

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Ф.З.Рахмонов.** Тернарная проблема Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми.....317
- Н.О.Гадоев.** \mathcal{H} -функционалы и значение n -поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди и весовых пространствах Бергмана.....326
- А.А.Шабозова.** Точные значения поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана.....338
- М.И.Джангибеков.** Поперечники некоторых классов дифференцируемых функций в L_2348
- Т.П.Константинова.** О сопряженных операторах для одного класса вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными формами.....357

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Х.И.Холов, Н.Т.Шарифбоев, С.Курбон, Ш.Р.Самихов, Ш.Р.Джуракулов.** Расчет значений термодинамических функций процесса тиосульфатного растворения золота.....363
- С.М.Досаев, К.И.Нематуллоев, М.М.Тагоев, Х.Р.Рахмонов, А.С.Курбонов.** Сравнительная оценка выделения хлорида железа из железо- и алюмосодержащих руд Таджикистана соляной кислотой.....369

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- М.Д.Бобоёров, Ф.Дж.Саломов, Б.Б.Баротов, А.Ш.Насруллоев, И.Мирсаидзода.** Сравнительная оценка термодинамических процессов разложения урансодержащих руд Таджикистана.....375
- И.Ш.Идиев, М.Т.Норова, И.Н.Ганиев.** Кинетика окисления цинкового сплава ЦАМг4.5-2, легированного иттрием.....380

ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОЛОГИЯ

- М.Р.Рахимбекова, И.С.Оймухаммадзода, Ш.А.Файзуллоев.** Влияние морфометрических и климатических условий на развитие осыпей долины реки Гунт.....387

БОТАНИКА

- Х.Х.Хисориев, М.Т.Бобоев, П.А.Курбонова.** Об эндемичных рода и вида сине-зелёных водорослей (Cyanophyta, Cyanobacteria) Памира (Таджикистан).....400

ФИЗИОЛОГИЯ И БИОХИМИЯ РАСТЕНИЙ

- Т.Ш.Авезов, А.Эргашев, Х.А.Абдуллаев.** Действие предпосевной обработки семян пшеницы антиоксидантами на количественные показатели колоса при различных условиях водообеспечения.....404

CONTENTS

MATHEMATICS

- F.Z.Rakhmonov.** Estermann's ternary problem with almost proportional summands317
- N.O.Gadoev.** \mathcal{H} -functionals and the value of n -widths of some classes functions in hardy space and weighted Bergman spaces326
- M.Sh.Shabozov, A.A.Shabozova.** Exact values of the withdrawals of some classes of functions in Bergman space.....338
- M.I.Jangibekov.** Widths of some classes of differentiable functions in L_2348
- T.P.Konstantinova.** About conjugate operators for a class of degenerate elliptic operators generated by non-coercive forms.....357

INORGANIC CHEMISTRY

- Kh.I.Kholov, N.T.Sharifboev, Q.Sanavbar, S.R.Samikhov, Sh.R.Dzhurakulov.** Calculation of the values of thermodynamic functions of the process of thiosulfate dissolution of gold.....363
- S.M.Dosaev, K.I.Nematulloev, M.M.Tagoev, Kh.R.Rakhmonov, A.S.Kurbonov.** Comparative assessment of recovery of iron chloride from iron- and aluminum-containing ores of Tajikistan by hydrochloric acid.....369

PHYSICAL CHEMISTRY

- M.D.Boboyorov, F.J.Salomov, B.B.Barotov, A.Sh.Nasrulloev, I.Mirsaidzoda.** Comparative assessment of thermodynamic processes of decomposition of uranium-containing ores in Tajikistan.....375
- I.Sh.Idiev, M.T.Norova, I.N.Ganiev.** Kinetics of oxidation of zinc alloy TsAMg4.5-2 doped with yttrium380

ENGINEERING GEOLOGY

- M.R.Rahimbekova, I.S.Oimuhammadzoda, Sh.A.Faizulloev.** Influence of morphometric and climatic condition in distribution of screes in Gunt river valley387

BOTANY

- H.H.Hisoriev, M.T.Boboev, H.A.Kurbonova.** On endemic genus and species of blue-green (Cyanophyta-Cyanobacteria) of Pamir (Tajikistan)400

PLANT PHYSIOLOGY AND BIOCHEMISTRY

- T.Sh.Avezov, A.Ergashev, Kh.A.Abdullaev.** The influence of pre-sowing treatment of wheat seeds with antioxidants on the quantitative indicators of the ear under different water supply conditions404

УДК 511.344

Специальность: 1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Ф.З.Рахмонов

ТЕРНАРНАЯ ПРОБЛЕМА ЭСТЕРМАНА С ПОЧТИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана С.А.Исхоковым 10.05.2024 г.)

Национальная академия наук Таджикистана,

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

При $n \geq 3$ получена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального N в виде $p_1 + p_2 + m^n = N$, где p_1, p_2 – простые числа, m – натуральное число, удовлетворяющие условиям

$$|p_k - \mu_k N| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad |m^n - \mu_3 N| \leq H, \quad H \geq N^{1 - \frac{1}{n(n-1)}} \mathcal{L}_{n-1}^{\frac{2^{n+1}}{n-1} + n - 1},$$

где μ_1, μ_2, μ_3 – положительные фиксированные числа и $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$.

Ключевые слова: проблема Эстермана, почти пропорциональные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма Г.Вейля, малая окрестность центров больших дуг.

Эстерман [1] при $n = 2$ доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^n = N, \tag{1}$$

где p_1, p_2 – простые числа, m – натуральное число. В работах [2,3] при $n = 3, 4$ эта задача исследована с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, то есть выведена асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| m^n - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{1 - \theta(n)} \mathcal{L}^{c_n},$$

соответственно при

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \quad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \quad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}. \tag{2}$$

В этой работе при произвольном фиксированном $n \geq 3$ доказана теорема об асимптотической формуле в обобщении проблемы Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми.

Адрес для корреспонденции: Рахмонов Фируз Заруллоевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com.

Теорема 1. Пусть N – достаточно большое натуральное число, $n \geq 3$ – фиксированное натуральное число, $\rho(N, p)$ – число решений сравнения $x^n \equiv N \pmod{p}$, μ_1, μ_2, μ_3 – положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, $J_n(N, H)$ – число решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$|p_k - \mu_k N| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad |m^n - \mu_3 N| \leq H. \tag{3}$$

Тогда при $H \geq N^{\frac{1}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\frac{2^{n+1}}{n-1} + n - 1}$, справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N, H) = \frac{3\mathfrak{S}(N)H^2}{n\mu_3^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3}\right), \quad \mathfrak{S} = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N, p)}{(p-1)^2}\right),$$

где постоянная под знаком O зависит от чисел μ_1, μ_2, μ_3 и n .

Из теоремы 1 при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3}$ следует асимптотическая формула в обобщении проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми, а полученные ранее в работах [2,3] асимптотические формулы в обобщении проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми при $n = 3$ и $n = 4$, приведенные нами в формуле (2), являются частными случаями этой теоремы.

Доказательство теоремы 1 проводится круговым методом Харди-Литтлвуда-Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова в соединении с методом работ [4,5,6], где исследованы поведения короткой суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^n),$$

в больших дугах и доказана асимптотическая формула в обобщении проблемы Варинга с почти пропорциональными слагаемыми, а также используются идеи оценки суммы Г.Вейля в малых дугах [7,8]. Основными утверждениями, позволившими доказать теорему 1, являются:

- асимптотическая формула для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида $T(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг ([4] стр. 143, следствие 2 теоремы 2);
- нетривиальная оценка сумм $T(\alpha; x, y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров ([4] стр. 143, следствие 3 теоремы 2);
- нетривиальная оценка сумм $T(\alpha; x, y)$ в малых дугах ([9]).

Обозначения. ε – произвольное положительное число, не превосходящее 0.00001, $\mathcal{L} = \ln N$,

$$S(a, q) = \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^n}{q}\right), \quad \gamma(\lambda; x, y) = \int_{-0.5}^{0.5} e\left(\lambda \left(x - \frac{y}{2} + yt\right)^n\right) dt.$$

Схема доказательства теоремы 1. Не ограничивая общности будем считать, что

$$H = N^{1-\theta(n)} \mathcal{L}^{\omega(n)}, \quad \theta(n) = \frac{1}{(n-1)n}, \quad \omega(n) = \frac{2^{n+1}}{n-1} + n - 1. \quad (4)$$

Пользуясь обозначениями

$$S(\alpha; N_k, 2H) = \sum_{N_k - 2H < p \leq N_k} e(\alpha p), \quad N_k = \mu_k N + H, \quad k = 1, 2;$$

$$N_3 = (\mu_3 N + H)^{\frac{1}{n}} = \mu_3^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{H}{\mu_3 N}\right)^{\frac{1}{n}} = \mu_3^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right), \quad (5)$$

$$H_3 = (\mu_3 N + H)^{\frac{1}{n}} - (\mu_3 N - H)^{\frac{1}{n}} = \frac{2H}{n \mu_3^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}}} \left(1 + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right)\right), \quad (6)$$

$$\tau = 2(n-1)nN_3^{n-2}H_3 = \frac{4(n-1)H}{n \mu_3^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right), \quad \text{æ} \tau = 1, \quad (7)$$

$J_n(N, H)$ – число решений диофантова уравнения (1) относительно простых чисел p_1, p_2 и натуральных чисел m с условиями (3) представим в виде

$$J_n(N, H) = \int_{-\text{æ}}^{1-\text{æ}} e(-\alpha N) S(\alpha; N_1, 2H) S(\alpha; N_2, 2H) T(\alpha; N_3, H_3) d\alpha + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3}\right).$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональным числами, каждое α из промежутка $[-\text{æ}, 1-\text{æ}]$ представим в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}. \quad (8)$$

В этом представлении $0 \leq a \leq q-1$, причём $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через \mathfrak{M} обозначим те α , для которых в представлении (8)

$$q \leq \mathcal{L}^{\eta(n)}, \quad \eta(n) = 2^{n+1} + (n-1)^2,$$

а через \mathfrak{m} обозначим оставшиеся α . Множество \mathfrak{M} состоит из непересекающихся отрезков. Разобьём множество \mathfrak{M} на множества \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 :

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{ \alpha : \alpha \in \mathfrak{M}, \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{\mathcal{L}^2}{H} \right\},$$

$$\mathfrak{M}_2 = \left\{ \alpha : \alpha \in \mathfrak{M}, \frac{\mathcal{L}^2}{H} < \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q\tau} \right\}.$$

Обозначим через $J(\mathfrak{M}_1)$, $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам \mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_2 и \mathfrak{m} .

Будем иметь

$$J_n(N, H) = J(\mathfrak{M}_1) + J(\mathfrak{M}_2) + J(\mathfrak{m}) + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}}\mathcal{L}^3}\right).$$

В последней формуле $J(\mathfrak{M}_1)$ представляет главный член асимптотической формулы для $J(N, H)$, а $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

1. Вычисление интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$. По определению интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$ имеем:

$$J(\mathfrak{M}_1) = \int_{\mathfrak{M}_1} \mathbb{F}(\alpha) e(-\alpha N) d\alpha = \sum_{q \leq \mathcal{L}^{\eta(n)}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} I(a, q), \tag{9}$$

$$I(a, q) = e\left(-\frac{aN}{q}\right) \int_{|\lambda| \leq \mathcal{L}^{2H-1}} \mathbb{F}\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) e(-\lambda N) d\lambda, \tag{10}$$

$$\mathbb{F}(\alpha) = \mathbb{F}(\alpha; N, H) = S(\alpha; N_1, 2H) S(\alpha; N_2, 2H) T(\alpha; N_3, H_3).$$

Для нахождения асимптотической формулы функции $\mathbb{F}(\alpha; N, H)$, сначала найдем асимптотическое поведение суммы $S(\alpha; \mu_k N, H)$, $k = 1; 2$. Для этого, полагая $A = 3 + \frac{n-1}{n} \eta(n)$, $b = \eta(n)$, и применяя к этим суммам теорему из [10] стр 612, получим

$$S(\alpha; \mu_k N, H) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda} \frac{e(\lambda\mu_k N)}{\ln(\mu_k N)} + O\left(\frac{H}{\mathcal{L}^{A+1}}\right).$$

Отсюда и из соотношения $\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda} \ll H$ найдём

$$S(\alpha; \mu_1 N, H) S(\alpha; \mu_2 N, H) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{\pi^2 \lambda^2} \frac{e(\lambda(\mu_1 + \mu_2) N)}{\ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N)} + O\left(\frac{H^2}{\varphi(q) \mathcal{L}^{A+2}}\right). \tag{11}$$

Теперь найдем асимптотическое поведение суммы $T(\alpha; N_3, H_3)$, $\alpha \in \mathfrak{M}_1$. Для этого, воспользовавшись следствием 2 теоремы 2 из [4] стр. 143, затем, вычислив асимптотическую формулу для тригонометрического интеграла $\gamma(\lambda; N_3, H_3)$, пользуясь соотношением $N_3^n = \mu_3 N + H$, а также соотношениями (5) и (6), будем иметь

$$T(\alpha; N_3, H_3) = \frac{S(a, q)}{q} \frac{H_3 \sin(2\pi H \lambda)}{2\pi H \lambda} (e(\mu_3 N \lambda) + \mathbb{R}_3), \tag{12}$$

$$\mathbb{R}_3 \ll \frac{H^2 \mathcal{L}^2}{q^n N^{2-\frac{1}{n}}} \left(1 + N^{-\frac{n-3}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\nu(n)} \right) \ll \frac{H^2 \mathcal{L}^2}{q^n N^{2-\frac{1}{n}}},$$

$$\nu(n) = -2 - 2\omega(n) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \varepsilon \right) \eta(n), \quad \nu(3) = -\frac{56}{3} + 20\varepsilon.$$

Почленно умножая формулы (11) и (12), затем при оценке остаточного члена этого произведения, которое обозначим через \mathbb{R}_4 , пользуясь неравенством $|\sin(2\pi H \lambda)| \ll 2\pi H \lambda$, оценкой $S(a, q) \ll q^{1-\frac{1}{n}}$, соотношением (6) и условием (4), найдем

$$\mathbb{F}(\alpha) = \frac{H_3}{2H \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N)} \cdot \frac{\mu^2(q) S(a, q)}{q\varphi^2(q)} \cdot \frac{\sin^3 2\pi \lambda H}{\pi^3 \lambda^3} + \mathbb{R}_4,$$

$$\mathbb{R}_4 \ll \frac{H^3}{q^n \varphi(q) N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{A+2}} \left(1 + \frac{H \mathcal{L}^{A+2}}{\varphi(q) N} + \frac{H \mathcal{L}^2}{N} \right) \ll \frac{H^3}{q^n \varphi(q) N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{A+2}}.$$

Подставляя значение функции $\mathbb{F}(\alpha)$, то есть правую часть последней формулы в (10), затем воспользовавшись оценкой $S(a, q) \ll q^{1-\frac{1}{n}}$ и соотношением (6), найдём

$$I(a, q) = \frac{H_3}{2H \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N)} \cdot \frac{\mu^2(q) S(a, q)}{q\varphi^2(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right) J(H) + \mathbb{R}_5, \tag{13}$$

$$J(H) = \int_{|\lambda| \leq \mathcal{L}^{2H-1}} \frac{\sin^3 2\pi \lambda H}{\pi^3 \lambda^3} d\lambda, \quad \mathbb{R}_5 \ll \frac{H^2}{q^n \varphi(q) N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^A}.$$

Заменив $J(H)$ близким к нему несобственным интегралом независимым от \mathcal{L} , найдём

$$J(H) = \frac{8H^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^3 u}{u^3} du + O\left(\frac{H^2}{\mathcal{L}^6}\right) = 3H^2 + O\left(\frac{H^2}{\mathcal{L}^6}\right).$$

Подставляя значение интеграла $J(H)$ в формулу (13), найдём

$$I(a, q) = \frac{3HH_3}{2 \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N)} \cdot \frac{\mu^2(q) S(a, q)}{q\varphi^2(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right) + \mathbb{R}_6,$$

$$\mathbb{R}_6 \ll \frac{H^2}{q^n \varphi^2(q) N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^8} + \frac{H^2}{q^n \varphi(q) N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^A}.$$

Подставляя полученное значение интеграла $I(a, q)$ в (9), затем при оценке \mathbb{R}_7 воспользовавшись условием $A = 3 + \frac{n-1}{n} \eta(n)$, получим

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{3HH_3}{2\ln(\mu_1 N)\ln(\mu_2 N)} \sum_{q \leq \mathcal{L}^{\eta(n)}} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^q S(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right) + \mathbb{R}_7. \tag{14}$$

$$\mathbb{R}_7 \ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}}} \sum_{q \leq \mathcal{L}^{\eta(n)}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \left(\frac{1}{q^n \varphi^2(q) \mathcal{L}^8} + \frac{1}{q^n \varphi(q) \mathcal{L}^A} \right) \ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3}.$$

Внешнюю сумму по q в (14) заменим близким к ней бесконечным рядом, не зависящим от степени \mathcal{L} . Пользуясь абсолютной сходимостью и мультипликативностью общего члена этого ряда, стандартным методом найдем

$$\sum_{q \leq \mathcal{L}^{736}} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \Phi(q, N) = \mathfrak{S}(N) + O(\mathcal{L}^{-2}), \quad \mathfrak{S}(N) = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N, p) - 1}{(p-1)^2} \right),$$

где $\rho(N, p)$ – число решений сравнения $x^n \equiv N \pmod{p}$. Подставляя правую часть этого равенства в (14), а затем воспользовавшись формулой (6), получим

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{3\mathfrak{S}(N)H^2}{n\mu_3^{1-\frac{1}{n}} N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3}\right).$$

2. Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$. Переходя к оценкам, а затем воспользовавшись неравенством Коши для интегралов, теоремой Хаксли о попадании простых чисел в интервалы малой длины, получим

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H}{\mathcal{L}} \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_3, H_3)| = \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3} \cdot \frac{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2}{H} \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_3, H_3)|.$$

Рассмотрим два возможных случая: $\frac{\mathcal{L}^2}{H} < |\lambda| \leq \frac{1}{2nqN_3^{n-1}}$ и $\frac{1}{2nqN_3^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$.

Случай 1. Применяя к сумме $T(\alpha; N_3, H_3)$ следствие 2 теоремы 2 из [4] стр. 143, а затем воспользовавшись оценкой тригонометрического интеграла $\gamma(\lambda; N_3, H_3)$ по величине производной первого порядка, то есть оценкой

$$|\gamma(\lambda; N_3, H_3)| \leq \frac{1}{n|\lambda|H} \leq \frac{1}{n\mathcal{L}^2},$$

соотношением (6), тривиальной оценкой $S(a, q) \leq q$, условием $q \leq \mathcal{L}^{\eta(n)}$ и формулой (4), последовательно найдём

$$\begin{aligned}
 T(\alpha; N_3, H_3) &= \frac{H_3 S(a, q)}{q} \gamma(\lambda; N_3, H_3) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \ll \\
 &\ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} + \mathcal{L}^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\eta(n)} = \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} \left(1 + \frac{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\eta(n)+2}}{H}\right) = \\
 &= \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} \left(1 + N^{-\frac{n-2}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\eta(n)+2-\omega(n)}\right) \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2}.
 \end{aligned}$$

Случай 2. В этом случае, воспользовавшись следствием 3 теоремы 2 из [4] стр. 143, при $x = N_3$, $y = H_3$ и соотношением (5), а затем явным значением параметра H , то есть формулой (4), имеем

$$\begin{aligned}
 T(\alpha, N_3, H_3) &\ll \mathcal{L}^{\eta(n)+1} + N^{\frac{1}{2n}} \mathcal{L}^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\eta(n)} = \\
 &= \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} \left(N^{-\frac{n-2}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\eta(n)+3} + N^{-\frac{n-3}{2n(n-1)}} \mathcal{L}^{\varkappa(n)}\right) \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2}, \\
 \varkappa(n) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\eta(n) + 2 - \omega(n), \quad \varkappa(3) = -\frac{14}{3}.
 \end{aligned}$$

3. Оценка интеграла $J(\mathfrak{m})$. Поступая аналогично, как в случае оценки $J(\mathfrak{M}_2)$, имеем

$$J(\mathfrak{m}) \ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3} \cdot \frac{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2}{H} \max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |T(\alpha; N_3, H_3)|.$$

Оценим $T(\alpha; N_3, H_3)$ для α из множества \mathfrak{m} . Пользуясь теоремой о нетривиальной оценке сумм $T(\alpha; x, y)$ в малых дугах ([9]) при $x = N_3$, $y = H_3$, а также воспользовавшись соотношениями

$$H_3 \asymp \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}}, \quad N_3 \asymp N^{\frac{1}{n}}, \quad \tau \asymp \frac{H}{N^n},$$

которые являются следствиями формул (6), (5) и (7), а затем явным значением параметра H , то есть формулой (4), имеем

$$|T(\alpha; N_3, H_3)| \leq 2H_3 \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{H_3} + \frac{q}{H_3^n}\right)^{2^{-n}} (\ln q H_3)^{(n-1)2^{-n}} \ll$$

$$\ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}} \left(\frac{1}{\mathcal{L}^{2^{n+1}+(n-1)^2}} + \frac{N^{1-\frac{1}{n}}}{H} + \frac{N^{n-1-\frac{1}{n}}}{H^{n-1}} \right)^{2^{-n}} \mathcal{L}^{(n-1)^2 2^{-n}} =$$

$$= \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} \left(2 + N^{-\frac{n-2}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\frac{(n-2)2^{n+1}}{n-1} + n^2 - 3n + 2} \right)^{2^{-n}} \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2}.$$

Поступило 10.05.2024 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square. – Proc. London math.Soc., 1937, vol. 11, pp. 501-516.
2. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми. – Математические заметки, 2014, т. 95, вып. 3, с. 445-456.
3. Рахмонов Ф.З., Рахимов А.О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми. – Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского. ISSN: 1810-4134, 2016, №8, с. 87-89.
4. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми. – Чебышевский сборник, 2024, т. 25, №2(93), с. 139-168.
5. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми. – Доклады НАН Таджикистана, 2024, т. 67, №3-4, с. 125-136.
6. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля в больших дугах. – Доклады НАН Таджикистана, 2023, т. 66, №11-12, с. 625-633.
7. Рахмонов Ф.З. Оценка тригонометрических сумм с простыми числами. – Чебышевский сборник, 2011, т. 12, в. 1, с. 158-171.
8. Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами. – Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика, 2011, №3, с. 56-60.
9. Рахмонов Ф.З. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля в малых дугах. – Доклады НАН Таджикистана, 2024, т. 67, №5-6, с. 125-136.
10. Собиров А.А. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами в окрестности центра больших дуг. – Доклады НАН Таджикистана, 2021, т. 64, №11-12, с. 611-620.

Ф.З.Рахмонов

МУАММОИ ТЕРНАРИИ ЭСТЕРМАН БО ЧАМЪШАВАНДАҲОИ ҚАРИБ БАРОВАР

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви АМИ Тоҷикистон

Ҳангоми $n \geq 3$ барои миқдори тасвирҳои адади кифоя калони натуралии N дар намуди $p_1 + p_2 + m^n = N$, p_1, p_2 – ададҳои содда, m – адади натуралӣ бо шартҳои

$$|p_k - \mu_k N| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad |m^n - \mu_3 N| \leq H, \quad H \geq N^{1 - \frac{1}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\frac{2^{n+1}}{n-1} + n-1}.$$

μ_1, μ_2, μ_3 – ададҳои мусбати фиксиронидашуда ва $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, формулаи асимптотӣ гирифта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: муаммои Эстерман, чамъшавандаҳои қариб мутаносиб, суммаи кӯтоҳи тригонометрии Г.Вейл, атрофи хурди марказҳои камонҳои калон.

F.Z.Rakhmonov

ESTERMANN'S TERNARY PROBLEM WITH ALMOST PROPORTIONAL SUMMANDS

National Academy of Sciences of Tajikistan,

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan

For $n \geq 3$, an asymptotic formula has been obtained for the number of representations of a sufficiently large natural number N in the form $p_1 + p_2 + m^n = N$, where p_1 and p_2 are prime numbers, and m is a natural number, satisfying the conditions

$$|p_k - \mu_k N| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad |m^n - \mu_3 N| \leq H, \quad H \geq N^{1 - \frac{1}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\frac{2^{n+1}}{n-1} + n-1},$$

where μ_1, μ_2, μ_3 – are positive fixed numbers and $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$.

Key words: Estermann problem, almost proportional summands, short exponential sum of G. Weyl, small neighborhood of centers of major arcs.

Сведения об авторе:

1. **Рахмонов Фируз Хусенович** – кандидат физ.-мат. наук, Институт математики им.А.Джураева НАН Таджикистана, заведующий отделом. E-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com.

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Н.О.Гадоев

\mathcal{K} -ФУНКЦИОНАЛЫ И ЗНАЧЕНИЕ n -ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ И ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 15.05.2024)

В пространствах Харди и весовом пространстве Бергмана найдены точные значения бернштейновского и колмогоровского n -поперечников некоторых классов аналитических в круге функций, задаваемых \mathcal{K} -функционалами Петре.

Ключевые слова: наилучшее приближение, пространство Харди, весовые пространства Бергмана, \mathcal{K} -функционалы.

1. Экстремальные задачи приближения различных классов аналитических в единичном круге функций и вычисление точных значений n -поперечников в пространствах Харди рассмотрены, например, в работах [1-17] (см. также литературу к ним).

Здесь мы продолжим указанную тематику и вычислим точные значения колмогоровского и бернштейновского n -поперечников некоторых классов аналитических функций в пространствах Харди $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho < R$) и Бергмана $B_{q,\gamma}$ ($1 \leq q \leq \infty, \gamma > 0$), \mathcal{K} -функционалы граничных значений которых мажорируются заданной функцией.

Говорят [17], что функция $f(z)$, аналитическая в круге $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, принадлежит пространству Харди $H_{q,R} := H_q(U_R)$, если

$$\|f\|_{H_{q,R}} = \lim_{\rho \rightarrow R-0} M_q(f, \rho),$$

где

$$M_q(f, \rho) := \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty, \\ \max\{|f(\rho e^{it})| : 0 < t \leq 2\pi\}, & \text{если } q = \infty, \end{cases} \quad (1)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Адрес для корреспонденции: Гадоев Некруз Одилхонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: gadoevnekruz96@mail.ru.

При этом норма реализуется на угловых граничных значениях функций $f(Re^{it}) \in L_q[0, 2\pi]$, то есть.

$$\|f\|_{H_{q,R}} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty, \\ \text{esssup}\{|f(Re^{it})|: 0 < t \leq 2\pi\}, & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

В случае $R = 1$ полагаем $U := U_1$, $H_q := H_{q,1}$, $\|f\|_{H_q} = \|f\|_{H_{q,1}}$.

Пусть $\gamma(|z|)$ – некоторая неотрицательная измеримая не эквивалентная нулевой функция, суммируемая на множестве U .

Под $B_{q,\gamma} := B_q(U, \gamma)$, $1 \leq q < \infty$ понимаем банахово пространство функций f , аналитических в U , для которых [18]

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_q^q(f, \rho) d\rho \right)^{1/q}.$$

В частном случае $\gamma = 1$ пространство $B_q := B_{q,1}$ является обычным пространством Бергмана [19].

Пусть \mathcal{P}_n – подпространство комплексных алгебраических полиномов степени n вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, a_k \in \mathbb{C}.$$

Величину

$$E_n(f)_X := E(f, \mathcal{P}_n)_X = \inf \{ \|f - p_n\|_X : p_n \in \mathcal{P}_n \}$$

называют наилучшим полиномиальным приближением функции f в метрике пространства X .

Производную r -го порядка функции $f(z)$ по аргументу t комплексной переменной $z = \rho e^{it}$ обозначим через $f_a^{(r)}(z)$, $r \in \mathbb{N}$. При этом

$$f_a^{(1)}(z) = f'(z) \cdot zi, \quad f_a^{(r)}(z) = \{f_a^{(r-1)}(z)\}_a^{(1)}, \quad r \geq 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Приводим определение поперечников, нужные нам в дальнейшем. Нам для формулировок последующих результатов необходимы некоторые определения и понятия. Пусть $S := \{f \in X : \|f\|_2 \leq 1\}$ – единичный шар в X , \mathfrak{M} – выпуклое центрально-симметричное множество из X , $L_n \subset X$ – n -мерное подпространство. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : L_{n+1} \subset X \},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \left\{ \|f - g\|_2 : g \in L_n \right\} : f \in \mathfrak{M} \right\} : L_n \subset X \right\}$$

называют соответственно *бернштейновским*, и *колмогоровским* n -поперечниками подмножества \mathfrak{M} в X . Между перечисленными n -поперечниками в пространстве X имеют место соотношения:

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq d_n(\mathfrak{M}, X).$$

В теории приближения функций часто используются идея замены произвольной функции f достаточной гладкой функцией g . Одна из наиболее эффективных реализаций этой идеи основана на методе \mathcal{K} -функционала Петре теории интерполяционных пространств [20].

Через $H_{q,R,a}^{(r)}$ обозначим множество функций $f \in H_{q,R}$, у которых $f_a^{(r)} \in H_{q,R}$ ($1 \leq q \leq \infty$). Если $f_a^{(r)} \in H_{q,R}$, то структурные свойства этой функции определим \mathcal{K} -функционалом следующим образом

$$\mathcal{K}_j(f, \tau)_{H_{q,R}} := \inf_{g_a^{(j)} \in H_{q,R}} \left\{ \|f - g\|_{H_{q,R}} + \tau^j \|g_a^{(j)}\|_{H_{q,R}} \right\}, \tag{2}$$

где $\tau > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $R > 0$. При $q = \infty$ полагаем, что функция $f(z)$ имеет непрерывные угловые граничные значения $f(Re^{it}) \in C[0, 2\pi]$. Из общих фактов приведенных в [20, 21] применительно к функции $f(z) \in H_{q,R}$ следует, что если $1 \leq q \leq \infty$, $j \in \mathbb{N}$ и $0 < \tau \leq \pi$, то

$$\omega_j(f, \tau)_{H_{q,R}} \asymp \mathcal{K}_j(f, \tau)_{H_{q,R}}, \tag{3}$$

$$\omega_j(f, \tau)_{H_{q,R}} = \sup_{0 \leq h \leq \tau} \left\| \sum_{s=0}^j (-1)^{j-s} \binom{j}{s} f(Re^{i(+sh)}) \right\|_{H_{q,R}}$$

– модуль непрерывности j -го порядка угловых граничных значений функции f в пространстве $H_{q,R}$.

Соотношение (3) справедливо и в случае $q = \infty$, если $f(Re^{it}) \in C[0, 2\pi]$.

Пусть $\mathcal{K}(f)$ – положительная монотонно возрастающая функция при $t > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{K}(f) = \mathcal{K}(0) = 0$. Через $H_{q,R}(\mathcal{K})$ обозначим класс функций $f \in H_{q,R}$, каждая из которых при некотором $j \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям

$$\mathcal{K}_j \left(f, \frac{1}{m} \right)_{H_{q,R}} \leq \mathcal{K} \left(\frac{1}{m} \right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что в силу (3) такое определение класса оправдано. Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. Пусть мажоранта $\mathcal{K}(t)$ для любых $m, s \in \mathbb{N}$, $m \geq s$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\mathcal{K}(1/m)}{\mathcal{K}(1/s)} \geq \frac{s}{m}. \tag{4}$$

Тогда для произвольной $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho < R$ справедливы неравенства

$$d_n(H_{q,R}(\mathcal{H}), H_{q,\rho}) = b_n(H_{q,R}(\mathcal{H}), H_{q,\rho}) = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \mathcal{H}\left(\frac{1}{n}\right). \quad (5)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in H_{q,R,a}^{(r)}$ при любом $z \in U_R$ и $0 < \rho < R$ имеет место следующее интегральное представление

$$\begin{aligned} f(\rho z) - \mathcal{L}_{n-1,r}(f, \rho z) = \\ = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{2\pi i^r} \int_0^{2\pi} f_a^{(r)}(Rze^{-ix}) e^{inx} \Phi_n(\rho/R, x) dx, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n-1,r}(f, z) &:= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,r} c_k z^k, \\ \lambda_{k,r} &= \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(n-k)}, & \text{если } k = \overline{1, n-1}, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Phi_n(\rho/R, x) = \frac{1}{n^r} + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-n} \frac{\cos(k-n)x}{k^r} dx. \quad (8)$$

Чтобы убедиться в справедливости представления (6), необходимо разложить производную $f_a^{(r)}(Rze^{-ix})$ в ряд Маклорена, а затем почленно интегрировать на отрезке $[0, 2\pi]$. Если же функция $f \in H_{q,R}(\mathcal{H})$, то при любом $z \in U_R$ и $0 < \rho < R$ воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} f(\rho z) - V_{n-1,\rho/R}(f, \rho z) = \\ = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Rze^{-ix}) e^{inx} P(\rho/R, x) dx, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} V_{n-1,\rho/R}(f, z) &:= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(n-k)}\right) c_k z^k, \\ P(\rho/R, x) &:= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos kx = \\ &= \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos x + \rho^2} \geq 0 \end{aligned}$$

– ядро Пуассона. Интегральное представление (9) получается точно также, как представление (6). Очевидно, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\rho / R, x) dx = 1. \tag{10}$$

Используя полиномиальный оператор (7) при $r = j$ для произвольной функции $g \in A(U_R)$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

у которой $g_a^{(j)}(z) \in H_{q,R}$, рассмотрим оператор

$$Q_{n-1,j,\rho/R}(g, \rho z) = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L}_{n-1,j}(g, Rze^{-ix}) P(\rho / R, x) dx. \tag{11}$$

Непосредственными вычислениями легко проверить, что

$$Q_{n-1,j,\rho/R}(g, \rho z) = a_0 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^j\right) \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(n-k)} a_k z^k.$$

Из равенств (9) и (11) следует, что

$$\begin{aligned} & f(\rho z) - V_{n-1,\rho/R}(f, \rho z) - Q_{n-1,j,\rho/R}(g, \rho z) = \\ & = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{f(Rze^{-ix}) - \mathcal{L}_{n-1,j}(g, Rze^{-ix})\} e^{inx} P(\rho / R, x) dx. \end{aligned} \tag{12}$$

Применив к равенству (12) обобщённое неравенство Минковского [22] и учитывая, что

$$\|P(\rho / R, \cdot)\|_{L[0,2\pi]} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\rho / R, x) dx = 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} & \|f(\rho z) - V_{n-1,\rho/R}(f, \rho z) - Q_{n-1,j,\rho/R}(g, \rho z)\|_{H_q} \leq \\ & \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \|P(\rho / R, \cdot)\|_{L[0,2\pi]} \cdot \|f(Rze^{-ix}) - \mathcal{L}_{n-1,j}(g, Rze^{-ix})\|_{H_q} \leq \\ & \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \|f(R\cdot) - \mathcal{L}_{n-1,j}(g, R\cdot)\|_{H_q} \leq \\ & \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \left\{ \|f - g\|_{H_{q,R}} + \|g - \mathcal{L}_{n-1,j}(g)\|_{H_{q,R}} \right\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Так как по условию функция $g \in H_{q,R,a}^{(j)}$, то из (6), заменяя f на g при $r = j$ и $\rho \equiv R$, получаем оценку

$$\|g - \mathcal{L}_{n-1,j}(g)\|_{H_{q,R}} \leq n^{-j} \|g_a^{(j)}\|_{H_{q,R}}.$$

Подставляя полученную оценку в правую часть неравенства (13), будем иметь

$$\begin{aligned} & \|f(\rho \cdot) - V_{n-1,\rho/R}(f, \rho \cdot) - \mathcal{Q}_{n-1,j,\rho/R}(g, \rho \cdot)\|_{H_q} \leq \\ & \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cdot \left\{ \|f - g\|_{H_{q,R}} + n^{-j} \|g_a^{(j)}\|_{H_{q,R}} \right\} \leq \\ & \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \mathcal{K}_j\left(f, \frac{1}{n}\right)_{H_{q,R}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Из формулы (2) и неравенства (14) следует оценка сверху для наилучшего приближения функции $f \in H_{q,R}(\mathcal{K})$ подпространством \mathcal{P}_{n-1} алгебраических полиномов степени $\leq n-1$ в круге U_R :

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}} \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \mathcal{K}_j\left(f, \frac{1}{n}\right)_{H_{q,R}} \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \mathcal{K}\left(\frac{1}{n}\right). \tag{15}$$

Пользуясь определением колмогоровского n -поперечника из (15), получаем оценку сверху

$$d_n(H_{q,R}(\mathcal{K}), H_{q,\rho}) \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \mathcal{K}\left(\frac{1}{n}\right). \tag{16}$$

Для получения оценки снизу бернштейновского n -поперечника введём в рассмотрение $(n+1)$ -мерный шар в $H_{q,\rho}$:

$$\mathcal{B} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \leq \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \mathcal{K}\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

и докажем включение $\mathcal{B} \in H_{q,R}(\mathcal{K})$. Из (2) для любого полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ следует неравенство

$$\mathcal{K}_{j,q}(p_n, \nu) \leq \min \left\{ \|p_n\|_{H_{q,\rho}}, \nu^j \|(p_n)_a^{(j)}\|_{H_{q,\rho}} \right\}. \tag{17}$$

Известно [22, с.352], что для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ при любом $R \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ выполняется неравенство

$$\|p_n\|_{H_{q,R}} \leq R^n \|p_n\|_{H_q}, \tag{18}$$

а также имеет место неравенство

$$\| p_n \|_{H_q} \leq \rho^{-n} \| p_n \|_{H_{q,\rho}}, \quad 0 < \rho < 1, \tag{19}$$

полученное Е.Хиллом, Г.Сегё, Я.Д.Тамаркиным [24]. Из (18) и (19) в качестве следствия получаем

$$\| p_n \|_{H_{q,R}} \leq \left(\frac{R}{\rho} \right)^n \cdot \| p_n \|_{H_{q,\rho}}. \tag{20}$$

Пусть сначала $m \leq n$. Тогда на основании (17) и (20) для любого $p_n \in \mathcal{B}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j \left(p_n, \frac{1}{m} \right)_{H_{q,R}} &\leq \| p_n \|_{H_{q,R}} \leq \left(\frac{R}{\rho} \right)^n \| p_n \|_{H_{q,\rho}} \leq \\ &\leq \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right) \leq \mathcal{K} \left(\frac{1}{m} \right). \end{aligned} \tag{21}$$

Если же $m \geq n$, то на основании тех же соображений, неравенства С.Н.Бернштейна [22]

$$\| (p_n)_a^{(j)} \|_{H_{q,R}} \leq \left(\frac{R}{\rho} \right)^n n^j \| p_n \|_{H_{q,\rho}}$$

и условия (4) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j \left(p_n, \frac{1}{m} \right)_{H_{q,R}} &\leq \frac{1}{m^j} \| (p_n)_a^{(j)} \|_{H_{q,R}} \leq \\ &\leq \left(\frac{m}{n} \right)^j \left(\frac{R}{\rho} \right)^n \| p_n \|_{H_{q,\rho}} \leq \left(\frac{n}{m} \right)^j \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right) \leq \\ &\leq \frac{n}{m} \cdot \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right) \leq \mathcal{K} \left(\frac{1}{m} \right). \end{aligned} \tag{22}$$

Таким образом, на основании (21) и (22) включение $\mathcal{B} \in H_{q,\rho}(\mathcal{K})$ доказано. Следовательно

$$b_n(H_{q,R}(\mathcal{K}), H_{q,\rho}) \geq \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right). \tag{23}$$

Из неравенств (16) и (23) следует равенство (5), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Отметим, что условию (4) теоремы 1 удовлетворяет, например, функция вида $\mathcal{K}(t) = Mt^\alpha$, где $M > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$ [25].

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. В условиях теоремы 1 справедливо экстремальное равенство

$$\sup_{f \in H_{q,R}} \frac{E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}}}{\mathcal{K}_j \left(f, \frac{1}{n} \right)_{H_{q,R}}} = \left(\frac{\rho}{R} \right)^n.$$

Теорема 2. Пусть мажоранта $\mathcal{K}(t)$ удовлетворяет условию (4). Тогда, при любых $n \in \mathbb{N}$, $R \geq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} b_n(H_{q,R}(\mathcal{K}); B_{q,\gamma}) &= d_n(H_{q,R}(\mathcal{K}); B_{q,\gamma}) = \\ &= R^{-n} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right). \end{aligned} \tag{24}$$

В частности, из (24) при $\gamma(\rho) \equiv 1$, получаем

$$\begin{aligned} b_n(H_{q,R}(\mathcal{K}); B_q) &= d_n(H_{q,R}(\mathcal{K}); B_q) = \\ &= R^{-n} (nq + 2)^{-1/q} \cdot \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Учитывая, что

$$V_{n-1,\rho/R}(f, z) + Q_{n-1,j,\rho/R}(g, z) \in \mathcal{P}_{n-1},$$

неравенство (14) запишем в виде

$$\|f(\rho \cdot) - p_{n-1}(\rho \cdot)\|_{H_q} \leq \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right)$$

или что то же

$$\|f - p_{n-1}\|_{H_{q,\rho}} \leq \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right).$$

Последнее неравенство в силу (1) примет вид

$$M_q(f - p_{n-1}, \rho) \leq \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right)_{H_{q,R}}.$$

Полученное неравенство возведём в степень q ($1 \leq q < \infty$), умножим на $\rho\gamma(\rho)$ и проинтегрируем по ρ на отрезке $[0,1]$ и, после возведения в степень $1/q$ ($1 \leq q < \infty$), получаем

$$\left(\int_0^1 \rho\gamma(\rho) M_q^q(f - p_{n-1}, \rho) d\rho \right)^{1/q} \leq \tag{25}$$

$$\leq R^{-n} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right)_{H_{q,R}}$$

или

$$\| f - p_{n-1} \|_{B_{q,\gamma}} \leq R^{-n} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right).$$

Отсюда сразу вытекает, что

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} \leq R^{-n} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right). \tag{26}$$

Из (26) получаем оценку сверху колмогоровского n -поперечника

$$d_n(H_{q,R}(\mathcal{K}), B_{q,\gamma}) \leq R^{-n} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right). \tag{27}$$

Неравенство (20) перепишем в виде

$$\rho^n \| p_n \|_{H_{q,R}} \leq R^n M(p_n, \rho).$$

Отсюда как и выше получаем

$$\left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \| p_n \|_{H_{q,R}} \leq R^n \| p_n \|_{B_{q,\gamma}},$$

откуда

$$\| p_n \|_{H_{q,R}} \leq R^n \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} \| p_n \|_{B_{q,\gamma}}. \tag{28}$$

Пусть $m \leq n$. Тогда на основании (17) и (28) для произвольной $p_n \in \mathcal{B}_1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j \left(p_n, \frac{1}{m} \right) &\leq \| p_n \|_{H_{q,R}} \leq R^n \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} \| p_n \|_{B_{q,\gamma}} \leq \\ &\leq R^n \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} R^{-n} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right) \leq \\ &\leq \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right) \leq \mathcal{K} \left(\frac{1}{m} \right). \end{aligned} \tag{29}$$

Пусть теперь $m \geq n$. Тогда из неравенства типа Бернштейна

$$\| (p_n)_a^{(j)} \|_{H_{q,R}} \leq R^n n^j \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} \| p_n \|_{B_{q,\gamma}}$$

и условия (4) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j \left(p_n, \frac{1}{m} \right)_{H_{q,R}} &\leq \frac{1}{m^j} \| (p_n)_a^{(j)} \|_{H_{q,R}} \leq \\ &\leq \left(\frac{n}{m} \right)^j R^n \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} R^{-n} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right) = \\ &= \left(\frac{n}{m} \right)^j \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right) \leq \frac{n}{m} \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right) \leq \mathcal{K} \left(\frac{1}{m} \right). \end{aligned} \tag{30}$$

Из (29) и (30) вытекает включение $\mathcal{A} \subset H_{q,R}(\mathcal{K})$ и в силу определения бернштейновского n -поперечника имеет место оценка снизу

$$b_n \left(H_{q,R}(\mathcal{K}); B_{q,\gamma} \right) \geq R^{-n} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right). \tag{31}$$

Требуемое равенство (24) получаем из сопоставления оценки сверху (27) с оценкой снизу (31). Теорема 2 доказана.

Следствие 2. Из неравенства (15) вытекает равенство

$$\sup_{f \in H_{q,R}(\mathcal{K})} \frac{E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}}}{\mathcal{K}_j(f, 1/n)_{H_{q,R}}} = R^{-n} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}.$$

Поступило 15.05.2024 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций. – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, т.22, №5, с.631-640.
2. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. – УМН, 1960, т.15, №3, с.81-120.
3. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1967, т.1, №2, с.155-162.
4. Двейрин М.З. Поперечники и ϵ -энтропия классов функций, аналитических в единичном круге. – Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1975, т.23, с.32-46.
5. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций. – Мат. заметки, 1977, т.22, №2, с.285-295.

6. Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций. – Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наукова думка, 1983, с.63-73.
7. Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшее приближение в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций. – Мат. заметки, 1986, т.40, №3, с.341-351.
8. Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространствах Харди H_2 . – Укр. матем. журн., 1989, т.41, №6, с.799-803.
9. Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из \mathbb{C}^n . – УМН, 1990, т.45, №5, с.197-198.
10. Fisher S.D., Stessin M.I. The n -width of the unit ball of H_q . – J. Approx. Theory, 1991, vol.67, №3, pp.345-356.
11. Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций. – Матем. заметки, 1995, т.57, №1, с.30-39.
12. Вакарчук С.Б. Точные значения поперечников некоторых функциональных классов. – Укр. матем. журн., 1996, т.48, №1, с.133-135.
13. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 . – Матем. заметки, 2000, т.68, №5, с.796-800.
14. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций. – Докл. РАН, 2002, т.382, №6, с.747-749.
15. Вакарчук С.Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения. – Матем. заметки, 2002, т.72, вып.5, с.665-669.
16. Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости. – Укр. матем. журнал, 2004, т.56, №9, с.1155-1171.
17. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространстве Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$. – Матем. заметки, 2009, т.85, вып.3, с.323-329.
18. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге. – Матем. сборник, 2010, т.201, №8, с.3-22.
19. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана. – Докл. РАН, 2002, т.383, №2, с.171-174.
20. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980.
21. Schumaker L.L. Spline Functions. Basic Theory.– New York: Wiley, 1981.
22. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987.
23. Pinkus A. n -Widths by Approximation Theory. – Berlin: Springer. 1985.
24. Шихалиев Н.И. Неравенства типа С.Н.Бернштейна – А.А.Маркова для аналитических функций. – Докл. АН АзССР, 1975, т.31, №8, с.9-14.
25. Вакарчук С.Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1999, т.65, №2, с.186-193.

Н.О.Гадоев

 **\mathcal{K} -ФУНКЦИОНАЛ ВА n -БАЪЗЕ СИНФ ФУНКЦИЯ ДАР ФАЗОИ ХАРДИ ВА
ФАЗОИ ВАЗНДОРИ БЕРГМАН***Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар фазои Харди ва фазои вазндори Бергман қиматҳои аниқи n -кутӯҳи бернштейнӣ ва колмогоровӣ барои баъзе синфҳои функсияҳои дар давра аналитикӣ, ки бо \mathcal{K} -функсионалҳои Петре дода шудаанд, ёфта шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин, фазои Харди, фазои вазндори Бергман, \mathcal{K} -функсионалҳо.

N.O.Gadoev

 **\mathcal{K} -FUNCTIONALS AND THE VALUE OF n -WIDTHS OF SOME CLASSES
FUNCTIONS IN HARDY SPACE AND WEIGHTED BERGMAN SPACES***Tajik National University*

In Hardy spaces and weighted Bergman spaces, exact values of Bernstein and Kolmogorov n -widths of some classes of functions analytic in the disk, defined by \mathcal{K} -functionals Petre.

Key words: best approximation, Hardy spaces, weighted Bergman space, \mathcal{K} -functionals.

Сведения об авторах:

1. Гадоев Некруз Одилхонович – Таджикский национальный университет, докторант PhD кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений.

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А.А.Шабозова

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 30.04.2024 г.)

В работе найдены точные значения некоторых известных n -поперечников классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2 , заданных посредством характеристик гладкости $\Lambda_m(f)$ и мажорант Φ , удовлетворяющих некоторым ограничениям.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, характеристика гладкости, пространство Бергмана, n -поперечники.

1. Введение. Экстремальные задачи наилучших полиномиальных приближений аналитических в единичном круге функций в различных банаховых пространствах изучены, например, в работах [1–14]. В настоящей работе рассматривается задача нахождения точных значений известных n -поперечников некоторых классов аналитических в круге $U := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ функций в пространстве Бергмана $B_2 := B_2(U)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ – элемент площади. Различные аспекты теории аппроксимации функций $f \in B_2$ приведены в монографии [15, гл. III, с. 196–278]. В работах [16–18] изучается задача отыскания точной константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина между величиной наилучшего полиномиального приближения функций $f \in B_2$ и конкретными модификациями модулей непрерывности. Здесь мы продолжаем наши исследования, начатые в [14]. Будем использовать некоторые результаты из этой работы и обозначения, принятые в ней, в частности характеристику гладкости, введенную К.В.Руновским [19] и детально изученную С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [20].

Представим норму (1) в более удобном для нас виде:

$$\|f\|_{B_2} := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Символом

$$\Delta_h^m(f; \rho, \tau, h) := \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(\rho e^{i(\tau+kh)})$$

обозначим конечную разность m -го порядка функции $f \in B_2$ по аргументу t в точке τ с шагом h , а через

$$\|\Delta_h^m(f)\|_{B_2} := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_h^m(f; \rho, \tau, h)|^2 \rho d\rho d\tau \right)^{1/2} \quad (3)$$

обозначим норму разности m -го порядка функции $f \in B_2$. Равенством

$$\omega_m(f, \tau)_{B_2} := \sup \left\{ \|\Delta_h^m(f)\|_{B_2} : |h| \leq \tau \right\} \quad (4)$$

определим модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in B_2$.

Под усредненной характеристикой гладкости функции $f \in B_2$ будем понимать величину [19]

$$\Lambda_m(f, t) := \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^m(f)\|_{B_2}^2 dh \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Легко заметить, что

$$\Lambda_m(f, t) \leq \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^2(f, h)_{B_2} dh \right)^{1/2} \leq \omega_m(f, t)_{B_2}.$$

Введем обозначение

$$J_{\mu, m}(t) = \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos \mu\tau)^m d\tau \right\}^{1/2}, \quad t > 0. \quad (6)$$

Очевидно, что при любых $\mu, m \in \mathbb{N}$ и $t > 0$

$$J_{\mu, m}(t) = J_{1, m}(\mu t). \quad (7)$$

Пользуясь равенствами (3), (6) и (7) для произвольной функции $f \in B_2$, получаем явный вид выражения (5):

$$\Lambda_m^2(f, t) = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} J_{1, m}(kh). \quad (8)$$

Пусть \mathcal{P}_n – множество всех полиномов степени $\leq n$ с комплексными коэффициентами. Величину

$$E_n(f) := E(f, \mathcal{P}_n)_{B_2} = \inf \left\{ \|f - p\|_{B_2} : p \in \mathcal{P}_n \right\} \tag{9}$$

называют наилучшим полиномиальным приближением функции $f \in B_2$ элементами множества \mathcal{P}_n . Известно [15, с.203], что для произвольной функции $f \in B_2$

$$E_{n-1}(f) = \|f - T_{n-1}(f)\|_{B_2} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \tag{10}$$

где

$$T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

– частная сумма n -го порядка ряда Маклорена

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k. \tag{11}$$

Для любых $r \in \mathbb{Z}_+$ через $f^{(r)}(z) = d^r f / dz^r$ ($f^{(0)} \equiv f$) обозначим производную r -го порядка функции $f \in B_2$. Так как $f \in B_2$ аналитична в круге U , то из разложения f в ряд (11) следует, что

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \tag{12}$$

где

$$\alpha_{k,r} := k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-r+1), \quad k \geq r, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad \alpha_{k,0} = 1, \quad \alpha_{k,1} = k.$$

Далее полагаем

$$B_2^{(r)} := \left\{ f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_{B_2} < \infty \right\}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad B_2^{(0)} \equiv B_2.$$

Воспользовавшись равенствами (8) и (12), при любых $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ получим тождество

$$\Lambda_m^2(f^{(r)}, t) = 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} J_{1,m}((k-r)t), \quad t > 0, \quad f \in B_2^{(r)}. \tag{13}$$

В [14] доказано, что для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ справедливы неулучшаемые неравенства:

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{2^{m/2} \cdot J_{1,m}((n-r)t)} \cdot \Lambda_m(f^{(r)}, t), \tag{14}$$

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\left(\int_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/p}}{\sqrt{2} \left(\int_0^h (1 - \text{sinc}(n-r)t)^{p/2} dt \right)^{1/p}}, \quad (15)$$

где

$$\text{sinc} t := \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{если } t \neq 0; \\ 1, & \text{если } t = 0 \end{cases}.$$

Оба неравенства (14) и (15) точны для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$ ($n > r$). Неравенства (14) и (15) являются нашими основными инструментами для получения точных значений n -поперечников введенных далее классов функций в пространстве B_2 . Поскольку в настоящей работе используется только норма пространства B_2 , то всюду далее нижний индекс у нормы $\|\cdot\|_{B_2}$ будем опускать.

2. Определение n -поперечников и классы функций. Для формулировки дальнейших результатов напомним необходимые понятия и определения из теории n -поперечников (см., например, [21, 22]). Пусть X – произвольное банахово пространство, а $S := \{f : \|f\| \leq 1\}$ – единичный шар в X ; \mathcal{M} – выпуклое центрально-симметричное подмножество из X ; $\mathcal{L}_n \subset X$ – n -мерное подпространство. Величины

$$b_n(\mathcal{M}; X) = \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathcal{M} \} : \mathcal{L}_{n+1} \subset X \right\},$$

$$d_n(\mathcal{M}; X) = \inf \left\{ \sup \{ \inf \{ \|f - \varphi\| : \varphi \in \mathcal{L}_n \} : f \in \mathcal{M} \} : \mathcal{L}_n \subset X \right\},$$

$$d^n(\mathcal{M}; X) = \inf \left\{ \sup \{ \|f\| : f \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset X \right\}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *гельфандовским n -поперечниками* подмножества $\mathcal{M} \in X$.

Указанные n -поперечники монотонны по n и связаны соотношениями (см., например, [21, 22])

$$b_n(\mathcal{M}; X) \leq d^n(\mathcal{M}; X) \leq d_n(\mathcal{M}; X). \quad (16)$$

Рассматриваются также проекционный и линейный n -поперечники, но в гильбертовом пространстве они совпадают с $d_n(\cdot)$ [21, 22].

Введем теперь следующие классы функций. Пусть $\Psi(t)$, где $0 \leq t \leq 2\pi$, есть непрерывная возрастающая функция, такая, что $\Psi(0) = 0$. Всюду далее будем ее называть мажорантой.

Символом $W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Psi)$ ($r \in \mathbb{Z}_+, 0 < p \leq \infty$), где Ψ – некоторая мажоранта, обозначим класс функций $f \in B^{(r)}$, у которых производные r -го порядка $f^{(r)}$ при любом $h \in (0, 2\pi]$ удовлетворяют условию

$$\left(\frac{1}{h} \int_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/p} \leq \Psi(h).$$

Теорема. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+, 0 < p \leq \infty$, $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников перечисленных выше. Если для любых $h \in (0, 2\pi], \mu > 0$ и $n \in \mathbb{N}, (n > r)$ мажоранта Ψ удовлетворяет условию

$$\frac{\mu \Psi^p(\mu u)}{\Psi^p(u)} \geq \frac{\int_0^{\mu\pi} (1 - \text{sinct})^{p/2} dt}{\int_0^\pi (1 - \text{sinct})^{p/2} dt}, \tag{17}$$

то имеют место равенства

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Psi), B_2) &= \mathcal{E}_{n-1}(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Psi)) = \\ &= \frac{\pi^{1/p}}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Psi(\pi/(n-r))}{\left(\int_0^\pi (1 - \text{sinct})^{p/2} dt \right)^{1/p}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство. Полагая в равенстве (15) $h = \pi/(n-r)$ и учитывая определения класса $W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Psi)$ имеем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &\leq \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{n-r}{\pi} \int_0^{\pi/(n-r)} \Lambda_1^p(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/p}}{\left(\frac{n-r}{\pi} \int_0^{\pi/(n-r)} (1 - \text{sinc}(n-r)t)^{p/2} dt \right)^{1/p}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Psi(\pi/(n-r))}{\left(\int_0^\pi (1 - \text{sinct})^{p/2} dt \right)^{1/p}}. \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к верхней грани по всем функциям $f \in W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Psi)$ и учитывая неравенство (16), между n -поперечниками, запишем оценку сверху

$$\lambda_n(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Psi), B_2) \leq \mathcal{E}_{n-1}(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Psi)) \leq$$

$$\leq \frac{\pi^{1/p}}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Psi(\pi/(n-r))}{\left(\int_0^\pi (1-\operatorname{sinct})^{p/2}\right)^{1/p}}. \tag{19}$$

Как и в предыдущем пункте, для получения оценки снизу рассматриваемых n -поперечников в подпространстве алгебраических полиномов \mathcal{P}_n рассмотрим $(n+1)$ -мерную сферу

$$\mathbb{S}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\| = \frac{\pi^{1/p}}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Psi(n/(n-r))}{\left(\int_0^\pi (1-\operatorname{sinct})^{p/2}\right)^{1/p}} \right\}$$

и покажем, что \mathbb{S}_{n+1} принадлежит классу $W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Psi)$. Для этого заметим, что из неравенства (13) при $m = 1$ с учетом равенства $J_{1,1}((n-r)t) = (1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^{1/2}$, вытекает соотношение

$$\Lambda_1(p_n^{(r)}, t) \leq \sqrt{2}\alpha_{n,r} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} (1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^{1/2} \|p_n\|. \tag{20}$$

Обе части неравенства (20) возведём в степень p ($0 < p \leq \infty$) и проинтегрируем полученное соотношение по t в пределах от 0 до μu , затем в интеграле расположенном в правой части неравенства, произведём замену переменной $(n-r)t = v$, а также заменим норму полинома $p_n \in \mathbb{S}_{n+1}$ её значением

$$\begin{aligned} \int_0^{\mu u} \Lambda_1^p(p_n^{(r)}, t) dt &\leq \pi \cdot \Psi^p\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \cdot \frac{\int_0^{\mu u} (1-\operatorname{sinc}(n-r)t)^{p/2} dt}{\int_0^\pi (1-\operatorname{sinct})^{p/2} dt} = \\ &= \frac{\pi}{n-r} \Psi^p\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \frac{\int_0^{\mu(n-r)u} (1-\operatorname{sinct})^{p/2} dt}{\int_0^\pi (1-\operatorname{sinct})^{p/2} dt}. \end{aligned} \tag{21}$$

Введя обозначение $u = \pi / (n-r)$ в правой части неравенства (21) и используя условие (17), приходим к неравенству

$$\int_0^{\mu u} \Lambda_1^p(p_n^{(r)}, t) dt \leq u \cdot \Psi^p(u) \cdot \frac{\int_0^{\mu\pi} (1-\operatorname{sinct})^{p/2} dt}{\int_0^\pi (1-\operatorname{sinct})^{p/2} dt} \leq \mu u \Psi^p(\mu u)$$

или что то же

$$\left(\frac{1}{\mu u} \int_0^{\mu u} \Lambda_1^p(p_n^{(r)}, t) dt \right)^{1/p} \leq \Psi(\mu u),$$

а это означает, что $\mathbb{S}_{n+1} \in W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Psi)$. Но тогда в силу определения бернштейновского n -поперечника и соотношения (16) запишем оценку снизу рассматриваемых экстремальных характеристик

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Psi), B_2) &\geq b_n(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Psi), B_2) \geq b_n(\mathbb{S}_{n+1}, B_2) \geq \\ &\geq \frac{\pi^{1/p}}{\sqrt{2}\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\Psi(n/(n-r))}{\left(\int_0^\pi (1-\operatorname{sinct})^{p/2} dt \right)^{1/p}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Сопоставляя неравенства (19) и (20) получим требуемое равенство (18). Далее покажем, что множество мажорант, удовлетворяющих условию (17), непусто. Для этого рассмотрим, например, функцию $\Psi_*(t) := t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha := \pi \left(\int_0^\pi (1-\operatorname{sinct})^{p/2} dt \right)^{-1} - 1. \tag{23}$$

Определим границы изменения числа α . При получении оценки сверху воспользуемся неравенством [20, с.234]

$$1 - \operatorname{sinct} > \left(\frac{t}{\pi} \right)^2, \quad t \in (0, \pi).$$

Имеем

$$\alpha = \frac{\pi}{\int_0^\pi (1-\operatorname{sinct})^{\pi/2} dt} - 1 < \frac{\pi}{\int_0^\pi (t/\pi)^p dt} - 1 = p. \tag{24}$$

Из геометрических соображений следует, что для любого $t \in (0, \pi)$ имеет место неравенство

$$\operatorname{sinct} > 1 - t/n \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \operatorname{sinct} < t/\pi.$$

Поэтому

$$\alpha > \frac{\pi}{\int_0^\pi (t/n)^{p/2} dt} - 1 = \frac{p}{2}. \tag{25}$$

Из неравенств (24) и (25) получаем: $p/2 < \alpha < p$.

Для функции $\Psi_*(t) := t^{\alpha/2}$ условие (17) примет вид

$$\mu^{\alpha+1} \geq \frac{\int_0^{\mu\pi} (1 - \sin ct)^{p/2} dt}{\int_0^{\pi} (1 - \sin ct)^{p/2} dt}. \tag{26}$$

В [20, с.233] установлена справедливость неравенства

$$\left(\frac{n\tau}{\pi}\right)^\gamma \geq \frac{\int_0^{n\tau} (1 - \sin ct)^{p/2} dt}{\int_0^{\pi} (1 - \sin ct)^{p/2} dt}, \quad \tau \in (0, 2\pi) \tag{27}$$

при $\gamma = \pi \left(\int_0^{\pi} (1 - \sin ct)^{p/2} dt\right)^{-1}$.

Если в обеих частях неравенства (27) полагать $n\tau = \mu\pi$ ($\mu > 0$), то приходим к неравенству

$$\mu^\gamma \geq \frac{\int_0^{\mu\pi} (1 - \sin ct)^{p/2} dt}{\int_0^{\pi} (1 - \sin ct)^{p/2} dt} \quad (p/2 + 1 < \gamma \leq p + 1). \tag{28}$$

Из (28) при $\gamma = \alpha + 1$ получаем неравенство (26), которое верно для значений α , определённой в равенстве (23), чем и завершаем доказательство теоремы.

Поступило 02.05.2024 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций. – Изв. АН СССР, 1958, т.22, №5, с.631-640.
2. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. – Успехи матем. науки. 1960, т.15, №3, с.81-120.
3. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов функций. – Матем. заметки, 1967, т.1, №2, с.155-162.
4. Двейрин М.З. Поперечники и ϵ -энтропия классов функций, аналитических в единичном круге. – Теория функций, функц. анализ и прил., 1975, т.23, с.32-46.
5. Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшее приближение в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций. – Матем. заметки, 1986, т.40, №3, с.341-351.
6. Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 . – Укр. матем. журн., 1989, т.41, №26, с.799-802.

7. Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из \mathbb{C}^n . – Успехи матем. науки, 1990, т.45, №5, с.197-198.
8. Fisher S.D., Stessin M.I. The n -width of the unit ball of H^n . – J. Approx. Theory, 1991, v.67, №3, pp.347-356.
9. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций. – Докл. РАН, 2002, т.382, №6, с.747-749.
10. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди. – Тр. ИММ УрО РАН, 2021, т.27, №4, с.239-254.
11. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана. – Докл. РАН, 2002, т.383, №2, с.171-174.
12. Шабозов М.Ш., Хуромонов Х.М. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана. – Изв. вузов. Математика, 2020, №2, с.74-92.
13. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$. – ДАН РТ, 2007, т.50, №4, с.466-469.
14. Шабозов М.Ш., Кадамшоев Н.У. Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана. – Матем. заметки, 2021, т.110, №2, с.266-281.
15. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.-Л.: Наука, 1964.
16. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$. – Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 2010, т.50, №6, с.999-1004.
17. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n -поперечников. – Матем. заметки, 2018, т.103, №4, с.617-631.
18. Шабозов М.Ш. Саидусайнов М.С. Среднеквадратичное приближение функции комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам. – Тр. ИММ УрО РАН, 2019, т.25, №2, с.258-272.
19. Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p , $0 < p < 1$. – Матем. сб., 1994, т.185, №8, с.81-102.
20. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций. – Матем. заметки, 2016, т.99, №2, с.215-238.
21. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1976.
22. Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. – Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag, 1985.

М.Ш.Шабозов, А.А.Шабозова

ҚИМАТҲОИ АНИҚИ ҚУТРҲОИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ ФУНКСИЯҲО ДАР ФАЗОИ БЕРГМАН

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола қиматҳои аниқи баъзе n -қутрҳои синфҳои функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ, ки ба фазои Бергман B_2 таалуқ дошта ба воситаи тавсифи суфтагии $\Lambda_m(f)$ ва мажоранти Φ дода шудаанд, ёфта шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии полиномиалии беҳтарин, тавсифи суфтагӣ, фазои Бергман, n -қутр.

M.Sh.Shabozov, A.A.Shabozova

EXACT VALUES OF THE WITHDRAWALS OF SOME CLASSES OF FUNCTIONS IN BERGMAN SPACE

Tajik National University

The work found the exact values of some known n -widths of classes of functions analytic in the unit disk belonging to the Bergman space B_2 , defined by the smoothness characteristics $\Lambda_m(f)$ and majorants Φ , satisfying some restrictions.

Key words: best polynomial approximation, smoothness characteristic, Bergman space, n -widths.

Сведения об авторе:

1. Шабозова Адолат Аъзамовна – кандидат физ.-мат. наук, Таджикский национальный университет, старший преподаватель кафедры математического анализа и теории функций. E-mail: shabozova91@mail.ru.

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

М.И. Джангибеков

ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В L_2

*Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева**(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 30.04.2024 г.)*

Найдены точные значения различных n -поперечников некоторых классов периодических дифференцируемых функций, у которых усреднённое значение модуля непрерывности r -й производной в метрике L_2 ограничено сверху заданной мажорантой.

Ключевые слова: среднеквадратическое приближение, модель непрерывности, n -поперечник.

1. Введение. Задача вычисления точных значений различных n -поперечников классов дифференцируемых периодических функций в пространстве L_2 рассмотрена, например, в работах [1-16]. Здесь мы, опираясь на нашу работу [17], продолжим исследование в этом направлении и вычислим точные значения некоторых классов периодических дифференцируемых функций, у которых усреднённое значений модуль непрерывности r -й производной ограничено сверху заданной мажорантой.

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых по Лебегу 2π -периодических функций, у которых норма

$$\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Обозначим через \mathcal{T}_{2n-1} – множество тригонометрических полиномов вида

$$T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

порядка $n-1$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

величина её наилучшего среднеквадратического приближения элементами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ равна

Адрес для корреспонденции: Джангибеков Мирзошо Исломбаевич. 736000, Республика Таджикистан, г.Хорог, ул. Ш.Шотемура, 109, Хорогский государственный университет. E-mail: ambarkuh04@list.ru.

$$\begin{aligned}
 E_{n-1}(f) &:= \inf \{ \| f - T_{n-1} \| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1} \} = \\
 &= \| f - S_{n-1}(f) \| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right\}^{1/2}, \tag{1}
 \end{aligned}$$

где

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

– частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2$.

Модуль непрерывности функции $f \in L_2$, определим как обычно посредством равенства

$$\omega(f, t) := \sup \{ \| f(\cdot + h) - f(\cdot) \| : |h| \leq t \}.$$

Через $L_2^{(r)}$, ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} = L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, производные $(r-1)$ -го порядка которых абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)} \in L_2$.

В работе [1] Л.В.Тайков, в частности, доказал, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \text{const}}} \frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f)}{\int_0^h \omega^2(f^{(r)}, t) dt} = \frac{n}{2(nh - \sin nh)}, \quad 0 < nh \leq \pi/2. \tag{2}$$

Прежде чем сформулировать основные результаты работы, напомним необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем.

Пусть S – единичный шар в L_2 , \mathfrak{M} – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 , $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство, $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n , $\mathcal{L} : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, приводящий элементы пространства L_2 в Λ_n , $\mathcal{L}^\perp : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования пространства L_2 на подпространство Λ_n . Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf \{ \sup \{ \inf \{ \| f - g \| : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda_n \subset L_2 \},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \{ \inf \{ \sup \{ \| f - \mathcal{L} f \| : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L} L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \{ \sup \{ \| f \| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\| : f \in \mathfrak{M} \right\} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n -поперечниками*. Поскольку L_2 является гильбертовым пространством, то справедливы следующие соотношения между перечисленными n -поперечниками (см., например, [2, 3]):

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \tag{3}$$

Пусть $\Phi(u)$, $u \geq 0$ – произвольная возрастающая выпуклая вниз функция $\lim\{\Phi(h), h \rightarrow 0\} = \Phi(0) = 0$. Для произвольной $h \in \mathbb{R}_+$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ определим класс функций

$$W^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(f^{(r)}, u) du \leq \Phi(h) \right\}.$$

Теорема 1. Пусть при некотором $n \in \mathbb{N}$ мажорирующая функция $\Phi(h)$ удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2n)} \geq \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \begin{cases} 1 - \frac{\sin nh}{nh}, & \text{при } 0 < nh \leq \pi; \\ 2 - \frac{\pi}{nh}, & \text{при } nh \geq \pi. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда для этого n выполняется равенство

$$\lambda_{2n-1}(W^{(r)}(\Phi), L_2) = E_{n-1}(W^{(r)}(\Phi)) = \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r}, \tag{5}$$

где λ_n – любой из n -поперечников: бернштейновский $b_n(\cdot)$, колмогоровский $d_n(\cdot)$, гельфандовский $d^n(\cdot)$, линейный $\delta_n(\cdot)$, проекционный $\Pi_n(\cdot)$, $E_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M}\}$ – наилучшее приближение класса $\mathfrak{M} \subset L_2$ множеством \mathcal{T}_{2n-1} . Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (4) не пусто.

Доказательство. Из равенство (2) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \left\{ \frac{nh}{2(nh - \sin nh)} \right\}^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r}. \tag{6}$$

Полагая в полученном неравенстве $h = \pi / (2n)$ и учитывая определение класса $W^{(r)}(\Phi)$, получаем

$$E_{n-1}(f) \leq \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r}. \tag{7}$$

Учитывая соотношения между n -поперечниками [13]

$$b_n(\cdot) \leq d^n(\cdot) \leq d_n(\cdot) = \delta_n(\cdot) = \Pi_n(\cdot),$$

в гильбертовом пространстве из (7) имеем

$$\lambda_{2n-1}(W^{(r)}(\Phi), L_2) \leq E_{n-1}(W^{(r)}(\Phi)) \leq \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r}, \quad (8)$$

Рассмотрим в L_2 $(n+1)$ -мерный шар

$$\mathbb{B}_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \leq \left[\frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right]^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r} \right\}$$

и покажем, что $\mathbb{B}_{2n+1} \subset W^{(r)}(\Phi)$. Для этого достаточно показать, что для произвольного полинома $T_n \in \mathbb{B}_{2n+1}$ при любом $h \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(T_n^{(r)}, t) dt \leq \Phi(h). \quad (9)$$

Известно [1], что для произвольного тригонометрического полинома $T_n \in \mathcal{T}_{2n+1}$

$$\omega^2(T_n^{(r)}, t) \leq 2(1 - \cos nt)_* n^r \cdot \|T_n\|^2, \quad (10)$$

где

$$(1 - \cos t)_* := \{1 - \cos t, \text{ если } 0 < t \leq \pi; 2, \text{ если } t > \pi\}. \quad (11)$$

В силу первого из ограничений (4) при $0 < nh \leq \pi$ из (10), учитывая (11), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(T_n^{(r)}, t) dt &\leq 2n^r \cdot \|T_n\|^2 \cdot \frac{1}{h} \int_0^h (1 - \cos nt) dt \leq \\ &\leq \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right) \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \Phi(h). \end{aligned} \quad (12)$$

Если же $nh > \pi$, то, используя второе неравенство из ограничения (4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(T_n^{(r)}, t) dt &\leq 2n^r \cdot \|T_n\|^2 \cdot \frac{1}{h} \left\{ \int_0^{\pi/n} (1 - \cos nt) dt + 2 \left(h - \frac{\pi}{n} \right) \right\} \leq \\ &\leq \frac{\pi}{\pi-2} \left(2 - \frac{\pi}{nh}\right) \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \Phi(h). \end{aligned} \quad (13)$$

Из неравенств (12) и (13) следует (9) и этим включение $\mathbb{B}_{2n+1} \subset W^{(r)}(\Phi)$ доказано. В силу определения бернштейновского n -поперечника запишем оценку снизу

$$b_n(W^{(r)}(\Phi), L_2) \geq b_n(\mathbb{B}_{2n+1}, L_2) \leq \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r}, \tag{14}$$

Требуемое неравенство (4) получаем из сопоставлении неравенств (8) и (14).

Докажем, что функция $\Phi(h) = h^\alpha$, где $\alpha = 2/(\pi-2)$ удовлетворяет ограничениям (4). Для этого, полагая $2nh = \pi\mu$, условие (4) запишем в эквивалентной форме

$$\mu^\alpha \geq \frac{\pi}{\pi-2} \begin{cases} 1 - \frac{2}{\mu\pi} \sin \frac{\mu\pi}{2}, & \text{при } 0 < \mu \leq 2, \\ 2\left(1 - \frac{1}{\mu}\right), & \text{при } \mu > 2. \end{cases}$$

Обе части полученного неравенства умножим на μ :

$$\mu^{\alpha+1} \geq \frac{\pi}{\pi-2} \begin{cases} \mu - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\mu\pi}{2}, & \text{при } 0 < \mu \leq 2, \\ 2(\mu-1), & \text{при } \mu > 2. \end{cases} \tag{15}$$

Из результата [1, стр.437-348] вытекает, что неравенство

$$\mu^\beta \geq \frac{\pi}{\pi-2} \begin{cases} \mu - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\mu\pi}{2}, & \text{при } 0 < \mu \leq 2, \\ 2(\mu-1), & \text{при } \mu > 2. \end{cases}$$

выполняется при $\beta = \pi/(\pi-2)$, а значит неравенство (15) имеет место при $\beta = \alpha + 1 = \pi/(\pi-2)$, то есть при $\alpha = 2/(\pi-2)$, чем и завершаем доказательство теоремы 1.

2. Совместное приближение класса $W^{(r)}(\Phi)$. В предыдущем пункте, в частности, мы доказали, что наилучшее приближение класса $W^{(r)}(\Phi)$ подпространством \mathcal{T}_{2n-1} в метрике L_2 равно

$$E_{n-1}(W^{(r)}(\Phi)) = E(W^{(r)}(\Phi), \mathcal{T}_{2n-1}) = \left\{ \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r}. \tag{16}$$

Здесь приводим обобщение равенства (16).

Поскольку для функции $f \in L_2^{(r)}$, наравне с функциями f и $f^{(r)}$, последовательные производные $f^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, r-1$) также принадлежат пространству L_2 [13], то представляет интерес отыскание точных значений наилучших совместных приближений функций и их производных

$$E_{n-1}(f^{(v)}) = \inf \{ \| f^{(v)} - T_{n-1}^{(v)} \|; T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1} \}$$

на некотором подмножестве функций $\mathfrak{N} \subset L_2^{(r)}$ или на самом классе $L_2^{(r)}$. Таким образом, требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(\nu)}(\mathfrak{N}) := \sup\{E_{n-s-1}(f^{(\nu)}) : f \in \mathfrak{N}\}. \quad (17)$$

Легко доказать, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любом ν ($0 \leq \nu \leq r$) имеет место равенство

$$E_{n-1}(f^{(\nu)}) = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2\nu} (a_k^2 + b_k^2) \right\}^{1/2}. \quad (18)$$

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq \nu$. Если мажоранта Φ при любом $h \in (0, \infty)$ удовлетворяет условию (4), то справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(\nu)}(W^{(r)}(\Phi)) = \left\{ \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-\nu}} \quad (19)$$

Доказательство. Заметим, что из (17) при всех ν ($0 \leq \nu \leq r$) вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f^{(\nu)}) \leq \frac{1}{n^{r-\nu}} \cdot E_{n-1}(f^{(r)}), \quad (20)$$

которое является точным для функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$. В самом деле, из (18) имеем:

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f^{(\nu)}) &= \sum_{k=n}^{\infty} k^{-2(r-\nu)} \cdot k^{2r} (a_k^2 + b_k^2) \leq \\ &\leq n^{-2(r-\nu)} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} (a_k^2 + b_k^2) = n^{-2(r-\nu)} \cdot E_{n-1}^2(f^{(r)}), \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (20).

Если в неравенстве (6) сначала полагать $r = 0$ и в полученном неравенстве заменить f на $f^{(r)}$, то приходим к неравенству

$$E_{n-1}(f^{(r)}) \leq \left\{ \frac{nh}{2(nh - \sin nh)} \right\}^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/2},$$

откуда для произвольной функции $f \in W^{(r)}(\Phi)$ при $h = \pi / (2n)$ получаем

$$E_{n-1}(f^{(r)}) \leq \left\{ \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2}.$$

Отсюда и из (20) получаем

$$E_{n-1}(f^{(\nu)}) \leq \left\{ \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-\nu}}.$$

Так как полученное неравенство верно для произвольной функции $f \in W^{(r)}(\Phi)$, то запишем

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(\nu)}(W^{(r)}(\Phi)) \leq \left\{ \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-\nu}} \tag{21}$$

С целью получения аналогичной оценку снизу введём в рассмотрение функцию

$$g(x) = \left\{ \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{\cos nx}{n^r},$$

которая в силу равенства

$$\|g\| = \left\{ \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r}$$

принадлежит сфере \mathbb{B}_{2n+1} , а значит и классу $W^{(r)}(\Phi)$.

Так как при любом ν ($0 \leq \nu \leq r$) производные ν -го порядка имеют вид

$$g^{(\nu)}(u) = \left\{ \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{\cos\left(nx + \frac{\nu\pi}{2}\right)}{n^{r-\nu}},$$

и, кроме того,

$$E_{n-1}(g^{(\nu)}) = \left\{ \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-\nu}}, \tag{22}$$

то, пользуясь равенством (2), запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(\nu)}(W^{(r)}(\Phi)) \geq E_{n-1}(f^{(\nu)}) = \left\{ \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-\nu}} \tag{23}$$

Требуемое равенство (19) получаем из сопоставления неравенств (21) и (23). Теорема 2 доказана.

Поступило 30.04.2024 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 . – Матем. заметки, т.20, №3, 1976, с.433-438.
2. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1976.
3. Pinkus A. n -Widths by Approximation Theory. – Berlin: Springer, 1985.
4. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 . – Матем. заметки, 1979, т.25, №2, с.217-223.
5. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 . – Матем. заметки, 1978, т.24, №6, с.785-792.

6. Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков. – Укр. матем. журн., 1991, т.43, №1, с.125-129.
7. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 . – Матем. заметки, 2005, т.78, №5, с.792-796.
8. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 . – Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.
9. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций. – Матем. заметки, 2016, т.99, №2, с.215-238.
10. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. Забутная В.И. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций. – Докл. РАН, 2013, т.451, №6, с.625-628.
11. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$. – Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
12. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О поперечниках классов периодических функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$. – ДАН РТ, 2008, т.49, №2, с.111-116.
13. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников. – Матем. заметки, 2011, т.90, №5, с.764-775.
14. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 . – Analysis Mathematica, 2012, v.38, p.147-159.
15. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. The value of widths of certain classes of periodical functions in L_2 . – J. Approximation Theory, 2012, v.164, p.869-877.
16. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A., Temurbekova S.D. n -Widths of certain functions classes defined by the modulus of continuity. – J. Approximation Theory, 2017, v.215, p.145-162.
17. Джангибеков М.И. О поперечниках некоторых классов дифференцируемых функций в пространстве L_2 . – Доклады НАНТ, 2024, т.67, №1-2, с.19-28.

М.И.Джангибеков

ҚУТРҲОИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ ФУНКСИЯҲОИ ДИФФЕРЕНСИРОНИДАШАВАНДА ДАР L_2

Донишгоҳи давлатии Хоруг ба номи М.Назаршоев

Қиматҳои аниқи n -қутрҳои гуногуни баъзе синфҳои функсияҳои дифференсиронидашавандадан даврӣ, ки қимати миёнакардашудаи модули бифосилагии ҳосилаи тартиби r -уми онҳо дар метрикаи L_2 аз боло бо мажоранти додашуда маҳдуд аст, ёфта шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии миёнаквадратӣ, модули бифосилагӣ, n -қутр.

M.I.Jangibekov

WIDTHS OF SOME CLASSES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS IN L_2

M.Nazarshoev Khorog State University

The exact values of various n -widths of some classes of periodic differentiable functions whose averaged value are found the modulus of continuity of the r^{th} derivative in the L_2 metric is bounded above by a given majorant.

Key words: *root mean square approximation, continuity model, n -width.*

Сведения об авторе:

1. Джангибеков Мирзошо Исломбекович – Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева, ассистент кафедры математического анализа. E-mail: ambarkuh04@list.ru.

УДК 517.957

Специальность 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Т.П.Константинова

О СОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ ФОРМАМИ

*Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета
им. М.К.Аммосова*

(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана С.А.Исхоковым 26.06.2024 г.)

В работе изучаются свойства сопряженных операторов для одного класса эллиптических операторов произвольного четного порядка в ограниченной области со степенным вырождением вдоль всей границы. Операторы ассоциированы с полуторалинейными интегро-дифференциальными формами, которые могут не удовлетворять условию коэрцитивности. Доказано одно представление резольвенты сопряженного оператора и описаны области определения исследуемого оператора и его сопряжения.

Ключевые слова: эллиптический оператор, степенное вырождение, ограниченная область, некоэрцитивная форма, сопряженный оператор.

1. Работа посвящена изучению свойств сопряженного оператора к одному классу эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением вдоль всей границы области. Старшие коэффициенты исследуемых операторов непрерывны в замыкании области, а младшие коэффициенты принадлежат некоторым весовым L_p -пространствам и при этом связанные с этими операторами полуторалинейные формы являются некоэрцитивными. Отметим, что вырождающиеся эллиптические операторы в ограниченной области, связанные с некоэрцитивными формами, ранее в основном исследовались (см., например, [1-4]) в случае, когда их младшие коэффициенты допускают представления в виде произведения ограниченной функции и степени расстояния до границы области.

2. Пусть Ω – ограниченная область в n -мерном евклидовом пространстве R^n с замкнутой $(n-1)$ -мерной границей $\partial\Omega$, удовлетворяющей условию конуса. Пусть r – натуральное, α, p – вещественные числа и $1 \leq p < \infty$. Вводим функциональное пространство $W_{p,\alpha}^r(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|u; W_{p,\alpha}^r(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \rho^{p\alpha}(x) |D_x^k u(x)|^p dx + \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad (1)$$

Адрес для корреспонденции: Константинова Туйаара Петровна. 678170, Россия, Республика Саха (Якутия), г. Мирный, ул. Тихонова, 5, корп. 1, Политехнический институт (ф) СВФУ. E-mail: konst-tua@mail.ru.

где $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ – длина мультииндекса k и

$$D_x^k = \left(\frac{\partial}{i\partial x_1} \right)^{k_1} \left(\frac{\partial}{i\partial x_2} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{\partial}{i\partial x_n} \right)^{k_n}.$$

Обозначим через $\dot{W}_{p,\alpha}^r(\Omega)$ – пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W_{p,\alpha}^r(\Omega)$. Символом

$\left(\dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega) \right)'$ обозначим пополнения пространства $L_2(\Omega)$ по норме

$$\left\| u; \left(\dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega) \right)' \right\| = \sup |(u, v)|,$$

где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ и верхняя грань берется по всем $v \in \dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega)$ таким, что $\|v; \dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega)\| = 1$.

Элементы из $\left(\dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega) \right)'$ отождествляются с соответствующими антилинейными

непрерывными функционалами над $\dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega)$. Действие функционала $F \in \left(\dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega) \right)'$ на элемент

$u \in \dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega)$ будем обозначать символом $\langle F, u \rangle$.

Вводим также весовое пространство $L_{p;\alpha-r}(\Omega)$ с нормой

$$\|u; L_{p;\alpha-r}(\Omega)\| = \left\{ \int_{\Omega} \rho^{p(\alpha-r)}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Основные свойства введенных выше пространств $W_{p,\alpha}^r(\Omega)$, $\dot{W}_{p,\alpha}^r(\Omega)$ и $\left(\dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega) \right)'$

приведены в обзорной работе [5].

3. В работе автора [6] были изучены спектральные свойства дифференциальных операторов, ассоциированных со следующей интегро-дифференциальной полуторалинейной формой

$$B[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) D_x^k u(x) \overline{D_x^l v(x)} dx, \tag{2}$$

первоначально определенной на функциях $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Здесь $p_k(x) = \rho^{\alpha-r+|k|}(x)$ и $a_{kl}(x)$ – комплекснозначные функции. В работе [6] предполагалось, что старшие коэффициенты формы (2) удовлетворяют следующим двум условиям:

I) функции $a_{kl}(x), |k|=|l|=r$, непрерывны в замкнутой области $\bar{\Omega}$;

II) существуют числа $c_0 > 0, \varphi \in (0, \pi)$ и непрерывная в $\bar{\Omega}$ функция $\gamma(x) \neq 0$ такие, что

$$\left| \arg \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \bar{\xi}^l \right| < \varphi, \tag{3}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \bar{\xi}^l \right\} \geq c |\xi|^{2r}. \tag{4}$$

для всех $x \in \Omega, \xi \in R^n \setminus 0$.

Относительно младших коэффициентов формы (2) требовалось следующее:

III) функции $a_{kl}(x), |k|+|l| \leq 2r-1, |k|, |l| \leq r$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}; -n/p_{kl}}(\Omega)$, где

число p_{kl} определяется следующим образом:

$$1) p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{r-|k|} + \varepsilon, & |l|=r, n > 2(r-|k|), \\ \frac{n}{r-|l|} + \varepsilon, & |k|=r, n > 2(r-|l|); \end{cases}$$

2) если $|k| \leq r-1, |l| \leq r-1$, то

$$p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{2r-|k|-|l|} + \varepsilon, & n > 2(r-|k|), n > 2(r-|l|), \\ \frac{n}{r-|l|} + \varepsilon, & n \leq 2(r-|k|), n > 2(r-|l|), \\ \frac{n}{r-|k|} + \varepsilon, & n > 2(r-|k|), n \leq 2(r-|l|); \end{cases}$$

3) p_{kl} – любое конечное число больше 2 в оставшихся случаях.

Здесь ε – достаточно малое положительное число, функция $\operatorname{arg} z$ принимает значения на отрезке $(-\pi, \pi]$ и использованы следующие обозначения

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n, \quad \xi^k = \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n},$$

$$|\xi| = \left\{ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 \right\}^{1/2}.$$

При выполнении условий I) – III) в [6] подробно изучены свойства оператора \mathcal{A} , который

определяется равенством $\langle \mathcal{A}u, v \rangle = B[u, v] v \in \dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega)$ и действует из $\dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega)$ в $\left(\dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega) \right)'$.

Далее при некоторых дополнительных условиях мы определим оператор \mathcal{A}^+ , формально сопряженный к оператору \mathcal{A} , и изучим некоторые его свойства. При этом условия на старшие коэффициенты остаются неизменными, а условия на младшие коэффициенты меняются (см. ниже условия III^{*}). Напомним, что формально сопряженный оператор \mathcal{A}^+ определяется равенством

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}^+u, v \rangle &= \overline{B[v, u]} = \\ &= \sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) \overline{a_{lk}(x)} D_x^k u(x) \overline{D_x^l v(x)} dx, u, v \in \mathring{W}_{2, \alpha}^r(\Omega) \end{aligned} \tag{5}$$

В работе [6] было доказано, что при выполнении условий I) – III) и $\alpha < r$, $\alpha + 1/2 \notin \{1, \dots, r\}$ существует единственный замкнутый оператор A в пространстве $L_2(\Omega)$, обладающий следующими свойствами:

- (i) $D(A) \subset L_2(\Omega)$, $(Au, v) = B[u, v]$ для всех $v \in W_{2, \alpha}^r(\Omega)$ и всех $u \in D(A)$,
- (ii) найдется число $\lambda_0 \in C$ такое, что оператор $A - \lambda_0 E$ непрерывно обратим.

Также было доказано, что оператор A совпадает с сужением оператора \mathcal{A} в $L_2(\Omega)$, то есть

$$D(A) = \left\{ u \in \mathring{W}_{2, \alpha}^r(\Omega) : \mathcal{A}u \in L_2(\Omega) \right\}, \quad Au = \mathcal{A}u \quad \forall u \in D(A). \tag{6}$$

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathcal{P}[u, v] = \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) D_x^k u(x) \overline{D_x^k v(x)} dx + \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx \tag{7}$$

с областью определения $D[\mathcal{P}] = \mathring{W}_{2, \alpha}^r(\Omega)$. Действуя также, как в [7, Глава 10], доказывается существование единственного самосопряженного оператора P в пространстве $L_2(\Omega)$, связанного с формой (7) равенством

$$\mathcal{P}[u, v] = ((P + E)^{1/2} u, (P + E)^{1/2} v) \quad \forall u, v \in \mathring{W}_{2, \alpha}^r(\Omega).$$

Оператор $(P + tE)^{1/2}, t \geq 1$, допускает продолжение до непрерывного оператора $\mathcal{P}(t) : L_2(\Omega) \rightarrow \left(\mathring{W}_{2, \alpha}^r(\Omega) \right)$. Сужение в $L_2(\Omega)$ оператора $\mathcal{P}^{-1}(t) : \left(\mathring{W}_{2, \alpha}^r(\Omega) \right) \rightarrow L_2(\Omega)$ совпадает с оператором $(P + tE)^{-1/2}$.

Теперь сформулируем основной результат нашей работы о свойствах сопряженных операторов $\mathcal{A}^+, \mathcal{A}^*$.

Теорема. Пусть выполнены условия I) – II), $\alpha < r$, $\alpha + 1/2 \notin \{1, \dots, r\}$ и пусть:

III*) при $|k|, |l| \leq r : |k| + |l| \leq 2r - 1$ функции $a_{kl}(x)$ принадлежат пространству $L_{q_{kl}; -n/q'_{kl}}(\Omega)$, где $q_{kl} = \max\{p_{kl}; p_{lk}\}$, $q'_{kl} = \min\{p_{kl}; p_{lk}\}$ и число p_{kl} такое же как в условии III).

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $A^* = A'$, где A^* – оператор, сопряженный к оператору A A' – сужение оператора A^+ в пространстве $L_2(\Omega)$, то есть

$$D(A') = \{u \in H_+ : A^+ u \in L_2(\Omega)\}, \quad A'u = A^+u (u \in D(A')).$$

2) Для любого замкнутого сектора $S \subset \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| > \varphi\} \cup \{0\}$ с вершиной в нуле существует положительное число c_s такое, что при $\lambda \in S, |\lambda| > c_s$ справедливы представления

$$(A^+ - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda| E)^{-1/2} Y_1(\lambda) P^{-1}(|\lambda|), \tag{8}$$

$$(A^* - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda| E)^{-1/2} Y_1(\lambda) (P + |\lambda| E)^{-1/2}, \tag{9}$$

где нормы операторов $Y_1(\lambda) : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ равномерно ограничены сверху по $\lambda \in S, |\lambda| > c_s$.

3) Сектор S содержит конечное число точек спектров операторов A, A^* .

4) Функция $u \in \dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega)$ принадлежит области определения $D(A)$ оператора A тогда и только тогда, когда существует функция $f \in L_2(\Omega)$ такая, что $B[u, v] = (f, v)$ для всех $v \in \dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega)$

5) Функция $u \in \dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega)$ принадлежит области определения $D(A^*)$ оператора A^* тогда и только тогда, когда существует функция $f \in L_2(\Omega)$ такая, что $\overline{B[v, u]} = (f, v)$ для всех $v \in \dot{W}_{2,\alpha}^r(\Omega)$.

Поступило 26.06.2024 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойматов К.Х. Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными формами. – Доклады РАН, 1994, т. 339, №1, с. 5-10.
2. Бойматов К.Х. Некоторые спектральные свойства матричных дифференциальных операторов, далеких от самосопряженных. – Функциональный анализ и его приложения, 1995, т. 29, №3, с. 55-58.
3. Бойматов К.Х., Исхоков С.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой – Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН, 1997, т. 214, с. 107-134.

4. Бойматов К.Х. О базисности по Абелю системы корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами. – Сибирский математический журнал, 2006, т. 47, №1, с. 46-57.
5. Никольский С.М., Лирозкин П.И., Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. – Известия вузов. Математика, 1988, №8, с. 4-30.
6. Константинова Т.П. Оценка резольвенты и спектральные свойства одного класса вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области. – Математические заметки СВФУ, 2019, т. 26, №4, с. 37-50.
7. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980, 264 с.

Т.П.Константинова

ДОИР БА ОПЕРАТОРҲОИ ҲАМРОҲШУДА БАРОИ ЯК СИНФИ ОПЕРАТОРҲОИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАНАЗЗУЛЁБАНДАИ БО ЁРИИ ШАКЛҲОИ ҒАЙРИКОЭРСИТИВӢ ТАВЛИДШУДА

*Институти политехникии (филиали) Донишгоҳи федералии шимолу-шарқии
ба номи М.К.Аммосов*

Дар мақола хосиятҳои операторҳои ҳамроҳшуда барои як синфи операторҳои эллиптикии дараҷаи дилхоҳи чуфт дар соҳаи маҳдуд бо таназзулӣ дараҷагӣ дар тамоми сарҳад омӯхта мешавад. Операторҳо бо шаклҳои якунимхаттии интегро-дифференциалӣ алоқамандад, ки онҳо метавонанд шартӣ коэрситивиро қаноат нақунанд. Як ифодаи резольвентаи оператори ҳамроҳшуда исбот карда шудааст ва соҳаҳои муайянии оператори таҳқиқшаванда ва ҳамроҳшудаи он шарҳ дода шудаанд.
Калимаҳои калидӣ: оператори эллиптикӣ, таназзули қудрат, домени маҳдуд, шакли ғайримачбурӣ, оператори ҳамроҳ.

T.P.Konstantinova

ABOUT CONJUGATE OPERATORS FOR A CLASS OF DEGENERATE ELLIPTIC OPERATORS GENERATED BY NON-COERCIVE FORMS

Mirny Polytechnic Institute (branch) of North-Eastern Federal University named after M.K.Ammosov

The paper studies the properties of conjugate operators for one class of elliptic operators of arbitrary even order in a bounded domain with power-law degeneracy along the entire boundary. Operators are associated with semi-linear integro-differential forms that may not satisfy the coercivity condition. One representation of the resolvent of the conjugate operator is proved and the definition domains of the operator under study and its conjugation are described.

Key words: elliptic operator, power degeneration, bounded domain, non-coercive form, adjoint operator.

Сведения об авторе:

1. **Константинова Туйяара Петровна** – Политехнический институт (филиал) СВФУ в г. Мирном, заместитель директора по учебной работе. E-mail: konct-tua@mail.ru.

УДК 544.313.2

Специальность: 1.4.4 – Физическая химия

Х.И.Холов, Н.Т.Шарифбоев*, С.Курбон, Ш.Р.Самихов, Ш.Р.Джуракулов

**РАСЧЕТ ЗНАЧЕНИЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРОЦЕССА
ТИОСУЛЬФАТНОГО РАСТВОРЕНИЯ ЗОЛОТА***Национальная академия наук Таджикистана,**Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана,***Горно-металлургический институт Таджикистана**(Представлено академиком НАН Таджикистана И.Н.Ганиевым 22.06.2024 г.)*

В статье рассмотрены основные теоретические результаты исследований процесса растворения золота в растворах серы и ее соединений. Показано, что золото может растворяться в водно-щелочной и органической средах. В водно-щелочной среде основным растворителем золота является тиосульфат натрия, образующий с золотом прочные комплексы.

Рассмотрены механизмы растворения золота в растворах серы. В водно-щелочной среде механизм растворения золота заключается в образовании комплекса $[\text{Au}(\text{S}_2\text{O}_3)_2]^{3-}$.

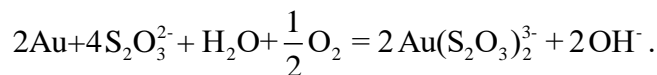
Ключевые слова: *термодинамические функции, золото, растворение, сера, тиосульфат натрия, серощелочные растворы, органические сульфиды, механизм растворения, факторы, влияющие на растворимость.*

Золото является одним из наиболее ценных металлов, и его добыча и переработка являются важной отраслью промышленности [1]. Традиционным методом извлечения золота из руд и концентратов является цианирование, однако этот процесс имеет ряд недостатков, в том числе высокую токсичность цианида. В последние годы активно изучаются альтернативные методы извлечения золота, в том числе растворение в растворах серы и ее соединений [2-4].

Золото можно растворить в растворах тиосульфата и полисульфидов при автоклавном выщелачивании. Это подтверждают термодинамические расчеты, приведенные в работах [5-7]. В тиосульфатной среде золото образует прочный комплекс с тиосульфат-ионом. Этот комплекс не разлагается при подкислении с выделением серы, а из него можно получить свободную кислоту $\text{H}_3\text{Au}(\text{S}_2\text{O}_3)_2 \cdot 1/2\text{H}_2\text{O}$ [4]. Ионы сульфита и тиосульфата, входящие в состав комплекса, имеют пониженную окисляемость и высокую термическую устойчивость [8].

Исследования [9] показали, что золото в тиосульфатных растворах растворяется аналогично тому, как оно растворяется в цианистых растворах:

Адрес для корреспонденции: Холов Холмахмад Исроилович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ, E-mail: kholmahmad90@mail.ru



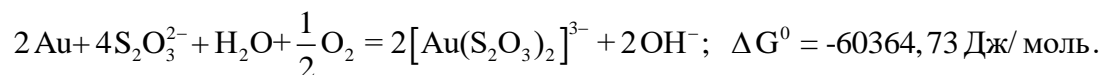
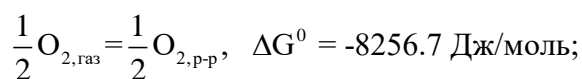
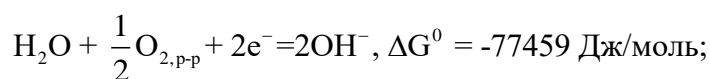
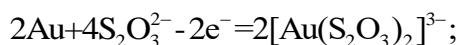
Однако температура, при которой эта реакция протекает наиболее эффективно, может варьироваться в зависимости от факторов, таких как концентрация реагентов и наличие катализаторов. В целом, исследования показали, что реакция протекает оптимально при умеренных температурах, часто в диапазоне 20-40°C. Повышение температуры может ускорить скорость реакции, но слишком высокие температуры могут привести к разложению тиосульфата, что снижает эффективность выщелачивания [2,4,9].

Энергия или потенциал Гиббса для данной реакции равна: $\Delta G^\circ = -60,36$ кДж/моль.

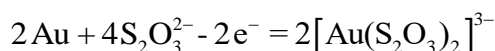
Согласно полученным данным, константа равновесия вышеуказанной реакции равна:

$$\lg K_p = 60364.73 / (2.3 \cdot 298 \cdot 8.31) = 10.60; K_p = 1.7 \cdot 10^{10}.$$

Согласно расчетам И.А.Жучкова [10], эту реакцию можно представить следующим образом:



Итак, для реакции



величина энергии Гиббса равна

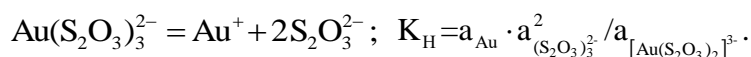
$$\Delta G_0 = -60364.73 - (-77459 - 8256.7) = +25351 \text{ Дж/моль}.$$

Чтобы определить величину нормального потенциала золота в тиосульфатной среде, мы используем выражение $\Delta G^\circ = nFe$. Подставляя в него значения стандартного изменения свободной энергии ΔG° и числа электронов, участвующих в реакции, мы получаем следующее уравнение:

$$e_0 = \Delta G^\circ / nF = 25351 / (2 \cdot 96485) = +0.131 \text{ В}.$$

Рассчитывая это уравнение, мы получаем значение нормального потенциала золота в тиосульфатной среде, равное +0.131 В.

Величина, характеризующая устойчивость комплекса $[\text{Au}(\text{S}_2\text{O}_3)_2]^{3-}$, называется константой нестойкости [7,11-15]. Она может быть рассчитана по формуле:



Исходя из полученных данных, активность катионов золота составляет:

$$a_{\text{Au}^+} = K_{\text{H}} \cdot a_{\text{Au}(\text{S}_2\text{O}_3)_2^{3-}} / a_{(\text{S}_2\text{O}_3)_3^{2-}}^2 \quad \text{и} \quad \lg a_{\text{Au}^+} = \lg K_{\text{H}} + \lg a_{\text{Au}(\text{S}_2\text{O}_3)_2^{3-}} / a_{(\text{S}_2\text{O}_3)_3^{2-}}^2.$$

Тогда

$$\varepsilon_{\text{Au}} = 1.68 + 0.059 \lg a_{\text{Au}^+} = 1.68 + 0.059 \lg K_{\text{H}} + 0.059 \lg \frac{a_{\text{Au}(\text{S}_2\text{O}_3)_2^{3-}}}{a_{(\text{S}_2\text{O}_3)_3^{2-}}^2}.$$

Если значение $a_{\text{Au}(\text{S}_2\text{O}_3)_2^{3-}} / a_{(\text{S}_2\text{O}_3)_3^{2-}}^2 = 1$, то потенциал золота приобретает в тиосульфатных растворах нормальное значение $\varepsilon_0 = +0.131$ В. Следовательно, $1.68 + 0.059 \lg K_{\text{H}} = 0.142$ и $\lg K_{\text{H}} = -1.538/0.059 = -26.06$. Таким образом, константа нестойкости золото-тиосульфатного комплекса равна $K_{\text{H}} = 10^{-26}$.

Результаты расчетов, полученных в стандартных условиях, могут существенно отличаться от результатов, полученных в реальных условиях. Это связано с тем, что в реальных условиях концентрации компонентов могут быть значительно ниже стандартных.

Например, если концентрация золотого комплекса будет равна 10^{-3} моль/л, а концентрация кислорода в растворе – 10^{-4} моль/л, концентрация ионов гидроксидов – 10^{-2} моль/л; концентрация тиосульфата – 0.5 моль/л, то потенциал золота снизится до -0.058 В.

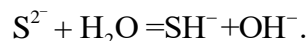
При этом величина энергии Гиббса и константы равновесия реакции будут соответственно равны:

$$\Delta G^{298} = \Delta G^\circ + 2.3RT \lg \frac{[\text{Au}(\text{S}_2\text{O}_3)_2^{3-}]^2 \cdot [\text{OH}^-]^2}{[\text{S}_2\text{O}_3^{2-}]^4 \cdot p_2^{1/2}};$$

$$\Delta G^{298} = -81102.2 \text{ Дж/моль}; \quad K_{\text{p}} = 1.3 \cdot 10^{14}.$$

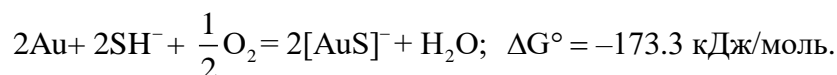
Таким образом, для реальных условий термодинамическая вероятность процесса растворения золота в тиосульфатных растворах даже больше, чем для стандартных. Еще более можно увеличить термодинамическую вероятность процесса, создав более высокую концентрацию тиосульфата и кислорода (константу равновесия можно довести до 10^{20}).

Также следует добавить, что со временем, особенно при подогреве, тиосульфат натрия может разлагаться и одним из продуктов его разложения является ион растворимой серы S^{2-} , который может подвергаться гидролизу с образованием гидросульфида:

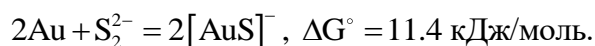


Продукт гидролиза иона серы – гидросульфид – может быть дополнительным растворителем для благородных металлов.

Расчеты показывают, что в присутствии иона SH^- окисление золота кислородом воздуха также является термодинамически возможным процессом. При этом образуется комплекс $[\text{AuS}]^-$:



Окисление сульфидных и гидросульфидных ионов – это сложный процесс, который может протекать по двум основным механизмам. Первый механизм заключается в том, что кислород выступает в качестве деполаризатора, то есть снижает окислительно-восстановительный потенциал системы. В результате этого сульфидные и гидросульфидные ионы становятся более окисляемыми и могут взаимодействовать с золотом. Второй механизм окисления сульфидных и гидросульфидных ионов заключается в том, что кислород непосредственно окисляет эти ионы, превращая их в полисульфидные соединения. Полисульфиды также способны взаимодействовать с золотом, даже в присутствии кислорода:



Для этой реакции величина константы равновесия равна:

$$K_p = \frac{[\text{AuS}^-]^2}{[\text{S}_2^{2-}]} = 10^{22}.$$

Полнота протекания реакции зависит от разбавления раствора. Чем сильнее разбавлен раствор, тем больше вероятность того, что реакция дойдёт до конца. Например, даже при концентрации дисульфида в 10^{-4} моль/л концентрация золотого комплекса составляет 10^{-3} моль/л, что в 10 раз больше концентрации дисульфида. Это означает, что реакция протекает практически до конца.

З а к л ю ч е н и е

Растворение золота в растворах серы и ее соединений является перспективным направлением в гидрометаллургии. Эти растворители обладают рядом преимуществ перед цианидом натрия, который традиционно используется для извлечения золота. Они менее токсичны, более безопасны в обращении и не требуют использования дорогостоящего оборудования.

Основные результаты теоретических исследований в области растворения золота в растворах серы и ее соединений можно свести к следующим:

В водно-щелочной среде золото растворяется в результате взаимодействия с тиосульфат-ионом, образуя комплекс $[\text{Au}(\text{S}_2\text{O}_3)_2]^{3-}$. Скорость и степень растворения золота зависят от концентрации тиосульфата, pH среды и температуры.

Органические сульфиды, такие как диметилсульфид и этилмеркаптан, также могут растворять золото, образуя комплексные соединения. Однако эффективность растворения золота в органических сульфидных растворах ниже, чем в тиосульфатных и серощелочных растворах.

Дальнейшие исследования в области растворения золота в растворах серы и ее соединений должны быть направлены на разработку оптимальных условий процесса, повышение скорости и степени растворения золота, а также изучение влияния различных примесей на процесс растворения.

Разработка технологий переработки золота с использованием растворителей на основе серы и ее соединений позволит снизить экологический ущерб, связанный с добычей и переработкой золота.

Поступило 22.06.2024 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Самихов Ш.Р., Холов Х.И., Зинченко З.А. Технология обогащения руд нижних горизонтов Джикрутского месторождения. – ДАН РТ, 2017, т.60, №10, с.533-538.

2. Холов Х.И., Шарифбоев Н.Т., Самихов Ш.Р., Джуракулов Ш.Р., Зарифова М.С. Выщелачивание золота различными растворами, заменители цианида и их перспективы в будущем. – Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Техника и технологии, 2021, т.14, №4, с.433-447.
3. Сиражетдинова Р. Современные технологии извлечения золота из руд. – Редакционная Коллегия, 2020, 17 с.
4. Холов Х.И., Шарифбоев Н.Т., Ганиев И.Н., Самихов Ш.Р., Джуракулов Ш.Р., Зарифова М.С. Тиосульфатное выщелачивание золота. – Политехнический вестник. Серия: Инженерные исследования, 2021, №3(55), с.58-63.
5. Aylmore M.G., Muir D.M. Thermodynamic analysis of gold leaching by ammoniacal thiosulfate using Eh/pH and speciation diagrams. – Min. Metall. Explor. Springer, 2001, v.18, pp.221-227.
6. Senanayake G. Analysis of reaction kinetics, speciation and mechanism of gold leaching and thiosulfate oxidation by ammoniacal copper (II) solutions. – Hydrometallurgy. Elsevier, 2004, v.75, №1-4, pp.55-75.
7. Холов Х.И., Квятковская Л.В., Самихов Ш.Р. Кинетика процесса ацетилтиомочевинного выщелачивания золота из хвостов флотации нижнего горизонта Джижикрутского месторождения. – Евразийский Союз Ученых. Общество с ограниченной ответственностью «Логика+», 2019, №4-1(61), pp.59-65.
8. Xu B. Kong W., Y Yang Q. Li., Jiang T., Liu X. A review of thiosulfate leaching of gold: Focus on thiosulfate consumption and gold recovery from pregnant solution. – Metals. MDPI, 2017, v.7, №6, pp.222-225.
9. Самихов Ш.Р., Назаров Х.М., Хочиён М.К., Шарифбоев Н.Т. Тиосульфатное выщелачивание золота и серебра из золотосодержащих руд месторождения "Истиклол". – Вестник ТНУ, 2018, №3, с.205-209.
10. Жучков И., Скобеев И., Галюков В. Щелочная металлургия цветных металлов. Тез. докладов 2-й Республ. конференции, 21-23 апреля. – Алма-Ата.: Наука, 1981, с.153–154.
11. Каковский И.А., Поташников Ю.М. Кинетика процессов растворения. – Металлургия, 1975, 224 с.
12. Benzaazoua M., Marion P., Robaut F., Pinto A. Gold-bearing arsenopyrite and pyrite in refractory ores: analytical refinements and new understanding of gold mineralogy. – Mineral. Mag. Cambridge University Press, 2007, v.71, №2, pp.123-142.
13. Birich A., Stopic S., Friedrich B. Kinetic investigation and dissolution behavior of cyanide alternative gold leaching reagents. – Sci. Rep. Nature Publishing Group UK London, 2019, v.9, №1, pp.71-91.
14. Jeffrey M.I. Kinetic aspects of gold and silver leaching in ammonia–thiosulfate solutions. – Hydrometallurgy. Elsevier, 2001, v.60, №1, pp.7-16.
15. Muir D.M., Aylmore M.G. Thiosulphate as an alternative to cyanide for gold processing—issues and impediments. – Miner. Process. Extr. Metall. Taylor & Francis, 2004, v.113, №1, pp.2-12.

Х.И.Холов, Н.Т.Шарифбоев*, С.Қурбон, Ш.Р.Самихов, Ш.Р.Чуракулов

ҲИСОБ КАРДАНИ ҚИМАТҲОИ ФУНКСИЯҲОИ ТЕРМОДИНАМИКИИ РАВАНДИ ҲАЛ НАМУДАНИ ТИЛЛО ДАР МАҲЛУЛИ ТИОСУЛФАТ

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

Институти кимиёи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон,

**Донишқадаи кӯҳӣ-металлургии Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаҳои асосии назариявии омӯзиши ҳалшавии тилло дар маҳлули сулфури элементарӣ ва пайвастагиҳои он оварда шудааст. Исбот шудааст, ки тилло метавонад дар муҳити обӣ-

ишқорӣ ва органикӣ ҳал шавад. Дар муҳити обӣ-ишқорӣ ҳалқунандаи асосии тилло тиосульфати натрий мебошад, ки бо тилло комплексҳои қавӣ ҳосил менамояд. Бар замми ин дар мақола, механизми ҳалшавии тилло дар маҳлулҳои сулфур хуб дарҷ шудааст. Дар муҳити обӣ-ишқорӣ механизми ҳалшавии тилло ин ташаккули комплекс мебошад, ки чунин $[\text{Au}(\text{S}_2\text{O}_3)_2]^{3-}$ аст.

Калимаҳои калидӣ: *функсияҳои термодинамикӣ, тилло, ҳалшавӣ, сулфур, тиосульфати натрий, маҳлули сулфурӣ-ишқорӣ, сульфидҳои органикӣ, механизми ҳалшавӣ, омилҳои ҳалшавандагӣ.*

Kh.I.Kholov, N.T.Sharifboev*, Q.Sanavbar, S.R.Samikhov, Sh.R.Dzhurakulov
CALCULATION OF THE VALUES OF THERMODYNAMIC FUNCTIONS
OF THE PROCESS OF THIOSULFATE DISSOLUTION OF GOLD

*National Academy of Sciences of Tajikistan,
V.I.Nikitin Institute of Chemistry, NAS of Tajikistan,
Mining - Metallurgical Institute of Tajikistan*

This paper reviews the main theoretical results of studies on the process of gold dissolution in solutions of elemental sulfur and its compounds. It is shown that gold can be dissolved in aqueous alkaline and organic media. In aqueous alkaline media, the main gold solvent is sodium thiosulfate, which forms strong complexes with gold.

The mechanisms of gold dissolution in sulfur solutions are considered. In aqueous alkaline media, the mechanism of gold dissolution is the formation of the $[\text{Au}(\text{S}_2\text{O}_3)_2]^{3-}$ complex.

Key words: *thermodynamic functions, gold, dissolution, sulfur, sodium thiosulfate, thiosulfate solutions, organic sulfides, dissolution mechanism, factors affecting solubility.*

Сведения об авторах:

1. **Холов Холмахмад Исроилович** – кандидат техн. наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, старший научный сотрудник лаборатории обогащения руд. E-mail: kholmahmad90@mail.ru;
2. **Шарифбоев Насим Тухтабоевич** – соискатель, Горно-металлургический институт Таджикистана. E-mail: nasim_3535@mail.ru;
3. **Санавбари Курбон** – Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, магистр лаборатории обогащения руд. E-mail: sanavbar_q@mail.ru;
4. **Самихов Шонавруз Рахимович** – доктор техн. наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, ведущий научный сотрудник лаборатории обогащения руд. E-mail: samikhov72@mail.ru;
5. **Джуракулов Шерзод Рабимкулович** – соискатель, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана. E-mail: shaih8888@mail.ru.

УДК 546

Специальность: 1.4.1 – Неорганическая химия

С.М.Досаев, К.И.Нематуллоев, М.М.Тагоев, Х.Р.Рахронов, А.С.Курбонов
**СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ВЫДЕЛЕНИЯ ХЛОРИДА ЖЕЛЕЗА
ИЗ ЖЕЛЕЗО- И АЛЮМОСОДЕРЖАЩИХ РУД ТАДЖИКИСТАНА
СОЛЯНОЙ КИСЛОТОЙ**

Национальная академия наук Таджикистана,

Институт химии им.В.И.Никитина НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 17.05.2024 г.)

В настоящей работе приведена сравнительная оценка получения хлорида железа как коагулянта для очистки вод путем разложения железо- и алюмосодержащих руд Таджикистана соляной кислотой. Показаны наиболее подходящее сырьё для переработки и условия проведения процесса. На основе проведённых исследований разработана принципиальная технологическая схема получения хлорида железа из железо- и алюмосодержащих руд Таджикистана.

Ключевые слова: *магнетитовая руда, хлорид железа, коагулянт, спекание, разложение, извлечение.*

Как известно, железо – самый полезный и необходимый металл на нашей планете. В природе не всегда найдется железо в чистом виде, больше всего — наряду с железо-никелевых метеоритов. Железо в земной коре широко распространено. На его долю приходится 4.7% массы земной коры (4-е место после O, Si, Al). Железо можно считать основной частью земного ядра, что выражается в наличии магнитного поля Земли. Основные железосодержащие руды – это гематит Fe_2O_3 , магнетит – Fe_3O_4 , лимонит $FeO(OH)$, сидерит – $FeCO_3$ и многие другие железосодержащие руды [1].

Хлорное железо применяется в качестве коагулянта при известково-содовом смягчении хозяйственно-питьевой воды, как реагент для коагулирования городских сточных вод, а также используется для очистки маслоэмульсионных сточных вод на предприятиях металлургической и машиностроительной промышленности [2-4].

Железосодержащими минералами Таджикистана в основном считаются магнетитовые руды, залежи которых находятся в разных регионах страны [5].

В табл. 1 приведен химический состав магнетитовых руд некоторых месторождений Таджикистана.

Таблица 1

Химический состав магнетитовых руд месторождений Таджикистана

Химический состав магнетитовой руды месторождения Харангон									
Содержание, мас%	Fe ₂ O ₃ ·FeO	Al ₂ O ₃	MgO	CaO	TiO ₂	Na ₂ O	SO ₃	SiO ₂	
	63.91	3.8	5.98	0.21	0.18	0.79	0.41	11.52	
Химический состав магнетитовой руды месторождения Чокадамбулак									
Содержание, мас%	Fe ₂ O ₃	FeO	Al ₂ O ₃	MgO	CaO	TiO ₂	Na ₂ O	SO ₃	SiO ₂
	26.9	15.9	4.7	-	6.7	0.18	-	-	-
Химический состав магнетитовой руды месторождения Бувак									
Содержание, мас%	Fe ₂ O ₃ ·FeO	Al ₂ O ₃	MgO	CaO	TiO ₂	Na ₂ O	SO ₃	SiO ₂	
	68.0	1.33	0.25	0.57	0.16	0.15	0.35	2.32	

Алюмосодержащие руды Таджикистана, помимо основного компонента, содержат в своём составе значительное количество оксида железа. При комплексной переработке этих в качестве побочного продукта получают соединения железа.

В табл. 2 приведен химический состав алюмосодержащей руды некоторых месторождений Таджикистана [6].

Таблица 2

Химический состав алюмосиликатных руд (основные компоненты), в %

№	Алюмосиликатные руды	SiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	Na ₂ O	K ₂ O	CaO	TiO ₂	MgO
1	Нефелиновые сиениты (м. Турпи)	53.0	22.0	6.4	6.5	6.6	2.5	-	-
2	Аргиллиты (м. Чашма-Санг)	42.86	31.6	8.74	0.1	2.95	1.0	0.6	1.0
3	Аргиллиты (м. Зидды)	60.0	19.75	4.99	0.1	1.2	1.0	0.6	1.0
4	Каолиновые зелёные глины (м. Чашма-Санг)	51.3	20.38	11.97	1.0	2.45	0.5	1.8	1.0
5	Каолиновые глины (м. Чашма-Санг)	50	24.84	10.98	0.3	2.65	1.0	1.8	1.1
6	Сиаллиты (м. Миёнаду)	55.9	20.1	6.0	0.2	1.7	0.6	0.95	0.8
7	Сиаллиты (м. Восточные Зидды)	39.8	30.5	13.9	0.3	0.4	0.6	1.17	0.2

Примечание: м – месторождение

Ранее в работах [4-9] был изучен процесс разложения железо- и алюмосиликатных руд соляной кислотой и установлены оптимальные условия процесса разложения.

В данной работе с целью выбора наиболее подходящего сырья для переработки, а также условий проведения процесса проведена сравнительная оценка получения хлорида железа из железо- и алюмосодержащей руды Таджикистана.

Для проведения опытов были использованы исходные и обожжённые железо- и алюмосодержащие руды разных месторождений Таджикистана. В табл. 3 и на рис. 1 приведены оптимальные параметры получения хлорида железа из железо- и алюмосодержащих руд Таджикистана в исходном виде и после обжига с соляной кислотой.

Таблица 3

Выделение хлорида железа из состава железо- и алюмосодержащей руд соляной кислотой

№	Алюмосиликатная руда	Извлечение FeCl_3 в%	
		Исходная руда	После обжига
		Fe_2O_3	Fe_2O_3
1	Магнетит (м. Харангон)	87.3	-
2	Нефелиновые сиениты (м. Турпи)	17.0	99.0
3	Аргиллиты (м. Чашма-Санг)	-	97,0
4	Аргиллиты (м. Зидды)	87.0	97.0
5	Каолиновые зелёные глины (м. Чашма-Санг)	40.0	96.2
6	Каолиновые глины (м. Чашма-Санг)	98.9	95.0
7	Сиаллиты (м. Миёнаду)	82.8	-
	Сиаллиты (м. Восточные Зидды)	98.9	95.0

Примечание: м – месторождение.

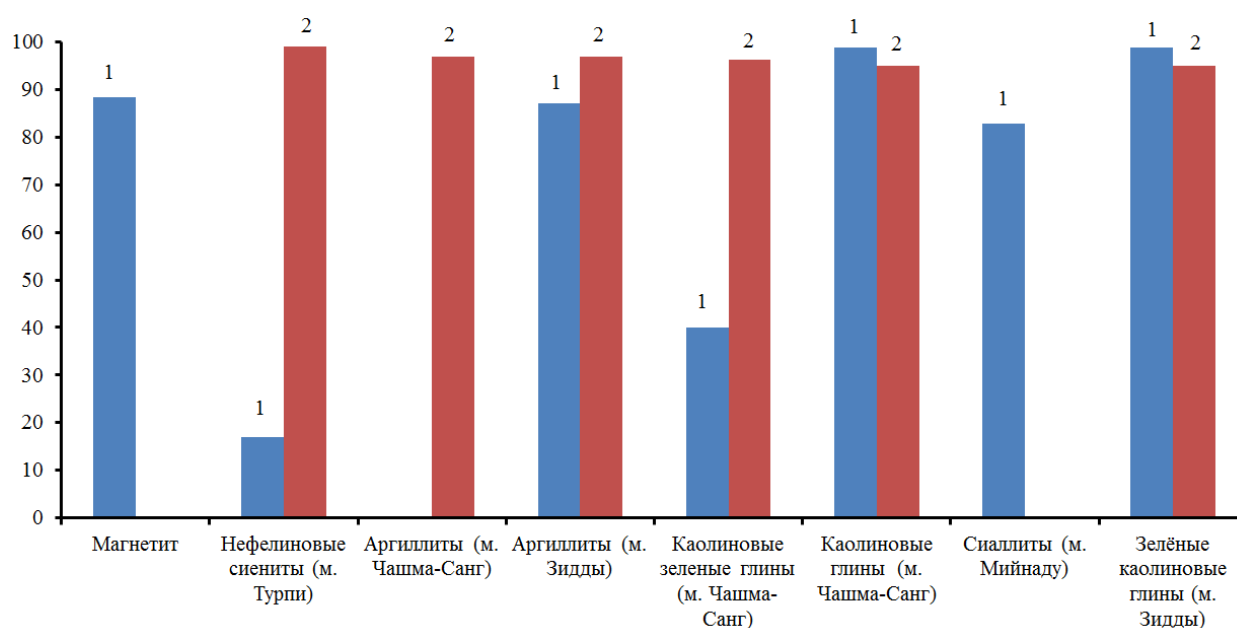


Рис. 1. Получение хлорида железа из состава железо- и алюмосодержащей руды соляной кислотой:
1 – исходная руда, 2 – обожжённая руда.

Как видно из табл. 3 и рис. 1 высокая степень извлечения оксида железа – более 80% – достигается при разложении почти все выше предполагаемый железо- и алюмосодержащих руд, кроме нефелиновых сиенитов (м. Турпи) и каолиновых зеленых глин (м. Чашма-Санг).

Таким образом, после проведения сравнительной оценки разложения железо- и алюмосодержащих руд соляной кислотой можно констатировать, что более перспективным сырьем для переработки, с максимальным выходом хлорида железа, является магнетитовая и некоторые алюмосодержащие руды, а также почти все предварительно обожжённые алюмосодержащие руды.

В соответствии с данными по кислотному разложению алюмосодержащих руд создана базовая технологическая схема производства коагулянтов на основе хлорида железа. Основными этапами этого процесса являются: обжигание алюмосодержащих руд при температуре 500-600°C, измельчение до частиц, размером не более 0.1 мм, разложение размолотой руды в термостатированном реакторе при регулярном перемешивании и оптимальных условиях, просеивание пульпы и промывка её

дистиллированной водой, разделение жидкой и твёрдой фазы с получением из каждой фазы по отдельности несхожих, востребованных и ценных продуктов.

Разложение магнетитовой руды тоже можно проводить по этой технологической схеме, минуя стадию обжига.

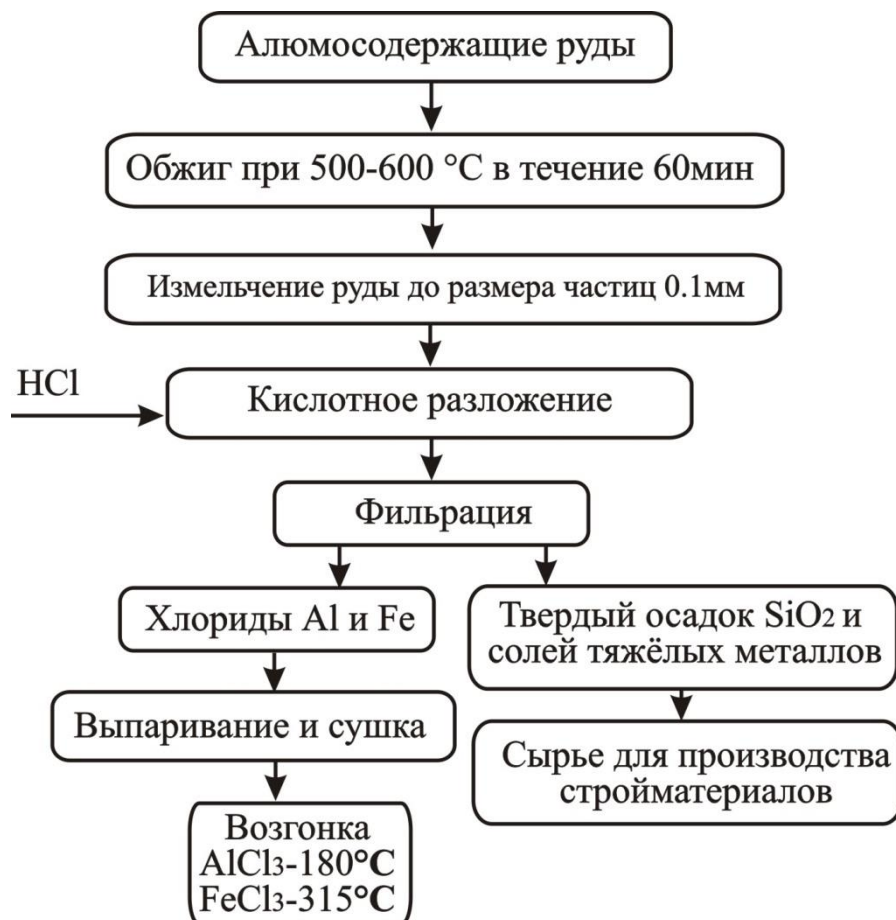


Рис. 2. Технологическая схема получения хлорида железа из алюмосодержащих руд.

Следует отметить, что получение FeCl_3 из местных сырьевых ресурсов является перспективными вполне может быть внедрено в промышленность.

Поступило 17.05.2024 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирсаидов У.М., Мирзоев Д.Х. Комплексная переработка алюмосиликатных руд Таджикистана кислотными способами. – Душанбе: Дониш, 2024, 114 с.
2. Химическая энциклопедия: в 5 т. / Редкол.: Кнунянц И. Л. (гл. ред.). – М.: Советская энциклопедия, 1990, т. 2, с. 140.
3. Назаров Ш.Б., Бобоев Х.Э., Ахмадов А.Ш., Мисратов Ж.А., Мирсаидов У.М. Физико-химические основы получения коагулянтов для очистки вод из алюмосиликатных руд Таджикистана. – Известия АН РТ, 2018, №3(172), с.74-79.
4. А.М.Исоев. Хлорное разложение алюмосиликатных руд Таджикистана. – Доклады НАНТ, 2023, т.66, №1-2, с. 93-96.

5. К.И.Нематуллоев, Н.А.Ашурзода, А.С.Курбонов, И.М.Рахимов, У.М.Мирсаидов. Спекательный способ разложения магнетитовой руды месторождения Харангон Таджикистана. – Доклады НАНТ, 2023, т.66, №7-8, с. 439-444.
6. Сафиев Х.С, Мирзоев Б., Рахимов К., Мирсаидов У.М. Солянокислотное разложение минералов нефелинового сиенита Турпи. – ДАН РТ, 1995, т. 38, № 5-6, с. 52.
7. Мирзоев Д.Х., Бобоев Х.Э., Мирзоев М.Х., Мирсаидов У.М. Разработка технологии комплексного использования аржиллитов месторождения Чашма-Санг. – Горный журнал, 2013, №3, с. 82-84.
8. Каюмов А.М., Мирзоев Д.Х., Пулатов М.С., Мирсаидов У.М. Смешанные коагулянты для очистки воды из зелёных каолиновых глин Таджикистана. – ДАН РТ, 2015, т. 58, №4, с. 316-319.
9. Каюмов А.М., Мирзоев Д.Х., Мирсаидов У.М. Разложения алюмосодержащих руд Таджикистан минеральными кислотами. – Вестник Таджикского педагогического института в Раштском районе. 2021, №4 (8), с. 10-12.

С.М.Досаев, К.И.Нематуллоев, М.М.Тағоев, Х.Р.Раҳмонов, А.С.Қурбонов
БАҲОДИҲИИ МУҚОИСАВИИ ҶУДОКУНИИ ХЛОРИДИ ОҲАН
АЗ МАЪДАНҲОИ ОҲАН ВА АЛЮМИНИЙДОРИ ТОҶИКИСТОН
БО КИСЛОТАИ ХЛОРИД

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

Институти кимиёи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон

Дар кори мазкур баҳодиҳии муқоисавии ба даст овардани хлориди оҳан ҳамчун коагулянт барои тоза кардани об бо роҳи таҷзияи маъданҳои оҳан ва алюминийдори Тоҷикистон бо кислотаи хлорид оварда шудааст. Ашёи хоми мувофиқтар барои коркард ва шароити гузарондани раванд нишон дода шудааст. Дар асоси тадқиқотҳои гузарондашуда нақшаи асосии технологияи аз маъданҳои оҳан ва алюминийдори Тоҷикистон ҳосил намудани хлориди оҳан таҳия карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: маъдани магнетит, хлориди оҳан, коагулянт, худозиш, таҷзия, истихроҷ

S.M.Dosaev, K.I.Nematulloev, M.M.Tagoev, Kh.R.Rakhmonov, A.S.Kurbonov
COMPARATIVE ASSESSMENT OF RECOVERY OF IRON CHLORIDE FROM
IRON- AND ALUMINUM-CONTAINING ORES OF TAJIKISTAN
BY HYDROCHLORIC ACID

National Academy of Sciences of Tajikistan,

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, NAS of Tajikistan

This work provides a comparative assessment of the production of ferric chloride as a coagulant for water purification by decomposition of iron and aluminum ores of Tajikistan with hydrochloric acid. The most suitable raw materials for processing and the conditions for carrying out the process are shown. Based on the research carried out, a basic technological scheme for the production of ferric chloride from iron and aluminum ores in Tajikistan has been developed.

Key words: magnetite ore, ferric chloride, coagulant, sintering, decomposition, extraction.

Сведения об авторах

1. **Досаев Сухробджон Махмадбилолович** – Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, соискатель. E-mail: suhrob.dosaev@mail.ru;
2. **Нематуллоев Камариддин Изатуллоевич** – Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, докторант PhD. E-mail: 909117111@mail.ru;
3. **Тагоев Муродбек Махмадалиевич** – кандидат химических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, ведущий научный сотрудник. E-mail: murodbek.tagoev@mail.ru;
4. **Рахмонов Холназар Рахмоналиевич** – Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, докторант PhD. E-mail: kholnazarrahmonov9@gmail.com;
5. **Курбонов Амиршо Сохибназарович** – доктор химических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, ведущий научный сотрудник. E-mail: amirsho_77@mail.ru.

УДК 544.32

Специальность: 1.4.4 – Физическая химия

М.Д.Бобоёров, Ф.Дж.Саломов, Б.Б.Баротов, А.Ш.Насруллоев, И.Мирсаидзода
**СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
РАЗЛОЖЕНИЯ УРАНСОДЕРЖАЩИХ РУД ТАДЖИКИСТАНА**

*Национальная академия наук Таджикистана,
Агентство по химической, биологической, ядерной и радиационной безопасности*

НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 27.09.2023 г.)

В статье приведён сравнительный термодинамический анализ протекания ряда химических процессов при серноокислотном разложении урансодержащих руд Таджикистана. Показано, что значения энергии Гиббса в рассматриваемых процессах с участием минералов, входящих в урансодержащие руды Таджикистана, подтверждают протекание всех вероятных реакций при стандартных условиях.

Ключевые слова: *сравнительная оценка, термодинамический анализ, энергия Гиббса, урансодержащие руды, разложение.*

Самопроизвольное протекание изобарно-изотермического процесса определяется двумя факторами: энтальпийным, связанным с уменьшением энтальпии системы (ΔH), и энтропийным ($T\Delta S$), обусловленным увеличением беспорядка в системе вследствие роста её энтропии. Разность этих термодинамических факторов является функцией состояния системы, называемой изобарно-изотермическим потенциалом или свободной энергией Гиббса (G , кДж) [1].

Термодинамическое обоснование разложения минералов проведено с использованием следующих уравнений:

$$\Delta H^0_p = \sum \Delta_f H^0_{\text{кон.продукт}} - \sum \Delta_f H^0_{\text{исх. вещ-во}},$$

$$\Delta S^0_p = \sum \Delta S^0_{\text{кон.продукт}} - \sum \Delta S^0_{\text{исх. вещ-во}},$$

$$\Delta G^0_p = \Delta H^0 - T\Delta S^0.$$

Ранее были изучены процессы разложения урансодержащих руд минеральными кислотами, найдены оптимальные условия процессов разложения кислотами и предложены принципиальные технологические схемы переработки урансодержащих руд Таджикистан [2-4].

Руды месторождений “Западный Таджикистан”, “Центральный Таджикистан” и “Северный Таджикистан - 2” имеют сложный состав.

Рентгенофазовым анализом установлено, что в состав этих руд входят следующие минералы (табл. 1).

Адрес для корреспонденции: Бобоёров Мехровар Диловарович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистан. E-mail: m.boboyorov@cbrn.tj.

Таблица 1

Минералы состава урансодержащих руд месторождений “Западный Таджикистан”, “Центральный Таджикистан” и “Северный Таджикистан - 2”

№	Месторождение	Минералогический состав
1	“Центральный Таджикистан”	1. Уранинит 2. Каолинит 3. Доломит 4. Сфен
2	“Западный Таджикистан”	5. Уранинит 6. Альбит 7. Пирит 8. Сфен
3	“Северный Таджикистан - 2”	9. Уранинит 10. Доломит 11. Альбит 12. Каолинит

Для протекающих реакций при разложении руды рассчитаны величины энергии Гиббса, которые обобщены в табл. 2 и в виде графика влияния температуры всех процессов на указанные величины рис. 1. Согласно данным табл. 2 и рис. 1, можно констатировать, что сернокислотное разложение вышеуказанных минералов значительно ускоряется во времени при увеличении температуры.

Таблица 2

Величины энергии Гиббса для реакции вышеуказанных минералов серной кислотой в широком интервале температур

№ (минералы)	ΔG^0_{298}	ΔG^0_{313}	ΔG^0_{333}	ΔG^0_{353}	ΔG^0_{373}
	$\Delta G, \text{кДж/моль}$				
1	-192.41	-188.76	-188.64	-188.53	-188.41
2	-737.53	-749.38	-765.18	-780.98	-796.8
3	-245.3	-244.44	-243.3	-242.16	-241.02
4	-359.91	-362.47	-365.88	-369.28	-372.7
5	-192.41	-188.76	-188.64	-188.53	-188.41
6	-387.35	-373.36	-354.9	-336.4	-317.91
7	-65.7	-93.3	-130.1	-166.9	-203.7
8	-359.91	-362.47	-365.88	-369.28	-372.7
9	-192.41	-188.76	-188.64	-188.53	-188.41
10	-245.3	-244.44	-243.3	-242.16	-241.02
11	-317.91	-336.4	-354.9	-373.36	-387.35
12	-737.53	-749.38	-765.18	-780.98	-796.8

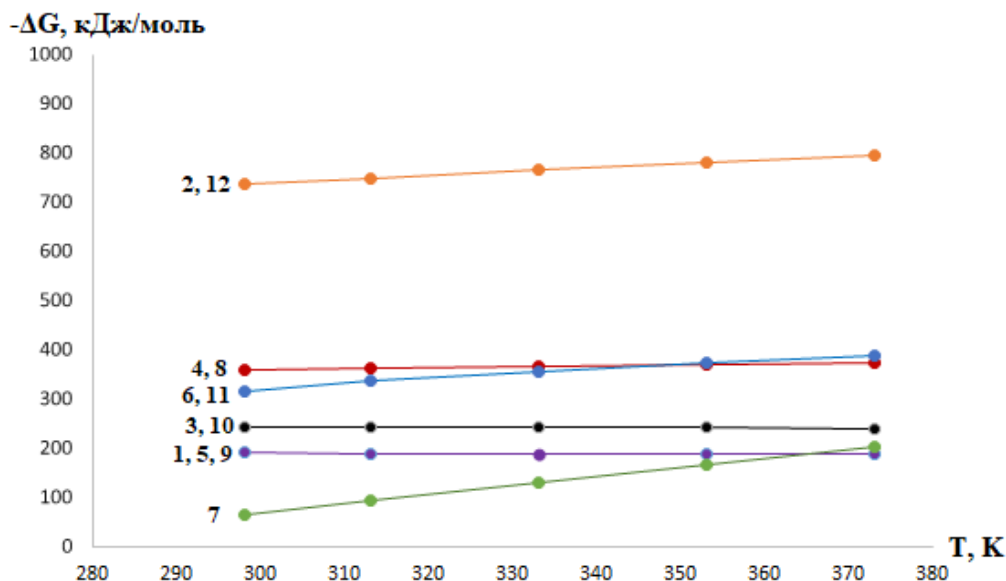


Рис. 1. Зависимость изменения энергии Гиббса (ΔG) от температуры разложения минералов, содержащихся в урановых рудах месторождений Таджикистана (1, 5, 9 – уранинит; 2, 12 – каолинит; 3, 10 – доломит; 4, 8 – сфен; 6, 11 – альбит; 7 – пирит).

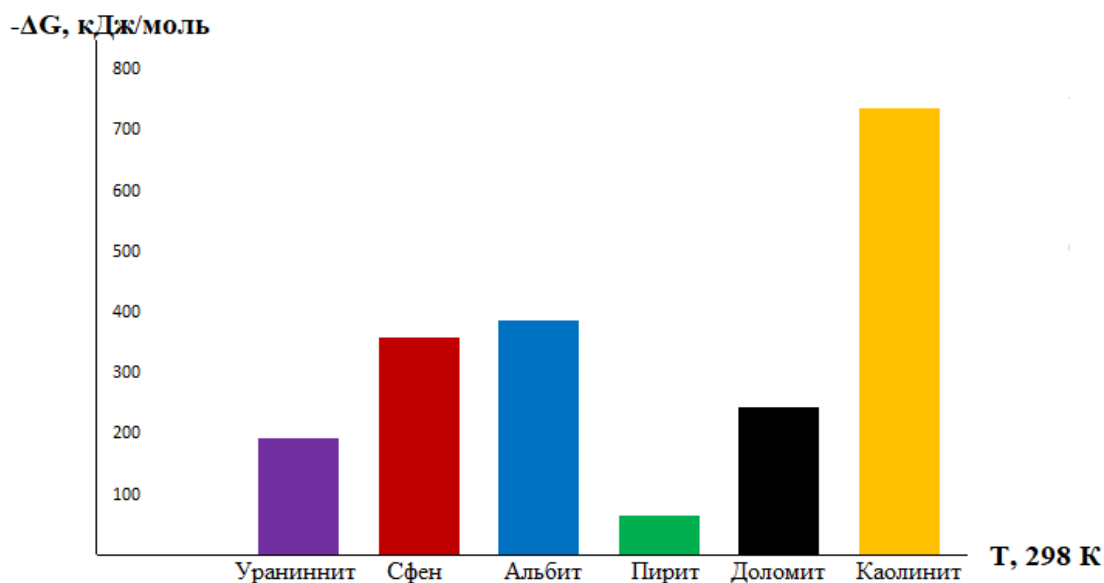


Рис. 2. Термодинамический анализ разложения минералов ураносодержащих руд Таджикистана при стандартных условиях.

Согласно рис. 2, результаты расчётов термодинамических характеристик разложения ураносодержащих руд Таджикистана серной кислотой указывают на вероятность протекания процесса в стандартных условиях.

Таким образом, показана перспективность сернокислотного разложения ураносодержащих руд месторождений Таджикистана при температуре в диапазоне от 298 до 373 К, в котором показано максимальное извлечение как урана, так и других наименований продуктов.

Поступило 27.09.2023 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Краткий справочник физико-химических величин» Под редакцией К.П.Мищенко и А.А.Равделя. – Л.: Химия, 1974, 200 стр.
2. Ходжиев С.К., Назаров Х.М., Баротов Б.Б., Бобоёров М.Д., Мирсаидов У.М. Сернокислотное выщелачивание урана из руд месторождения «Центральный Таджикистан». – ДАН РТ, 2017, №4, с.71-75.
3. Ходжиев С.К., Назаров Х.М., Хочиён М.М., Ахмедов М.З., Баротов Б.Б., Пулатов М.С., Мирсаидов И.У. Возможности переработки урансодержащих руд месторождения «Центральный Таджикистан». – ДАН РТ, 2017, №3-4, с.168-172.
4. Ходжиев С.К., Пулатов М.С., Муминов С.В., Бахронов С.М., Ахмедов М.З., Мирсаидов И.У. Физико-химические основы переработки урановых руд сернокислотным разложением. и др. – ДАН РТ, 2017, №5-6, с.247-250.

М.Д.Бобоёров, Ф.Ч.Саломов, Б.Б.Баротов, А.Ш.Насруллоев, И.Мирсаидзода

**БАҲОДИҶИИ МУҚОИСАВИИ РАВАНДҶОИ ТЕРМОДИНАМИКӢ ҲАНГОМИ
ТАҶЗИЯИ МАЪДАНҶОИ УРАНДОРИ ТОҶИКИСТОН**

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии

АМИ Тоҷикистон

Дар мақола таҳлили муқоисавии термодинамикии як қатор равандҳои химиявӣ ҳангоми таҷзияи маъданҳои урандори Тоҷикистон тариқи кислотаи сулфат оварда шудааст. Бузургии қимати энергияи Гиббс дар равандҳои баррасишаванда бо иштироки минералҳои ба таркиби маъданҳои урандори Тоҷикистон дохилшаванда аз он шаҳодат медиҳад, ки эҳтимоли газариши ҳамаи реаксияҳо дар шароити муқаррарӣ вучуд дорад.

Калимаҳои калидӣ: баҳодиҷи муқоисавӣ, таҳлили термодинамикӣ, энергияи Гиббс, маъданҳои урандор, таҷзия.

M.D.Boboyorov, F.J.Salomov, B.B.Barotov, A.Sh.Nasrulloev, I.Mirsaidzoda

**COMPARATIVE ASSESSMENT OF THERMODYNAMIC PROCESSES
OF DECOMPOSITION OF URANIUM-CONTAINING ORES IN TAJIKISTAN**

National Academy of Sciences of Tajikistan,

Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety and Security Agency, NAS of Tajikistan

The article provides a comparative thermodynamic analysis of the occurrence of a number of chemical processes during the sulfuric acid decomposition of uranium-containing ores in Tajikistan. It is shown that the values of the Gibbs energy in the considered processes involving minerals included in the uranium-containing ores of Tajikistan confirm the occurrence of all possible reactions under standard conditions.

Key words: comparative assessment, thermodynamic analysis, Gibbs energy, uranium-containing ores, decomposition.

Сведения об авторах

1. **Бобоёров Мехровар Диловарович** – кандидат химических наук, Агентствј по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, старший научный сотрудник лаборатории технических услуг. E-mail: m.boboiyorov@cbrn.tj;
2. **Саломов Фирдавс Джаборович** – Агентство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, старший научный сотрудник. E-mail: f.salomov@cbrn.tj;
3. **Баротов Бахтиёр Бурхонович** – кандидат технических наук, Агентство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, начальник научно-исследовательского отдела и технических услуг. E-mail: b.barotov@cbrn.tj;
4. **Насруллоев Асомуддин Шарифович** – Агентство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, докторант PhD. E-mail: nasrulloevasomuddin@gmail.com;
5. **Мирсаидзода Илхом** – доктор технических наук, Агентство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, директор. E-mail: i.mirsaidzoda@cbrn.tj;

УДК 620.193

Специальность: 2.6.17 – Материаловедение

И.Ш.Идиев, М.Т.Норова*, академик НАН Таджикистана И.Н.Ганиев**
**КИНЕТИКА ОКИСЛЕНИЯ ЦИНКОВОГО СПЛАВА ЦАМГ4.5-2,
ЛЕГИРОВАННОГО ИТТРИЕМ**

Таджикский национальный университет,

, Национальная академия наук Таджикистана,*

** Центр по исследованию инновационных технологий НАН Таджикистана,*

*** Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана*

Кинетику высокотемпературного окисления сплава ЦАМг4.5-2, с иттрием изучали термогравиметрическим методом, в атмосфере воздуха при температурах 523, 573 и 623 К, в твердом состоянии. Выявлено, что добавка иттрия до 0.5 мас.% уменьшает скорость окисления, о чем свидетельствует увеличение величины кажущейся энергии активации процесса окисления от 134.1 до 190.8 кДж/моль. В продуктах окисления сплавов наряду с ZnO, Al₂O₃, также обнаружены фазы ZnAl₂O₄, Y₂O₃, MgAl₁₂O₄. Механизм окисления сплавов описывается уравнениями гиперболы.

Ключевые слова: *цинковый сплав ЦАМг4.5-2, иттрий, термогравиметрический метод, кинетика окисления, истинная скорость окисления, энергия активации, механизм окисления.*

В в е д е н и е

Во время эксплуатации при высоких температурах материалы подвергаются сложному взаимодействию температурных изменений, окислительных и коррозионных воздействий окружающей среды и механических напряжений. Эти взаимодействия определяют, будут ли компоненты преждевременно выходить из строя или демонстрировать надежную и безопасную долговременную работу, а также ограничивают верхнюю рабочую температуру, которая определяет степень эффективности и, следовательно, экономические и экологические характеристики материалов [1-4].

Легирование цинка другими элементами является наиболее эффективным методом повышения сопротивляемости к коррозии. Цинк с медью и магнием образует серии промышленных сплавов, которые имеют важное конструкционное значение и обладают особыми преимуществами. В машиностроении, электронике, строительной отрасли, в производстве летательных аппаратов разного уровня и в производстве неметаллических конструкционных материалов широко применяют серии этих сплавов [2,4].

Э к с п е р и м е н т а л ь н а я ч а с т ь

Целью настоящей работы явилось изучение влияния температуры и химического состава на кинетику окисления цинкового сплава ЦАМг4.5-2, легированного иттрием, в твердом состоянии. Для

Адрес для корреспонденции: Норова Муаттар Турдиевна. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/3, Центр по исследованию инновационных технологий НАН Таджикистана.
E-mail: muattar_1975@mail.ru.

исследования процесса окисления была получена цинковый сплав ЦАМг4.5-2, с содержанием иттрия в диапазоне 0.01-0.5 мас.%. Сплав ЦАМг4.5-2 это разновидность цинковых сплавов, основными легирующими элементами которого являются алюминий – 4.5%, магний – 2% и остальное цинк.

Подробная методика исследования кинетики окисления сплавов приведена в работах [5-8]. Термогравиметрическим методом исследовали кинетику окисления сплавов в твердом состоянии на воздухе, для чего измеряли привес массы образца вследствие роста оксидной плёнки во времени при постоянных температурах 523, 573 и 623 К.

Истинную скорость окисления вычисляли по касательным, проведённым от начала координат к кривым, по формуле: $K = g/s \cdot \Delta t$, а значение кажущейся энергии активации процесса окисления вычисляли по тангенсу угла наклона прямой зависимости $\lg K - 1/T$.

На рис. 1 приведены кинетические кривые изменения удельной массы образца (g/s) в зависимости от времени взаимодействия (t) с кислородом газовой фазы и от температуры. Сформировавшаяся оксидная плёнка в начальных стадиях процесса, по-видимому, не обладает достаточными защитными свойствами, о чём свидетельствует рост скорости окисления сплава (рис. 1а).

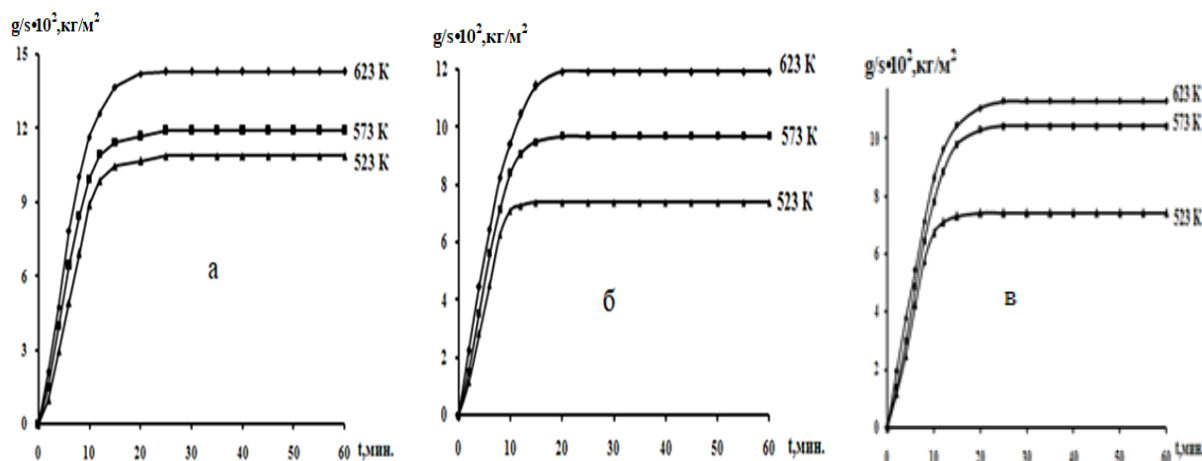


Рис. 1. Кинетические кривые окисления цинкового сплава ЦАМг-4.5-2 (а) с 0.01(б) и 0.5 мас.% иттрия (в).

Реакция окисления сплава с добавками иттрия различной концентрации с кислородом газовой фазы при исследованных температурах не отличается от окисления базового цинкового сплава ЦАМг4.5-2. Линейная зависимость сохраняется в течение 10-15 мин, далее по мере образования оксидной плёнки характер окислительного процесса переходит в гиперболический и формирование защитной оксидной поверхности заканчивается к 60 мин (рис. 1б, в).

Процесс высокотемпературного окисления сплавов кислородом газовой фазы подчиняется гиперболическому закону, что видно из квадратичных кинетических кривых окисления сплавов (зависимостей $(g/s)^2 - t$) (рис. 2), которые не укладываются на прямые линии.

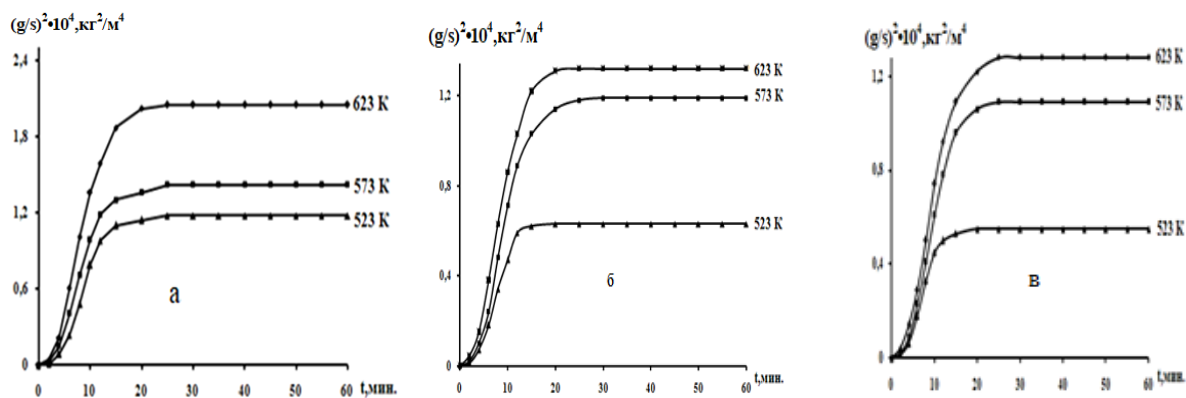


Рис. 2. Квадратичные кинетические кривые окисления цинкового сплава ЦАМг4.5-2 (а) с 0.05(б) и 0.5 мас.% иттрия (в).

Как видно из табл. 1, для всех сплавов независимо от состава с ростом температуры наблюдается увеличение скорости окисления. Зависимость скорости окисления сплавов от концентрации легирующего компонента выглядит иначе.

Итрий снижает окисляемость исходного сплава во всем диапазоне концентрации. Значение скорости окисления уменьшается от $6.46 \cdot 10^{-4}$ кг/(см²·сек) для исходного сплава до $5.00 \cdot 10^{-4}$ кг/(см²·сек), для сплава, легированного 0.5 мас.% иттрием при 623 К. Эффективная энергия активации процесса высокотемпературного окисления исследованных сплавов растёт от 134.5 до 190.1 кДж/моль, соответственно, для цинкового сплава ЦАМг4.5-2 и сплава с добавкой 0.5 мас.% иттрия.

Таблица 1

Кинетические параметры процесса окисления цинкового сплава ЦАМг4.5-2 с иттрием, в твердом состоянии

Содержание иттрия в сплаве, мас. %	Температура окисления, К	Истинная скорость окисления $K \cdot 10^4$, кг·м ⁻² ·с ⁻¹	Кажущаяся энергия активации, кДж/моль
0.0	523	4.86	134.5
	573	5.61	
	623	6.46	
0.01	523	4.51	151.6
	573	5.15	
	623	6.44	
0.05	523	4.50	164.3
	573	4.80	
	623	5.18	
0.1	523	4.30	179.0
	573	4.56	
	623	5.12	
0.5	523	4.17	190.1
	573	4.33	
	623	5.00	

Зависимость $-\lg K - 1/T$ для цинкового сплава ЦАМг4.5-2 с иттрием показывает, что сплав, содержащий 0.5 мас.% иттрия, имеет наименьшее значение скорости окисления и наибольшее значение кажущейся энергии активации – 190.1 кДж/моль (рис. 3). Остальным сплавам характерно повышенное

значение скорости окисления по сравнению с данным сплавом, хотя оно меньше, чем у исходного цинкового сплава ЦАМг4.5-2.

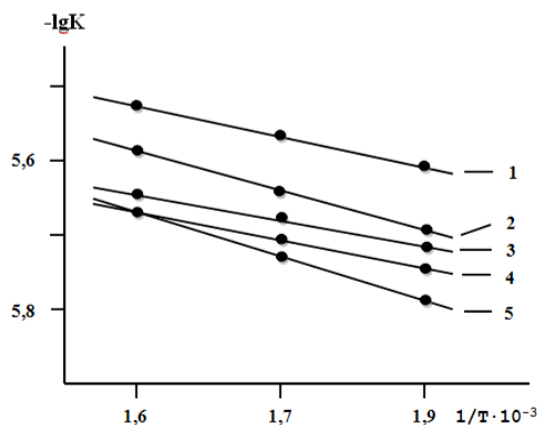


Рис. 3. Зависимость $-lgK$ от $1/T$ для цинкового сплава ЦАМг4.5-2 (1) с иттрием, мас. %: 0.01(2); 0.05(3); 0.1(4); 0.5(5).

Изохронны процесса окисления цинкового сплава ЦАМг4.5-2, легированного иттрием (рис. 4 а, б) показывают уменьшение скорости окисления сплавов с увеличением концентрации иттрия в них как при 10 минутной выдержке сплавов в окислительной атмосфере (кривая 1), так и при 20-минутной выдержке (кривая 2). Добавка иттрия несколько уменьшает скорость окисления сплавов, о чем свидетельствует рост энергии активации процесса окисления.

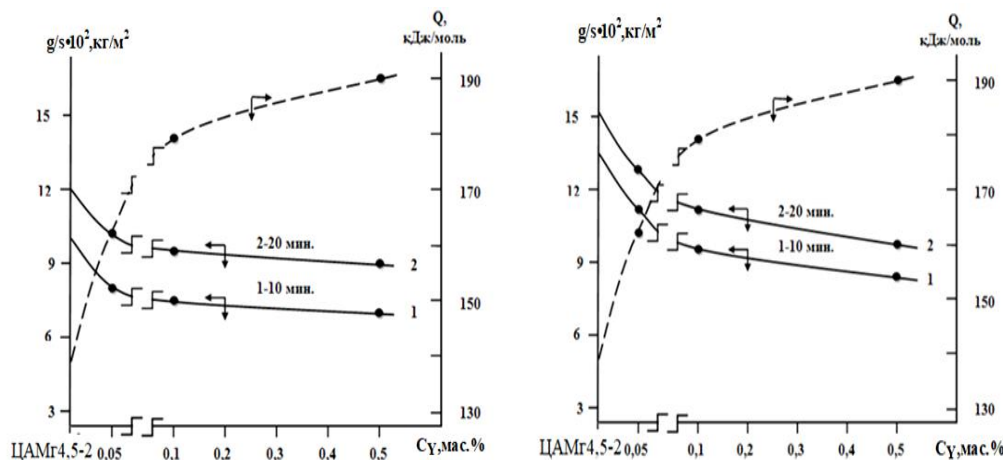


Рис. 4. Изохронны окисления цинкового сплава ЦАМг4.5-2 с иттрием при температурах 523 К (а) и 623 К (б)

Исследуя продукты окисления сплавов, в частности оксидную плёнку, которая формируется при нагреве на поверхности образцов, можно получить важную информацию о механизме окисления. Оксидная плёнка – продукт взаимодействия металла с кислородом воздуха – образуется на поверхности металла, снижая его химическую активность.

Методом рентгенофазового анализа на приборе ДРОН-3 исследованы продукты окисления, образующиеся при окислении легированного иттрием сплава ЦАМг4.5-2. Основными продуктами окисления иттрий-содержащих сплавов являются оксиды алюминия и магния, а оксид $YAlO_3$ содержится в сплавах, богатых иттрием (рис. 5).

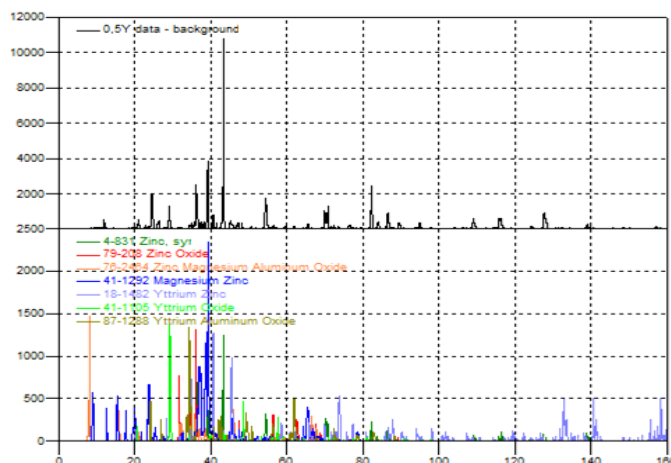


Рис. 5. Штрихдифрактограммы продуктов окисления цинкового сплава ЦАМг4.5-2 с 0.5 мас.% иттрия.

Таким образом, скорость окисления цинкового сплава ЦАМг4.5-2 уменьшается и соответственно наблюдается прирост величины затраченной энергии для окисления образцов в твердом состоянии. Изучение процесса окисления цинкового сплава ЦАМг4.5-2 с иттрием, в указанном интервале его концентраций, при температурах от 523 К до 623К в твердом состоянии характеризуется положительным эффектом, то есть иттрий снижает скорость взаимодействия сплава с газовым компонентом.

Замедление процесса окисления происходит в результате затруднения диффузии металла в том случае, если легирующий компонент вместе с компонентами основного металла образует сложный по составу и прочный по качеству оксид [9]. Характер влияния иттрия на окисляемость цинкового сплава ЦАМг4,5-2 и замедление общей скорости процесса можно объяснить образованием активных оксидов сложного состава, которые закрывают поры в оксиде цинка.

Поступило 01.05.2024 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Nicolau Iralal Morar, Noah Holtham, Lloyd Hackel, Keivan Davami, Montu Sharma, Adrian DeWald Rajkumar Roy. – The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2023, 126:4893-4912
2. Pidcock A., Mori S., Sumner J., Nicholls J., Oakey J. High Temperature Corrosion of HVOF Coatings in Laboratory-Simulated Biomass Combustion Superheater Environments. – High Temperature Corrosion of Materials, 2023, №99 (1-2), pp. 101-115.
3. Simms N.J., Encinas-Oropesa A., Nicholls J.R. Hot corrosion of coated and uncoated single crystal gas turbine materials. – Protective Systems for High Temperature Applications EFC 57: From Theory to Industrial Implementation, 2023, pp. 176-190.
4. Potter, A.N.D.R.E.W., Sumner, J.O.Y., Simms, N.I.G.E.L. – Materials at High Temperatures, 2023, №40(4), pp. 338-347.
5. Идиев И.Ш., Норова М.Т., Ганиев И.Н., Алихонова С.Д. Высокотемпературное окисление цинкового сплава ЦАМг4.5-2, легированного скандием в твердом состоянии – Политехнический вестник. Серия: Инженерные исследования, 2019, № 4 (48), с. 60-65.
6. Норова М.Т., Ганиев И.Н., Эшов Б.Б. Кинетика окисления сплава АМг0.2 с лантаном, празеодимом и неодимом, в твёрдом состоянии. – Известия СПбГТИ(ТУ), 2018, №44, с. 35-39.

7. Вазиров Н.Ш., Норова М.Т., Ганиев И.Н., Курбонова М.З. Влияния церия на кинетику окисления сплава АМг6, в твёрдом состоянии. – Вестник ТНУ. Серия естественных наук, 2018, №2, с. 156-161.
8. Ганиев И.Н., Джураева Л.Т., Эшов Б.Б. Окисление двойных сплавов алюминия с некоторыми элементами второй группы периодической системы Д.И.Менделеева. – Известия РАН. Мет., 1995, №2, с.38-42.
9. Радин А.Я. Исследование кинетики окисления алюминиевых сплавов в жидком состоянии. – Вопросы технологии литейного производства. – М.: Московский авиац. технол. инст., 1961, Вып. 49, с. 98-118.

И.Ш.Идиев, М.Т.Норова*, И.Н.Ганиев**

КИНЕТИКА И ОКСИДШАВИИ ХҶЛАИ РҶҲ ЦАМг4.5-2, КИ БО ИТТРИЙ ЧАВҲАРОНИДА ШУДААСТ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,

**** Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

** Маркази таҳқиқоти технологияҳои инновационии АМИ Тоҷикистон,*

*** Институди химия ба номи В.И.Никитин АМИ Тоҷикистон*

Бо усули термогравиметрӣ кинетикаи баландҳароратии оксидшавии хӯлаи ЦАМг4.5-2 бо иловаи иттрий, дар атмосфераи ҳаво дар ҳароратҳои 523, 573 ва 623 К, дар ҳолати саҳт омӯхта шудааст. Муаян карда шудааст, ки иловаи иттрий то 0.5%-и вазнӣ суръати оксидшавиро паст менамояд, ки шаҳодати он баланшавии қимати энергияи фаъоли раванди оксидшавӣ аз 134.1 то 190.8 кҶ/мол мебошад. Дар маҳсули оксидшавии хӯлаҳо дар қатори ZnO, Al₂O₃ инчунин фазаҳои ZnAl₂O₄, Y₂O₃, MgAl₂O₄ муайян карда шудааст. Механизми оксидшавии хӯлаҳо ба муодилаи гипербола итоат мекунад.

Калимаҳои калидӣ: хӯлаи рӯҳ ЦАМг4.5-2, иттрий, усули термогравиметрӣ, кинетикаи оксидшавӣ, суръати ҳақиқии оксидшавӣ, энергияи фаъолишавӣ, механизми оксидшавӣ.

I.Sh.Idiev, M.T.Norova*, I.N.Ganiev**

KINETICS OF OXIDATION OF ZINC ALLOY TsAMg4.5-2 DOPED WITH YTTRIUM

Tajik National University,

**** National Academy of Sciences of Tajikistan,*

** Center for Research of Innovative Technologies, NAS of Tajikistan,*

*** I.N.Nikitin Institute of Chemistry, NAS of Tajikistan*

The kinetics of high-temperature oxidation of the TsAMg4.5-2 alloy with yttrium was studied by the thermogravimetric method, in an air atmosphere at temperatures of 523, 573 and 623 K, in the solid state. It was revealed that the addition of yttrium to 0.5 wt.% reduces the oxidation rate, as evidenced by an increase in the apparent activation energy of the oxidation process from 134.1 to 190.8 kJ/mol. Along with ZnO and Al₂O₃, the ZnAl₂O₄, Y₂O₃, and MgAl₂O₄ phases were also found in the alloy oxidation products. The oxidation mechanism of alloys is described by hyperbola equations.

Key words: *zinc alloy TsAMg4.5-2, yttrium, thermogravimetric method, oxidation kinetics, true oxidation rate, activation energy, oxidation mechanism.*

Сведения об авторах:

1. **Идиев Идихуджа Шарифович** – кандидат технических наук, Таджикский национальный университет, ассистент кафедры аналитической химии. E-mail: idikhuja92@mail.ru;
2. **Норова Муаттар Турдиевна** – доктор технических наук, Центр по исследованию инновационных технологий НАН Таджикистана. E-mail: muattar_1975@mail.ru;
3. **Ганиев Изатулло Наврузович** – доктор химических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана заведующий лабораторией «Коррозионно-стойкие материалы». E-mail: ganiev48@mail.ru.

УДК 55.551.3

Специальность: 1.6.7 – Инженерная геология, мерзлотоведение и грунтоведение.

М.Р.Рахимбекова, И.С.Оймухаммадзода, Ш.А.Файзуллоев

**ВЛИЯНИЕ МОРФОМЕТРИЧЕСКИХ И КЛИМАТИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ
НА РАЗВИТИЕ ОСЫПЕЙ ДОЛИНЫ РЕКИ ГУНТ***Национальная академия наук Таджикистана,**Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана**(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана А.Р.Файзиевым 08.07.2024 г.)*

В данной статье с целью изучения пространственных закономерностей осыпей проведён анализ соотношения частотности. По результатам исследований обнаружена приуроченность осыпей к определённым показателям крутизны, экспозиции и кривизны склонов, высотной зональности и количеству атмосферных осадков. Выявленные коррелятивы были применены в качестве первичных данных для создания модели восприимчивости к возникновению осыпей. Кроме того, проведена оценка точности созданной модели, которая показывает, что созданная модель имеет очень хорошую прогностическую способность.

Ключевые слова: осыпи, пространственные закономерности, валидация, цифровая модель рельефа, ROC-анализ, AUC, ГИС, дистанционное зондирование.

Долина реки Гунт, которая занимает юго-западную часть Памира, характеризуется высокогорным и сильно расчлененным рельефом. Район работ на севере граничит с Рушанским хребтом, на востоке – с озером Яшикул, на юге – с Шугнанским хребтом, а на западе – с долиной реки Пяндж. Долина реки Гунт характеризуется широким развитием склоновых процессов. К числу этих процессов, которые весьма развиты по левому и правому бортам долины, относятся осыпи. Они распространены на крутых склонах верхних, средних и нижних частей горных зон (рис. 1, 2). Ведущую роль в возникновении осыпей играют геологическое строение, тектоника, геоморфология и землетрясения, свойства горных пород, климатические условия и т.д.

На изучаемой территории осыпи, образующиеся в результате выветривания горных пород, представлены конусами выноса обломочного глыбового, глыбово-щебенчатого материала.

Для выявления основных закономерностей, все выделенные осыпи были внедрены в ГИС-формат. Ранее с применением ГИС-технологии и метода соотношения частотности были анализированы аналогичные факторы, однако в качестве оползнеобразующих факторов.

Адрес для корреспонденции: Рахимбекова Манижа Рахмонбековна, Оймухаммадзода Илхомджон Султон, Файзуллоев Шохнаваз Абдукодирович, 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ. E-mail: rahimbekova9292@mail.ru, Ilhomjon_55@mail.ru, shohnavaz.faizulloev@mail.ru.



Рис. 1. Форма развития осей долины р.Гунт (фото Рахимбековой М.Р.)

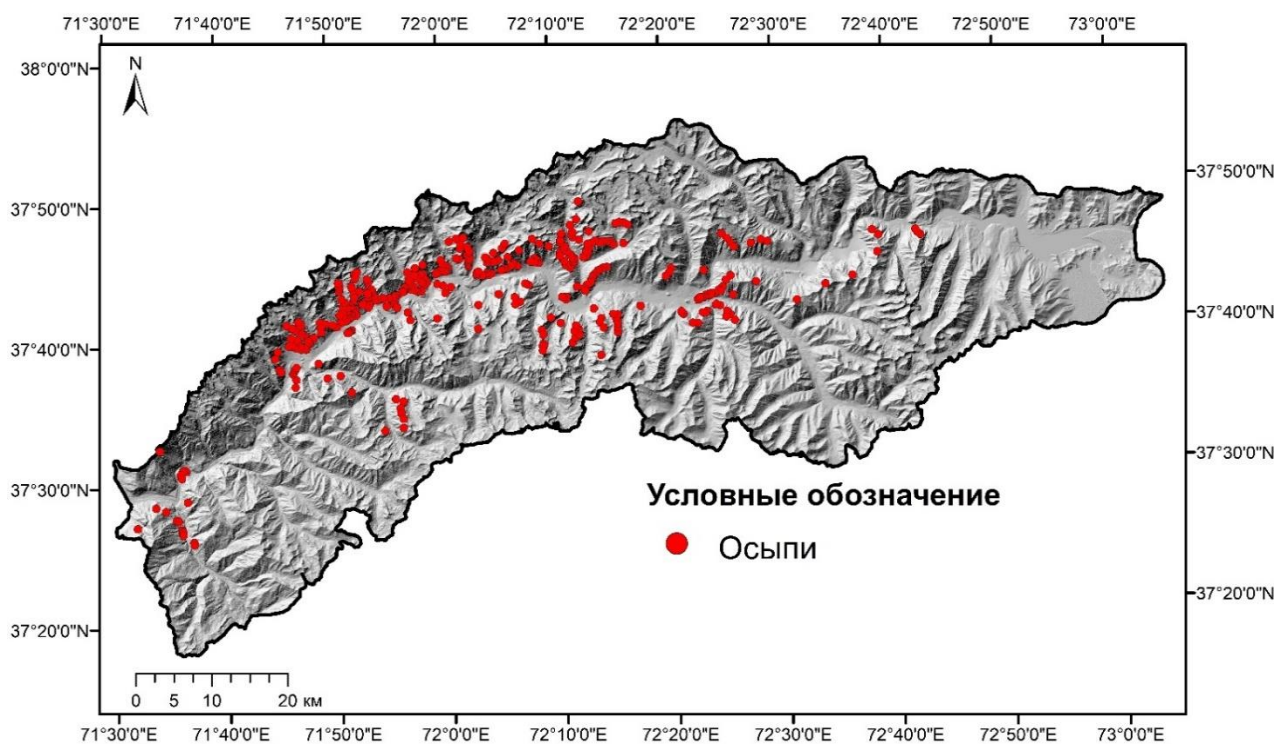


Рис. 2. Карта распространения осыпей по долине реки Гунт

Осыпи в долине реки Гунт имеют следующие закономерности: коэффициент соотношения частотности повышается по мере увеличения показателей крутизны склонов и после показателя $20-30^\circ$ данный коэффициент постепенно падает; наибольшую статистическую привязанность осыпи имеют к склонам с северной ориентацией; значительное количество осыпей развито на высоте 1500-2000 м.

До появления ГИС одной из невыполнимых задач при изучении закономерностей оползневых явлений было представление этих данных в пространстве. Известны работы, в которых выявлены закономерности оползневых явлений и даже на основе этих данных предложена карта вероятности возникновения оползней Таджикистана [7]. Однако в связи с ограниченностью с пространственного анализа эта карта имеет недостаточную точность. Наши высказывания по поводу ранее проведённых работ никак не снижают их ценность. Каждая проведённая работа имеет своё теоретическое и практическое значение.

Работа по выявлению пространственных закономерностей направлена на изучение распространения существующих оползневых явлений по показателям известных факторов их образования. На наш взгляд, наиболее существенными факторами являются крутизна, экспозиция и кривизна склонов, высотная зональность, отдалённость от водораздельных линий и количество атмосферных осадков.

При изучении пространственных закономерностей экзодинамических процессов особое значение имеет цифровая модель рельефа (ЦМР) [8-13].

По результатам корреляционного анализа крутизны склонов обнаружено, что коэффициент соотношения частотности по классам этого фактора варьирует от 0.01 до 2.1 (табл. 1 и рис.3). Как и в случаях изучения оползневых явлений по району каскада ГЭС на реке Вахш, долинах рек Зарафшон, Обихингоу, Сурхоб и по самой долине реки Гунт, корреляция по мере увеличения угла

наклона повышается. Однако, в отличие от выявленных закономерностей оползневых явлений по вышеуказанным районам, корреляция не приобретает ниже единичного значения. Коэффициент соотношения частотности достигает своего максимума на предпоследнем классе крутизны склона (табл.1). Самый низкий коэффициент наблюдается по склонам с углом наклона до 5, что не странно, так как в рамках полевых исследований было замечено, что такие морфометрические условия более благоприятны для накопления материалов склоновых процессов.

Таблица 1

Результаты расчёта соотношения частотности по крутизне склонов

Крутизна склонов (в градусах)					
Класс	Ncell(Ni)	ΣNcell(Ni)	Ncell(Si)	ΣNcell(Si)	Fri
0-5	326033	0.06	92	0.00	0.01
5-10	422690	0.08	492	0.00	0.06
10-20	1089616	0.20	6145	0.05	0.27
20-30	1427522	0.27	24199	0.22	0.81
30-40	1338109	0.25	50200	0.45	1.79
40-50	585173	0.11	25729	0.23	2.10
>50	174692	0.03	5352	0.05	1.46

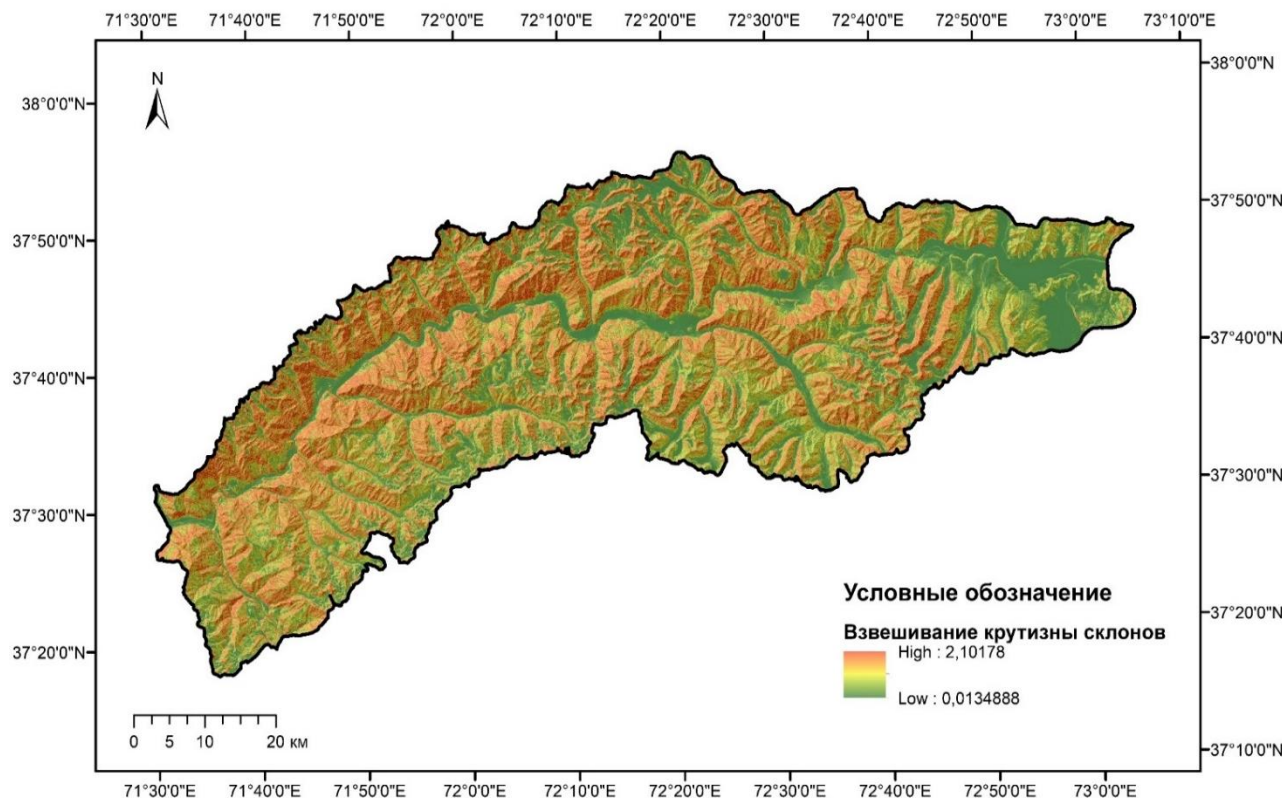


Рис. 3. Карта, показывающая результаты взвешивания крутизны склонов

В классах экспозиций склонов коэффициент соотношения частотности варьируется в пределах 0-1.36, причём максимальное значение приходится на склоны с северо-западной ориентацией. Второе по величине коэффициента соотношения частотности имеет предпоследний класс карты экспозиции склонов. Склоны с северной ориентацией занимают третье место по величине коэффициента соотношения частотности. Такой показатель экспозиции склонов, как северная, с одной стороны, благоприятствует сохранности влаги в почве, что в свою очередь является необходимо важным

компонентом для растительности, а с другой – путём накопления чрезмерной влаги даёт склону дополнительную нагрузку. В связи с неоднозначностью взаимоотношений этого фактора с оползневыми явлениями результаты анализа интерпретируются везде по-разному.

Кроме вышеизложенных классов экспозиций склонов, также надо отметить южную ориентацию склонов, которая имеет 1.04 коэффициент соотношения частотности. По другим классам этого фактора коэффициент ниже единицы.

Таблица 2

Результаты расчёта соотношения частотности по экспозиции склонов

Экспозиция склонов					
Класс	Ncell(Ni)	Σ Ncell(Ni)	Ncell(Si)	Σ Ncell(Si)	Fri
Ровная	49179	0.01	1	0.00	0.00
Северная	685905	0.13	15886	0.14	1.11
Северо-восточная	650060	0.12	10988	0.10	0.81
Восточная	679277	0.13	8952	0.08	0.63
Юго-восточная	646452	0.12	13352	0.12	0.99
Южная	676628	0.13	14679	0.13	1.04
Юго-западная	674980	0.13	14569	0.13	1.03
Западная	662526	0.12	15548	0.14	1.12
Северо-западная	638828	0.12	18233	0.16	1.36

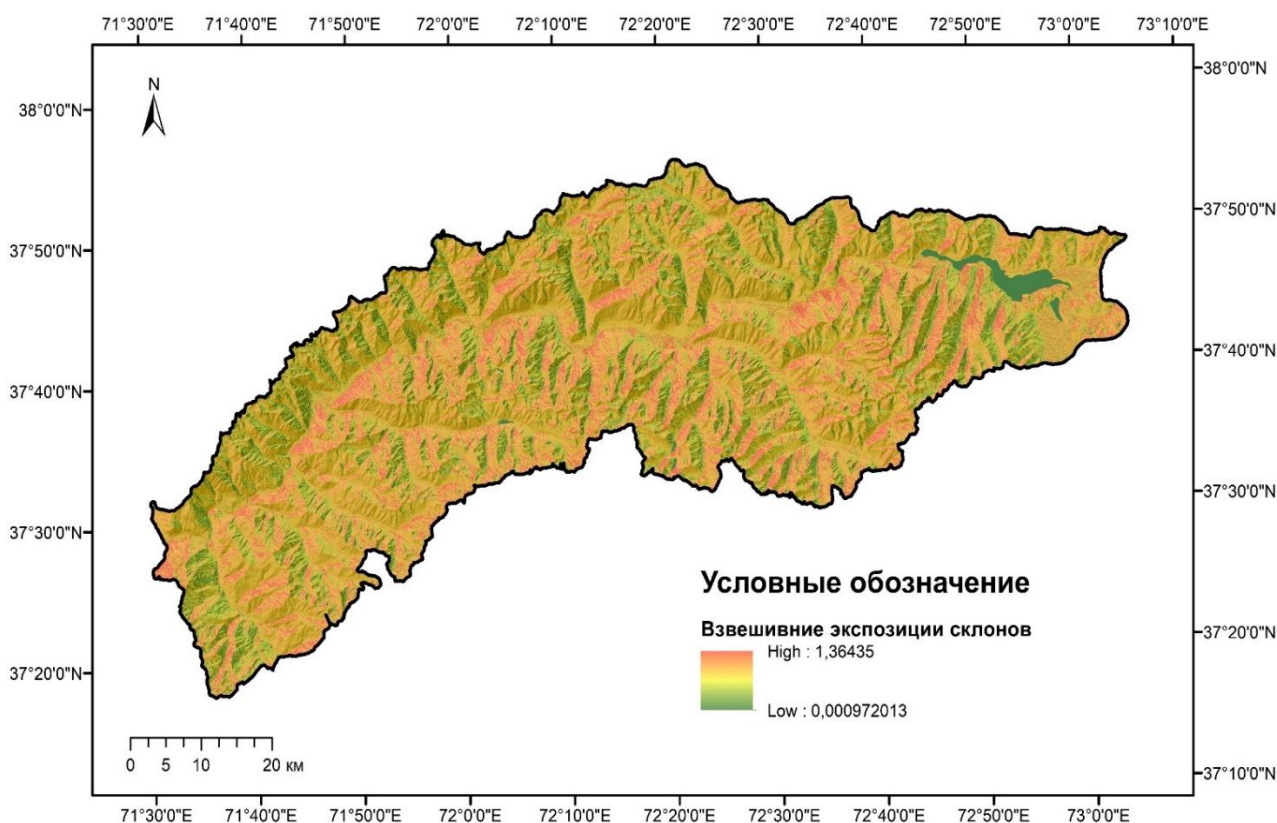


Рис. 3. Карта, показывающая результаты взвешивания экспозиции склонов

По результатам анализа высотной зональности выявлено, что осыпи по классам этого фактора распределены также неравномерно. Согласно этим результатам, самый высокий коэффициент соотношения частотности отмечается на высотных отметках от 3500 до 4000 м. Заметный коэффициент 1.35 соотношения частотности также наблюдается на предпоследнем классе высотной зональности. В

трёх остальных классах высотной зональности коэффициент соотношения частотности меняется следующим образом: первый класс – 0.37, второй класс – 0.8 и пятый класс – 0.62.

Таблица 3

Результаты расчёта соотношения частотности по высотной зональности

Высотная зональность (м)					
Класс	Ncell(Ni)	ΣNcell(Ni)	Ncell(Si)	ΣNcell(Si)	Fri
2048-3000	370560	0.07	2838	0.03	0.37
3000-3500	554436	0.10	9330	0.08	0.80
3500-4000	1176972	0.22	33819	0.30	1.37
4000-4500	1564166	0.29	44207	0.39	1.35
4500-5785	1697701	0.32	22016	0.20	0.62

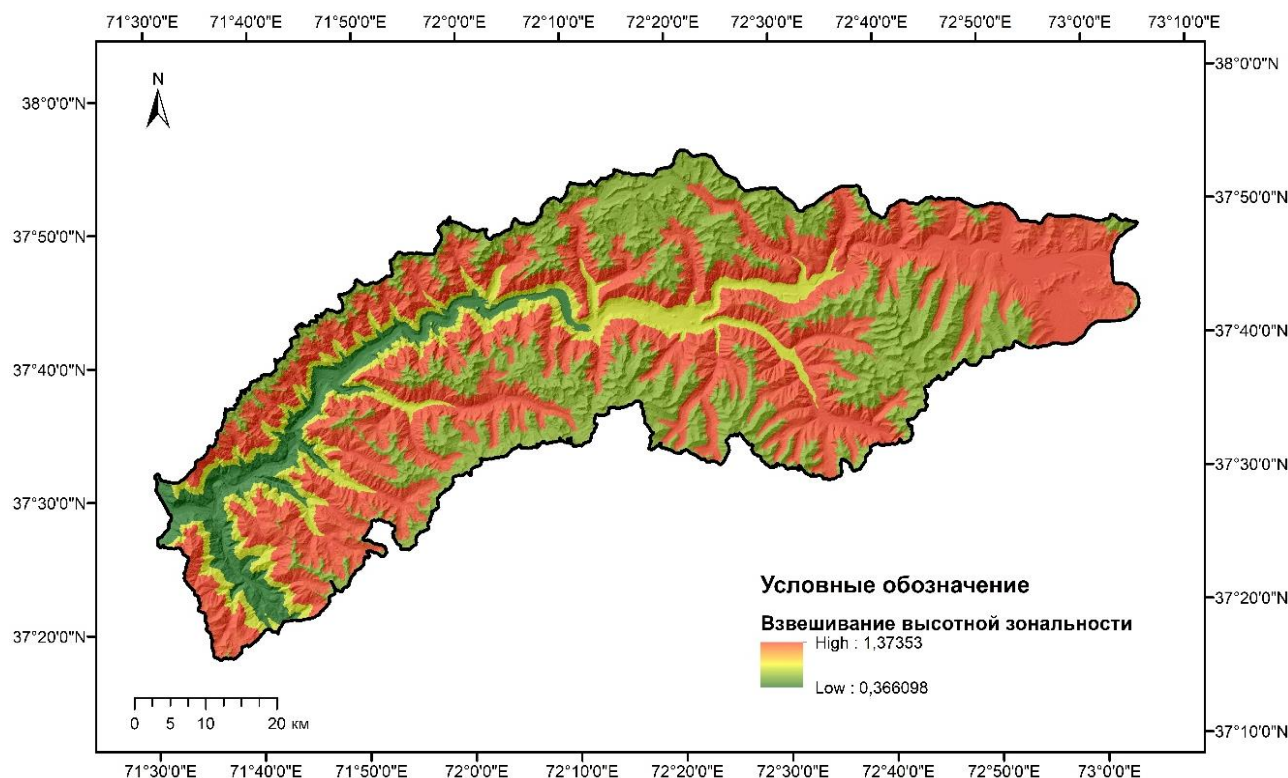


Рис. 4. Карта, показывающая результаты взвешивания высотной зональности

Кривизна склонов является, пожалуй, фактором с наименьшими классами. В долине реки Гунт более наглядные корреляционные связи осыпей наблюдаются со склонами с вогнутой формой, с коэффициентом соотношения частотности равным 1.747. Наименьшая связь осыпей наблюдается со склонами, которые имеют ровную поверхность. Значительный коэффициент соотношения частотности 1.327 обнаружен и у склонов с выпуклой формы.

Таблица 4

Результаты расчёта соотношения частотности по кривизне склонов

Кривизна склонов					
Класс	Ncell(Ni)	ΣNcell(Ni)	Ncell(Si)	ΣNcell(Si)	Fri
Вогнутая	449730	0.08	16433	0.15	1.747
Ровная	4006127	0.75	70578	0.63	0.842
Выпуклая	907976	0.17	25200	0.22	1.327

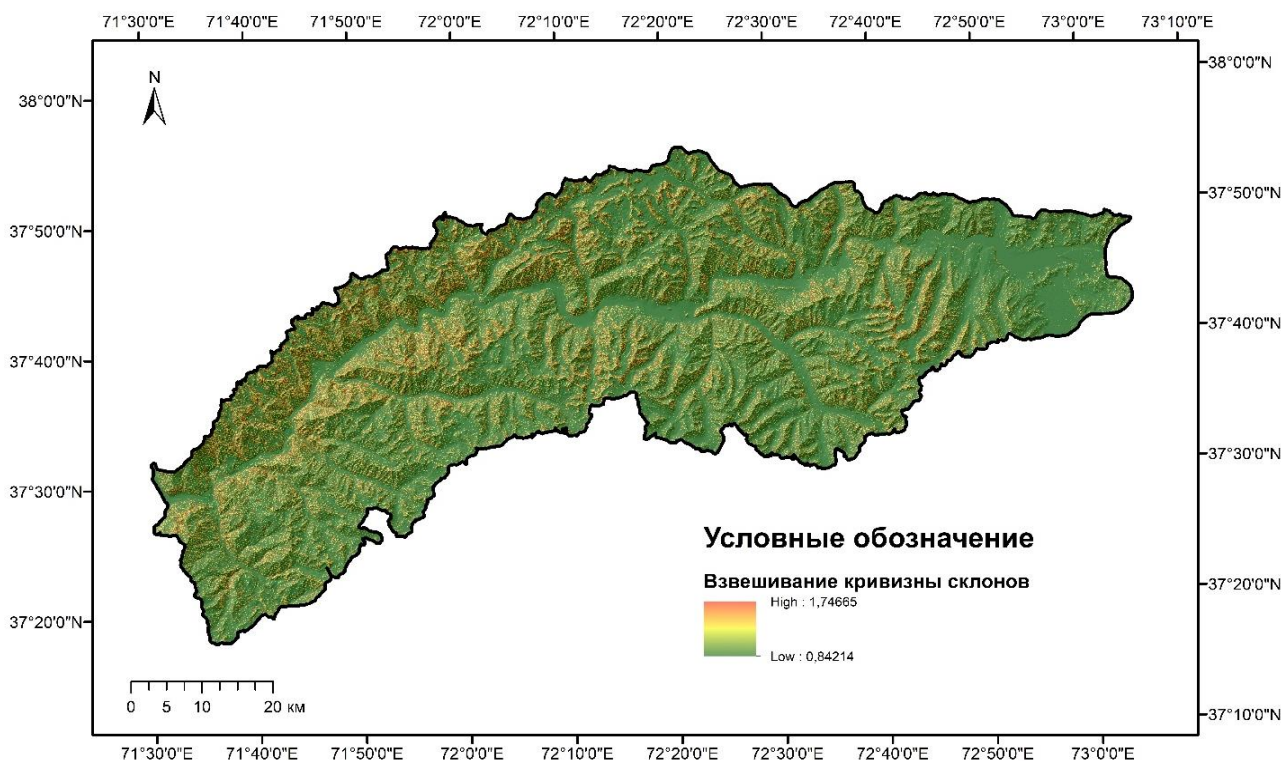


Рис. 5. Карта, показывающая результаты взвешивания кривизны склонов

Распределение атмосферных осадков по долине реки Гунт варьируется в пределах от 289 до 437 мм в год (согласно карты атмосферных осадков климата).

Несмотря на практически одинаковое количество атмосферных осадков, на исследуемой территории осыпи развиты по классам неравномерно. Последний класс карты атмосферных осадков, по результату наших анализов, можно характеризовать как самый основной показатель этого фактора, где коэффициент соотношения частотности равен 2.02 (рис. 6). Приуроченность склоновых процессов к зонам с наибольшим количеством атмосферных осадков уже давно не является секретом. Однако в данной работе приведены количественные данные взаимоотношений, которые иллюстрируются в виде пространственных закономерностей, что является одним из элементов новизны. Остаются ещё два класса, которые привлекают к себе внимание в связи с коэффициентом соотношения частотности выше единицы, это второй и третий классы (таб. 5.).

Таблица 5

Результаты расчёта соотношения частотности по кривизне склонов

Атмосферные осадки, мм/год					
Класс	Ncell(Ni)	Σ Ncell(Ni)	Ncell(Si)	Σ Ncell(Si)	Fri
289-340	899504	0.17	0	0.00	0.00
340-360	1027746	0.19	25413	0.23	1.20
360-380	539513	0.10	16402	0.15	1.47
380-400	1488934	0.27	8833	0.08	0.29
400-437	1476954	0.27	61593	0.55	2.02

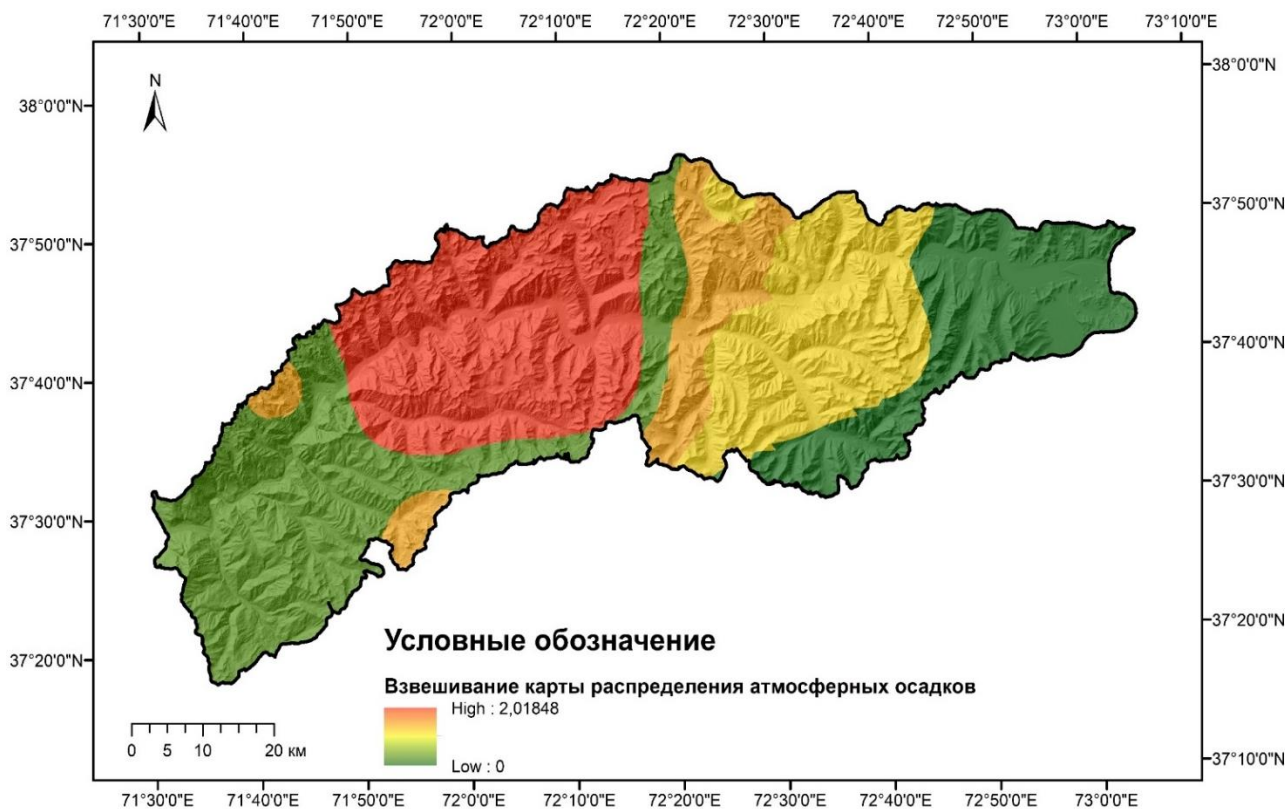


Рис. 6. Карта, показывающая результаты взвешивания атмосферных осадков

Предзаключительный этап ознаменовывается созданием карты восприимчивости к возникновению осыпей (рис. 7). Созданная нами модель показывает, что зонами с очень высокой восприимчивостью к возникновению осыпей являются северные части склонов, а в нижних частях склонов уже накапливаются сами материалы.

Оценка точности модели. После выявления пространственных закономерностей осыпей и создания модели остаётся нерешённым только вопрос о точности модели. Данная процедура проводится с применением ROC-анализа, после которого, согласно авторам некоторых публикаций [1-6], модель приобретает юридическую силу для дальнейшего использования при решении задач практического назначения в случае удовлетворительной прогностической способности или не будет рекомендована для дальнейшего использования в случае неудовлетворительной прогностической способности, что маловероятно.

По табл. 6 видно, что результат анализа точности модели оценивается пятью критериями. Отличную прогностическую способность модель приобретает, когда более 90% осыпных явлений попадают в зону с очень высокой восприимчивостью к возникновению осыпей.

По анализам уже существующих работ, которые в основном направлены на моделирование восприимчивости к возникновению оползней, результат обычно имеет вышесреднюю прогностическую способность и мало где приобретает среднюю прогностическую способность. Для приобретения модели очень хорошего или отличного значения AUC данные для пространственного анализа должны быть подготовлены очень осторожно, чтобы при оценке точности модели избежать попадания анализируемых явлений в районах с очень низкой восприимчивостью и непопадания в зонах с очень высокой восприимчивостью, которые представляют две основные ошибки при создании модели.

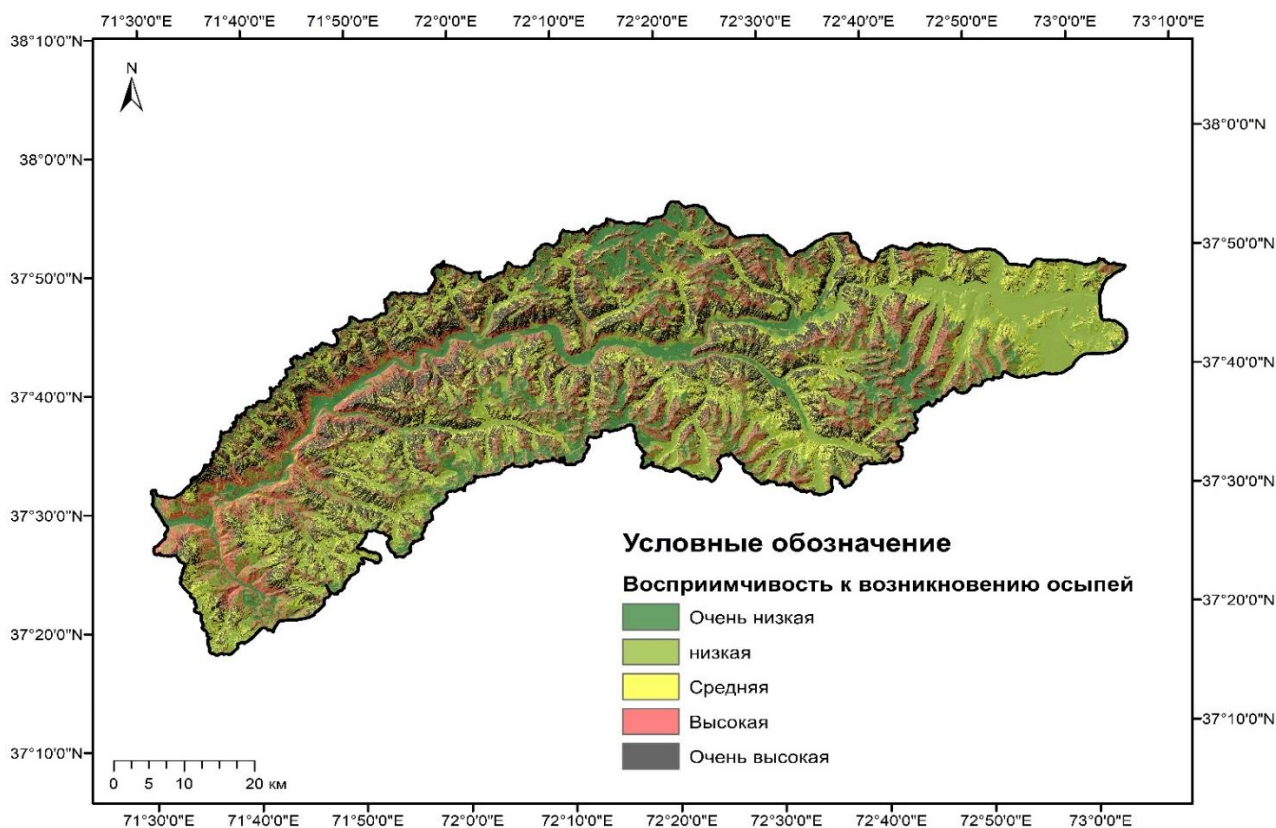


Рис. 7. Карта восприимчивости территории долины реки Гунт к возникновению осыпей

Таблица 6

Статистические характеристики значения AUC [1,3]

Интервал AUC	Качество модели
0.9-1.0	Отличное
0.8-0.9	Очень хорошее
0.7-0.8	Хорошее
0.6-0.7	Среднее
0.5-0.6	Неудовлетворительное

Результат ROC-анализа (рис. 8) свидетельствует о хорошей прогностической способности созданной модели восприимчивости территорий к возникновению осыпей. Хорошее качество модели даёт нам право, без каких-либо сомнений, предложить результаты нашей работы к дальнейшему практическому использованию.

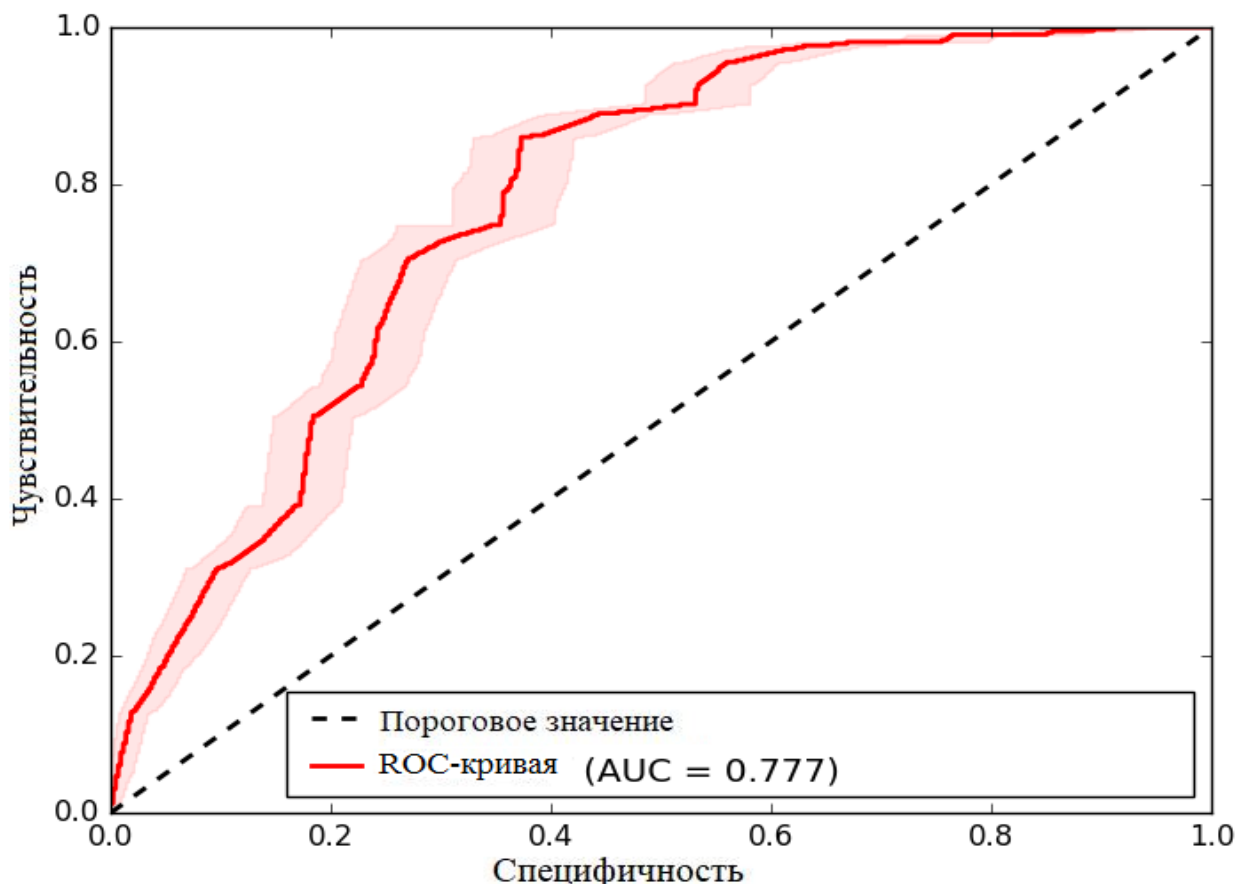


Рис. 8. График, показывающий результат ROC-анализа

Выводы. В последние годы значительное внимание уделяется изучению экзогенных геологических процессов. Одним из хорошо изученных в этом отношении экзогенных геологических процессов являются оползни. Однако кроме изучения оползневых явлений, изучение осыпей также имеет большое значение.

Изучение пространственных закономерностей осыпей играет важную роль для снижения риска в связи с широким их развитием в долине реки Гунт. Статистический анализ факторов позволяет констатировать, что проявления осыпей приурочены к определённым морфометрическим и климатическим условиям. Наиболее ожидаемыми морфометрическими условиями для возникновения осыпей являются склоны с крутизной 40-50, северо-западной ориентации и вогнутой формы. Склоны становятся более уязвимы в зонах с наибольшим количеством атмосферных осадков. Наиболее благоприятными условиями обладают и склоны, находящиеся на отметках от 3500 до 4000 м.

По созданной нами карте восприимчивости территории долины реки Гунт к возникновению осыпей, которая имеет хорошую прогностическую способность, видно, что на склонах изучаемой территории повсеместно можно ожидать процесс осыпания горных пород. Более того, хорошее значение AUC даёт полное право созданной модели быть использованной в практике инженерно-геологических изысканий.

Поступило 11.07.2024 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Gholami M., Ghachkanlu E.N., Khosravi K. Landslide prediction capability by comparison of frequency ratio, fuzzy gamma and landslide index method. – J. Earth Syst. Sci., 2019, 128, 42. <https://doi.org/10.1007/s12040-018-1047-8>
2. Mukhammadzoda S., Shohnavaz F., Ilhomjon O., Zhang G. () Application of Frequency Ratio Method for Landslide Susceptibility Mapping in the Surkhob Valley, Tajikistan. – Journal of Geoscience and Environment Protection, 2021, №9, pp.168-189. doi: 10.4236/gep.2021.912011
3. Wang Y., Sun Deliang W., Haijia Z., Hong Z. Comparison of Random Forest Model and Frequency Ratio Model for Landslide Susceptibility Mapping (LSM) in Yunyang County (Chongqing, China). – International Journal of Environmental Research and Public Health, 2020, №17(12), 4206. doi:10.3390/ijerph17124206
4. Б.А.Аламов, Ш.А.Файзуллоев, Д.Ф.Байгенов, М.Р. Рахимбекова, У.А.Шарифов. Степень восприимчивости склонов долины реки Обихингоу к возникновению оползней. – Известия НАН Таджикистана. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2023, №4(193), с. 136-146.
5. Байгенов Д.Ф., Файзуллоев Ш.А. Рахимбекова М.Р. Влияния крутизны и экспозиции склонов на распространения оползневых явлений долины реки Зеравшан. – Мат-лы междунар. науч.-практ. конференции «Проблемы инженерной геологии, гидрогеологии, гидрологии и разработки месторождений полезных ископаемых Таджикистана и сопредельных территорий», посвящ. 80-летию со дня рождения заслуженного работника Таджикистана, доктора технических наук, профессора, академика инженерной академии республики Таджикистан Комилова Одины Комиловича, 25-го февраля 2022 г., с.214-219.
6. Байгенов Д.Ф., Файзуллоев Ш.А., Аламов Б.А., Рахимбекова М.Р. Оценка восприимчивости к возникновению оползней долины реки Зеравшан методом анализа иерархий. – Вестник филиала Московского Государственного университета им. М.В.Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук, 2024, т. 1, № 1(37), с. 98-109.
7. Ищук А.Р, Шварц А.В, Ищук Н.Р, Ильясова З.Г. Сейсмическая опасность и прогноз возникновения оползней при землетрясениях для горных районов Таджикистана: монография – Душанбе, 2013, с. 72.
8. Рахимбекова М.Р., Файзуллоев Ш.А. Зонирования территории долины реки Гунт по степени восприимчивости к возникновению оползней. – Известия НАН Таджикистана. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2023, №2(191), с. 64-75.
9. Файзуллоев Ш.А. Проблема выбора пространственного разрешения цифровой модели рельефа при моделированиях восприимчивости к возникновению оползням. – Наука и инновация, Таджикский национальный университет. Серия геологических и технических наук, 2020, №3, с. 34-43.
10. Файзуллоев Ш.А., Байгенов Д.Ф., Аламов Б.А., Олимов. Б.К., Ёкубов Ш.А. Прогноз возникновения неглубоких оползней района каскада ГЭС на реке Вахш. – Наука и инновация, Таджикский национальный университет, серия геологических и технических наук, 2020, №2, с. 38-43.
11. Файзуллоев Ш.А., Байгенов Д.Ф., Аламов Б.А., Олимов. Ш.А., Ёкубов Ш.А. Моделирование восприимчивости к оползням района каскада ГЭС на реке Вахш с использованием метода анализа иерархий в ГИС-технологий. – Известия Академии наук Таджикистана, 2020, №4 (181), с. 121-128.

12. Файзуллоев Ш.А., Нарзиев Дж. М., Байгенов Д.Ф., Рахимбекова М.Р., Окилшоев Х.С. Роль инвентаризации оползневых явлений при моделированиях восприимчивости к оползням. – Наука и инновация, Таджикский национальный университет, серия геологических и технических наук, 2020, №4, с. 30-35.
13. Файзуллоев Ш.А., Оймухаммадзода И.С. Оползневая восприимчивость территории Таджикистана. – Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2024, т. 67, №1-2, с. 88-94.

М.Р.Рахимбекова, И.С.Оймухаммадзода, Ш.А.Файзуллоев

ТАЪСИРИ ШАРОИТҲОИ МОРФОМЕТРӢ ВА ИҚЛИМӢ БА ПАҲНШАВИИ САНГРЕЗАҲО ДАР ВОДИИ ДАРӢИ ГУНТ

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

Институти геология, сохтмони ба заминчунӣ тобовар ва сейсмологияи АМИ Тоҷикистон

Дар мақолаи мазкур, бо мақсади омӯзиши қонуниятҳои фазогии сангретаҳо таҳлили муносибати басомадҳо гузаронида шудааст. Аз рӯи натиҷаҳои тадқиқот маълум карда шудааст, ки сангретаҳо ба нишондиҳандаҳои муайяни кунҷ, самт ва шакли нишебӣ, баландии мутлақ ва миқдори боришотҳои атмосферӣ мувофиқ мебошад. Коррелятивҳои муайяншуда барои сохтани модели соепазирӣ аз сангретаҳо истифода шудаанд. Ғайр аз он, баҳодиҳии дақиқияти модели сохташуда роҳандозӣ шудааст, ки натиҷаҳои он нишон медиҳанд, ки модели мо дорои қобилияти пешгӯикунандаи хуб мебошад.

Калимаҳои калидӣ: Сангретаҳо, омилҳо, қонуниятҳои фазогӣ, осебпазирӣ, валидатсия, модели сифрии маҳал, таҳлили ROC, AUC, ГИС, тадқиқоти фосилавӣ

M.R.Rahimbekova, I.S.Oimhammadzoda, Sh.A.Faizulloev

INFLUENCE OF MORPHOMETRIC AND CLIMATIC CONDITION IN DISTRIBUTION OF SCREES IN GUNT RIVER VALLEY

National Academy Science of Tajikistan,

Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology, NAS of Tajikistan

In this article, in order to study the spatial patterns of screes, an analysis of the frequency ratio was carried out. According to the results of the research, screes were found to be confined to certain indicators of steepness, exposure and curvature of the slopes, altitudinal zonality and the amount of precipitation. The derived correlatives used as primary data to create a scree susceptibility model. In addition, the accuracy of the created model was assessed, which shows that the created model has very good predictive ability.

Key words: Scree, factors, spatial patterns, susceptibility, validation, digital elevation model, ROC – analysis, AUC, GIS, remote sensing.

Сведения об авторах:

1. **Рахимбекова Манижа Рахмонбековна** – Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ, научный сотрудник группы геоинформационной системы и дистанционного зондирования. E-mail: rahimbekova9292@mail.ru;
2. **Оймухаммадзода Илхомджон Султон** – Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ, ведущий научный сотрудник лаборатории полезных ископаемых. E-mail: ilhomjon_55@mail.ru;
3. **Файзуллоев Шохнаваз Абдукодирович** – Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ, старший научный сотрудник группы геоинформационной системы и дистанционного зондирования. E-mail: shohnavaz.faizulloev@mail.ru;

УДК 582.26. (584.3)

Специальность: 1.5.9 – Ботаника

Академик НАН Таджикистана Х.Х.Хисориев, М.Т.Бобоев, П.А.Курбонова
**ОБ ЭНДЕМИЧНЫХ РОДА И ВИДА СИНЕ-ЗЕЛЁНЫХ ВОДОРОСЛЕЙ
(CYANOPHYTA, CYANOBACTERIA) ПАМИРА (ТАДЖИКИСТАН)**

Национальная академия наук Таджикистана,

Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана

Приводятся краткие биоморфологические, экологические и описание эндемичных рода *Hillbrichtia Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski* и вида *Hillbrichtia pamiria Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski*, относящихся к отделу сине-зеленых (Cyanophyta-Cyanobacteria) водорослей. Эти таксоны найдены в 2017 в горячих источниках долины р. Гунт на Восточном Памире польскими и таджикскими исследователями.

Ключевые слова: эндемичные род и вид, Cyanophyta, Таджикистан.

Материалом для данного сообщения послужили пробы водорослей, собранные летом 2017 в период совместных экспедиций с польскими учеными по исследованию видового разнообразия водорослей водоёмов высокогорья Таджикистана, в пределах Восточного Памира [1-3]. В данном сообщении речь идёт о новом монотипном роде *Hillbrichtia Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski* и вида *Hillbrichtia pamiria Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski*, относящиеся к отделу сине-зеленых (Cyanophyta, Cyanobacteria) водорослей. Эти таксоны найдены впервые в горячих источниках долины р. Гунт в 2017 в высокогорье Восточного Памира и описаны как новые для науки род и вид [1,4].

Ниже приводится биоморфологическая характеристика, экологическая приуроченность, место обнаружения, местообитаний и ареал вышеуказанных для Таджикистана эндемичных рода и вида.

Род *Hillbrichtia Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski* является эндемичным родом Таджикистана и описан в 2022 как новый для науки род сине-зеленых водорослей польскими исследователями (Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski). Этот род был найден впервые в пробах водорослей, собранных совместно с таджикскими альгологами в горячих источниках долины р. Гунт летом 2017 г. [1].

Поскольку в настоящее время из рода *Hillbrichtia* известно только один единственный вид – *Hillbrichtia pamiria Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski*, его можно считать монотипным родом. Биоморфологическая характеристика данного рода полностью совпадает с таковыми вида *Hillbrichtia pamiria* и ниже приводим описание только вида.

Адрес для корреспонденции: Хисориев Хикмат. 734017, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Каримова, 27, Институт ботаники НАНТ. E-mail: hhikmat@mail.ru.

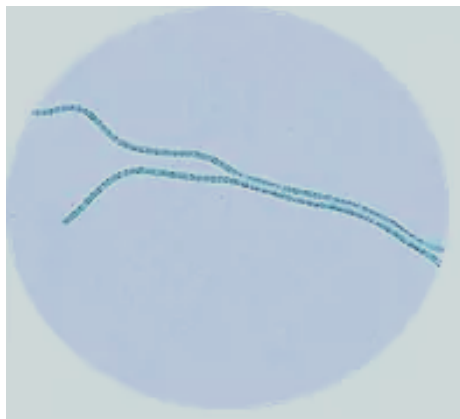


Фото 1. *Hillbrichtia pamiria* [3]*.



Фото 2. Долина р. Гунт [3]*.

*Примечание: фотографии сделаны авторами рода и вида (Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski, 2022).

1. *Hillbrichtia pamiria* Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski.

Вид *Hillbrichtia pamiria* обнаружен в естественных альгоценозах горячих источников высокогорий Таджикистана в 2017 г. и описан новый для науки вид польскими учеными Паноу, Яссерем, Гкелис, Шанцевичем и Квиатковским (Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski). Данный вид впоследствии был культивирован в Лаборатории Микроводорослей и Цианобактерий Университета в Салониках (TAU-MAC) под номерным знаком Cylix 15.1T [1,4].

В связи с тем, что оригинальное описание вида *Hillbrichtia pamiria* приведено на латинском языке [3], ниже мы приводим его описание только на русском языке. Вид *Hillbrichtia pamiria* Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski по морфо-биологической структуре таллома является колониальным видом; колонии раскидистые, от зеленого до сине-зеленого, слизистые, аморфные. Трихомы тонкие, без влагалища, преимущественно ярко-сине-зеленые, обычно прямые или слегка изогнутые, распределены равномерно и свободно без образования матов, клетки слегка сужены у поперечных стенок. Трихомы цилиндрические, не головчатые, подвижные с интенсивным скольжением в направлении продольной оси, иногда сопровождающиеся изгибом и характерным вращением, шириной 1-3 мкм. Клетки обычно на 2-4 мкм длиннее ширины, 4-8 мкм длиной, иногда с видимой хроматоплазмой, иногда с выраженными гранулами цианофицина, без аэротопов (или воздушных вакуолей – наше разъяснение, Х.Х.). Клетки после первого деления перед следующим делением вырастают до размеров материнских клеток. Апикальные клетки в развитых трихомах изогнутые, суженные, округлые или заостренно-округлые, никогда не калиптрованные и не головчатые. Тилакоиды (основные элементы фотосинтезирующей системы цианобактерий) пристеночные, с треугольной или ромбической организацией в поперечном сечении (см. фото 1).

Местообитание: горячие источники по долине р. Гунт, с температурой воды +50.5°C и активной реакцией среды рН=7.2.

Ботанико-географическое положение: Таджикистан, Памиро-Алай, Восточно-Памирский флористический район; высокогорный пустынный пояс; на высоте 3700 м над ур. м. (см. фото 2.)

Ареал: локальный эндемик Восточного Памира.

Наличие в культуре: культивирован в 2022 г. под номерным знаком Cylix 15.1T.

Таксономическое положение: вид *Hillbrichtia pamiria* относится к монотипному роду хелбрихтия (*Hillbrichtia*), семейству колеофасцикуловые (Coleofasciculaceae), порядку колеофасцикуловые (Coleofascicales), классу цианофициевых (Cyanophyceae) и отделу сине-зелёных водорослей (Cyanophyta) или цианобактерий (Cyanobacteria), империи прокариотных организмов (Prokaryotes).

Поступило 05.01.2024 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jasser I., Panou M., Khomutovska N., Sandzewicz M., Panteris E., Niyatbekov T., Lach L., Kwiatowski J., Kokocinski M., Gkelis S. Cyanobacteria in hot pursuit: Characterization of cyanobacteria strains, including novel taxa, isolated from geothermal habitats from different ecoregions of the world. – *Molecular Phylogenetics and Evolution*, 2022, 170(170454), 1-18.
2. Iwona Jasser, Nataliia Khomutovska, Małgorzata Sandzewicz, Łukasz Łach, Hikmat Hisoriev, Monika Chmielewska, Małgorzata Suska-Malawska. High altitude may limit production of secondary metabolites by Cyanobacteria from Eastern Pamir. – Мат-лы Респуб. науч. конференции «Биологическое разнообразие растений, животных и генетические ресурсы горного Бадахшана», Таджикистан, г. Хорог, 2-3 ноября 2023 г. – Душанбе: Дониш, 2023, с. 55.
3. Iwona Jasser, Natalia Khomutowska, Malgorzata Sandzewicz, Lukasz Lach, Hikmat Hisoriev, Monika Chmielewska, Malgorzata Suska-Malawska. High altitude may limit production of secondary metabolites by cyanobacteria. – *Ecohydrology & Hydrobiology*: <https://doi.org/10.1016/j.ecohyd.2024.03.004>, pp. 1-10.
4. Guiry M.D., Guiry, G.M. 11 April 2022. Algae Base. World-wide electronic publication, National University of Ireland, Galway. <https://www.algaebase.org>; searched on 22 May 2024.

Х.Х.Хисориев, М.Т.Бобоев, П.А.Қурбонова

ДОИРИ АВЛОД ВА НАМУДИ ЭНДЕМИКИИ ОБСАБЗҲОИ КАБУДУ-САБЗИ (CYANOPHYTA, CYANOBACTERIA) ПОМИР (ТОЧИКИСТОН)

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

Институти ботаника, физиология ва генетикаи растении АМИ Тоҷикистон

Гузориши мазкур доири хусусиятҳои мухтасари биоморфологӣ, экологӣ ва тавсифи авлоди эндемикӣ (*Hillbrichtia* Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski) ва намуди эндемикӣ (*Hillbrichtia pamiria* Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski), ки ба шӯъбаи обсабзҳои кабуду-сабз (Cyanophyta, Cyanobacteria) дохи мешаванд, баҳс менамояд. Таксонҳои мазкур соли 2017 дар гармчашмаҳои водии д. Ғунди Помири Шарқӣ аз тарафа муҳақиқини Лаҳистон ва Тоҷикистон дарёфт гардидаанд.

Калимаҳои калидӣ: авлод ва намуди эндемикӣ, *Cyanophyta-Cyanobacteria*, Тоҷикистон.

Н.Н.Hisoriev, М.Т.Бобоев, Н.А.Kurbonova
ON ENDEMIC GENUS AND SPECIES OF BLUE-GREEN
(CYANOPHYTA-CYANOBACTERIA) OF PAMIR (TAJIKISTAN)

*National Academy of Sciences of Tajikistan,
Institute of Botany, Plant Physiology and Genetics, NAS of Tajikistan*

There are presented short biomorphologically, ecological, habitat and description of the endemic genus *Hillbrichtia* Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski, and also endemic species *Hillbrichtia pamiria* Jasser, Panou, Sandzewicz, Gkelis & Kwiatowski, which belonging to Cyanophyta-Cyanobacteria. These taxons were found in hot spring algal associations along Gunt river in East Pamir in summer 2017 by Polish and Tajik scientists.

Key words: *endemic genus and species, Cyanophyta-Cyanobacteria, Tajikistan.*

Сведения об авторах:

1. **Хисориев Хикмат Хисориевич** – доктор биологических наук, академик НАНТ, Институт ботаники, физиологии и генетики растений Национальной академии наук Таджикистана, главный научный сотрудник. E-mail: hhikmat@mail.ru;
2. **Бобоев Марио Тиллоевич** – доктор биологических наук, Хатлонский научный центр Национальной академии наук Таджикистана, председатель. E-mail: b_mario@mail.ru;
3. **Курбонова Парвина Абдурахмановна** – кандидат биологических наук, Институт ботаники, физиологии и генетики растений Национальной академии наук Таджикистана, ведущий научный сотрудник. E-mail: parvinmad@mail.ru.

УДК 633.11:581.13

Специальность 1.5.21 – Физиология и биохимия растений

Т.Ш.Авезов, А.Эргашев,

член-корреспондент НАН Таджикистана Х.А.Абдуллаев*

ДЕЙСТВИЕ ПРЕДПОСЕВНОЙ ОБРАБОТКИ СЕМЯН ПШЕНИЦЫ АНТИОКСИДАНТАМИ НА КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ КОЛОСА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВОДОБЕСПЕЧЕНИЯ

*Таджикский государственный педагогический университет имени С. Айни,***Национальная академия наук Таджикистана,***Институт ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана*

Показано, что обработка семян до посева антиоксидантами – α -токоферолом (α -ТОК), аскорбиновой кислотой (АСК) и Zn-оксидиэтилфеноловой кислотой (Zn-ОДЭФК) в условиях почвенной засухи способствует повышению засухоустойчивости растений сортов мягкой и твёрдой пшеницы и благоприятствует лучшему формированию элементов структуры колоса и урожая.

Ключевые слова: пшеница, антиоксиданты, почвенная засуха, структура колоса.

В последние годы для многих культур [1-3] определение содержания и активности антиоксидантов *in vivo* в различных органах и частях растения используется как тест-признак для оценки устойчивости сортов и гибридов к различным стрессорам. Представляется интересным выяснить: как влияет предпосевная обработка семян *in vitro* на устойчивость, адаптивность и продуктивность растений.

В связи с этим целью настоящей работы является изучение влияния предпосевной обработки семян пшеницы раствором природных антиоксидантов (α -токоферол, аскорбиновая кислота) и синтезированного препарата (Zn-ОДЭФК) (синтезирован на кафедре физколлоидной химии химического факультета ТНУ) на формирование элементов колоса пшеницы в оптимальных условиях водообеспечения и в условиях засухи.

Материалы и методы исследования

Объектами исследования служили сорта мягкой (*Triticum aestivum* L. – Зафар) и твёрдой (*Triticum durum* Desf. – Президент) пшеницы. Семена замачивали в чашках Петри в растворе препаратов (0.1% α -токоферол (α -ТОК), 0.5% аскорбиновой кислоты (АСК), 0.5% Zn-ОДЭФК) в течение 24 ч, контролем служили семена, замоченные в дистиллированной воде. Их проращивали в чашках Петри на фильтровальной бумаге (в каждой чашке по 50 шт. семян) в термостате при 25-26°C.

Микрополевые опыты с обработанными семенами проводили на экспериментальном участке Института ботаники, физиологии и генетики растений НАН Таджикистана по методике [4], а анализ структуры колоса по методу [5].

Адрес для корреспонденции: Авезов Тагоймурод Шомуродович. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки 121, Таджикский государственный педагогический университет имени С. Айни.
E-mail: avezov_1991@inbox.ru.

Полученные результаты обработали статистически по Г.Ф.Лакину [6] с использованием компьютерной программы *Microsoft Excel 2010*.

Результаты исследований и их обсуждение

Результаты анализа действия предпосевной обработки семян различных сортов пшеницы антиоксидантами на элементы колоса приведены в табл. 1-2.

Как видно из табл. 1, предпосевная обработка семян сорта мягкой пшеницы Зафар антиоксидантами привела к изменению количественных показателей колоса при различных условиях водоснабжения. Так, в варианте обработки семян препаратом α -ТОК длина колоса заметно увеличивается, а в варианте обработки аскорбиновой кислотой (АСК) и Zn-ОДЭФК – остаётся почти, как в контрольном варианте. По массе колоса, количеству зёрен в колосе, массе зерна одного колоса, массе 1000 семян вариант обработкой α -ТОК имеет преимущество перед другими вариантами опыта. Следует отметить, что по этим параметрам вариант обработки аскорбиновой кислотой (АСК) по сравнению с контролем также имел некоторые преимущества. В варианте обработки семян с Zn-ОДЭФК (Zn-оксидиэтилфеноловой кислота) практически положительного эффекта перед контролем (обработка водой) не имел.

Таблица 1

Влияние предпосевной обработки семян мягкой пшеницы сорта Зафар антиоксидантами на количественные показатели колоса при различных условиях водообеспечения

Показатели	Полив			
	контроль	α -ТОК	АСК	Zn-ОДЭФК
Длина колоса, см	6.9±0.24	7.6±0.62	6.4±0.24	6.5±0.5
Масса колоса, г	1.18±0.04	1.76±0.12	1.30±0.15	1.01±0.14
Количество колосков в колосе, шт.	22.4±0.81	24.6±0.92	23.2±0.58	22.9±4.47
Количество зёрен в колосе, шт.	11.4±0.87	26.4±2.29	17±1.87	14.±2.30
Масса зёрен одного колоса, г	0.60±0.05	1.32±0.08	1.02±0.20	0.66±0.14
Масса 1000 зёрен, г	50.7±1.90	50.8±3.14	53.3±2.37	49.6±2.04
Масса мякины, г	0.57±0.04	0.46±0.04	0.37±0.01	0.35±0.02
	Засуха			
Длина колоса, см	5.5±0.22	9.2±0.46	6.7±0.37	7.3±0.2
Масса колоса, г	0.71±0.07	1.57±0.12	0.85±0.03	0.89±0.10
Количество колосков в колосе, шт.	23.0±0.89	25.2±1.39	24.4±0.74	24.6±1.69
Количество зёрен в колосе, шт.	10.2±1.42	29.2±2.22	19.8±1.01	18±3.52
Масса зёрен одного колоса, г	0.48±0.07	1.16±0.10	0.89±0.04	0.62±0.09
Масса 1000 зёрен, г	42.9±3.68	46.3±3.80	50.1±1.30	43.8±3.79
Масса мякины, г	0.22±0.01	0.41±0.08	0.26±0.01	0.26±0.02

*Примечание: α -ТОК – α -токоферол (0.1%), АСК – аскорбиновая кислота (0.5%), Zn-ОДЭФК – комплексное соединение Zn-оксидиэтилфеноловая кислота (0.5%).

Таблица 2

Влияние предпосевной обработки семян твёрдой пшеницы сорта Президент антиоксидантами на количественные показатели колоса при различных условиях водообеспечения

Показатели	Полив			
	контроль	α -ТОК	АСК	Zn-ОДЭФК
Длина колоса, см	6.9±0.18	7±0.27	6.8±0.2	6.6±0.22
Масса колоса, г	1.52±0.5	1.34±0.24	1.58±0.12	1.25±0.18
Количество колосков в колосе, шт.	29.2±0.58	29.8±1.62	29.2±1.24	24.2±0.66
Количество зёрен в колосе, шт.	29.2±2.05	20.2±5.72	25.8±2.15	22.8±0.86
Масса зёрен в колосе, г	0.74±0.08	0.85±0.18	0.84±0.15	0.75±0.05
Масса 1000 зёрен, г	25.9±1.40	24.9±1.08	26.8±1.28	32.9±1.88
Масса мякины, г	0.46±0.03	0.51±0.07	0.53±0.03	0.33±0.02
	Засуха			
Длина колоса, см	5.28±0.26	6±0.27	5.7±0.3	5.6±0.24
Масса колоса, г	0.81±0.03	0.72±0.22	0.69±0.03	0.96±0.09
Количество колосков в колосе, шт.	23.2±1.39	24±1	24.4±0.97	22.8±0.8
Количество зёрен в колосе, шт.	0±0	12.8±5.07	7.6±2.61	17±2.42
Масса зёрен в колосе, г	0±0	0.36±0.18	0.15±0.04	0.56±0.05
Масса 1000 зёрен, г	0±0	20.1±1.31	18.1±1.41	34.1±1.14
Масса мякины, г	0.23±0.01	0.28±0.01	0.35±0.01	0.25±0.04

*Примечание: α -ТОК – α -токоферол (0.1%), АСК – аскорбиновая кислота (0.5%), Zn-ОДЭФК – комплексное соединение Zn-оксидиэтилфеноловая кислота (0.5%).

В условиях почвенной засухи обнаруживается такая же закономерность, как при условиях полива. Однако здесь следует подчеркнуть, что более резкие различия в варианте обработки α -ТОК наблюдается по таким показателям, как масса колоса, количество зёрен в колосе, масса зерна одного колоса. Вместе с тем, вариант обработки семян с Zn-ОДЭФК на все параметры колоса имел положительный эффект.

У сорта твёрдой пшеницы Президент в условиях полива действие использованных препаратов происходило неоднозначно. Под действием α -ТОК уменьшалась масса колоса и количество зёрен в колосе. В варианте с обработкой аскорбиновой кислотой также происходило уменьшение количества зёрен в колосе. В этом варианте по другим параметрам колоса существенных изменений не наблюдается. Однако, в варианте с обработкой семян Zn-ОДЭФК почти по всем параметрам колоса происходило их уменьшение в разной степени.

В условиях почвенной засухи в контрольном варианте (обработка чистой водой) колос практически нормально не развивался. Вместе с тем, в вариантах с обработкой семян антиоксидантами (α -ТОК, аскорбиновая кислота, Zn-ОДЭФК) обнаруживается в различной степени отклонение параметров сформированного колоса. Это особенно заметно по количеству зёрен в колосе, массе зерен в колосе и массе 1000 зерен в варианте Zn-ОДЭФК. Все это дает нам основание заключить, что использованные препараты-антиоксиданты в условиях почвенной засухи повышают защитные функции растений против окислительного стресса.

Таким образом, полученные данные по действию препаратов с антиоксидантными свойствами на показатели элементов структуры урожая у двух видов пшеницы при различных условиях выращивания (полив и засуха) показывают, что эти препараты, по-видимому, при воздействия

изученных факторов позитивно влияют на защитно-приспособительные механизмы (как компенсаторы или как протекторы).

Поступило 04.06.2024 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алиев К., Диловарова Н.С., Норкулов Н.С., Шукурова М.Х., Норкулова З.Х. Органоспецифичность про- и антиоксидантной системы в условиях *in vitro* и *ex vitro* у картофеля. – Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2021, т. 64, №5-6, с. 341-345.
2. Абдулсамад И., Давлятназарова З.Б., Каспарова И.С., Алиев К.А. Активность разных форм гваякол-пероксидазы у растений батата (*Ipomoea batatas* L) в условиях засоления. – Известия Национальной академии наук Таджикистана. Отделение биологических наук, 2022, №3, с. 75-83.
3. Норкулов Н.Х., Давлятназарова З.Б., Азимов М.Л., Алиев У.К. Роль антиоксидантных ферментов в развитии устойчивости растений к стрессорному воздействию. – Вестник ТНУ. Серия естественных наук, 2014, №1/2, с. 167-173.
4. Доспехов Б.А. Методика полевого опыта. – М.: Агропромиздат, 1985, 351 с.
5. Кумаков В.А. Физиологическое обоснование моделей сортов пшеницы. – М.: Колос, 1985, 270 с.
6. Лакин Г.Ф. Биометрия. Учебное пособие для биол. спец. вузов, 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1990, 352 с.

Т.Ш.Авезов, А.Эргашев, Х.А.Абдуллаев*

ТАЪСИРИ ПЕШ АЗ КИШТ КОРКАРДИ ДОНИ ГАНДУМ БО АНТИОКСИДАНТҲО БА НИШОНДИҲАНДАҲОИ МИҚДОРИИ ХҶША ДАР ШАРОИТИ ГУНОГУНИ ОБТАЪМИНКУНӢ

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айни,

**Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

**Институти ботаника, физиология ва генетикаи растани АМИ Тоҷикистон*

Нишон дода шудааст, ки коркарди дони гандум пеш аз кишт бо маводи зиддиоксидантии α -ТОК, кислотаи аскорбинӣ ва Zn-ОДЭФК ба баландшавии қобиляти ба хушки тобоварии наъҳои гандуми мулоимдона ва гандуми саҳт оварда мерасонад ва барои беҳтар ташаккули сохтори хӯша ҳосили фаровон мусоидат менамояд.

Калимаҳои калидӣ: гандум, зиддиоксидантҳо, хушкии хок, сохтори хӯша.

T.Sh.Avezov, A.Ergashev, Kh.A.Abdullaev

**THE INFLUENCE OF PRE-SOWING TREATMENT OF WHEAT SEEDS
WITH ANTIOXIDANTS ON THE QUANTITATIVE INDICATORS OF THE EAR
UNDER DIFFERENT WATER SUPPLY CONDITIONS**

Tajik State Pedagogical University named after S. Aini.

**National Academy of Sciences of Tajikistan,*

**Institute of Botany, Plant Physiology and Genetics, NAS of Tajikistan*

In this article shown that seed treatment before sowing by the antioxidants (a-TOK, ascorbic acid ACK, Zn-ODEPK) under the conditions of soil drought increases the drought resistance of wheat varieties and favours a better formation of the ear structure of wheat and harvest.

Key words: *wheat, antioxidants, soil drought, ear structure.*

Сведения об авторах:

1. **Авезов Тагоймурод Шомуродович** – Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни, ассистент кафедры геоэкологии. E-mail: avezov_1991@inbox.ru;
2. **Эргашев Абдулложон** – доктор биологических наук, Таджикский национальный университет, профессор кафедры физиологии растений биологического факультета. E-mail: ergash42@mail.ru;
3. **Абдуллаев Хамиджон Абдуллаевич** – доктор биологических наук, Институт ботаники, физиологии и генетики НАН Таджикистана, заведующий лабораторией фотосинтеза и продуктивности растений. E-mail: homidjon1945@mail.ru.