2011 SB16	0.49	0.80	7	208	32	10	26	0.18	[15]
(4197) 1982 TA	0.52	0.77	12	216	33	25	23	0.25	1,6,7,11]
<b>ζ-Персеиды ZPE (00172)</b>	<b>0.34</b>	<b>0.79</b>	<b>1</b>	<b>79</b>	<b>63</b>	<b>24</b>	<b>27</b>	-	[16]
16960	0.39	0.86	18	81	65	9	31	0.21	[10,11]
1984 QY1	0.28	0.91	4	60	41	19	32	0.13	[11]
1991 GO	0.66	0.66	10	24	19	25	18	0.19	[1,6,7]
1993 KA2	0.50	0.78	3	60	54	16	24	0.16	[7,11]
2005 LV30	0.54	0.77	8	66	60	31	23	0.18	[15]
2006 TH7	0.31	0.87	11	78	60	28	31	0.14	[15]
2009 SB	0.39	0.82	6	57	43	22	27	0.10	[15]
2014 LN17	0.50	0.80	7	72	68	14	25	0.17	[15]
2201 Oljato	0.63	0.71	3	77	79	27	20	0.12	[1,6,7]

Название объектов	$q$ (а.е.)	$e$	$i^\circ$	$\lambda^\circ$	$\alpha^\circ$	$\delta^\circ$	$V_g$ (км/с)	$D_{SH}$	Источник
<b><math>\beta</math>-Тауриды ВТА (00173)</b>	<b>0.34</b>	<b>0.85</b>	<b>6</b>	<b>97</b>	<b>87</b>	<b>19</b>	<b>30</b>	-	[16]
1937 UB Hermes	0.62	0.62	6	-	-	-	-	0.25	[1,6]
1991 TB2	0.39	0.84	9	-	-	-	-	0.11	[7]
2001 HB	0.40	0.69	9	16	6	-8	22	0.21	[8,9]
2001 QJ96	0.32	0.80	6	159	357	-6	27	0.10	[8,9]
2005 NX39	0.30	0.87	14	92	81	17	30	0.22	[15]
4341 Poseidon	0.59	0.68	12	-	-	-	-	0.20	[1,6,7]
5143 Heracles	0.42	0.77	9	-	-	-	-	0.14	[7]
(8201) 1994 AH2	0.73	0.71	10	-	-	-	-	0.20	[7]

В табл. 2 величины  $D_{SH}$  критерия удовлетворяют условию  $D_{SH} \leq 0.25$ , следовательно, исследуемые ОЗО и метеорные потоки имеют схожие орбиты. Близость положений радиантов, скоростей и периодов активности также указывают на возможную связь ОЗО и метеорных потоков. Следовательно, 45 ОЗО, как и комета 2P, родственны с метеороидным роем Таурид, порождающим ночные Северные и Южные Тауриды, и дневные  $\zeta$ -Персеиды и  $\beta$ -Тауриды. Хотя в табл. 2 мы разделили ОЗО по потокам, для всех них потоки являются общими, что свидетельствует и о взаимосвязи ОЗО между собой. Еще один вывод, а именно, метеороидный рой Таурид содержит крупные угасшие фрагменты кометы 2P или гигантской родительской кометы, распавшейся 20-30 тысяч лет назад.

**Заключение.** Представленные результаты демонстрируют родственную связь астероидов с метеорными потоками роя Таурид, с очень высокой вероятностью, приведенные АСЗ имеют общую кометную природу. Можно заключить, что комплекс Таурид содержит 45 АСЗ декаметровых размеров кометной природы, которые являются угасшими осколками кометы 2P или вместе с ней представляют собой фрагменты более крупной родительской кометы.

Количество открываемых АСЗ ежегодно увеличивается, и следует ожидать, что среди них должно быть определенное количество аналогичных АСЗ кометной природы, родственных с комплексом Таурид. Этим и объясняется продолжающаяся актуальность изучения комплекса. Целью новых исследований должно быть выявление новых угасших фрагментов родительской кометы комплекса Таурид.

Поступило 12.12.2023 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Asher D.J., Clube S.V.M., Steel D.I. Asteroids in the Taurid Complex. – MNRAS, 1993, v. 264, pp. 93-105.
2. <https://www.ta3.sk/IAUC22DB/MDC2007>, 2022.
3. <https://ssd.jpl.nasa.gov/>, дата обращения 2023 г.
4. Porubcan V. Kornos L. The Taurid meteor shower. – In: Proceedings of Asteroids, Comets, Meteors. ACM 2002, International Conference, 29 July - 2 August 2002, Berlin, Germany. Ed. Barbara Warmbein. ESA SP-500. – Noordwijk, Netherlands: ESA Publications Division, ISBN 92-9092-810-7, 2002, pp. 177-180.
5. Southworth R.B., Hawkins G.S. Statistics of meteor streamsю – Smith. Contr. Astrophys. 1963, v. 7, pp. 261-285.

6. Asher D.J., Clube S.V.M., Steel D.I. The Taurid Complex asteroids. – In: Meteoroids and their parent bodies, Proceed. of the Internat. Astronom. Symp. held at Smolenice, Slovakia, July 6-12, 1992, Bratislava: Astronomical Institute, Slovak Academy of Sciences, 1993, edited by J. Stohl and I.P. Williams. 1993b, pp. 93-96.
7. Babadzhanov P.B. Search for meteor showers associated with near-Earth asteroids. I. Taurid Complex. – Astron. and Astrophys., 2001, v. 373, pp. 329-335.
8. Porubcan V., Kornos L., Williams I.P. Associations Between Asteroids and Meteoroid Streams. – Earth, Moon and Planets, 2004, v. 95, pp. 697-712.
9. Porubcan V., Kornos L., Williams I.P. The Taurid complex meteor showers and asteroids. – Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso, 2006, v. 36, pp.103-117.
10. Babadzhanov P.B., Williams I.P., Kokhirova G.I. Near-Earth objects in the Taurid complex. – Mon. Not. of the Royal Astron. Soc., 2008, v. 386, pp. 1436-1442.
11. Бабаджанов П.Б., Кохирова Г.И. Метеорные потоки астероидов, пересекающих орбиту Земли. – Душанбе: «Дониш», 2009. 185 с.
12. Rudawska R., Vaubaillon J., Jenniskens P. Asteroid 2010TU149 in the Taurid complex. – 2012espc.conf. 2012a. 886R.
13. Rudawska R., Vaubaillon J., Jenniskens P. Asteroid 2005UW6 — A 'New' Object in the Taurid Complex? – 2012LPICo. 2012b. 1667. 6222R.
14. Madiedo J.M., Trigo-Rodriguez J.M., Williams I.P. et al. The Northern  $\chi$ -Orionid meteoroid stream and possible association with the potentially hazardous asteroid 2008XM1. – Mon. Not. of the Royal Astron. Soc., 2013, v. 431, pp. 2464-2470.
15. Кохирова Г.И., Бабаджанов П.Б., Латипов М.Н., Джонмухаммади А.И., Хамроев У.Х. Новые околоземные объекты в комплексе Таурид. – Известия НАНТ. ОФМХГТН, 2022, № 1 (186), с. 40-61.
16. Cook A.F. A working list of meteor streams. – In: Evolutionary and Physical Properties of Meteoroids, eds. C.L.Hemenway, P.M.Millman, A.F.Cook – NASA, SP-319, Washington, DC. 1973, pp. 183-191.

**Г.И.Қохирова, А.И.Қонмухаммади, М.Н.Латипов, У.Х.Ҳамроев**

## **БОРИ ДИГАР ДОИР БА МАСЪАЛАИ КОМПЛЕКСИ ТАУРИДҲО**

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,  
Институти астрофизикаи АМИ Тоҷикистон*

Комплекси кометаи астероиди метеороиди Тауридҳо давоми 50 сол таҳқиқ шуда ва омӯхтани он аз тарафи астрономҳо давом дода истодааст. Дар ин мӯҳлат комплекс бо объектҳои нав пурра гардид ва айни замон зиёда аз 40 астероиди наздизаминӣ ба он таалуқ доранд, ки дар асл бо эҳтимолияти калон пораҳои хомуши кометаи волидаини комплекси Тауридҳо мебошанд. Мо маълумотҳои ҷоп гардидаи ба низом давроварда аввалин маротиба омилҳои пурраи доир ба ҳама аъзоёни комплекс айни ҳол ошкоршударо пешниҳод менамоем.

**Калимаҳои калидӣ:** *комета, астероид, кометаи хомуш, туъдаи метеороидӣ, сели метеорӣ, мадор, радиант.*

G.I.Kokhirova, A.I.Jonmuhammadi, M.N.Latipov, U.H.Khamroev

## ONCE AGAIN TO THE QUESTION OF THE TAURID COMPLEX

*National Academy of Sciences of Tajikistan,  
Institute of Astrophysics of the NAS of Tajikistan*

The Taurid comet-asteroid-meteoroid complex has been studied for more than 50 years and continues to be the subject of study by astronomers. During this time, the complex has been replenished with new objects, and by now it has more than 40 near-Earth asteroids, in fact, with a high probability, they are extinct fragments of the parent comet of the Taurid complex. We have systematized the published data and for the first time present complete information about all members of the complex known to date.

**Key words:** *comet, asteroid, extinct comet, meteoroid stream, meteor shower, orbit, radiant.*

### Сведения об авторах:

1. **Кохирова Гулчехра Исроиловна** – доктор физ.-мат. наук, Институт астрофизики НАН Таджикистана, заведующая отдела межпланетных тел. E-mail: Kokhirova2004@mail.ru;
2. **Джонмухамади Абдулои Исмоилзода** – Институт астрофизики НАН Таджикистана, научный сотрудник. E-mail: jismoilzoda@mail.ru;
3. **Латипов Манучехр Нурахмадович** – Институт астрофизики НАН Таджикистана, младший научный сотрудник. E-mail: manu90\_09@mail.ru;
4. **Хамроев Умеджон Ходжамкулович** – кандидат физ.-мат. наук, Институт астрофизики НАН Таджикистана, старший научный сотрудник. E-mail: umed-1982@mail.ru;

УДК 534.16: 535.341

Специальность: 1.3.8 – Физика конденсированного состояния

Член-корреспондент НАН Таджикистана Т.Х.Салихов, А.А.Абдурахмонов

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕПЛОВЫХ ВОЛН В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛЕНКАХ НА ПОДЛОЖКЕ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИ МОДУЛИРОВАННЫМ ИОННЫМ ПУЧКОМ

*НИИ Таджикского национального университета*

*Сформулирована математическая модель задачи генерации линейных и нелинейных тепловых волн в диэлектрических пленках, прикрепленных на подложке в воздухе под действием гармонически модулированного по частоте пучка ионов. Для решения сформулированной задачи используется система нелинейных уравнений теплопроводности для двух слоёв образца и подложки.*

**Ключевые слова:** *гармонически модулированный ионный пучок, температурное поле, тепловая нелинейность, теплопроводность, диэлектрические плёнки, тепловые волны.*

Особенности возбуждения линейных и нелинейных тепловых волн в диэлектрических пленках в воздухе под действием гармонически модулированного ионного пучка с частотой  $\omega$  [1,2] нами были исследованы в [3].

Целью настоящей работы является формулировка математической модели генерации этих волн для случая, когда пленка прикреплена на подложке. Подчеркнем, что исследованию особенностей взаимодействия ионного пучка с диэлектриками посвящено достаточное количество работ (см. например, [4-7]), а особенности генерации и распространения тепловых волн в конденсированных средах достаточно полно изложены в обзорах [8,9] и монографии [10]. Между тем, в [11-16] решены подобные задачи по фотоакустике и обнаружено, что в этом случае в среде генерируются нелинейные колебания температуры, как на частоте  $\omega$ , так и на удвоенной частоте (вторая гармоника).

Как и в [3], предположим, что облучение образца проводится в воздушной среде и примем во внимание то, что толщина диэлектрика  $L_1$  больше длины пробега ионов  $R$  в нём. Тогда для описания исследуемого явления будем исходить из следующей системы нелинейных уравнений теплопроводности:

$$C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} \right] + \frac{EJ}{2RZe} \Theta(R-x)(1+e^{i\omega t}), \quad 0 \leq x \leq R, \quad (1)$$

**Адрес для корреспонденции:** Салихов Тагаймурод Хаитович, Абдурахмонов Абдурахмон Абдулкадимович, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: tsalikhov@mail.ru., abdurahmoni.abdukadim@mail.ru

$$C_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\kappa_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x}], \quad R \leq x \leq L_1, \quad (2)$$

$$C_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\kappa_3(T_3) \frac{\partial T_3}{\partial x}], \quad L_1 \leq x \leq L_1 + L_2, \quad (3)$$

где  $\Theta(R - x)$  – единичная функция Хэвисайда,  $C$ ,  $\kappa$  – теплоемкость единицы объема и коэффициент теплопроводности соответствующих слоев, соответственно, и  $J$ ,  $Z$ ,  $E$  – плотность тока пучка, заряд иона в единицах заряда электрона, начальная энергия ионов, соответственно.

Принимая во внимание, что начальное значение температуры образца  $T_0$ , шесть граничных условий, необходимых для решения системы (1)-(3), имеют вид [4]

$$\kappa_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1(T_1 - T_0) + A_1 \sigma_0 (T_1^4 - T_0^4), \quad (4)$$

$$-\kappa_3(T_3) \frac{\partial T_3}{\partial x} \Big|_{x=L_2} = h_3(T_3 - T_0) + A_3 \sigma_0 (T_3^4 - T_0^4), \quad (5)$$

$$T_1(x) \Big|_{x=R} = T_2(x) \Big|_{x=R}, \quad T_2(x) \Big|_{x=R} = T_3(x) \Big|_{x=R}, \quad (6)$$

$$\kappa_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=R} = \kappa_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=R}, \quad \kappa_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=L_1} = \kappa_3(T_3) \frac{\partial T_3}{\partial x} \Big|_{x=L_1}. \quad (7)$$

В (4) и (5)  $h_i$ ,  $A_i$  – коэффициент теплоотдачи поверхности образца и её степень черноты соответственно [17, 18]. Следуя [3], будем считать, что температурные зависимости теплофизических и оптических величин имеют следующий вид:

$$\kappa_i(T_i) = \kappa_i^{(0)}(T_0)[1 + \delta_{2(i)} T_i], \quad A_i(T_i) = A_i^{(0)}(T_0)[1 + \delta_{3(i)} T_i], \quad C_i(T_i) = C_i^{(0)}(T_0)[1 + \delta_{(i)} T_i],$$

$$h_i(T_i) = h_i^{(0)}(T_0)[1 + \delta_{4(i)} T_i],$$

где

$$\delta_{(i)} = \frac{1}{C_i^{(0)}(T_0)} \frac{\partial C_i}{\partial T}, \quad \delta_{2(i)} = \frac{1}{\kappa_i^{(0)}(T_0)} \frac{\partial \kappa_i}{\partial T}, \quad \delta_{3(i)} = \frac{1}{A_i^{(0)}(T_0)} \frac{\partial A_i}{\partial T}, \quad \delta_{4(i)} = \frac{1}{h_i^{(0)}(T_0)} \frac{\partial h_i}{\partial T}$$

являются термическими коэффициентами этих величин.

Величину возмущения температуры  $T_i'(x, t)$  представим в виде суммы линейных  $\Phi_{L(i)}(x, t)$ , нелинейных  $\Phi_{N(i)}(x, t)$  и локально-равновесных  $T_{0(i)}(x)$  составляющих, то есть в виде

$$T_i'(x, t) = T_{0(i)}(x) + \Phi_{L(i)}(x, t) + \Phi_{1N(i)}(x, t) + \Phi_{2N(i)}(x, t). \quad (8)$$

Здесь  $\Phi_{1N(i)}$  и  $\Phi_{2N(i)}$  – нелинейные составляющие колебания температуры соответствующего слоя на основной и второй гармониках. С учетом этого обстоятельства система уравнений (1)-(3) распадается на следующие системы уравнений для  $T_{0(i)}(x)$ ,  $\Phi_{L(i)}(x,t)$ ,  $\Phi_{1N(i)}(x,t)$  и  $\Phi_{2N(i)}(x,t)$ :

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{dT_{0(1)}}{dx} + \frac{\delta_{2(1)}}{2} \frac{d(T_{0(1)})^2}{dx} \right] = -\frac{I}{\kappa_1^{(0)}(T_0)}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{dT_{0(2)}(x)}{dx} + \frac{\delta_{2(2)}}{2} \frac{d(T_{0(2)})^2}{dx} \right] = 0, \quad R \leq x \leq L_1, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{dT_{0(3)}(x)}{dx} + \frac{\delta_{2(3)}}{2} \frac{d(T_{0(3)})^2}{dx} \right] = 0, \quad L_1 \leq x \leq L_2. \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{L(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{L(1)}}{\partial t} = -\frac{I}{\kappa_1^{(0)}(T_0)} \exp(i\omega t), \quad 0 \leq x \leq R, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{L(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{L(2)}}{\partial t} = 0, \quad R \leq x \leq L, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{L(3)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{L(3)}}{\partial t} = 0, \quad L_1 \leq x \leq L_2, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1N(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1N(1)}}{\partial t} = -(\delta_{2(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(1)}}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(T_0(x) \Phi_{L(1)}(x,t)), \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1N(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1N(2)}}{\partial t} = -(\delta_{2(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(2)}}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(T_0(x) \Phi_{L(2)}(x,t)), \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1N(3)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1N(3)}}{\partial t} = -(\delta_{2(3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(3)}}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(T_0(x) \Phi_{L(3)}(x,t)), \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2N(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2N(1)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\delta_{2(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(1)}}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(\Phi_{L(1)}^2(x,t)), \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2N(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2N(2)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\delta_{2(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(2)}}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(\Phi_{L(2)}^2(x,t)), \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2N(3)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2N(3)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\delta_{2(3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(3)}}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(\Phi_{L(3)}^2(x,t)). \quad (20)$$

В (9)-(20)  $I = EJ / ZeR$ ,  $\chi_i^{(0)} = \kappa_i^{(0)} / C_p^{(0)}$  – температуропроводность соответствующих слоев при  $T = T_0$ . В [19,20] нами получено решение системы уравнений (9)-(11), удовлетворяющее

граничным условиям (4)-(7), а также выполнен анализ особенностей формирования стационарного поля температуры.

Подставляя выражение (8) в (4)-(7), получим следующие граничные условия для  $\Phi_{L(i)}(x, \omega)$ ,  $\Phi_{1N(i)}(x, t)$  и  $\Phi_{2N(i)}(x, t)$  :

$$\kappa_1^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = B_1 \Phi_{L(1)} \Big|_{x=0}, \quad \Phi_{L(1)}(x, \omega) \Big|_{x=R} = \Phi_{L(2)}(x, \omega) \Big|_{x=R}, \quad (21)$$

$$\Phi_{L(2)}(x, \omega) \Big|_{x=L_1} = \Phi_{L(3)}(x, \omega) \Big|_{x=L_1}, \quad \kappa_1^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(1)}}{\partial x} \Big|_{x=R} = \kappa_2^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(2)}}{\partial x} \Big|_{x=R}, \quad (22)$$

$$\kappa_2^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(2)}}{\partial x} \Big|_{x=L_1} = \kappa_3^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(3)}}{\partial x} \Big|_{x=L_1}, \quad -\kappa_3^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(3)}}{\partial x} \Big|_{x=L_3} = B_3 \Phi_{L(3)} \Big|_{x=L_3}, \quad (23)$$

$$\Phi_{1N(1)}(x, \omega) \Big|_{x=R} = \Phi_{1N(2)}(x, \omega) \Big|_{x=R}, \quad \Phi_{1N(2)}(x, \omega) \Big|_{x=L_1} = \Phi_{1N(3)}(x, \omega) \Big|_{x=L_1}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_{1N(1)} + \delta_{2(1)} T_{0(1)}(x) \Phi_{L(1)} \right) \Big|_{x=R} = \frac{\kappa_2^{(0)}}{\kappa_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_{1N(2)} + \delta_{2(2)} T_{0(2)}(x) \Phi_{L(2)} \right) \Big|_{x=R}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_{1N(2)} + \delta_{2(2)} T_{0(2)}(x) \Phi_{L(2)} \right) \Big|_{x=L_1} = \frac{\kappa_3^{(0)}}{\kappa_2^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_{1N(3)} + \delta_{2(3)} T_{0(3)}(x) \Phi_{L(3)} \right) \Big|_{x=L_1}, \quad (26)$$

$$\kappa_1^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_{1N(1)}(x, \omega) + \delta_{2(1)} T_{0(1)}(x) \Phi_{L(1)}(x, \omega) \right) \Big|_{x=0} = [B_1 \Phi_{1N(1)}(x, \omega) + 2D_1 T_{0(1)}(x) \Phi_{L(1)}(x, \omega)] \Big|_{x=0}, \quad (27)$$

$$-\kappa_3^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_{1N(3)}(x, \omega) + \delta_{2(3)} T_{0(3)}(x) \Phi_{L(3)}(x, \omega) \right) \Big|_{x=L_2} = [B_3 \Phi_{1N(3)}(x, \omega) + 2D_3 T_{0(3)}(x) \Phi_{L(3)}(x, \omega)] \Big|_{x=L_2}, \quad (28)$$

$$\Phi_{2N(1)}(x, \omega) \Big|_{x=R} = \Phi_{2N(2)}(x, \omega) \Big|_{x=R}, \quad \Phi_{2N(2)}(x, \omega) \Big|_{x=L_1} = \Phi_{2N(3)}(x, \omega) \Big|_{x=L_1}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_{2N(1)}(x, t) + 0.5 \delta_{2(1)} \Phi_{L(1)}^2(x, t) \right) \Big|_{x=R} = \frac{\kappa_2^{(0)}}{\kappa_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_{2N(2)} + 0.5 \delta_{2(2)} \Phi_{L(2)}^2(x, t) \right) \Big|_{x=R}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_{2N(2)}(x, t) + 0.5 \delta_{2(2)} \Phi_{L(2)}^2(x, t) \right) \Big|_{x=L_1} = \frac{\kappa_3^{(0)}}{\kappa_2^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_{2N(3)} + 0.5 \delta_{2(3)} \Phi_{L(3)}^2(x, t) \right) \Big|_{x=L_1}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \kappa_1^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Phi_{2N(1)}(x, t) + 0.5 \delta_{2(1)} \Phi_{L(1)}^2(x, t) \right] \Big|_{x=0} = \\ & = B_1 \left[ \Phi_{2N(1)}(x, t) + 0.5 \delta_{2(1)} \Phi_{L(1)}^2(x, t) \right] + (D_1 - 0.5 \delta_{2(1)} B_1) \Phi_{L(1)}^2(x, t) \Big|_{x=L}, \end{aligned} \quad (32)$$



$$-\kappa_3^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ [\Phi_{2N(3)}(x, t) + 0.5\delta_{2(3)}\Phi_{L(3)}^2(x, t)] \right] \Big|_{x=L} = , \quad (33)$$

$$= [B_3(\Phi_{2N(3)}(x, t) + 0.5\delta_{2(3)}\Phi_{L(3)}^2(x, t)) + (D_2 - 0.5\delta_{2(3)}B_3)\Phi_{L(3)}^2(x, t)] \Big|_{x=L} ,$$

где  $B_i = h_i^{(0)} + 4\sigma A_i^{(0)}T_0^3$ ,  $D_i = h_i^{(0)}\delta_{4(i)} + 4\sigma A_i^{(0)}T_0^3\delta_{3(i)}$ .

Система уравнений (9)-(20) с граничными условиями (21)-(33) представляет собой искомую математическую модель генерации линейных и нелинейных тепловых волн в диэлектрических пленках на подложке.

*Поступило 14.12.2023 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Lin Ai Lei Wang, Yang Tan, Shavkat Akhmadaliev, Shengqiang Zhou and Feng Chen Efficient Second Harmonic Generation of Diced Ridge Waveguides Based on Carbon Ion-irradiated Periodically Poled LiNbO<sub>3</sub> – Journal of Lightwave Technology, 2016.2638920.
2. Shafiei S., Lamchi-Rashti M., Vosoughi Y. Design and Development of a Chopper for Ion Beam Current Measurement and Monitoring. – Journal of Nuclear Research and Applications, 2022, № 2(2), pp. 13-19.
3. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. Особенности возбуждения тепловых волн в пленках диэлектриков при облучении гармонически модулированным ионным пучком. – Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2023, №4, с.109-122.
4. Бойко В.И., Скворцов В.А., Фортов В.Е., Шаманин И.В. Взаимодействия импульсных пучков заряженных частиц с веществом. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003, 288 с.
5. Комаров Ф.Ф. Дефектообразование и трекообразование в твердых телах при облучении ионами сверхвысоких энергий. – УФН, 2003, т.173, №12, с. 1287-1318.
6. Фортов В.Е., Хоффманн Д., Шарков Б.Ю. Интенсивные ионные пучки для генерации экстремальных состояний вещества. – УФН, 2008, т.178, №2, с.113.
7. Комаров, Ф.Ф. Нано-и макроструктурирование твердых тел быстрыми тяжёлыми ионами. – УФН, 2017, т.175, №5, с. 465-504.
8. Joseph D.D. Heat Waves. – Reviews of Modern Physics, 1989, vol. 61, №1, pp. 41-73.
9. Ивлиев А.Д. Метод температурных волн в теплофизических исследованиях (анализ советского и российского опыта). – ТВТ, 2009, т. 47, Выпуск 5, с. 771-792.
10. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход. Изд. 2-е, доп. – М.: Едиториал УРСС, 2004, 296 с.
11. Rosencwaig A., Gersho A. Theory of the photoacoustic effect with solids. – J. Appl Phys., 1976, vol.47, №1, pp.64-69.
12. Салихов Т.Х., Меликхужа Н., Махмалатиф А. Генерация фотоакустического сигнала двухслойными прозрачными образцами с поглощающей подложкой. – Письма в журнал технической физики, 2019, т.45, №9, с.30-31.
13. Gao R. Xu Z., Ren Y., Song L., Liu C. Nonlinear mechanism in photoacoustic - powerful tools in photoacoustic imaging. – Photoacoustics, 2021, vol. 22, pp.100-243.

14. Салихов Т.Х., Мадвалиев У., Шарифов Д.М., Туйчиев Х.Ш. Влияние теплофизических и свойств подложки на характеристики нелинейного фотоакустического сигнала непрозрачных сред. – Журнал прикладной спектроскопии, 2019, т.86, № 6, с.908-916
15. Салихов, Т.Х., Мадвалиев У., Шарифов Д.М., Туйчиев Х.Ш. К теории генерации нелинейного фотоакустического сигнала при газомикрофонной регистрации. – Журнал технической физики, 2021, т.91, Вып.11, с.1608-1618.
16. Салихов, Т.Х., Шарифов Д.М., Туйчиев Х.Ш. Вклад температурной зависимости теплофизических параметров подложки на параметры второй гармоники фотоакустического сигнала непрозрачных сред. – ДАН РТ, 2008, т. 51, № 8, с.588-593.
17. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. – М.: Мир, 1975, 935 с.
18. Латышев Л.Н., Петров В.А., Чеховский В.Я., Шестаков Е.Н. Излучательные свойства твердых тел. Справочник. – М.: Энергия, 1974, 472 с.
19. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. Температурное поле пленок диэлектриков в поле непрерывного пучка ионов. – Теплофизика и аэромеханика, 2017, т.24, №6, с. 981-984.
20. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. Формирование температурного поля диэлектрических пленок и подложки в поле непрерывного пучка ионов. – Инженерно-физический журнал, 2018, т.91, №6, с. 1497-1501.

**Т.Х.Салихов, А.А.Абдурахмонов**

**АМСИЛАИ РИЁЗИИ АНГЕЗИШИ МАВҶҶОИ ҲАРОРАТИИ ХАТӢ ВА  
ГАЙРИХАТӢ ДАР НАВОРҶОИ ДИЭЛЕКТРИКӢ ДАР РӢЯИ ТАҲКУРСӢ  
ҲАНГОМИ НУРБОРОНКУНӢ БО ДАСТАИ ИОНҶОИ ГАРМОНИКӢ  
МОДУЛЯТСИЯШУДА**

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Амсилаи риёзии ангезиши мавҷҳои ҳароратии хатӣ ва ғайрихатӣ дар пардаҳои диэлектрикии дар таҳкурси саҳт кардашуда дар ҳаво бо воситаи дастаи ионҳои гармоникӣ модулятсияшуда пешниҳод карда шудааст. Барои ҳалли масъалаи таҳияшуда системаи муодилаҳои ғайрихаттии гармигузаронӣ ба-рои ду қабати намуна ва тақягоҳ истифода бурда шудааст.

*Калимаҳои калидӣ:* дастаи ионҳои гармоникӣ модулятсияшуда, майдони ҳароратӣ, ғайрихаттияти ҳароратӣ, гармигузаронӣ, наворҳои диэлектрикӣ, мавҷҳои ҳароратӣ.

**T.Kh.Salikhov, A.A.Abdurahmonov**

**MATHEMATICAL MODEL OF EXCITATION OF THE LINEAR AND  
NONLINEAR THERMAL WAVES IN DIELECTRIC FILMS ON A SUBSTRATE  
UNDER IRRADIATION WITH A HARMONICALLY MODULATED ION BEAM**

*Tajik National University*

A mathematical model has been formulated for the problem of generating linear and nonlinear thermal waves in dielectric films attached to a substrate and in the air by means of a harmonically frequency-modulated

ion beam. To solve the formulated problem, a system of nonlinear heat conduction equations is used for two layers of the sample and the substrate.

**Key words:** *harmonically modulated ion beam, irradiation, temperature field, thermal nonlinearity, thermal conductivity, dielectric films, thermal waves.*

**Сведения об авторах:**

1. **Салихов Тагаймурод Хаитович** – доктор физ.-мат. наук, Таджикский национальный университет, Научно-исследовательский институт, главный научный сотрудник отдела «Физика конденсированного состояния». E-mail: tsalikhov@mail.ru.
2. **Абдурахмонов Абдурахмон Абдулкадимович** – Таджикский национальный университет, Научно-исследовательский институт, старший научный сотрудник отдела «Физика конденсированного состояния». E-mail: abdurahmoni.abdukadim@mail.ru .

УДК 624.042

Специальность: 2.1.9 – Строительная механика

**Член-корреспондент НАН Таджикистана Д.Н.Низомов,****И.К.Каландарбеков\*, Д.Дж.Исвалиев\*****МЕТОД СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В РЕШЕНИИ  
ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПЛИТ***Национальная академия наук Таджикистана,**Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана,**\*Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими*

*В статье рассматривается решение задачи изгиба пластин от действия равномерно распределенной нагрузки методом сосредоточенных деформаций. Приводится алгоритм формирования матрицы жесткости изгибаемых пластин с учетом граничных условий. На основе предлагаемого алгоритма разработана компьютерная программа и получены результаты численного моделирования статической задачи изгиба пластины.*

**Ключевые слова:** *конечный элемент, изгиб пластины, граничные условия, матрица внутренней жесткости, матрица внешней жесткости, квадратичная аппроксимация.*

**Введение.** В настоящее время для расчета зданий и сооружений широко применяется метод конечных элементов (МКЭ). Разработка численных методов для расчета зданий и сооружений от различных воздействий является актуальной задачей.

Как известно, методы расчета железобетонных конструкций специально не ориентированы на соединения элементов, которые обладают значительной податливостью. Следовательно, актуальным является вопрос совершенствования методов расчета, которые учитывают конструктивные особенности исследуемого объекта.

В данной работе усовершенствован метод сосредоточенных деформаций (МСД) применительно к расчету изгибаемых плит. Основная идея метода сосредоточенных деформаций была изложена в работах А.Р.Ржаницына [1,2]. Дальнейшее развитие этого метода связано с работой М.И.Додонова [3]. Отличительная особенность метода сосредоточенных деформаций заключается в том, что он дает возможность учитывать податливость реальных связей в дискретной модели исследуемого объекта.

Сущность МСД сводится к преобразованию дифференциальных уравнений, описывающих поведение искомой функции внутри и на границе области, в систему алгебраических уравнений. Идея метода состоит в сосредоточении деформаций конечных элементов на их гранях и вычисления

---

**Адрес для корреспонденции:** *Низомов Джахонгир Низомович. 734029, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана. E-mail: tiees@mail.ru; Каландарбеков Имомёрбек Каландарбекович, Исвалиев Далерджон Джурахонович. 734042, г. Душанбе, пр. акад. Раджабовых, 10А, Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими. E-mail: kalandarbekov-55@mail.ru; disvaliev@mail.ru.*

внутренних усилий по контурам и внутри области. Метод сосредоточенных деформаций, который реализован на примере расчета пластины, позволяет учитывать её конструктивные особенности. Оценка точности МСД определяется гипотезами и допущениями, заложенными в основу метода, степенью дискретизации, особенностями задач.

**Алгоритм расчета**

Рассмотрим прямоугольную пластину, которая разбивается на прямоугольные конечные элементы размерами  $a_k \times b_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , где при равномерной разбивке  $a_k = a/n_x$ ,  $b_k = b/n_y$ ,  $n_x, n_y$  – число элементов по направлениям осей  $x$  и  $y$  соответственно,  $n = n_x \cdot n_y$  – общее число конечных элементов (рис. 1). Элементы размером  $a_k \times b_k$  рассматриваются как абсолютно жесткие, а их собственные деформации при изгибе, кручении и сдвиге сосредотачиваются по границам между ними введением фиктивных связей соответствующего типа. Узлы, в которых сосредоточены деформации изгиба, кручения и сдвига, располагаются посередине граней элементов. Следующую группу узлов составляют узлы, расположенные в центре элементов, в которых накладываются по три связи, препятствующие их линейным перемещениям по оси  $z$  и поворотам вокруг осей  $x$  и  $y$ . В эти же узлы будут приложены внешние сосредоточенные силы и моменты.

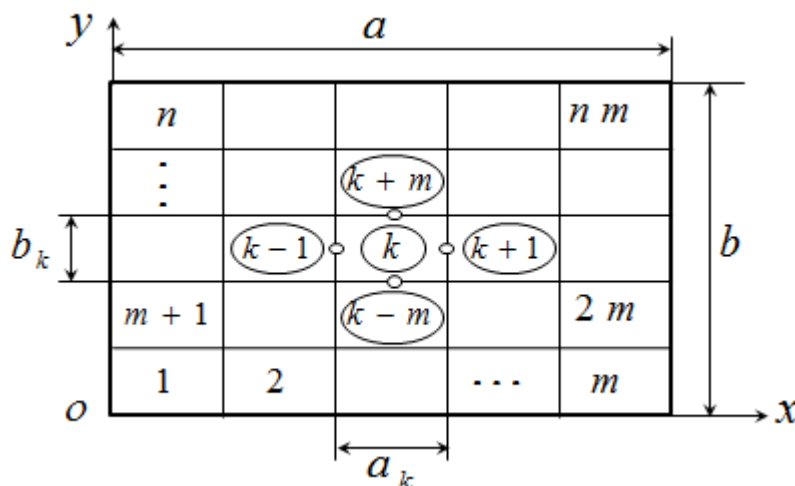


Рис. 1. Разбивка пластины на конечные элементы МСД.

На рис. 2 показан  $k$ -й конечный элемент от действия внешних и внутренних сил. При этом вектор внешних сил для каждого элемента состоит из трех составляющих:

$$\mathbf{P}_k = (M_{xk} \ M_{yk} \ P_{zk})^T,$$

где  $M_{xk}, M_{yk}, P_{zk}$  – заданные сосредоточенные изгибающие моменты и вертикальная сила.

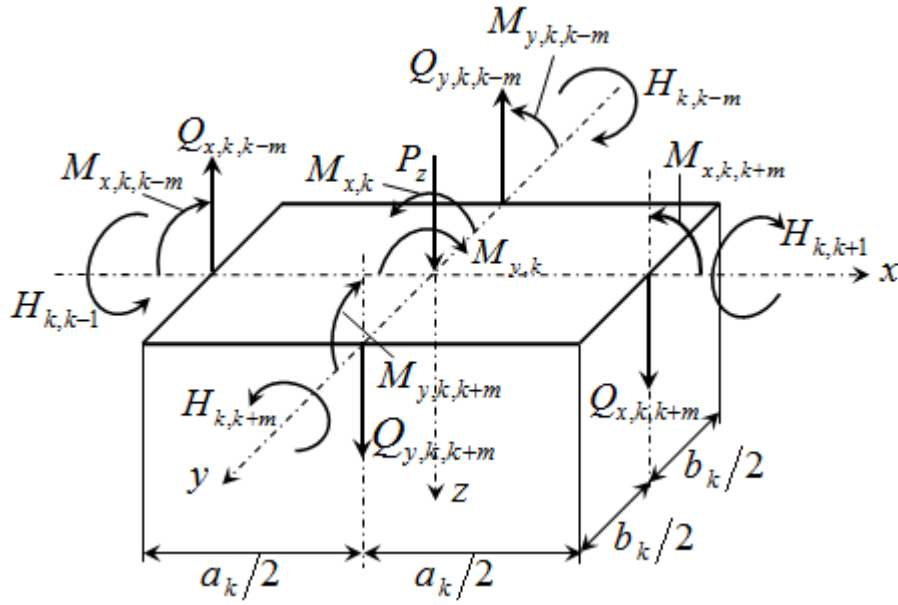


Рис. 2. Равновесие  $k$ -го конечного элемента.

Составим уравнения равновесия  $k$ -го элемента, которые выражают равенство нулю суммарного момента всех сил вокруг осей  $x, y$ , проходящих по центру элемента и сумму проекций всех сил на ось  $z$

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0, & \quad -M_{y_{k,k-m}} + M_{y_{k,k+m}} - H_{k,k-1} + H_{k,k+1} - Q_{y_{k,k-m}} b_k/2 - Q_{y_{k,k+m}} b_k/2 - M_{xk} = 0, \\ \sum M_y = 0, & \quad M_{x_{k,k-1}} - M_{x_{k,k+1}} + H_{k,k-m} - H_{k,k+m} + Q_{x_{k,k-1}} a_k/2 + Q_{x_{k,k+1}} a_k/2 + M_{yk} = 0, \\ \sum M_z = 0, & \quad -Q_{x_{k,k-1}} + Q_{x_{k,k+1}} - Q_{y_{k,k-m}} + Q_{y_{k,k+m}} + P_{zk} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Систему уравнений (1) можно представить в матричной форме

$$\mathbf{A}_k \mathbf{S}_k + \mathbf{P}_k = 0, \tag{2}$$

где матрица коэффициентов  $\mathbf{A}_k$ , вектор внутренних усилий  $\mathbf{S}_k$ , вектор внешних сил  $\mathbf{P}_k$  записываются в виде

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -b_k/2 & -1 & 0 & -b_k/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a_k/2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & a_k/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_k = \left( M_{k,k-1} H_{k,k-1} Q_{k,k-1} \mid M_{k,k+m} H_{k,k+m} Q_{k,k+m} \mid M_{k,k-m} H_{k,k-m} Q_{k,k-m} \mid M_{k,k+1} H_{k,k+1} Q_{k,k+1} \right)^T,$$

$$\mathbf{P}_k = \left( -M_{x,k} M_{y,k} P_z \right)^T.$$

Записав уравнения типа (1) для всех конечных элементов, получим систему из  $3n$  уравнений с  $3m$  неизвестными внутренними усилиями, где  $m = 2n + n_x + n_y$ ,  $m > n$ , то есть мы имеем статически неопределимую систему. Например, при  $n_x = n_y = 5$ ,  $n = n_x n_y = 25$ , а  $m = 2n + n_x + n_y = 60$ . Следовательно, мы получим систему из 75 уравнений с 180 неизвестными. Это система уравнений, которая выражает связь между внутренними и внешними силами, представляется матричной форме

$$\mathbf{AS} + \mathbf{P} = 0 \quad (2a)$$

где  $\mathbf{A}$  – прямоугольная матрица коэффициентов размера  $3n \times 3m$ ;

$\mathbf{P}$  – вектор внешних размера  $3n$ ;

$\mathbf{S}$  – вектор внутренних сил размера  $3m$ .

Система уравнений, которая выражает связь между перемещениями пластины и деформациями ее элементов, записывается в виде матричного уравнения [3]

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} + \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{A}^T$  – матрица размера  $3m \times 3n$ , взаимно транспонированная с матрицей  $\mathbf{A}$ . Векторы перемещений и деформаций состоят из  $3n$  элементов

$$\mathbf{W} = (\varphi_{x1} \varphi_{x1} w_1 | \varphi_{x2} \varphi_{x2} w_2 | \dots | \varphi_{xn} \varphi_{xn} w_n)^T,$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{x1} \lambda_{y1} \Delta_1 | \lambda_{x2} \lambda_{y2} \Delta_2 | \dots | \lambda_{xn} \lambda_{yn} \Delta_n)^T.$$

Зависимость вектора внутренних сил от вектора деформаций выражается формулой [3]

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}. \quad (4)$$

Из (2a) с учетом (4) и (3), получаем зависимость между вектором внешних сил и  $3n$ -мерным вектором перемещений

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{A}^T \mathbf{W} = \mathbf{K} \mathbf{W}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{A}^T$  – квадратная матрица внешней жесткости  $3n$ -го порядка.

Решение статической задачи пластины сводится к разрешающей системе алгебраических уравнений (5), которая представляется в виде

$$\mathbf{K} \mathbf{W} = \mathbf{P}. \quad (6)$$

Из решения (6) определяется вектор перемещений, а затем из (3) и (4) последовательно вычисляются векторы деформаций и внутренних усилий.

Для определения перемещений и усилий в контрольных точках пластины используется экстраполяция. С этой целью применяется квадратичная аппроксимация. На рис. 3, показана разбивка пластины на конечные элементы МСД и указаны соответствующие сечения для определения перемещения и внутренних усилий в её центре.

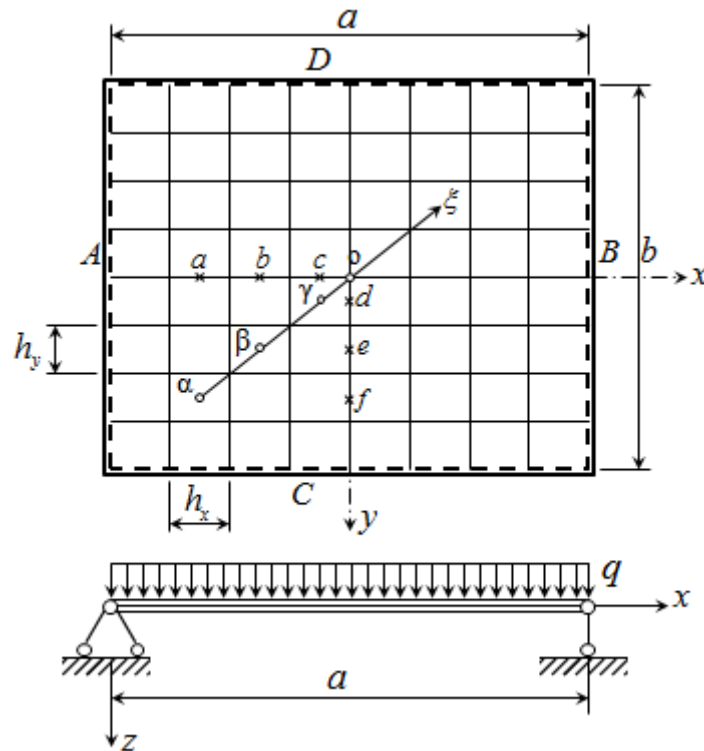


Рис. 3. Определение перемещений и внутренних усилий в конечных элементах.

Проведя вдоль оси  $\xi$  через точки  $\alpha, \beta, \gamma$  (рис. 3) квадратную параболу [3]

$$w(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2, \tag{7}$$

получим:  $\xi = 0, \quad w = w_\alpha, \quad a_0 = w_\alpha,$

$$\xi = \Delta\xi, \quad w = w_\beta, \quad w_\beta = w_\alpha + a_1 \Delta\xi + a_2 \Delta\xi^2, \tag{8}$$

$$\xi = 2\Delta\xi, \quad w = w_\gamma, \quad w_\gamma = w_\alpha + 2a_1 \Delta\xi + 4a_2 \Delta\xi^2. \tag{9}$$

Из совместного решения (7), (8) и (9), находим

$$a_1 = (-3w_\alpha + 4w_\beta - w_\gamma) / 2\Delta\xi, \quad a_2 = (w_\alpha - 2w_\beta + w_\gamma) / 2\Delta\xi^2.$$

С учетом найденных значений коэффициентов  $a_0, a_1$  и  $a_2$  вектор перемещений (7) представляется в виде

$$w(\xi) = w_\alpha + \frac{-3w_\alpha + 4w_\beta - w_\gamma}{2\Delta\xi} \xi + \frac{w_\alpha - 2w_\beta + w_\gamma}{2\Delta\xi^2} \xi^2, \tag{10}$$

откуда при  $\xi = 2.5\Delta\xi$  получаем

$$\begin{aligned} w_o &= w_\alpha + \frac{-3w_\alpha + 4w_\beta - w_\gamma}{2\Delta\xi} \frac{5}{2} \Delta\xi + \frac{w_\alpha - 2w_\beta + w_\gamma}{2\Delta\xi^2} \frac{25}{4} \Delta\xi^2 = \\ &= (15w_\gamma - 10w_\beta + 3w_\alpha) / 8. \end{aligned}$$



По формуле (10) определяется прогибы и в других точках, обозначенных крестиком, а также в точках контура пластины.

Ниже приводится пример расчета квадратной плиты с различными граничными условиями от действия равномерно распределенной нагрузки. Результаты получены на основе вышеизложенного алгоритма по разработанной компьютерной программе **PLASTINA-R1, R2** на языке Фортран.

### Реализация алгоритма

Алгоритм расчета реализован на примере квадратной пластинки с шарнирным операнием контура. В табл.1 прогиб в центре пластины, полученный при различных разбиениях, сравнивается с аналитическим решением. Видно, что с уменьшением шага сетки численное решение приближается к аналитическому решению. При этом наблюдается сходимость результатов, что подтверждает их достоверность.

Таблица 1

Сравнение результатов численного решения с аналитическим решением

Прогиб	Численное решение по МСД при различных разбиениях пластинки				Аналитическое решение
	9 x 9	11 x 11	13 x 13	15 x 15	
$w_0 D / q_0 a^4$	0.004235	0.004234	0.004233	0.004232	0.00416
Погрешность %	1.8	1.78	1.75	1.73	

Для наглядности на рис. 4 приведены графики изменения прогиба и изгибающего момента по линии АВ, проходящей вблизи центра, полученные для плиты с шарнирным операнием краев. Прогибы соответствуют точкам в центре, а моменты – точкам на гранях элементов.

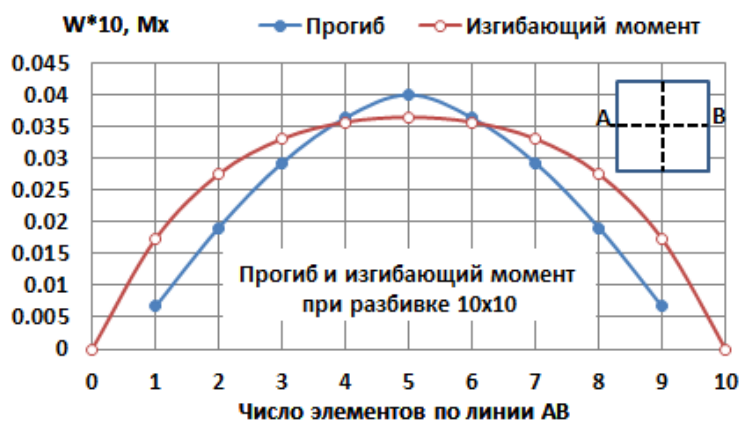


Рис. 4. Графики изменения прогиба и изгибающего момента по линии АВ.

**Вывод.** Разработанные алгоритм и компьютерные программы на основе метода сосредоточенных деформаций позволяют проводить исследования напряженно-деформированного состояния плит от воздействия различных нагрузок. Метод позволяет исследовать плиты с учетом податливости их соединения с другими элементами здания.

Поступило 15.11.2023 г.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ржаницын А.Р. Расчет сплошных конструкций методом упругих сосредоточенных деформаций. – Строительная механика и расчёт сооружений, 1980, №5, с. 15-20.
2. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991, 439 с.
3. Додонов М.И. Расчет изгибаемых пластин методом сосредоточенных деформаций. – Строительная механика и расчёт сооружений, 1986, №2, с. 22-25.
4. Низомов Д.Н., Каландарбеков И. Метод сосредоточенных деформаций. – Душанбе: «Дониш», 2015, 436 с.
5. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М., 1966 г., 636 с.
6. Вайнгбер Д. В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин. – Киев: Будівельник, 1973, 488 с.

Ч.Н.Низомов, И.Қ.Қаландарбеков\*, Д.Ч.Исвалиев\*

**МЕТОДИ МУТАМАРКАЗКУНОНИИ ДЕФОРМАТСИЯҲО БАРОИ ҲАЛЛИ  
МАСЪАЛАИ ҚАДШАВИИ ТАХТАСАНГ**

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи АМИ Тоҷикистон,*

*\*Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи акад. М.С.Осимӣ*

Дар мақола ҳалли масъалаи қадшавии тахтасанг аз таъсири борҳои баробар тақсимшуда бо методи мутамарказкунонии деформатсияи дида баромада шудааст. Алгоритми тартибдиҳии матритсаҳои сахтии қадшавии тахтасанг бо баҳисобгирии шартҳои канорӣ оварда шудааст. Дар асоси алгоритми пешниҳодшуда, барномаи компютерӣ коркард шуда ва натиҷаҳои моделкунонии адабии масъалаҳои статикӣ қадшавии тахтасанг ба даст оварда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** *унсури охиринок, қадшавии тахтасанг, шартҳои канорӣ, матритсаи дохилии сахтӣ, матритсаи берунаи сахтӣ, аппроксиматсияи квадратӣ.*

D.N.Nizomov, I.Q.Qalandarbekov\*, D.J.Isvaliev\*

**CONCENTRATED STRAIN METHOD SOLVING THE PROBLEM OF PLATE  
BENDING**

*National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*Institute of Geology, Earthquake Resistant Construction and Seismology of the NAS of Tajikistan,*

*\*M.S.Osimi Tajik Technical University*

The article discusses the solution to the problem of bending plates under the action of a uniformly distributed load using the concentrated deformation method. An algorithm is given for generating the stiffness matrix of bending plates taking into account boundary conditions. Based on the proposed algorithm, a computer program was developed and the results of numerical simulation of the static plate problem were obtained.

**Key words:** *finite element, plate bending, boundary conditions, internal stiffness matrix, external stiffness matrix, quadratic approximation.*

**Сведения об авторах**

1. **Низомов Д.Н.** – доктор технических наук, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ, заведующий лабораторией сейсмостойкости зданий и сооружений.  
E-mail: tiees@mail.ru, nizomov-jn@mail.ru;
2. **Каландарбеков И.К.** – доктор технических наук, Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими. E-mail: kalandarbekov-55@mail.ru;
3. **Исвалиев Д.Дж.** – Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими,  
E-mail: disvaliev@mail.ru.

УДК 622.341.11

Специальность: 1.4.1 – Неорганическая химия

С.М.Досаев, К.И.Нематуллоев, А.С.Курбонов\*, И.М.Рахимов,

академик НАН Таджикистана У.М.Мирсаидов

**СОЛЯНОКИСЛОТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ИСХОДНОЙ МАГНЕТИТОВОЙ РУДЫ  
МЕСТОРОЖДЕНИЯ «ХАРАНГОН» ТАДЖИКИСТАНА***Национальная академия наук Таджикистана,**Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана,**\* Агентство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана*

*Представлены результаты исследований солянокислотного разложения магнетитовой руды Харангонского месторождения Таджикистана. Установлено, что при продолжительности процесса кислотной обработки 90 мин; концентрации соляной кислоты 20-25 мас.%; температуре выщелачивания 80-90°C степень извлечения оксида железа (III) достигает 80.3%.*

**Ключевые слова:** *магнетитовая руда, выщелачивание, магнитный сорбент, разложение, извлечение.*

Магнетитовые руды разлагают сплавлением или разложением минеральными кислотами [1-4]. Разложение железосодержащих руд минеральными кислотами проводится с целью получения соединений железа, которые используются как коагулянты для очистки вод и для нужд сельского хозяйства [5-6].

Для разложения железосодержащих руд эффективной является также фосфорная кислота. Разложение руд  $H_3PO_4$  протекает легко и сопровождается выделением паров воды и получением ценных фосфатных реагентов [6-7].

Целью данной работы является получение хлоридных соединений железа и магнетитовой руды месторождения «Харангон» Таджикистана.

Харангонское месторождение, которое содержит более 63% магнетита (табл. 1), является перспективным для получения ценных продуктов.

Таблица 1

Химический состав магнетитовой руды месторождения «Харангон».

Содержание, мас. %	$Fe_2O_3*FeO$	$Al_2O_3$	$MgO$	$CaO$	$TiO_2$	$Na_2O$	$SO_3$	$SiO_2$
	63.91	3.8	5.98	0.21	0.18	0.79	0.41	11.52

На рис.1 приведена рентгенограмма магнетитовой руды месторождения Харангон.

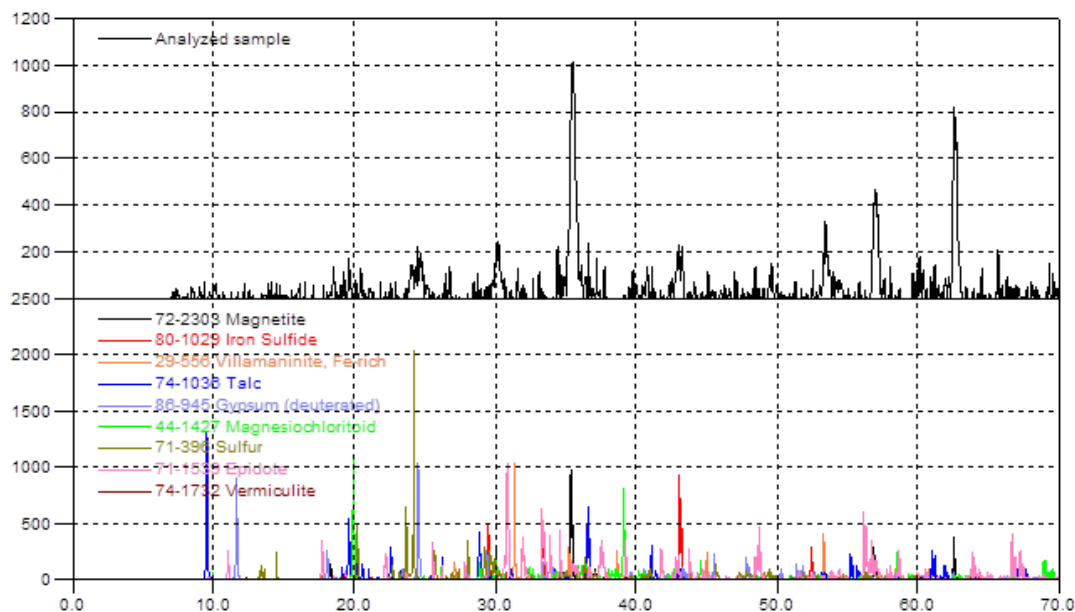


Рис. 1. Рентгенограмма магнетитовой руды месторождения Харангон.

Согласно РФА, магнетитовая руда месторождения Харангон содержит следующие минералы: магнетит –  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ , пирит –  $\text{FeS}_2$ , халькопирит –  $(\text{Cu}, \text{Fe})\text{S}_2$ , магниохлорит –  $(\text{Mg}, \text{Fe})\text{Al}_2\text{SiO}_5(\text{OH})_2$  и др.

На рис. 2 представлены ДТА и ТГ магнетитовой руды месторождения Харангон, которые снимались при скорости нагрева  $10^\circ/\text{мин}$  до  $1100^\circ\text{C}$ . На кривых ДТА наблюдаются эндоэффекты при температурах 260, 570 и  $620^\circ\text{C}$ . Эндотермические эффекты в диапазоне температур  $225\text{--}310^\circ\text{C}$  со значительными потерями веса образца связаны с удалением физической, а также гидратной влаги из состава железосодержащего сырья. Эффекты при  $570$  и  $620^\circ\text{C}$  могут соответствовать точкам Кюри, то есть происходит переход от ферромагнитной к парамагнитной фазе. При этих температуры магнитные материалы теряют свои ферромагнитные свойства и становятся парамагнетиками.

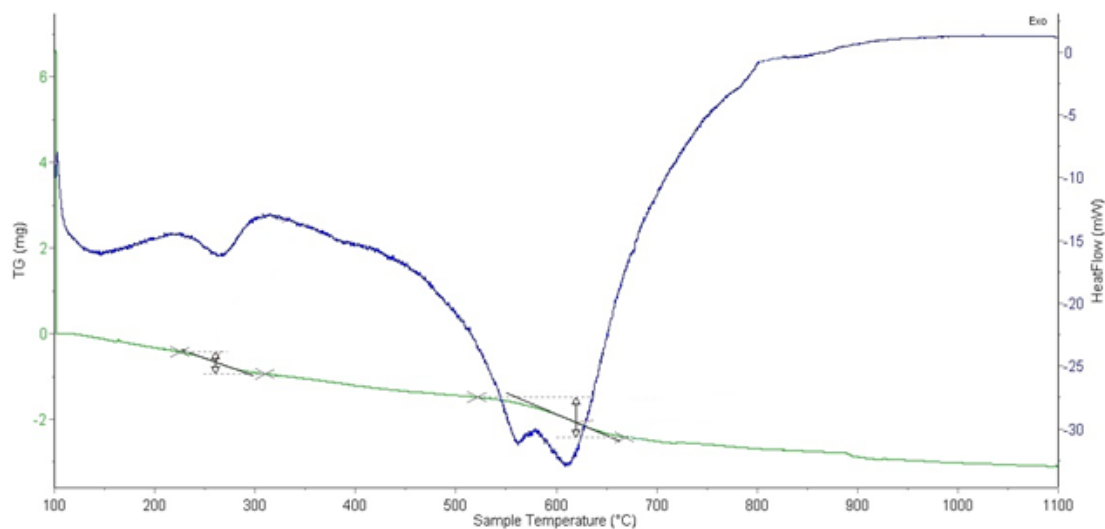
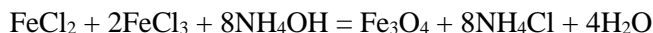


Рис. 2. Термограмма магнетитовой руды месторождения Харангон.

На основе поставленной цели работы магнетитовую руду сначала измельчали до размера частиц до 0.1-0.3мм и обработали соляной кислотой. Полученную пульпу фильтровали и к фильтрату добавляли избыточное количество аммиака и нагревали. При этом имеется термодинамическая возможность протекания следующей реакции:



Результаты исследования солянокислотного разложения магнетитовой руды в виде графика представлены на рис. 3.

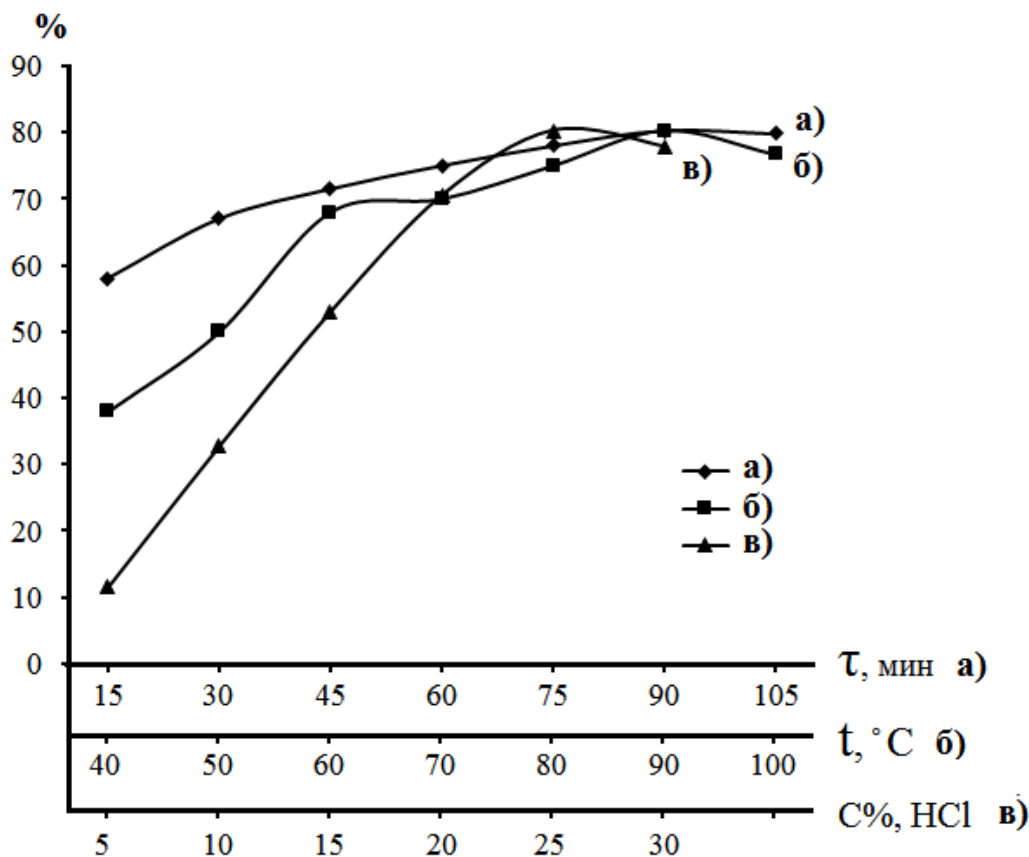


Рис. 3. Зависимости степени извлечения оксидов Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> из состава магнетитовой руды от: а) продолжительности процесса; б) температуры; в) концентрации HCl.

Зависимости степени извлечения оксида железа от продолжительности процесса выщелачивания изучена в интервале времени от 15 до 105 мин (рис.3(а)). Установлено, что при увеличении времени кислотной обработки сырья до 90 мин степень извлечения оксида железа достигает максимального значения (в %): Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>–80.3. Дальнейшее увеличение длительности процесса выщелачивания не приводит к существенному изменению степени извлечения оксида железа.

Изучено влияние температуры на ход реакции в интервале от 40 до 100°C рис. 3(б). Из рисунка видно, что с ростом температуры степень извлечения оксида железа возрастает и при 90°C составляет (в %): Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> – 80.6.

Из рисунка 3(в) видно, что при изменении концентрации соляной кислоты от 5 до 25% степень извлечения оксида железа существенно возрастает. Высокая степень извлечения оксида железа – 79.95% достигается при переработке магнетитовой руды 25%-ной соляной кислотой. Дальнейшее

увеличение концентрации соляной кислоты приводит к уменьшению степени извлечения оксида железа вследствие уменьшения соотношения Ж:Т и увеличения вязкости пульпы, что в свою очередь вызывает снижение скорости диффузионного переноса ионов водорода к неразложившимся частицам магнетитовой руды.

На основе результатов проведённых исследований по солянокислотному разложению можно рекомендовать следующие оптимальные условия: продолжительность процесса кислотной обработки – 90 мин; концентрация соляной кислоты – 20-25 мас%; температура выщелачивания – 85-90°C.

*Поступило 14.11.2023 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фурман А.А., Рабовский Б.Г. Основы химии технологии безводных хлоридов. – М.: Химия, 1970, 256 с.
2. Мирсаидов У.М., Сафиев Х.С. Комплексная переработка низкокачественного алюмосодержащего сырья. – Душанбе: Дониш, 1998, 238 с.
3. Мираков М.А., Паутов Л.А., Файзиев А.Р., Хворов П.В., Шодибеков М.А., Махмадшариф С., Одинаев Ш.А. Первая находка ферсмита в гранитных пегматитах Памира (Восточный Таджикистан) – Известия НАН Таджикистана, 2023, №2(191), с. 82-90.
4. Мирзоев Б., Маматов Э.Д., Расулов Д.Д. Хлорные способы получения соединений алюминия и железа из руд. – ДАН РТ, 2005, т.48, №9, с 30-36
5. Мирсаидов У.М., Мирзоев Д.Х., Бобоев Х.Э. Комплексная переработка аргиллитов и каолиновых глин Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2016, 92 с.
6. Бобоев Х.Э. Кислотное разложение каолиновых глин и силлитов: автореф. дис. ... канд. хим. наук. – Душанбе, 1996, 19 с.
7. Бакланова К.А. Методы ускоренного анализа железных, никелевых марганцевых руд. – М.: Госгеолгиздат, 1951.
8. Ляльков В.А., Сакунов В.И., Ткаченко Н.С. Анализ железных и марганцевых руд – М.: Металлургиздат, 1954.

**С.М.Досаев, К.И.Нематуллоев, А.С.Қурбонов\*, И.М.Раҳимов, У.М.Мирсаидов**  
**ТАҶЗИЯИ МАЪДАНИ МАГНЕТИТИ КОНИ ХАРАНГОНИ ТОҶИКИСТОН**  
**БО КИСЛОТАИ ХЛОРИД**

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*Институти химияи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон,*

*\*Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии АМИ Тоҷикистон\**

Натиҷаҳои таҷқиқоти таҷзияи маъдани магнетити кони Харангони Тоҷикистон бо кислотаи хлорид оварда шудааст. Муқаррар карда шудааст, ки ҳангоми давомнокии раванди коркарди кислотагӣ то 90 дақ.; консентратсияи кислотаи хлори 20-25%; ҳарорати ишқоронӣ 80-90°C будан дараҷаи истихроҷи оксиди оҳан (III) то ба 80.3% мерасад.

**Калимаҳои калидӣ:** маъдани магнетитӣ, ишқоронӣ, сорбенти магнитӣ, таҷзия, истихроҷ.

S.M.Dosaev, K.I.Nematulloev, A.S.Kurbonov\*, I.M.Rahimov, U.M.Mirsaidov

## HYDROCHLORIC ACID DECOMPOSITION OF MAGNETITE ORE FROM THE KHARANGON DEPOSIT IN TAJIKISTAN

*National Academy of Sciences of Tajikistan*

*V.I.Nikitin Institute of Chemistry, NAS of Tajikistan,*

*\*Chemical, biological, radiological, and nuclear safety and security agency, NAS of Tajikistan*

The results of studies of hydrochloric acid decomposition of magnetite ore from the Kharangon deposit in Tajikistan are presented. It has been established that when the duration of the acid treatment process is 90 minutes; concentration of hydrochloric acid – 20-25 wt%; leaching temperature – 80-90°C, the degree of extraction of iron (III) oxide is achieved up to 80.3%.

**Key words:** magnetite ore, leaching, magnetic sorbent, decomposition, extraction.

### Сведения об авторах:

1. **Досаев Сухробджон Махмадбиллолович** – соискатель, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, лаборатория комплексной переработки минерального сырья и промышленных отходов. E-mail: suhrob.dosaev@mail.ru;
2. **Нематуллоев Камариддин Изатуллоевич** – докторант PhD, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, лаборатория комплексной переработки минерального сырья и промышленных отходов. E-mail: 909117111@mail.ru;
3. **Курбонov Амиршо Сохибназарович** – доктор химических наук, Филиал Агентства по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана г.Бохтар, директор. E-mail: amirsho\_77@mail.ru;
4. **Рахимов Илхомиддин Мирзоевич** – кандидат технических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, заведующий лабораторией комплексной переработки минерального сырья и промышленных отходов. E-mail: rahimzod\_74@mail.ru;
5. **Мирсаидов Улмас Мирсаидович** – доктор химических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, главный научный сотрудник лаборатории комплексной переработки минерального сырья и промышленных отходов. E-mail: ulmas2005@mail.ru.



УДК 554.476:661.183.123.2

Специальность: 1.4.4 – Физическая химия

Д.С.Мухиддинов, С.Халикова,

академик НАН Таджикистана Д.Х.Халиков

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОРБЦИОННЫХ ЦЕНТРОВ ПЕКТИНОВЫХ ПОЛИСАХАРИДОВ МЕТОДОМ ИК-СПЕТРОСКОПИИ

*Национальная академия наук Таджикистана,**Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана*

*В рамках изучения сорбционных свойств пектиновых полисахаридов в отношении ионов двухвалентных металлов, сталкивались с одним интересным фактом о сорбционной ёмкости пектиновых полисахаридов. Выяснено, что величина абсолютного значения сорбции ( $q_m$ ), найденная из экспериментов, и значение  $q_m$ , рассчитанное по данным содержания остатков галактуроновой кислоты, выше более чем в два раза. Исходя из этого, целью данной работы явилось исследование сорбционных центров пектиновых полисахаридов ИК-спектроскопическим методом. Методом ИК-спектроскопии определены сорбционные центры пектиновых сетчатых полисахаридов корзинки подсолнечника. Установлено, что при реакции ионного обмена функциональных групп полимера с ионами металлов участвуют не только карбоксильные, но и гидроксильные группы. Высокое значение сорбции пектиновых полисахаридов в процессе сорбции объясняется содержанием различных функциональных групп полимера.*

**Ключевые слова:** *пектиновые полисахариды, микрогель, ионы металлов, значение сорбции, ИК-спектроскопия.*

### В в е д е н и е

В мономерных звеньях пектиновых веществ (ПВ) имеются различные отличающиеся по своей природе, функциональные группы (такие, как гидроксильные группы, карбоксильные группы, их металлосвязанные и этерефицированные производные), которые проявляют различные электронно-донорные свойства, в результате чего происходит образование множества полимерных комплексов, имеющих в своём составе низкомолекулярные соединения и ионы [1]. Исходя из этих свойств пектиновых полисахаридов, изучены сорбционные свойства пектиновых полисахаридов различными методами, в различных условиях, с различными ионами металлов. В работах [2,3] приведены величины сорбции пектиновых полисахаридов по отношению к ионам меди в условиях статического и динамического режимов для образцов микрогель корзинки подсолнечника в сухом и предварительно набухшем состоянии со значением сорбции ( $q_m$ ), соответствующим 4.75мэк/г, 5.21мэк/г, 5.26мэк/г и 6.29 мэк/г. Определены значение сорбции в зависимости от природы катионов кобальта  $Co^{2+}$  и цинка  $Zn^{2+}$ ,

*Адрес для корреспонденции:* Мухиддинов Диловар Сайфуллоевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни 299/2, Институт химии им. В.И.Никитина НАНТ. E-mail: dilo-0392@mail.ru.

равные 8.62 мэк/г и 4.55 мэк/г соответственно [4], концентрации ионов меди во внешнем растворе [5] и ацетатном буфере [6]. В рамках изучения сорбционных свойств пектиновых полисахаридов в отношении ионов двухвалентных металлов сталкивались с одним интересным фактом о сорбционной ёмкости пектиновых полисахаридов. Абсолютное значение сорбции ( $q_m$ ), найденное в ходе экспериментов, и значение  $q_m$ , рассчитанное по данным содержания остатков галактуроновой кислоты ( $q_m=2.82$  мэк/г), различаются более чем в два раза. Предполагается, что помимо протекания процесса сорбции, может происходить восстановление ионов меди в присутствии слабых восстановителей макромолекулы пектиновых полисахаридов, таких, как гидроксильные, карбоксильные и карбонильные группы, с последующим образованием заряженных кластеров различного размера [7]. Для уяснения предположенной гипотезы о восстановлении ионов меди, проводилось извлечение ионов меди из полисахаридных комплексов с помощью электролита хлорида натрия растворами различной концентрации [8]. Увеличивая ионную силу внешнего раствора электролита, повышалась степень извлечения ионов меди из комплексов, при этом максимальное извлечение ионов меди не превышает 80% от общего количества ионов в комплексе. Это подтверждает возможность образования нано-частиц меди в комплексе, однако, набухаемость пектиновых полисахаридов (5.1 г/г) после извлечения ионов противоречит данному подтверждению, так как набухаемость полимера не достигнет своего исходного значения (10.32 г/г).

Исходя из этого, целью данной работы явилось определение сорбционных центров пектиновых полисахаридов ИК-спектроскопическим методом, изучение роли отдельных функциональных групп полимера на формирование структуры металлокомплекса, установление возможности образования связей между отдельными функциональными группами полимера с катионами поливалентных металлов.

#### **Материалы и методы исследования**

Объектами исследования явились комплексы пектиновых полисахаридов (выделенные по методике [9] и характеризующиеся содержанием остатков галактуроновой кислоты и степенью её этерификации, кислотным и эфирным числом, содержанием ионов кальция, а также степеням набухания) с катионами металлов: МГ-Ca, МГ-Cu, МГ-Na, МГ-UO<sub>2</sub>, полученным при реакции ионного обмена реакционноспособных функциональных групп полимера катионами металлов по схеме (рисунок 1). Для анализа соответствующих связей использовали ИК-спектрофотометр с Фурье-преобразованием (FT-IR Spectrum 65 (Perkin Elmer)) с использованием приставки нарушенного полного внутреннего отражения (НПВО, attenuated total reflection ATR).

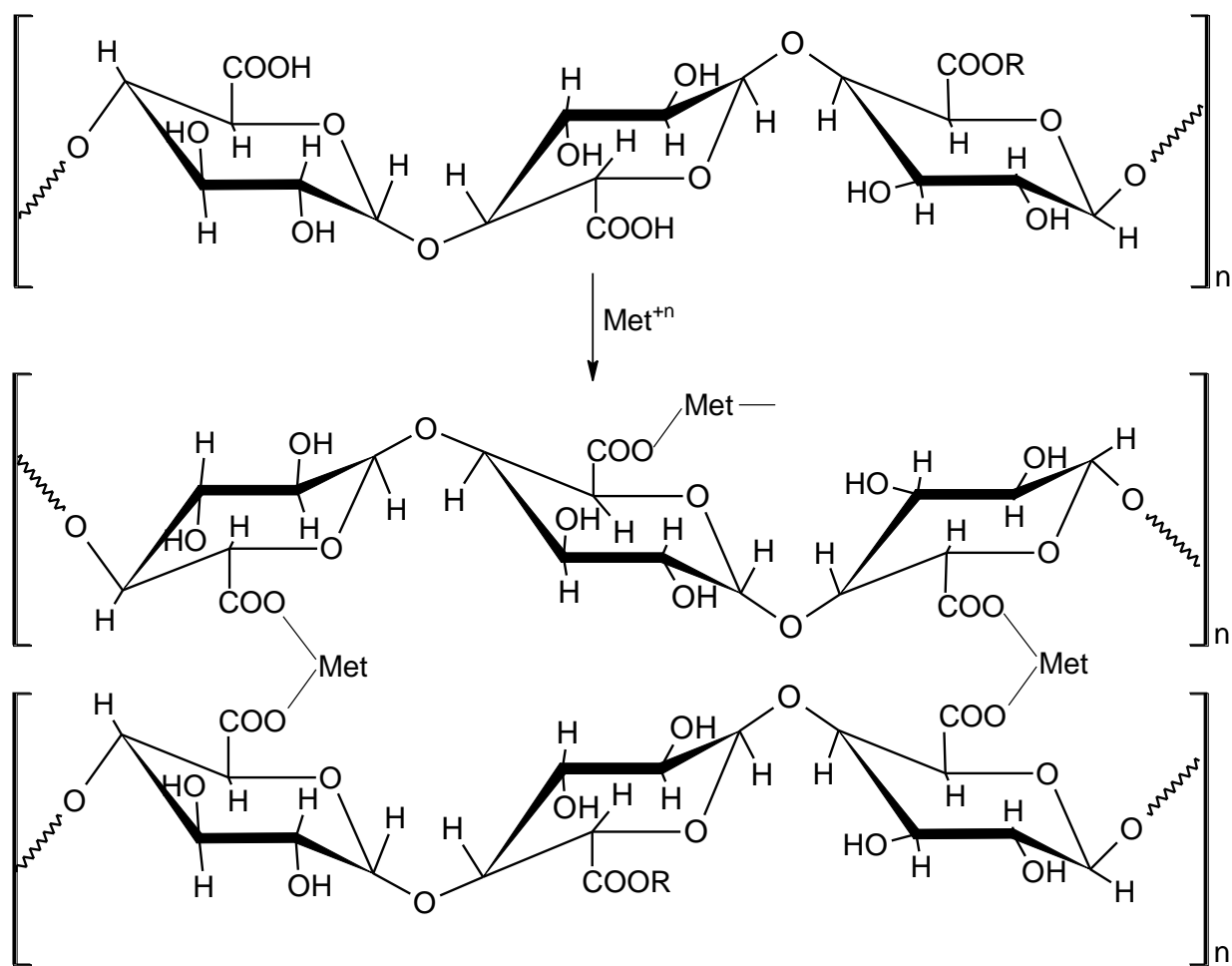
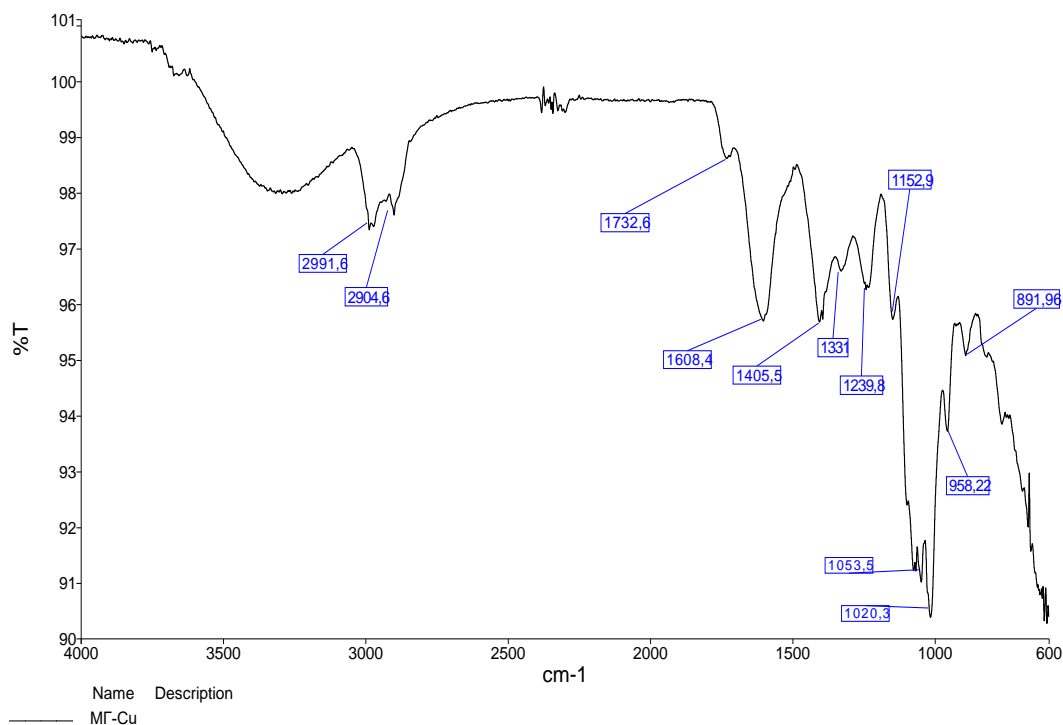


Рис. 1. Схема образования комплексов пектиновых полисахаридов с ионами поливалентных металлов, где: Met – катионы металла, R – CH<sub>3</sub>.

### Результаты и их обсуждение

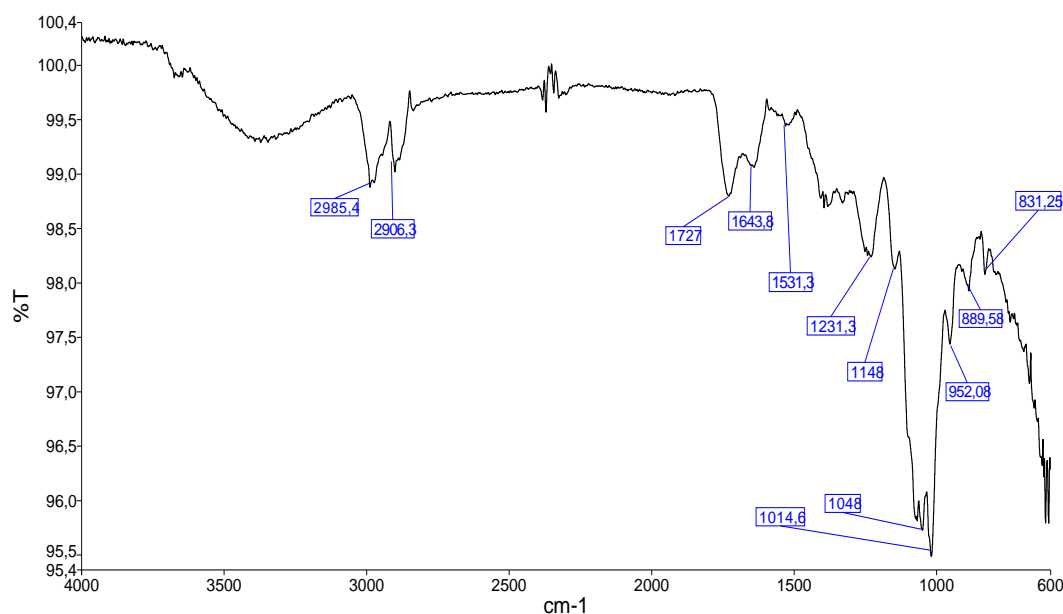
ИК-спектральное исследование металлокомплексов природных полимеров осуществили на спектрофотометре FT-IR Spectrum 65 (Perkin Elmer) с использованием порошкообразных образцов при частоте от 4000 до 600 см<sup>-1</sup>.

На основании химической природы функциональных групп пектиновых полисахаридов (-ОН, -О-, -СО-, -СООН, -СООСН<sub>3</sub>), содержащих не поделенные пары электронов на атомах кислорода, предполагается, что сорбция катионов металлов из растворов может осуществляться за счёт комплексообразования с участием электронодонорных групп природных сорбентов. В ИК-спектре полосы поглощения в областях 956, 886 и 830 см<sup>-1</sup> указывают на наличие 1-4 гликозидной связи, которая занимает α-конфигурацию между остатками уроновых кислот. Наличие пиранозного цикла подтверждается частотами полос поглощения при 1013 и 1050 см<sup>-1</sup>. Наблюдается слабый пик в области 1151 см<sup>-1</sup> указывающий на координационное взаимодействие ионов металлов с ОН-группой. Часть карбоксильных групп имеет остатки метоксильных групп, что проявляется полосой при 1370 см<sup>-1</sup>.



**Рис. 2.** ИК-спектр комплекса пектиновых полисахаридов с ионами меди.

Интенсивные полосы при  $1602\text{ см}^{-1}$  и при  $1407\text{ см}^{-1}$  (рис. 2.) показывают колебания ионизированной карбоксильной группы, что характерно для солей пектиновых полисахаридов. В ИК-спектре исходного пектина [10] наблюдается валентное колебание в области  $1747\text{ см}^{-1}$ , характерное для свободной карбоксильной группы полимера. На рис. 3 показан интенсивный пик в области  $1727\text{ см}^{-1}$ , соответствующий свободной карбоксильной группе полимера. В этой же области спектра медного комплекса достаточно слабый пик. Это объясняется тем, что комплексы пектиновых полисахаридов с уранил-ионами приведены в кислой среде, что обеспечивает восстановление ионного равновесия между ионами водорода карбоксильной группы и уранил-ионами.



**Рис. 3.** ИК-спектр комплекса пектиновых полисахаридов с уранил-ионами.

### В ы в о д ы

Из полученных данных можно сделать вывод, что среди возможных механизмов связывания катионов металлов природными сорбентами на основе пектиновых полисахаридов имеют место быть ионный обмен с участием карбоксильных и гидроксильных групп, комплексобразование с участием гидроксильных, карбоксильных и карбонильных групп полимера, а также физическая адсорбция. При этом взаимодействие пектиновых полисахаридов с ионами поливалентных металлов может осуществляться с образованием или без образования водородных связей. Установлен, наиболее вероятный механизм процесса, выяснена природа сорбционных центров и особенности их взаимодействия с ионами металлов. Сочетание сорбции со знанием состояния ионов металлов в растворах позволяет обоснованно подходить к решению конкретных практических задач (например, очистки промышленных сточных вод, подготовки воды или очистки пищевых систем), выбору оптимальных условий сорбции и материалов, отвечающих таким требованиям, как дешевизна и доступность сырьевой базы, высокая скорость и селективность поглощения ионов металлов.

*Поступило 11.12.2023 г.*

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мирзоева Р.С., Мухиддинов Д.С., Авлоев Х.Х., Халиков Д.Х. Сорбция ионов металлов пектиновыми гидрогелями. – Изв. АН РТ, Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2019, №4(149), с. 68-74.
2. Халиков Д.Х., Мирзоева Р.С., Бободжонова Г.Н., Горшкова Р.М., Халикова С., Авлоев Х.Х. О сорбционной активности пектиновых полисахаридов по отношению к ионам металлов – ДАН РТ, 2017, т.60, №7-8, с. 333-341.
3. Мухиддинов Д.С., Саидова Р.С., Халикова С., Халиков Д.Х. Сорбция ионов меди пектиновыми гидрогелями в динамическом режиме. – XVI Нумановские чтения, Душанбе, 2021, с. 128-131.
4. Саидова Р.С., Мухиддинов Д.С., Халикова М.Д., Халиков Д.Х. Изотерма сорбции ионов цинка и кобальта пектиновыми гидрогелями корзинки подсолнечника. – Мат. респ. науч.-прак. конф. «Инновационное развитие науки» с участием международных организации. – Душанбе, 2020, с. 149-151.
5. Мухиддинов Д.С. Дегтярев В.А., Халикова С., Махкамов Х.К., Халиков Д.Х. Влияние концентрации ионов меди на сорбционные свойства пектиновых полисахаридов. – Жур. «Молодой ученый», 2022, № 23(418), с. 1-3.
6. Халиков Д.Х., Мирзоева Р.С., Мухиддинов Д.С., Авлоев Х.Х. Сорбция ионов кальция, меди и билирубина пектиновыми гидрогелями – Полимеры в стратегии научно-технического развития РФ "Полимеры-2020". – Сб. тез. Восьмой Всероссийской Каргинской конференции. М., 2020, с. 495.
7. Зезин А.А. Синтез гибридных материалов в матрицах полиэлектролитов: контроль размеров и пространственной организации металлических наноструктур. – Высокомолекулярные соединения. Серия С, 2016, т.58, №1, с.128-141.
8. Мухиддинов Д.С., Халикова С., Махкамов Х.К., Халиков Д.Х. Извлечение ионов меди из комплексов – XVI Нумановские чтения, Душанбе, 2022, с. 241-243.

9. Мухиддинов Д.С., Бобоёров М.Д., Халиков Д.Х. Сорбция ионов урана природными сорбентами на основе пектиновых полисахаридов. – Известия Кабардино-Балкарского государственного университета, т. XIII, № 1, 2023, с. 79-81.

Д.С.Мухиддинов, С.Халикова, Д.Х.Халиков

## МУАЙЯН КАРДАНИ МАРКАЗҲОИ СОРБСИОНИИ ПОЛИСАХАРИДҲОИ ПЕКТИНӢ БО УСУЛИ ИК-СПЕКТРОСКОПӢ

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*Институту химияи ба номи В.И.Никитини Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар доираи тадқиқотҳо, оид ба омӯзиши хосиятҳои сорбсионии полисахаридҳои пектинӣ нисбат ба ионҳои металлҳои дувалента бо як далели ҷолиб дар бораи қобилияти сорбсионии полисахаридҳои пектинӣ дучор шудем. Қимати мутлақи сорбсионӣ ( $q_m$ ), ки аз таҷрибаҳо ба даст оварда шудаанд ( $q_m=6.29$  ва  $q_m=5.21$  мэк/г) аз қимати  $q_m$ , боқимондаҳои кислотаи галактуронӣ ( $q_m=2.82$  мэк/г) беш аз ду маротиба зиёд мебошад. Дар асоси ин, ҳадафи ин кор омӯзиши марказҳои сорбсионии полисахаридҳои пектинӣ бо усули ИК-спектроскопӣ мебошад. Марказҳои сорбсионии полисахаридҳои туршакли пектинии сабадчаи офтобпараст бо усули ИК-спектроскопӣ муайян карда шуданд. Муқаррар карда шудааст, ки ҳангоми мубодилаи ионҳои гуруҳҳои функционалии полимер бо ионҳои металл на танҳо гуруҳҳои карбоксилӣ, балки гуруҳҳои гидроксилӣ низ иштирок мекунанд. Қобилияти баланди сорбсионии полисахаридҳои пектинӣ дар чараёни сорбсия бо мавҷудияти гуруҳҳои гуногуни функционалии полимер шарҳ дода мешавад.

**Калимаҳои калидӣ:** полисахаридҳои пектинӣ, микрогел, ионҳои металл, арзиши сорбсия, ИК-спектроскопия.

D.S.Mukhiddinov, S.Khalikova, D.Kh.Khalikov

## DETERMINATION OF SORPTION CENTERS OF PECTIN POLYSACCHARIDES BY IR SPECTROSCOPY METHOD

*National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*V.I.Nikitin Institute of Chemistry, NAS of Tajikistan*

As part of the study, the sorption properties of pectin polysaccharides in relation to divalent metal ions were faced with one interesting fact about the sorption capacity of pectin polysaccharides. The absolute sorption value ( $q_m$ ) found from experiments ( $q_m=6.29$  and  $q_m=5.21$  meq/g) and the  $q_m$  value calculated from the content of galacturonic acid residues ( $q_m=2.82$  meq/g), which differ by more than two times. Based on this, the goal of this work was to study the sorption centers of pectin polysaccharides using the IR spectroscopic method. The sorption centers of pectic network polysaccharides of the sunflower basket were determined by IR spectroscopy. It has been established that during the ion exchange reaction of functional groups of a polymer with metal ions, not only carboxyl groups, but also hydroxyl groups are involved. The high sorption value of

pectin polysaccharides during the sorption process is explained by the content of various functional groups of the polymer.

**Key words:** *pectin polysaccharides, microgel, metal ions, sorption value, IR-spectroscopy.*

**Сведение об авторах:**

1. **Мухиддинов Диловар Сайфуллоевич** – Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, старший научный сотрудник;
2. **Халикова Саодатхон** – кандидат химических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, ведущий научный сотрудник;
3. **Халиков Джурабай Халикович** – доктор химических наук, заведующий лабораторией.

УДК 55.551.3

Специальность: 1.6.7 – Инженерная геология, мерзлотоведение и грунтоведение

**Ш.А.Файзуллоев, И.С.Оймухаммадзода****ОПОЛЗНЕВАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ТЕРРИТОРИИ ТАДЖИКИСТАНА***Национальная академия наук Таджикистана,**Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана А.Р.Файзиевым 16.05.2024 г.)*

*В статье анализируются двенадцать факторов оползнеобразования с целью выявления пространственных закономерностей распределения оползневых явлений Таджикистана. Расчёты по выявлению взаимоотношений основаны на применении модифицированного метода соотношения частотности. Кроме того, на основе созданной модели восприимчивости территории Таджикистана к возникновению оползней выявлены склоны с наибольшей и с наименьшей предрасположенностью.*

**Ключевые слова:** *оползни, восприимчивость, факторы, валидация, закономерность, корреляция, дистанционное зондирование, ROC-анализ.*

Оползни для человека в современном мире далеко не полностью изученный феномен. В связи с этим конкретизация общих пространственных закономерностей развития оползневых явлений в пределах изучаемой территории стимулирует нас к познанию природы оползневых явлений. Для прогнозирования возможных зон возникновения оползневых явлений необходимо, в первую очередь, выявить условия их возникновения. Определение условий возникновения оползневых явлений должно производиться на основе анализа максимально возможного количества существующих оползневых явлений [1,2,6]. Данная потребность обусловлена необходимостью использования статистических методов для выявления коррелятивов. При применении качественных и полуколичественных методов карта инвентаризации обычно не используется, но она необходимо для оценки точности конечной модели.

Независимо от используемой методики (количественные, полуколичественные и качественные методы) юридическая часть потребности нашей работы требует наличие списка оползневых явлений. Отсутствие карты инвентаризации оползневых явлений полностью ограничивает нас от применения ROC-анализа, пока что самого широко используемого метода оценки работоспособности прогнозирующей карты, которая в нашем случае является карта восприимчивости к возникновению оползней. Действие в данном виде анализа оценки точности модели заключается в сопоставлении конечной карты с картой известных нам оползневых явлений [3,6,7].

Главной целью данной работы является выявление пространственных закономерностей оползневых явлений и на основе выявленных статистических связей создание полноценной карты восприимчивости территории республики Таджикистан к возникновению оползней.

**Материалы и метод исследования**

При изучении экзодинамических процессов широкое применение нашли космические снимки [3,8,9]. Эффективность этих данных заключена в обзорности и авто-классификации. При наличии

---

**Адрес для корреспонденции:** *Файзуллоев Шохнаваз Абдукодирович, 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ. E-mail: shohnavaz.faizullov@mail.ru*



космических снимков такая проблема, как изучение труднодоступных не покоряемых горных районов, полностью исчезает. Возможность дешифровки оползневых явлений при применении космических снимков Google Earth pro очень хорошая. Такую возможность обуславливает нам высокое качество видимости рельефа на этих снимках, где легко и без каких-либо дополнительных работ можно определить оползневые явления по их морфологическим признакам [2].

Дешифровка космических снимков позволила, в дополнение уже существующих архивных данных по оползневых явлениям, создать совершенную карту инвентаризации оползневых явлений территории Таджикистана, которая включает в более 2800 оползней. Эти оползни в случайном порядке были разделены на две группы-оползни для валидации и оползни для обучения (рис. 1).

Модифицированный метод соотношения частотности является идеальным статистическим методом, который полностью способен решить вышеизложенные задачи в региональном масштабе. Данный метод был предложен авторами работ [4,5] и расчёт выявления весов факторов оползнеобразования осуществляется по нижеприведённой формуле.

$$FR_i = \frac{N_{cell}(S_i) / N_{cell}(N_i)}{\sum N_{cell}(S_i) / \sum N_{cell}(N_i)}$$

$FR_i$  – соотношения частотности;

$N_{cell}(S_i)$  – количество пикселей с оползнями в классе;

$N_{cell}(N_i)$  – количество пикселей в классе;

$\sum N_{cell}(S_i)$  – общее количество пикселей с оползнями на карте;

$\sum N_{cell}(N_i)$  – общее количество пикселей на карте.

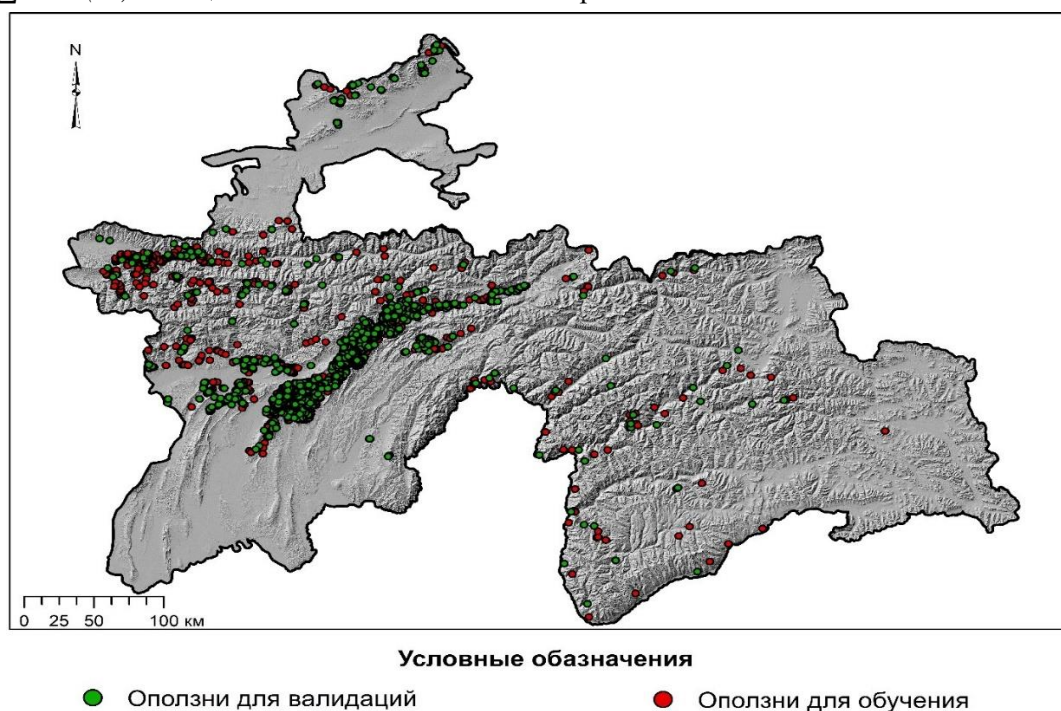


Рис. 1. Оползневые явления Таджикистана

### Результаты исследования

Для создания карты восприимчивости к возникновению оползней были анализированы двенадцать факторов оползнеобразования (рис. 2).

Если посмотреть на рис. 2, то по первому графику видно, что по мере повышения количества атмосферных осадков наблюдается повышение значения соотношения частотности.

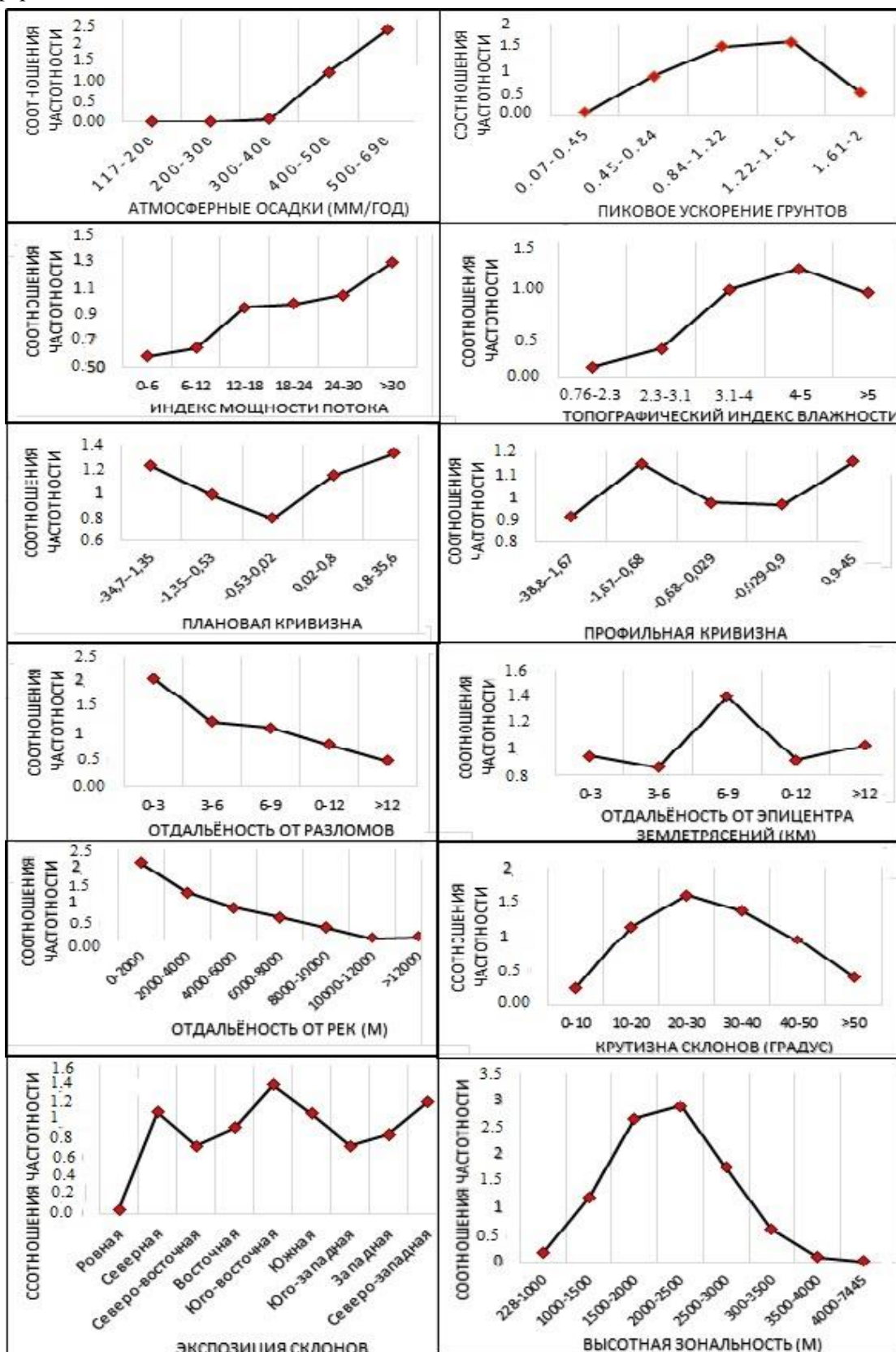


Рис. 2. Результаты выявления взаимоотношения оползневых явлений с факторами их образования

Анализированные факторы в пространственно-интегрированном виде образуют карту восприимчивости территории Таджикистана к возникновению оползней.

Анализ влияния сейсмичности, в качестве которой было выбрано влияние пикового ускорения грунтов на развитие оползней, показывает, что к высоко корреляционным классам относятся лишь третий и четвертый классы карты пикового ускорения грунтов. Последний класс этой карты не занимает самое последнее место, однако значение соотношения частотности в нём ниже единицы, что, согласно некоторым исследователям, рассматривается как слабо корреляционное значение.

По анализу индекса мощности потока, как и в случае карты распределения количества атмосферных осадков, по мере повышения его значение повышается и значения соотношения частотности. Лишь два последних класса характеризуются как высоко корреляционным.

Согласно нашим анализам соотношения частотности, больше всего оползневые явления пользуются распространением в четвёртом классе карты топографического индекса влажности. Третий и пятый классы этого фактора, имея почти одинаковое значение соотношения частотности с четвёртым классом занимают второе-третье места, однако их значения, в отличие от четвёртого класса, являются ниже единицы, как и первый и второй классы.

По анализу плановой кривизны выявлено, что наибольшие значения соотношения частотности наблюдаются в случае максимальной вогнутой и максимально выпуклой формы рельефа. Результат анализа соотношения профильной кривизны имеет чуть другую картину. Здесь максимальное значение наблюдается во втором и последнем классах карты профильной кривизны.

Раздробленность горных пород вблизи разломов играет большую роль для развития оползневых явлений. Доказательством этого являются результаты наших исследований. Значение соотношения частотности превышает единицу не только в первом классе, но и во втором и третьем классах.

Отдалённость от эпицентра землетрясений не оправдала ожидания в связи с тем, что оползневые явления в первом классе этого критерия имеют слабую корреляцию. Лишь у двух из пяти классов, третьем и пятом, значение соотношения частотности превышает единицу.

Обнаружено, что оползневые явления, предназначенные для обучения, в основном базируются в максимальной близости от рек. Значение соотношения частотности, превышающее единицу в данном анализируемом факторе, наблюдается лишь в первом и втором классах отдалённости от рек.

Все вышеизложенные закономерности в комбинации со склонами юго-восточной ориентации с углами наклона от 20 до 30° градусов составляют самые предрасположенные участки к возникновению оползней.

Все выявленные пространственные закономерности оползневых явлений служат нам как климатические, морфометрические и геологические предпосылки будущих зон возникновения оползневых процессов.

Интегрированная форма всех взвешенных факторов оползнеобразования представляет собой карту восприимчивости территории Таджикистана к возникновению оползней (рис. 3). Созданная карта для территории Таджикистана является уникальной картой восприимчивости к возникновению оползней. Применение двенадцати факторов оползнеобразования, с одной стороны, обуславливает уникальность, а с другой – точность карты.

Главной задачи моделирования восприимчивости к возникновению оползней является выявление перспективных зон возникновения оползней. Безусловно, прогнозирование вероятности возникновения оползней ближайшего или отдалённого будущего на территории Таджикистана на основе выявленных пространственных закономерностей служит нам фундаментом для реализации практически всех стратегических планов нашей Республики. Несмотря на то, что созданная модель не имеет временную привязку, в мировой практике она имеет очень важное значение, поскольку пока не существует идеальных оперативных, краткосрочных, среднесрочных и долгосрочных методов прогнозирования оползней.

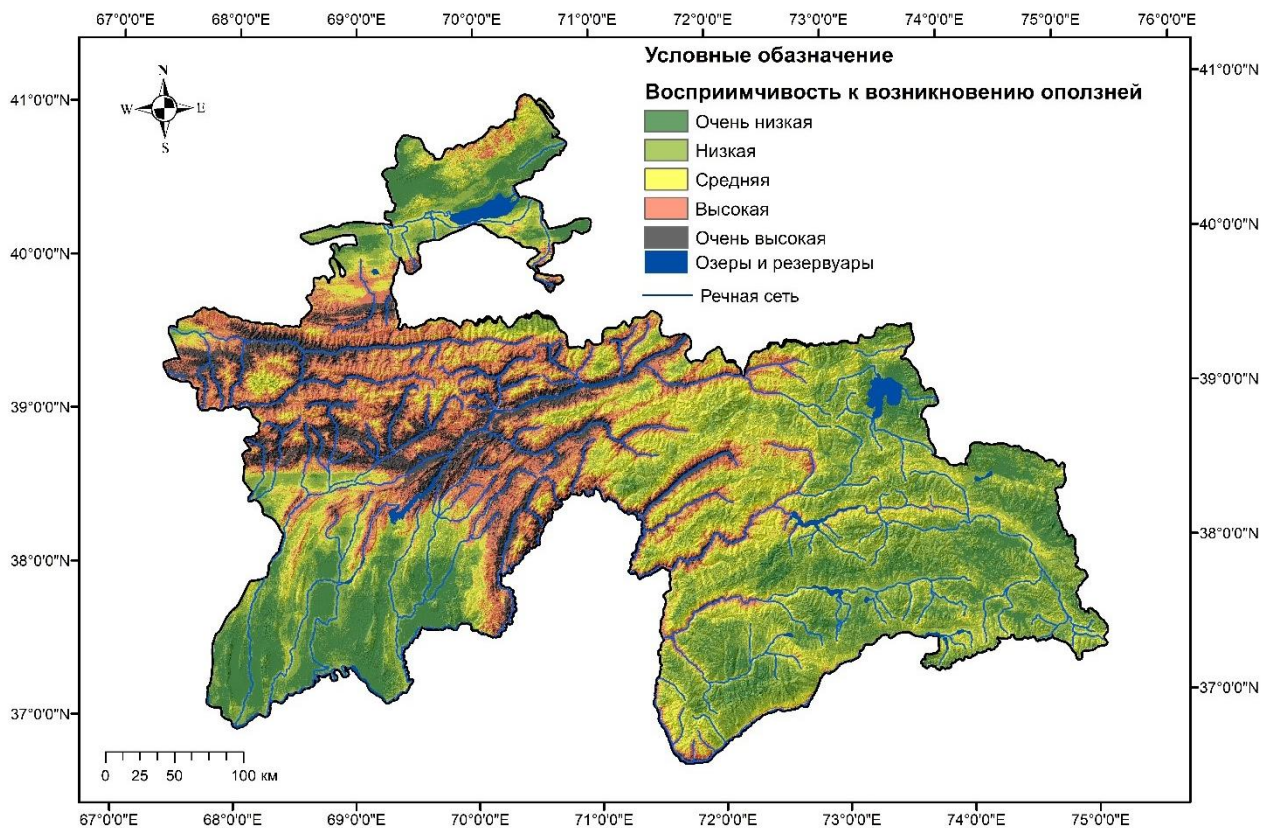


Рис. 3. Карта восприимчивости территорий Таджикистана к возникновению оползней

**На основе результатов исследований можно сделать следующие выводы:**

- атмосферные осадки и индекс мощности потока – это факторы, которые имеют самые высокие веса в их максимальных значениях. По отношению к другим факторам такая закономерность не наблюдается, и оползневые явления распространены по их показателям по-разному.

- по результатам моделирования восприимчивости к возникновению оползней видно, что большая часть центрального Таджикистана имеет высокую и очень высокую восприимчивости к возникновению оползней. В Юго-Западном и Юго-Восточном Таджикистане, независимо от того, что они имеют достаточно огромную территорию площадь с высокой и очень высокой восприимчивостью не очень велика. Большая часть их площади характеризуется очень низкой и низкой восприимчивостью. Причинами слабой подверженности Центрального и Юго-Восточного инженерно-геологических регионов Таджикистана являются, главным образом, незначительная крутизна склонов, климатические

условия и литология. Большая часть Юго-Восточного инженерно-геологического региона Таджикистана покрыта ледниками, где развитие оползневых процессов практически невозможно. Кроме того, в этой части Таджикистана в основном развиты скалистые склоны, что является неблагоприятным условием для накопления рыхлых масс. Однако наличия рыхлых горных пород недостаточно для развития оползней, и Юго-Восточный инженерно-геологический регион тому пример.

Северный инженерно-геологический регион – единственный регион Таджикистана, где отсутствует класс с очень высокой восприимчивостью. Северо-Западный инженерно-геологический регион Таджикистана в основном охвачен зонами очень низкой и низкой восприимчивости.

*Поступило 14.12.2023 г.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mukhammadzoda S., Shohnavaz F., Ilhomjon O., Zhang G. Application of Frequency Ratio Method for Landslide Susceptibility Mapping in the Surkhob Valley, Tajikistan. – Journal of Geoscience and Environment Protection, 2021, №9, с.168-189. DOI: 10.4236/gep.2021.912011.
2. Файзуллоев Ш.А., Нарзиев Дж. М., Байгенов Д.Ф., Рахимбекова М.Р., Окилшоев Х.С. Роль инвентаризации оползневых явлений при моделировании восприимчивости к оползням. – Наука и инновация, Таджикский национальный университет, серия геологических и технических наук, 2020, №4, с. 30-35.
3. Рахимбекова М.Р., Файзуллоев Ш.А. Зонирования территории долины реки Гунт по степени восприимчивости к возникновению оползней. – Известия НАНТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2023, №2(191), с. 64-75.
4. Li L., Lan H., Guo C., Zhang Y., Li Q., Wu Y. A modified frequency ratio method for landslide susceptibility assessment. – Landslides, 2017, №14, pp.727-741.
5. Zhang Y., Lan H., Li L., Wu Y., Chen J., Tian N. Optimizing the frequency ratio method for landslide susceptibility assessment: A case study of the Caiyuan Basin in the southeast mountainous area of China. – J. Mt. Sci., 2020, №17, pp.340-357.
6. Schlögel R., Marchesini I., Alvioli M., Reichenbach P., Rossi M., Malet J.-P. Optimizing landslide susceptibility zonation: Effects of DEM spatial resolution and slope unit delineation on logistic regression models. – Geomorphology, S0169555X16306651. (2017). DOI: 10.1016/j.geomorph.2017.10.018.
7. Saravanan S., Istijono B., Jennifer J.J., Abijith D., Sivaranjani S. Landslide susceptibility assessment using frequency ratio technique – A case study of NH67 road corridor in the Nilgiris district, Tamilnadu, India. – IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2021, №708(1), 012017. DOI:10.1088/17551315/708/1/01207.
8. San B. T. An evaluation of SVM using polygon-based random sampling in landslide susceptibility mapping: The Candir catchment area (western Antalya, Turkey). – International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation, 2014, №26, 399-412. DOI: 10.1016/j.jag.2013.09.010.
9. Riaz M.T., Basharat M., Hameed N., Shafique M., Luo J.A. A Data-Driven Approach to Landslide-Susceptibility Mapping in Mountainous Terrain: Case Study from the Northwest Himalayas, Pakistan. – Natural Hazards Review, 2018, №19(4), 05018007. DOI:10.1061/(asce)nh.1527-6996.0000302.

Ш.А.Файзуллоев, И.С.Оймухаммадзода

## ОСЕБПАЗИРИИ ЯРЧИИ ҲУДУДИ ТОЧИКИСТОН

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи АМИ Тоҷикистон*

Дар мақола дувоздаҳ омили пайдоиши ярҷҳо бо мақсади ошкор намудани қонуниятҳои фазогии паҳншавии зухуротҳои ярҷии Тоҷикистон дар онҳо таҳлил карда шудаанд. Ҳисобҳо оид ба муайян кардани муносибат ба истифодаи усули тағирёфтаи таносуби басомадҳо асос ёфтаанд. Илова бар ин, дар асоси модели сохташудаи осебпазирии ҳудуди Тоҷикистон аз ярҷҳо, пастхамиҳои, ки ба пайдоиши ярҷҳо зиёд ва камтмайл дошта, ошкор карда шуданд.

**Калимаҳои калидӣ:** ярҷҳо, осебпазирӣ, омилҳо, валидатсия, қонуният, коррелятсия, тадқиқоти фосилавӣ, таҳлили ROC.

Sh.A.Faizulloev, I.S.Oimhammadzoda

## LANDSLIDE SUSCEPTIBILITY OF THE TAJIKISTAN TERRITORY

*National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*Institute of Geology, Earthquake and Seismology, NAS of Tajikistan*

In the article twelve landslide causative factors are analyzed in order to identify spatial patterns of landslide phenomena distribution of Tajikistan in them. Calculations to identify the relationship are based on the use of the modified frequency ratio method. In addition, based on the created model of the susceptibility of the territory of Tajikistan to the occurrence of landslides, the slopes with the most and least predisposed to landslide occurrence were identified.

**Key words:** landslide, susceptibility, factors, validation, pattern, validation, phenomena, correlation, remote sensing, ROC-analyze.

### Сведения об авторах:

1. **Файзуллоев Шохнаваз Абдукодирович** – Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана, старший научный сотрудник группы геоинформационной системы и дистанционного зондирования;
2. **Оймухаммадзода Илхомджон Султон** – Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана, ведущий научный сотрудник лаборатории полезных ископаемых.  
E-mail: ilhomjon\_55@mail.ru.

УДК 66.01.08.661.48:549.623.91

Специальность:

С.А.Сагторов, Н.А.Наимов\*, А.Муродиён\*, Х.Сафиев,

академик НАН Таджикистана У.М.Мирсаидов

**ТЕХНОЛОГИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕРАБОТКИ ПОБОЧНОГО ПРОДУКТА  
ПРОИЗВОДСТВА ПЛАВИКОВОЙ КИСЛОТЫ С КАОЛИНОВОЙ ГЛИНОЙ  
МЕСТОРОЖДЕНИЯ «ЧАШМА-САНГ»***Национальная академия наук Таджикистана,**Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности**НАН Таджикистана,**\*Государственное учреждение «Научно-исследовательский институт металлургии»**ОАО «ТАЛКО»*

*В статье приведены результаты физико-химических и технологических исследований по переработке побочного продукта производства плавиковой кислоты – смеси кремнефтористоводородной (КФВК) и плавиковой кислот с каолиновой глиной месторождения «Чашма-Санг» и гидроксидом алюминия с целью получения аморфного кремнезёма, фторида алюминия и криолита. Технология переработки смеси кислот протекает в две стадии. Согласно первой стадии, проводится переработка плавиковой кислоты из состава смеси кислот с каолиновой глиной с целью получения раствора фторида алюминия. Во второй стадии после отделения фильтрованием нерастворимого остатка, в фильтрат, содержащий растворенный фторид алюминия и непрореагировавшую с каолиновой глиной КФВК, добавляется гидроксид алюминия, который при взаимодействии с КФВК образует аморфный кремнезём и фторид алюминия. Полученный на обеих стадиях раствор фторида алюминия подвергается кристаллизации с использованием затравки. Криолит получается при взаимодействии образующегося раствора фторида алюминия с раствором фторида натрия.*

**Ключевые слова:** *каолиновая глина, месторождения «Чашма-Санг», фторид алюминия, криолит, плавиковая кислота, кремнефтористоводородная кислота, аморфный кремнезём, производство алюминия.*

С учетом важности подъёма промышленного производства и улучшения социально-экономического состояния населения и создания дополнительных рабочих мест, в Республике Таджикистан приоритетным стратегическим направлением объявлена ускоренная индустриализация страны [1].

Известно, что плавиковую кислоту получают, в основном, при сернокислотном разложении флюорита в реакционной печи, при этом в результате абсорбции тетрафторида кремния, выделяющегося при разложении серной кислотой флюоритового концентрата, содержащего небольшое

---

*Адрес для корреспонденции:* Наимов Носир Абдурахмонович. 734003. Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Х.Хакимзаде, 17, Государственное учреждение «Научно-исследовательский институт металлургии» ОАО «ТАЛКО». E-mail: [nosser2016@outlook.com](mailto:nosser2016@outlook.com), [inmet.talco@mail.ru](mailto:inmet.talco@mail.ru)

количество остаточного кремнезёма [2], образуется побочный продукт – кремнефтористоводородная кислота (КФВК) [3].

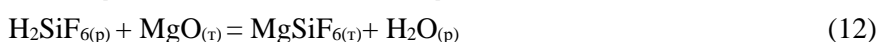
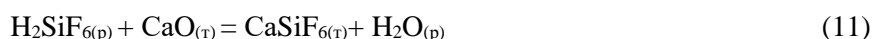
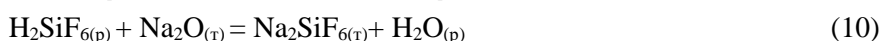
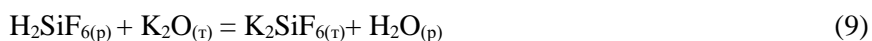
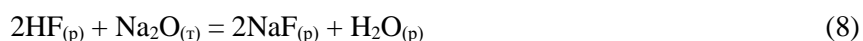
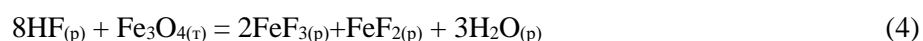
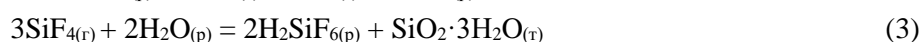
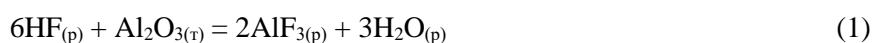
Кроме того, в связи с растущим спросом на удобрения и, как следствие, с запуском все большего и большего количества производственных мощностей по выпуску фосфорной кислоты, необходимость утилизации побочных продуктов (КФВК) возрастает [4-7]. В настоящее время КФВК используется либо для фторирования питьевой воды, либо для производства фторида алюминия, криолита, тетрафторида кремния, фторида натрия и фторсиликатов [8-14].

Важно отметить, что на территории Республики Таджикистан функционирует предприятие по производству плавиковой и серной кислот, а также фтористых солей (ООО «Талко Кемикал») [15]. При максимальной производительности в год образуется приблизительно 4 тыс. т смеси КФВК и плавиковой кислот в качестве побочного продукта, хранение которого требует больших объемов ёмкостей и негативно влияет на экологическую обстановку.

Таким образом, переработка отходов производства химической промышленности и, в частности, производства фтористых солей, с использованием местных ресурсов с точки зрения экономики и экологии является актуальной задачей.

Исходя из этого с целью повышения эффективности переработки смеси КФВК и плавиковой кислот были проведены исследования по технологии комплексной переработки смеси кислот с использованием каолиновых глин месторождения «Чашма-Санг» и гидроксида алюминия в двух стадиях с получение аморфного кремнезёма, фторида алюминия и криолита.

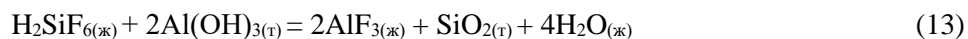
Следует отметить, что на первой стадии оксид алюминия из состава каолиновой глины реагирует с плавиковой кислотой с образованием раствора фторида алюминия (реакция 1). Учитывая разнообразие состава каолиновых глин месторождения «Чашма-Санг», возможно протекание следующих химических реакций.



Исходя из этого, процесс разложения каолиновой глины проводили смесью КФВК и плавиковой кислот при температуре 85°C, продолжительности 20-30 минут, при концентрации плавиковой кислоты 5-10%. При этом степень разложения оксида алюминия из состава каолиновой глины достигла более 80%. Следует отметить, что в этом случае по реакциям 2 и 3 примерно 10-20% оксида кремния (минерала кварца) разлагается плавиковой кислотой и вновь образуется КФВК.



После протекания вышеуказанных реакций пульпа фильтруется для отделения твердой фазы от жидкой и промывается водой до нейтральной среды. На второй стадии в оставшуюся КФВК добавляют гидроксид алюминия и получают раствор фторида алюминия и аморфного кремнезёма (реакция 13).



Исследовано влияние температуры и продолжительности процесса на взаимодействие гидроксида алюминия и КФВК с целью получения раствора фторида алюминия и выделения чистого аморфного кремнезёма, результаты исследований представлены в таблице 1.

Таблица 1

Зависимость извлечения аморфного кремнезёма от температуры и продолжительности процесса

№	Условия обработки		Выход SiO <sub>2</sub> , %	Al(OH) <sub>3</sub> (остаток), %	AlF <sub>3</sub> (примесь), %
	t, °C	τ, мин.			
1	25	15	1.3	94.8	-
2	35	15	7.09	89.1	-
3	45	15	19.3	76.8	-
4	55	15	40.6	55.5	-
5	65	15	74.4	21.6	-
6	75	15	88.2	7.86	-
7	85	15	96.1	0.1	-
8	95	15	92.1	-	4.3
9	85	5	84.6	11.5	-
10	85	10	95.8	0.6	-
11	85	20	95.9	-	0.9
12	85	25	95.8	-	1.4
13	85	30	95.2	-	3.6

Как видно из табл. 1, при изменении температуры от 25 до 85°C протекание реакции 13 ускоряется, причем степень выделения аморфного оксида кремния составляет 96%. При повышении температуры до 95°C начинается кристаллизация раствора фторида алюминия, за счет испарения воды и увеличения концентрации фторида алюминия в растворе, при этом аморфный оксид кремния загрязняется фторидом алюминия. Также при увеличении продолжительности процесса более 15 мин степень выделения аморфного кремнезёма не меняется, а раствор фторида алюминия кристаллизуется, что является нецелесообразным. Таким образом, оптимальные параметры процесса получения очищенного аморфного кремнезёма и раствора фторида алюминия, следующие: температура – 85°C, продолжительность процесса – 15 мин. В таких условиях степень выделения аморфного кремнезёма составляет более 96%. Кроме того, при проведении химического анализа определено, что содержание SiO<sub>2</sub> в составе аморфного кремнезёма составляет более 98%.

После фильтрования аморфного кремнезёма в растворе остается смесь растворенных AlF<sub>3</sub> (реакции 1, 13), FeF<sub>3</sub> и FeF<sub>2</sub> (реакция 4).

Для получения фторида алюминия был изучен процесс кристаллизации смеси растворов фторидов алюминия и железа, результаты исследований приведены в табл. 2.

Таблица 2

Исследование процесса кристаллизации раствора фторида алюминия

№	Условия кристаллизации			Степень извлечения $AlF_3$ , %
	t, °C	τ, мин.	Количество затравки ( $AlF_3$ ), %	
1	2	3	4	5
1	50	60	20	8,2
2	60	60	20	20,7
3	70	60	20	29,8
4	80	60	20	35,8
5	90	60	20	29,6
6	90	120	20	41,7
7	90	180	20	58,7
1	2	3	4	5
8	90	240	20	64,4
9	90	180	10	39,6
10	90	180	30	77,4
11	90	180	40	86,2
12	90	180	50	86,5

Из табл. 2 видно, что при повышении температуры от 50 до 90°C, продолжительности процесса от 60 до 180 минут и количества затравки (порошок  $AlF_3$ ) от 10 до 40% степень кристаллизации раствора фтористого алюминия увеличивается, и составляет в сумме по обоим стадиям более 86%. Следует отметить, что фторид железа растворим, и после фильтрации и промывки кристаллов фторида алюминия фторид железа остаётся в растворе. По результатам химического анализа выявлено, что в составе полученного продукта содержание  $AlF_3$  составляет 98,3%.

Для подтверждения протекания реакций 1 и 13, а также химического анализа был проведен рентгенофазовый анализ (РФА), результаты которого представлены на рис. 1.

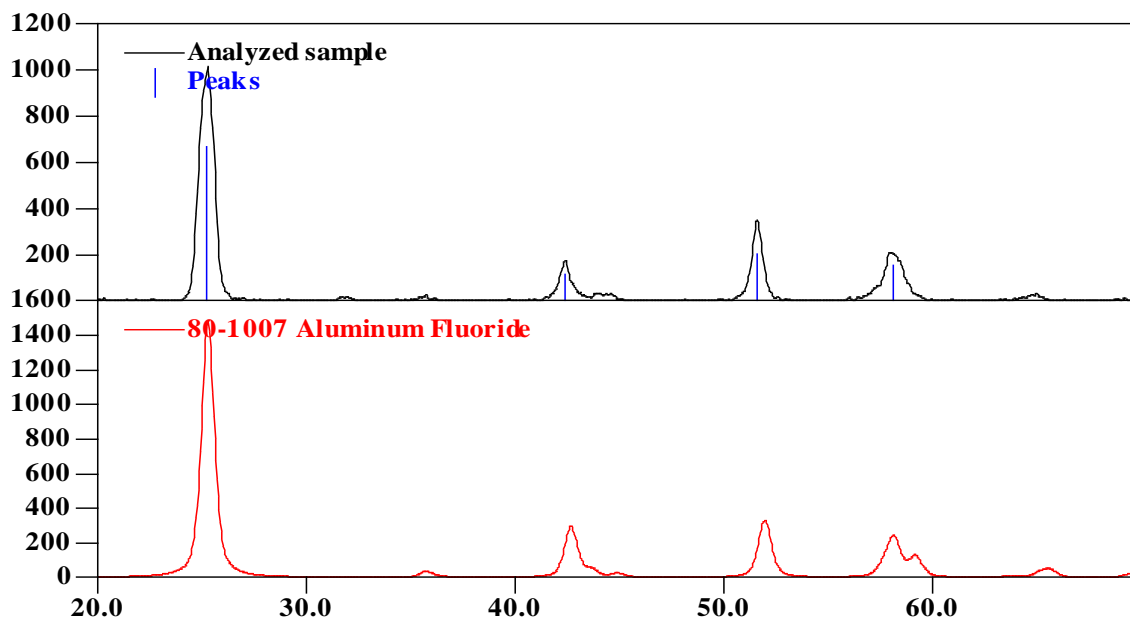


Рис. 1. Рентгенограмма фторида алюминия, полученного при двухстадийной обработке

Как видно из рентгенограммы (рис. 1), данный образец соответствует искусственному фториду алюминия номер по картотеке PDF 80-1007, что подтверждает протекание вышеприведённых реакций,

химический анализ и технологию получения фторида алюминия из смеси КФВК и плавиковой кислот с применением каолиновых глин и гидроксида алюминия в целом. По результатам физико-химических анализов видно, что полученный фторид алюминия соответствует нормативным требованиям ГОСТ 19181-78 (алюминий фтористый технический) и может быть использован при производстве алюминия.

Также с целью получения криолита был изучен процесс взаимодействия образующегося раствора фторида алюминия с раствором фторида натрия. Необходимо отметить, что фторид натрия был получен из смеси КФВК и плавиковой кислот с применением гидроксида натрия.

При взаимодействии раствора фторида алюминия с раствором фторида натрия протекает следующая реакция (реакция 14).



Было изучено возможное влияние температуры, продолжительности процесса и дозировки раствора фторида натрия на степень извлечения криолита в лабораторных условиях, и результаты исследований представлены в табл. 3.

Таблица 3

Влияние различных параметров на степень извлечения криолита из раствора фторида алюминия

№	Влияющие параметры			Степень извлечения криолита, %
	t, °C	τ, мин.	D <sub>NaF</sub> , %	
1	25	15	100	93.72
2	45	15	100	92.64
3	65	15	100	92.27
4	85	15	100	92.23
5	25	5	100	93.85
6	25	25	100	92.47
7	25	35	100	92.21
8	25	15	80	78.63
9	25	15	90	87.81
10	25	15	110	93.81
11	25	15	120	93.87

Как видно из табл. 3, повышение температуры с 25 до 85°C и продолжительности процесса от 5 до 35 мин не изменило существенно степень извлечения криолита, которая составляет более 92%. Однако при низкой температуре образуются относительно мелкие частицы криолита, что затрудняет фильтрование. При изменении дозировки раствора фторида натрия от 80 до 90% степень выделения криолита изменяется от 78 до 87%, что связано с недостатком фторида натрия от стехиометрии. Однако при увеличении дозировки от 110 до 120% степень извлечения криолита остается неизменной и наблюдается образование минерала хиолита, что является нецелесообразным. Поэтому оптимальными параметрами данного процесса являются: температура 65-85°C, продолжительность процесса 5-15 мин, дозировка раствора фторида натрия 100% по стехиометрическому расчету. При этом степень извлечения криолита составляет более 92%.

В результате проведения химического анализа определено, что в составе полученного криолита содержатся (масс. %): 30.9 Na, 13.5 Al, 54.1 F.

Для подтверждения химического состава и определения минералогического состава полученного продукта был проведен РФА, результаты которого представлены на рис. 2.

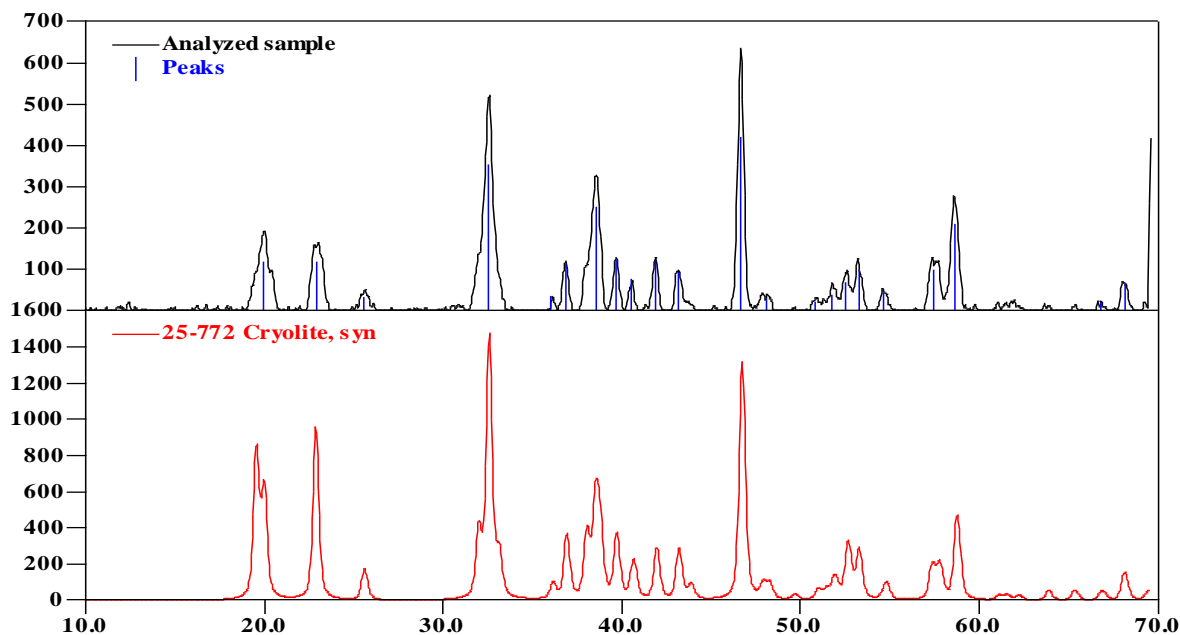


Рис. 2. Рентгенограмма криолита, полученного из растворов фторида алюминия и натрия

Как видно из рентгенограммы (рис. 2) практически все найденные линии принадлежат минералу криолит, номер по картотеке PDF 25-772, что подтверждает химический состав и протекание реакции 14. Полученный криолит по своему химическому и минералогическому составу соответствует нормативным требованиям ГОСТ 10561-80 и может быть использован при производстве алюминия.

Таким образом, данная технология позволяет перерабатывать плавиковую кислоту из состава КФВК с каолиновой глиной месторождения «Чашма-Санг» и снизить количество импортного гидроксида алюминия в технологии производства фтористого алюминия. Данная технология экономически и экологически выгодна за счет утилизации смеси КФВК и плавиковой кислот с применением местных глиноземсодержащих руд.

Поступило 15.11.2023 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эшонкулова Л. Четвертая цель – индустриализация. – URL: [http://www.narodnaya.tj/index.php?option=com\\_content&view=article&id=12647:2020-12-24-05-19-35&catid=53:economika&Itemid=58](http://www.narodnaya.tj/index.php?option=com_content&view=article&id=12647:2020-12-24-05-19-35&catid=53:economika&Itemid=58). 24.12.2020
2. Позин М.Е. Технология минеральных солей (удобрений, пестицидов, промышленных солей, окислов и кислот), ч. 2, Изд. 4-е, испр. – Л.: Химия, 1974, 768 с. (с. 793-1557).
3. Thomas Dahlke, Olivier Ruffiner, Roderick Cant. Production of HF from H<sub>2</sub>SiF<sub>6</sub>. – Procedia Engineering, 2016, vol. 138, pp. 231-239, ISSN 1877-7058, <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.02.080>.
4. Зайцев В.А., Новиков А.А., Родин В.И. Производство фтористых соединений при переработке фосфатного сырья. – М.: Химия, 1972, 246 с.

5. Se-Won Kim, Woo-Kyun Moon, Hung-Suck Park. Production of Fluorosilicic Acid from Phosphoric Acid Slurry of a Fertilizer Manufacturing Plant. – Journal of the Korea Academia-Industrial cooperation Society, 2012, №13(2), DOI:10.5762/KAIS.2012.13.2.926.
6. Юлдашев Х., Жураев А., Рахмонов О. Методы получения гексафторсиликата натрия из отходящих газов производства фосфорных удобрений (обзор) – Universum: технические науки: электрон. научн. журн., 2020, № 8(77), URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/10648>.
7. Шарипов, Т. В. Переработка фосфоритов Каратау в гексафторосиликат натрия: дис. канд. тех. наук: 05.17.01 – Башкирский государственный университет, Уфа, 2014, 178 с.
8. Исследование и разработка малоотходных производств минеральных солей. Вып. 57 / УНИХИМ; отв. ред. К.В.Ткачев. – Свердловск: УНИХИМ, 1984, 144 с.
9. Dreveton A. Manufacture of Aluminum Fluoride of High Density and Anhydrous Hydrofluoric Acid from Fluosilicic Acid. – Procedia Engineering, 2012, №46, pp. 255-265.
10. Sarawade P.B. et al. Recovery of a high surface area mesoporous silica from waste hexafluorosilicic acid (H<sub>2</sub>SiF<sub>6</sub>) from fertilizer industry. – Journal of hazardous materials, 2010, №173, pp. 576-580.
11. Туманов В.В., Островский С.В., Старостин А.Г.. Проблема переработки кремнефтористоводородной кислоты на базовые фторсодержащие продукты. – Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Химическая технология и биотехнология, 2017, № 1, с. 138-148.
12. Т.И.Мызовская, С.Р.Масакбаева. Повышение качества фторсиликата натрия. – Наука и техника Казахстана, 2020, № 4, ISSN 1680-9165. <https://doi.org/10.48081/UGRM6297>
13. Д.И.Шаяхметов, А.Г.Мустафин, Т.В.Шарипов. Переработка фторокремниевой кислоты с получением фторида натрия. – Башкирский химический журнал, 2013, т. 20, № 2.
14. Мамченков Е.А., Прокофьев В.Ю. Получение силиката натрия из модифицированного силикагеля, побочного продукта фторида алюминия. – Изв. вузов. Химия и хим. технология, 2019, т. 62, вып. 3, с. 89-93.
15. Саттаров И. Национальное достояние Таджикистана. К 45-летию Таджикской алюминиевой компании. 2020, 31 марта, <https://asiaplustj.info/ru/news/tajikistan/society/20200331/natsionalnoe-dostoyanie-tadzhikistana-k-45-letiyu-tadzhikskoi-alyuminievoi-kompanii>

С.А.Саттаров, Н.А.Наимов\*, А.Муродиён\*, Х.Сафиев, У.М.Мирсаидов

**ТЕХНОЛОГИЯ И КОРКАРДИ КОМПЛЕКСИИ МАҲСУЛОТИ ИЛОВАГИИ  
ИСТЕҲСОЛИ КИСЛОТАИ ФТОРИД БО ГИЛҲОИ КАОЛИНИ КОНИ  
“ЧАШМА-САНГ”**

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии АМИ Тоҷикистон,*

*\*МД “Паёмуҳишгоҳи илмию таҳқиқотии металлургия”-и ҶСК “Ширкати Алюминийи Тоҷик”*

Дар мақола натиҷаҳои таҳқиқоти физикавӣ ва технологияи коркарди маҳсулоти дуҷумдараҷаи истеҳсоли кислотаи фторид – омехтаи кислотаи гидрогенсилитсийфторид (КГСФ) ва кислотаи фторид бо гилҳои каолини кони “Чашма-Санг” ва гидроксиди алюминий бо мақсади ҳосил намудани оксиди силитсийи аморфӣ, фториди алюминий ва криолит оварда шудааст. Технологияи коркарди

омехтаи кислотаҳо дар ду зина мегузарад. Мувофиқи зинаи аввал коркарди кислотаи фториди таркиби омехтаи кислотаҳо бо гилҳои каолин бо мақсади ҳосил намудани маҳлули фториди алюминий гузаронида мешавад. Дар асоси зинаи дуюм пас аз поилоиши қисми ҳалнашаванда, ба болои филтрат, ки аз маҳлули фториди алюминий ва КГСФ-и бо гили каолин ба реаксия наарафта иборат мебошад, гидроксиди алюминий илова шуда, зимни боҳамтаъсиркуни бо КГСФ таҳшини оксиди силитсийи аморфӣ ва маҳлули фториди алюминий ҳосил мешавад. Фториди алюминий бо ҳарду зина ҳосилшуда зимни иловаи хокаи фториди алюминий кристаллизатсия карда мешавад. Криолит бошад зимни боҳамтаъсиркуни маҳлулҳои фториди алюминий ва фториди натрий ҳосил карда мешавад.

**Калимаҳои калидӣ:** гили каолин, қони «Чашма-Санг», фториди алюминий, криолит, кислотаи фторид, кислотаи гидрогенсилитсийфторид, оксиди силитсийи аморфӣ, истеҳсоли алюминий.

S.A.Sattorov, N.A.Naimov\*, A.Murodiyov\*, **H.Safiyev**, U.M.Mirsaidov

## TECHNOLOGY OF INTEGRATED PROCESSING OF BY-PRODUCT OF HYDROFLUORIC ACID PRODUCTION WITH KAOLIN CLAY FROM THE CHASHMA-SANG DEPOSIT

*National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*Chemical, biological, radiological, and nuclear safety and security agency, NAS of Tajikistan,*

*\*State Institution «Scientific Research Institute of Metallurgy» JSC «Tajik Aluminium Company»*

In article presents the results of physicochemical and technological research on processing of by-product of hydrofluoric acid production – a mixture of fluorosilicic acid (FSA) and hydrofluoric acid with kaolin clays of “Chashma-Sang” deposit and aluminium hydroxide in order to obtain amorphous silica, aluminium fluoride and cryolite. The technology of acid mixture processing proceeds in two stages. According to the first stage, the processing of hydrofluoric acid composition of acid mixture with kaolin clay is carried out to obtain aluminium fluoride solution. At the second stage after filtration of insoluble residue, in the filtrate containing dissolved aluminium fluoride and unreacted with kaolin clay FSA, aluminium hydroxide is added, which in interaction with FSA forms amorphous silica and aluminium fluoride. The aluminium fluoride solution obtained in both stages is subjected to crystallisation using an inoculum. Cryolite is obtained by interaction of the forming solution of aluminium fluoride with sodium fluoride solution.

**Key words:** kaolin clay, “Chashma-Sang” deposits, aluminium fluoride, cryolite, hydrofluoric acid, fluorosilicic acid, amorphous silica, aluminium production.

**Сведения об авторах:**

1. **Сатторов Субхонали Абдугаффарович** – Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана, докторант PhD по специальности химическая технология неорганических веществ. E-mail: subhon-ali1996@mail.ru.
2. **Наимов Носир Абдурахмонович** – кандидат технических наук, ГУ «Научно-исследовательский институт металлургии» ОАО «Таджикская Алюминиевая Компания» (ГУ «НИИМ» ОАО «ТАЛКО»), директор. E-mail: nosser2016@outlook.com.
3. **Асрори Муродиён** – доктор технических наук, ГУ «НИИМ» ОАО «ТАЛКО», заместитель директора по научной работе. E-mail: murodiyona@talco-s.tj.
4. **Мирсаидов Улмас Мирсаидович** – доктор химических наук, Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана, главный научный сотрудник. E-mail: ulmas2005@mail.ru.

УДК 581.132:577.1

Специальность: 1.5.21 – Физиология и биохимия растений

**В.Г.Калмыкова, М.К.Бохирова, М.Б.Ниязмухамедова, М.М.Саиднабиев,****член-корреспондент НАН Таджикистана Х.А.Абдуллаев****ВЛИЯНИЕ УМЕНЬШЕНИЯ АССИМИЛЯЦИОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА  
СОДЕРЖАНИЕ БЕЛКА В ЛИСТЬЯХ ХЛОПЧАТНИКА***Национальная академия наук Таджикистана,**Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана*

*Установлено, что при дефолиации хлопчатника в сохранившихся на растении листьях снижается синтез белка, что приводит к уменьшению общего содержания белков ферментов. Обнаружено, что снижение белоксинтезирующей активности листьев при уменьшении ассимиляционной поверхности связано со снижением скорости роста оставшихся листьев в период после дефолиации.*

**Ключевые слова:** тонковолокнистый хлопчатник, *Gossypium barbadense* L., лист, содержание белка.

Белки играют ведущую роль в биологическом обмене веществ. Согласно концепциям формальной генетики все свойства и признаки организма определяют синтезируемые ими белки по принципу «один ген - один белок (один полипептид)» и «один белок - один признак». Поэтому любые изменения признаков и свойств в организме прежде всего проявляются в изменениях содержания и активности белков.

В связи с этим целью настоящей работы было изучение содержания белка в листьях хлопчатника после действия абиотического фактора – удаления листьев.

**Материалы и методы исследований**

Материалом для исследования служили растения промышленного сорта тонковолокнистого хлопчатника (*Gossypium barbadense* L.) 9326-В с нулевым типом ветвления селекции Вахшского филиала Института земледелия Таджикской академии сельскохозяйственных наук.

Опыты были заложены на экспериментальном участке Института ботаники, физиологии и генетики растений Национальной академии наук Таджикистана, расположенном в восточной части Гиссарской долины на высоте 830 м над ур. м., согласно агрорекомендациям по выращиванию хлопчатника в Таджикистане [1]. Делянки опыта – четырёхрядковые, десятилуночные, схема посева – 60х30х1, биологическая повторность трёхкратная рандомизированная. Листья для анализов брали у растений с одинаковым уровнем роста и развития.

Разовую дефолиацию (механическое удаление листьев) растений проводили одновременно в двух противоположных направлениях: снизу вверх от семядольного узла и сверху вниз от точки роста.

*Адрес для корреспонденции:* Бохирова Манзура Курбоналиевна. 734017, Республика Таджикистан, Душанбе, ул. Каримова, 27, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана.



В опытных вариантах удаляли 25, 50, 75 и 100% листьев от общего их количества на растениях. Контролем служили растения хлопчатника с сохранением всех сформировавшихся листьев.

Содержание белка определяли по методике, описанной в работе [2]. Для этого навеску 5-6 г листьев хлопчатника выдерживали в морозильнике в течение 30 мин., затем их измельчали и растирали в охлаждённой ступке с добавлением 30 мл холодного 0.1 М трис – HCl буфера (pH-8.5), с кофакторами (154 мг глутатиона и 307 мг ЭДТА на 100 мл буфера). При растирании добавляли капроновый порошок. Полученную кашицу отжимали через 4 слоя марли. Затем измеряли pH полученного гомогената. Для снижения pH добавляли по каплям концентрированный раствор триса до значения pH-7.8-8.0 и центрифугировали гомогенат при 12000 об/мин в течение 20 минут. Осадок выбрасывали, а в супернатанте (экстракте) определяли содержание белка с реактивом Бенедикта на спектрофотометре СФ-26 (Россия) при длине волны 330 нм, предварительно, измерив объём и pH экстракта.

Статистический анализ полученных данных проводили с использованием программы *Microsoft Excel 2010*. Достоверными считали различия при величине *P*, не превышающей 0.05. В таблице приведены среднеарифметические величины и стандартные ошибки из трёх биологических повторностей и трёх параллельных аналитических определений.

### **Результаты исследований и их обсуждение**

Результаты анализа содержания белков в листьях дефолиированных растений хлопчатника представлены в сводной таблице.

Как видно из данных, представленных в таблице, при удалении листьев (25%, 50%, 75% и 100% дефолиация) в фазе бутонизации содержание белков-ферментов в листьях хлопчатника как в расчёте на мг/мл, так и в расчёте на мг/г сырой массы листа достоверно снижалось по сравнению с контролем.

Так, содержание белка по сравнению с контролем снижалось: при 25% дефолиации на 40%, при 50%-ном удалении листьев – на 35%, при 75% дефолиации – на 28%, а при 100% дефолиации – на 40%.

В фазу цветения в листьях хлопчатника, содержание белка снизилось при 25% дефолиации на 29%, при 75% дефолиации – на 20%, а при 100% – на 24%.

В фазу плодоношения в листьях хлопчатника, у которого была проведена 25% -ная дефолиация, наблюдалось снижение содержания белка на 45% по сравнению с контролем. При 50% дефолиации содержание белка снизилось на 16%, а при 75%-ной дефолиации – на 13%, при 100% дефолиации снизилось на 28%, по сравнению с контролем.

В фазу созревания у растений хлопчатника с 25% и 50%-ной дефолиацией содержание белка снизилось на 27% и 32% соответственно по сравнению с контролем. А у растений хлопчатника с 75%-ной дефолиацией содержание белка оказалось совершенно одинаковым с контролем (24.33 мг/мл и 24.67 мг/мл).

По-видимому, по мере роста и развития в растениях начинают развиваться приспособительные процессы. В фазу бутонизации наблюдается замедление процессов синтеза белка, что приводит к значительному снижению его содержания. В фазу цветения обнаруживается постепенная стабилизация процессов синтеза белка и снижение его содержания уже составляет в 1.5 раза меньше, чем в фазу бутонизации по сравнению с контролем.

Наблюдаемые изменения в содержании белка, по-видимому, характеризуют адаптивную реакцию растений хлопчатника, направленную на оптимизацию ростовых процессов.

Анализ содержания белка по фазам развития растений хлопчатника показал, что как у контрольных, так и в опытных растениях, начиная с фазы бутонизации и до конца вегетации наблюдается закономерное снижение содержания белка в листьях. При этом в фазу плодоношения содержание белка в опытных растениях резко снижается (почти в 2 раза) по сравнению с фазой цветения, а в фазу созревания его содержание снижается ещё больше в 2.6 раза.

На протяжении всей вегетации при 75%-ной дефолиации в опытных растениях хлопчатника содержание белка постепенно снижается, а в фазы плодоношения и созревания совершенно одинаково (24.0 мг/мл и 24.33 мг/мл). В варианте со 100%-ной дефолиацией у вновь образовавшихся листьев наблюдается интересное явление: в фазу бутонизации и цветения содержание белка практически одинаково (27.66 мг/мл и 28.33 мг/мл соответственно), а в фазу плодоношения снижается на 30% по сравнению с началом вегетации.

Если сравнить между собой данные по всем вариантам опыта, то можно обнаружить, что на протяжении всей вегетации относительно самое высокое содержание белка имеют опытные растения хлопчатника с 75%-ной дефолиацией. Характерной особенностью этих опытных растений является то, что в конце вегетации именно у этих растений содержание белка оказалось одинаковым с контрольными растениями.

Таким образом, результаты наших опытов показали, что при частичной дефолиации хлопчатника в сохранившихся на растениях листьях происходит снижение содержания белков. Возможно, это связано со снижением активности белоксинтезирующей системы листьев и скорости их роста в период после дефолиации.

Полученные нами экспериментальные данные находятся в некотором несоответствии с данными в литературе. Так, в работах [3,4] было показано, что после частичной дефолиации C<sub>4</sub>- растения у карликового мутанта кукурузы содержание белка в листьях незначительно увеличивается после 3 дней на 12%, 6 дней – на 16.4% и 9 дней – на 23%.

Авторы предполагают, что увеличение содержания белка может быть результатом повышения содержания хлорофилла и, возможно, пластидных белков, включая карбоксилирующие ферменты.

По-видимому, это происходит из-за того, что в первые дни после дефолиации стратегия растительного организма направлена на ликвидацию последствия биотического стресса – потери листьев путём усиления активности ферментов фотосинтеза и повышения синтеза белков.

С другой стороны, это может быть связано с тем, что любое механическое вмешательство (удаление, прищипка, чеканка, обрезка, выламывание и др.), как стрессовое воздействие нарушает координацию и нормальный ход физиолого-биохимических процессов изменяет и существующие морфофизиологические корреляции в растении.

Кроме того, достоверные различия по величине ряда физиологических показателей между контрольными и дефолированными растениями трудно уловить за очень короткий промежуток времени. Их можно фиксировать только при большом количестве биологических и аналитических повторностей и по истечению значительного времени, чаще всего через месяц или в конце вегетации.

Одно из основных препятствий на пути интерпретации данных, полученных при дефолиации состоит в проявлении компенсаторной функции органов, то есть, в интенсификации работы оставшихся листьев, что маскирует истинную картину последствий удаления листьев [5].

И, последнее, следует отметить, что во многих публикациях приведены только разовые измерения и отсутствуют данные за динамикой изменения признака во времени и по фазам развития растений [6].

Подробный анализ трудностей и ошибок, возникающие при использовании метода дефолиации даны в ряде работ [7,8].

Учитывая вышеизложенное в наших опытах признак «содержание белка в листе» у дефолированных растений был изучен через 2 недели после дефолиации растений в различные фазы развития хлопчатника.

Таблица

Содержание белка в листе хлопчатника после разовой дефолиации снизу вверх и сверху вниз в различные фазы развития растений

Варианты опыта	Фаза развития растений							
	бутонизация		цветение		плодоношение		созревания	
	Содержание белка в расчёте на		Содержание белка в расчёте на		Содержание белка в расчёте на		Содержание белка в расчёте на	
	мг/мл	мг/г сырой массы листа	мг/мл	мг/г сырой массы листа	мг/мл	мг/г сырой массы листа	мг/мл	мг/г сырой массы листа
Контроль	46.33±4.63	182.66±20.17	37.0±0.57	185.0±2.88	27.66±0.33	138.33±4.40	24.67±1.45	123.33±7.26
25%	28.0±2.08	140.0±12.01	26.33±1.85	131.66±13.01	15.33±0.88	76.66±4.40	18.0±0.5	90.0±2.5
50%	30.33±0.66	151.66±0.51	34.00±2.60	156.33 ±11.67	23.33±1.20	116.67±7.26	16.83±0.88	84.17±4.40
75%	33.33±0.33	168.33±1.66	29.66±1.66	148.93±8.33	24.01±1.30	120.0±9.27	24.33±1.20	121.67±6.0
100%	27.66±1.20	138.33±6.00	28.33±1.45	141.66±7.26	20.00±1.87	100.0±13.22	–	–

Поступило 23.11.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Научная система ведения сельского хозяйства Таджикистана (на тадж. яз.) (Под ред. акад. ТАСХН Ахмедова Х.М., Набиева Т.Н., Бухориева Т.А.) – Душанбе: Матбуот, 2009, 764 с.
2. Бабаджанова М.А., Мирзорохимов А.К., Сайфуудинов А.К, Эргашев А.Э., Эсаналиева Ш.А., Нигматова К.Н. Большой практикум по физиологии и биохимии растений с основами энзимологии – Душанбе: ТНУ, 2017, 136 с.
3. Wareing P.F., Khalifa M.M., Treharne K.J. Rate limiting processes in photosynthesis at saturating light intensities. – Nature, 1968, №220, N5166, pp. 453-457.
4. Мокроносков А.Т., Иванова Н.А. Особенности фотосинтетической функции при частичной дефолиации растений. – Физиология растений, 1971, т.18, вып. 4, с. 668-676.
5. Кумаков В.А. Физиологическое обоснование моделей сортов пшеницы. – М.: Агропромиздат, 1985, 267 с.
6. Чиков В.И. Фотосинтез и транспорт ассимилятов. – М.: Наука, 1987, 188 с.

7. Birecka H., Szczypa E., Kozłowska Z. Translocation and redistribution of  $^{14}\text{C}$  – assimilates in cereals plants deprived of ear. IV. Aftereffect of ear removed on photosynthesis in wheat and oat. – Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Biol., 1969, v. 17, № 4, p.257-263.
8. Lipton F.G.H., Ali-Mohamed A.V. Studies on photosynthesis in ear of wheat. – Ann. Appl. Biol., 1966, v.57, №1, p.281 -288.

**В.Г.Калмыкова, М.К.Бохирова, М.Б.Ниязмухамедова, М.М.Саиднабиев, Х.А.Абдуллоев**

### **ТАЪСИРИ КАМ КАРДАНИ МАСОҲАТИ БАРГҲОИ**

### **АССИМИЛЯТСИЯКУНАНДА БА МИҚДОРИ САҒЕДА ДАР БАРГИ ПАХТА**

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани АМИ Тоҷикистон*

Муқаррар карда шудааст, ки ҳангоми дефолиатсияи пахта синтези сағеда дар баргҳои дар ниҳол боқимонда кам мешавад, ки ин боиси кам шудани миқдори умумии сағедаҳо–ферментҳо мегардад. Кайд карда шуд, ки коҳиш ёфтани фаъолияти дастгоҳи синтезкунандаи сағеда дар барг бо кам шудани масоҳати ассимиляционӣ, бо паст шудани суръати рушди барг дар давраи баъди дефолиатсия алоқаманд аст.

**Калимаҳои калидӣ:** *пахтаи махиннах, Gossypium barbadense L., барг, миқдори сағеда.*

**V.G.Kalmykova, M.K.Bokhirova, M.B.Niyazmukhamedova, M.M.Saidnabiev, Kh.A.Abdullaev**

### **INFLUENCE OF REDUCING ASSIMILATION SURFACE ON PROTEIN CONTENT IN COTTON LEAVES**

*National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*Institute of Botany, Physiology and Plant Genetics, NAS of Tajikistan*

It has been established that when cotton is defoliated, protein synthesis decreases in the leaves remaining on the plant, which leads to a decrease in the total content of enzyme proteins. It was noted that a decrease in the protein synthesizing activity of leaves connected with a decrease in the assimilation surface is associated with a decrease in the rate of leaf growth in the period after defoliation.

**Key words:** *fine-fiber cotton, Gossypium barbadense L., leaf, protein content.*

#### **Сведения об авторах:**

1. **Калмыкова Валентина Георгиевна** – кандидат биологических наук, Институт ботаники, физиологии и генетики НАН Таджикистана, старший научный сотрудник лаборатории генетики и селекции растений;
2. **Бохирова Манзура Курбоналиевна** – Институт ботаники, физиологии и генетики НАН Таджикистана, научный сотрудник лаборатории фотосинтеза и продуктивности растений. E-mail: Manzura5\_2014@bk.ru;

3. **Ниязмухамедова Мукадам Бабаджановна** – доктор биологических наук, Институт ботаники, физиологии и генетики НАН Таджикистана, главный научный сотрудник лаборатории генетики и селекции растений. E-mail: mukadam.44@mail.ru;
4. **Саиднабиев Мирзонаби Муродович** – Худжанский научный центр НАН Таджикистана;
5. **Абдуллаев Хамиджон Абдуллаевич** – доктор биологических наук, Институт ботаники, физиологии и генетики НАН Таджикистана, заведующий лабораторией фотосинтеза и продуктивности растений; E-mail: homidjon1945@mail.ru

УДК 581.19:631.522/524

Специальность: 1.5.21 – Физиология и биохимия растений

Н.С.Диловарова, М.Х.Шукурова, член-корреспондент НАН Таджикистана К.Алиев  
**РОЛЬ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ СИСТЕМЫ В РАЗВИТИИ ОКСИДАНТНОЙ И  
АНТИОКСИДАНТНОЙ АКТИВНОСТИ**

*Национальная академия наук Таджикистана,  
Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана*

*Показано, что увеличение содержания  $H_2O_2$  у картофеля сорта Таджикистан сопровождается резким уменьшением уровня МДА. Наиболее высокий уровень накопления МДА наблюдается у сорта Пикассо как при долговременном, так и при кратковременном воздействии циклогексимида – ингибитора цитоплазматических белков. В условиях ингибирования синтеза белков наблюдается накопление перекиси водорода разнонаправленно в зависимости от устойчивости растений к стрессу.*

**Ключевые слова:** *картофель, циклогексимид, малоновый диальдегид, перекись водорода, пероксидаза.*

В процессе эволюции в растениях сформировалась эффективная система антиоксидантной защиты от воздействия окислительных стрессоров. Главные компоненты окислительного стресса связывают со стресс – индуцированным образованием активной формы кислорода (АФК), представителями которых являются супероксид-анион радикал кислорода ( $O_2^-$ ), перекись водорода ( $H_2O_2$ ), синглетный кислород ( $^1O_2$ ) и гидроксильные радикалы ( $OH^\cdot$ ). Образование (АФК) инициирует экспрессию определенных генов, выполняющих защитные функции [1,2]. Одним из возможных нарушений метаболических процессов в ответ на воздействия стрессоров связано с активацией перекисного окисления липидов (ПОЛ) [3-5]. Постоянный процесс ПОЛ в клетках как в нормальных, так и в стрессовых условиях делает необходимым непрерывное функционирование антиоксидантной защиты и, как следствие, баланса содержание уровня АФК, что способствует адаптивности и устойчивости растений при стрессе.

В этих условиях сбалансированность метаболических процессов растений и формирование защитных механизмов устойчивости связано с активацией генетического аппарата и функционированием трансляционной системы [6-12]. Трансляционная система и её роль в процессе развития оксидантной и антиоксидантной системы является одним из важнейших путей регуляции устойчивости и продуктивности растений.

В данной работе предпринята и выявлена роль перекиси водорода в формировании неспецифического механизма, позволившего растениям выжить в условиях кратковременного воздействия стресса, оценка активности пероксидазы, накопление перекиси водорода при ингибировании синтеза белков циклогексимидом *ex vitro*.

### Материал и методы исследования

Объектом исследований были растения-регенеранты картофеля (*Solanum tuberosum* L.) сортов Таджикистан, Пикассо и клона №26. Содержание перекиси водорода ( $H_2O_2$ ) определяли по цветной реакции с хлоридом титана ( $TiCl_4$ ), как описано в работе [13]. Интенсивность перекисного окисления липидов (ПОЛ) определяли по образованию окрашенного комплекса малонового диальдегида (МДА) в реакции с тиобарбитуровой кислотой при нагревании до  $100^\circ C$  [14]. Активность гваяколпероксидазы определяли по методу [15,16]. Активность выражали в мкмоль гваякола/г сырой массы мин. Эксперименты проводили в трёх повторностях.

### Результаты исследования и их обсуждение

Для выявления различий у разнотолерантных растений картофеля, было изучено влияние циклогексимида, как ингибитора системы трансляции на содержание перекиси водорода. Как показывают результаты представленные на рис. 1, в первые 5 суток воздействия циклогексимида наблюдается незначительное увеличение содержания  $H_2O_2$  у всех изученных генотипов.

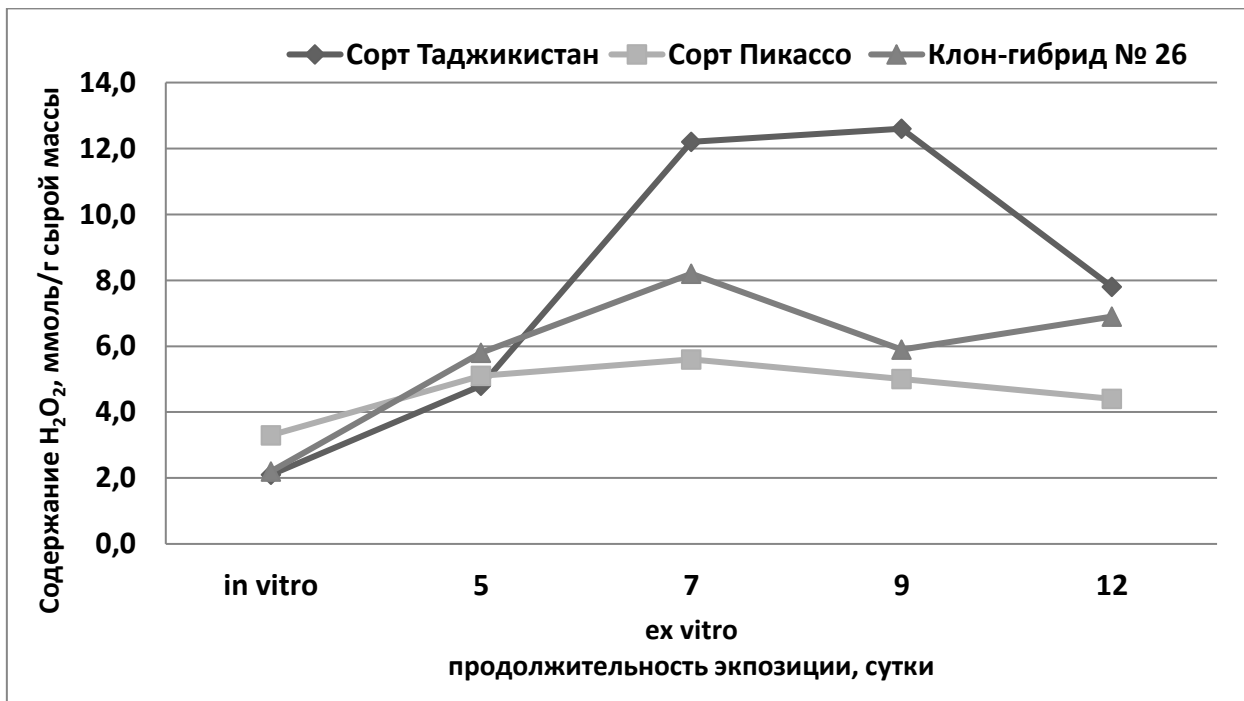


Рис. 1. Содержание  $H_2O_2$  при длительном воздействии циклогексимида в условиях *ex vitro*.

Последующее воздействие (7-9 суток) оказывало существенное изменение в содержании  $H_2O_2$ . Наивысшее накопление  $H_2O_2$  наблюдалось у устойчивого сорта Таджикистан. Наименьшее накопление  $H_2O_2$  во всех периодах эксперимента (5-12 суток) наблюдалось у неустойчивого сорта Пикассо. Клон №26 занимал по этим показателям ( $H_2O_2$ ) промежуточное положение между сортами Таджикистан и Пикассо. Важно отметить, что в этих условиях уровень МДА у изученных генотипов был разным как при кратковременном, так и при долговременном воздействии циклогексимида (рис. 2).

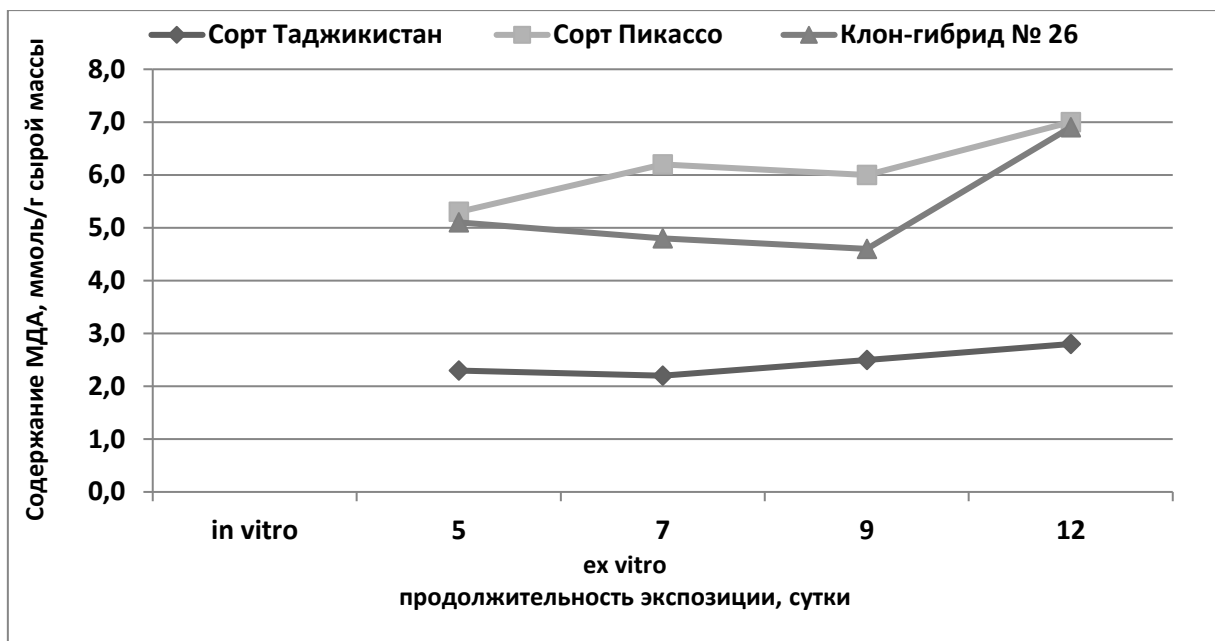


Рис. 2. Действие циклогексимида на накопление МДА в условиях ex vitro.

Как показывают данные на рис. 2, уровень накопления МДА у неустойчивого сорта Пикассо был значительно выше, чем у устойчивого сорта Таджикистан. А клон №26 по накоплению МДА занимал промежуточное положение. Увеличение содержания  $H_2O_2$  у сорта Таджикистан сопровождалось резким уменьшением уровня МДА. Самый высокий уровень накопления МДА наблюдался у сорта Пикассо как при долговременном, так и при кратковременном воздействии циклогексимида.

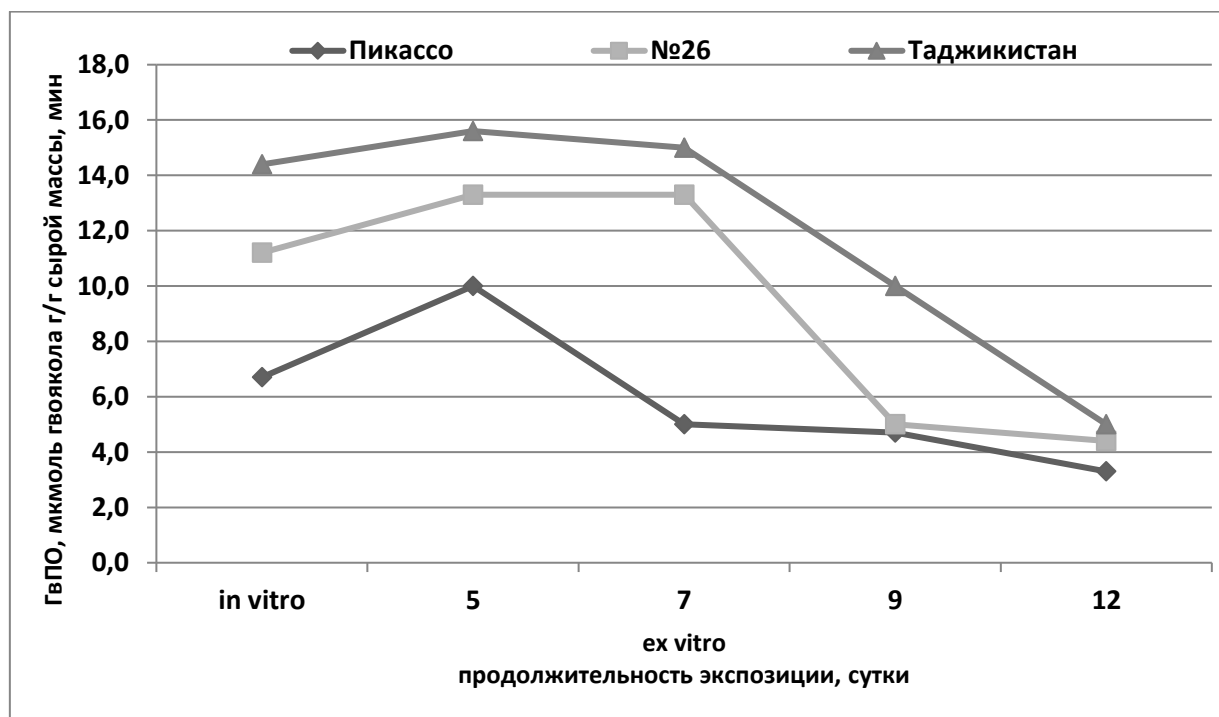


Рис. 3. Активность гваяколпероксидазы при длительном воздействии циклогенсимида, в условиях ex vitro.



У изученных генотипов при воздействии циклогексимида в течение 5 суток наблюдалось увеличение активности пероксидазы и, далее имело место последующее снижение к 12 суткам (рис. 3). Следует отметить, что активность гваяколпероксидазы у сорта Таджикистан во всех периодах экспозиции имела высокий уровень. Активность фермента у сорта Пикассо и клона №26 была в 2 раза ниже по сравнению с активностью сорта Таджикистан.

Полученные экспериментальные данные показывают, что при блокировании синтеза белков, циклогексимидом происходит увеличение содержания  $H_2O_2$  у устойчивого сорта Таджикистан примерно в 2 раза, у клона №26 в 1-2-раза, у неустойчивого сорта Пикассо остается на уровне контроля.

Увеличение содержания  $H_2O_2$  инициирует активность ПОЛ по-разному у контрастных по устойчивости генотипов. Во всех периодах блокировки синтеза ферментов у сорта Таджикистан наблюдается заметное накопление МДА. У клона №26 и сорта Пикассо наблюдается усиление образования МДА в условиях блокировки синтеза фермента циклогексимидом. Различие в накоплении  $H_2O_2$  и МДА в условиях блокировки синтеза белков у устойчивых генотипов может быть связано с наличием преобладающих депо ферментов антиоксидантной защиты, например гваяколпероксидазы. Возрастание генерации перекиси водорода ( $H_2O_2$ ) при воздействии циклогексимидом, возможно, имитирует ответную реакцию растений к стрессу, то есть является сигналом для адаптивного ответа. Динамика накопления МДА может отражать устойчивость генотипов к стрессу.  $H_2O_2$  является эволюционным предшественником воды, а также является поставщиком электронов в ЭТЦ фотосинтеза, т.е. вероятным агентом, стимулирующим фотохимические реакции фотосистемы. Такого не наблюдается у неустойчивых генотипов (например, сорта Пикассо), а новый перспективный клон №26 по всем изученным параметрам занимает промежуточное положение. Таким образом, устойчивые генотипы растений обладают способностью к сохранению водного гомеостаза, за счёт эндогенного образования  $H_2O_2$ , пероксидазой, что может являться одним из ранних механизмов адаптации растений к стрессовым воздействиям.  $H_2O_2$  возможно наряду с окислительной функцией, играет важную роль в обеспечении нормального функционирования физиолого-биохимических процессов, в условиях стресса.

Поступило 16.11.2023 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Baege J.A., Aust S.D. Microsomal lipid peroxidation. – *Methods enzymol.*, 1978, v.52, pp. 302-310.
2. Dajic Z. Salt stress Physiology and Molecular Biology of stress Tolerance in Plant. – Dozdzecht: Springez-Vezlag, 2006, p.41-10.
3. Барабой, В.А. Механизмы стресса и перекисное окисление липидов. *Успехи современной биологии.* – 1991, т. 111, вып. 6, с. 923-932.
4. Влодарский Ю.А., Арчаков А.И. Перекисное окисления липидов в биологических мембранных. – М.: Наука, 1972, 252 с.
5. Давлятназарова З.Б. Механизмы устойчивости растений в условиях абиотического стресса. – Душанбе, 2021, с 107.
6. Ефимова М.В., Коломейчук Л.В., Бойко Е.В., Малофий М.К., Видершпан А.Н., Плюснин И.Н., Головацкая И.Ф., Мурган О.К., Кузнецов Вл.В. Физиологические механизмы устойчивости растений *Solanum tuberosum* L. к хлоридному засолению. – *Физиология растений*, 2018, т.65, №3, с. 196-206.

7. Жиров, В.К., Мерзляк М.Н., Кузнецов Л.В. Перекисное окисление мембранных липидов холодоустойчивых растений при повреждении отрицательными температурами. – Физиология растений, 1982, т. 29, с. 1045-1052.
8. Киёмова З.С., Давлятназарова З.Б., Шукурова М.Х., Ашуров С.Х., Алиев К.А. Активность супероксиддисмутазы у разнотолерантных растений-регенерантов картофеля в условиях солевого стресса. – Изв. АН РТ. Отд. биол. и мед. н., 2013, №1 (182), с. 40-46.
9. Кузнецов Вл. В. Индуцибельные системы и их роль в адаптации растений к стрессовым факторам. Докт. диссер. – Кишинев: Институт физиологии растений, 1992.
10. Прокопьев И.А., Журавская А.Н., Филиппова Г. Изменчивость биохимических параметров под действие различных факторов. – Экология, 2011, №4, с. 259-265.
11. Синкевич М.С., Нарайкина Н.В., Трунова Т.И. Процессы, препятствующие повышению интенсивности перекисного окисления липидов у холодоустойчивых растений при гипертермии. – Физиология растений, 2011, т.58, №6, с. 875-882.
12. Часов А.В., Гордон Л.Х. Колесников О.Н., Минбаева Ф.В. Пероксидаза клеточной поверхности – генератор супероксид-аниона в корнях клеток пшеницы при раневом стрессе. – Цитология, 2002, т.44, с. 691-696.
13. Bellincampi D. et al. Extracellular H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> induced by oligogalacturonides is not involved in the inhibition of the Auxin-Regulated rolB gene expression in tobacco leaf explants. – Plant physiology, 2000, 122:1379-1385.
14. Стальная И.Д., Гаришвили Т.Г. Метод определения малонового диальдегида с помощью тиобарбитуровой кислоты. Современные методы в биохимии. – М.: Медицина, 1977, с. 66-68.
15. Nakano, Y., Asada K/ Hydrogen peroxide is scavenged by ascorbate specific in spinach chloroplaste. – Plant cell physiol., 1981, v. 22, pp. 867-880.
16. Полеская О.Г., Каширина Е.И., Алехина Н.Д. Изменение активности антиоксидантных ферментов в листьях и корнях пшеницы в зависимости от формы и дозы азота в среде. – Физиология растений, 2004, с.686-691.

Н.С.Диловарова, М.Х.Шукурова, Қ.Алиев

## НАҚШИ СИСТЕМАИ ТРАНСЛЯТСИОНӢ ДАР РУШДИ ФАЪОЛИЯТИ ОКСИДАНТӢ ВА АНТИОКСИДАНТӢ

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани АМИ Тоҷикистон*

Муайян карда шуд, ки зиёдшавии микдори H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> дар навъи картошкаи Тоҷикистон бо яқбора ба паст шавии дараҷам ДАМ боис мешавад. Дараҷаи баландтарини чамъшавии ДАМ дар навъи Пикассо дар натиҷаи таъсири ҳам дарозмуддат ва ҳам кӯтоҳмуддати циклогексимид мушоҳида мешавад. Дар шароити боздошти синтези сафедаҳо, чамъшавии пероксиди гидроген вобаста ба муқовимати растаниҳо ба стресс дар дараҷаҳои гуногун, мушоҳида карда мешавад.

**Калимаҳои калидӣ:** картошка, циклогексимид, диальдегиди малони, пероксиди гидроген.

N.S.Dilovarova, M.Kh.Shukurova, K.Aliev

## ROLE OF THE TRANSLATORY SYSTEM IN THE DEVELOPMENT OF OXIDANT AND ANTIOXIDANT

*National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*Institute of Botany, Plant Physiology and Genetics, NAS of Tajikistan*

It has been shown that an increase in H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> content in the Tajikistan variety is accompanied by a sharp decrease in the MDA level. The highest level of MDA accumulation is observed in the Picasso variety under both long-term and short-term exposure to cycloheximide, an inhibitor of cytoplasmic proteins. Under conditions of inhibition of protein synthesis, the accumulation of hydrogen peroxide is observed in different directions depending on the resistance of plants to stress.

**Key words:** *potato, cycloheximide, malondialdehyde, hydrogen peroxide peroxidase.*

### Сведения об авторах:

1. **Диловарова Нигина Сифатшоевна** – Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана, старший научный сотрудник лаборатории молекулярной биологии и биотехнологии растений. E-mail: nigin.sima@mail.ru;
2. **Шукурова Мусаввара Хаитовна** – кандидат биол. наук, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана, ведущий научный сотрудник. E-mail: musavvar@mail.ru;
3. **Алиев Курбон Алиевич** – доктор биол. наук, Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана, заведующий лабораторией молекулярной биологии и биотехнологии.

УДК 616-003.725:619

Специальность: 3.4.2 – Фармацевтическая химия, фармакогнозия

У.Р.Раджабов, академик НАН Таджикистана С.Дж.Юсуфи\*, Б.Н.Рахимова, С.Г.Ёрмамадова\*\*

**МАЛЬБЦИНКАТ-СУБСТАНЦИЯ,  
ОБЛАДАЮЩАЯ ГЕЛЬМИЦИДНЫМИ СВОЙСТВАМИ***Таджикский государственный медицинский университет им. Абуали ибни Сино,**\*ГУ «Научно-исследовательский фармацевтический центр МЗ и СЗН РТ»,**\*\*Таджикский национальный университет*

*В статье изложены результаты синтеза мальбцинка-субстанции на основе альбендазола, сульфатов меди(II) и цинка(II), определения физико-химических и биологических свойств, стабильности и антигельминтной активности нового вещества.*

**Ключевые слова:** соединения меди(II) и цинка(II) бензимидазолы, альбкूपрол-субстанция, гельмицидные свойства.

При синтезе биологически активных веществ, в том числе антигельминтиков, не потеряли свое значение различные (органические и неорганические) соединения меди(II) и цинка(II), исследовательские работы с которыми проводятся в двух направлениях: создание различных комбинаций с их участием с целью уменьшения токсичности и повышения антигельминтной эффективности и синтез новых органических соединений, обладающих высокой антигельминтной активностью и низкой токсичностью [1, 2].

Производные бензимидазола – большая и разнообразная в химическом отношении группа соединений, которые обладают самой разнообразной биологической активностью (фунгицидной, противоопухолевой, бактериостатической, бактерицидной, инсектицидной, гербицидной, некоторые применяются в качестве стимуляторов роста и продуктивности сельскохозяйственных животных). Среди бензимидазолов имеются высокоэффективные антигельминтики (в том числе альбендазол – [5(пропилтио)-1Н бензимидазол-2-ил] карбаминовой кислоты, подавляющее большинство которых обладает выраженным эмбриотропным и тератогенным действием, поэтому их использование в ветеринарии ограничивается [3-7]. С целью снижения этих отрицательных свойств, повышения эффективности и сокращения дозы альбендазола в ГОУ «Таджикский государственный медицинский университет им. Абуали ибни Сино» совместно с ГУ «Научно-исследовательский фармацевтический центр МЗ и СЗН РТ» и Национальным центром хранения патогенных микроорганизмов Института проблем биологической безопасности Таджикской академии сельскохозяйственных наук синтезирована мальбцинка-субстанция, которую использовали, учитывая гельмицидные свойства многих цинк и медь содержащих препаратов [8-10].

*Адрес для корреспонденции:* Раджабов Умарали.734003, РеспубликаТаджикистан, г.Душанбе, ул.Рудаки, 139. Таджикский государственный медицинский университет. E-mail: umarali55@mail.ru.

**Материал и методы исследования.** Качественные и количественные методы исследований мальбцинкат-субстанции соответствуют ОСТ 91500.05.001.00. Стабильность вещества изучена методом «ускоренного старения» и при естественном хранении. Эффективную терапевтическую дозу мальбцинкат-субстанции определяли в неблагополучном по мониезиозу овец Производственном кооперативе (ПК) им. Л. Муродова Гиссарского района Республики Таджикистан, копрологические исследования проводили по общепринятой методике.

**Результаты исследований.** Мальбцинкат-субстанцию синтезировали на кипящей водяной бане при мольном соотношении сульфатов меди(II), цинка(II) и албендазола 1:1:2, используя в качестве растворителя 95%-ный этиловый спирт. При нагревании в 100 мл этанола навеску албендазола 53.066 г растворили до образования белой жидкой суспензии, а навеску 25 г кристаллогидрат  $CuSO_4 \times 5H_2O$  и 28.7г  $ZnSO_4 \times 7H_2O$  измельчали и растворили в 100 мл этиловым спирте, смешали с суспензией албендазола, перемешивая стеклянной палочкой, нагревали 2-3 ч в реакционной колбе на водяной бане (60-70°C), которую сливали в фарфоровую чашку, оставляли на 24 ч до высыхания. Образовавшуюся твердую массу измельчали в порошок и сушили на открытом воздухе в течение суток. Выход продукта – 96-97% от теоретического.

Мальбцинкат-субстанция содержит 99.0% действующего вещества, имеет форму кристаллического вещества со слабым запахом и жгучим слегка вязущим вкусом, мало растворима в воде, температура плавления – 162.5-165°C. Физико-химические и биологические свойства мальбцинкат-субстанции представлены в табл. 1.

Нами разработаны качественные и количественные методы исследований, предусмотренные ОСТ 91500.05.001.00 в требованиях к качеству порошков, для стандартизации и контроля качества, изучения стабильности при хранении мальбцинкат-субстанции. Результаты проверки качества трех экспериментальных серий показали хорошую воспроизводимость и точность разработанных качественных и количественных методов контроля.

Таблица 1

Физико-химические и биологические свойства мальбцинкат-субстанции

Показатель	Характеристика и норма
Внешний вид	кристаллическое вещество
Наличие механических примесей, плесени	не допускается
pH 10% водной суспензии	5.5 – 6.0
Массовая доля влаги, %	не более 4
Подлинность меди и цинка	по ГФ X
Подлинность албендазола	по ГФ X
Подлинность сульфат-ионов	по ГФ X
Безвредность	безвредна в дозе 0.088 г/кг массы лабораторных и с/х животных
Активность	у обработанных ориентировочно-терапевтической дозой (0.008 г/кг) овец через 10 дней не обнаруживают яйца гельминтов или отмечают гельминтоцидное действие вещества

Изучение стабильности мальбцинкат-субстанции методом «ускоренного старения» при повышенных температурах (37 и 50°C; образцы экспериментальных серий помещали в термостат на сроки, соответствующие 0.5; 1; 2 и 2.5 годам естественного хранения) показало, что по физико-химическим и

биологическим показателям качества, вещество оставалось стабильным в течение срока, соответствующего 2 годам естественного хранения. При естественном хранении физико-химические и биологические свойства мальбцинкат-субстанции оставались стабильными также в течение 2 лет.

Для определения эффективной терапевтической дозы разработанной мальбцинкат-субстанции в неблагополучном по мониезиозу овец ПК им. Л. Муродова Гиссарского района Республики Таджикистан проведены копрологические исследования (метод последовательных смывов, метод Фюллеборна), в результате которых выделены 2 группы овец – контрольная (больные мониезиозом ягнята 3-месячного возраста, n=10) и опытная (больные животные соответствующего возраста, n=50), которая была подразделена на пять подгрупп, n=10). Животных обеих групп поместили биркованием.

Опытным животным мальбцинкат-субстанцию вводили перорально с водой в объеме 30 мл в дозах 0.004 г/кг (1-я подгруппа), 0.006 (2-я), 0.008 (3-я), 0.010 (4-я) и 0.012 г/кг (5-я подгруппа), контрольным животным в том же объеме спаивали воду.

В ходе проведенных копрологических исследований подтверждалась инвазированность ягнят контрольной группы, а экстенсивность мальбцинкат-субстанции составила в 1-ой опытной подгруппе 60%, во 2-ой – 80, а в 3-5-ой подгруппах – 100%.

**Выводы.** На основе альбендазола, сульфатов меди(II) и цинка(II), синтезирована мальбцинкат-субстанция, обладающая антигельминтной активностью. Установленная ориентировочно-терапевтическая доза вещества (0.008 г/кг) учитывалась при разработке лекарственных форм (гранул, таблеток и суспензии) на его основе.

*Поступило 04.12.2023 г.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Архипов И.А. Новые отечественные антигельминтики для терапии гельминтозов животных. – Ветеринария, 1998, №11, с. 30-33.
2. Обеспечение качества фармацевтических препаратов. – Сб. рекомендаций и тематических материалов ВОЗ. – Женева, 1998, 23 с.
3. Веселый В.А. Влияние альбендазола на физиологический и биохимический статус организма овец – Вет. медицина: межвед. темат. науч. сб., Харьков, 2000, Вып. 78, т. 2, с. 39-42.
4. Сафиуллин Р.Т., Семенычев А.В. Эффективность альбендазола при мониезиозе и стронгилятозах желудочно-кишечного тракта овец. – Ветеринария, 2008, №2, с. 14-18.
5. Шеховцов В.С. Альбендазол при ассоциативных гельминтозах овец. – Мат-лы IV съезда паразитологов Украины. – Харьков, 1995, с.165.
6. Chalmers K. The efficacy of oxfendazole against natural infections of nematodes and cestodes in sheep – N.Z. Vet. J., 1977, vol. 25, №10, pp. 266-269.
7. Coles G.C. Anthelmintic activity of triclabendazole. – Helminthologia, 1986, vol. 60, №3, pp. 210-212.
8. Архипов И.А. Антигельминтики: фармакология и применение – М., 2009, 405 с.
9. Березовский А.В. Лекарственные препараты нового поколения для ветеринарной медицины. – М.: Ветинформ, 2000, 88 с.
10. Кузьмин А.А. Антигельминтики в ветеринарии. – Харьков, 1998, 146 с.

У.Р.Раджабов, С.Дж.Юсуфи\*, Б.Н.Рахимова, С.Г.Ёрмамадова\*\*

## МАЛБЗИНКАТ-СУБСТАНЦИЯ, ДОРОИ ХУСУСИЯТҲОИ ЗИДДИГИЧҶАВӢ

Дар мақола натиҷаҳои синтези мальбсинкат-модда дар асоси албендазол, мис (II) ва рух (II) сулфатҳо, муайян кардани хосиятҳои физикӣ-кимиёвӣ ва биологӣ, устуворӣ ва фаъолияти зидди гельминтикий моддаи нав оварда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** пайвастагиҳои мис(II) ва рух(II), бензимидазолҳо, моддаи альбкупрол, хосиятҳои гельмицидӣ.

U.R.Radjabov, S.J.Yusufi\*, B.N.Rakhimova, S.G.Yormamadova\*\*

## MALBZINCATE-SUBSTANCE, WITH HELMICIDAL PROPERTIES

The article presents the results of the synthesis of malbzincate-substance based on albendazole, copper(II) and zinc(II) sulfates, determination of physicochemical and biological properties, stability and anthelmintic activity of the new substance

**Key words:** copper (II) and zinc (II) compounds, benzimidazoles, albcuprol substance, helmicidal properties.

### Сведения об авторах:

1. Раджабов Умарали – д.х.н., ГОУ «ТГМУ имени Абуали ибни Сино», профессор кафедры фармацевтической и токсикологической химии. E-mail: umarali55@mail.ru;
2. Юсуфи С.Дж. – д.фарм. н., ГУ «Научно-исследовательский фармацевтический центр МЗ и СЗН РТ»;
3. Рахимова Б.Н. ГОУ «ТГМУ имени Абуали ибни Сино», старший преподаватель кафедры фармацевтической и токсикологической химии;
4. Ёрмамадова С.Г. к.х.н., Таджикский национальный университет, доцент.