

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

- З.Х.Рахмонов, Ф.З.Рахмонов.** Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми.....125
- Х.А.Абдусаломзода.** О совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди.....137
- М.А.Акобиршоев, Ф.М.Мадимарова.** Наилучшее совместное приближение “углом” некоторых классов функций двух переменных в пространстве  $L_2$  .....149
- О.Х.Каримов, А.Азамкулов.** Коэрцитивные оценки и разделимость для оператора Грушина .....159
- Г.Джангибеков, К.Ш.Файззода.** Задачи Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости .....165

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- М.М.Кабиров, И.И.Халимов, З.Б.Шерматова.** Моделирование максимальной температуры пористой среды при фильтрационном горении водородно-воздушной смеси и комплекс программ для её автоматизации.....178

## АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, С.Н.Сафаров.** Наблюдения двойного астероида (65803) Дидимос и его динамико-физические характеристики по результатам оптического обзора.....186

## ФИЗИКА

- Б.И.Махсудов, М.Т.Яров, Д.Д.Нематов.** Повышение эффективности материалов для солнечных элементов на основе CdTe нейтронным облучением .....198

## НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- М.Т.Жумаев, Дж.М.Мусоджонзода, Л.Солиев.** Строение фазового комплекса системы  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{--K}_2\text{SO}_4\text{--MgSO}_4\text{--CaSO}_4\text{--H}_2\text{O}$  при  $0^\circ\text{C}$  .....204

## БОТАНИКА

- Х.А.Бекназарова, Д.Наврүшоев.** Реальная и потенциальная семенная продуктивность *Allium elatum* Regel в условиях культуры на территории Памирского ботанического сада.....211

**ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ**

- А.Б.Сафаралихонов.** Активность эндогенных регуляторов роста в листьях *Artemisia rhodantha* Rurg. в аридных условиях высокогорья Памира .....217

**БИОХИМИЯ**

- М.А.Бабаджанова, А.К.Сайфудинов, К.Н.Ниматова.** Кинетическое исследование карбоксилазной активности рибулозобисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы мультиферментного комплекса цикла Кальвина в экстрактах из листьев хлопчатника .....222

## CONTENTS

## MATHEMATICS

- Z.Kh.Rakhmonov, F.Z.Rakhmonov.** Asymptotic formula in the Waring's problem with almost proportional summands .....125
- Kh.A.Abdusalomzoda.** On the joint polynomial approximation of functions and their derivatives in Hardy space .....137
- M.O.Akobirshoev, F.M.Madimarova.** The best joint approximation by the "angle" some classes of functions of two variables the space  $L_2$  .....149
- O.Kh.Karimov, A.Azamkulov.** Coercive estimates and separability for the Grushin operator .....159
- G.Jangibekov, K.Sh.Faizzoda.** Of the Dirichlet and Nueman problems for some elliptic systems of sixes-order differential equations in the plane.....165

## MATHEMATICAL PHYSICS

- M.M.Kabilov, I.I.Khalimov, Z.B.Shermatova.** Modeling of the maximum temperature of a porous medium during filtration combustion of a hydrogen-air mixture and a set of programs for its automation.....178

## ASTRONOMY

- G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, S.N.Safarov.** Observation of the double asteroid (65803) Didymos and its physical-dynamic characteristics based on optical survey results .....186

## PHYSICS

- B.I.Makhsudov, M.T.Yarov, D.D.Nematov.** Increasing the efficiency of materials for solar cells based on CdTe by neutron irradiation .....198

## INORGANIC CHEMISTRY

- M.T.Jumaev, J.M.Musojonzoda, L.Soliev.** Structure of the phase complex of the system  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{-K}_2\text{SO}_4\text{-MgSO}_4\text{-CaSO}_4\text{-H}_2\text{O}$  at  $0^\circ\text{C}$ .....204

## BOTANY

- Kh.A.Beknazarova, D.Navruzshoev.** Real and potential seed productivity *Allium elatum* Regel the conditions of culture in the territori of the Pamir Botanical Garden .....211

**PLANT PHYSIOLOGY**

**A.B.Safaralikhonov.** Endogenous growth stimulators activity in *Artemisia rhodantha* Rupr. leaves in arid conditions of Pamir highlands .....217

**BIOCHEMISTRY**

**M.A.Babazhanova, A.K.Sayfudinov, K.N.Nimatova.** Kinetic study of the carboxylase activity of ribulose bisphosphate carboxylase/oxygenase of the multi-enzyme complex of the calvin cycle in extracts from cotton leaves .....222

УДК 511.344

Специальность: 1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Академик НАН Таджикистана **З.Х.Рахмонов, Ф.З.Рахмонов**  
**АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА В ПРОБЛЕМЕ ВАРИНГА С ПОЧТИ  
 ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ**

*Национальная академия наук Таджикистана,  
 Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана*

При  $n \geq 3$  получена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального  $N$  в виде суммы  $r = 2^n + 1$  слагаемых, каждое из которых является  $n$ -ой степенью натуральных чисел  $x_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ , удовлетворяющих условиям

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq H, \quad H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}, \quad \theta(n,r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)},$$

где  $\mu_1, \dots, \mu_r$  — положительные фиксированные числа и  $\mu_1 + \dots + \mu_r = 1$ . Этот результат является усилением теоремы Е.М.Райта 1934 г., а также сильнее теоремы Дерка Деймона в смысле количества слагаемых в частности при  $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ .

**Ключевые слова:** проблема Варинга, почти пропорциональные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма Г.Вейля, малая окрестность центров больших дуг.

Проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми впервые исследовал М.Е.Райт [1,2]. Для количества представлений достаточно большого числа  $N$  в виде

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_r^n = N, \tag{1}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_r$  — натуральные числа и

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq N^{1-\theta}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = 1,$$

где  $\mu_1, \dots, \mu_r$  — положительные фиксированные числа, а число  $\theta = \theta(n,r)$  определяется из соотношения

$$\theta = \frac{1}{n} \min \left( \frac{(r-2^n)(2^{n-1}+1)}{(nr+n-2^n-3)2^{n-1}+r}, \frac{r-(n-2)2^{n-1}-4}{r+2^{n-1}-4}, \frac{r-2^{n-1}}{nr-2^{n-1}+n-1} \right),$$

**Адрес для корреспонденции:** Рахмонов Зарулло Хусенович, Рахмонов Фируз Заруллоевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: zarullo\_r@mail.ru, rakhmonov.firuz@gmail.com

он нашёл асимптотическую формулу при  $r \geq r(n) = (n - 2)2^{n-1} + 5$ . Отсюда, в частности для  $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  при  $r = (n - 2)2^{n-1} + 5$ , имеем

Таблица 1

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(n) = (n - 2)2^{n-1} + 5$	9	21	53	133	325	773	1797	4101
$\theta(n, r)$	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{325}$	$\frac{1}{966}$	$\frac{1}{2695}$	$\frac{1}{6279}$	$\frac{1}{18441}$	$\frac{1}{46090}$

В 2010 г. Дерк Деймон [3], пользуясь теоремой о среднем И.М.Виноградова и процедурой «биномиального спуска», при  $r \geq r_n$ , где

$$\begin{aligned}
 r_2 &= 9, \quad r_3 = 19, \quad r_4 = 49, \quad r_5 = 113, \quad r_6 = 243, \\
 r_7 &= 417, \quad r_8 = 675, \quad r_9 = 1083, \quad r_{10} = 1773, \\
 r_n &= 2 \left[ \frac{5n^2}{3} \ln n + \frac{29n^2}{30} \ln \ln n + \frac{7n^2}{3} \ln \ln \ln n + Cn^2 \right] + 1, \quad n > 10,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

$C$  — абсолютная постоянная, доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения (1), при выполнении условий

$$X - Y \leq x_j \leq X + Y, \quad 1 \leq j \leq r, \quad X = \left[ \left( \frac{N}{r} \right)^{\frac{1}{n}} \right], \quad Y = \sqrt{X} Y_n, \quad Y_n = (\ln X)^{r_{n-1}},$$

где  $Y_2$  — функция от  $X$ , стремящаяся к бесконечности вместе с  $X$ .

Заметим, что теорема М.Райта об асимптотической формуле в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми при  $\mu_1 = \dots = \mu_r$ , превращается в теорему об асимптотической формуле в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми с параметрами  $\theta = \theta(n, r)$  и  $r = r(n)$ , и она сильнее теоремы Дерка Деймона в смысле количества слагаемых при  $n = 3, 4, 5, 6, 7$ .

Пользуясь поведением коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^n),$$

в больших дугах [4,5] в сочетании с нетривиальными оценками этих сумм в малых дугах [6], были доказаны асимптотические формулы в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми [7,8,5] для  $n = 3, 4, 5$ , то есть для количества решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$\left| x_i - \left( \frac{N}{2^n + 1} \right)^{\frac{1}{n}} \right| \leq H, \quad i = 1, \dots, 2^n + 1, \quad H \geq N^{\frac{1}{n} - \theta(n) + \varepsilon},$$

$$\theta(3) = \frac{1}{30}, \quad \theta(4) = \frac{1}{108}, \quad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

Основным результатом этой работы является доказательство теоремы 1, которая ранее была сформулирована в [9], а при  $n = 3$  она была доказана в [10,11].

**Теорема 1.** Пусть  $N$  — достаточно большое натуральное число,  $n \geq 3$  — натуральное число,  $r = 2^n + 1$ ,  $\mu_1, \dots, \mu_r$  — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию  $\mu_1 + \dots + \mu_r = 1$ ,  $J_{n,r}(N, H)$  — число решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq H, \quad i = 1, \dots, r \quad \theta(n, r) = \frac{2}{(r+1)(n^2 - n)}. \tag{3}$$

Тогда при  $H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$  справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N, H) = \frac{2^r \gamma(n, r)}{n^r} \prod_{i=1}^r \mu_i^{-1+\frac{1}{n}} \mathfrak{S}(N) \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}}\right),$$

где  $\gamma(n, r)$  — абсолютная постоянная, которая определяется формулой (16),  $\mathfrak{S}(N)$  — особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное, а постоянное под знаком  $O$  зависит от чисел  $\mu_1, \dots, \mu_r$ .

Отсюда, в частности, имеем

Таблица 2

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10
$r = 2^n + 1$	9	17	33	64	129	257	513	1025
$\theta(n, r)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{108}$	$\frac{1}{340}$	$\frac{1}{990}$	$\frac{1}{2730}$	$\frac{1}{7224}$	$\frac{1}{18504}$	$\frac{1}{46170}$

Из теоремы 1 при  $\mu_1 = \dots = \mu_r$  следует асимптотическая формула в обобщении проблемы Варинга с почти равными слагаемыми.

**Следствие 1.1.** Пусть  $N$  — достаточно большое натуральное число,  $n \geq 3$  — натуральное число,  $r = 2^n + 1$ ,  $J_{n,r}(N, H)$  — число решений диофантова уравнения (1) с условиями  $\left|x_i^n - \frac{N}{r}\right| \leq H$ .

Тогда при  $H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$  справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N, H) = \frac{2^r r^{\frac{r}{n}} \gamma(n, r)}{n^r} \mathfrak{S}(N) \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}}\right).$$

Теорема 1 является усилением теоремы Е.М.Райта, а из формулы (2) и таблицы 2 следует также, что следствие 1.1 сильнее теоремы Дерка Деймона в смысле количества слагаемых, в частности, при  $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ .

**Доказательства теоремы 1.** Не ограничивая общности, будем считать, что  $H = N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$ ,  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_r$ . Пользуясь обозначениями  $N_k = (\mu_k N + H)^{\frac{1}{n}}$ ,  $H_k = (\mu_k N + H)^{\frac{1}{n}} - (\mu_k N - H)^{\frac{1}{n}}$ ,  $\tau = 2(n-1)nN_1^{n-2}H_1$ ,  $\varkappa\tau = 1$ , число решений диофантова уравнения (1) при выполнении условий (3) представим в виде

$$J_{n,r}(N, H) = \int_{-\varkappa}^{1-\varkappa} e(-\alpha N) \prod_{k=1}^r (T(\alpha; N_k, H_k) + \theta_k) d\alpha = \int_{-\varkappa}^{1-\varkappa} e(-\alpha N) \prod_{k=1}^r T(\alpha; N_k, H_k) d\alpha + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}} \mathcal{L}}\right). \tag{4}$$

где  $|\theta_k|$  равен 1, если  $N_k - H_k$  — целое число, и 0 в противном случае. Верхняя граница  $N_k$  и длина  $H_k$  суммы  $T(\alpha; N_k, H_k)$  относительно параметров  $N$  и  $H$  выражаются через следующие асимптотические формулы

$$N_k = \mu_k^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right), H_k = \frac{2H}{n\mu_k^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}}} \left(1 + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right)\right). \tag{5}$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое  $\alpha$  из промежутка  $[-\varkappa, 1-\varkappa]$  представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}. \tag{6}$$

В этом представлении  $0 \leq a \leq q-1$ , причём  $a = 0$  лишь при  $q = 1$ . Через  $\mathfrak{M}$  обозначим те  $\alpha$ , для которых в представлении (6) выполняется условие  $q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}$ , оставшиеся  $\alpha$  обозначим через  $\mathfrak{m}$ . Множество  $\mathfrak{M}$  состоит из непересекающихся отрезков. Разобьём множество  $\mathfrak{M}$  на множества  $\mathfrak{M}_1$  и  $\mathfrak{M}_2$ :

$$\mathfrak{M}_1 = \bigcup_{1 \leq q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \bigcup_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \mathfrak{M}_1(a, q), \quad \mathfrak{M}_1(a, q) = \left[\frac{a}{q} - \eta_q \leq \alpha \leq \frac{a}{q} + \eta_q\right],$$

$$\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1, \quad \eta_q = \frac{1}{2nqN_r^{n-1}}, \quad \eta = \frac{\mathcal{L}}{2nH_r N_{r-1}} \leq \eta_q. \tag{7}$$



Обозначая через  $J(\mathfrak{M}_1)$ ,  $J(\mathfrak{M}_2)$  и  $J(\mathfrak{m})$  соответственно интегралы по множествам  $\mathfrak{M}_1$ ,  $\mathfrak{M}_2$  и  $\mathfrak{m}$ , с учётом (4), получим

$$J_{n,r}(N, H) = J(\mathfrak{M}_1) + J(\mathfrak{M}_2) + J(\mathfrak{m}) + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r}{n}} \mathcal{L}}\right). \tag{8}$$

В этой формуле  $J(\mathfrak{M}_1)$  доставляет главный член асимптотической формулы для  $J_{n,r}(N, H)$ , а  $J(\mathfrak{M}_2)$  и  $J(\mathfrak{m})$  входят в его остаточный член.

**1. Вычисление интеграла  $J(\mathfrak{M}_1)$ .** По определению интеграла  $J(\mathfrak{M}_1)$  имеем:

$$J(\mathfrak{M}_1) = \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \int_{|\lambda| \leq \eta_q} \prod_{k=1}^r T\left(\frac{a}{q} + \lambda; N_k, H_k\right) e\left(-\left(\frac{a}{q} + \lambda\right)N\right) d\lambda. \tag{9}$$

Для суммы  $T\left(\frac{a}{q} + \lambda; N_k, H_k\right)$  выполняются оба условия следствия 1.1 работы [12], то есть

$\tau \geq 2(n-1)nN_k^{n-2}H_k$ , и  $|\lambda| \leq \frac{1}{2nqN_r^{n-1}}$ . Согласно этому следствию для  $k = 1, \dots, r$  имеем

$$T\left(\frac{a}{q} + \lambda, N_k, H_k\right) = \frac{H_k S(a, q)}{q} \gamma(\lambda; N_k, H_k) + R, \quad R \ll q^{\frac{1}{2} + \varepsilon},$$

$$\gamma(\lambda; x, y) = \int_{-0.5}^{0.5} e\left(\lambda \left(x - \frac{y}{2} + yt\right)^n\right) dt, \quad S(a, q) = \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^n}{q}\right).$$

Умножая обе части этих формул по всем  $k = 1, 2, \dots, r$ , а затем пользуясь оценками  $R \ll q^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$ , и

$|S(a, q)| \ll q^{\frac{n-1}{n}}$ , получим

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^r T\left(\frac{a}{q} + \lambda, N_k, H_k\right) - \frac{S^r(a, q)}{q^r} \prod_{k=1}^r H_k \gamma_n(\lambda; N_k, H_k) = \\ & = R^r + \sum_{v=1}^{r-1} R^{r-v} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_v \leq r} \prod_{k=1}^v \frac{H_{i_k} S(a, q)}{q} \gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k}) \ll \\ & \ll \sum_{v=1}^{r-1} q^{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)(r-v) - \frac{v}{n}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_v \leq r} \prod_{k=1}^v H_{i_k} |\gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k})| + q^{0.5r+r\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отсюда и из формулы (9) находим

$$J(\mathfrak{M}_1) = \prod_{i=1}^r H_i \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \mathcal{A}(r, q) \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \frac{S^r(a, q)}{q^r} e\left(-\frac{aN}{q}\right) + R_1(\mathfrak{M}_1) + R_2(\mathfrak{M}_1), \quad (10)$$

$$\mathcal{A}(r, q) = \int \prod_{\substack{|\lambda| \leq \eta_q \\ k=1}}^r \gamma(\lambda; N_k, H_k) e(-\lambda N) d\lambda,$$

$$R_1(\mathfrak{M}_1) \ll \sum_{v=1}^{r-1} \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} q^{\sigma(v)} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_v \leq r} \int \prod_{k=1}^v H_{i_k} |\gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k})| d\lambda, \quad (11)$$

$$\sigma(v) = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)r + 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \varepsilon\right)v,$$

$$R_2(\mathfrak{M}_1) \ll \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} q^{0,5r+r\varepsilon} \varphi(q) \cdot 2\eta_q = \frac{1}{nN_r^{n-1}} \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \varphi(q) q^{0,5r-1+r\varepsilon}.$$

**2. Оценка  $R_2(\mathfrak{M}_1)$ .** Воспользовавшись формулой (5), затем имея в виду, что  $1 - \frac{1}{n} < 1 - \theta(n)$ ,

$0,5r - 2 - r\varepsilon > 2$ , а также пользуясь соотношением  $H = N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$ , имеем

$$\begin{aligned} R_2(\mathfrak{M}_1) &\ll \frac{1}{N_r^{n-1}} \left(\frac{H_r}{\mathcal{L}}\right)^{0,5r+1+r\varepsilon} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{0,5r+1+r\varepsilon}} \left(\frac{N^{1-\frac{1}{n}}}{H}\right)^{\frac{r}{2}-2-r\varepsilon} \ll \\ &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{0,5r+1+r\varepsilon}} \left(\frac{N^{1-\theta(n)+\varepsilon}}{H}\right)^{\frac{r}{2}-2-r\varepsilon} N^{-\varepsilon\left(\frac{r}{2}-2-r\varepsilon\right)} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}. \end{aligned} \quad (12)$$

**3. Оценка  $R_1(\mathfrak{M}_1)$**  Оценивая тригонометрический интеграл по величине производной первого порядка, найдём

$$|\gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k})| \leq \min\left(1, \frac{1}{|\lambda| H}\right). \quad (13)$$

Подставляя эту оценку в правую часть (11), получим

$$R_1(\mathfrak{M}_1) \ll \sum_{v=1}^{r-1} \int_0^{\eta_q} \min\left(1, \frac{1}{\lambda^v H^v}\right) d\lambda \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} q^{\sigma(v)} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_v \leq r} \prod_{k=1}^v H_{i_k}. \quad (14)$$

Воспользовавшись условием  $q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}$ , а затем и соотношением (5), находим  $\eta_q H \geq 0, 2\mathcal{L}$ , то есть  $H^{-1} < \eta_q$ . Обозначая интеграл по  $\lambda$  в (14) через  $I(\nu)$ , а затем разбивая отрезок интегрирования на отрезки  $[0, H^{-1}]$  и  $[H^{-1}, \eta_q]$ , имеем

$$I(\nu) \leq \frac{\nu}{(\nu-1)H}, \quad \nu \geq 2, \quad I(1) \leq \frac{\mathcal{L}}{H}.$$

Воспользовавшись соотношением (5), найдём

$$\prod_{k=1}^{\nu} H_{i_k} = \prod_{k=1}^{\nu} \frac{2H}{n\mu_{i_k}^{1-\frac{1}{n}} N^{1-\frac{1}{n}}} \left( 1 + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right) \right) \ll \left( \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}} \right)^{\nu}.$$

Подставляя правую часть этого неравенства и оценку для интеграла  $I(\nu)$  в (14), пользуясь при  $k = r$  формулой (5), а затем последовательно имея в виду, что  $1 - \frac{1}{n} < 1 - \theta(n, r)$ ,  $\frac{r}{n} - \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \varepsilon > 1$ ,  $H = N^{1-\theta(n, r)+\varepsilon}$ , имеем

$$\begin{aligned} R_1(\mathfrak{M}_1) &\ll \sum_{\nu=1}^{r-1} C_r^{\nu} \frac{\mathcal{L}^{1+\nu}}{H} \left( \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}} \right)^{\sigma(\nu)+\nu+1} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}}} \mathcal{L}^{\frac{r-3}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \varepsilon} \left( \frac{N^{1-\frac{1}{n}}}{H} \right)^{\frac{r-3}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \varepsilon} \\ &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}}} \mathcal{L}^{\frac{r-3}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \varepsilon} \left( \frac{N^{1-\theta(n, r)+\varepsilon}}{H} \right)^{\frac{r-3}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \varepsilon} N^{-\varepsilon \left( \frac{r-3}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \varepsilon \right)} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}. \end{aligned} \tag{15}$$

**4. Вычисление интеграла  $\mathcal{A}(r, q)$**  Разбиваем интервал интегрирования на интервалы  $|\lambda| \leq \eta$  и  $\eta < |\lambda| \leq \eta_q$  и обозначим интегралы по этим интервалам соответственно через  $\mathcal{A}_1(r, q)$  и  $\mathcal{A}_2(r, q)$ . Интеграл  $\mathcal{A}_1(r, q)$  доставляет главный член асимптотической формулы для  $\mathcal{A}(r, q)$ , а  $\mathcal{A}_2(r, q)$  входит в его остаточный член. Найдём сначала асимптотическую формулу для  $\mathcal{A}_1(r, q)$ . Пользуясь соотношением  $N_k^n = \mu_k N + H$ , формулой (5) и неравенством  $|\lambda| \leq \eta \leq H^{-1} \mathcal{L}$ , являющиеся следствием (7) и (5), получим

$$f_k(u) = \lambda \left( N_k + H_k \left( u - \frac{1}{2} \right) \right)^n = \mu_k N \lambda + 2H \lambda u + O\left(\frac{H \mathcal{L}}{N}\right).$$

Отсюда, имея в виду, что  $e(R_3(N, H)) = 1 + O(HN^{-1} \mathcal{L})$ , найдём

$$\gamma(\lambda; N_k, H_k) = e(\mu_k N \lambda) \frac{\sin(2\pi H \lambda)}{2\pi H \lambda} + O\left(\frac{H \mathcal{L}}{N}\right).$$

Умножая обе части этих формул по всем  $k = 1, 2, \dots, r$ , имеем

$$\prod_{k=1}^r \gamma(\lambda; N_k, H_k) - \frac{\sin^r(2\pi H \lambda)}{(2\pi H \lambda)^r} e(N\lambda) \ll \frac{H^r \mathcal{L}^r}{N^r} + \frac{|\sin(2\pi H \lambda)|^{r-1}}{|2\pi \lambda H|^{r-1}} \cdot \frac{H \mathcal{L}}{N}.$$

Отсюда, из определения интеграла  $\mathcal{A}_1(r, q)$  находим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(r, q) &= \int_{|\lambda| \leq \eta} \frac{\sin^r(2\pi H \lambda)}{(2\pi H \lambda)^r} d\lambda + O\left(\frac{1}{H \mathcal{L}^7}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi H} \int_0^\infty \frac{\sin^r t}{t^r} dt + O\left(\frac{1}{H \mathcal{L}^7}\right) = \frac{\gamma(n, r)}{H} + O\left(\frac{1}{H \mathcal{L}^7}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

$$\gamma(n, r) = \frac{r^{r-1} - \frac{r}{1!}(r-2)^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2!}(r-4)^{r-1} - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(r-6)^{r-1} + \dots}{2^r (r-1)!}.$$

Оценим сверху интеграл  $\mathcal{A}_2(r, q)$ . Воспользовавшись оценкой (13), имеем

$$\mathcal{A}_2(r, q) \leq 2 \int_{\eta}^{\eta_q} \min\left(1, \frac{1}{\lambda^r H^r}\right) d\lambda = \frac{2}{H^r} \int_{\eta}^{\eta_q} \frac{d\lambda}{\lambda^r} \leq \frac{2}{(r-1)H^r \eta^{r-1}} \ll \frac{1}{H \mathcal{L}^{r-1}}.$$

Из этой оценки и формулы (16) находим

$$\mathcal{A}(r, q) = \frac{\gamma(n, r)}{H} + O\left(\frac{1}{H \mathcal{L}^{r-1}}\right). \tag{17}$$

**5. Вывод асимптотической формулы для интеграла  $J(\mathfrak{M}_1)$**  Подставляя правые части формул (17), (15) и (12) в (10), найдём

$$J(\mathfrak{M}_1) = \frac{\gamma(n, r)}{H} \mathfrak{S}\left(N, \frac{H_r}{\mathcal{L}}\right) \prod_{i=1}^r H_i + R_9(N, H) + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}\right), \tag{18}$$

$$\mathfrak{S}\left(N, \frac{H_r}{\mathcal{L}}\right) = \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \frac{S^r(a, q)}{q^r} e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

$$R_9(N, H) \ll \frac{1}{H \mathcal{L}^{r-1}} \prod_{i=1}^r H_i \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \left| \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \frac{S^r(a, q)}{q^r} e\left(-\frac{aN}{q}\right) \right|.$$

Вычислим двойную сумму  $\mathfrak{S}(N, H_r, \mathcal{L}^{-1})$ . Для этого сумму по  $q$  заменим близким к ней бесконечным рядом  $\mathfrak{S}(N)$ , независимым от  $H_r, \mathcal{L}^{-1}$ . Воспользовавшись оценкой  $|S(a, q)| \ll q^{-\frac{n-1}{n}}$ , соотношением (5), имеем

$$\mathfrak{S}\left(N, \frac{H_r}{\mathcal{L}}\right) = \mathfrak{S}(N) + O\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{r-1}}\right), \quad \mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \frac{S_3^9(a, q)}{q^9} e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

$$\prod_{i=1}^r H_i = \frac{2^r H^r}{n^r N^{\frac{r-r}{n}}} \prod_{i=1}^r \mu_i^{-1+\frac{1}{n}} \left(1 + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right)\right),$$

$$R_9(N, H) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}} \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{q^{\frac{r-1}{n}}} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}.$$

Отсюда и из (18) найдём

$$J(\mathfrak{M}_1) = \frac{2^r \gamma(n, r)}{n^r} \prod_{i=1}^r \mu_i^{-1+\frac{1}{n}} \mathfrak{S}(N) \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}\right).$$

**6. Оценка интеграла  $J(\mathfrak{M}_2)$**  Имеем

$$J(\mathfrak{M}_2) = \int \prod_{\mathfrak{M}_2, k=1}^r T(\alpha; N_k, H_k) e(-\alpha N) d\alpha. \tag{19}$$

Суммы  $T(\alpha; N_k, H_k)$  в произведении  $\prod_{k=1}^r T(\alpha; N_k, H_k)$  симметричны, поэтому не ограничивая общности будем считать, что выполняется соотношение

$$\max_{1 \leq k \leq r} \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_k, H_k)| = \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)|, \quad 1 \leq \nu \leq r.$$

С учётом этого равенства, переходя в интеграле (19) к оценкам, и пользуясь тем, что среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического, а затем, теорему работы [13] и соотношение  $H_\nu \leq H_1 \ll HN^{-1+\frac{1}{n}}$ , последовательно имеем

$$J(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}}} \cdot \frac{N^{n-\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n}\varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}} \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)|. \tag{20}$$

Оценим  $T(\alpha; N_\nu, H_\nu)$  для  $\alpha \in \mathfrak{M}_2$  и рассмотрим два возможных случая.

Случай  $\eta_q < |\lambda| \leq \frac{1}{2nqN_v^{n-1}}$ . Согласно следствию 1.1 работы [12], формулой (5), оценкой (13),

имеем

$$T(\alpha; N_v, H_v) \ll \frac{H_v S(a, q)}{q} \gamma_n(\lambda; N_v, H_v) + q^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \ll \ll \frac{H}{N^{\frac{n-1}{n}} q^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{q N^{\frac{n-1}{n}}}{H} + q^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \ll q^{\frac{n-1}{n}} \ll \left(\frac{H_r}{\mathcal{L}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \ll \frac{H^{\frac{n-1}{n}}}{N^{\frac{(n-1)^2}{n^2}} \mathcal{L}^{1-\frac{1}{n}}}.$$

Подставляя последнюю оценку в (20), находим

$$J(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}}} \cdot \frac{N^{\frac{n-1}{n} - \frac{n-1}{n} \varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}} \cdot \frac{H^{\frac{n-1}{n}}}{N^{\frac{(n-1)^2}{n^2}} \mathcal{L}^{1-\frac{1}{n}}} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}.$$

Случай  $\frac{1}{2nqN_v^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$ . В этом случае из следствия 1.2 работы [12], условиям

$H_r < N, \mathcal{L}^{-1}$  и  $q \leq H, \mathcal{L}^{-1}$ , а также соотношениям (5), имеем

$$|T(\alpha; N_v, H_v)| \ll q^{\frac{n-1}{n}} \ln q + \min\left(H_v q^{\frac{1}{n}}, N_v^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}\right) \ll H^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} N^{\frac{1}{2} + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \mathcal{L}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}.$$

Отсюда и из (20) находим

$$J(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}}} \cdot \frac{N^{\frac{n-1}{n} - \frac{n-1}{n} \varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}} \cdot H^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} N^{\frac{1}{2} + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \mathcal{L}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}.$$

**7. Оценка интеграла  $J(\mathfrak{m})$ .** Поступая как в случае оценки  $J(\mathfrak{M}_2)$ , имеем

$$J(\mathfrak{m}) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}}} \cdot \frac{N^{\frac{n-1}{n} - \frac{n-1}{n} \varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}} \max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |T(\alpha; N_v, H_v)|, \quad 1 \leq v \leq r.$$

Оценим  $T(\alpha; N_v, H_v)$  для  $\alpha \in \mathfrak{m}$ , для этого, пользуясь теоремой работы [6], а также соотношением

$H = N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$ , имеем

$$J(\mathfrak{m}) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}}} \cdot \frac{N^{\frac{n-1}{n} - \frac{n-1}{n} \varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}} \cdot \frac{H^{1-\frac{2n-2}{r-1}+\varepsilon}}{N^{\binom{1-1}{n}(1+\varepsilon) - \binom{n-1-1}{n} \frac{2}{r-1}}} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{\frac{r-r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}.$$

Подставляя найденные оценки для  $J(\mathfrak{M}_1)$ ,  $J(\mathfrak{M}_2)$  и  $J(\mathfrak{m})$  в (8), получим утверждение теоремы.

Поступило 12.03.2024 г.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Wright E.M. An extension of Waring's problem. – Philos. Trans. R. Soc. Lond., 1933, ser. A 232, pp. 1-26.
2. Wright E.M. Proportionality conditions in Waring's problem. – Mathematische Zeitschrift, 1934, v. 38, pp. 730-746.
3. Dirk Daemen. The asymptotic formula for localized solutions in Waring's problem and approximations to Weyl sums. – Bull. London Math. Soc., 2010, v. 42. pp. 75-82.
4. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2014, т. 95, вып. 3, с. 445-456.
5. Рахмонов З.Х., Назрублов Н.Н., Рахимов А.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения. – Чебышевский сборник, 2015, т. 16, в. 1(53), с. 232-247.
6. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Проблема Варинга с почти пропорциональными слагаемыми. – Доклады НАНТ, 2023, т.66, №9-10, с. 481-488.
7. Рахмонов З.Х., Азамов А.З., Назрублов Н.Н. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малых дугах. – ДАН РТ, 2018, т. 61, №7-8, с. 609-614.
8. Рахмонов З.Х., Мирзоабдугафуров К.И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми. – ДАН РТ, 2008, т. 51, №2, с. 83-86.
9. Рахмонов З. Х., Азамов А.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми. – ДАН РТ, 2011, т. 54, №3, с. 34-42.
10. Рахмонов З.Х., Азамов А.З., Назрублов Н.Н. Асимптотическая формула в обобщении проблемы Варинга для почти пропорциональных кубов. – Доклады НАНТ, 2023, т. 66, №1-2, с. 5-10.
11. Рахмонов З.Х. Обобщение проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов – Чебышевский сборник, 2023, т. 24. №3.
12. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля в больших дугах. – Доклады НАНТ, 2023, т. 66, №11-12, с. 625-633.
13. Рахмонов З.Х. Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля. – Доклады НАНТ, 2023, т. 66, №7-8, с. 365-371.

**З.Х.Рахмонов, Ф.З.Рахмонов**

**ФОРМУЛАИ АСИМПТОТЌИ ДАР МУАММОИ ВАРИНГ БО  
ЧАМЪШАВАНДАҲОИ ҚАРИБ МУТАНОСИБ**

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*Институти математикаи ба номи А. Ҷўраеви АМИ Тоҷикистон*

Ҳангоми  $n \geq 3$  барои миқдори тасвирҳои адади кифоя калони натуралии  $N$  дар намуди суммаи  $r = 2^n + 1$  – то дараҷаҳои  $n$  -уми ададҳои натуралии  $x_i$ ,  $i = \overline{1, r}$  бо шартҳои

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq H, \quad H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}, \quad \theta(n,r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)},$$

$\mu_1, \dots, \mu_r$  — ададҳои мусбати фиксиронидашуда ва  $\mu_1 + \dots + \mu_r = 1$ , формулаи асимптотӣ гирифта шудааст. Ин натиҷа аз теоремаи Е.М.Райт қавитар буда, инчунин аз теоремаи Дерк Деймон ҳам барои  $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  ба мазмуни миқдори ҷамъшавандаҳо беҳтар мебошад.

**Калимаҳои калидӣ:** муаммои Варинг, ҷамъшавандаҳои қариб мутаносиб, суммаи кӯтоҳи тригонометрии Г.Вейл, атрофи хурди марказҳои камонҳои калон.

Z.Kh.Rakhmonov, F.Z.Rakhmonov

## ASYMPTOTIC FORMULA IN THE WARING'S PROBLEM WITH ALMOST PROPORTIONAL SUMMANDS

*National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*A.Dzhuraev Institute of Mathematics, NAS Tajikistan*

For  $n \geq 3$ , an asymptotic formula has been derived for the number of representations of a sufficiently large natural  $N$  as the sum of  $r = 2^n + 1$  summands, each of which is the  $n$ -th power of the natural numbers  $x_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ , satisfying the conditions

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq H, \quad H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}, \quad \theta(n,r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)},$$

where  $\mu_1, \dots, \mu_r$  — positive fixed numbers and  $\mu_1 + \dots + \mu_r = 1$ . This result strengthens E. M. Wright's theorem from 1934 and is also stronger than Derk Damon's theorem in terms of the number of summands, particularly for  $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ .

**Key words:** Waring's problem, almost proportional Summands, H.Weil's short exponential sum, small neighborhood of centers of major arcs.

### Сведения об авторах

1. **Рахмонов Зарулло Хусенович** – доктор физ.-мат. наук, Институт математики им.А.Джураева НАН Таджикистана, главный научный сотрудник. E-mail: zarullo-r@rambler.ru;
2. **Рахмонов Фируз Зарулло Хусенович** – кандидат физ.-мат. наук, Институт математики им.А.Джураева НАН Таджикистана, заведующий отделом. E-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com.



УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Х.А.Абдусаломзода

**О СОВМЕСТНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ***Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 24.01.2024 г.)*

В работе решается ряд экстремальных задач, связанных с наилучшим совместным полиномиальным приближением аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди  $H_2$ . Получен ряд точных теорем о совместном приближении функций и их производных комплексными алгебраическими полиномами и их последовательными производными на некоторых классах функций, принадлежащих пространству Харди, вычислены точные значения верхних граней наилучших совместных приближений на указанных классах функций.

**Ключевые слова:** наилучшее совместное приближение, аналитическая функция, модуль непрерывности, экстремальная задача, угловое граничное значение.

**1. Введение.** Экстремальные задачи о наилучшем совместном полиномиальном приближении аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространствам Харди  $H_2$  и Бергмана  $B_2$  рассматривались в недавно опубликованных работах [1] и [2]. В [3] сформулированная задача для некоторых классов аналитических в единичном круге функций рассматривалась в пространстве  $H_q (1 \leq q \leq \infty)$ . Там же найдены точные значения верхних граней совместных полиномиальных приближений исследуемых классов функций.

Здесь обобщаются некоторые результаты из [1] на более общие классы аналитических функции.

Обозначим через  $L_2 := L_2[0, 2\pi]$  гильбертово пространство  $2\pi$ -периодических комплекснозначных функций с обычным скалярным произведением и нормой

$$(f, g) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad (1)$$

$$\|f\|_{L_2} := \sqrt{(f, f)} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (2)$$

**Адрес для корреспонденции:** Абдусаломзода Хусрав Абдусалом. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Академикова Раджабовых, 10, Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими. E-mail: [abdusalomzoda1505@mail.ru](mailto:abdusalomzoda1505@mail.ru)

**Определение 1.** [4]. Говорят, что аналитическая в единичном круге  $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

принадлежит пространству Харди  $H_2$ , если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{H_2} = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 dt \right)^{1/2} < \infty. \tag{3}$$

Хорошо известно (см., например, [5, с.279-280]), что в (3) интеграл не убывает при возрастании  $\rho$  и почти всюду на окружности  $\Gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  существуют угловые граничные значения  $f(e^{it}) = F(t)$ .

При этом  $F \in L_2[0, 2\pi]$  и

$$\|f\|_2 = \|F\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Производную  $r$ -го ( $r \in \mathbb{N}$ ) порядка функции  $f \in A(U)$  определим как обычно

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^{(r)} f(z)}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-r+1) c_k(f) z^{k-r}, \tag{4}$$

а угловое граничное значение производной (4) обозначим через  $f^{(r)}(e^{it})$ . Введем обозначение

$$\alpha_{n,r} := n(n-1) \cdots (n-r+1) = n! / (n-r)!, \quad r \in \mathbb{N}, n > r. \tag{5}$$

Символом  $H_2^{(r)}$  ( $r \in \mathbb{Z}_+, H_2^{(0)} = H_2$ ) обозначим множество функций  $f \in A(U)$ , принадлежащих  $H_2$ , производная  $r$ -го порядка  $f^{(r)}(z)$  которых также принадлежит  $H_2$ :

$$H_2^{(r)} := \{f \in H_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty\}.$$

Пусть  $\mathcal{P}_{n-1}$  – подпространство комплексных алгебраических полиномов степени не выше  $n-1$ .

Поскольку для  $f \in H_2^{(r)}$  наравне с функцией  $f$  последовательные производные  $f^{(s)}$  ( $s = 1, 2, \dots, r-1$ ) также принадлежат пространству  $H_2$  (см. [6]), то представляет несомненный интерес отыскание точных значений наилучших совместных приближений

$$E_{n-v-1}(f^{(v)})_2 := \inf \left\{ \|f^{(v)} - p_{n-1}^{(v)}\|_2 : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} \tag{6}$$

на некотором подмножестве функций  $\mathfrak{N} \subset H_2^{(r)}$  или на самом классе  $H_2^{(r)}$ . Таким образом, требуется найти точное значение величины

$$E_{n-v-1}^{(v)}(\mathfrak{N})_2 := \sup \{ E_{n-v-1}(f^{(v)})_2 : f \in \mathfrak{N} \}. \tag{7}$$

В данной работе доказано несколько точных неравенств, связывающих величины наилучших приближений различных производных функции или величину наилучшего приближения одной производной с модулем непрерывности другой производной. Полученные неравенства являются точными и обращаются в равенство на функции  $f_0(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$ . Поскольку в данной работе используются только пространства  $H_2$  и  $L_2$ , то с учетом равенства  $\|f\|_2 = \|F(e^{it})\|_{L_2}$  всюду далее индексы у норм  $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_{L_2}$  будем опускать. Аналогично поступаем с величинами, определяемыми с помощью этих норм. Так, вместо  $E_{n-v-1}(f^{(v)})_2, \mathfrak{E}_{n-v-1}^{(v)}(\mathfrak{N})_2$  будем писать  $E_{n-v-1}(f^{(v)}), \mathfrak{E}_{n-v-1}^{(v)}(\mathfrak{N})_2$ .

**2. Формулировка и доказательство основных результатов.**

В [1] доказано, что для произвольной функции  $f \in H_2^{(r)}, r \in \mathbb{Z}_+$  при любых  $n \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{Z}_+$ , удовлетворяющих условию  $n > r \geq v$ , имеет место неравенство

$$E_{n-v-1}(f^{(v)}) \leq \frac{\alpha_{n,v}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)}), \tag{8}$$

обращающееся в равенство для функции  $f_0(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$ . Там же доказано, что для модуля непрерывности  $m$ -го ( $m \in \mathbb{N}$ ) порядка производной  $r$ -го порядка  $f^{(r)} \in H_2$  справедливо равенство

$$\omega_m(f^{(r)}, t) = 2^m \sup_{|h| \leq t} \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 (1 - \cos(k-r)h)^m. \tag{9}$$

Имеет место следующая

**Теорема 1.** *При любых  $n, m \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, n > r \geq s, 0 < (n-r)u \leq \pi/2$  справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,v}) E_{n-v-1}(f^{(v)})_2}{\left\{ \int_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 dt \right\}^{m/2}} = \left\{ \frac{n-r}{2((n-r)u - \sin(n-r)u)} \right\}^{m/2}. \tag{10}$$

**Доказательство.** Докажем, что для произвольной функции  $f \in H_2$  выполняется неравенство

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \cos kt \leq E_{n-1}^{2-2/m}(f) \frac{1}{2} \omega_m^{2/m}(f; t). \tag{11}$$

Не ограничивая общности, ограничимся функциями  $f \in H_2^{(r)}$ , у которых  $c_k(f) = 0, k = \overline{0, n-1}$ , то есть имеют вид

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) z^k \in H_2^{(r)}.$$

Для таких функций норма разности  $m$ -го порядка имеет вид

$$\|\Delta_t^m(f)\|^2 = 2^m \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 (1 - \cos kt)^m. \tag{12}$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \cos kt &= \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 (1 - \cos kt) = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} (|c_k(f)|^2)^{1-k/m} (|c_k(f)|^2)^{k/m} (1 - \cos kt). \end{aligned}$$

Применяя к правой части полученного соотношения неравенство Гельдера для сумм

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^q \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

где  $\alpha_k, \beta_k \geq 0, k \in \mathbb{N}$ , полагая  $p := m / (m - 1), q = m$ , а также учитывая формулу

$\sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 = E_{n-1}^2(f)$  и равенство (12), запишем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \cos kt &\leq \\ &\leq \left( \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \right)^{1-1/m} \left( \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 (1 - \cos kt)^m \right)^{1/m} \leq \\ &\leq E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2} \left( 2^m \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 (1 - \cos kt)^m \right)^{1/m} = \\ &= E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2} \|\Delta_t^m(f)\|^{2/m} \leq E_{n-1}^{2-2/m} \cdot \frac{1}{2} \omega_m^{2/m}(f, t), \end{aligned}$$

и неравенство (11) доказано.

Интегрируя обе части неравенства (11) по переменной  $t$  от 0 до  $u$ , будем иметь

$$u E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \cdot \frac{\sin ku}{k} + E_{n-1}^{2-2/m} \cdot \frac{1}{2} \int_0^u \omega_m^{2/m}(f, t) dt. \tag{13}$$

Поделив обе части (13) на  $u$ , получаем

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \cdot \frac{\sin ku}{ku} + E_{n-1}^{2-2/m} \cdot \frac{1}{2u} \int_0^u \omega_m^{2/m}(f, t) dt. \quad (14)$$

Пользуясь тем фактом, что [7]

$$\max_{u \geq nt} \left| \frac{\sin u}{u} \right| = \frac{\sin nt}{nt}, \quad 0 \leq nt \leq \frac{\pi}{2},$$

из неравенства (14) будем иметь

$$\left(1 - \frac{\sin nu}{nu}\right) E_{n-1}^2(f) \leq E_{n-1}^{2-2/m} \cdot \frac{1}{2u} \int_0^u \omega_m^{2/m}(f, t) dt. \quad (15)$$

Отсюда сразу следует неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \left\{ \frac{n}{2(nu - \sin nu)} \right\}^{m/2} \left\{ \int_0^u \omega_m^{2/m}(f, t) dt \right\}^{m/2}. \quad (16)$$

Если теперь предположить, что функция  $f \in H_2^{(r)}$ , то из (16) вытекает, что

$$\begin{aligned} E_{n-r-1}(f^{(r)})_2 &\leq \\ &\leq \left\{ \frac{n-r}{2((n-r)u - \sin(n-r)u)} \right\}^{m/2} \left\{ \int_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \right\}^{m/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Применяя формулу (8) и учитывая неравенство (17), получаем

$$\begin{aligned} E_{n-v-1}(f^{(v)}) &\leq \frac{\alpha_{n,v}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)}) \leq \\ &\leq \frac{\alpha_{n,v}}{\alpha_{n,r}} \left\{ \frac{n-r}{2((n-r)u - \sin(n-r)u)} \right\}^{m/2} \left\{ \int_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \right\}^{m/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) сразу следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (10):

$$\sup_{f \in H_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,v}) E_{n-v-1}(f^{(v)})}{\left\{ \int_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \right\}^{m/2}} \leq \left\{ \frac{n-r}{2((n-r)u - \sin(n-r)u)} \right\}^{m/2}. \quad (19)$$

С целью получения соответствующей оценки снизу введем в рассмотрение функцию  $f_0(z) = z^n \in H_2^{(r)}$ , для которой простые вычисления дают

$$\omega_m^2(f_0^{(r)}, t) = 2^m \alpha_{n,r}^2 (1 - \cos(n-r)t)^m, \quad 0 < (n-r)t \leq \pi/2, \quad (20)$$

$$E_{n-v-1}(f^{(v)}) = \alpha_{n,v}. \quad (21)$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\left\{ \int_0^u \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t) dt \right\}^{m/2} = \alpha_{n,r} \left\{ \frac{2((n-r)u - \sin(n-r)u)}{n-r} \right\}^{m/2}. \tag{22}$$

Пользуясь равенствами (21) и (22), запишем оценку снизу указанной величины

$$\begin{aligned} \sup_{f \in H_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}) E_{n-v-1}(f^{(v)})}{\left\{ \int_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \right\}^{m/2}} &\geq \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}) E_{n-v-1}(f_0^{(v)})}{\left\{ \int_0^u \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t) dt \right\}^{m/2}} = \\ &= \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,v}) \alpha_{n,v}}{\alpha_{n,r} \left\{ 2((n-r)u - \sin(n-r)u) / (n-r) \right\}^{m/2}} = \\ &= \left\{ \frac{n-r}{2((n-r)u - \sin(n-r)u)} \right\}^{m/2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Из сопоставления неравенств (19) и (23) получаем требуемое равенство (10), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Отметим, что теорема 1 в случае  $m = 1$  доказана в [1].

**Теорема 2.** При любых  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq s$  имеет место равенство

$$\sup_{f \in H_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,v}) E_{n-v-1}(f^{(v)})}{\left\{ \frac{n-r}{\pi} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin(n-r)t dt \right\}^{m/2}} = \left( \frac{\pi}{4} \right)^{m/2}. \tag{24}$$

**Доказательство.** Умножив обе части неравенства (11) на  $\sin nt$  и интегрируя по отрезку  $[0, \pi/n]$  по переменной  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int_0^{\pi/n} \cos kt \sin ntdt &\leq \\ &\leq E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f, t) \sin ntdt. \end{aligned} \tag{25}$$

Так как

$$\int_0^{\pi/n} \cos kt \sin ntdt = \begin{cases} 0, & \text{если } k = n, \\ -\frac{2n}{k^2 - n^2} \cos^2 \frac{k\pi}{2n}, & \text{если } k > n, \end{cases}$$

то из (25) имеем

$$\frac{2}{n} E_{n-1}^2(f) \leq E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f, t) \sin ntdt,$$

или, что то же,

$$E_{n-1}(f) \leq \left( \frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f, t) \sin ntdt \right)^{m/2}. \quad (26)$$

Заменяя в (26) функцию  $f$  на производную  $r$ -го порядка  $f^{(r)}$  и число  $n$  на  $n-r$ , получаем

$$E_{n-r-1}(f^{(r)}) \leq \left( \frac{n-r}{4} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin(n-r)tdt \right)^{m/2}. \quad (27)$$

Учитывая (27) и применяя неравенство (8), запишем

$$E_{n-v-1}(f^{(v)}) \leq \frac{\alpha_{n,v}}{\alpha_{n,r}} \left( \frac{n-r}{4} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin(n-r)tdt \right)^{m/2}. \quad (28)$$

Неравенство (28) справедливо для любой функции  $f \in H_2^{(r)}$ , а потому из него следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (24):

$$\sup_{f \in H_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,v}) E_{n-v-1}(f^{(v)})}{\left\{ \frac{n-r}{\pi} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin(n-r)tdt \right\}^{m/2}} \leq \left( \frac{\pi}{4} \right)^{m/2}. \quad (29)$$

Для ранее рассмотренной нами функции  $f_0(z) = z^n \in H_2^{(r)}$ , для которой при всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq s$  имеют место равенства (20) и (21), простыми вычислениями также получаем

$$\left( \frac{n-r}{\pi} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t) \sin(n-r)tdt \right)^{m/2} = \alpha_{n,r} \left( \frac{4}{\pi} \right)^{m/2}. \quad (30)$$

Пользуясь равенствами (21) и (30), запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in H_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,v}) E_{n-v-1}(f^{(v)})}{\left( \frac{n-r}{4} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin(n-r)tdt \right)^{m/2}} \geq \\ & \geq \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,v}) E_{n-v-1}(f_0^{(v)})}{\left( \frac{n-r}{4} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t) \sin(n-r)tdt \right)^{m/2}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,v})\alpha_{n,v}}{\alpha_{n,r}(4/\pi)^{m/2}} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{m/2}. \tag{31}$$

Сопоставив оценку сверху (29) с оценкой снизу (31), получаем требуемое равенство (24). Теорема 2 доказана.

Из доказанной теоремы 2 вытекает

**Следствие 1.** При всех  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq s$  для произвольной функции  $f \in H_2^{(r)}$  справедливо неравенство

$$E_{n-v-1}(f^{(v)}) \leq \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,v}}{\alpha_{n,r}} \omega_m \left( f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} \right). \tag{32}$$

Очевидно, что неравенство (32) является неравенством типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного приближения функции  $f \in H_2^{(r)}$  и её промежуточных производных  $f^{(v)} \in B_2$  ( $v = 1, 2, \dots, r-1, r \geq 2, r \in \mathbb{N}$ ) полиномами  $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$  и их промежуточными производными  $p_{n-1}^{(v)} \in \mathcal{P}_{n-v-1} (0 \leq v \leq r-1)$ .

Если функция  $\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)$  для любого  $t \in [0, \pi / (n-r)]$  удовлетворяет условию

$$\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) + \omega_m^{2/m} \left( f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} - t \right) \leq 2\omega_m^{2/m}(f^{(r)}; \pi / 2(n-r)). \tag{33}$$

В частности, если она выпукла вверх на  $[0, \pi / (n-r)]$ , то неравенство (32) можно уточнить. Для этого, повторяя схему рассуждений, приведенную в [8, с.266], применительно к интегралу в правой части неравенства (28), где в качестве  $l(t)$  вместо линейной функции взята функция  $l(t) = \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)$  при  $t \in [0, \pi / 2(n-r)]$  и  $l(t) = 2\omega_m^{2/m}(f^{(r)}; \pi / 2(n-r)) - \omega_m^{2/m}(f^{(r)}; \pi / (n-r) - t)$  при  $t \in [\pi / 2(n-r), \pi / (n-r)]$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{n-r}{4} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin(n-r)t dt = \\ & = \frac{n-r}{4} \left( \int_0^{\pi/2(n-r)} + \int_{\pi/2(n-r)}^{\pi/(n-r)} \right) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin(n-r)t dt = \\ & = \frac{n-r}{4} \int_0^{\pi/2(n-r)} [\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) + \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \pi / (n-r) - t)] \sin(n-r)t dt \leq \\ & \leq \frac{n-r}{4} \cdot 2\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \pi / 2(n-r)) \int_0^{\pi/2(n-r)} \sin(n-r)t dt = \\ & = \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \pi / 2(n-r)). \end{aligned} \tag{34}$$



Учитывая неравенство (34) из (28) получаем

**Следствие 2.** На множестве функций  $f \in H_2^{(r)}$ , у которых  $\omega_m^{(2/m)}(f^{(r)}, t)$  удовлетворяет условию (33) при всех  $\nu = [0, r]$ , справедливо неравенство типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)}) \leq \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} \omega_m \left( f^{(r)}, \frac{\pi}{2(n-r)} \right),$$

которое обращается в равенство для функции  $f_0(z) = z^n \in H_2^{(r)}$ ,  $n > r \geq \nu$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$ . Таким образом

$$\sup_{f \in H_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,\nu}) E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})}{\omega_m(f^{(r)}, \pi / 2(n-r))} = \frac{1}{2^{m/2}}.$$

### 3. Решение экстремальной задачи (7) для некоторых классов функций.

Пусть  $\Phi(u)$  – положительная возрастающая функция такая, что  $\Phi(0) = 0$ . Для любых  $m \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$  и  $u \in (0, 2\pi]$  в  $H_2^{(r)}$  определим класс функций:

$$W^{(r)}(\omega_m, \Phi) := \left\{ f \in H_2^{(r)} : \frac{\pi}{2u} \int_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin \frac{\pi}{u} t dt \leq \Phi^2(u) \right\}.$$

Положим

$$(1 - \cos t)_* := \{1 - \cos t, \text{ если } 0 < t \leq \pi; 2, \text{ если } t \geq \pi\}.$$

Пользуясь результатом теоремы 2, вычислим точное значение экстремальной задачи (7) для класса  $W^{(r)}(\omega_m, \Phi)$ .

**Теорема 3.** Пусть мажоранта  $\Phi$  при любом  $\mu > 0$  и  $u \in (0, 2\pi]$  удовлетворяет ограничению

$$\Phi^2 \left( \frac{u}{\mu} \right) \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos t)_* \sin \frac{t}{\mu} dt \leq 2\mu\Phi^2(u). \tag{35}$$

Тогда при всех  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq s$  имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-\nu-1}^{(\nu)}(W^{(r)}(\omega_m, \Phi)) = \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi^m \left( \frac{\pi}{n-r} \right). \tag{36}$$

**Доказательство.** Неравенство (28) перепишем в следующем виде

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)}) \leq \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} \left( \frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}. \tag{37}$$

Из неравенства (37), учитывая определение класса  $W^{(r)}(\omega_m, \Phi)$ , получаем

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{n-v-1}^{(v)}(W^{(r)}(\omega, \Phi)) = \\ & = \sup \left\{ E_{n-v-1}(f^v) : f \in W^{(r)}(\omega_m, \Phi) \right\} \leq \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,v}}{\alpha_{n,r}} \Phi^m \left( \frac{\pi}{n-r} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

и тем самым оценка сверху величины в левой части (36) получена. Из (36), в частности, следует, что

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}(\omega_m, \Phi)) = \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi^m \left( \frac{\pi}{n-r} \right). \quad (39)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу, в силу неравенства (39) в множестве полиномов  $\mathcal{P}_n$  введем  $(n+1)$ -мерный шар

$$\mathcal{B}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \| p_n \| \leq \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi^m \left( \frac{\pi}{n-r} \right) \right\}$$

и покажем, что  $\mathcal{B}_{n+1} \subset W^{(r)}(\omega_m, \Phi)$ . Хорошо известно [8], что для произвольного полинома  $p_n \in \mathcal{P}_n$  имеет место неравенство

$$\omega_m^2(p_n^{(r)}, t) \leq 2^m \alpha_{n,r}^2 (1 - \cos(n-r)t)_*^m \| p_n \|^2. \quad (40)$$

Учитывая (40) и ограничение (35), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2u} \int_0^u \omega_m^{2/m}(p_n^{(r)}, t) \sin \frac{\pi}{u} t dt \leq \\ & \leq 2 \alpha_{n,r}^{2/m} \cdot \| p_n \|^2 \frac{\pi}{2u} \int_0^u (1 - \cos(n-r)t)_* \sin \frac{\pi}{u} t dt \leq \\ & \leq \frac{\pi}{2u} \Phi^2 \left( \frac{\pi}{n-r} \right) \int_0^u (1 - \cos(n-r)t)_* \sin \frac{\pi}{u} t dt \leq \\ & \leq \frac{n-r}{2\mu} \Phi^2 \left( \frac{u}{\mu} \right) \int_0^{\pi u/(n-r)} (1 - \cos(n-r)t)_* \sin \frac{(n-r)t}{\mu} dt = \\ & = \frac{1}{2\mu} \Phi^2 \left( \frac{u}{\mu} \right) \int_0^{\pi u} (1 - \cos t)_* \sin \frac{t}{\mu} dt \leq \Phi^2(u). \end{aligned}$$

Этим включение  $\mathcal{B}_{n+1} \subset W^{(r)}(\omega_m, \Phi)$  доказано.

Введём в рассмотрение функцию

$$g_0(z) = \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi^m \left( \frac{\pi}{n-r} \right) z^n, \quad n > r.$$

Поскольку

$$\|g_0(z)\| = \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi^m\left(\frac{\pi}{n-r}\right),$$

функция  $g_0$  является элементом шара  $\mathcal{B}_{n+1}$ , и, следовательно, входит в класс  $W^{(r)}(\omega_m, \Phi)$ .

Так как при всех  $\nu = 1, 2, \dots, r$  производная  $s$ -го порядка

$$g_0^{(\nu)}(z) = \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} \Phi^m\left(\frac{\pi}{n-r}\right) z^{n-\nu},$$

и, кроме того,

$$E_{n-\nu-1}(g_0^{(\nu)}) = \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} \Phi^m\left(\frac{\pi}{n-r}\right), \quad (41)$$

то, учитывая равенство (41), запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-\nu-1}^{(\nu)}(W^{(r)}(\omega_m, \Phi)) \geq E_{n-\nu-1}(g_0^{(\nu)}) = \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} \Phi^m\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \quad (42)$$

Равенство (36) получаем из сопоставления неравенств (38) и (42), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

В заключение отметим, что условие (35) впервые встречается в работе Н.Айнуллоева [10], который доказал, что этому условию удовлетворяет, например, мажоранта  $\Phi_*(u) := u^{\alpha/2}$  при  $\alpha = \pi^{\alpha/8}$ .

Поступило 24.01.2024 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди. – Труды ИММ УрО РАН., 2021, т.27, №4, с.239-254.
2. Шабозов М.Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана  $B_2$ . – Матем. заметки, 2023, т.114, №3, с.435-446.
3. Шабозов М.Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди. – Труды ИММ УрО РАН., 2023, т.29, №4, с.283-291.
4. Кусис П. Введение в теорию пространств  $H_p$ . – М.: Мир, 1984, 256с.
5. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1964, 440с.
6. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации. – Укр. мат. журнал, 2011, т.63, №12, с.1579-1601.
7. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из  $L_2$ . – Матем. заметки, 1976, т.20, №3, с.433-438.

8. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987, 424 с.
9. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге. – Матем. сборник, 2010, т.201, №8, с.3-22.
10. Айнуллоев Н. Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в  $L_2$ . – ДАН ТаджССР, 1984, т.29, №8, с.415-418.

Х.А.Абдусаломзода

## ОИДИ НАЗДИККУНИИ ЯКЧОЯИ ПОЛИНОМИАЛИИ ФУНКСИЯҶО ВА ҲОСИЛАҶОИ ОНҶО ДАР ФАЗОИ ХАРДИ

*Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ*

Дар мақола якқатор масъалаҳои экстремалӣ, ки ба наздиккунии беҳтарини ҳамҷояи полиномиалии функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ алоқаманд ба фазои Харди  $H_2$  мансуббуда, ҳал карда шудаанд. Якчанд теоремаҳои аниқ оиди наздиккунии якҷояи функсияҳо ва ҳосилаҳо онҳо ба воситаи бисёрузвҳои комплекси алгебравӣ ва ҳосилаҳои пайдарпаи онҳо барои баъзе синфҳои функсияҳо дар фазои Харди исбот карда шуда, қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини ҳамҷоя ҳисоб карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** наздиккунии беҳтарини ҳамҷоя, функсияи аналитикӣ, модули бефосила, масъалаи экстремалӣ, ифодаи сарҳади кунҷӣ.

Kh.A.Abdusalomzoda

## ON THE JOINT POLYNOMIAL APPROXIMATION OF FUNCTIONS AND THEIR DERIVATIVES IN HARDY SPACE

*M.S.Osimi Tajik Technical University*

In the article solves a number of extremal problems related to the best joint polynomial approximation of functions that are analytic in the unit disk and belong to the Hardy space  $H_2$ . A number of exact theorems on the simultaneous approximation of functions and their derivatives by complex algebraic polynomials and their successive derivatives on certain classes of functions belonging to the Hardy space are obtained, and the exact values of the upper bounds of the best simultaneous approximations on these classes of functions are calculated.

**Key words:** best joint approximation, analytic function, modulus of continuity, extremal problem, angular boundary value.

### Сведения об авторе:

1. Абдусаломзода Хусрав Абдусалом – Таджикский технический университета имени М.С.Осими, ассистент кафедры высшей математики. E-mail: abdulomzoda1505@mail.ru

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

М.А.Акобиршоев, Ф.М.Мадимарова\*

**НАИЛУЧШЕЕ СОВМЕСТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ “УГЛОМ” НЕКОТОРЫХ  
КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ  $L_2$** *Технологический университет Таджикистана,**\*Университет Центральной Азии**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 13.02.2024 г.)*

В метрике  $L_2$  получены точные неравенства между величиной наилучших совместных приближений дифференцируемых  $2\pi$ -периодических по каждой из переменных функций  $f(x, y)$  и их последовательных производных  $f^{(\mu, \nu)}(x, y)$  ( $\mu = 0, 1, \dots, r; \nu = 0, 1, \dots, s$ ) тригонометрическими “углами” с двойными интегралами, содержащими смешанные модули непрерывности высших порядков старших производных. Найдены точные значения верхней грани наилучших совместной приближении некоторых классов функций, задаваемых указанными модулями непрерывности.

**Ключевые слова:** наилучшее совместное приближение, тригонометрические “углы”, смешанный модуль непрерывности, верхняя грань.

**1. Введение.** Вспомогательные факты. Целью данной работы является получение результатов, связанных с точными оценками погрешности среднеквадратического совместного приближения функций двух переменных тригонометрическими “углами” и их соответствующими производными. Отметим, что понятие “угол” было введено М.К.Потаповым [1, 2] и в дальнейшем с успехом применялось многими математиками (см., например, [3-12] и литературу, приведенную в них). При решении экстремальных задач аппроксимации функций двух переменных применение аппарата “углов” в качестве аппроксимирующих подпространств имеет заметные преимущества по сравнению с двумерными полиномами и другими традиционными методами, поскольку именно “углы” дают минимальные оценки погрешности на классах функций и реализуют точные значения квазипоперечников [6-12]. Данная статья продолжает указанную тематику и посвящена использованию одной из характеристик гладкости функций, рассмотренных ранее С.Б.Вакарчуком [13, 14].

Предварительно приводим определения и вспомогательные факты, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть  $(X, \|\cdot\|_X)$  и  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  – линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m := \text{span}\{u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)\}, V_n := \text{span}\{v_0(y), v_1(y), \dots, v_n(y)\}$$

**Адрес для корреспонденции:** Акобиршоев Мухиддин Отамишоевич. 734061, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Н.Карабаева, 63/3, Технологический университет Таджикистана. E-mail: muhiddin\_ao@mail.ru

– их конечномерные подпространства  $U_m \subset X, V_n \subset Y$ . Выражение вида

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{\nu=0}^m u_{\nu}(x)\psi_{\nu}(y) + \sum_{\mu=0}^n v_{\mu}(y)\varphi_{\mu}(x),$$

где  $\{\varphi_{\mu}(x)\}_{\mu=0}^n$  и  $\{\psi_{\nu}(y)\}_{\nu=0}^m$  – соответственно произвольные наборы функций из пространств  $X$  и  $Y$ , назовём обобщённым полиномом, порождённым подпространствами  $U_m$  и  $V_n$ . Указанные обобщённые полиномы образуют подпространства, которые обозначим

$$G_{m,n} := G(U_m, V_n) = U_m \otimes Y \oplus V_n \otimes X,$$

где операции “ $\otimes$ ” и “ $\oplus$ ” обозначают соответственно декартово произведение и прямую сумму множеств. Пусть  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  – линейное нормированное пространство, содержащее подпространство  $G_{m,n}$ . Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m,n}(f)_Z &:= \mathcal{E}(f; G_{m,n})_Z = \\ &= \mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z = \inf \{ \|f - g_{m,n}\|_Z : g_{m,n} \in G_{m,n} \} \end{aligned} \quad (1)$$

и если  $\mathfrak{M}$  – некоторое множество функций  $f$ , то положим

$$\mathcal{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, G_{m,n})_Z = \sup \{ \mathcal{E}_{m,n}(f)_Z : f \in \mathfrak{M} \}. \quad (2)$$

Величина (1) характеризует наилучшее приближение элемента  $f \in \mathfrak{M}$  множеством  $G_{m,n}$ , а (2) – отклонение множества  $\mathfrak{M}$  от  $G_{m,n}$  в нормированном пространстве  $(Z, \|\cdot\|_Z)$ . Всюду далее полагаем  $X = Y = L_2[0, 2\pi]$ ,  $Z = L_2(Q)$ ,  $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ . Пусть теперь

$$U_{2m+1}^* := \text{span} \{ e^{ipx} \}_{p=-m}^m \subset L_2[0, 2\pi], V_{2m+1}^* := \text{span} \{ e^{iqy} \}_{q=-n}^n \subset L_2[0, 2\pi].$$

Очевидно, что функция

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{|p| \leq m} \psi_p(y) e^{ipx} + \sum_{|q| \leq n} \phi_q(x) e^{iqy}, \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

принадлежит подпространству  $G(U_{2m+1}^*, V_{2n+1}^*)$ . Функции вида (3) называют тригонометрическими “углами” [1, 2] или тригонометрическими квазиполиномами [15]. Пусть  $L_2 := L_2(Q)$ ,  $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$  – пространство комплекснозначных  $2\pi$ -периодических по каждой из переменных функций  $f$ , суммируемых с квадратом модуля и конечной нормой

$$\|f\|_2 = \|f\|_{L_2(Q)} = \left( \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} |f(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Для функции  $f \in L_2(Q)$  с формальным разложением в двойной ряд Фурье

$$f(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}, \tag{4}$$

где

$$c_{pq}(f) := \frac{1}{4\pi^2} \iint_Q f(x, y) e^{-i(px+qy)} dx dy$$

– двойные коэффициенты Фурье функции  $f \in L_2(Q)$ , квазиполиномом Фурье порядка  $(m, n)$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  называют выражение

$$\Phi_{m,n}(f; x, y) = \left( \sum_{|p| \leq m} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{|q| \leq n} - \sum_{|p| \leq m} \sum_{|q| \leq n} \right) c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}. \tag{5}$$

Легко проверить, что  $\Phi_{m,n}(f)$  принадлежит  $G(U_m^*, V_n^*)$ . В [12] доказано, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1, n-1}^2(f)_{L_2(Q)} &= \\ &= \inf \left\{ \|f - g_{m-1, n-1}\|_{L_2(Q)}^2 : g_{m-1, n-1} \in G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*) \right\} = \\ &= \|f - \Phi_{m-1, n-1}(f)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{|p| \geq m} \sum_{|q| \geq n} |c_{pq}(f)|^2 = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho_{p,q}^2(f), \end{aligned} \tag{6}$$

где для краткости в последней двойной сумме положено

$$\rho_{p,q}^2(f) := |c_{p,q}(f)|^2 + |c_{-p,q}(f)|^2 + |c_{p,-q}(f)|^2 + |c_{-p,-q}(f)|^2. \tag{7}$$

В частности, из (6) следует, что если  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ , то

$$\mathcal{E}_{m-1, n-1}^2(f)_{L_2(Q)} = \mathcal{E}_{m-1}^2(f_1)_{L_2[0, 2\pi]} \cdot \mathcal{E}_{n-1}^2(f_2)_{L_2[0, 2\pi]},$$

где, как обычно,

$$\mathcal{E}_{\nu-1}^2(g)_{L_2[0, 2\pi]} := \inf \left\{ \|g - T_{\nu-1}\|_{L_2[0, 2\pi]}^2 : T_{\nu-1} \in G_{2\nu-1} \right\}$$

– величина наилучшего среднеквадратического приближения  $2\pi$ -периодической функции  $g(x)$  тригонометрическими полиномами  $G_{2\nu-1} := span \left\{ e^{ijx} \right\}_{j=-(\nu-1)}^{\nu-1}$  порядка  $2\nu-1$  в пространстве  $L_2[0, 2\pi]$ .

Через  $C^{(r,s)}(Q)$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$  обозначим множество функций  $f \in C(Q)$ , имеющих в квадрате  $Q$  непрерывные частные производные

$$f^{(\mu,\nu)}(x, y) := \partial^{\mu+\nu} f / \partial x^\mu \partial y^\nu, \quad \mu \leq r, \quad \nu \leq s,$$

а через  $L_2^{(r,s)} := L_2^{(r,s)}(Q)$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$  – множество функций  $f \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 2, s \geq 2$ , у которых частные производные  $f^{(r,\nu)}$ ,  $r \in \mathbb{N}, \nu = \overline{0, s-1}$ ,  $f^{(\mu,s)}$ ,  $\mu = \overline{0, r-1}$ ,  $s \in \mathbb{N}$  существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования, частные производные  $f^{(r,0)}$ ,  $f^{(0,s)}$  и смешанная производная  $f^{(r,s)}$  принадлежат пространству  $L_2$ .

Для произвольной функции  $f \in L_2$  определим модуль непрерывности  $k$ -го порядка по переменной  $x$  и  $l$ -го порядка по переменной  $y$

$$\omega_{k,l}(f; t, \tau)_2 := \sup \left\{ \left\| \Delta_{u,v}^{k,l} f(\cdot, \cdot) \right\|_{L_2(Q)} : |u| \leq t, |v| \leq \tau \right\}, \tag{8}$$

где

$$\Delta_{u,v}^{k,l} f(x, y) = \sum_{\nu=0}^k \sum_{\mu=0}^l (-1)^{\mu+\nu} \binom{k}{\nu} \binom{l}{\mu} f(x + \nu u, y + \mu v).$$

Используя равенство (4) и тождество Парсеваля, величину (8) после выполнения некоторых несложных вычислений можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} & \omega_{k,l}^2(f; t, \tau)_2 := \\ & := 2^{k+l} \sup \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \rho_{p,q}^2(f) (1 - \cos pu)^k (1 - \cos qv)^l : |u| \leq t, |v| \leq \tau \right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Отметим, что ряд экстремальных задач с использованием смешанного модуля непрерывности (9) решен, например, в работах [5, 8].

При решении некоторых задач теории аппроксимации вместо модуля непрерывности (9) иногда удобнее использовать следующую характеристику гладкости функции  $f \in L_2$ :

$$\begin{aligned} & \Omega_{k,l}(f; t, \tau)_2 = \\ & = \left\{ \frac{1}{t^k \tau^l} \int_0^t \cdots \int_0^t \int_0^\tau \cdots \int_0^\tau \left\| \Delta_{u,v}^{k,l} f(\cdot, \cdot) \right\|^2 du_1 \cdots du_k dv_1 \cdots dv_l \right\}^{1/2}, \quad t, \tau > 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где  $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ ,  $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_l)$ , а  $\Delta_{u,v}^{k,l} := \Delta_{u_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{u_k}^1 \Delta_{v_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{v_l}^1$ , (см., например, [13, 14]).

Обозначим  $\text{sinct} := (\sin t) / t$  ( $t \neq 0$ ), доопределив данную функцию значением 1 в точке  $t = 0$ , полагая  $\text{sinct}0 := 1$ . Используя равенство (4) и тождество Парсеваля, после выполнения некоторых несложных вычислений величину (10) можно записать в следующем явном виде

$$\Omega_{k,l}(f; t, \tau)_2 = 2^{k+l} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |c_{p,q}(f)|^2 (1 - \text{sinct} pt)^k (1 - \text{sinct} q\tau)^l =$$



$$= 2^{k+l} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \rho_{p,q}^2(f) (1 - \text{sinc } pt)^k (1 - \text{sinc } q\tau)^l, t, \tau > 0. \tag{11}$$

Заметим, что если функция  $f \in L_2^{(r,s)}$ , то, дифференцируя двойной ряд (4)  $r$  раз по переменной  $x$  и  $s$  раз по переменной  $y$  в смысле сходимости в  $L_2$ , запишем

$$\begin{aligned} f^{(r,s)}(x, y) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (ip)^r (iq)^s c_{p,q}(f) e^{i(px+qy)} = \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{p,q}(f^{(r,s)}) e^{i(px+qy)}, \end{aligned}$$

где положено

$$c_{p,q}(f^{(r,s)}) = (ip)^r (iq)^s c_{p,q}(f).$$

Поскольку

$$|c_{p,q}(f^{(r,s)})|^2 = p^{2r} q^{2s} |c_{p,q}(f)|^2,$$

то в силу равенства (7) имеем

$$\rho_{p,q}^2(f^{(r,s)}) = p^{2r} q^{2s} \rho_{p,q}^2(f). \tag{12}$$

Учитывая равенство (12), из (11) для произвольной функции  $f \in L_2^{(r,s)}$  получаем

$$\Omega_{k,l}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 = 2^{k+l} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2r} q^{2s} \rho_{p,q}^2(f) (1 - \text{sinc } pt)^k (1 - \text{sinc } q\tau)^l.$$

Если  $k = l$ , то полагаем  $\Omega_{k,k}(f; t, \tau)_2 := \Omega_k(f; t, \tau)_2$ .

**2. Основные результаты.** В обозначениях, принятых в предыдущем пункте, справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ . Тогда для любых  $h, \eta \in \mathbb{R}_+$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{m^r n^s \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f)_2}{\left\{ \int_0^h \int_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right\}^{k/2}} = \\ = \left\{ \frac{m}{2(mh - \text{Si}(mh))} \cdot \frac{n}{2(n\eta - \text{Si}(n\eta))} \right\}^{k/2}, \end{aligned}$$

где  $\text{Si}(t) = \int_0^t \text{sinc} u du$  - интегральный синус.

Из теоремы 1 вытекает такое утверждение

**Следствие 1.** В условиях теоремы 1 при  $h = \pi / m$  и  $\eta = \pi / n$  имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{m^{r-k/2} n^{s-k/2} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2}{\left\{ \int_0^{\pi/m} \int_0^{\pi/n} \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right\}^{k/2}} = \{2(\pi - \text{Si}(\pi))\}^{-k}.$$

Рассмотрим теперь экстремальную задачу об одновременном приближении функций  $f \in L_2^{(r,s)}$  и их смешанных частных производных  $f^{(\mu,\nu)}$ ,  $0 \leq \mu \leq r$ ,  $0 \leq \nu \leq s$ , тригонометрическими “углами” и их соответствующими производными:

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2 = \inf \left\{ \|f^{(\mu,\nu)} - g_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}\|_2^2 : g_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)} \in G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*) \right\}.$$

Как и при доказательстве формулы (6), убедимся, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(\mu,\nu)})_2 &= \|f^{(\mu,\nu)} - \Phi_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})\|_2^2 = \\ &= \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho_{p,q}^2(f^{(\mu,\nu)}) = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} p^{2\mu} q^{2\nu} \rho_{p,q}^2(f), \end{aligned}$$

где функция  $\Phi_{m-1,n-1}(g)$  определена равенством (5).

**Следствие 2.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq \mu, s \geq \nu$ . Тогда для любых  $h, \eta \in \mathbb{R}_+$  справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\left\{ \int_0^h \int_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right\}^{k/2}} = \left\{ \frac{mn}{4(mh - \text{Si}(mh))(n\eta - \text{Si}(n\eta))} \right\}^{k/2}.$$

**Теорема 2.** Для любых  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq \mu, s \geq \nu$ ,  $(t, \tau) \in (0, 3\pi / 4m] \times (0, 3\pi / 4n]$  имеет место точное неравенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2 &\leq \\ &\leq m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)} \{2(1 - \text{sinc} mt)\}^{-k/2} \{2(1 - \text{sinc} n\tau)\}^{-l/2} \Omega_{k,l}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Существует функция  $f_0 \in L_2^{(r,s)}$ , для которой (13) обращается в равенство.

Всюду далее при вычислении верхней грани по всем функциям  $f \in L_2^{(r,s)}$  предполагается, что  $f \neq \text{const}$ . Из теоремы 2 вытекает

**Следствие 3.** В условиях теоремы 2 имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\Omega_{k,l}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2} =$$

$$= \{2(1 - \operatorname{sinc} mt)\}^{-k/2} \{2(1 - \operatorname{sinc} n\tau)\}^{-l/2}. \quad (14)$$

В частности, из (14) при  $t = \pi / (2m)$ ,  $\tau = \pi / (2n)$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  получаем точную константу Джексона-Стечкина в задаче одновременного приближения функции и ее производных  $f^{(\mu, \nu)}$  ( $\mu = \overline{0, r}$ ,  $\nu = \overline{0, s}$ ):

$$\sup_{f \in L_2^{(r, s)}} \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f^{(\mu, \nu)})_2}{\Omega_{k, l}(f^{(r, s)}; \pi / (2m), \pi / (2n))_2} = \left\{ \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \right\}^{(k+l)/2}.$$

Далее условимся под весовой функцией в прямоугольнике  $[0, h] \times [0, \eta]$  понимать неотрицательную суммируемую функцию  $\varphi(t, \tau)$ , не эквивалентную нулю на этом же прямоугольнике. Справедлива следующая

**Теорема 3.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq \mu$ ,  $s \geq \nu$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $0 < h \leq 3\pi / (4m)$ ,  $0 < \eta \leq 3\pi / (4n)$ ,  $\varphi$  – весовая на прямоугольнике  $[0, h] \times [0, \eta]$  функция. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r, s)}} \frac{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f^{(\mu, \nu)})_2}{\left( \int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k, l}^q(f^{(r, s)}; t, \tau)_2 \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{1/q}} = \\ = \left( \int_0^h \int_0^\eta (1 - \operatorname{sinc} mt)^{kq/2} (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{-1/q}. \end{aligned}$$

**Следствие 4.** Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда, если  $\varphi(t, \tau) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(\tau)$ , то

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r, s)}} \frac{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f^{(\mu, \nu)})_2}{\left( \int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k, l}^q(f^{(r, s)}; t, \tau)_2 \varphi_1(t) \varphi_2(\tau) dt d\tau \right)^{1/q}} = \\ = \left( \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} mt)^{kq/2} \varphi_1(t) dt \right)^{-1/q} \left( \int_0^\eta (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi_2(\tau) d\tau \right)^{-1/q}. \quad (15) \end{aligned}$$

В частности, из (15):

а) при  $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv 1$ ;  $k = l$ ,  $q = 2 / k$  получаем:

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r, s)}} \frac{2^k m^{r-(\mu+k)} n^{s-(\nu+k)} \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f^{(\mu, \nu)})_2}{\left( \int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k, k}^{2/k}(f^{(r, s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right)^{k/2}} = \\ = \{(mh - \operatorname{Si}(mh))(n\eta - \operatorname{Si}(n\eta))\}^{-k/2}, \end{aligned}$$

где  $\text{Si}(u) := \int_0^u \sin t dt$  - интегральный синус;

б) при  $\varphi_1(t) = t, \varphi_2(\tau) = \tau, k = l, q = 2/k$  имеем:

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{4^k m^{r-(\mu+k)} n^{s-(\nu+k)} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\left( \int_0^{h\eta} \int_0^t t \tau \Omega_{k,k}^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right)^{k/2}} = \\ = \{(mh/2)^2 - \sin^2(mh/2)\}^{-k/2} \{(n\eta/2)^2 - \sin^2(n\eta/2)\}^{-k/2}. \end{aligned}$$

**3. Решение одной экстремальной задачи.** Отметим, что поскольку для произвольной функции  $f \in L_2^{(r,s)}, r, s \in \mathbb{N}$  её промежуточные производные  $f^{(\mu,\nu)}, 0 \leq \mu \leq r, 0 \leq \nu \leq s$  также принадлежат классу  $L_2^{(r,s)}$  (см., напр., [12]), то представляет несомненный интерес изучение поведения величины наилучшего совместного приближения  $\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2$  на классе  $L_2^{(r,s)}$  или на некотором подклассе  $\mathfrak{M}^{(r,s)} \subset L_2^{(r,s)}$ , то есть при любых  $0 \leq \mu \leq r, 0 \leq \nu \leq s$  требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}(\mathfrak{M}^{(r,s)})_2 := \sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r,s)} \right\}.$$

Всюду далее через  $W_{k,l,q}^{(r,s)}(h, \eta; \varphi)(k, l \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq q \leq \infty)$  обозначим класс функций  $f \in L_2^{(r,s)}$ , для которых при всех  $0 < h, \eta \leq 2\pi$  выполнено неравенство

$$\int_0^{h\eta} \int_0^t \Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 \varphi(t, \tau) dt d\tau \leq 1.$$

Справедливо следующее утверждение

**Теорема 4.** Пусть  $k, l \in \mathbb{N}, r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+, r \geq \mu, s \geq \nu, 1 \leq q \leq \infty, 0 < h \leq 3\pi/(4m), 0 < \eta \leq 3\pi/(4n)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}(W_{k,l,q}^{(r,s)}(h, \eta; \varphi))_2 = \\ = \frac{1}{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu}} \left( \int_0^{h\eta} \int_0^t (1 - \text{sinc} mt)^{kq/2} (1 - \text{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{-1/q}. \end{aligned}$$

**Следствие 5.** В условиях теоремы 4 при  $k = l, q = 2/k, h = \pi/(2m), \eta = \pi/(2n), m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi = 1$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)} \left( W_{k,k,k/2}^{(r,s)} \left( \frac{\pi}{(2m)}, \frac{\pi}{(2n)} \right) \right)_2 = \\ = \{(\pi/2) - \text{Si}(\pi/2)\}^{-k} m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}. \end{aligned}$$

Поступило 13.02.2024

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Потапов М.К. О приближении «углом». – Proc. of the Conf. on Constructive Theory of Function. Budapesht, 1972, с.371-399.
2. Потапов М.К. Приближение «углом» и теоремы вложения. – Mathematica Balkanica, 1972, №2, с.183-198.
3. Томич М. О приближении углом функций с доминирующим модулем гладкости. – Publ. Inst. Math. Beograd, 1972. т.23, №37, №2, с.193-206, с.183-198.
4. Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных. – Изв. вузов, 1991, №3, с. 4-25.
5. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов. – Укр. мат. журн., 1996, т.48, №3, с.301-308.
6. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных. – ДАН России, 2005, т.404, №4, с.406-464.
7. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. О точных значениях квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных. – Укр. мат. журн., 2009, т.61, №6, с.855-864.
8. Shabozov M.Sh., Akobirshoev M.O. Exact estimates of quasiwidths of some classes of differentiable periodic functions of two variables. – Anal. Math., 2009, т.35, №1, 61-72 p.
9. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложения к теории аппроксимации. – Укр. мат. журн., 2011, т.63, №12, с.1579-1601.
10. Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшем приближении “углом” в среднем на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с весом Чебышева-Эрмита. – Збірник праць Інституту математики НАН України, 2014, т.11, №3, с.35-46.
11. Вакарчук С.Б., Швачко А.В. Неравенства колмогоровского типа для производных функций двух переменных и их приложение к аппроксимации “углом”. – Известия вузов. Матем., 2015, №11, с.2-22.
12. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в  $L_2$ . – Чебышевский сб., 2019, т.20, вып.2, с.348-365.
13. Vakarchuk S.B. Exact constant in an inequality of Jackson type for  $L_2$ -approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes. – East Journal on Approximations, 2004, v.10, №1-2, pp.27-39.
14. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из  $L_2$ . – Матем. заметки, 2005, т.78, #5, с.792-796.
15. Брудный Ю.А. Приближение функций  $n$ -переменных квазимногочленами – Изв. АН СССР. Сер. математика, 1979, т.34, №3, с.564-583.

М.А.Акобиршоев, Ф.М.Мадимарова\*

## НАЗДИККУНИИ ҲАМЧОЯИ БЕҲТАРИН БА ВОСИТАИ “КУНЧҶО”-И БАЪЗЕ СИНФҶОИ ФУНКСИЯҶОИ ДУТАҒЁИРЁБАНДА ДАР ФАЗОИ $L_2$

*Донишгоҳи технологии Тоҷикистон,*

*\*Донишгоҳи Осийӣ марказӣ*

Дар фазои  $L_2$  нобаробарҳои аниқ байни бузургии наздиккунии беҳтарини якҷояи функсияи  $2\pi$ -даврӣ аз рӯи ҳар як тағйирёбанди  $f(x, y)$  ва ҳосилаҳои хусусии он  $f^{(\mu, \nu)}(x, y)$  ( $\mu = 0, 1, \dots, r; \nu = 0, 1, \dots, s$ ) ба воситаи “кунҷҳои” тригонометрӣ ва интегралҳои дукарата, ки модули омеҳтаи бефосилагии тартиби олиро дар бар мегиранд, ёфта шудааст. Қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини баъзе синфҳои функсияҳо, ки ба воситаи модули омеҳтаи бефосилагии нишондодашуда дода шудаанд, ёфта шудаанд.

**Калимаҳои калидӣ:** наздиккунии ҳамҷояи беҳтарин, “кунҷҳо”-и тригонометрӣ, модули бефосилагии омеҳта, сарҳади болоӣ.

M.O.Akobirshoev, F.M.Madimarova\*

## THE BEST JOINT APPROXIMATION BY THE “ANGLE” SOME CLASSES OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES THE SPACE $L_2$

*Technological University of Tajikistan,*

*\*University of Central Asia*

In the metric  $L_2$  obtained exact inequalities between the quantity best joint approximations of periodic differentiable  $2\pi$  for each of the variable functions  $f(x, y)$  and their consecutive derivative  $f^{(\mu, \nu)}(x, y)$  ( $\mu = 0, 1, \dots, r; \nu = 0, 1, \dots, s$ ) by trigonometric “angles” with double integrals, containing mixed modules of continuity of higher order of higher derivatives. The exact values of the upper bound of the best joint approximations of some classes of functions given by the specified moduli of continuity are found.

**Key words:** best general approximations, trigonometric “angles” mixed modulus of continuity, upper bound.

### Сведения об авторах:

1. **Акобиршоев Мухиддин Огамшоевич** – кандидат физ.-мат. наук, Технологический университет Таджикистана, доцент кафедры высшей математики. E-mail: muhiddin\_ao@mail.ru;
2. **Мадимарова Фавзия Мадимаровна** – Университет Центральной Азии, координатор по математике.

УДК 517.948

Специальность:1.1.1 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

О.Х.Каримов, А.Азамкулов

## КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ И РАЗДЕЛИМОСТЬ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ГРУШИНА

*Национальная академия наук Таджикистана,*

*Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана*

*(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 06.02.2024г.)*

*В работе установлены соответствующие коэрцитивные неравенства и получены новые достаточные условия разделимости оператора Грушина в гильбертовом пространстве.*

**Ключевые слова:** оператор Грушина, коэрцитивное неравенство, разделимость, гильбертово пространство.

1. Пусть  $R^n$  –  $n$ -мерное евклидово пространство точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Символом  $L_p(R^n)$ , где  $1 \leq p < +\infty$ , обозначим пространство измеримых функций  $u(x)$ , определ в  $R^n$ , с конечной нормой

$$\|u; L_p(R^n)\| = \left\{ \int_{R^n} |u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Определим также пространство  $W_p^2(R^n)$  функций  $u \in L_p(R^n)$ , имеющих все обобщенные (в смысле С.Л.Соболева) частные производные до второго порядка включительно, с конечной нормой

$$\|u; W_p^2(R^n)\| = \left\{ \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|^p dx + \int_{R^n} |u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Символом  $W_{2,loc}^2(R^n)$  обозначим линейное пространство всех функций  $u(x)$ ,  $x \in R^n$ , для которых  $\varphi(x)u(x) \in W_2^2(R^n)$  при всех  $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ .

2. Рассмотрим в пространстве  $L_2(R^2)$  оператор Грушина

$$L[u] = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x^4}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + V(x, y)u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

**Адрес для корреспонденции:** Каримов Олимджон Худойбердиевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана.  
E-mail: karimov\_olim@mail.ru.

где  $V(x, y)$  – положительная функция.

**Определение 1.** Уравнение (1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор), следуя [1,2], называется разделимым в  $L_2(\mathbb{R}^2)$ , если

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x^4}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), V(x, y)u(x, y) \in L_2(\mathbb{R}^2)$$

$\forall u(x, y) \in L_2(\mathbb{R}^2) \cap W_2^2(\mathbb{R}^2)$  такие, что  $f(x, y) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ .

**Определение 2.** Следующая оценка называется коэрцитивной оценкой для оператора  $L[u]$

$$\|Vu; L_2(\mathbb{R}^2)\| + \left\| \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x^4}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \right\| \leq M(\|L[u]; L_2(\mathbb{R}^2)\| + \|u; L_2(\mathbb{R}^2)\|), \quad (2)$$

для всех  $u \in D(L)$ .

**Замечание 1.** Из коэрцитивной оценки (2) следует разделимость оператора  $L[u]$ .

Коэрцитивные свойства и разделимость дифференциальных операторов изучались во многих работах (см. [1-5] и имеющиеся там ссылки). Разделимость дифференциального оператора Грушина рассматривалась в работе Н.А.Атия [6]. Разделимость нелинейных дифференциальных операторов исследовалась в работах [4], [7], [8]. В данной работе изучены коэрцитивные свойства дифференциального оператора Грушина и получены новые достаточные условия разделимости для данного оператора.

Сначала сформулируем без доказательства несколько вспомогательных лемм.

**Лемма 1.** Пусть в уравнении (1) функция  $f(x, y)$  принадлежит пространству  $L_2(\mathbb{R}^2)$  и функция  $u(x, y)$  принадлежит классу  $L_2(\mathbb{R}^2) \cap W_{2,loc}^2(\mathbb{R}^2)$ . Тогда функции  $V^{\frac{1}{2}}(x, y)u(x, y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $x^2 \frac{\partial u}{\partial y}$  принадлежат пространству  $L_2(\mathbb{R}^2)$ .

Теперь для удобства записи вводим обозначение  $G(x, y) = V^{1/2}(x, y)$ .

Предположим, что для всех точек  $(x, y)$  из  $\mathbb{R}^2$  выполнены неравенства:

$$\left\| G^{-1/2}(x, y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} G^{-3/2}(x, y) \right\|^2 \leq \sigma_1, \quad (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

$$\left\| G^{-1/2}(x) x^2 \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} G^{-3/2}(x, y) \right\|^2 \leq \chi_1, \quad (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

где  $0 < \sigma_1, \chi_1 < 4$ , а значение функции  $G$  и её производных взяты в точке  $(x, y)$ .



**Лемма 2.** Пусть выполнены условия леммы 1 и пусть выполнены перечисленные выше условия.

Тогда функции  $G^{\frac{3}{2}}(x, y)u(x, y)$ ,  $G^{\frac{1}{2}}(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $x^2G^{\frac{1}{2}}(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}$  принадлежат пространству  $L_2(R^2)$ .

3. Теперь сформулируем основной результат работы. Пусть выполнены условия леммы 2. Пусть, кроме того, выполнены неравенства

$$\left\| V^{-1/2}(x, y)\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}V^{-1}(x, y) \right\| \leq \sigma, \quad (\forall(x, y) \in R^2) \quad (3)$$

$$\left\| V^{-1/2}(x, y)x^2\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}V^{-1}(x) \right\| \leq \chi, \quad (\forall(x, y) \in R^2) \quad (4)$$

где  $0 < \sigma, \chi < 4$ .

Имеет место следующая

**Теорема.** При выполнении условия  $\alpha < 2, \beta < 2, \frac{\sigma}{4\alpha} + \frac{\chi}{16\beta} < 1$  уравнение (1) разделяется в

$L_2(R^2)$ . Для всех  $u(x, y) \in L_2(R^2) \cap W_2^2(R^2)$  таких, что  $L[u] \in L_2(R^2)$  справедливы включения

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x^4}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), V(x, y)u(x, y), x^2V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}, V^{1/2}(x, y)\frac{\partial u(x)}{\partial x} \in L_2(R^2).$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\begin{aligned} & \|Vu; L_2(R^2)\| + \left\| x^2V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}; L_2(R^2) \right\| + \\ & + \left\| V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}; L_2(R^2) \right\| + \left\| \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x^4}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); L_2(R^2) \right\| \leq M \|f(x, y); L_2(R^2)\|, \end{aligned} \quad (5)$$

где положительное число  $M$  не зависит от  $u(x, y)$ ,  $f(x, y)$ .

**Замечание 2.** Из неравенства (5) следует коэрцитивная оценка (2), следовательно и разделимость оператора  $L[u]$ .

4. Далее мы остановимся на некоторых основных моментах доказательства этой теоремы. Пусть  $\varphi(x, y) \in C_0^\infty(R^2)$  – фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при  $|x| < 1$ . Для любого положительного числа  $\varepsilon$  положим  $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$ . Используя равенство

$$(f, \varphi_\varepsilon V(x, y)u) = \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x^4}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \varphi_\varepsilon V(x, y)u\right) + (V(x, y)u, \varphi_\varepsilon V(x, y)u),$$

где  $(, )$  скалярное произведение в пространстве  $L_2(R^2)$ , после несложных преобразований получим

$$(f, \varphi_\varepsilon V(x, y)u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \varphi_\varepsilon V(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{8} \left( \frac{\partial u}{\partial y}, \varphi_\varepsilon x^4 V(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) +$$

$$+ B_1^\varepsilon(u) + B_2^\varepsilon(u) + B_3^\varepsilon(u) + B_4^\varepsilon(u) + (V(x, y)u, \varphi_\varepsilon V(x, y)u), \tag{6}$$

где

$$B_1^\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x} V(x, y)u \right),$$

$$B_2^\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} u \right).$$

$$B_3^\varepsilon(u) = \frac{1}{8} \left( \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial y} x^4 V(x, y)u \right),$$

$$B_4^\varepsilon(u) = \frac{1}{8} \left( \frac{\partial u}{\partial y}, \varphi_\varepsilon x^4 \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} u \right).$$

Здесь и далее значения  $V(x, y)$ ,  $\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}$  взяты в точке  $(x, y)$ . Так как  $\left| \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x} \right| \leq M_0 \varepsilon$ ,

$\left| \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial y} \right| \leq M_1 \varepsilon$  то, применяя неравенство Коши-Буняковского, можно получить следующие оценки:

$$|B_1^\varepsilon(u)| \leq M_0 \varepsilon \left\| G^{\frac{1}{2}}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}; L_2(R^2) \right\| \cdot \left\| G^{\frac{3}{2}}(x, y)u; L_2(R^2) \right\|,$$

$$|B_3^\varepsilon(u)| \leq M_1 \varepsilon \left\| G^{\frac{1}{2}}(x, y)x^2 \frac{\partial u}{\partial y}; L_2(R^n) \right\| \cdot \left\| G^{\frac{3}{2}}(x, y)u; L_2(R^2) \right\|.$$

В силу леммы 2 отсюда следует, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |B_1^\varepsilon(u)| = 0$  и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |B_3^\varepsilon(u)| = 0$ . Относительно функционалов

$B_2^\varepsilon(u)$  и  $B_4^\varepsilon(u)$  получаем следующие оценки:

$$|B_2^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \varphi_\varepsilon V(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\sigma}{4\alpha} (V(x, y)u, \varphi_\varepsilon V(x, y)u), \tag{7}$$

$$|B_4^\varepsilon(u)| \leq \frac{\beta}{16} \left( \frac{\partial u}{\partial y}, \varphi_\varepsilon x^4 V(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\chi}{16\beta} (V(x, y)u, \varphi_\varepsilon V(x, y)u), \tag{8}$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  – произвольные положительные числа и  $\sigma, \chi$  – константы из условий (2), (3). На основе вышеполученных оценок, учитывая неравенства (6) и (7) из равенства (5) находим

$$\begin{aligned}
 |(f, \varphi_\varepsilon V(x, y)u)| &\geq \left(1 - \frac{\sigma}{4\alpha} - \frac{\chi}{16\beta}\right) \cdot (V(x, y)u, \varphi_\varepsilon V(x, y)u) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \varphi_\varepsilon V(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \\
 &+ \frac{1}{8} \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \varphi_\varepsilon x^4 V(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}\right) - |B_1^\varepsilon(u)| - |B_3^\varepsilon(u)|.
 \end{aligned}$$

Применим неравенство Коши-Буняковского и затем, переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим неравенство

$$\begin{aligned}
 \|f; L_2(R^2)\| \|V(x, y)u; L_2(R^2)\| &\geq (f, V(x, y)u) \geq \\
 &\geq \left(1 - \frac{\sigma}{4\alpha} - \frac{\chi}{16\beta}\right) \cdot (V(x)u, V(x)u) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, V(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\
 &+ \frac{1}{8} \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}, x^4 V(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}\right).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Далее подбираем числа  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$  так, чтобы выполнялись условия

$$\alpha < 2, \quad \beta < 2, \quad \frac{\sigma}{4\alpha} + \frac{\chi}{16\beta} < 1.$$

Теперь из неравенства (7) после несложных преобразований получим коэрцитивное неравенство (4). Разделимость дифференциального оператора Грушина в пространстве  $L_2(R^2)$  следует из коэрцитивного неравенства (4). Теорема доказана.

*Поступило 20.02.2024 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Everitt W.N., Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators. – Proc. London Math. Soc., 1971, v.23, pp.301-324.
2. Everitt W.N., Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions. – Proc. London Math. Soc., 1972, v.24, pp.149-170.
3. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения. – Труды МИАН СССР, 1984, т.170, с.37-76.
4. Бойматов К.Х., Шарипов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шр и Дирака. – Доклады Академии наук России, 1992, т.326, №3, с.393-398.
5. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в  $R^n$ . – Труды МИАН СССР, 1983, т.161, с.195-217.

6. Atia H.A. Separation of Grushin differential operator in weighted Hilbert spaces. – Labachevskii Journal of Mathematics, 2011, vol. 32, №3, pp. 180-188.
7. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом. – Уфимский математический журнал, 2017, №1(9), с.55-62.
8. Каримов О.Х. Хакимова З.Дж. Коэрцитивные оценки, разделимость и коэрцитивная разрешимость нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений недивергентного вида. – Чебышевский сборник, 2023, №24(2), с.197-213.

**О.Х.Каримов, А.Азамкулов**

## **ОИДИ ХОССАҶОИ КОЭРСИТИВӢ ВА ҶУДОШАВАНДАГИИ ОПЕРАТОРИ ГРУШИН**

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви АМИ Тоҷикистон*

Дар мақола нобаробариҳои коэрцитивӣ таалукдошта таъсис шуда ва шартҳои нави ҷудошавандагии оператори Грушин дар фазои Гильберт гирифта шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** оператори Грушин, нобаробариҳои коэрцитивӣ, ҷудошавандагӣ, фазои Гильбертӣ.

**O.Kh.Karimov, A.Azamkulov**

## **COERCIVE ESTIMATES AND SEPARABILITY FOR THE GRUSHIN OPERATOR**

*National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*A.Juraev Institute of Mathematics of the NAS Tajikistan*

In this paper, the corresponding coercive inequalities are established and new sufficient conditions for the separability of the Grushin operator in Hilbert space are obtained.

**Key words:** operator Grushin, coercive estimates, separability, Hilbert spaces.

### **Сведения об авторах:**

1. **Каримов Олимджон Худойбердиевич** – доктор физ.-мат. наук, Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, заместитель директора. E-mail: karimov\_olim@mail.ru;
2. **Азамкулов Ахтамкул** – соискатель, Денауский институт предпринимательства и педагогики, преподаватель математики кафедры методики начального образования. E-mail: azamov\_a@mail.ru;

УДК 517.968.2

Специальность: 1.1.2 – Дифференциальные уравнения, математическая физика

Г.Джангибеков, К.Ш.Файззода \*

**ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ОБЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ШЕСТОГО ПОРЯДКА НА  
ПЛОСКОСТИ**

*Национальная академия наук Таджикистана,  
Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана,  
\*Таджикский национальный университет*

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана С.А.Исхоковым 20.02.2024 г.)*

*В работе изучается вопрос разрешимости задачи Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем двух уравнений с двумя независимыми переменными шестого порядка по ограниченной области. Методом перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области найдены эффективные условия  $n$  и получена формула для подсчета индекса задачи.*

**Ключевые слова:** *задача Дирихле, нетеровость, индекс задачи, сингулярный интеграл.*

В работах И.Н.Векуа [1-3] был предложен новый метод исследования систем дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Метод состоит в том, что от поставленной задачи совершается переход к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по области, затем изучается разрешимость этого уравнения. Впоследствии этот метод широко применялся в работах Б.В.Боярского [4,5], А.И.Вольперта [6], В.С.Виноградова [7], А.Джуроева [8], П.Т.Дыбова [9], Г.Джангибекова [10-13].

В настоящей работе дается дальнейшее развитие указанных результатов. В зависимости от гомотопического класса общих эллиптических систем уравнений 6-го порядка на плоскости установлены необходимые и достаточные условия  $n$  задачи Дирихле и Неймана и получены явные формулы для индекса.

**1. Обозначения, определения и вспомогательные  
предложения**

Пусть  $D$  – некоторая ограниченная область комплексной плоскости  $z = x + iy$ . Через  $C_0^k(D)$  мы будем обозначать множество функций  $\varphi(z)$ , которые  $k$  раз непрерывно дифференцируемые и финитны в  $D$ , то есть обращаются в нуль в пограничной полоске (своей для каждой функции) области  $D$ .

---

*Адрес для корреспонденции:* Джангибеков Гулходжа. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики им. А.Джуроева НАН Таджикистана. E-mail: gulkhoja@list.ru.

Пусть  $\omega(z) \in L_p(D)$  – произвольная функция пространства  $L_p(D)$ . Если найдется функция  $\chi(z)$  из  $L_p(D)$  такая, что для всякой функции  $\varphi(z) \in C_0^k(D)$  справедливо равенство

$$\iint_D \omega(z) \frac{\partial^k \varphi}{\partial z_1^{k_1} \partial \bar{z}_1^{-k_1}} ds_z = (-1)^k \iint_D \chi(z) \varphi(z) ds_z, \quad k_1 + k_2 = k,$$

тогда  $\chi(z)$  называется обобщенной производной порядка  $k$  от функции  $\omega(z)$  по переменным  $z$  и  $\bar{z}$  в области  $D$  и пишут  $\chi(z) = \frac{\partial^k \omega}{\partial z_1^{k_1} \partial \bar{z}_1^{-k_1}}$ , где формальные операторы  $\frac{\partial}{\partial z}$  и  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  определяются по формулам

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

**Определение пространства  $W_p^k(D)$ .** Множество функций, которые в  $D$  суммируемы и имеют всевозможные обобщенные производные данного порядка  $k$ , суммируемые в  $D$  с данной степенью  $p$  и с нормой

$$\|\omega\|_{W_p^k} = \left( \iint_D |\omega(z)|^p ds_z + \sum_{k_1+k_2=k} \iint_D \frac{\partial^k \varphi}{\partial z_1^{k_1} \partial \bar{z}_1^{-k_1}} ds_z \right)^{\frac{1}{p}},$$

называется соболевским пространством и обозначается символом  $W_p^k(D)$ .

## 2. Постановка первой краевой задачи

В данной работе изучается вопрос разрешимости задачи Дирихле и Неймана для эллиптической системы двух уравнений шестого порядка на плоскости методом перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области.

Рассмотрим общую эллиптическую систему двух уравнений от двух независимых переменных порядка 6 на плоскости, комплексная запись которой имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-3}^3 a_n(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^{-3+n} \partial \bar{z}^{3-n}} + b_n(z) \frac{\partial^{2m} \bar{\omega}}{\partial z^{-n-3} \partial \bar{z}^{n+3}} + \\ & + \sum_{0 \leq l+j \leq 5} a_{l,j}(z) \frac{\partial^{l+j} \omega}{\partial z^{-l} \partial \bar{z}^j} + b_{l,j}(z) \frac{\partial^{l+j} \bar{\omega}}{\partial z^{-l} \partial \bar{z}^j} = g(z), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $z = x + iy$ ,  $\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Будем считать, что коэффициенты уравнения (1) являются непрерывными в  $\bar{D}$  функциями, а  $g(z) \in L^p(D)$ ,  $2 < p < \infty$ .

По главной части системы (1) построим матрицу-функцию

$$\mathcal{G}(z, \sigma) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_6(z, \sigma) & \mathcal{Q}_6(z, \sigma) \\ \mathcal{Q}_6(z, \sigma) & \mathcal{P}_6(z, \sigma) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{P}_6(z, \sigma) = \sum_{n=-3}^3 a_n(z) \sigma^{3+n} \bar{\sigma}^{-3-n}, \quad \mathcal{Q}_6(z, \sigma) = \sum_{n=-3}^3 b_n(z) \sigma^{3-n} \bar{\sigma}^{-3+n}.$$

Эллиптичность системы (1) означает, что для любой точки  $z \in \bar{D}$  и любого не равного нулю комплексного числа  $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$  должно выполняться неравенство  $\det \mathcal{G}_z(\sigma) \neq 0$ .

$$\det \mathcal{G}(z, \sigma) \equiv |\mathcal{P}_6(z, \sigma)|^2 - |\mathcal{Q}_6(z, \sigma)|^2 \neq 0 \tag{2}$$

для всех  $z \in \bar{D}$ ,  $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0$ . В дальнейшем, для удобства введя обозначение  $t = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}}$ , матрицу-функцию  $\mathcal{G}_6(z, \sigma)$  запишем в виде

$$\mathcal{G}_6(z, t) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_6(z, t) & \mathcal{Q}_6(z, t) \\ \hat{\mathcal{Q}}_6(z, t) & \hat{\mathcal{P}}_6(z, t) \end{pmatrix}, \quad |t|=1, \quad z \in \bar{D},$$

где

$$\mathcal{P}_6(z, t) = t^{-3} \sum_{n=-3}^3 a_n(z) t^{3+n} \equiv t^{-3} \mathcal{P}_6(z, t), \quad \mathcal{Q}_6(z, t) = t^{-3} \sum_{n=-3}^3 b_n(z) \equiv t^{-3} \mathcal{Q}_6(z, t),$$

Без ограничения общности будем считать, что  $D = \{z : |z| < 1\}$ . Для общего уравнения (1) будем исследовать краевую задачу Дирихле:

**Задача Дирихле.** Найти функцию  $\omega(z)$  из класса  $W_p^6(D) \cap C^2(\bar{D})$ , удовлетворяющую внутри  $D$  уравнению (1), а на  $e$  188 границе  $\Gamma$  - краевым условиям

$$\frac{\partial^j \omega}{\partial n^j} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \tag{3}$$

где  $\frac{\partial \omega}{\partial n}$  – означает производную функции  $\omega(z)$  по направлению внешней нормали в точках контура  $\Gamma$ .

Насколько нам известно, первой работой, посвященной изучению эллиптических систем шестого порядка (1), является работа П.Т.Дыбова [9], где сформулированы результаты фредгольмовости задачи Дирихле только лишь в случае, когда система (1) является сильно эллиптической.

Функция  $\omega(z)$  считается решением поставленной задачи, если:

1. существует производная порядка 6 функции  $\omega(z)$  в обобщенном смысле Соболева и  $\omega(z) \in W_p^{(6)}(D + \Gamma)$ ;
2.  $\omega(z)$  почти везде на  $\Gamma$  удовлетворяет уравнению (1);
3.  $\omega(z)$  удовлетворяет граничным условиям (3).

Задачу (1), (3) будем называть *нётеровской*, если

1. подпространство решений однородной задачи (при  $g(z) = 0$ ) конечномерно (его размерность обозначим через  $l$ ),

2. существует конечное число  $k$  независимых условий необходимых и достаточных для разрешимости задачи (1), (3).

Если задача (1), (3) является н, то число  $\kappa = l - k$  называется *индексом* этой задачи.

### 3. Редукция задачи Дирихле к сингулярным интегральным уравнениям по ограниченной области

**Лемма 1.** Матрица-функция  $\mathcal{G}_6(z, t)$  невырождена для всех  $z \in \bar{D}$  и  $|t| = 1$  ( $\det \mathcal{G}_6(z, t) \neq 0$ ) тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств

$$\sum_{n=-3}^3 \Delta_n(z) > 2M(z), \quad \text{при } \forall z \in \bar{D}, \tag{4}$$

$$\sum_{n=-3}^3 \Delta_n(z) < 2m(z), \quad \text{при } \forall z \in \bar{D}, \tag{5}$$

где

$$\Delta_n(z) = |a_n(z)|^2 - |b_n(z)|^2, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3;$$

$$M(z) = \max_{|t|=1} \operatorname{Re}[\alpha_1(z)t + \alpha_2(z)t^2 + \alpha_3(z)t^3],$$

$$-m(z) = \min_{|t|=1} \operatorname{Re}[\alpha_1(z)t + \alpha_2(z)t^2 + \alpha_3(z)t^3];$$

$$\alpha_1(z) = \bar{a}_{-1}a_0 - \bar{b}_{-1}b_0 + \bar{a}_{-2}a_{-1} - \bar{b}_{-2}b_{-1} + \bar{a}_{-3}a_{-2} - \bar{b}_{-3}b_{-2},$$

$$\alpha_2(z) = a_2\bar{a}_0 - b_2\bar{b}_0 + a_3\bar{a}_{-1} - b_3\bar{b}_{-1} + \bar{a}_{-2}a_0 - \bar{b}_{-2}b_0 + \bar{a}_{-3}a_{-1} - \bar{b}_{-3}b_{-1},$$

$$\alpha_3(z) = a_3\bar{a}_0 - b_3\bar{b}_0 + \bar{a}_{-3}a_0 - \bar{b}_{-3}b_0.$$

Множество всех полиномиальных матриц вида  $\mathcal{G}_6(z, t) : \det \mathcal{G}_6(z, t) = |\mathcal{P}_6(z, t)|^2 - |\mathcal{Q}_6(z, t)|^2$ , удовлетворяющих условию  $\det \mathcal{G}_6(z, t) > 0 (< 0)$  для всех  $z \in \bar{D}$ , обозначим через  $\mathcal{G}^+ (\mathcal{G}^-)$ .

Две матрицы  $\mathcal{G}_z^1, \mathcal{G}_z^2$  из класса  $\mathcal{G}^+$  назовем гомотопными и обозначим через  $\mathcal{G}_6^1 \sim \mathcal{G}_6^2$ , если существует семейство полиномиальных матриц  $\mathcal{G}_6^+(\tau)$  из  $\mathcal{G}^+$  непрерывно зависящих от действительного параметра  $\tau : 0 \leq \tau \leq 1$ , такое, что

$$\mathcal{G}_6^+(0) \equiv \mathcal{G}_6^1, \quad \mathcal{G}_6^+(1) \equiv \mathcal{G}_6^2.$$

Две эллиптические системы из множества всех эллиптических систем (1) с одинаковой главной частью, такой, что  $\mathcal{G}_6(\sigma) \in \mathcal{G}^+$  можно тогда и только тогда соединить непрерывным путем в  $\mathcal{G}^+$ , если



характеристические матричные полиномы этих систем гомотопны.  $P(z, t)$  – есть комплексный невырождающийся полином степени три. Пусть  $q_j(z) (j = 1, 2, \dots, 6)$  – комплексные корни уравнения

$$P(z, t) = 0. \tag{6}$$

Согласно условию (2) эти корни не лежат на границе единичного круга  $|t|=1$ , то есть

$$|q_j(z)| \neq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, 6).$$

Возможны, априори, 7 случаев:

1.  $|q_j(z)| > 1$ , для всех  $j = 1, 2, \dots, 6$ ;
2.  $|q_1(z)| > 1$  для всех  $j$  кроме одного;
- .....
7.  $|q_j(z)| < 1$ , для всех  $j = 1, 2, \dots, 6$ .

Таким образом, соотношение гомотопии разбивает  $\mathcal{G}^+$  на 7 классов гомотопии – связанные открытые компоненты:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{класс } \nu_0 : \text{ то есть когда выполняются неравенства 1. для } \forall z \in D; \\ \text{класс } \nu_1 : \text{ то есть когда выполняются неравенства 2. для } \forall z \in D. \\ \dots\dots\dots \\ \text{класс } \nu_6 : \text{ то есть когда выполняются неравенства 7. для } \forall z \in D. \end{array} \right. \tag{7}$$

Эти классы образуют полную систему множества  $\mathcal{G}^\pm$ , то есть  $\mathcal{G}_6^1$  и  $\mathcal{G}_6^2$  из  $\mathcal{G}^\pm$  принадлежат некоторому классу  $\nu_j (j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3)$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{G}_6^1 \sim \mathcal{G}_6^2$ .

**Лемма 2.** Пусть матрица  $\mathcal{G}_6(t) \in \mathcal{G}^+$ . Тогда  $\mathcal{G}^+$  принадлежит классу  $\nu_j (j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3)$  тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\Delta_j(z) > M(z) + (M^2(z) + \sum_{\substack{n=-3 \\ n \neq j}}^3 |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2)^{1/2} \quad \forall z \in \bar{D}, \tag{8}$$

где

$$\lambda_{j,n} = \bar{a}_j a_n - b_j \bar{b}_n, \mu_{j,n} = \bar{a}_j b_n - b_j \bar{a}_n.$$

1. Пусть  $\mathcal{G}_6(t)$  из  $\mathcal{G}^+$  принадлежит гомотопическому классу  $\nu_0$ . Тогда согласно лемме 2 будет

$$\Delta_0(z) = |a_0(z)|^2 - |b_0(z)|^2 > 0 \text{ для всех } z \in \bar{D}.$$

Исключая из уравнения (1) величину  $\frac{\partial^6 \bar{\omega}}{\partial \bar{z}^3 \partial z^3}$ , мы придем к следующей записи любой системы из

гомотопического класса  $V_0$

$$\begin{aligned} & \Delta_0(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^3 \partial z^3} + \lambda_{0,1}(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^4 \partial z^2} + \lambda_{0,2}(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^5 \partial z} + \lambda_{0,3}(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^6} + \\ & + \mu_{0,1}(z) \overline{\left( \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^4 \partial z^2} \right)} + \mu_{0,2}(z) \overline{\left( \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^5 \partial z} \right)} + \mu_{0,3}(z) \overline{\left( \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^6} \right)} + T(\omega) = g(z), \end{aligned} \tag{9}$$

где  $T(\omega)$  – дифференциальный оператор низшего порядка.

Известно [1-3], что любая комплекснозначная функция класса  $W_p^6(D) \cap C^2(\bar{D})$ , ( $p > 2$ ), удовлетворяющая на границе  $\Gamma$  однородным краевым условиям (3), представляется в виде

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D G_6(z, \zeta) f(\zeta) ds_\zeta \tag{10}$$

с произвольной комплекснозначной плотностью  $f(z) \in L_p(D)$ ,  $p > 1$ , где  $G_6(z, \zeta)$  функция Грина

уравнения  $\Delta^3 \omega \equiv \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^3 \partial \bar{z}^3} = 0$  в ограниченной области  $D = \{z : |z| < 1\}$ :

$$G_6(z, \zeta) = \frac{|\zeta - z|^4}{4\pi} \left| \ln \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 - |\zeta - z|^2 (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) + \frac{1}{2}(1 - |z|^2)^2(1 - |\zeta|^2)^2 \right|.$$

Посчитаем производные функции  $\omega(z)$ . Очевидно, что все производные от функции  $\omega(z)$  по  $z$  и  $\bar{z}$  до 5-го порядка дают интегральные операторы с непрерывными ядрами или с ядрами, имеющими слабую особенность и, следовательно, являются вполне непрерывными в  $L_p(D)$  ( $1 < p < \infty$ ) операторами. Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_0(z, \bar{\zeta}) &= \frac{1}{4\pi} |\zeta - z|^4 \ln |\zeta - z|^2, \\ \sigma_1(z, \bar{\zeta}) &= -\frac{1}{4\pi} |\zeta - z|^4 \ln |1 - z\bar{\zeta}|^2 - \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^k}{k\pi} |\zeta - z|^{2(2-k)} [(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)]^k, \\ (Uf)(z) &= \iint_D \sigma_0(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta, \quad (Vf)(z) = \iint_D \sigma_1(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta. \end{aligned}$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\frac{\partial^3 U}{\partial z^3} = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2}{\zeta - z} f(\zeta) ds_\zeta. \tag{11}$$

Дифференцируя равенство (11)  $3+n$  раз по  $z$  и  $3-n$  раз по  $\bar{z}$ , будем иметь

$$\frac{\partial^6 U}{\partial z^{3+n} \partial \bar{z}^{3-n}} = \begin{cases} \frac{(-1)^n n}{\pi} \iint_D \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{n-1}}{(\zeta - z)^{n+1}} f(\zeta) ds_\zeta \equiv (S_{-n} f)(z), & \text{если } n = 1, 2, 3; \\ f(z), & \text{если } n = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Переходим теперь к оператору  $(Vf)(z)$ . Дифференцируя  $V$  по  $z$   $3+n$  раз и по  $\bar{z}$   $3-n$  раз, найдем

$$\frac{\partial^6 V}{\partial z^{3+n} \partial \bar{z}^{3-n}} = \iint_D K_{v_{0,n}}(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta, \quad n = 1, 2, 3,$$

где ядро  $K_{v_{0,n}}(z, \bar{\zeta})$  имеет вид

$$K_{v_{0,n}}(z, \bar{\zeta}) = \frac{(-1)^{3-n}}{2\pi \cdot (n-1)!} \sum_{k=0}^2 C_{3+n}^k (-1)^k 2 \dots (3-k) \cdot (2+n-k)! \times \\ \times \frac{(\zeta - z)^{2-k} (\bar{\zeta} - \bar{z})^{n-1} \bar{\zeta}^{3+n-k}}{(1 - z\bar{\zeta})^{3+n-k}}, \quad (13)$$

причем, если точка  $\zeta$  попадает на границу единичного круга  $\Gamma$ , то есть  $|\zeta| = 1$ , то

$$\frac{(\zeta - z)^{2-k} (\bar{\zeta} - \bar{z})^{n-1} \bar{\zeta}^{3+n-k}}{(1 - z\bar{\zeta})^{3+n-k}} = \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{n-1}}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Подставляя значения производных из (12), (13) в исходное дифференциальное уравнение (8), для определения функции  $f(z)$  получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение:

$$(A_0 f)(z) \equiv \Delta_0(z) f(z) + \sum_{n=-3}^3 \lambda_{0,n}(z) (S_{-n}^* f)(z) + \mu_{0,n}(z) \overline{(S_{-n}^* f)(z)} + (Tf)(z) = g(z), \quad (14)$$

где

$$(S_n^* f)(z) = \iint_D K_{3+n,3-n}(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta,$$

$$K_{3+n,3-n}(z, \bar{\zeta}) = \frac{(-1)^n n}{\pi} \left( \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{n-1}}{(\zeta - z)^{n+1}} + K_{v_{0,n}}(z, \bar{\zeta}) \right), \quad n = 1, 2, 3,$$

$T$  – вполне непрерывный в  $L^p(D)$ ,  $p > 2$  оператор.

Здесь следует отметить, что интегральный оператор с ядром  $K_{3+n,3-n}(z, \bar{\zeta})$  во внутренних точках области  $D$  имеет особенность порядка 2, поэтому интеграл нужно понимать в смысле главного значения по Коши. Что касается точек границы, то есть когда  $\zeta \in \Gamma$ ,  $\bar{\zeta} = 1/\zeta$ , то нетрудно проверить, что в этом случае  $K_{3+n,3-n}(z, \bar{\zeta}) = 0$ . Интегральное уравнение (7) относится к двумерным сингулярным

интегральным уравнениям с четными характеристиками по ограниченной области, которые изучены в работах [5-9]. Соответствующая оператору  $A_0$  матрица-символ имеет вид

$$\mathcal{G}_{A_0}^0(z, t) = \begin{pmatrix} \Delta_0(z) + \sum_{n=-3}^3 \lambda_{0,n}(z) t^n & \sum_{n=-3}^3 \mu_{0,n}(z) t^{-n} \\ \sum_{n=-3}^3 \mu_{0,n}(z) t^n & \Delta_0(z) + \sum_{n=-3}^3 \lambda_{0,n}(z) t^{-n} \end{pmatrix}, \quad z \in \bar{D}, |t|=1.$$

В силу результатов [16] для нетеровости оператора  $A^0$  необходимо и достаточно, чтобы матрицы  $\mathcal{G}_{A_0}^0(\tau, t)$  ( $\tau \in \Gamma, |t|=1$ ) имели нулевые частные индексы. По символу  $\mathcal{G}_{A_0}(z, t)$  построим матрицу  $\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t)$ , где  $\tau \in \Gamma, |t|=1$ . Показывается, что для  $\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t)$  справедливо представление:

$$\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t) = R_0^-(\tau, t)R_0^+(\tau, t),$$

где  $R_0^-(\tau, t)$  по переменной  $t$  аналитически продолжима в нижнюю, а  $R_0^+(\tau, t)$  – в верхнюю полуплоскость, причем их определители нигде в нуль не обращаются, то есть матрица  $\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t)$  имеет нулевые частные индексы. Тогда из [10] следует, что оператор  $A_0$  нётеров в  $L^p(D)$  ( $1 < p < \infty$ ).

Далее посчитаем индекс оператора  $A_0$ . Поскольку полином  $P(z, t)$  внутри единичного круга  $|t| < 1$  корней не имеет, то его можно представить в виде

$$P(z, t) = \lambda_{0,n}(z) \prod_{j=-3}^3 (t - q_j^-(z)),$$

где  $|q_j^-(z)| > 1$ . Учитывая это, построим семейство матриц-функций

$$\mathcal{G}_{A_0^\rho}(z, t, \rho) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(z, t, \rho) & \mathcal{Q}(z, t, \rho) \\ \mathcal{Q}(z, t, \rho) & \mathcal{P}(z, t, \rho) \end{pmatrix},$$

непрерывно зависящее от параметра  $\rho : 0 \leq \rho \leq 1$ , где

$$\mathcal{P}(z, t, \rho) = \lambda_{0,n}(z) \prod_{j=-3}^3 (\rho t - q_j^-(z))$$

$$\mathcal{Q}(z, t, \rho) = \rho \varphi(\rho) \mathcal{Q}(z, t), \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{N}, & \text{когда } 0 \leq \rho \leq \rho_0 < 1, \\ \frac{1}{N} \left( \varepsilon + \frac{N - \varepsilon}{1 - \tau_0} \right) (\rho - \tau_0), & \text{когда } \rho_0 \leq \rho \leq 1, \end{cases}$$

$\tau_0$  – вещественное число, близкое к 1,

$$N = \sup |P(z, t, \tau)|, \quad \varepsilon = \inf |Q(z, t, \tau)|,$$

где супремум (инфимум) берётся по всем  $z \in \bar{D}, |t|=1, 0 \leq \rho \leq 1$ . По матрицам  $\mathcal{G}_{A_0^\rho}(z, t, \rho)$  построим семейство интегральных операторов  $A_\rho^o, 0 \leq \rho \leq 1$  вида (8). Нетрудно заметить, что

$$|\mathcal{P}(z, t, \rho)| > |\mathcal{Q}(z, t, \rho)|,$$

и  $Ind_{|t|=1} F(z, t, \rho) = 0, \forall z \in \bar{D}, |t|=1, 0 \leq \rho \leq 1$ , то есть операторы  $A_\rho^o$ , н. Поскольку  $A_1^o = A_0$  и  $A_0^o = -\Delta_0(z)q_1^-(z) \cdot q_2^-(z) \cdot q_3^-(z)I$ , то индекс оператора  $A_0$  равен нулю.

**Теорема 1.** Пусть матрица  $\mathcal{G}_z(t)$  из  $\mathcal{G}^+$  принадлежит гомотопическому классу  $\nu_0$ . Для того чтобы задача (9) для эллиптической системы (8) в классе  $W_p^6(D) \cap C^2(\bar{D})$  ( $2 < p < \infty$ ) была фредгольмовой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Delta_j(z) > M(z) + (M^2(z) + \sum_{\substack{n=-3 \\ n \neq j}}^3 |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2)^{1/2} \quad \forall z \in \bar{D}, \quad (15)$$

2. Пусть теперь  $\mathcal{G}_z(t)$  из  $\mathcal{G}^+$  принадлежит гомотопическому классу  $\nu_j$  ( $j = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ).

Тогда, согласно лемме 2, будет

$$\Delta_j(z) = |a_j(z)|^2 - |b_j(z)|^2 > 0 \text{ для всех } z \in \bar{D}.$$

Исключая из уравнения (1) величину  $\frac{\partial^6 \bar{\omega}}{\partial z^{3+j} \partial \bar{z}^{-3-j}}$ , мы придем к следующей записи любой системы из гомотопического класса  $\nu_j$  ( $j = 1, 2, 3$ )

$$\Delta_j(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial \bar{z}^{-3+j} \partial z^{3-j}} + \sum_{\substack{n=-3 \\ n \neq j}}^3 \lambda_{j,n}(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial \bar{z}^{-3+n} \partial z^{3-n}} + \mu_{j,n}(z) \frac{\partial^6 \bar{\omega}}{\partial \bar{z}^{3+n} \partial z^{-3-n}}. \quad (16)$$

Подставляя значения производных из (12),(13) в дифференциальное уравнение (16), для определения функции  $f(z)$  получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение:

$$(A_j f)(z) \equiv \Delta_j(z)(S_j^* f)(z) + \sum_{\substack{n=-3 \\ n \neq j}}^3 \lambda_{j,n}(z)(S_{-n}^* f)(z) + \mu_{j,n}(z) \overline{(S_{-n}^* f)(z)} + (Tf)(z) = g(z), \quad (17)$$

где при  $n = 0$  выражение  $(S_0^* f)(z)$  означает  $f(z)$ .

Далее по символу  $\mathcal{G}_{A_\nu}(z, t)$  построим граничную матрицу-функцию

$$\mathcal{G}_{A_\nu}(\tau, t) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\tau, t) & \mathcal{Q}(\tau, t) \\ \overline{\mathcal{Q}(\tau, t)} & \overline{\mathcal{P}(\tau, t)} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{P}(\tau, t) = \Delta_j(\tau)t^j + \sum_{n=-3, n \neq j}^3 \lambda_{j,n}(\tau)t^n,$$

$$\mathcal{Q}(\tau, t) = \sum_{n=-3, n \neq j}^3 \mu_{j,n}(\tau)t^{-n}, \tau \in \Gamma, |t|=1.$$

Устанавливается, что матрица  $\mathcal{G}_{A_j}(\tau, t)$  при выполнении условия

$$\mu_{j,0}(\tau) = \overline{a_j(\tau)b_0(\tau)} - b_j(\tau)\overline{a_0(\tau)} \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma$$

факторизуется с нулевыми частными индексами  $\mathcal{G}_{A_j}(\tau, t) = R_j^-(\tau, t)R_j^+(\tau, t)$ , где матрица  $R_j^+(\tau, t)$  аналитически продолжима внутри единичного круга  $|t| \leq 1$ , и нули ее определителя лежат вне круга, а  $R_j^-(\tau, t)$  аналитически продолжима вне единичного круга  $|t| \leq 1$ , и нули ее определителя лежат внутри круга  $|t| \leq 1$ , причем условие  $\mu_{j,0}(\tau) \neq 0 \tau \in \Gamma$  необходимо для нетеровости оператора  $A_j$  в пространстве  $L_{\beta-2/p}^p(D)$ .

Перейдем теперь к вычислению индекса оператора  $A_j$ . Оператор  $A$  принадлежит классу  $\nu_j$ , причем выполнено условие (10) и  $Ind_{|t|=1} F(z, t) = j \neq 0, (j = 1, 2, 3)$ . Тогда многочлен  $P(z, t)$  имеет  $j$  нулей  $q_k^+(z) (k = 1, \dots, j)$  внутри круга  $|t| \leq 1$  и  $3 - j$  нулей  $q_k^-(z) (k = j+1, \dots, 3)$  вне круга  $|t| \leq 1$ . Поэтому  $F(z, t)$  можно представить в виде

$$\mathcal{P}(z, t) = \lambda_{j,n}(z) \prod_{k=-3}^j (t - q_k^+(z)) \prod_{k=j+1}^3 (t - q_k^-(z)).$$

Учитывая это, построим семейство матриц-функций

$$\mathcal{G}_{A_j^\tau}(z, t, \rho) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(z, t, \rho) & \mathcal{Q}(z, t, \rho) \\ \overline{\mathcal{Q}(z, t, \rho)} & \overline{\mathcal{P}(z, t, \rho)} \end{pmatrix},$$

непрерывно зависящее от параметра  $\rho: 0 \leq \tau \leq 1$ , где

$$\mathcal{P}(z, t, \rho) = \lambda_{j,n}(z) \prod_{k=-3}^j (t - \tau q_k^+(z)) \prod_{k=j+1}^3 (\tau t - q_k^-(z)),$$

$$\mathcal{Q}(z, t, \rho) = \mu_{j,0}(z) + \tau \varphi(\rho) \left( \sum_{n=-3, n \neq 0, j}^3 \mu_{j,n}(z) t^{-n} \right), \quad z \in \overline{D},$$

а  $\varphi(\tau)$  определяется так же, как в предыдущем случае.

Построив теперь по матрицам  $\mathcal{G}_{A_j}(z, t, \rho)$  семейство интегральных операторов  $A_j^\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , типа (1), заметим, что они н, ибо

$$|\mathcal{P}(z, t, \rho)| > |\mathcal{Q}(z, t, \rho)|, \quad \forall z \in \bar{D}, \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

и  $\mu_{j,0}(z) \neq 0, z \in \Gamma$ .

Так как  $A_j^1 = A_j$  и

$$A_j^0 = \lambda_{j,n}(z)q_{j+1}^+(z) \dots q_3^+(z)S_{-j} + \mu_{j,0}(z)K,$$

то, применив к оператору  $A_j^0$  результаты работы [5], получим, что индекс оператора  $A$  равен  $\varkappa = -2j \text{Ind}_\Gamma \mu_{j,0}(\tau)$ .

**Теорема 2.** Пусть матрица  $\mathcal{G}_z(t)$  из  $\mathcal{G}^+$  принадлежит гомотопическому классу  $\nu_j$  ( $j = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ). Для того чтобы задача (9) для эллиптической системы (16) в классе  $W_p^6(D) \cap C^2(\bar{D})$  ( $2 < p < \infty$ ) была н, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Delta_j(z) > M(z) + (M^2(z) + \sum_{n=-3n \neq j}^3 |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2)^{1/2} \tag{18}$$

и  $\mu_{j,n}(\tau) \neq 0$  для  $\forall z \in \bar{D}, \tau \in \Gamma$ ,

где

$$\lambda_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)a_n(z)} - b_j(z)\overline{b_n(z)}, \quad \mu_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)b_n(z)} - b_j(z)\overline{a_n(z)}.$$

При этом, если выполнено (18), то индекс задачи равен

$$\varkappa = -2j \text{Ind}_\Gamma \mu_{j,0}(\tau),$$

Аналогичный результат имеет место и для задачи Неймана для уравнения (1).

#### 4. Вторая краевая задача

**Задача Неймана.** Найти функцию  $\omega(z)$  из класса  $W_p^6(D) \cap C^2(\bar{D})$ , удовлетворяющую внутри  $D$  уравнению (1), а на ее границе  $\Gamma$  краевым условиям

$$\frac{\partial^j \omega}{\partial n^j} \Big|_\Gamma = 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{19}$$

где  $\frac{\partial \omega}{\partial n}$  – означает производную функции  $\omega(z)$  по направлению внешней нормали в точках контура  $\Gamma$ .

Теперь вместо представления (10) воспользуемся представлением [2], [14] функций, удовлетворяющих  $m$  условиям (19) по формуле

$$\omega(z) = \iint_D N_3(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_{\zeta}, \quad (20)$$

где

$$N_3(z, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2\pi} |\zeta - z|^4 \ln |(\zeta - z)(1 - z\bar{\zeta})|^2 + g_3(z, \bar{\zeta})$$

функция Неймана уравнения  $\Delta^m \omega \equiv \frac{\partial^m \omega}{\partial z^m \partial \bar{z}^m} = 0$  в единичном круге  $D = \{z : |z| < 1\}$ , причем при

$m \geq 2$  эти функции определяются по рекуррентной формуле

$$\frac{\partial^2 N_3(z, \bar{\zeta})}{\partial z \partial \bar{z}} = N_2(z, \bar{\zeta}).$$

Также как в случае задачи Дирихле, задача Неймана (1), (19) эквивалентным образом приводится к сингулярным интегральным уравнениям вида (17).

*Поступило 20.02.2024 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.-Л., 1948, 296 с.
2. Векуа И.Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек. – Матем. сб. 1952, т. 31 (73), №2, с. 217-314.
3. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959, 672 с.
4. Боярский Б. В. Некоторые граничные задачи для системы  $2n$  уравнений эллиптического типа на плоскости. – ДАН СССР, 1957, т. 124, №1.
5. Боярский Б. В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций. – Дисс.. докт. физ.-мат.наук. Москва, 1960.
6. Вольперт А. И. Исследование граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости. – ДАН СССР 1957, т. 114, №3, с. 462-464.
7. Виноградов В.С. Об ограниченности решений краевых задач для линейных эллиптических систем первого порядка на плоскости. – ДАН СССР, 1958, т. 121, №3, с. 399-402.
8. Джурев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1987, 415 с.
9. Дыбов П.Т. О разрешимости первой краевой задачи для дифференциального уравнения эллиптического типа шестого порядка. – ДАН СССР, 1972, т. 202, №6, с. 1251-1253.
10. Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости. – Док. РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415-417.
11. Джангибеков Г., Худжаназарова Г. О задаче Дирихле для эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка на плоскости. – ДАН России, 2004, т. 398, №2, с.151-155.
12. Джангибеков Г., Одинабеков Д.М., Худжаназарова Г.Х. Об условиях нетеровости и индексе одного класса сингулярных интегральных операторов по ограниченной односвязной области. – Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2019, №2, с. 9-14.



13. Джангибеков Г., Одинабеков Д.М. К теории нетера двумерных сингулярных операторов с четной характеристикой по ограниченной области и его ериложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений четвертого порядка. – Вестн. Самарского универ., Естествен. сер., 2020, т. 26, №1, с. 7-13.
14. Begehr H., Vanegas C.J. Iterated Neumann problem for higher order Poisson equation. – Math. Nachr, 2006, №279, pp. 38-57.

**Г.Чангибеков, К.Ш.Файззода\***

## МАСЪАЛАИ ДИРИХЛЕ ВА НЕЙМАН БАРОИ СИСТЕМА МУОДИЛАҲОИ УМУМИИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ШАШ ДАР ҲАМВОРИ

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,  
Институти математика ба номи А.Ҷӯраеви АМИ Тоҷикистон,  
\*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола ҳалшавандагии масъалаи Дирихле барои система ду муодилаҳои дифференсиалии эллиптикӣ аз ду тағйирёбандаҳои новобастаи тартиби шаш дар соҳаи маҳдуд омӯхта мешавад. Бо усули ба таври эквивалентӣ гузаштан ба муодилаҳои интегралӣ сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд шартҳои эффективноки нётеровӣ будан ёфта шуда, формула барои ҳисоб намудани индекси масъала ҳосил карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** масъалаи Дирихле, нетеровӣ будан, индекси масъала, интегралӣ сингулярӣ.

**G.Jangibekov, K.Sh.Faizzoda\***

## OF THE DIRICHLET AND NUEMAN PROBLEMS FOR SOME ELLIPTIC SYSTEMS OF SIXES-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE PLANE

*National Academy of Sciences of Tajikistan,  
A.Juraev Institute of mathematics, NAS of Tajikistan,  
\*National University of Tajikistan*

In this note we consider of the Dirichlet problem for some elliptic systems of sixes-order with two functions of two variables differential equations in the pline. The may be reduced, in an equivalent way, to two-dimensional singular integral equations in the simply connected domain in the complex pline. For this systems is given effective necessary and sufficient conditions for the property Neter obtained along with a formula for computing the index of the Dirichlet problem.

**Key words:** Dirichlet problem, Noetherian property, operator index, singular integral operator.

### Сведения об авторах:

1. **Джангибеков Гулходжа** – доктор физ.-мат.наук., Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, главный научный сотрудник. E-mail: gulkhoja@list.ru;
2. **Файззода Кишвар** – Таджикский национальный университет, докторант Phd.

УДК 536.46

Специальность: 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ;  
1.3.17 – Химическая физика, горение и взрыв, физика экстремальных состояний вещества;  
1.3.3 – Теоретическая физика.

М.М.Кабиров, И.И.Халимов, З.Б.Шерматова

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ПРИ ФИЛЬТРАЦИОННОМ ГОРЕНИИ ВОДОРОДНО-ВОЗДУШНОЙ СМЕСИ И КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ ЕЁ АВТОМАТИЗАЦИИ

*Российско-Таджикский (Славянский) университет*

*(Представлено академиком НАН Таджикистана М.И.Илоловым 19.02.2024 г.)*

*В статье на основе имеющихся наборов значений максимальной температуры пористой среды при фильтрационном горении водородно-воздушной смеси построены её математические модели для каждого значения параметра. Необходимость построения таких моделей связана с расхождением между значениями максимальной температуры пористой среды, рассчитанными по формуле и установленными экспериментально для некоторых значений параметров системы, а также для описания структуры нестационарной волны. Для построения моделей использовался метод линейной регрессии, а для его автоматизации был составлен комплекс программ, интерфейс которых состоит из нескольких открытых и выпадающих окон и панели кнопок для расчёта параметров, записи и очистки данных, построения графиков и хранения исходных и результирующих данных.*

**Ключевые слова:** *горение газа, состав смеси, скорость, волна, максимальная температура, коэффициент, теплоотдача, пористая среда, диаметр частиц, комплекс программ, линейная регрессия.*

Проведённые исследования горения водородно-воздушной смеси в инертной пористой среде составляет важную часть теории фильтрационного горения газов (ФГГ) [1, 3-8]. Это связано с уникальными физико-химическими свойствами водорода [9], а также его неисчерпаемостью. В настоящее время водород широко используется в различных областях промышленности [2,10], развивается водородная энергетика.

Целью настоящей работы является представление результатов исследования по построению математической модели максимальной температуры пористой среды при фильтрационном горении водородно-воздушной смеси, а также реализация программного обеспечения по расчёту параметров модели, вывода графика зависимости и её характеристик на экран компьютера, хранения исходных и результатных данных, очистка экранных данных для воспроизведения других вариантов.

---

*Адрес для корреспонденции:* Кабиров Маруф Махмудович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М.Турсун-заде, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: maruf1960@mail.ru

Заметим, что при отсутствии теплопотерь максимальная температура пористой среды при фильтрационном горении газов (ФГГ) равна равновесной температуре, которая определяется из интеграла энергии системы дифференциальных уравнений [11, 12]

$$T_e = T_0 + \frac{Q\eta_0}{c_p \left(1 + \frac{\varphi}{1+u_0}\right)}. \quad (1)$$

Здесь  $Q\eta_0$  – тепло выделяющее в результате химической реакции;  $c_p$  – теплоемкость газовой фазы при постоянном давлении;  $\eta_0$  – исходная массовая концентрация недостающего компонента газа;  $\varphi = \rho_2 c_2 / \rho_{10} c_p$  – отношение объёмных теплоёмкостей пористой среды и газа;  $u_0 = v_{10}/U$  – относительная скорость вдува смеси ( $v_{10}$ ) по отношению к скорости распространения волны ( $U$ );  $T_0$  – исходная температура системы.

Формула (1) при отсутствии твёрдой фазы переходят в формулу адиабатической температуры газа, то есть определяет температуру горения, как максимальную температуру.

В случае учёта теплопотерь из зоны горения, профили температур пористой среды и смеси газов имеют резко выраженные локальные максимумы в пределах зоны горения. В теории ФГГ максимум температуры пористой среды в зоне горения принимается равным температуры горения. Однако, до семидесятого года двадцатого века формулы расчёта максимальной температуры горения при теплопотерях в окружающее пространство не существовала. А для задания предельной температуры, соответствующей критической теплопотери, использовали утверждение Я.Б.Зельдовича [13], что предельная температура отличается от адиабатической температуры на один характерный интервал

$$T_e = T_r - \frac{RT_r^2}{E}. \quad (2)$$

Здесь  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $E$  – энергия активации;  $T_r$  – температура горения, определяемая по формуле

$$T_r = T_0 + \frac{Q\eta_0}{c_p}.$$

Впервые формула температуры горения, содержащий коэффициент теплоотвода, была приведена в работе [14] для горения конденсированных сред

$$T_e = T_0 + \frac{Q\eta_0}{c_p \sqrt{1+4\Delta}}. \quad (3)$$

Здесь  $\Delta$  – безразмерный коэффициент теплоотдачи.

Но для горения газов без твёрдой фазы и фильтрационного горения газов, где гидродинамические параметры играют существенную роль в процессе горения, подобной формулы (3) не было до недавнего времени. Лишь в девяностые годы двадцатого века и первое десятилетие двадцать первого

века появились работы [3,6,15] по фильтрационному горению газов, где приводятся не отличающиеся друг от друга формулы расчёта максимальной температуры пористой среды, содержащие коэффициент теплоотвода и скорости вдува смеси, наряду с теплофизическими характеристиками пористой среды и смеси газов

$$T_e = T_0 + \frac{Q\eta_0}{c_p \left(1 + \frac{\varphi}{1+u_0}\right) \sqrt{1 + \frac{4\Delta}{u^2}}} . \quad (4)$$

Здесь  $u = 1 + u_0 / (1 + \varphi)$  – безразмерный параметр.

Следует отметить, что формула (4) была получена в [3] при рассмотрении одно-температурной модели ФГГ, где интенсивность межфазного теплообмена относительно большая, вследствие чего температуры пористой среды и смеси газов становятся равными. Кроме того, эта формула, в частном случае, переходит к формуле (3), полученной в работе [14] для горения конденсированных сред. Однако дальнейшее исследование процессов ФГГ показало, что для некоторых случаев ФГГ расчётные значения максимальной температуры пористой среды, произведённые по теоретической формуле (4) недостаточно точно характеризуют экспериментальные [6] и численные результаты [16]. Анализируя максимум температуры пористой среды на рисунках работы [16] и вновь, проведённых вычислительных экспериментов, приходим к выводу, что отличие становится существенным, если увеличивать диаметр частиц пористой среды. И, поскольку коэффициент межфазного теплообмена обратно пропорционально диаметру частиц пористой среды, то межфазный теплообмен становится менее интенсивным и различие температур фаз в зоне горения становятся существенным, что не оправдывает одно-температурную модель. В связи с этим ставилась задача об определении температуры горения при теплопотерях для относительно больших диаметров частиц пористой среды. Поскольку в нашем распоряжении имеются численные данные, характеризующие максимальную температуру пористой среды, полученные при численном реализации профилей температуры пористой среды и смеси газов в волне горения, то используя метод линейной регрессии можем получить математические модели максимальной температуры пористой среды, соответствующие различным составам смеси, коэффициентам теплоотдачи и диаметрам частиц пористой среды в виде подобной формулы (4)

$$T_{\max} = T_0 + \frac{Q\eta_0}{c_p (1 + \varphi / (1 - u_0)) \sqrt{a + b \cdot x}} \quad (5)$$

Здесь  $a, b$  – коэффициенты линейной регрессии,  $x = \Delta / u^2$ . Поиск формулы максимальной температуры пористой среды именно в виде формулы (5) необходим для аналитического описания структуры нестационарной волны фильтрационного горения газов при теплопотерях [8].

Для получения математической модели (5) посредством линейной регрессии представим её в виде

$$\left[ \frac{Q\eta_0}{C_p \left(1 + \frac{\varphi}{1-u_0}\right) (T_{\max} - T_0)} \right]^2 = a + b \frac{\Delta}{u^2}. \tag{6}$$

Для детального исследования максимальной температуры пористой среды нами проведены дополнительные вычислительные эксперименты по численной реализации профилей температуры пористой среды и смеси газов в интервалах изменения значений параметров, таких как коэффициент поверхностной теплоотдачи (900-1200 Вт/(м²К)), скорость вдува смеси (2-5 м/с), диаметр частиц пористой среды (1-5 мм), состав смеси (36,7%Н₂-67%Н₂+воздух). Для каждого значения этих параметров в интервалах изменений, найдены скорости волны и по нему определялись соответствующие значения левой части равенства (6), чтобы определить коэффициенты регрессии *a*, *b* методом наименьших квадратов. Ниже в табл. 1 приведены расчётные значения коэффициентов линейной регрессии, среднеквадратическое отклонение температуры (*σ*), достоверность аппроксимации (*R*<sup>2</sup>) характеризующие математическую модель максимальной температуры пористой среды при вариации диаметра частиц пористой среды и фиксированных значениях следующих параметров:

$$Q = 15131250 \text{ Дж} / \text{кг}, c_p = 1000 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К}), T_0 = 320 \text{ К}, \varphi = 3300, \eta_0 = 0,077, R_{\text{труб}} = 0,09 \text{ м}$$

Таблица 1

Коэффициенты линейной регрессии, среднеквадратическое отклонение и достоверность аппроксимации

$\alpha_w, \frac{Вт}{м^2К}$	$u_{10}, м/с$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>σ</i> , К	<i>R</i> <sup>2</sup>
900	2	-3,2845	49,101	4,57	1
	3	-4,065	112,4	2,49	0,9999
	4	-5,5397	208,74	1,19	0,9999
	5	-5,211	322,65	1,75	0,9998
1200	3	-5,0734	75,05	10,53	1
	4	-5,1327	134,83	4,67	0,9995
	5	-4,9077	209,09	2,08	0,9996

В табл. 2 приведены значения максимальной температуры пористой среды, рассчитанные численным методом и по модели (5) при вышеуказанных значениях параметров и в соответствии с табл. 1

Таблица 2

Максимальные температуры пористой среды, рассчитанные численным методом и по модели

$\alpha_w = 900 \text{ Bm}/(\text{m}^2 \text{ K})$						
$v_{10}, \text{ м/с}$	$d, \text{ мм}$	1	2	3	4	5
2	$T_{\text{max}}^{\text{чис}}, \text{ K}$	885	855	825	815	800
	$T_{\text{max}}^{\text{мод}}, \text{ K}$	894,39	850,98	824,98	815	-
	$U \cdot 10^4, \text{ м/с}$	2,024	3,15	4,39	5,45	6,43
3	$T_{\text{max}}^{\text{чис}}, \text{ K}$	870	860	840	825	820
	$T_{\text{max}}^{\text{мод}}, \text{ K}$	869,11	855,49	840,14	828,07	819,32
	$U \cdot 10^4, \text{ м/с}$	4,22	4,73	5,45	6,2	6,95
4	$T_{\text{max}}^{\text{чис}}, \text{ K}$	870	860	850	837	827
	$T_{\text{max}}^{\text{мод}}, \text{ K}$	871,80	860,36	848,12	836,81	827,37
	$U \cdot 10^4, \text{ м/с}$	5,89	6,31	6,83	7,4	7,97
5	$T_{\text{max}}^{\text{чис}}, \text{ K}$	870	858	852	847	837
	$T_{\text{max}}^{\text{мод}}, \text{ K}$	868,28	860,58	852,52	844,80	837,79
	$U \cdot 10^4, \text{ м/с}$	7,46	7,84	8,28	8,75	9,23
$\alpha_w = 1200 \text{ Bm}/(\text{m}^2 \text{ K})$						
3	$T_{\text{max}}^{\text{чис}}, \text{ K}$	887	870	850	830	820
	$T_{\text{max}}^{\text{мод}}, \text{ K}$	909,49	874,96	845,31	828,40	820,06
	$U \cdot 10^4, \text{ м/с}$	4,048	4,935	6,1	7,211	8,28
4	$T_{\text{max}}^{\text{чис}}, \text{ K}$	885	870	860	847	830
	$T_{\text{max}}^{\text{мод}}, \text{ K}$	892,15	874,66	856,63	842,26	831,51
	$U \cdot 10^4, \text{ м/с}$	5,839	6,476	7,3	8,156	9,01
5	$T_{\text{max}}^{\text{чис}}, \text{ K}$	885	877	867	851	845
	$T_{\text{max}}^{\text{мод}}, \text{ K}$	887,28	875,83	864,05	853,47	844,48
	$U \cdot 10^4, \text{ м/с}$	7,457	8,01	8,67	9,37	10,08

По таблицам 1, 2 можно сделать вывод, что полученные математические модели с достоверностью аппроксимируют максимальные значения температуры пористой среды, полученные численным методом. Заметим, что подобные таблицы 1, 2 получены и для других составов водородно-воздушной смеси. В силу ограниченности объема статьи эти результаты в настоящей работе не приводятся.

Далее, для автоматизации моделирования, составлен комплекс программ, интерфейс которых состоит из открытых и выпадающих окон, а также панели кнопок: **Расчёт, Записать, График, Данные, Очистить** (рис.1). Представленное программное обеспечение позволяет рассчитывать коэффициенты линейной регрессии, рисует график зависимости (6), выводит вид этой зависимости и параметр

достоверности аппроксимации ( $R^2$ ), а также показывает исходные и рассчитываемые параметры варианта и очищает на экране выбранные значения из базы данных.

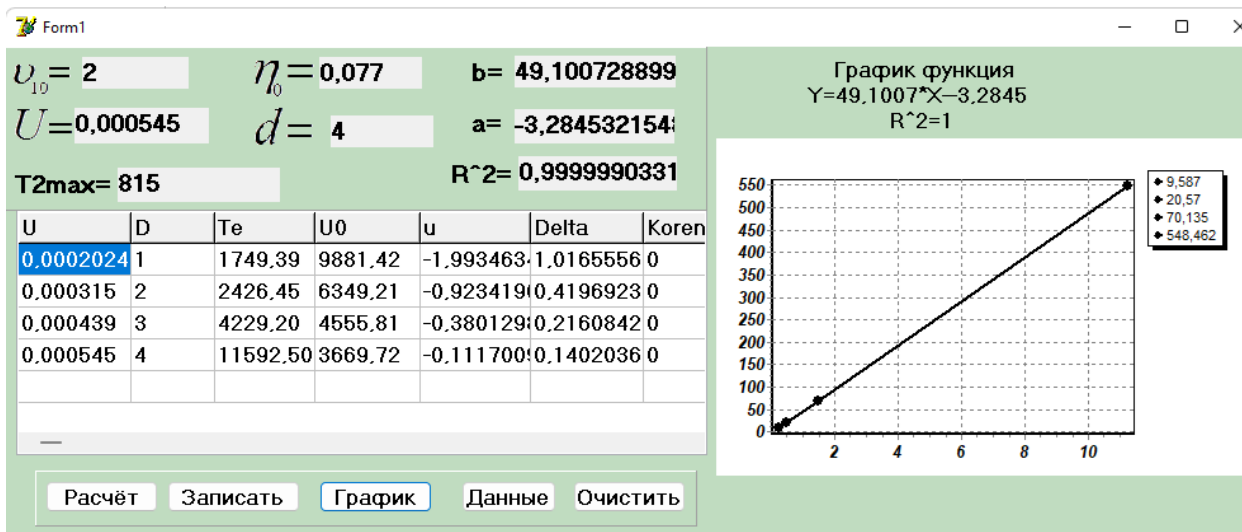


Рис. 1. Комплекс программ автоматизации моделирования

Поступило 19.02.2024 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Потытняков С.И., Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. Влияние теплотерь на распространение стационарных волн при фильтрационном горении газов. – Физика горения и взрыва, 1984, т. 20, №1, с.19-26.
2. Васюков Г.В., Кожин П.А. Анализ исследований пожарной опасности водорода при нормальных условиях. – Пожаровзрывоопасность веществ и материалов, 2010, т.19, №7, с.4-21.
3. Кабилов М.М. Влияние теплотерь на устойчивость стационарных волн при фильтрационном горении газов. – ДАН РТ, 1994, т.37. № 3-4, с.24-28.
4. Dobrego K.V., Foutko S.I., Zhdanok S.A. Influence of transparency of packed bed on main parameters of high temperature radiative burner. – Modern problems of combustion and its applications. II Intern. School-seminar. Contributed papers. Minsk, 1997, p.29-33.
5. Футько С.И., Добрего К.Б., Жданок С.А., Ханевич Э.И. Локализация фронта горения в фильтрационном нагревателе дискового типа в условиях интенсивной внешней теплоотдачи. – Физика горения и взрыва, 2000, т.36, №3, с.17-24.
6. Какуткина Н.А., Коржавин А.А., Мбрава М. Особенности фильтрационного горения водородо-, пропано- и метановоздушных смесей в инертных пористых средах. – Физика горения и взрыва, 2006, т.42, №4, с.8-20.
7. Потытняков С.И., Бабкин В.С., Лаевский Ю.М., Дробышев В.И. Исследование тепловой структуры волны фильтрационного горения газов. – Физика горения и взрыва, 1985, т. 21, №2, с.19-25.
8. Кабилов М.М., Шерматова З.Б. Эквивалентная математическая модель фильтрационного горения газов при наличии теплотерь. – ДАН РТ, 2023, т. 66, №3-4, с.187-195.
9. Корольченко А.Я., Шебеко Ю.Н. О проблеме обеспечения пожаровзрыво-безопасности технологических процессов с участием водорода. – Пожаровзрывобезопасность, 1994, т.3, №2, с.40-43.

10. Пигасов Е.Е., Рябинин В.К., Ковалев Ю.М. Математическое моделирование адиабатического теплового взрыва для реакции окисления водорода. – Вестник ЮУрГУ. Серия. Математическое моделирование и программирование, 2013, т.6, №3, с.130-135.
11. Бабкин В.С., Лаевский Ю.М. Фильтрационное горение газов. – Физика горения и взрыва, 1987, т. 23, №5, с.27-44.
12. Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. Фильтрационное горение газов. В сб. Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. – Новосибирск: Наука. Сиб. Отд., 1988, с.108-145.
13. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. – М.: Наука СО, 1980, 478 с.
14. Шкадинский К.Г., Хайкин Б.И. Влияние теплопотерь на распространение фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе. В сб. Горение и взрыв. – М.: Наука. 1972, с.104-109.
15. Доброго К.В., Жданок С.А. Физика фильтрационного горения газов. – Минск: Институт тепло- и массообмена им. А.В.Лыкова НАНБ, 2002, 203 с.
16. Кабилов М.М., Халимов И.Х. Численное исследование стационарной структуры волны фильтрационного горения газов при наличии теплопотерь. – ДАН РТ, 2013, т. 56, №4, с.297-304.

**М.М.Қобилов, И.И.Ҳалимов, З.Б.Шерматова**

## **МОДЕЛСОЗИИ ҲАРОРАТИ МАКСИМАЛИИ МУҲИТИ КОВОК ДАР СЌЗИШИ ФИЛТРОНАИ ОМЕХТАИ ГИДРОГЕНУ ҲАВО ВА МАЧМАЪИ БАРНОМАҲО БАРОИ АВТОМАТИКУНОНИИ ОН**

*Донишгоҳи (Славянии) Россияю Тоҷикистон*

Дар мақола дар асоси маҷмӯаҳои мавҷудаи қиматҳои ҳарорати максималии муҳити ковок ҳангоми сўзиши филтронаи омехтаи гидрогену ҳаво моделҳои математикии он барои ҳар як қимати параметр сохта шудаанд. Зарурати сохтани чунин моделҳо аз фарқият доштани қиматҳои ҳарорати максималии муҳити ковок, ки аз рӯи формула ва дар озмоиш муайян шудаанд, вобаста мебошад ва инчунин барои тавсифи сохтори мавҷи ғайримуқаррар. Барои сохтани моделҳо усули регрессияи хаттӣ истифода шудааст ва барои автоматикунони он маҷмӯи барномаҳои тартиб дода шудаанд, ки интерфейси онҳо аз якҷанд тирезаҳои кушода ва кушодашаванда иборат мебошанд, инчунин аз панели тугмаҳо барои ҳисоб кардани параметрҳо, навиштан ва тоза кардани маълумот, сохтани график ва нигоҳдории маълумотҳои ибтидоӣ ва натиҷавӣ.

**Калимаҳои калидӣ:** *сўзиши газ, таркиби омехта, суръат, мавҷ, ҳарорати максималӣ, коэффитсиент, гармидиҳӣ, муҳити ковок, диаметри зарраҳо, маҷмӯи барномаҳо, регрессияи хаттӣ.*



M.M.Kabilov, I.I.Khalimov, Z.B.Shermatova

## MODELING OF THE MAXIMUM TEMPERATURE OF A POROUS MEDIUM DURING FILTRATION COMBUSTION OF A HYDROGEN-AIR MIXTURE AND A SET OF PROGRAMS FOR ITS AUTOMATION

*Russian-Tajik (Slavic) University*

In the article, based on the available sets of values of the maximum temperature of a porous medium during filtration combustion of a hydrogen-air mixture, its mathematical models are constructed for each parameter value. The need to build such models is related to the discrepancy between the values of the maximum temperature of a porous medium calculated by the formula and established experimentally for some values of the system parameters, as well as for describing the structure of a non-stationary wave. The linear regression method was used to build models, and to automate it, a set of programs was compiled, the interface of which consists of several open and drop-down windows and a panel of buttons for calculating parameters, recording and clearing data, plotting and storing source and result data.

**Key words:** *combustion gas, composition of the mixture, velocity, wave, maximum temperature, coefficient, heat transfer, porous medium, particle diameter, software package, linear regression.*

### Сведения об авторах:

1. **Кабиров Маруф Махмудович** – доктор физико-математических наук, Российско-Таджикский (Славянский) университет, доцент кафедры информатики и информационных технологий. E-mail: maruf1960@mail.ru;
2. **Халимов Илхом Исломович** – кандидат физико-математических наук, Российско-Таджикский (Славянский) университет, доцент кафедры информатики и информационных технологий. E-mail: halimov1963@mail.ru;
3. **Шерматова Зайнаб Бахромовна** – Российско-Таджикский (Славянский) университет, преподаватель кафедры информатики и информационных технологий. E-mail: shermatova333@bk.ru.

УДК 523. 532

Специальность 1.3.1 – Физика космоса, астрономия.

Член-корреспондент НАН Таджикистана Г.И.Кохирова,

А.М.Буриев, С.Н.Сафаров

## НАБЛЮДЕНИЯ ДВОЙНОГО АСТЕРОИДА (65803) ДИДИМОС И ЕГО ДИНАМИКО-ФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ОПТИЧЕСКОГО ОБЗОРА

*Национальная академия наук Таджикистана,**Институт астрофизики НАН Таджикистана*

*В период с августа по сентябрь 2022 года на телескопе АЗТ-8 Гиссарской астрономической обсерватории (ГисАО) Института астрофизики НАНТ были проведены наблюдения астероида (65803) Дидимос. В результате астрометрического и фотометрического анализа изображений определены координаты и орбита астероида, измерен его видимый блеск в фильтрах BVRI и определен абсолютный блеск. Полученные показатели цвета соответствуют астероидам X- типа, для которых характерен металлический состав. Оценка диаметра составляет  $0.75 \pm 0.04$  км. Динамические и физические свойства по нашим наблюдениям подтверждают имеющиеся данные по астероиду Дидимос накануне его столкновения с космической миссией DART.*

**Ключевые слова:** астероид, наблюдения, астрометрия, орбита, фотометрия, кривая блеска, показатель цвета, диаметр.

Настоящая работа является продолжением цикла исследований потенциально опасных астероидов по результатам их оптических многоцветных наблюдений в обсерваториях Института астрофизики НАНТ.

### **Потенциально опасный астероид (65803) Дидимос**

Астероид (65803) Дидимос (или 1996 GT) является двойной системой вследствие наличия у астероида спутника. Этот спутник, получивший название Диморфос, обращается вокруг основного астероида Дидимос по круговой ретроградной орбите с орбитальным периодом 11.9 ч. [1]. Диаметр Диморфоса составляет приблизительно 160 м, в то время как диаметр основного тела Дидимоса – 780 м, таким образом, отношение средних диаметров двух астероидов составляет 0.22 [2].

Астероид Дидимос был обнаружен 11 апреля 1996 г. в Национальной обсерватории Китт-Пик в Аризоне, США [1]. Двойная структура астероида была выявлена позже, впервые сведения о его бинарности появились при анализе эхо-сигналов радиотелескопа Голдстоуна, затем они были подтверждены оптическим анализом кривой блеска, а также радиолокационными изображениями радиотелескопа Аресибо 23 ноября 2003 г. [1].

---

*Адрес для корреспонденции:* Кохирова Гулчехра Исроиловна, Буриев Анварджон Махмадалиевич. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/5, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: kokhirova2004@mail.ru, anvar10@mail.ru.

Дидимос относится к астероидам, сближающимся с Землей (АСЗ), группы Аполлона. Из-за размера и сближений с Землей на расстояния менее 0.05 а.е. объект классифицируется как потенциально опасный астероид (ПОА).

Элементы орбиты ПОА (65803) Дидимос представлены в табл. 1. В ней указаны следующие параметры [2]: эпоха – дата, на которую вычислена данная орбита,  $a$  – большая полуось,  $e$  – эксцентриситет,  $q$ ,  $Q$  – расстояния перигелия и афелия,  $i$  – угол наклона орбиты,  $\omega$  – аргумент перигелия,  $\Omega$  – долгота восходящего узла,  $T_j$  – критерий Тиссерана, величина которого указывает на типично астероидную орбиту объекта. Астероид Дидимос обращается вокруг Солнца на расстоянии от 1.01 до 2.27 а.е., один оборот происходит за 770 дней (2.1 года) [1]. Эксцентриситет его орбиты равен 0.38 и орбита наклонена очень низко к плоскости эклиптики.

Таблица 1

Элементы орбиты ПОА (65803) Дидимос (J2000.0)

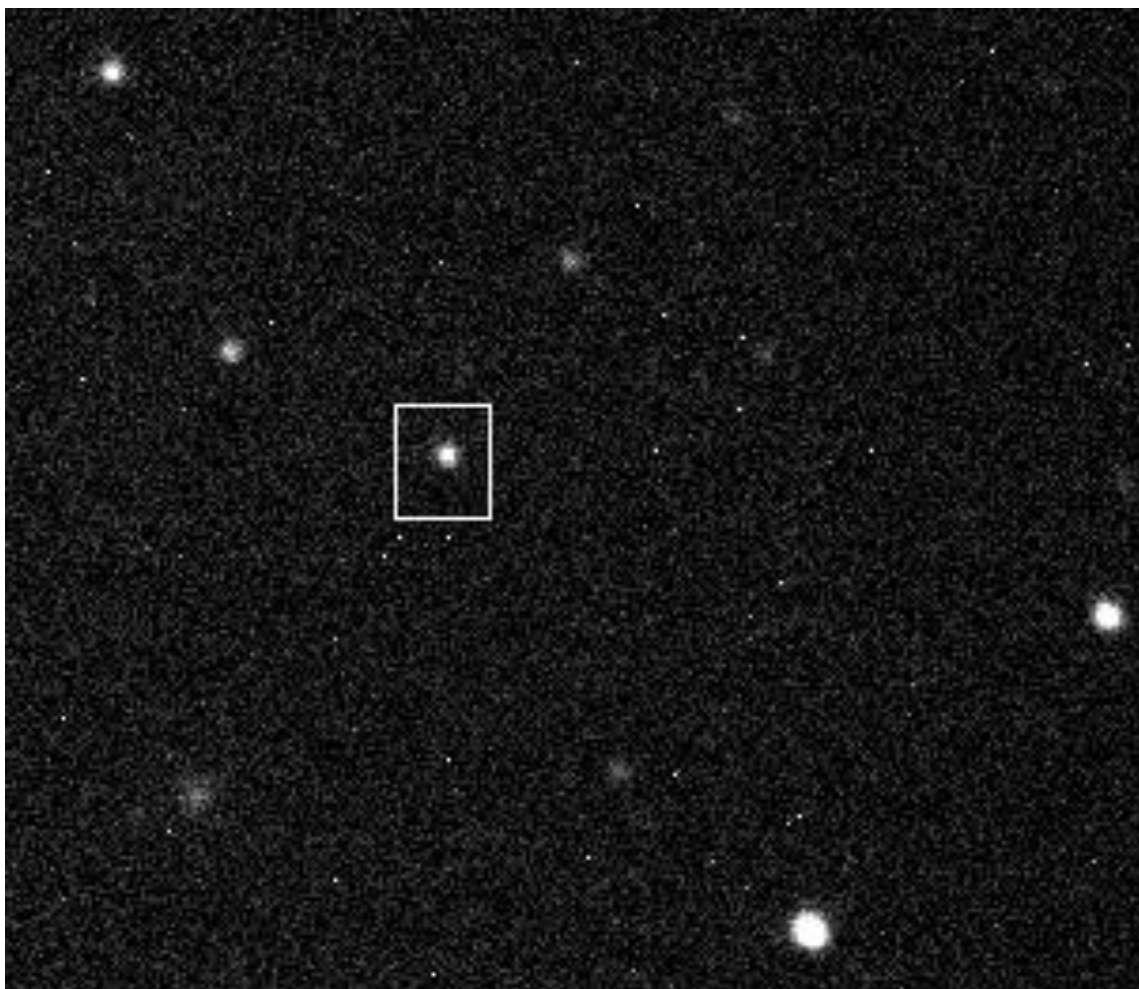
Эпоха	$a$ , а.е.	$e$	$q$ , а.е.	$Q$ , а.е.	$i$ , град.	$\omega$ , град.	$\Omega$ , град.	$T_j$
13.09.23	1.643	0.383	1.013	2.272	3.414	319.578	72.988	4.2

Спектральные наблюдения в видимом и ближнем инфракрасном диапазонах показали силикатный состав Дидимоса, что позволяет классифицировать его как каменный астероид S-типа [3]. Дидимос обладает быстрым вращением с периодом 2.26 ч. и незначительным изменением яркости на 0.08 звездной величины, что свидетельствует о том, что его форма близка к сфероидальной.

Астероид Дидимос представляет собой важный ресурс для изучения бинарных астероидов, однако наряду с этим научным интересом в 2023 г. Дидимос стал объектом активного исследования в связи с космическим экспериментом, реализованным с помощью космической миссии DART. Данный эксперимент подготовлен и реализован с целью разработки стратегий по предотвращению столкновений с опасными астероидами. Аппарат DART, созданный и запущенный НАСА в ночь с 23 на 24 ноября 2021 г., преодолел расстояние до Дидимоса за 10 месяцев. 27 июля 2022 г. его бортовая система навигации впервые идентифицировала Дидимос, до которого оставалось 38 млн. км. Даты миссии были выбраны не случайно, в конце сентября 2022 г. расстояние между Землей и двойной системой астероидов (Дидимос-Диморфос) достигло минимума – 11.5 млн. км и это значительно облегчало полет миссии к объекту. Отметим, что в следующий раз эта система окажется так близко к Земле только в 2062 году [4]. Финальная стадия сближения космической миссии DART с двойной системой началась 26 сентября 2022 г. в 19 ч. 14 мин. мирового времени (UT), когда расстояние до Диморфоса было 89 тысяч км. Чуть позже, в 23 ч. 14 мин. UT аппарат DART врезался в астероид Диморфос со скоростью 6.25 км/с [4]. Через две недели после столкновения, 11 октября, НАСА сообщило первые результаты эксперимента. Период обращения Диморфоса вокруг астероида Дидимос вследствие столкновения уменьшился приблизительно на 32 мин., с 11 ч. 55 мин. до 11 ч. 23 мин., и это подтверждает, что эксперимент прошел успешно. В результате удара изменились орбита и траектория объекта. Результаты эксперимента позволяют определять силу удара опасного объекта, необходимую для его увода на безопасную для Земли орбиту.

**Наблюдения ПОА (65803) Дидимос**

Во время сближений астероидов с Землей создаются благоприятные условия для наземных наблюдений. Учитывая важность получения как можно больше наблюдательных данных для двойной системы Дидимос-Диморфос накануне эксперимента DART, мы провели его оптические наблюдения на телескопе АЗТ – 8 Гиссарской астрономической обсерватории (ГисАО) Института астрофизики НАНТ в течение семи ночей с 29 августа по 6 сентября 2022 г. Телескоп АЗТ-8, работающий по оптической системе Ньютона, обладает светосилой  $D/F=700$  мм/2820 мм. Регистрация объекта осуществлялась с помощью ПЗС-камеры FLI ProLine PL09000, имеющей размер  $3056 \times 3056$  пикселей и поле зрения  $44.5' \times 44.5'$ , а масштаб её матрицы составляет  $0.874''/\text{пиксель}$ . В обзоре использованы широкополосные фотометрические фильтры *BVRI* системы Джонсона-Козинса.–. Для снижения уровня шумов ПЗС-камеры оборудование было охлаждено до температуры  $-20^\circ\text{C}$ . В результате получено почти 800 снимков с экспозициями от 10 до 60 с. Изображение Дидимоса во время этих наблюдений приведено на рис. 1. Журнал наблюдений представлен в табл. 1, где  $r$  и  $\Delta$  – это расстояния от астероида до Солнца и Земли,  $ph$  – фазовый угол,  $N$  и  $t$  – количество и время экспозиций.



**Рис. 1.** Двойная система астероидов Дидимос-Диморфос (выделено квадратом), 3 сентября 2022 г., экспозиция 60 с, АЗТ - 8 ГисАО.

Таблица 2

Журнал наблюдений ПОА (65803) Дидимос в Гиссарской астрономической обсерватории

2022, УТ	$r$ , а.е.	$\Delta$ , а.е.	$ph$ , град.	N x Фильтр	$t$ , с
август 29.09007	1.152	0.157	23.893	30xB, 30xV, 30xR, 30xI	10-60
август 30.06403	1.146	0.152	24.543	20xB, 20xV, 20xR, 20xI	10-60
август 31.01598	1.142	0.148	25.074	25xB, 25xV, 25xR, 25xI	10-60
сентябрь 02.06208	1.133	0.140	26.321	28xB, 28xV, 28xR, 28xI	10-60
сентябрь 03.08313	1.128	0.136	27.001	28xB, 28xV, 28xR, 28xI	10-60
сентябрь 05.09708	1.121	0.129	28.454	31xB, 31xV, 31xR, 31xI	10-60
сентябрь 06.08493	1.118	0.128	28.714	26xB, 26xV, 26xR, 26xI	10-60

### Астрометрическая обработка, определение координат и вычисление орбиты ПОА (65803) Дидимос

Первичная обработка кадров выполнена по стандартной процедуре с учетом кадров «flat», «bias» и «dark», полученных во время наблюдений и необходимых для учета различных оптических и аппаратурных искажений.

Для астрометрической обработки изображений астероида был применен программный пакет АПЕКС-II [5]. Экваториальные координаты астероида – прямое восхождение  $\alpha$  и склонение  $\delta$  были определены с использованием опорных звезд из каталога UCAC5 (точность положений звезд составляет 0.05") и для избранных моментов наблюдений представлены в табл. 3. В графическом виде видимая траектория астероида Дидимос по наблюдениям в ГисАО и по другим наблюдениям [2] приведена на рис. 2, где по оси абсцисс даны  $\alpha$  – прямое восхождение и по оси ординат  $\delta$  – склонение астероида. Как видно, наши координаты соответствуют видимой траектории астероида, построенной по разным наблюдениям, имеющимся в базе данных MPC [2].

Таблица 3

Экваториальные координаты и видимые звездные величины в разных фильтрах ПОА Дидимос по наблюдениям в ГисАО

№	Дата	Момент наблюдений (УТ)	$\alpha$	$\delta$	$m$ (зв.вел.)
1	29.08.2022	19 <sup>h</sup> 17 <sup>m</sup> 11 <sup>s</sup> .90	23 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup> 53 <sup>s</sup> .36	-29°09'43".3	15.4
2	29.08.2022	19 17 24.86	23 53 53.43	-29 09 44.4	15.8
3	29.08.2022	19 18 17.56	23 53 53.49	-29 09 45.7	15.0
4	29.08.2022	19 18 31.39	23 53 53.48	-29 09 46.0	15.1
5	30.08.2022	19 39 08.64	23 57 29.97	-29 33 10.1	16.5
6	30.08.2022	19 48 52.70	23 57 31.33	-29 33 20.6	15.4
7	30.08.2022	19 49 55.77	23 57 31.46	-29 33 21.3	15.4
8	30.08.2022	19 50 59.71	23 57 31.63	-29 33 22.4	15.4
9	31.08.2022	19 46 15.45	00 01 14.95	-29 56 34.5	14.9
10	31.08.2022	19 46 49.15	00 01 15.03	-29 56 35.7	14.6

№	Дата	Момент наблюдений (UT)	$\alpha$	$\delta$	m (зв.вел.)
11	31.08.2022	19 47 21.98	00 01 15.08	-29 56 35.6	15.0
12	31.08.2022	19 47 55.68	00 01 15.19	-29 56 36.6	15.1
13	02.09.2022	20 08 18.24	00 09 20.06	-30 43 50.8	14.9
14	02.09.2022	20 09 48.96	00 09 20.17	-30 43 51.4	15.1
15	02.09.2022	20 09 51.55	00 09 20.32	-30 43 52.3	14.9
16	02.09.2022	20 10 14.88	00 09 20.33	-30 43 52.5	14.9
17	02.09.2022	20 10 39.07	00 09 20.44	-30 43 53.8	14.9
18	03.09.2022	20 31 07.68	00 13 43.35	-31 07 42.2	14.9
19	03.09.2022	20 31 31.01	00 13 43.41	-31 07 42.2	15.0
20	03.09.2022	20 31 54.33	00 13 43.44	-31 07 43.0	14.8
21	03.09.2022	20 32 17.66	00 13 43.51	-31 07 43.3	14.9
22	03.09.2022	20 32 40.99	00 13 43.57	-31 07 44.1	15.0
23	03.09.2022	20 33 04.32	00 13 43.66	-31 07 44.5	14.9
24	05.09.2022	19 27 01.15	00 22 52.14	-31 53 18.1	14.5
25	05.09.2022	19 27 14.97	00 22 52.22	-31 53 18.5	14.1
26	05.09.2022	19 27 27.93	00 22 52.27	-31 53 18.6	14.5
27	05.09.2022	19 27 41.76	00 22 52.27	-31 53 18.2	15.3
28	05.09.2022	19 27 54.72	00 22 52.28	-31 53 18.7	15.1
29	05.09.2022	19 28 07.68	00 22 52.46	-31 53 18.4	14.3
30	06.09.2022	21 42 26.20	00 28 21.28	-32 18 27.7	15.0

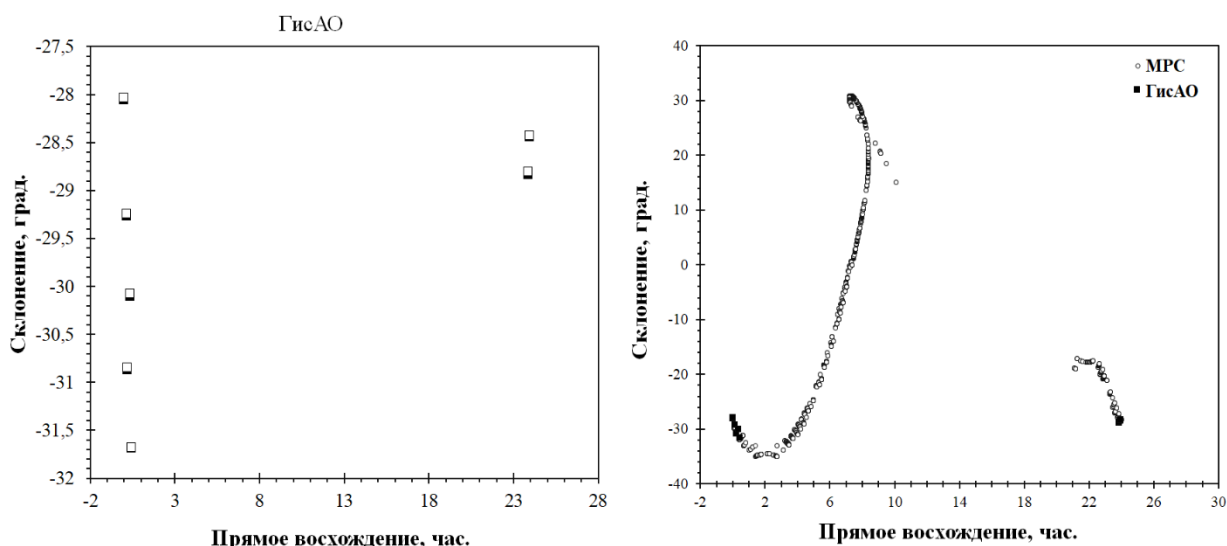


Рис. 2. Видимая траектория ПОА (65803) Дидимос по наблюдениям в ГисАО (справа) и по данным других авторов (из базы данных MPC) (слева) в августе-сентябре 2022 г.

Ошибки определения координат, найденные с помощью ПП ЭПОС [6], представлены в табл. 4, где  $(O-C)_\alpha$  и  $(O-C)_\delta$  - средние значения отклонений измеренных экваториальных координат (O) от данных MPC (C) для координат  $\alpha$  и  $\delta$ , соответственно,  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_\delta$  - средние квадратичные ошибки координат в угловых секундах. Как видно из табл. 4, средняя по всем кадрам ошибка астрометрической редуциции не превышает  $\pm 0.145''$  и  $\pm 0.217''$  для прямого восхождения  $\alpha$  и склонения  $\delta$ , соответственно, что говорит о приемлемой точности измерений и, соответственно, определения координат.

Таблица 4

Средние разности (O-C) и их стандартные отклонения по измерениям изображений  
для ПОА (65803) Дидимос

2022, UT	(O-C) <sub>α</sub>	σ <sub>α</sub>	(O-C) <sub>δ</sub>	σ <sub>δ</sub>
август 29.09007	0.015	±0.059	- 0.059	±0.036
август 30.06403	0.032	±0.036	+ 0.043	±0.044
август 31.01598	0.057	±0.036	- 0.029	±0.043
сентябрь 02.06208	0.078	±0.040	- 0.060	±0.035
сентябрь 03.08313	0.107	±0.036	0.148	±0.033
сентябрь 05.09708	- 0.026	±0.036	0.094	±0.033
сентябрь 06.08493	0.145	±0.060	0.217	±0.051

Мы вычислили орбиту астероида с использованием 526 его положений, найденных из наших наблюдений, с помощью ПП Find\_orb [7]. Стандартные элементы орбиты астероида в равноденствии 2000.0, а также  $n$  - среднее суточное движение,  $\sigma$  - средняя квадратичная ошибка приведены в табл.5, где для сравнения приведена также орбита, вычисленная на основе 3121 измеренных положений астероида по наблюдениям в различных обсерваториях [1]. В последнем столбце приведены величины разности  $\chi$  между вычисленной нами орбитой и орбитой MPC, указывающие на удовлетворительное соответствие двух орбит с учетом разности моментов времени, на которые они вычислены. В период нашего обзора орбита астероида оставалась стабильной, следовательно, никаких событий – значительных гравитационных возмущений, столкновений с другим объектом и др. не наблюдалось.

Таблица 5

Орбита ПОА (65803) Дидимос, вычисленная по наблюдениям в ГисАО, и орбита MPC (J2000.0)

Элементы орбиты	ГисАО [данная работа]	[1]	$\chi$
Кол-во положений, использованное для вычисления орбиты	526	3121	-
$T$	JD 2459874.267	JD 2459874.309	-
Эпоха	JD 2459828.5	JD 2460200.5	-
$e$	0.383245	0.383265	-2E-05
$a$ , а.е.	1.642662	1.642665	-3E-06
$q$ , а.е.	1.013085	1.013089	-4E-06
$i$ , град.	3.414149	3.414151	-2E-06
$\omega$ , град.	319.578606	319.578609	-3E-06
$\Omega$ , град.	72.987864	72.987868	-4E-06
$n$ , град./сут.	0.4681423	0.468146	-3.7E-06
$\sigma$	0".210	0".245	-

**Фотометрическая обработка и результаты**

Для определения физических свойств астероида Дидимос был применен стандартный метод фотометрической обработки изображений с помощью ПП АПЕКС-II [5]. Видимые звёздные величины определялись на основе опорных звёзд из каталога APASS, чей блеск измерен с точностью до 0.03<sup>m</sup> [8]. Средние за ночь видимые звёздные величины астероида, полученные с использованием фильтров BVRI, приведены в табл. 6.

Таблица 6

Видимые звездные величины ПОА (65803) Дидимос по наблюдениям в ГисАО

Фильтры 2022 г, UT	B	V	R	I
август 29.09007	15.95 ± 0.04	15.25 ± 0.04	14.83 ± 0.03	13.99 ± 0.02
август 30.06403	15.91 ± 0.02	15.21 ± 0.02	14.81 ± 0.03	13.97 ± 0.03
август 31.01598	15.92 ± 0.03	15.22 ± 0.03	14.82 ± 0.03	13.95 ± 0.04
сентябрь 02.06208	15.72 ± 0.05	15.02 ± 0.03	14.62 ± 0.04	13.72 ± 0.06
сентябрь 03.08313	15.93 ± 0.04	14.97 ± 0.04	14.15 ± 0.07	13.61 ± 0.04
сентябрь 05.09708	16.14 ± 0.07	14.84 ± 0.05	14.21 ± 0.03	13.63 ± 0.03
сентябрь 06.08493	16.17 ± 0.03	14.82 ± 0.03	14.22 ± 0.02	13.63 ± 0.04

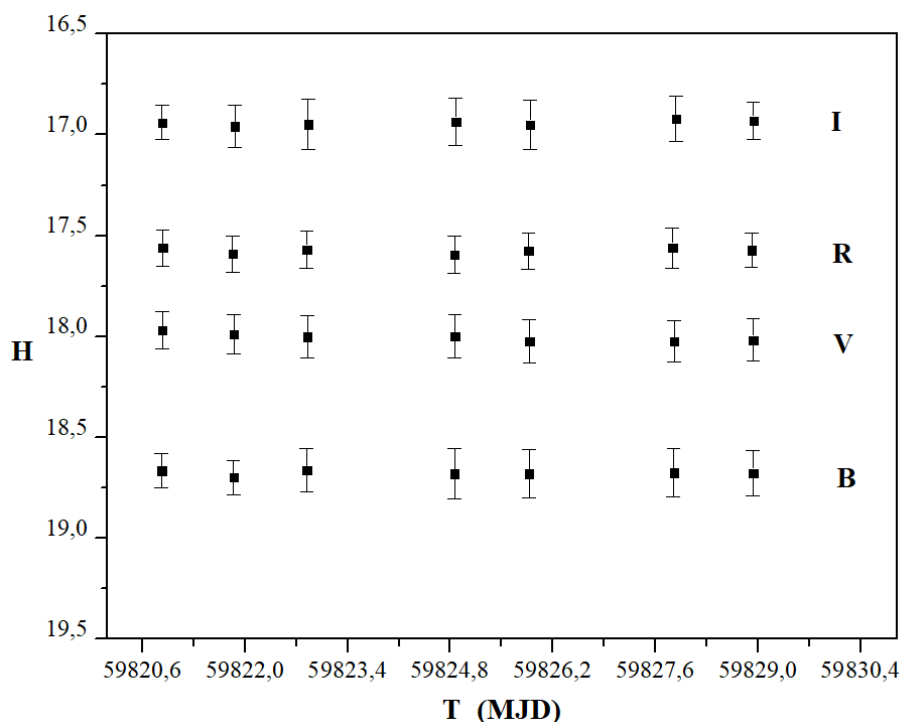
Видимые звездные величины трансформированы в абсолютные величины *H* с помощью полу-эмпирического уравнения, в котором учитывается фазовый угол астероида [9]. Детальное описание методики приведено в [10]. Вычисленные таким методом абсолютные звездные величины астероида (средние показатели за ночь) приведены в табл. 7. Кривая абсолютного блеска, а также ошибки измерений в виде перпендикулярных полос приведены на рис. 3. Абсолютный блеск Дидимоса в фильтре V находится в интервале от 17.97<sup>m</sup>±0.06 до 18.07<sup>m</sup>±0.03, и в пределах ошибок измерений соответствует эфемеридному значению *H*=18.11<sup>m</sup> [1]. В период мониторинга значимых изменений в абсолютном блеске не зарегистрировано.

Таблица 7

Абсолютный блеск *H* и показатели цвета ПОА (65803) Дидимос по наблюдениям ГисАО

2022 г, UT	B	V	R	I	B-V	V-R	R-I	B-R
август 29.09007	18.66 ± 0.05	17.97 ± 0.03	17.56 ± 0.05	16.94 ± 0.06	0.70	0.42	0.62	1.10
август 30.06403	18.70 ± 0.05	17.99 ± 0.04	17.59 ± 0.06	16.76 ± 0.05	0.70	0.40	0.83	1.11
август 31.01598	18.76 ± 0.07	18.07 ± 0.03	17.11 ± 0.05	16.50 ± 0.06	0.69	0.41	0.61	1.65
сентябрь 02.06208	18.71 ± 0.05	18.00 ± 0.03	17.60 ± 0.04	16.94 ± 0.05	0.71	0.41	0.66	1.11
сентябрь 03.08313	18.71 ± 0.06	18.02 ± 0.04	17.62 ± 0.05	16.96 ± 0.05	0.69	0.41	0.66	1.09
сентябрь 05.09708	18.69 ± 0.06	17.98 ± 0.05	17.57 ± 0.06	16.92 ± 0.08	0.71	0.41	0.65	1.12
сентябрь 06.08493	18.70 ± 0.04	17.99 ± 0.06	17.59 ± 0.04	16.94 ± 0.04	0.71	0.4	0.65	1.11





**Рис. 3.** Кривая блеска ПОА (65803) Дидимос в фильтрах BVRI по наблюдениям в ГисАО:  $H$  – абсолютный блеск (среднее значение за ночь),  $T$  (MJD) – модифицированная юлианская дата наблюдений.

Многоцветные наблюдения астероида Дидимос позволили определить его показатели цвета. Величины показателей цвета  $B-V$ ,  $V-R$ ,  $R-I$ ,  $B-R$  приведены в табл. 7. Мы нанесли эти показатели (крестиками) на диаграмму, представленную на рис.4, где приведены различные спектральные классы астероидов по данным [11]. Эти классы распределены в соответствии с их цветовыми показателями  $B-V$  и  $V-R$ . Как видно, показатели цвета астероида Дидимос, найденные по нашим наблюдениям, соответствуют спектральному классу  $X$ .

Таксономической классификацией Дидимоса занимались многие исследователи. В работах [3, 12, 13, 14] на основе оптических наблюдений сделан вывод о его принадлежности к  $S$ -типу. Однако, в спектре астероида выявлены две спектральные особенности, характерные для  $Xk$ -типа [15, 3] и для астероидов  $S$ -типа с минералогией схожей с обыкновенными хондритами [16]. В работе [17] аргументируется, что Дидимос относится к  $X$ -типу. Наши наблюдения подтверждают выводы [17], можно заключить, что до столкновения с миссией DART минералогия исследуемой двойной системы Дидимоса соответствовала  $X$ -типу (обыкновенный хондрит).

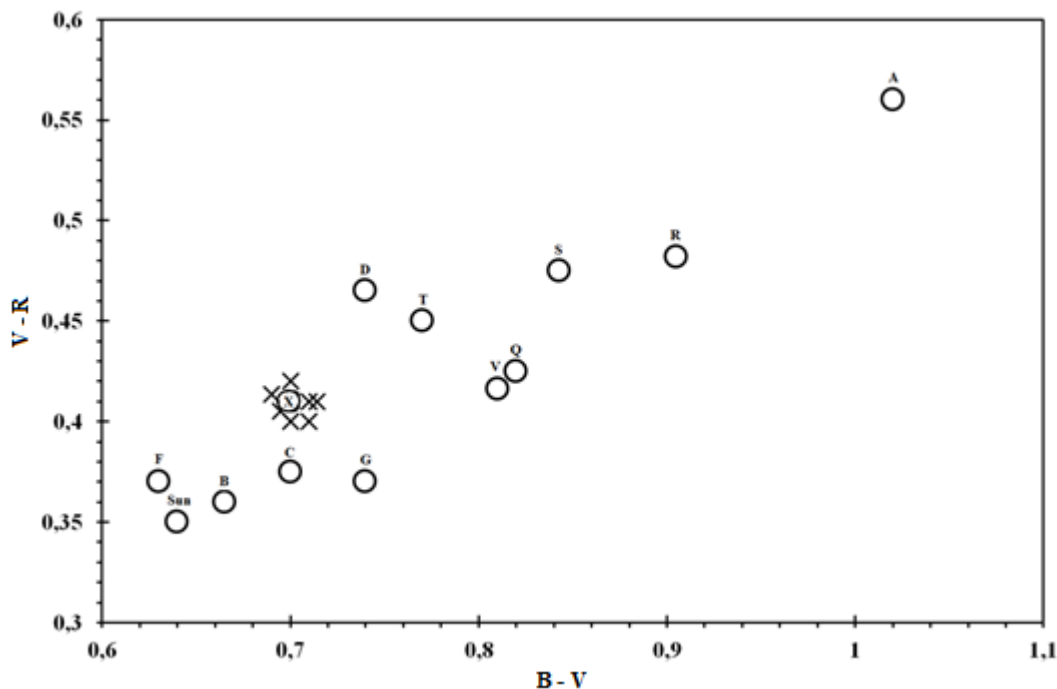


Рис. 4. Зависимость показателей цвета B-V и V-R для астероидов различных спектральных классов [11]. Наши данные для Дидимоса нанесены крестиками.

Эффективный диаметр астероида  $D$  был рассчитан на основе известного эмпирического соотношения, которое обычно используется для оценки размеров астероидов [18]. Геометрическое альbedo (в полосе  $V$ ) Дидимоса  $p_V=0.16\pm 0.04$  [19]. Используя это значение альbedo и измерения абсолютной яркости в фильтре  $V$ , мы получили оценку диаметра астероида. Результаты и величины, используемые для вычисления диаметра, представлены в табл. 8, из которой видно, что в среднем диаметр составляет  $0.75\pm 0.04$  км, при этом наблюдения за 7 ночей дают схожие значения. В [19, 20] указана оценка диаметра в 0.78 км, следовательно, оценка диаметра, полученная по нашим наблюдениям, соответствует имеющимся значениям.

Таблица 8

Оценка диаметра ПОА (65803) Дидимос по наблюдениям ГисАО

2022 г, УТ	$r$ , а.е.	$\Delta$ , а.е.	$ph$ , град.	$H_V$ , зв.вел.	$D$ , км ( $p_V=0.16$ )
август 29.09007	1.152	0.157	23.893	$17.97\pm 0.03$	$0.76 \pm 0.03$
август 30.06403	1.146	0.152	24.543	$17.99\pm 0.04$	$0.75 \pm 0.03$
август 31.01598	1.142	0.148	25.074	$18.07\pm 0.03$	$0.74\pm 0.05$
сентябрь 02.06208	1.133	0.140	26.321	$18.00\pm 0.03$	$0.75\pm 0.04$
сентябрь 03.08313	1.128	0.136	27.001	$18.02\pm 0.04$	$0.74\pm 0.04$
сентябрь 05.09708	1.121	0.129	28.454	$17.98\pm 0.05$	$0.74\pm 0.04$
сентябрь 06.08493	1.118	0.128	28.714	$17.99\pm 0.06$	$0.74\pm 0.05$

### З а к л ю ч е н и е

В результате наблюдений ПОА (65803) Дидимос, проведенных в Гиссарской астрономической обсерватории Института астрофизики НАНТ во время его приближения к Земле в августе-сентябре 2022 г. и накануне столкновения с космической миссией DART:

- определены точные координаты объекта и построена его видимая траектория.
- рассчитана орбита, которая оказалась схожей с орбитой из базы данных MPC [2].
- измерен видимый блеск в фильтрах *BVRI* и построены кривые блеска за семь ночей наблюдений;
- определен абсолютный блеск, его величина в фильтре *V* оказалась близкой к эфемеридному значению [1].
- оценены цветовые показатели, и было предложено, что объект может относиться к астероидам *X*-типа, которые характеризуются металлическим составом.
- средняя оценка диаметра составила  $0.75 \pm 0.04$  км (альбедо 0.16), что совпадает с имеющимися данными о размере астероида [19, 20].

ПОА (65803) Дидимос продолжает быть объектом активного исследования и представляет собой важный ресурс для изучения бинарных астероидов и разработки стратегий по предотвращению столкновений с астероидами. Необходимо продолжать систематический мониторинг и изучение астероидов для защиты нашей планеты.

*Поступило 31.01.2024 г.*

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. JPL. URL: [https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb\\_lookup.html#/?sstr=65803](https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=65803). Дата обращения 26.01.2024.
2. The International Astronomical Union – Minor Planet Center. URL: <https://www.minorplanetcenter.net>. Дата обращения 24.11.2023.
3. J. de León, J. Licandro, M. Serra-Ricart, N. Pinilla-Alonso, and H. Campins Observations, compositional, and physical characterization of near-Earth and Mars-crosser asteroids from a spectroscopic survey. – *Astronomy & Astrophysics*, 2010, vol. 517, pp. 1-25.
4. <https://science.nasa.gov/planetary-defense-dart/>. Дата обращения 22.01.2024.
5. Девяткин А.В., Горшанов Д.Л., Куприянов В.В., Верещагина И.А. Программные пакеты «АПЕКС-I» и «АПЕКС-II» для обработки астрономических ПЗС-наблюдений. – *Астрономический вестник*, 2010, т. 44, № 1, с. 74-87.
6. Львов В.Н., Цекмейстер С.Д. Использование программного пакета ЭПОС для исследования объектов Солнечной системы. – *Астрономический вестник*, 2012, т. 46, № 2, с. 190-192.
7. Orbit determination from observations. URL: <https://www.projectpluto.com/fo.htm>. Дата обращения 27.11.2023.
8. Henden A.A., Templeton M., Terrell D., Smith T.C., Levine S., Welch D. VizieR Online Data Catalog. – *AAVSO Photometric All Sky Survey (APASS) DR9*, 2016.
9. Penttila A., Shevchenko V.G., Wilkman O., Muinonen K.H. H, G1, G2 photometric phase function extended to low-accuracy data. – *Planet. Space Sci.*, 2016, vol. 123, pp. 117-125.

10. Кохирова Г.И., Буриев А.М., Сафаров С.Н. Определение физических свойств потенциально опасного астероида (163899) 2003 SD220 по наблюдениям в Гиссарской астрономической обсерватории – ДАН РТ, 2021, т. 64, № 7-8, с. 676-681.
11. Tholen D.J. Asteroid Taxonomy from Cluster Analysis of Photometry. – Ph.D. Thesis, Univ. of Arizona. 1984, pp. 167.
12. Cheng A. F., et al. AIDA DART asteroid deflection test: Planetary defense and science objectives. – Planet. Space Sci., 2018, vol. 157, pp. 104-115.
13. Kiersz D. A., et al. Spectroscopic Observations of (65803) Didymos with VLT/X-Shooter. – 7th IAA Planetary Defense Conference, held in Vienna, Austria, 26-30 April 2021, id. 194.
14. Zhong Y, L., et al. Physical properties of the Didymos system before and after the DART impact. – Astronomy & Astrophysics, 2023, vol. 676, pp. 14-10.
15. Binzel R. P., Rivkin A. S., Stuart J. S., et al. Observed spectral properties of near-Earth objects: results for population distribution, source regions, and space weathering processes. – Icarus, vol. 170, pp. 259-294.
16. Dunn T. L., et al. Mineralogies and source regions of near-Earth asteroids. – Icarus, 2013, vol. 222, pp. 273-282.
17. Kitazato K., et al. Photometric Behaviour Dependent on Solar Phase Angle and Physical Characteristics of Binary Near-Earth-Asteroid (65803) 1996 GT. – 35th Lunar and Planetary Science Conference, March 15-19, 2004, League City, Texas, abstract no.1623
18. Кохирова Г.И., Буриев А.М., Сафаров С.Н., Сатторзода А.А. Динамика и физические особенности потенциально опасного астероида 2009 ХО по наблюдениям в Гиссарской астрономической обсерватории. – Научные труды Института астрономии РАН, 2022, т. 7, № 2, с. 106-114.
19. Asteroids with Satellites Database – Johnston's archive. URL: <https://www.johnstonsarchive.net/astro/astmoons/am-65803.html>. Дата обращения 26.01.2024.
20. Nair T, Adriano C. B., Fernando M., Paula G. B. Lifted particles from the fast spinning primary of the Near-Earth Asteroid (65803) Didymos. – Icarus, 2023, vol. 397, pp. 1-12.

**Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, С.Н.Сафаров**

**МУШОҲИДАИ АСТЕРОИДИ ДУГОНИКИ (65803) DIDYMOS ВА  
ХУСУСИЯТҲОИ ФИЗИКАӢ ДИНАМИКИИ ОН АЗ РӢИ НАТИЧАӢОИ  
ТАҲҚИҚОТИ ОПТИКӢ.**

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,  
Институти астрофизикаи АМИ Тоҷикистон*

Дар давраи моҳҳои август ва сентябри соли 2022 астероиди (65803) Didymos бо истифода аз телескопи АЗТ-8-и Расадохонаи астрономии Ҳисор (РАХ)-и Институти астрофизикаи АМИТ мушоҳида карда шуд. Дар натиҷаи коркарди астрометрӣ ва фотометрии тасвирҳо координатҳо, мадори астероид, дурахшонии зоҳирӣ ва мутлақи астероид дар филтрҳои BVRI муайян карда шуд. Нишондиҳандаҳои рангии бадастомада нишон медиҳанд, ки астероид ба навъи X тааллуқ дорад, ки таркиби он бо таркиби металлӣ хос мебошад. Диаметри тахминии астероид  $0.75 \pm 0.04$  км мебошад. Хусусиятҳои динамикӣ ва физикӣ дар асоси мушоҳидаҳои гузаронидашуда, маълумотҳои мавҷударо оид ба астероиди Дидимос дар арафаи бархурди он бо миссияи кайҳонии DART тасдиқ мекунанд.

**Калимаҳои калидӣ:** астероид, мушоҳидаҳо, фотометрия, хатти каҷи дурахшонӣ, диаметр, навъи X, нишондоди ранг.

G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, S.N.Safarov

## OBSERVATION OF THE DOUBLE ASTEROID (65803) DIDYMOS AND ITS PHYSICAL-DYNAMIC CHARACTERISTICS BASED ON OPTICAL SURVEY RESULTS

*National Academy of Sciences of Tajikistan,  
Institute of Astrophysics, NAS of Tajikistan*

During the period from August to September 2022, observations of the asteroid (65803) Didymos were carried out on the AZT-8 telescope of the Hissar Astronomical Observatory (HisAO) of the Institute of Astrophysics of the National Academy of Sciences of Tajikistan. As a result of astrometric and photometric analysis of images, the coordinates and orbit of the asteroid were determined, its apparent brightness was measured in *BVRI* filters, and its absolute brightness was determined. The obtained color indicators indicate that the asteroid belongs to the *X* type, the material of which is characterized by a metallic composition. The estimated diameter is  $0.75 \pm 0.04$  km. The dynamic and physical properties according to our observations confirm the available data on the Didymos asteroid on the eve of its collision with the DART space mission.

**Key words:** *asteroid, observations, astrometry, orbit, photometry, light curve, color index, X-type, diameter.*

### Сведения об авторах:

1. **Кохирова Гулчехра Исроиловна** – доктор, Институт астрофизики НАН Таджикистана, директор, ведущий научный сотрудник отдела межпланетных тел. E-mail: kokhirova2004@mail.ru;
2. **Буриев Анварджон Махмадалиевич** – кандидат физико-математических наук, Институт астрофизики НАН Таджикистана, заведующий отделом физики комет и астероидов, ведущий научный сотрудник ОФКА. E-mail: anvar10@mail.ru;
3. **Сафаров Сангин Ниёзович** – Институт астрофизики НАН Таджикистана, младший научный сотрудник отдела физики комет и астероидов. E-mail: safarov.sangin@mail.ru.

УДК 530.314.

Специальность: 1.3.8 – Физика конденсированного состояния

Б.И.Махсудов, М.Т.Яров, Д.Д.Нематов\*

**ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ CdTe НЕЙТРОННЫМ ОБЛУЧЕНИЕМ***Таджикский национальный университет,**\*Национальная академия наук Таджикистана,**\*Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана У. Мадвалиевым 13.02.2024 г.)*

*В экспериментальной части работы изучено влияние малых потоков тепловых нейтронов на структурные параметры CdTe. Образцы облучались потоком тепловых нейтронов в диапазоне от  $2.64 \cdot 10^7$  н/см<sup>2</sup> до  $1.85 \cdot 10^9$  н/см<sup>2</sup>. Рентгеноструктурный анализ кристаллов показал, что в результате облучения малыми потоками тепловых нейтронов структурные параметры теллурида кадмия улучшаются. Проведено компьютерное моделирование процесса взаимодействия тепловых нейтронов на кристаллах теллурида кадмия. Расчёты параметров кристаллической решетки теллурида кадмия хорошо совпадают с экспериментальными данными.*

**Ключевые слова:** *тепловые нейтроны, плотность электронных состояний, запрещенная зона, теллурид кадмия, рентгеноструктурный анализ.*

В фотоэлектрической промышленности лидирует традиционная технология жесткого кристаллического кремния (с-Si), отличающаяся высокой эффективностью, низкой ценой и более высокой доступностью, но это не единственный доступный вариант. Тонкопленочная солнечная технология включает в себя множество функций, которые делают его уникальным для конкретных приложений, которые не подходят для традиционных фотоэлектрических модулей с-Si. В категории тонких пленок теллурид кадмия (CdTe) считается наиболее перспективным материалом: КПД этого материала превышает 21.6% [1, 2].

Наряду с современными методами модифицирования [3] структуры кристаллов, обработка с помощью облучения является перспективным методом. В большинстве случаев радиационное излучение высокой энергии повреждает материал, создавая большое количество радиационных дефектов, однако излучения малой энергии и потока пригодны для создания и модификации собственных дефектов [4, 5]. Обнаружено уменьшения порогового тока накачки гетеролазеров на основе InGaAs/AlGaAs после облучения малыми потоками ( $10^7$  н/см<sup>2</sup>) тепловых нейтронов. Такие процессы в гетеролазерах наблюдались и при облучении  $\gamma$ -квантами различных доз. При малых дозах  $\gamma$ -квантов наблюдаются улучшение характеристик гетеролазеров на основе InGaAs/InP, а процесс деградации был замечен при дозах, превышающих  $10^{14}$  квант/см<sup>2</sup> [6,7].

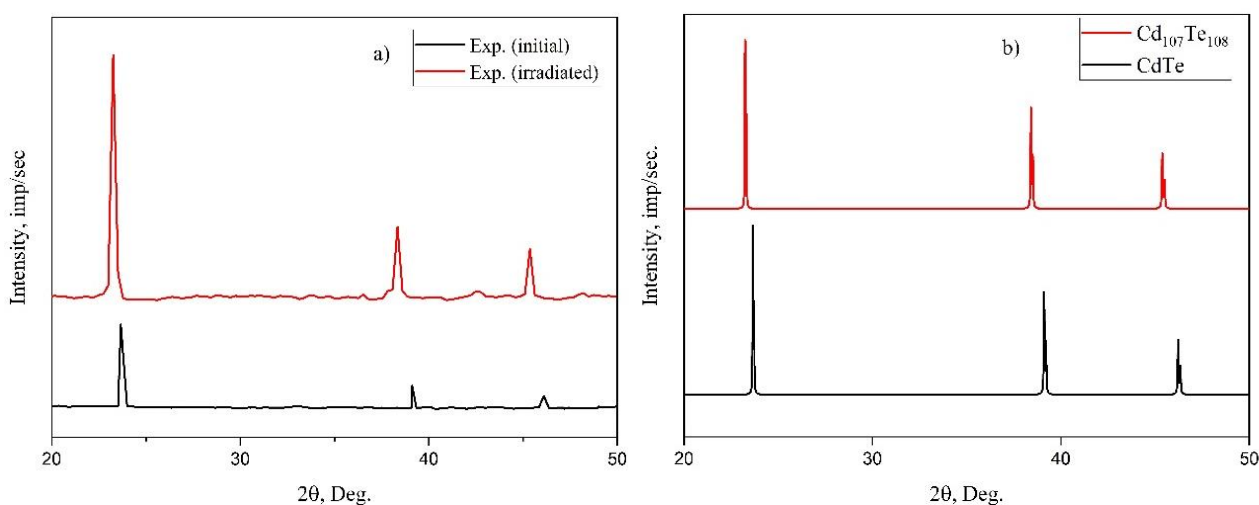
*Адрес для корреспонденции:* Яров Мухаммаджон Темурджонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: tuh.yarov@mail.ru.

В рамках данной работы проведено компьютерное моделирование процесса взаимодействия тепловых нейтронов с полупроводниковыми кристаллами CdTe.

После подборки образцы CdTe, облучались тепловыми нейтронами от Pu-Be-го нейтронного источника при различных потоках нейтронов (от  $2.64 \cdot 10^7$  н/см<sup>2</sup> до  $1.85 \cdot 10^9$  н/см<sup>2</sup>). Проведено рентгеноструктурный анализ кристаллов CdTe, до и после облучения тепловыми нейтронами. Рентгеноструктурный анализ кристаллов CdTe выполнен на дифрактометре ДРОН-3.0.

Теоретические расчеты структурных, электронных и оптических свойств теллурида кадмия проведены на основе теории функционала плотности (DFT). Расчеты проводились в пакете плоских волн VASP [8]. Для моделирования влияния облучения на свойства теллурида кадмия была создана суперячейка, состоящая из 216 атомов (108 кадмия и 108 теллура). Затем из суперячейки был удален один атом кадмия как эквивалент дефекта, возникающего после облучения потоком тепловых нейтронов. Далее, структуры были релаксированы с помощью функционала GGA [9]. Значения запрещенной зоны исследуемых материалов также рассчитывались и сравнивались с использованием обменно-корреляционного функционала GGA.

Экспериментально показано, что в области малых потоков тепловых нейтронов рентгеновские рефлексы сужаются и смещаются в области малых углов, которые указывают на улучшение структуры кристалла. На рисунке 1 сравниваются полученные рентгенограммы эксперимента и рентгенограммы, полученные из оптимизированной геометрии с использованием программы REFLEX, входящий в пакет программ Materials Studio.

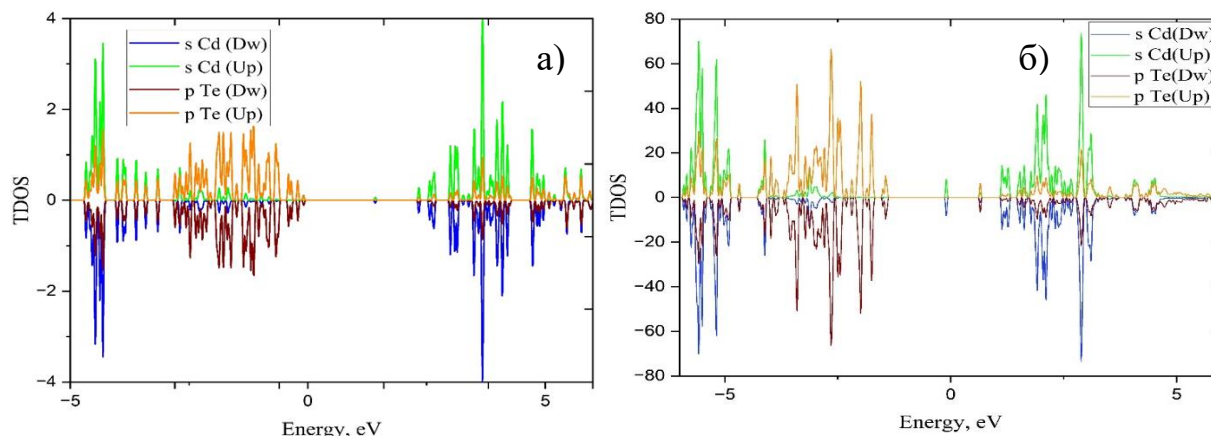


**Рис. 1.** Результаты рентгенодифракционного анализа CdTe: а) сравнение экспериментальных рентгенограмм необлученного (верхний) и облученного потоком  $1.3 \cdot 10^8$  н/см<sup>2</sup> (нижний) образцов; б) расчетные рентгенограммы исходной CdTe и модифицированной ячейки Cd<sub>107</sub>Te<sub>108</sub>

По результатам кванто-химических расчетов для теллурида кадмия можно заметить изменение параметра решетки и межплоскостного расстояния, поскольку из рентгенограмм видно смещение рентгеновских рефлексов в сторону малых углов, что хорошо согласуется с предыдущими экспериментальными данными [10]. Смещение рентгеновских рефлексов в сторону малых углов происходит из-за флуктуаций электронной плотности внутри материала.

Электронные свойства CdTe были оценены по форме запрещенной зоны, распределение энергетических зон и другие параметры. Результаты расчетов показали, что после модифицирования структуры CdTe ширина запрещенной зоны уменьшается от 1.5 эВ до 0.75 эВ.

Рассчитана парциальная и полная плотность электронных состояний для системы исходной и модифицированной ячейки Cd<sub>107</sub>Te<sub>108</sub>. Рассчитанная плотность состояний этих систем обсуждается с точки зрения вклада s-, p-, d-состояний составляющих атомов (Рисунок 2).



**Рис. 2.** Плотность электронных состояний исходной ячейки CdTe (а); модифицированной ячейки Cd<sub>107</sub>Te<sub>108</sub> (б).

Анализ плотности состояний исходной ячейки CdTe показывает, что в образовании электронных состояний валентной зоны и зоны проводимости вклад s-состояний атома кадмия значительно большой. На рисунке 2 (б) показано плотность электронных состояний модифицированной ячейки Cd<sub>107</sub>Te<sub>108</sub>.

Можно заметить, что в формировании электронных состояний модифицированной ячейки Cd<sub>107</sub>Te<sub>108</sub> в области валентной зоны вклад p-состояний атомов теллура возрастает. Это свидетельствует об уменьшении концентрации атомов кадмия в материале, на что указывают результаты экспериментов [10]. В запрещенной зоны за счет p-состояний атома теллура появляются новые электронные состояния, которые приводят к уменьшению ширины запрещенной зоны.

Кроме электронных свойств, также было оценено некоторые оптические параметры таких как коэффициент поглощения, коэффициент потери и фотопроводимость кристаллов. Для исходного CdTe полоса поглощения имеет максимум при энергии фотонов 3.9 эВ (длина волны излучения 318 нм), а для модифицированного Cd<sub>107</sub>Te<sub>108</sub> максимум поглощения наблюдается при 2.6 эВ (длина волны излучения 477 нм) (рис. 3). Это означает, что полоса поглощения смещается из ультрафиолетовой области в сторону видимой части спектра (точнее синего). Этот факт указывает на увеличение эффективности преобразования света в видимой части спектра электромагнитных волн. Далее, замечается резкий спад коэффициента поглощения при энергии фотонов от 6 до 8 эВ для обеих исследованных кристаллов, так как в этой области плотность электронных состояний уменьшается.



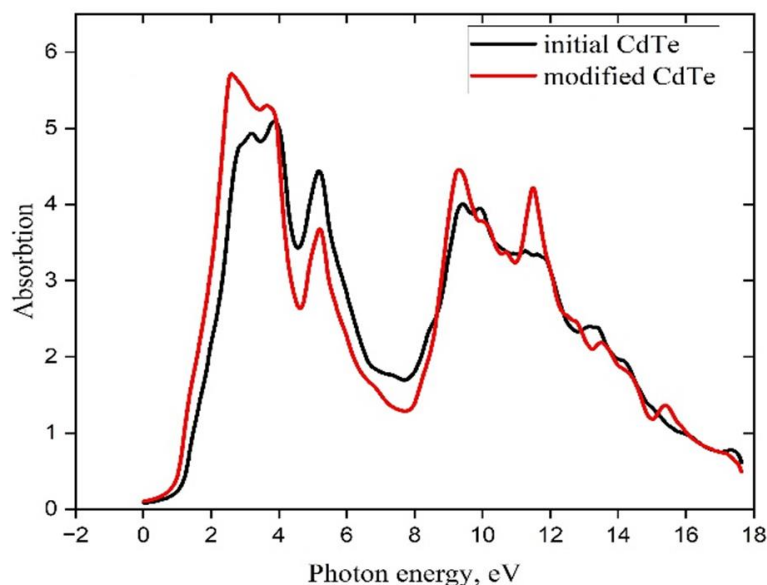


Рис. 3. Зависимость коэффициента поглощения CdTe от энергии фотонов.

Таким образом, экспериментальными методами и теоретическими расчетами с использованием кванто-химических методов показано процесс взаимодействия тепловых нейтронов с кристаллами CdTe. Результаты показали, что облучения кристаллов приводит к структурным изменениям. В частности, можно заметить уменьшение ширины ЗЗ, что приводит к улучшению электрофизических параметров кристалла. За счет протекания ядерных реакций тепловых нейтронов с атомами кадмия, в образовании электронных состояний роль р-состояний атомов теллура возрастает. Наблюдалось смещение полосы поглощения теллурида кадмия после облучения тепловыми нейтронами в области больших длин волн, до значения 477 нм. Это значение близко к максимуму интенсивности видимого света, и в этой области длин волн за счет сближения энергии падающих фотонов и ширины запрещенной зоны CdTe, КПД материала возрастает. Так как при одинаковых значения энергии фотонов и ширины запрещенной зоны наблюдается резонансное поглощения фотонов.

*Поступило 13.02.2024 г.*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Romeo A., Artegiani E. CdTe-based thin film solar cells: past, present and future. – *Energies*, 2021, v.14, №6, p. 1684.
2. Mauricio A.F., Menéndez-Proupin E. Sn doped CdTe as candidate for intermediate-band solar cells: A first principles DFT+GW study. – *J. Phys. Conf.*, 2016, Сер. 720 012033
3. Artegiani E., Gasparotto A., Meneghini M., Meneghesso G., Alessandro R. How the selenium distribution in CdTe affects the carrier properties of CdSeTe/CdTe solar cells. – *Solar Energy*, 2023, v. 260, pp. 11-16.
4. Szeles C. CdZnTe and CdTe materials for X-ray and gamma ray radiation detector applications. – *J. physica status solidi (b)*, 2004, v. 241, №3, pp. 783-790.
5. Белобровая О.Я., Галушка В.В., Исмаилова В.С., Полянская В.П., Сидоров В.И., Терин Д.В., Машков А.А. Влияние малых доз гамма-излучения на оптические свойства наноструктурированного

- кремния, полученного методом металл-стимулированного химического травления *in situ*. – Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика, 2020, v. 20, №4, pp. 288-298.
6. Махсудов Б.И., Влияние тепловых нейтронов на излучательные характеристики InGaAs/AlGaAs-гетеролазеров. – Квантовая электроника, 2015, т. 45, №3, с. 216-217.
  7. Махсудов Б.И., Влияние гамма-облучения на излучательные характеристики лазерных гетероструктур. – Квантовая электроника, 2012, т. 42, №8, с. 745-746.
  8. Nematov D. Analysis of the Optical Properties and Electronic Structure of Semiconductors of the Cu<sub>2</sub>NiXS<sub>4</sub> (X = Si, Ge, Sn) Family as New Promising Materials for Optoelectronic Devices. – Journal of Optics and Photonics Research, 2024.
  9. Singh, David J. Electronic structure calculations with the Tran-Blaha modified Becke-Johnson density functional. – Physical Review B, 2010, v. 82.20: 205102.
  10. Махсудов Б.И., Акобиров А.Т., Яров М.Т., Шаймов Э. Дж. Влияние облучения тепловыми нейтронами на электрофизические и структурные характеристики CdTe, легированного хлором. – Вестник ТНУ, 2022, №1, с. 116-128.

**Б.И.Махсудов, М.Т.Яров, Д.Д.Нематов\***

## **БАЛАНД БАРДОШТАНИ САМАРАНОКИИ МАВОДҲО БАРОИ ПАНЕЛҲОИ ОҒТОБӢ ДАР АСОСИ CdTe БО АҶКНИШОТИ НЕЙТРОНӢ**

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,*

*\*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*\*Институту физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови АМИ Тоҷикистон*

Дар қисми таҷрибавии қор таъсири сели ками нейтронҳои ҳароратӣ ба параметрҳои сохтори CdTe омӯхта шуданд. Намунаҳо дар ҳудуди сели нейтронҳои ҳароратии аз  $2.64 \cdot 10^7$  н/см<sup>2</sup> то  $1.85 \cdot 10^9$  н/см<sup>2</sup> нурборон карда шуданд. Таҳлили рентгеносохтори намунаҳо нишон дод, ки дар натиҷаи нейтронбориш параметрҳои сохтори теллуриди кадмий беҳтар мешаванд. Моделсозии компютери раванди таъсири сели нейтронҳои ҳароратӣ бо кристаллҳои теллуриди кадмий гузаронида шуд. Ҳисоби параметрҳои панҷараи кристаллии теллуриди кадмий бо маълумотҳои таҷрибавӣ мувофиқати хуб доранд.

**Калимаҳои калидӣ:** *нейтронҳои ҳароратӣ, зичии ҳолатҳои электронӣ, зонаи мамнӯъ, теллуриди кадмий, таҳлили рентгенодифраксионӣ.*

B.I.Makhsudov, M.T.Yarov, D.D.Nematov\*

## INCREASING THE EFFICIENCY OF MATERIALS FOR SOLAR CELLS BASED ON CdTe BY NEUTRON IRRADIATION

*Tajik National University,*

*\*National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*\*Physico-Technical Institute named after S.U. Umarov, NAS of Tajikistan*

In the experimental part of the work, the influence of low thermal neutron fluxes on the structural parameters of CdTe was studied. The samples were irradiated with a thermal neutron flux in the range from  $2.64 \cdot 10^7$  n/cm<sup>2</sup> to  $1.85 \cdot 10^9$  n/cm<sup>2</sup>. X-ray diffraction analysis of the crystals showed that as a result of irradiation with low thermal neutron fluxes, the structural parameters of cadmium telluride improve. A computer simulation of the process of interaction of thermal neutrons on cadmium telluride crystals has been carried out. Calculations of the crystal lattice parameters of cadmium telluride are in good agreement with experimental data.

**Key words:** *thermal neutrons, density of electronic states, band gap, cadmium telluride, X-ray diffraction analysis.*

### Сведения об авторах:

1. Махсудов Барот Исломович – доктор физико-математических наук, Таджикский национальный университет, заведующий кафедры ядерной физики. E-mail: maksudov\_barot@mail.ru;
2. Яров Мухаммаджон Темурджонович – Таджикский национальный университет, PhD-докторант кафедры ядерной физики. E-mail: muh.yarov@mail.ru;
3. Нематов Дилшод Давлатшоевич – кандидат технических наук, ФТИ им. С.У. Умарова НАН Таджикистана, старший научный сотрудник. E-mail: dilnem@mail.ru.

УДК 541.123.7

Специальность: 1.4.1 – Неорганическая химия

М.Т.Жумаев, Дж.М.Мусоджонзода, **Л.Солиев**

## СТРОЕНИЕ ФАЗОВОГО КОМПЛЕКСА СИСТЕМЫ

 $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{--K}_2\text{SO}_4\text{--MgSO}_4\text{--CaSO}_4\text{--H}_2\text{O}$  ПРИ 0°C*Таджикский государственный педагогический университет им.С.Айни**(Представлено академиком НАН Республики Таджикистан И.Н.Ганиевым 18.01.2024 г.)*

Методом трансляции исследовано строение фазового комплекса системы  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{--K}_2\text{SO}_4\text{--MgSO}_4\text{--CaSO}_4\text{--H}_2\text{O}$  при 0°C. Установлено, что для исследованной системы при 0°C характерно наличие 12 дивариантных полей, 10 моновариантных кривых и 3 невариантных точек. На основании полученных методом трансляции данных впервые построена диаграмма фазового комплекса исследованной системы.

**Ключевые слова:** фазовый комплекс, метод трансляции, диаграмма, невариантные точки, моновариантные кривые, дивариантные поля.

Пятикомпонентная система  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{--K}_2\text{SO}_4\text{--MgSO}_4\text{--CaSO}_4\text{--H}_2\text{O}$  является одной из шести пятикомпонентных систем, составляющих шестикомпонентную систему  $\text{Na,K,Mg,Ca||SO}_4,\text{Cl-H}_2\text{O}$ , закономерности фазовых равновесий в которой определяют условия кристаллизации и растворения солей при испарении морских и океанических вод, а также галургической переработки морских соляных отложений. Анализ литературы [1] показывает, что из шести пятикомпонентных систем, составляющих данную шестикомпонентную систему, более подробно исследована пятикомпонентная система  $\text{Na,K,Mg||SO}_4,\text{Cl-H}_2\text{O}$  в связи с её большой практической значимостью. Остальные пятикомпонентные системы, в частности система  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{--K}_2\text{SO}_4\text{--MgSO}_4\text{--CaSO}_4\text{--H}_2\text{O}$ , либо вообще не исследованы, либо исследованы частично. Следует отметить, что исследование многокомпонентных систем осложнено многими факторами, основными из которых являются наличие многообразия равновесных твердых фаз, идентификация которых затруднительна, невозможность отображения состояния фазовых равновесий исследованных систем с помощью геометрических фигур реального трёхмерного пространства, значительные материальные и временные затраты. Вместе с тем разработка третьего основного принципа физико-химического анализа – принципа совместимости [2,3] позволяет предварительно прогнозировать возможные фазовые равновесия на геометрических образах общей многокомпонентной системы, используя данные о фазовых равновесиях в составляющих ее частных системах, что способствует решению перечисленных проблем.

На основе принципа совместимости нами был предложен для прогнозирования фазовых равновесий многокомпонентных систем метод трансляции [4], признанный специалистами как наиболее

*Адрес для корреспонденции:* Жумаев Маъруфжон Тагоймуратович. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки 121, Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни. E-mail: soliev.litfullo@yandex.com.

универсальный при исследовании многокомпонентных систем [5]. Согласно методу трансляции при добавлении к исходной  $n$ -компонентной системе последующего компонента и перехода ее в  $n$ -компонентное состояние, геометрические образы исходной  $n$ -компонентной системы, приобретая дополнительное измерение, трансформируются (инвариантные точки превращаются в моновариантные кривые, моновариантные кривые в дивариантные поля и т.д.). Трансформированные геометрические образы  $n$ -компонентных систем транслируются (переносятся) на уровень  $n+1$  компонентного состояния и, согласно своим топологическим свойствам, а также требованиям правила фаз Гиббса [6], взаимно пересекаясь, формируют геометрические образы исследуемой системы на  $n+1$  компонентном уровне.

Ранее [7] методом трансляции, при  $25^\circ\text{C}$ , были исследованы все пятикомпонентные системы, составляющие шестикомпонентную систему  $\text{Na,K,Mg,Ca||SO}_4,\text{Cl-H}_2\text{O}$ , а также сама шестикомпонентная система [8]. В настоящей работе обсуждены результаты исследования фазового комплекса пятикомпонентной системы  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{-K}_2\text{SO}_4\text{-MgSO}_4\text{-CaSO}_4\text{-H}_2\text{O}$  при  $0^\circ\text{C}$  методом трансляции, используя данные о фазовых равновесиях в составляющих её четырёхкомпонентных системах, приведенных в [1].

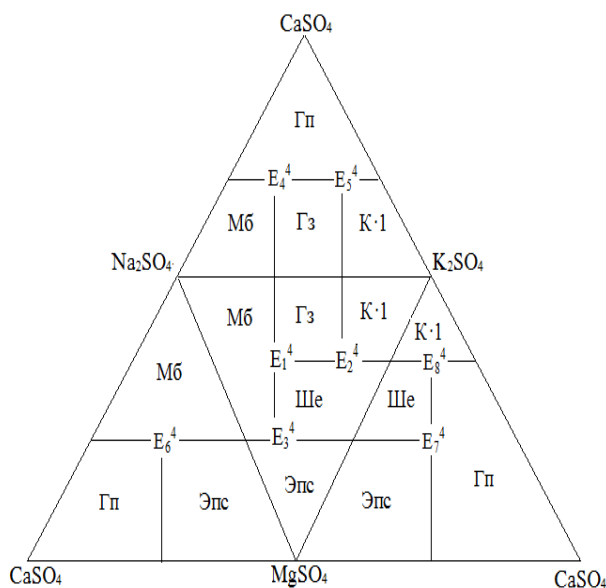
Согласно [1] для четырёхкомпонентных систем, составляющих пятикомпонентную систему  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{-K}_2\text{SO}_4\text{-MgSO}_4\text{-CaSO}_4\text{-H}_2\text{O}$ , при  $0^\circ\text{C}$  характерны следующие инвариантные точки с соответствующим им равновесным твердым фазам (табл. 1).

Таблица 1

Инвариантные точки системы  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{-K}_2\text{SO}_4\text{-MgSO}_4\text{-CaSO}_4\text{-H}_2\text{O}$  на уровне трёхкомпонентного состава с соответствующим им равновесным твердым фазам при  $0^\circ\text{C}$

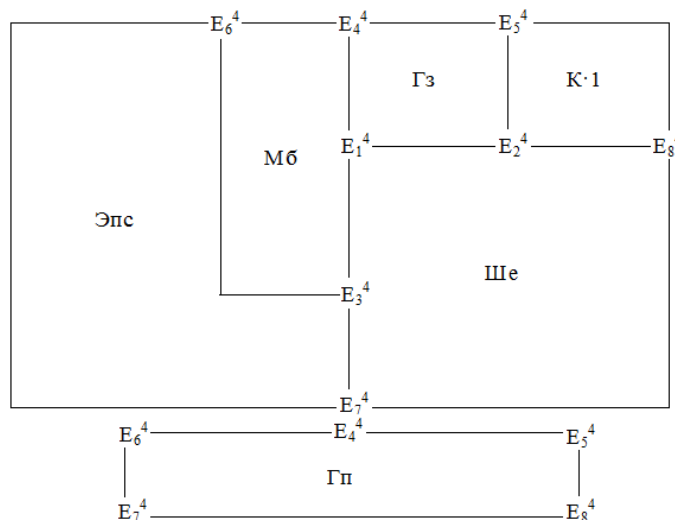
Инвариантные точки	Равновесные твердые фазы	Инвариантные точки	Равновесные твердые фазы
Система $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{-K}_2\text{SO}_4\text{-MgSO}_4\text{-H}_2\text{O}$		Система $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{-K}_2\text{SO}_4\text{-CaSO}_4\text{-H}_2\text{O}$	
$E_1^4$	$\Gamma_3+\text{Mб}+\text{Ше}$	$E_4^4$	$\Gamma_{\text{п}}+\text{Mб}+\Gamma_3$
$E_2^4$	$\text{K}\cdot 1+\Gamma_3+\text{Ше}$	$E_5^4$	$\Gamma_3+\Gamma_{\text{п}}+\text{K}\cdot 1$
$E_3^4$	$\text{Mб}+\text{Эпс}+\text{Ше}$	Система $\text{K}_2\text{SO}_4\text{-MgSO}_4\text{-CaSO}_4\text{-H}_2\text{O}$	
Система $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{-MgSO}_4\text{-CaSO}_4\text{-H}_2\text{O}$		$E_7^4$	$\Gamma_{\text{п}}+\text{Эпс}+\text{Ше}$
$E_6^4$	$\Gamma_{\text{п}}+\text{Mб}+\text{Эпс}$	$E_8^4$	$\Gamma_{\text{п}}+\text{Ше}+\text{K}\cdot 1$

Солевая часть диаграммы фазового комплекса системы  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{-K}_2\text{SO}_4\text{-MgSO}_4\text{-CaSO}_4\text{-H}_2\text{O}$  при  $0^\circ\text{C}$ , построенная по данным табл. 1 в виде «развертки» призмы, приведена на рис. 1.



**Рис. 1.** Солевая часть диаграммы фазового комплекса системы  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{--K}_2\text{SO}_4\text{--MgSO}_4\text{--CaSO}_4\text{--H}_2\text{O}$  при  $0^\circ\text{C}$  на уровне четырёхкомпонентного состава в виде «развёртки» призмы

После объединения идентичных полей кристаллизации равновесных твердых фаз, характерных для разных четырёхкомпонентных систем, составляющих данную пятикомпонентную систему, получим схематическую [9] диаграмму (рис. 2) фазового комплекса данной пятикомпонентной системы. В ней будут сохранены все элементы отражения (геометрические образы) исследуемой пятикомпонентной системы на уровне четырёхкомпонентного состава и их взаимное расположение.



**Рис. 2.** Схематическая диаграмма фазового комплекса системы  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{--K}_2\text{SO}_4\text{--MgSO}_4\text{--CaSO}_4\text{--H}_2\text{O}$  при  $0^\circ\text{C}$  на уровне четырёхкомпонентного состава

Фазовый состав осадков четверных невариантных точек приведен в табл. 1. Фазовый состав осадков дивариантных полей указан на рис. 2. Моновариантные кривые, проходящие между четверными невариантными точками, характеризуются следующим фазовым составом осадков:

$E_1^4$ —————	$E_2^4 = \Gamma_3 + \text{Ше};$	$E_1^4$ —————	$E_3^4 = \text{Мб} + \text{Ше};$
$E_1^4$ —————	$E_4^4 = \Gamma_3 + \text{Мб};$	$E_2^4$ —————	$E_5^4 = \Gamma_3 + \text{К} \cdot 1;$
$E_2^4$ —————	$E_8^4 = \text{Ше} + \text{К} \cdot 1;$	$E_3^4$ —————	$E_6^4 = \text{Мб} + \text{Эпс};$
$E_3^4$ —————	$E_7^4 = \text{Эпс} + \text{Ше};$	$E_4^4$ —————	$E_5^4 = \Gamma_3 + \Gamma_{\text{п}};$
$E_4^4$ —————	$E_6^4 = \Gamma_{\text{п}} + \text{Мб};$	$E_5^4$ —————	$E_8^4 = \Gamma_{\text{п}} + \text{К} \cdot 1;$
$E_6^4$ —————	$E_7^4 = \Gamma_{\text{п}} + \text{Эпс};$	$E_7^4$ —————	$E_8^4 = \Gamma_{\text{п}} + \text{Ше}.$

Трансляция четверных невариантных точек на уровень пятикомпонентного состава сопровождается их трансформаций (превращением) в моновариантные кривые с последующим пересечением с другими моновариантными кривыми и образованием пятерных невариантных точек (с соблюдением правила фаз Гиббса). Сказанное математически можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 E_1^4 + E_4^4 & \text{-----} \rightarrow E_1^5 = \Gamma_3 + \Gamma_{\text{п}} + \text{Мб} + \text{Ше}; \\
 E_2^4 + E_5^4 + E_5^4 & \text{-----} \rightarrow E_2^5 = \Gamma_3 + \Gamma_{\text{п}} + \text{Ше} + \text{К} \cdot 1; \\
 E_3^4 + E_6^4 + E_7^4 & \text{-----} \rightarrow E_3^5 = \Gamma_{\text{п}} + \text{Мб} + \text{Эпс} + \text{Ше}.
 \end{aligned}$$

Графический вариант трансляции четверных невариантных точек на уровня пятикомпонентного состава с образованием вышеприведенных пятерных невариантных точек показан на рис. 3.

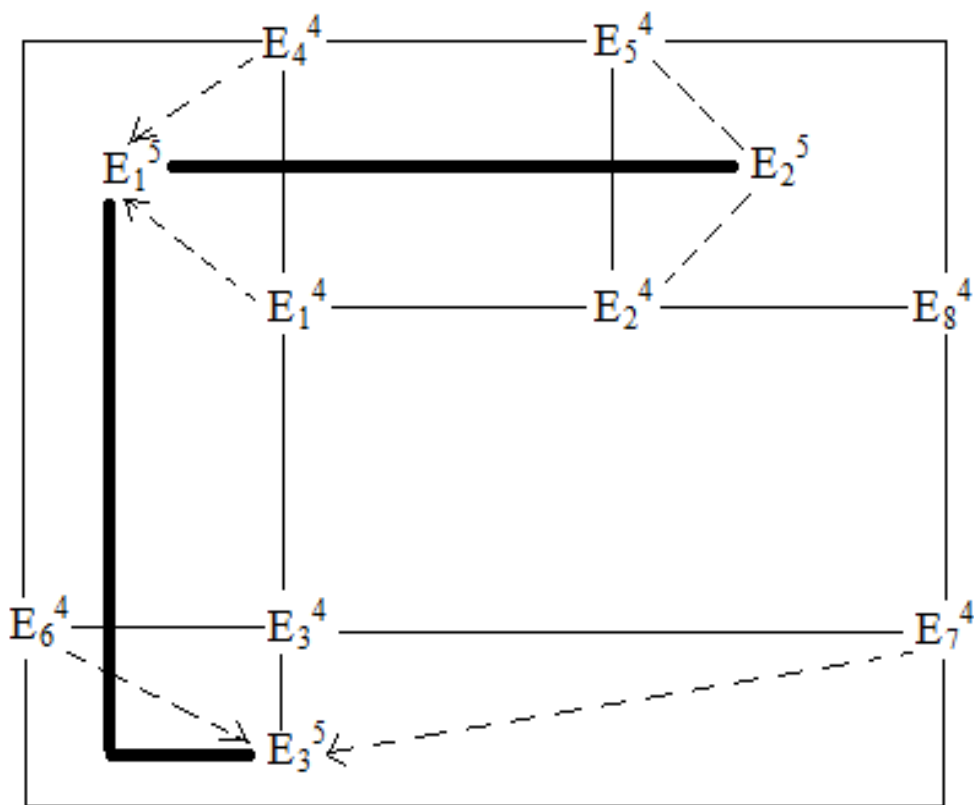


Рис. 3. Совмещенная диаграмма фазового комплекса системы  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{--K}_2\text{SO}_4\text{--MgSO}_4\text{--CaSO}_4\text{--H}_2\text{O}$  при  $0^\circ\text{C}$ , построенная методом трансляции

Представленная на рис. 3 диаграмма фазового комплекса системы  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{--K}_2\text{SO}_4\text{--MgSO}_4\text{--CaSO}_4\text{--H}_2\text{O}$  при  $0^\circ\text{C}$  является совмещенной, что соответствует требованиям принципа совместимости. На ней совмещены элементы строения исследуемой системы на уровнях четырех–пятикомпонентного состава. В частности, на ней размещены четверные и пятерные невариантные точки, моновариантные кривые уровня четырехкомпонентного (тонкие сплошные линии) и пятикомпонентного (пунктирные

и полужирные сплошные линии) составов. Фазовый состав осадков четверных и пятерных невариантных точек, а также моновариантных кривых, проходящих между четверными невариантными точками приведен выше. Фазовый состав осадков моновариантных кривых, образованных при трансляции четверных невариантных точек (пунктирные линии со стрелками, которые указывают на направления трансляции) идентичен фазовому составу осадков транслированных четверных невариантных точек (табл. 1). Фазовый состав осадков моновариантных кривых, проходящих между пятерными невариантными точкам (получены сплошные линии) следующий:



Построенную совмещенную диаграмму фазового комплекса исследуемой системы с целью понимания ее строения можно фрагментировать по дивариантным полям (табл. 2).

Таблица 2

Равновесные твердые фазы и контуры дивариантных полей системы  
 $Na_2SO_4-K_2SO_4-MgSO_4-CaSO_4-H_2O$  при  $0^\circ C$

Равновесные твердые фазы полей	Контурь полей на диаграмме (рис. 2)	Равновесные твердые фазы полей	Контурь полей на диаграмме (рис. 2)
$\Gamma_3 + ШЕ$		$Энс + ШЕ$	
$МБ + ШЕ$		$\Gamma_3 + \Gamma_{II}$	
$\Gamma_3 + МБ$		$\Gamma_{II} + ГБ$	
$\Gamma_3 + К-1$		$\Gamma_{II} + К-1$	
$ШЕ + К-1$		$\Gamma_{II} + Энс$	
$МБ + Энс$		$\Gamma_{II} + ШЕ$	



Таким образом, как показывает строение диаграммы фазового комплекса  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{--K}_2\text{SO}_4\text{--MgSO}_4\text{--CaSO}_4\text{--H}_2\text{O}$  (рис. 3), для неё при температуре  $0^\circ\text{C}$  характерно наличие следующего количества геометрических образов на уровнях четырёх- (А) и пятикомпонентного (Б) составов (табл. 3).

Таблица 3

Количество геометрических образов системы  $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{--K}_2\text{SO}_4\text{--MgSO}_4\text{--CaSO}_4\text{--H}_2\text{O}$  при  $0^\circ\text{C}$  на уровнях четырёхкомпонентного (А) и пятикомпонентного (Б) составов

Геометрические образы	Уровень компонентности	
	А	Б
Дивариантные поля	6	12
Моновариантные кривые	12	10
Нонвариантные точки	8	3

Поступило 18.01.2024 г.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Справочник экспериментальных данных по растворимости многокомпонентных водно-солевых систем. – СПб.: Химиздат, 2004, т. II, кн. 1-2, 1247 с.
2. Горощенко Я.Г. Физико-химический анализ гомогенных и гетерогенных систем. – Киев: Наукова думка, 1978, 490 с.
3. Горощенко Я.Г. Массцентрический метод изображения многокомпонентных систем. – Киев: Наукова думка, 1982, 264 с.
4. Солиев Л. Прогнозирование строения диаграмм фазовых равновесий многокомпонентных водно-солевых систем методом трансляции. – М.: Деп. в ВИНТИ АН СССР 20.12.87 г. №8990-В87, 1987, 28 с.
5. Горощенко Я.Г. Основные направления в методологии физико-химического анализа сложных и многокомпонентных система (к 125-летию Н.С. Курнакова). – Журнал неорганической химии АН СССР, 1987, т.32, №7, с. 1676-1681.
6. Аносов В.Я., Озерова М.И., Фиалков Ю.Я. Основы физико-химического анализа. – М.: Наука, 1976, 503 с.
7. Солиев Л. Прогнозирование фазовых равновесий в многокомпонентной системе морского типа методом трансляции. (кн.3) – Душанбе: Изд. Эр-Граф, 2019, 232 с.
8. Солиев Л. Строение фазового комплекса шестикомпонентной системы  $\text{Na,K,Mg,Ca||SO}_4\text{,Cl-H}_2\text{O}$  при  $50^\circ\text{C}$  в области кристаллизации сакиита. – Доклады АН РТ, 2017, т.60, № 10, с. 527-532.
9. Tursunbadalov Sh. Phase Equilibrium in the Quinary  $\text{Na,K||SO}_4\text{,CO}_3\text{,HCO}_3\text{-H}_2\text{O}$  System at  $75^\circ\text{C}$ . – Journal Solution Chemistry. 2015, vol. 44, pp.1626-1639.

М.Т.Жумаев, Дж.М.Мусоджонзода, **Л.Солиев****СОХТОРИ КОМПЛЕКСИ ФАЗАВИИ СИСТЕМАИ  
Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>–K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>–MgSO<sub>4</sub>–CaSO<sub>4</sub>–H<sub>2</sub>O ДАР ҲАРОРАТИ 0°C***Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ*

Сохтори комплекси фазагии системаи Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>–K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>–MgSO<sub>4</sub>–CaSO<sub>4</sub>–H<sub>2</sub>O дар ҳарорати 0°C бо усули транслятсия омӯхта шудааст. Муқаррар карда шудааст, ки барои системаи омӯхташаванда дар ҳарорати 0°C 12 майдонҳои дивариантӣ, 10 хатҳои моновариантӣ ва 3 нуқтаҳои нонвариантӣ хос мебошанд. Дар асоси маълумотҳои ба даст овардашуда аввалин маротиба диаграммаи комплекси фазавии системаи таҳқиқшаванда сохта шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** комплекси фазагӣ, усули транслятсия, диаграмма, нуқтаи нонвариантӣ, хати моновариантӣ, майдони дивариантӣ.

М.Т.Жумаев, Дж.М.Мусоджонзода, **Л.Солиев****STRUCTURE OF THE PHASE COMPLEX OF THE SYSTEM  
Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>–K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>–MgSO<sub>4</sub>–CaSO<sub>4</sub>–H<sub>2</sub>O AT 0°C***S.Ainy Tajik State Pedagogical University*

The structure of the phase complex of the Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>–K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>–MgSO<sub>4</sub>–CaSO<sub>4</sub>–H<sub>2</sub>O system at 0°C was studied using the translation method. It has been established that the studied system at 0°C is characterized by the presence of 12 divariant fields, 10 monovariant curves and 3 invariant points. Based on the data obtained by the translation method, a diagram of the phase complex of the studied system was constructed for the first time.

**Key words:** phase complex, translation method, diagram, invariant points, monovariant curves, divariant fields.

**Сведения об авторах:**

4. **Жумаев Маъруфжон Тагоймуротович** – кандидат химических наук, доцент, Таджикский государственный педагогический университета им. С.Айни, заведующий кафедрой «Общая и неорганическая химия». E-mail: soliev.lutfullo@yandex.com;
5. **Мусоджонзода Джамила Мансур** – кандидат химических наук, Таджикский государственный педагогический университета им. С.Айни, доцент кафедры «Общая и неорганическая химия». E-mail: musojonova-j@mail.ru.

УДК 581.582(575.3)

Специальность: 1.5.9 – Ботаника

Х.А.Бекназарова, Д.Наврузшоев

**РЕАЛЬНАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ СЕМЕННАЯ ПРОДУКТИВНОСТЬ  
*ALLIUM ELATUM* REGEL В УСЛОВИЯХ КУЛЬТУРЫ НА ТЕРРИТОРИИ  
ПАМИРСКОГО БОТАНИЧЕСКОГО САДА***Национальная академия наук Таджикистана,**Памирский биологический институт им.Х.Юсуфбекова НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана А.С.Фелалиевым 08.02.2024 г.)*

*В статье приведены результаты реальной и потенциальной семенной продуктивности *Allium elatum* Regel в условиях культуры на территории Памирского ботанического сада, на высоте 2320 м над ур. м. На основании проведенных исследований установлено, что вид относится к растениям со средней и высокой (1044-1747шт.) семенной продуктивностью. Год за годом семенная продуктивность идет в сторону уменьшения. Большинство растений размножаются семенами. Сохранение семян является самым надежным методом сохранения генетических ресурсов, так как семена несут в себе генотип растения.*

**Ключевые слова:** *реальная, потенциальная, семенная продуктивность, условия, сохранение, ботанический сад.*

Семейство *Alliaceae* J. Agardh (Луковых) насчитывает 30 родов и около 700 видов растений [1]. Виды лука в основном встречаются в засушливых низкогорьях Северного полушария. Представители семейства Луковых вообще не встречаются в Австралии.

Все луковичные растения имеют луковицу или короткое корневище с розеткой ланцетных или лилейных, плоских или трубчатых листьев. Цветки луковичных растений в основном являются актиноморфными. Двухдомные цветки обычно имеют 6 листочков простого околоцветника, 6 тычинок и верхнюю трех- или одногнездную завязь, состоящую из 3 сросшихся плодолистиков. Все цветки собраны в зонтиковидное соцветие на верхушке безлистного, реже облиственного цветоноса. У основания цветоносного побега расположен пленчатый чехлик. Одна продолжительная фаза развития у луковичных растений является плодоношение. Плоды у луковичных растений вскрываются внутри трехгранных коробочек, в них содержится по четыре некрупных семени. Почти для всех луковичных растений характерен луковый или чесночный запах. Луковицы и листья при этом содержат целый ряд витаминов. Все это определяет широкое использование многих луков в медицинской сфере [2].

Немаловажную роль играет интродукция дикорастущих видов лука, которая позволяет сохранить редкие и исчезающие растения и увеличить их численность. Огромный интерес данные растения

---

*Адрес для корреспонденции:* Бекназарова Хосият Алиназаровна. 736002, Республика Таджикистан, г. Хорог, ул. Холдорова, 1. Памирский биологический институт им. Х.Юсуфбекова НАНТ. E-mail: 07khosiyat@mail.ru.

вызывают и в плане применения в народном хозяйстве, и в медицинской отрасли. Еще с древних времен луковые растения применялись в качестве бактерицидных препаратов при лечении ряда патологий, а также использовались в пище.

#### **Объекты и методы исследования**

В данной работе изучалась реальная и потенциальная семенная продуктивность, сезонная ритмика развития лука – *Allium elatum* Regel.

Объектами исследования служили особи *Allium elatum* Regel. В работе использованы материалы, собранные во время экспедиций биологического института им.Х.Юсуфбекова НАН Таджикистана и ботанического сада Шингу Республики Корея, а также материалы собственных сборов автора в Дарвазском районе ГБАО с 2018 по 2023гг., преимущественно на высоте от 1679 до 2400м над ур.м. Использовался традиционный способ посева семенами и посадки вегетативных частей растений в коллекционных питомниках, а также посев и черенкование в парниках и теплицах. Предпочтение отдавалось семенному размножению.

При изучении грунтовой и лабораторной всхожести семян редких и исчезающих видов растений Горного Бадахшана использовались рекомендации [3,4] и методика изучения фенологии растений и растительных сообществ [5].

#### **Результаты исследования и их обсуждение**

В условиях интродукции на территории Памирского ботанического сада им. А.В Гурского (ПБС) изучена реальная и потенциальная семенная продуктивность *Allium elatum* Regel. Были выбраны шесть особей этого растения. Выявлено, что количество семян на одной особи колеблется от 1200 до 2100 семян на цветоносном побеге. На шести особях образуются от 954 до 1300 шт. полноценного семенного материала, который составляет 6186 шт. семян и 4296 шт. неполноценных семян. (табл.1). Была также изучена реальная и потенциальная семенная продуктивность *Allium elatum* Regel в условиях Памирского ботанического сада за 2022 г. По итогам наших многолетних наблюдений выяснилось, что у *Allium elatum* Regel семенная продуктивность уменьшается. В 2019 г. в среднем с 6-и особи составляла 1747 шт. семян, а в 2022 г. – 1044 шт. Во время экспедиционных поездок, организуемых ежегодно, по территории Горно-Бадахшанской Автономной области (ГБАО) выяснилось, что и в естественных местах обитания тоже идет уменьшение продуктивности большинства растений. Изменение климата, а также антропогенные нагрузки, влияют на жизнь растений. Опыт показывает, что лучший способ охраны естественной растительности – организация особо охраняемых природных территорий (ООПТ). Это заповедники, заказники, ботанические памятники, национальные природные парки.

Таблица 1

Реальная и потенциальная семенная продуктивность *Allium elatum* Regel  
в условиях Памирского ботанического сада, на высоте 2320 м над ур. м. за 2019 г.

№ п/п	Цветоносные стрелки, шт.		Общее число стрелок шт.	Количество семян, шт.		Общее кол-во шт.
	с полноценными семенами	с неполноцен- ными семенами		полные	неполные	
1	159	121	280	954	726	1680
А 2	168	132	300	1008	792	1800
1	172	113	285	1032	678	1710
Б 2	116	84	200	696	504	1200
1	216	134	350	1296	804	2100
В 2	200	132	232	1200	792	1992
Итого:	1931/6	716/6	1647/6	6186/6	4296/6	10482/6
	1171	119	274	1031	716	1747

Как показали наши исследования, в условиях Памирского ботанического сада каждая особь *Allium elatum* Regel образует от 486 шт. до 984 шт. полноценных семян, от 120 до 504 шт. – неполноценных семян. Среднее число полноценных семян составляет 736 шт., а неполноценных – 308 шт., среднее количество семян 6 особей составляет 1044 шт. за 2022г. Результаты приведены в табл. 2.

Многолетние наблюдения в условиях культуры на территории Памирского ботанического сада показали, что *Allium elatum* Regel проходит полный цикл индивидуального развития: от весеннего отрастания вегетативных и генеративных побегов до образования полноценных семян.

Таблица 2

Реальная и потенциальная семенная продуктивность *Allium elatum* Regel  
в условиях Памирского ботанического сада на высоте 2320 м над ур. м. за 2022 г.

№ п/п	Цветоносные стрелки, шт.		Общее число стрелок шт.	Количество семян, шт.		Общее кол-во семян, шт.
	с полноценными семенами	с неполноцен- ными семенами		полные	неполные	
1	164	70	234	984	420	1404
А 2	107	38	145	642	228	870
1	150	84	234	900	504	1404
Б 2	116	64	180	696	384	1080
1	118	20	138	708	120	828
В 2	81	32	113	486	192	678
Итого:	736/6	308/6	1044/6	4416/6	1848/6	6264/6
	122,6	51,3	174	736	308	1044

Вегетация у *Allium elatum* Regel в разные годы зависит от погодных условий местности. Наиболее ранняя вегетация у этого вида отмечена в 2022 г. после таяния снега в первые жаркие дни первой декады марта (4.03.2022). Результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3

Сезонная ритмика развития *Allium elatum* Regel в условиях культуры на территории Памирского Ботанического сада, на высоте 2320 м над ур. м. с 2018 по 2022 гг.

№ п/п	Годы наблюдений	вегетация		бутанизация		цветение		плодоношение		Продолжительность, дней
		начало	конец	начало	конец	начало	конец	начало	конец	
1	2018	20.03	20.04	20.04	15.05	15.05	5.06	5.06	18.07	119
2	2019	27.03	19.04	19.04	3.05	3.05	31.05	31.05	4.07	100
3	2020	15.03	19.04	19.04	21.05	21.05	4.06	4.06	30.07	138
4	2021	20.03	20.04	20.04	18.05	18.05	9.06	9.06	22.07	122
5	2022	4.03	31.03	31.03	6.05	6.05	8.06	8.06	3.08	151

По ритму сезонного развития исследуемый вид относится к группе ранневесенних быстроцветущих эфемероидов, характеризующихся ранним цветением, благодаря предварительному заложению цветков в почках возобновления, коротким периодом надземной вегетации и относительным покоем в летний период. Лимитирующим фактором является повышенная освещенность травостоя. Динамика сезонного развития (цветение) зависит от метеоусловий.

Многолетние наблюдения в условиях культуры показали, что ритмика развития вида зависит от метеорологических факторов условий среды. По нашим данным, наиболее высокий рост генеративных особей отмечен в 2022 г. до 110 см. Самый низкий рост генеративных побегов отмечен в 2021 г. – 68 см, остальные три года этот показатель составил: 2018 – 98 см, 2019 – 88 см, 2020 – 100 см. Рост генеративных побегов продолжается до массового цветения растений (рис. 1).

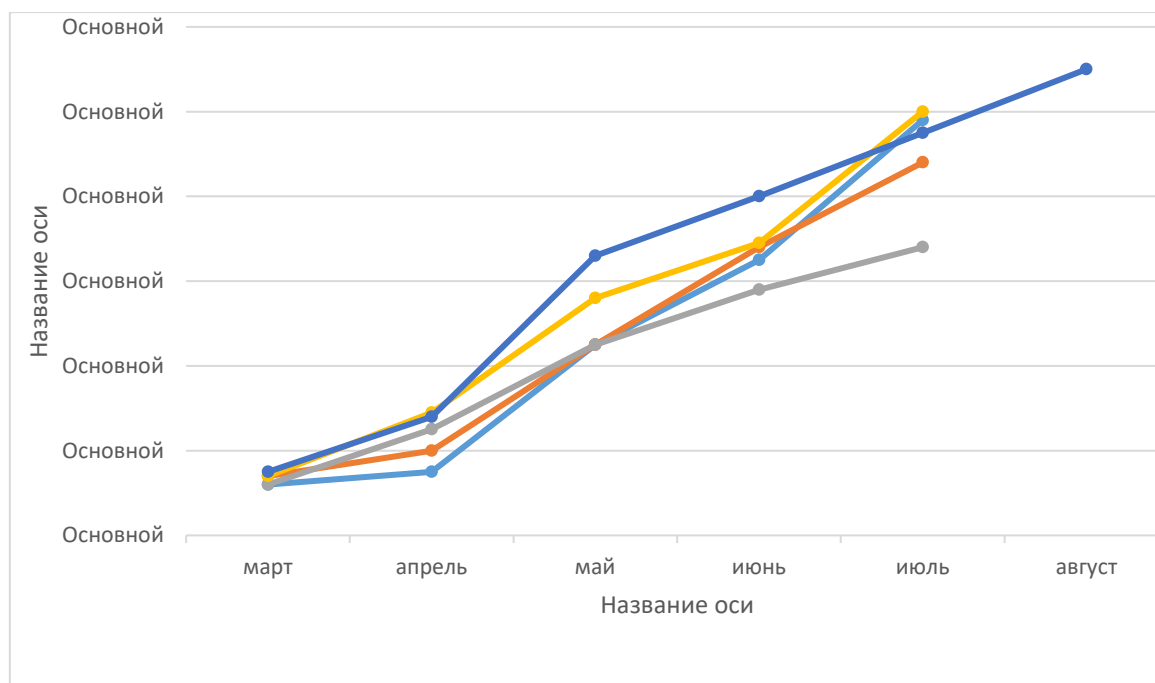


Рис. 1. Многолетняя динамика роста побегов *Allium elatum* Regel в условиях Памирского ботанического сада на высоте 2320 м над ур. м.

## В ы в о д ы

Многолетние наблюдения в условиях культуры на территории Памирского ботанического сада показали, что *Allium elatum* Regel проходит полный цикл индивидуального развития: от весеннего отрастания вегетативных и генеративных побегов до образования полноценных семян.

Вегетация у *Allium elatum* Regel в разные годы зависит от погодных условий местности. Большинство растений размножаются семенами. Сохранение семян является самым надежным методом сохранения генетических ресурсов, так как семя несёт в себе генотип растения. Кроме того, семена имеют высокую ценность в качестве лесного генетического ресурса, используются в самых разных областях таких, как производство продуктов питания, медицина и др. Таким образом, сбор семян с целью сохранения генетических ресурсов растений является актуальной задачей.

Поступило 08.02.2024 г.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Черепанов С. К. Сосудистые растения России и сопредельных государств. – «Мир и семья-95». – Спб, 1995, 990 с.
2. Введенский А. И. Сем. Amaryllidaceae. – В кн.: Флора Таджикской ССР. Т.2. – М.-Л., 1963, с. 290-366.
3. Вайнагий И.В. О методике изучения семенной продуктивности растений. – Ботан. журн., 1974, т.59, №6, с. 826-831.
4. Вайнагий И.В. О долговечности семян травянистых растений Карпат – Бюл. ГБС АН СССР, 1975, В.96, с. 56-63.
5. Бейдеман И.Н. Методика изучения фенологии растений и растительных сообществ. – Новосибирск, 1974, 155 с.

Х.А.Бекназарова, Д.Наврүзшоев

## ҲОСИЛНОКИИ ҲАҚИҚИ ВА ЭҲТИМОЛИИ *ALLIUM ELATUM* REGEL ДАР ШАРОИТИ МАДАНӢ ДАР ҲУДУДИ БОҒИ БОТАНИКИИ ПОМИР

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

Институти биологии Помир ба номи академик Х.Ю.Юсуфбеков АМИ Тоҷикистон

Дар мақола маълумотҳо дар бораи ҳосилнокии ҳақиқи ва потенциалии *Allium elatum* Regel дар шароити табиӣ дар ҳудуди Боғи ботаникии Помир дар баландии 2320 м аз сатҳи баҳр гирд оварда шудаанд. Дар асоси таҳқиқотҳои гузаронида шуда муқарар карда шуд, ки ин намуд ба растаниҳои ҳосилнокии тухмиашон миёна ва баланд (1044-1747 дон) тааллуқ дорад, ки барои мунтазам сазидани нашваҳо ва нигоҳ доштани устувории сохтори онҳо дар популятсияҳои табиӣ кифоя аст. Сол аз сол ҳосилнокии тухми кам шуда истодааст, бисёрии растаниҳо бо васоити тухми месабзанд, роҳҳои зиёдуни низ бо тухми сураг мегирад, муҳофизати тухми яке аз усулҳои муҳими муҳофизати захираҳои генетики мебошад, чунки тухми ин генотипи растани аст.

**Калимаҳои калидӣ:** ҳосилнокии ҳақиқи ва потенциалии, шароит, муҳофизат, боғи ботаники.

Kh.A.Beknazarova, D.Navruzshoev

**REAL AND POTENTIAL SEED PRODUCTIVITY *ALLIUM ELATUM* REGEL THE  
CONDITIONS OF CULTURE IN THE TERRITORI OF THE PAMIR BOTANICAL  
GARDEN**

*National Academy of Sciences of Tajikistan,*

*Kh.U.Usufbekov Pamir Biological Institute, NAS of Tajikistan*

The article presents the results of the real and potential changeable productivity of high onion under the conditions of culture in the territory of the Pamir Botanical Garden at an altitude of 2320m above sea level. On the basis of the studies carried out, it was established that the species belongs to plant with medium and high change productivity. Year after year, seed productivity goes down. Most plants ptopagate by seed. Seed conservation is a reliable method of conserving genetic resources, as the seed carries the plants genotype.

**Key words:** *real and potential, productivity, conditions, protection, botanical garden.*

**Сведения об авторах:**

1. **Бекназарова Хосият Алиназаровна** – кандидат биологических наук, Памирский биологический институт им Х.Юусуфбекова НАН Таджикистана. E-mail: khosiyat07@mail.ru;
2. **Наврузшоев Довутшо** – доктор биологических наук Памирский биологический институт им Х.Юусуфбекова НАН Таджикистана. E-mail: dovutsho@mail.ru.



УДК 574.9+581.552+632.1658

Специальность: 1.5.21 – Физиология и биохимия растений

А.Б.Сафаралихонов

**АКТИВНОСТЬ ЭНДОГЕННЫХ РЕГУЛЯТОРОВ РОСТА В ЛИСТЬЯХ  
*ARTEMISIA RHODANTHA* RUPR. В АРИДНЫХ УСЛОВИЯХ ВЫСОКОГОРЬЯ  
ПАМИРА***Национальная академия наук Таджикистана,**Памирский биологический институт им. академика Х.Юсуфбекова НАН Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана О.А.Акназаровым 08.02.2024 г.)*

*В статье приводятся результаты экспериментальных данных об активности эндогенных регуляторов роста в листьях полыни розовоцветковой в аридных условиях высокогорья Памира. Показано, что в аридных условиях высокогорья активность эндогенных стимуляторов роста в листьях полыни слабая, при этом активность таких эндогенных ингибиторов роста, как абсцизовая кислота, сравнительно высокая. Увеличение активности ингибиторов роста в листьях растений, произрастающих на больших высотах, связано с их участием в усилении механизма адаптации растений к действию экстремальных факторов высокогорья.*

**Ключевые слова:** *полынь розовоцветковая, регуляторы роста, аридные условия, высокогорье, Памир.*

Высокая инсоляция в высокогорьях Памира в сочетании с сухостью и низкими температурами почвы и воздуха создает своеобразные по суровости условия жизни для растений. Именно эти факторы играют ведущую роль в морфогенетических и физиолого-биохимических особенностях растительности Памира. Эти своеобразные условия привели к тому, что огромные территории высокогорного Памира представляют собой пустыню с сильно изреженным растительным покровом. Мало исследованы гормональные перестройки растительного организма под влиянием таких факторов как засуха и высота.

Знание об активности отдельных эндогенных регуляторов роста у дикорастущих растений при воздействии стрессовых условий высокогорья имеет существенное значение как для более глубокого понимания самого механизма адаптации, так и для диагностики устойчивости видов и сортов растений к отдельным стрессовым воздействиям [1].

На больших высотах растительные сообщества развиваются в своеобразной природной обстановке. В сильно разреженном растительном покрове высокогорного Памира преобладают многолетние растения, приспособленные к холодному и сухому климату. Это прежде всего полукустарнички и кустарнички. Очень низок процент эфемеров и эфемероидов. В травостое обильно представлены низкорослые, прижатые к земле розеточные и подушковидные формы, реже встречаются плотнокустовые

---

*Адрес для корреспонденции:* Сафаралихонов Айнулло Бародархонович, 736002, Республика Таджикистан, г. Хорог, ул. Холдорова, 1, Памирский биологический институт НАНТ. E-mail: ayn84\_27@mail.ru.

злаки. Пустыни в основном представляются формациями терескена серого, полынью (розовоцветковой, Кушакевича, беловолосистой) и пижмой памирской [2].

В работе была изучена активность некоторых эндогенных регуляторов роста в листьях полыни розовоцветковой в аридных условиях высокогорья Памира.

#### **Объекты и методы исследования**

Объектами исследования служили дикорастущие растения полыни розовоцветковой (*Artemisia Rhodantha Rupr.*). Полевые опыты проводились на разных высотных зонах высокогорья Памира: в пределах агроэкологической станции Джелонды, (Западный Памир) на высоте 3600 м над ур. м., и опорного пункта Чечекты (Восточный Памир) на высоте 3860 м над ур. м. Растительный материал для определения активности эндогенных регуляторов роста у полыни фиксировали в фазе образования листьев и цветения.

Активность эндогенных регуляторов роста в листьях растений определяли методом тонкослойной хроматографии [3]. Первичную экстракцию природных регуляторов роста проводили с помощью 80%-го этилового спирта. Для извлечения ауксинов и ингибиторов использовали серный эфир. Для разделения стимуляторов и ингибиторов роста применяли следующую смесь растворителей: изопропанол-аммиак-вода (10:1:1). Экстракт на хроматограмму наносили в объеме 0.5 мл прямой полосой и разгоняли восходящим током на расстоянии 10 см. Зоны хроматограмм испытывали на биологическую активность по росту отрезков coleoptилей пшеницы на биотесте [4]. Идентификация веществ и их активность определялись по росту отрезков coleoptилей на биотесте, Rf значению и окраске пятен, при видимом и УФ-свете на хроматограммах, сравнивая их с метчиками-свидетелями.

#### **Результаты и их обсуждения**

Результаты опытов показали, что динамика активности эндогенных регуляторов роста в листьях полыни розовоцветковой в условиях аридных экосистем Памира в течение онтогенеза была разной. Показано, что на больших высотах активность веществ с ингибиторным характером действия в листьях полыни оказалась сравнительно выше во всех изученных зонах его произрастания. В фазе образования листьев у растений полыни, произрастающих в условиях Джелонды на высоте 3600 м над уровнем моря, при анализе на хроматограммах обнаружены две (Rf 0.6 и 0.7) зоны с ингибиторной активностью. Степень подавления роста отрезков coleoptилей пшеницы элюатами этих зон составила 10-12% от контроля. На этих же хроматограммах были выявлены две зоны со значением Rf 0.2 и 0.3 с достоверной стимуляторной активностью. Зона со значением Rf 0.3 при сравнении с метчиками-свидетелями по окраске пятна и положению на хроматограммах была близка с активностью индолилуксусной кислоты (см. рис. 1).

У растений полыни, произрастающих на высоте 3860 м над уровнем моря в условиях Чечекты, в фазе образования листьев активность веществ со стимуляторным характером действия в листьях сравнительно уменьшалась. Только одна зона со значением Rf 0.5 обладала стимуляторной активностью. При этом активность ингибиторов роста сравнительно увеличилась в зонах со значением Rf 0.1, 0.2 и 1.0 элюаты которых подавляли рост отрезков coleoptилей пшеницы до 13% относительно контроля. Остальные зоны оказались в пределах статистической ошибки опыта (см. рис. 1).

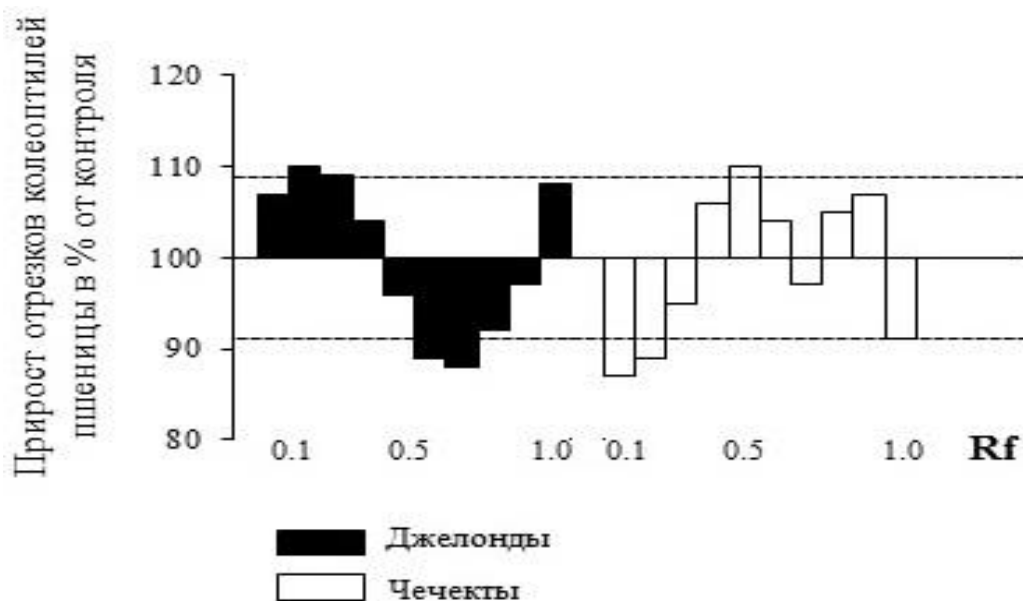


Рис. 1. Биологическая активность эндогенных регуляторов роста у полныи розовоцветковой в фазе образования листьев в условиях высокогорья Памира

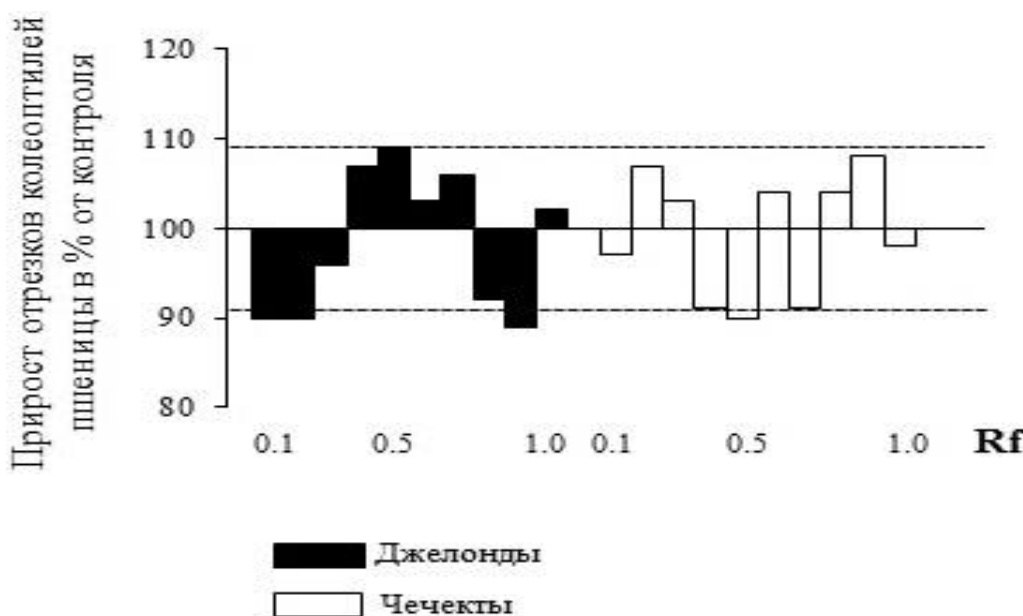


Рис. 2. Биологическая активность эндогенных регуляторов роста у полныи розовоцветковой в фазе цветения в условиях высокогорья Памира

Полученные результаты показали, что у растений полныи, произрастающих как в условиях Джелонды, так и Чечекты, в фазе образования листьев баланс между эндогенными регуляторами роста был сильно сдвинут в сторону ингибиторов. В фазе цветения наиболее высокую ингибиторную активность в условиях Джелонды проявила зона со значением Rf 0.9, которая по своему положению были идентична с Rf значением метчика абсцизовой кислоты в системе растворителей изопропанол-аммиак-вода, использованной нами для разделения веществ на хроматограммах. Активность веществ со стимуляторным характером действия на рост в листьях полныи обнаружена только в одной зоне (см. рис. 2).

В условиях Чечекты в листьях изученных растений в фазе цветения обнаружена высокая активность ингибиторов роста. Природа этих веществ в рамках метода, использованной нами не была определена, однако ими статистически достоверно подавлялся рост coleoptилей пшеницы на биотесте на 10% относительно контроля (см. рис. 2).

### З а к л ю ч е н и е

Из изложенных выше экспериментальных данных следует, что у полыни розовоцветковой в аридных условиях высокогорья Памира активность эндогенных стимуляторов роста в листьях слабая, при этом активность таких эндогенных ингибиторов роста, как абсцизовая кислота сравнительно высокая. При сравнении полученных данных между разными фазами онтогенеза было выявлено, что активность стимуляторов роста как индолилуксусная кислота в начальных фазах была сравнительно выше, чем в более поздних фазах онтогенеза как в условиях Джелонды, так и Чечекты. Увеличение активности такого сильного ингибитора роста, как АБК в листьях растений на больших высотах может быть связано со степенью экстремальности окружающей среды в этих условиях. Увеличение активности ингибиторов роста в листьях растений, произрастающих на больших высотах, связано с их участием в усилении механизма адаптации растений к действию экстремальных факторов высокогорья.

*Поступило 08.02.2024 г.*

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Акназаров О.А. Действие ультрафиолетовой радиации на рост, морфогенез и уровень гормонов высокогорных растений. – Дисс.... докт. биол. наук. Душанбе, 1991, 329 с.
2. Юсуфбеков Х.Ю., Касач А.Е. Терескен на Памире. – Душанбе: Дониш, 1972, 132 с.
3. Кефели В.И., Турецкая Р.Х., Власов И.В., Коф Э.М. Методы определения фитогормонов, ингибиторов роста, дефолиантов и гербицидов. – М.: Наука, 1973, 198 с.
4. Бояркин А.Н. Методы количественного определения активности ростовых веществ. – М.: Наука, 1984, 13 с.

**А.Б.Сафаралихонов**

## **ФАЪОЛНОКИИ ЭНДОГЕНИИ ТАНЗИМГАРОНИ РАСИШ ДАР БАРГИ *ARTEMISIA RHODANTHA* RUPR. ДАР ШАРОИТИ БИЁБОНИИ БАЛНДКЎҲҲОИ ПОМИР**

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

*Институти биологии Помир ба номи академик Х.Юсуфбекови АМИ Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаи тадқиқотҳои таҷрибавӣ оид ба фаъолнокии эндогении танзимгарони расиш дар барги растани явшон дар шароити биёбонии баландкӯҳҳои Помир гирд оварда шудааст. Нишон дода шудааст, ки дар шароити биёбонии баландкӯҳҳо фаъолнокии эндогении танзимгарони расиш дар барги явшон паст буда фаъолнокии чунин боздорандагони расиш ба монанди туршии абссизӣ нисбатан зиёд мебошад. Баландшавии фаъолнокии боздорандагони расиш дар барги растаниҳо, ки дар

баладкӯҳҳо нашъунамо мекунад ба иштироки онҳо дар зиёд намудани механизмҳои мутобиқшавии растаниҳо ба таъсири омилҳои номатлуби баладкӯҳҳо алоқаманд мебошад.

**Калимаҳои калидӣ:** *Явшон, танзимгарони расиш, шароити биёбонӣ, баладкӯҳҳо, Помир.*

A.B.Safaralikhonov

**ENDOGENOUS GROWTH STIMULATORS ACTIVITY IN *ARTEMISIA RHODANTHA* RUPR. LEAVES IN ARID CONDITIONS OF PAMIR HIGHLANDS**

*National academy of sciences of Tajikistan,  
Kh. Yusufbekov Pamir Biological Institute, NAS of Tajikistan*

This article provides experimental information on endogenous growth stimulators activity in wormwood plants leaves in arid conditions of Pamir highlands. It suggests that in arid conditions of highlands the activity of endogenous growth stimulators in wormwood leaves is weak, at the same time the activity of such growth inhibitors as abscisic acid is comparatively high. Increasing of growth inhibitors activity in plant's leaves, that growing in highlands is links with their participation in enhancing of plants adaptation mechanisms towards influence of unfavorable ecological factors of highlands.

**Key words:** *warmwood, growth stimulators, arid conditions, highlands, Pamir.*

**Сведения об авторе:**

1. Сафаралихонов Айнулло Бародархонович – кандидат биол. наук, Памирский биологический Институт им. Х.Юсуфбекова НАН Таджикистана, заместитель директора по науке и образованию.

УДК 577.175.1:633.511

Специальность:1.5.4 – Биохимия

М.А.Бабаджанова, А.К.Сайфудинов, К.Н.Ниматова

**КИНЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КАРБОКСИЛАЗНОЙ АКТИВНОСТИ  
РИБУЛОЗОБИСФОСФАТКАРБОКСИЛАЗЫ/ОКСИГЕНАЗЫ  
МУЛЬТИФЕРМЕНТНОГО КОМПЛЕКСА ЦИКЛА КАЛЬВИНА  
В ЭКСТРАКТАХ ИЗ ЛИСТЬЕВ ХЛОПЧАТНИКА**

*Таджикский национальный университет**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана К.Алиевым 15.02.2024 г.)*

*Приведены результаты кинетических исследований рибулозо-бисфосфаткарбоксилазной реакции в мультиферментном комплексе цикла Кальвина в экстрактах из листьев хлопчатника сорта 108-Ф. Изучена зависимость карбоксилазной активности рибулозо-бисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы мультиферментного комплекса от длительности реакции, количества белка, концентрации рибулозо-5-фосфата и рибулозо-1,5-бисфосфата, а также  $\text{NaHCO}_3$  в реакционной среде. Установлено, что кривые зависимости скорости реакции от концентрации белка и субстратов имеют сигмоидные формы, что свидетельствует о положительном кооперативном взаимодействии между активными центрами субъединиц фермента при связывании субстратов.*

**Ключевые слова:** хлопчатник, рибулозобисфосфаткарбоксилазная реакция, скорость, кинетика, мультиферментный комплекс, цикл Кальвина.

Фотосинтез является единственным первичным источником органических веществ и кислорода на планете. Он обеспечивает постоянное воспроизведения биоресурсов, существование кислородозависимой жизни.

Синтез первичных органических веществ происходит в процессе темновых реакций в цикле Кальвина. Ключевой реакцией цикла является фиксация  $\text{CO}_2$ , катализируемая ферментом рибулозобисфосфат-карбоксилазой/оксигеназой (РБФК/О, КФ 4.1.1.39).

РБФК/О является уникальным характеристическим ферментом цикла Кальвина, так как он не встречается в других метаболических последовательностях. РБФК/О один из самых лабильных и регулируемых ферментов цикла Кальвина. Поэтому ему отводится роль регулятора интенсивности фотосинтеза, а фотосинтезу – определяющая роль в продукционном процессе. Исследованию влияния различных факторов на активность РБФК/О из различных растений посвящено множество работ. Однако кинетическое поведение фермента из листьев хлопчатника не изучено.

---

*Адрес для корреспонденции:* Бабаджанова Мухаббат Абдурахмановна, 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр.Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: saifudinov71@mail.ru

Целью данной работы являлось изучение кинетического поведения рибулозобисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы в мультиферментном комплексе цикла Кальвина в экстрактах из листьев хлопчатника.

### Материал и методы исследования

Объектом для наших исследований были взяты 4-5-дневные листья средневолокнистого хлопчатника (*Gossypium hirsutum* L. семейства Malvaceae) сорта 108-Ф.

Хлопчатник выращивали с выполнением всех агротехнических мероприятий на экспериментальном участке Института ботаники, физиологии и генетики растений Национальной академии наук Таджикистана (Гиссарская долина, г. Душанбе, 830 м над ур. м.).

**Получение экстракта.** Для получения экстракта брали 50 г 4-6-дневных листьев, из которых вырезали средние жилки. Листья предварительно были промыты в дистиллированной воде, высушены фильтровальной бумагой и охлаждены до 0°C, затем растерты в охлажденной фарфоровой ступке с добавлением 0.75мл 0.1 трис – HCL буфера, pH 8.5, содержащим 0.2 М NaCl, 0.01М MgCl<sub>2</sub>, 0.0005 М ЭДТА, 0.01 М дитиотрейтола, 0.01 М NaHCO<sub>3</sub>, 1% поливинилпирролидона. Полученной гомогенной отжимали через капроновую ткань, измеряли объем и pH, затем центрифугировали при 1800 об/мин на центрифуге марки К-24 на холоду в течение 40 минут. В 1 мл супернатанта определяли количественное содержание белка и карбоксилазную активность рибулозобисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы.

**Количественное содержание белка.** Количественное содержание белка определяли с реактивом Бенедикта [1].

**Определение** карбоксилазной активности рибулозобисфосфат-карбоксилазы/оксигеназы осуществляли спектрофотометрически по методике Рэкера, модифицированной А.К.Романовой [2].

### Результаты и их обсуждение

Для определения кинетического поведения карбоксилазной активности рибулозобисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы исследовали влияние длительности реакции, зависимости от количества белка, концентрации субстратов в реакционной среде на активность фермента.

Для определения влияния длительности реакции на проявление карбоксилазной активности рибулозобисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы мультиферментного комплекса все компоненты реакционной среды инкубировали в течение 45 сек, 1, 2, 4 и 8 мин.

Полученные результаты представлены в табл. 1. Как видно из приведенных в таблице данных, за 45 сек достигалась высокая скорость карбоксилазной реакции и в случае использования собственного субстрата фермента – рибулозо-1,5-бисфосфата, и при использовании рибозо-5-фосфата в качестве субстрата. Но при применении рибозо-5-фосфата скорость карбоксилазной реакции мультиферментного комплекса была выше на 15%.

Таблица 1

Влияние длительности реакции на карбоксилазную активность рибулозобисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы мультиферментного комплекса цикла Кальвина в экстрактах из листьев хлопчатника сорта 108-ф в присутствии собственного субстрата

Длительность реакции	а) рибулозо-1,5-бисфосфат		
	Активность в мкмоль CO <sub>2</sub> на 1 мг белка	Активность в мкмоль CO <sub>2</sub> в минуту на 1 мг белка	% активности
45 сек	0.91 ±0.02	-	100
1 мин	0.48±0.01	0.48	100
2 мин	0.54±0.01	0.27	100
4 мин	0.61±0.01	0.15	100
8 мин	0.61±0.01	0.15	100
	б) рибозо-5-фосфат		
45 сек	1.05 ±0.03	-	115
1 мин	0.56±0.01	0.56	116
2 мин	0.61±0.01	0.30	110
4 мин	0.55±0.01	0.14	90
8 мин	0.58±0.01	0.14	95

При использовании обоих субстратов при длительности реакции 1 мин скорость карбоксилазной реакции мультиферментного комплекса снижалась вдвое, то есть снижение происходило за 15 с.

При дальнейшем увеличении длительности реакции происходило всё большее снижение скорости карбоксилазной реакции мультиферментного комплекса как при использовании рибулозо-1,5-бисфосфата, так и в присутствии рибозо-5-фосфата.

В сравнении со скоростью реакции за 1 мин, скорость реакции за 4 мин снизилась в три раза в присутствии рибулозо-1,5-бисфосфата, а при использовании рибозо-5-фосфата – в четыре раза.

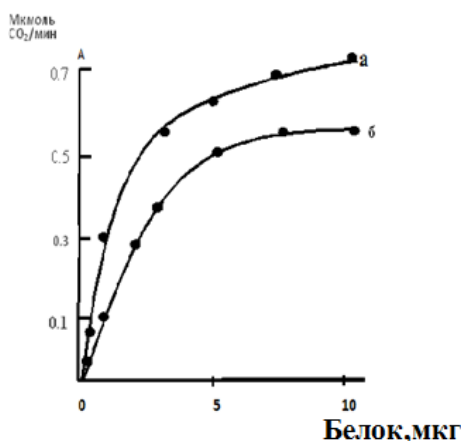
Полученные результаты дали основание использовать в дальнейших исследованиях при определении карбоксилазной активности рибулозобисфосфаткарбоксилазы мультиферментного комплекса длительность реакции 0.5-1 мин.

Влияние количества белка в реакционной среде карбоксилазной активности рибулозо-1,5-бисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы мультиферментного комплекса было изучено нами при концентрации субстрата фермента – рибулозо-1,5-бисфосфата или рибозо-5-фосфата – 10 мкмоль/мл.

Полученные результаты приведены на рис. 1.

Как видно из приведенных на рис. 1 данных, независимо от использованного субстрата кривые зависимости карбоксилазной активности мультиферментного комплекса от количества белка не имели классическую гиперболическую форму. В пределах количества белка от 0.5 до 1 мг наблюдалось резкое возрастание активности фермента. При дальнейшем увеличении количества белка от 1 до 5 мг на мл реакционной среды скорость реакции выходила на плато. На основании полученных данных в дальнейших исследованиях использовали 5-10 мг белка на 1 мл реакционной среды.

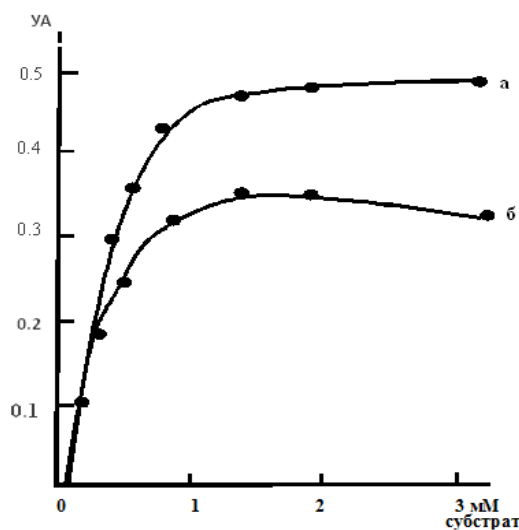




**Рис. 1.** Зависимость от количества белка в реакционной среде карбоксилазной активности рибулозобисфосфат-карбоксилазы/оксигеназы мультиферментного комплекса цикла Кальвина в экстрактах из листьев хлопчатника сорта 108-Ф при использовании рибозо-5-фосфата (а) и рибулозо-1,5-бисфосфата (б).

Влияние концентрации рибулозо-1,5-бисфосфата и рибозо-5-фосфата на карбоксилазную активность рибулозо-1,5-бисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы мультиферментного комплекса изучено нами при содержании в 1 мл реакционной среды 10 мкг белка и длительности реакции 1 мин.

Полученные результаты приведены на рис. 2.



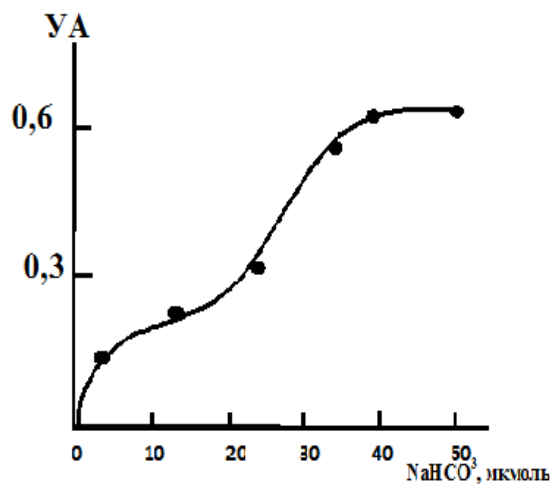
**Рис. 2.** Влияние различных концентраций рибозо-5-фосфата (а) или рибулозо-1,5-бисфосфата (б) на карбоксилазную активность рибулозобисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы мультиферментного комплекса в экстрактах из листьев хлопчатника сорта 108-Ф.

Как видно из рис. 2, кривые зависимости карбоксилазной активности рибулозобисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы от концентрации субстрата имели резкие загибы уже при 0.1 мМ субстрата. И при использовании рибулозо-1,5-бисфосфата, и в присутствии рибозо-5-фосфата максимальная активность фермента проявлялась при концентрации субстрата 1 мМ на 1 мл реакционной среды.

При концентрации рибулозо-1,5-бисфосфата 1 мМ в мл реакционной среды скорость реакции достигала 0.31 мкмоль CO<sub>2</sub>/мин на 1 мг белка, а при использовании такой же концентрации рибозо-5-фосфата скорость реакции составляла 0.45 мкмоль CO<sub>2</sub>/мин на 1 мг белка, то есть была выше на 45%. Дальнейшее увеличение концентрации субстрата приводило к постепенному замедлению реакции.

На основании полученных результатов в дальнейших исследованиях использовали 1мМ субстрата на мл реакционной среды.

Влияние концентрации углекислоты на карбоксилазную активность рибулозобисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы мультиферментного комплекса в экстрактах из листьев хлопчатника сорта 108-Ф представлены на рис. 3.



**Рис. 3.** Влияние концентраций углекислоты ( $\text{NaHCO}_3$ ) на карбоксилазную активность рибулозобисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы мультиферментного комплекса в экстрактах из листьев хлопчатника сорта 108-Ф.

На рис. 3 видно, что кривая зависимости от концентрации углекислоты в реакционной среде карбоксилазной активности мультиферментного комплекса имела очень сложную сигмоидообразную форму с четырьмя загибами – при 5, 15, 25 и 35 мкмоль углекислоты.

Максимальная карбоксилазная активность рибулозобисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы мультиферментного комплекса проявлялась при содержании 40-50 мкмоль углекислоты в 1 мл реакционной среды. Следовательно, при этой концентрации углекислоты фермент полностью насыщен субстратом. В дальнейших исследованиях использовалось 50 мкмоль углекислоты на 1 мл реакционной среды.

Таким образом подобраны оптимальные условия реакционной среды для проявления карбоксилазной активности рибулозобисфосфаткарбоксилазы/оксигеназы мультиферментного комплекса цикла Кальвина в экстрактах из листьев хлопчатника сорта 108-Ф. Кинетические кривые зависимости всех трех ферментативных активностей мультиферментного комплекса от количества белка и концентрации субстратов в реакционной среде имели очень сложные сигмоиднообразные формы с несколькими точками загибов, отражающих сложные конформационные изменения в молекулах ферментов.

При проявлении активности ферментов мультиферментного комплекса цикла Кальвина характерны положительные кооперативные взаимодействия между активными центрами субъединиц ферментов.

*Поступило 15.02.2024 г.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочетов Г.А. Практическое руководство по энзимологии. – М.: Высш.шк., 1980, 270 с.
2. Романова А.К. Биохимические методы изучения автотрофии у микроорганизмов. – М.: Высш. шк., 1980, 160 с.

М.А.Бобочонова, А.К.Сайфудинов, К.Н.Ниматова

**ТАҶҚИҚОТҲОИ КИНЕТИКИ РИБУЛОЗОБИСФОСФАТ-  
КАРБОКСИЛАЗА/ОКСИГЕНАЗИИ МУЛЬТИФЕРМЕНТҲОИ СИКЛИ  
КАЛВИН ДАР ШИРАИ БАРГИ ПАХТА**

*Донишгоҳи милли Тоҷикистон*

Дар мақолаи мазкур натиҷаҳои кинетикии реаксияҳои рибулозобисфосфаткарбоксилази мултиферментҳои сикли Калвин дар шираи барги пахтаи навъи 108-Ф оварда шудааст. Омӯзиши рибулозобисфосфаткарбоксилаза/оксигеназаи фаъолнокии маҷмӯаи мултиферменти аз суръати реаксия, миқдори сафеда, консентратсияи рибозо-5-фосфат, рибулозо-1,5-бисфосфат инчунин гидро карбонати натрий ва муҳити реаксионӣ вобастаги дорад.

Муайян карда шуд, ки хати қачи суръати реаксия аз консентратсияи сафеда ва субстрат, шакли қачи сигмоидӣ шаҳодат аз он медиҳад, ки байни маркази фаъолӣ ҳиссаҳои ферментҳо алоқаҳои мушбӣ мавҷуд аст.

**Калимаҳои калидӣ:** пахта, реаксияи рибулозобисфосфат-карбоксилази, суръат, кинетин, маҷмӯаи мултиферментӣ, сикли Калвин.

M.A.Babazhanova, A.K.Sayfudinov, K.N.Nimatova

**KINETIC STUDY OF THE CARBOXYLASE ACTIVITY OF RIBULOSE  
BISPHOSPHATE CARBOXYLASE/OXYGENASE OF THE MULTI-ENZYME  
COMPLEX OF THE CALVIN CYCLE IN EXTRACTS FROM COTTON LEAVES**

*Tajik National University*

The results of kinetic studies of the ribulosebiphosphatecarboxylase reaction in a multi-enzyme complex of the Calvin cycle in extracts from cotton leaves of the 108-F variety are presented. The dependence of the carboxylase activity of ribulose-bisphosphate carboxylase/oxygenase of a multi-enzyme complex on the duration of the reaction, the amount of protein, the concentration of ribose-5-phosphate and ribulose 1,5-bisphosphate and  $\text{NaHCO}_3$  in the reaction medium was studied. It was found that the curves of the dependence of the reaction rate on the concentration of protein and substrates have sigmoid shapes, which indicates a positive cooperative interaction between the active centers of the enzyme subunits during substrate binding.

**Key words:** cotton, ribulose-bisphosphate carboxylase reaction, rate, kinetics, multienzyme complex, Calvin cycle.