С О Д Е Р Ж А Н И Е

C O N T E N T S

МАТЕМАТИКА

УДК 511.344
Специальность: 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Ш.А.Хайруллоев, Д.Д.Рахмонов

ОЦЕНКА СПЕЦИАЛЬНЫХ КОРОТКИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ В МАЛЫХ ДУГАХ

(Представлено академиком НАН Таджикистана З.Х.Рахмоновым 17.03.2025 г.)

Таджикский национальный университет

Воспользовавшись оценкой средних значений функций Чебышева с линейным экспоненциальным весом в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^{c_1})$, *при* $y \geq x^{\frac{3}{5}+\varepsilon}$ *получена нетривиальная оценка вида*

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon} y^{-\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31} + yq^{-\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31}.$$

Ключевые слова: *короткая тригонометрическая сумма с простыми числами, малые дуги, функция Чебышёва.*

При решении обобщения тернарной проблемы Гольдбаха вида

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N, \quad \left| b_i p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H = N^{\theta}, \quad \frac{1}{2} < \theta < 1, \tag{1}$$

в простых числах p_1, p_2 и p_3 с растущими коэффициентами b_i и при условии, что слагаемые почты равны, возникает задача о поведении специальной короткой линейной тригонометрической суммы с простыми числами вида

$$S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n) e(b\alpha n).$$

Сумму $S_1(b\alpha; x, y)$ впервые изучили З.Х.Рахмонов, И.Аллаков и Б.Х.Абраев [1-3]. Они доказали асимптотическую формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^{c_1})$, $\tau = y^2 x^{-1} \mathscr{L}_x^{-c_2}$, при условии

$$y \geq b x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}_x^{2.25A+c_1+81}, \qquad b \leq \mathscr{L}_x^{B},$$

а в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^{4A+82})$, $\tau = y^2 x^{-1} \mathscr{L}_x^{-4A-82}$ они доказали нетривиальную оценку вида

Адрес для корреспонденции: *Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич, Рахмонов Достонджон Давронович. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: shamsullo@rambler.ru, r.doston@bk.ru.*

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}_x^A}$$

при условии

$$y \geq bx^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}_x^{\frac{8}{3}A+52}, \qquad b \leq \mathscr{L}_x^B,$$

где A, B, c_1 и c_2 – абсолютные постоянные числа, $c_2 \leq c_1$. Воспользовавшись этими результатами они получили асимптотическую формулу для количества решений (1) при условии

$$H \geq (b_1 b_2 b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}, \qquad b_i \leq (\ln N)^{B_i},$$

где b_1, b_2 b_3, N – попарно взаимно простые натуральные числа, B_i – произвольные фиксированные положительные числа. В [4] асимптотическая формула с остаточным членом в больших дугах вида $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^{c_1})$, $\tau = y^2 x^{-1}\mathscr{L}_x^{-c_1}$ была доказана при условии

$$y \geq x^{\frac{5}{8}} bh\mathscr{L}_x^{1.5A+16.5}, \qquad b \leq \mathscr{L}_x^B,$$

где A, B, и c_1 – абсолютные постоянные числа.

В этой работе для специальной короткой тригонометрической суммы с простыми числами вида $S_1(b\alpha; x, y)$ в малых дугах доказана новая равномерная по параметрам оценка (теорема 1), следствием которой является нетривиальная оценка в малых дугах при

$$y \geq x^{\frac{3}{5}+\varepsilon}.$$

Основным моментом доказательства теоремы 1 является сведение оценки суммы $S_1(b\alpha; x, y)$ к оценке средних значений функций Чебышева с линейным экспоненциальным весом в коротких интервалах, то есть к суммам вида

$$t(x; q_1, y, b\lambda) = \sum_{\chi \bmod q_1} \left|\psi(x, \chi, b\lambda) - \psi(x-y, \chi, b\lambda)\right|.$$

Оценки средних значений функции Чебышева с экспоненциальными весами в коротких интервалах были получены в работах З.Х.Рахмонова [5-7], и мы воспользуемся следующим её линейным случаем.

Лемма 1. *Пусть* $y \geq x^{\frac{3}{5}}$, $q \leq x^3 y^{-3}$, $|\lambda| \leq xy^{-2}$, *тогда справедлива оценка*

$$t(x; q, y, \lambda) \ll x^{\frac{1}{2}+0.3\varepsilon} q + x^{\frac{1}{3}+0.3\varepsilon} y^{\frac{1}{2}} q\,|b\lambda|^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{30} + y\mathscr{L}^{30}.$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n *и* ε.

Теорема 1. *Пусть* $y \ge x^{\frac{3}{5}}$, α *– вещественное число, целые числа* a *и* q *удовлетворяют условиям*

$$q \le x^3 y^{-3}, \qquad (a,q)=1, \qquad |\lambda| \le \frac{x}{y^2},$$

тогда для всякого $\varepsilon > 0$ *имеет место оценка*

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\varepsilon} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon} y^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} |b\lambda|^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31} + \frac{y}{q^{\frac{1}{2}}} \mathscr{L}^{31},$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n *и* ε.

Из этой теоремы, имея в виду, что $y \le x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{\frac{c}{5}}$, выполняется соотношение

$$\tau = \frac{y^2}{x\mathscr{L}^c} = \frac{x^3}{y^3} \cdot \frac{y^5}{x^4 \mathscr{L}^c} = \frac{x^3}{y^3} \cdot \left(\frac{y}{x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{\frac{c}{5}}} \right)^5 < \frac{x^3}{y^3},$$

Отсюда в свою очередь при $q \ge b\mathscr{L}_x^c$, имеем

$$\frac{1}{q\tau} = \frac{1}{q} \cdot \frac{x\mathscr{L}^c}{y^2} = \frac{\mathscr{L}^c}{q} \cdot \frac{x}{y^2} \le \frac{x}{by^2},$$

то есть при $\tau = y^2 x^{-1} \mathscr{L}^{-c}$ и $q \ge b\mathscr{L}_x^c$ выполняется условие теоремы 1, поэтому заменяя в утверждение теоремы $|b\lambda|$ на xy^{-2}, имеем

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\varepsilon} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon} y^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} (xy^{-2})^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31} + \frac{y}{q^{\frac{1}{2}}} \mathscr{L}^{31} =$$

$$= x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon} y^{-\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{y}{x^{1+2\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{6}} + 1 \right) + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31} + \frac{y}{q^{\frac{1}{2}}} \mathscr{L}^{31}$$

$$\ll x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon} y^{-\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31} + \frac{y}{q^{\frac{1}{2}}} \mathscr{L}^{31}.$$

Таким образом имеет место утверждение.

Следствие 1.1. *Пусть* $x^{\frac{3}{5}} < y \le x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{\frac{c}{5}}$, α *– вещественное число, целые числа* a *и* q *удовлетворяют условиям*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q)=1. \qquad b\mathscr{L}^c \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}, \quad \tau = \frac{y^2}{x\mathscr{L}^c}.$$

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ *имеет место оценка*

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon} y^{-\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31} + yq^{-\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31},$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n *и* ε.

Доказательство теоремы 1. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$y = x^{\frac{5}{8}} bh \mathscr{L}_x^{1.5A+16.5}.$$

Для удобства, с помощью обозначений $q_1 = q(b,q)^{-1}$ и $b_1 = b(b,q)^{-1}$, числа q и b представим в виде

$$b = b_1(b,q), \qquad q = q_1(b,q), \qquad 1 \le q_1 \le q, \qquad (b_1, q_1) = 1.$$

Следовательно,

$$b\alpha = \frac{ba}{q} + b\lambda = \frac{b_1 a}{q_1} + b\lambda, \quad (b_1 a, q) = 1. \qquad 1 \le q_1 \le \tau, \qquad |b\lambda| \le \frac{b_1}{q_1 \tau}.$$

Отсюда воспользовавшись свойством ортогональности характеров, а затем вспоминая определение суммы Гаусса $\tau(\chi)$ и пользуясь формулой, которая устанавливает связь между значениями примитивных характеров и значениями сумм Гаусса (см. [8], глава VIII, § 1, лемма 3), имеем

$$S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{r=1}^{q_1} e\left(\frac{ab_1 r}{q_1}\right) \sum_{\substack{x-y<n\le x \\ r \equiv n \bmod q_1}} \Lambda(n) e\left(b\lambda n\right) + O(\mathscr{L}_x^2) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} \chi(ab_1) \tau(\overline{\chi}) \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n)\chi(n) e(b\lambda n) + O(\mathscr{L}_x^2). \tag{2}$$

Для характера Дирихле χ по модулю q и вещественного λ вводим функцию

$$\psi(u, \chi, \lambda) = \sum_{n \le u} \Lambda(n)\chi(n) e(\lambda n),$$

которая при $\lambda = 0$ совпадает с обычной функцией Чебышёва, и назовём её функцией Чебышёва с линейным экспоненциальным весом, а затем с помощью функции $\psi(u, \chi, b\lambda)$ правую часть (2) представим в виде

$$S_1(b\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi \bmod q_1} \chi(ab_1) \tau(\overline{\chi}) \left(\psi(x, \chi, b\lambda) - \psi(x-y, \chi, b\lambda)\right) + O(\mathscr{L}_x^2).$$

Переходя к оценкам и пользуясь леммой 3 книги [8], глава VIII, сведем оценку суммы $S_1(b\alpha; x, y)$ к оценке средних значений функций Чебышева с линейным экспоненциальным весом в коротких интервалах, то есть

$$S_1(b\alpha;x,y)\ll\frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)}\sum_{\chi \bmod q_1}\left|\psi(x,\chi,b\lambda)-\psi(x-y,\chi,b\lambda)\right|+\mathscr{L}_x^2\ll$$

$$\ll\frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)}t(x;q_1,y,b\lambda)+\mathscr{L}_x^2.$$

Воспользовавшись леммой 1, а затем известным соотношением $q_1(\varphi(q_1))^{-1}\ll\ln\ln q$, имеем

$$S_1(b\alpha;x,y)\ll\frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)}\left(x^{\frac{1}{2}+0.3\varepsilon}q+x^{\frac{1}{3}+0.3\varepsilon}y^{\frac{1}{2}}q\,|\,b\lambda\,|^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{30}+y\mathscr{L}^{30}\right)+\mathscr{L}_x^2$$

$$\ll\frac{1}{\sqrt{q_1}}\left(x^{\frac{1}{2}+0.3\varepsilon}q+x^{\frac{1}{3}+0.3\varepsilon}y^{\frac{1}{2}}q\,|\,b\lambda\,|^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{30}+y\mathscr{L}^{30}\right)\ln\ln q+\mathscr{L}_x^2\ll$$

$$\ll x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\varepsilon}q^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon}y^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\,|\,b\lambda\,|^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31}+\frac{y}{q^{\frac{1}{2}}}\mathscr{L}^{31}.$$

Поступило 17.03.2025 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Рахмонов З.Х., Аллаков И., Абраев Б.Т. Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми. – Чебышевский сборник, 2023, т. 24, №4, с. 264-298.
2. Рахмонов З.Х., Аллаков И., Абраев Б.Т. Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми. – Доклады НАН Таджикистана, 2023, т. 66, №5-6, с. 257-262.
3. Рахмонов З.Х., Аллаков И., Абраев Б.Т. Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми. – Bulletin of the Institute of Mathematics, 2023, v. 6, №4, pp.122-148.
4. Рахмонов Д.Д. Асимптотическая формула для специальных коротких тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах. – Доклады НАН Таджикистан, 2025, т. 68, № 1-2, с. 11-23.
5. Рахмонов З.Х. Средние значения функций Чебышёва в коротких интервалах. – Мат. междунар. конф., посвящ. 175-летию со дня рождения П.Л.Чебышева, Москва, МГУ, 14-19 мая 1996 г., т. 1, с. 48-55.
6. Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышева в коротких интервалах. – ДАН РТ, 1999, т. 42, №4, с. 14-18.
7. Рахмонов З.Х. О средних значениях функций Чебышёва с экспоненциальным весом в коротких интервалах. – Доклады НАН Таджикистана, 2024, т. 67, №9-10, с. 413-422.
8. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. 2-ое изд. – М.: Наука, 1983.

Ш.А.Хайруллоев, Д.Д.Раҳмонов

БАҲОИ СУММАҲОИ МАХСУСИ КӮТОҲИ ТРИГОНОМЕТРӢ БО АДАДҲОИ СОДДА ДАР КАМОНҲОИ ХУРД

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Хангоми $y \geq x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1.5A+0.25b+18}$, дар камонҳои хурди $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^{c_1})$ бо истифодаи бахои кимати миёнаи функсияи Чебишев бо вазни хаттии экспонесиали бахои ғайритривиалии зерин гирифта шудааст:

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon} y^{-\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31} + yq^{-\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31}.$$

Калимаҳои калидӣ: *суммаи кӯтоҳи тригонометрӣ бо ададҳои содда, камонҳои хурд, функсияи Чебишёв.*

Sh.A.Hayrulloev, D.D.Rakhmonov

ESTIMATION OF SPECIAL SHORT EXPONENTIAL SUMS WITH PRIME NUMBERS IN MINOR ARCS

Tajik National University

Using the estimate of mean values of Chebyshev functions with linear exponential weight in minor arcs $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^{c_1})$, for $y \geq x^{\frac{3}{5}+\varepsilon}$, a nontrivial estimate of the form

$$S_1(b\alpha; x, y) \ll x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\varepsilon} y^{-\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31} + yq^{-\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{31},$$

is obtained.

Key words: *Short exponential sum with prime numbers, minor arcs, Chebyshev function.*

Сведения для авторов:

1. **Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич** – Таджикский национальный университет. E-mail: shamsullo@rambler.ru;
2. **Рахмонов Достонджон Давронович** – Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана. E-mail: r.doston@bk.ru.

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК ТАДЖИКИСТАНА
2025, том 68, №4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5
Специальность: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Г.Джангибеков, Г.М.Козиев, Н.Г.Валиев

О НЁТЕРОВОСТИ И ИНДЕКСЕ ОДНОГО МАТРИЧНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПО ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Национальная академия наук Таджикистана,
Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана С.А.Исхоковым 25.02.2025 г.)

В лебеговом пространстве $L_p^2(D)\,(1<p<\infty)$ вектор-функций с 2 составляющими, суммируемых в D со степенью p, изучена банаховая алгебра $\mathscr{R}$, порожденная некоторыми матричными двумерными сингулярными операторами по ограниченной области. Получены необходимые и достаточные условия нётеровости операторов из этой алгебры и вычислен индекс, который может быть отличным от нуля.

Ключевые слова: *матричный сингулярный интегральный оператор, символ матричного оператора, нётеровость, индекс матричного оператора.*

1. Введение. В работах С.Г.Михлина [1-3] доказано, что если символ многомерного сингулярного интегрального оператора по всему пространству E_n нигде не обращается в нуль, то для скалярного уравнения с таким оператором имеет место теория Фредгольма. Как было показано А.И.Вольпертом [4], существуют двумерные сингулярные системы, имеющие отличный от нуля индекс.

Последующие результаты других авторов: А.Джураева [5,6], Н.Н.Комяка [7], Г.Джангибекова [8], Б.М.Бильмана и Г.Джангибекова [9], К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова [10] и др. [11-13] подтвердили указанный факт для систем двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченной односвязной области. Однако во всех упомянутых выше работах комплекснозначные составляющие ω_1 и ω_2 вектора искомой функции $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$, не являются произвольными функциями, а связаны между собой формулой $\omega_2 = \overline{\omega}_1$, где черта над функцией означает комплексное сопряжение. Естественно, встает вопрос об освобождении от этого ограничения.

Целью данной заметки является изучение банаховой алгебры $\mathscr{R}$, порожденной некоторыми двумерными сингулярными матричными интегральными операторами по ограниченной области. На основе этого получены необходимые и достаточные условия нётеровости операторов из этой алгебры и вычислен индекс, который может быть отличным от нуля.

Адрес для корреспонденции: *Джангибеков Гулходжа. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Институт математики НАН Таджикистана. E-mail: gulkhoja@list.ru.*

В круге $D=\{z:|z|<1\}$ комплексной плоскости $z=x+iy$ будем рассматривать систему двумерных сингулярных интегральных уравнений вида

$$\begin{aligned} a(z)\omega_1(z)+h(z)(B_n\omega_1)(z)+b(z)(S_{-n}\omega_2)(z)+T=g_1(z),\\ c(z)(S_n\omega_1)(z)+d(z)\omega_2(z)+\delta(z)(\overline{B}_n\omega_2)(z)+T=g_2(z), \end{aligned} \tag{1}$$

где $S_{\mp n}, B_n, \overline{B}_n$ – интегральные операторы, определяемые по формулам:

$$(S_{\mp n}f)(z)=\frac{n}{2\pi i^n}\iint\limits_D \frac{e^{\mp in\theta}}{|\zeta-z|^2}f(\zeta)ds_\zeta,\quad \theta=\arg(\zeta-z),\ z\in\overline{D},$$

$$(B_nf)(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{e^{-in\alpha}}{|1-z\overline{\zeta}|^2}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}k(C_{\frac{n}{2}}^k)^2\sigma^{k-1}(1-\sigma)^{\frac{n}{2}-k}f(\zeta)ds_\zeta;$$

$$\alpha=\arg(1-z\overline{\zeta}),\quad \sigma=|\frac{\zeta-z}{1-z\overline{\zeta}}|^2,\ |\sigma|<1,$$

n – целое положительное число, $N=n/2$, если n – чётное, и $N=\infty$, если n – нечётное число, $C_{\frac{n}{2}}^k=\dfrac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}-k+1\right)}{k!}$, $\overline{B}_n=KB_nK$, K – переход к комплексно-сопряжённым значениям; $a(z),b(z),c(z),d(z),h(z),\delta(z)$ – непрерывные в $\overline{D}$ функции.

Введя матрицу $A=(A_{ij})\,(i,j=1,2)$:

$$A=\begin{pmatrix} a(z)I+h(z)B_n & b(z)S_{-n}\\ c(z)S_n & d(z)I+\delta(z)\overline{B}_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

и векторы-столбцы ω и g с комплекснозначными составляющими $\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\end{pmatrix}$ соответственно, можно записать систему (1) в виде одного уравнения

$$A\omega+T\omega=g, \tag{3}$$

где T – вполне непрерывный оператор. Матрица A называется матричным сингулярным оператором в $L_p^2(D),\ 1<p<\infty$, вектор-функций с 2 составляющими, суммируемых в D со степенью p.

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Прежде всего заметим, что из [14] следует ограниченность операторов $S_{\mp n}$ в $L_p(D),(1<p<\infty)$. Следующие утверждения следуют из работ [7-12].

Лемма 1. *Пусть $a(z)$ непрерывна в $\overline{D}$. Тогда операторы $aS_{\mp n}-S_{\mp n}a$, aB_n-B_na вполне непрерывны в $L_p(D)$.*

Лемма 2. *Если $f(z)\in L_p(D)\,(1<p<\infty)$, то*

$$(S_{-n}S_n f)(z) = f(z) - (B_n f)(z), (S_n S_{-n} f)(z) = f(z) - (\overline{B}_n f)(z).$$

Лемма 3. *Операторы* $S_{-n}\overline{B}_n, S_n B_n, B_n S_{-n}, \overline{B}_n S_n, B_n \overline{B}_n, B_n S_n \overline{B}_n$ *вполне непрерывны в* $L_p(D)$, $(1 < p < \infty)$.

В работах И.Б.Симоненко [15] был разработан общий метод исследования линейных операторов “локального типа”. Здесь используются обозначения и терминология, принятые в этих работах.

Определение 1. Существенной нормой оператора A назовём величину

$$\| A \| = \inf_T \| A - T \|,$$

где *infimum* берётся по всем линейным вполне непрерывным операторам T, действующим из $L_p(D)$ в $L_p(D)$. Если $\| A \| = 0$, то оператор A является вполне непрерывным, и наоборот.

Операторы A_1 и A_2 назовем эквивалентными, если $\| A_1 - A_2 \| = 0.$ Коротко этот факт будем записывать так: $A_1 \sim A_2$.

Определение 2. Если M – измеримое множество, то P_M означает оператор, действующий по правилу

$$(P_M f)(z) = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \subset M; \\ 0, & \text{если } z \not\subset M. \end{cases}$$

Определение 3. Оператор A, действующий из $L_p(D)$ в $L_p(D))$, называется оператором локального типа (л.т.), если для любых двух замкнутых непересекающихся множеств U_1 и U_2 оператор $P_{U_1} A P_{U_2}$ вполне непрерывен.

Пусть $a(z), b(z)$ – непрерывные функции в $\overline{D}$. Тогда из [15] следует, что оператор умножения на непрерывную функцию $a(z) f(z)$, а также операторы $b(z)(S_{\mp n} f)(z)$ являются операторами локального типа в $L_p(D), p > 1$.

Известно (см. [1-3]), что оператор A является оператором Нётера тогда и только тогда, когда для него найдутся левый и правый регуляризаторы.

Следующие понятия из [15] являются локальным аналогом понятий регуляризатора и оператора Нётера.

Определение 4. Будем говорить, что оператор R_l (R_r) является локальным левым (правым) регуляризатором оператора A в точке z_0, если найдётся такая окрестность u ($u \in z_0$), что

$$R_l A_u \sim P_u (P_u A R_r \sim P_u).$$

Для сокращения обозначений вместо «локальный левый регуляризатор» будем писать $l.z_0$; вместо «локальный правый регуляризатор» – $r.z_0$.

Лемма 4. *Оператор* B_n *является оператором локального типа в пространствах* $L_p(D),\ p>1,$ *причём если* $z_0 \in D,$ *то* $B_n \sim 0.$

Доказательство леммы 4. Прежде всего отметим, что ядро интегрального оператора B_n имеет особенность порядка 2 лишь на границе единичного круга $\Gamma = \{z : |z| = 1\},$ а во внутренних точках круга ядро является ограниченной функцией. Следовательно интеграл в операторе B_m понимается в смысле Лебега.

Для доказательства первой части леммы покажем, что оператор $P_{U_1}B_nP_{U_2}$ вполне непрерывен для любых двух непересекающихся замкнутых множеств $U_1, U_2.$ Хотя бы одно из этих множеств (например, U_2) не содержит точку 0, то есть. расстояние $\rho(U_2, 0) = d > 0$. Пусть U_2^* – множество, состоящее из точек, симметричных относительно окружности Γ точкам множества $U_2,$ тогда $\rho(U_2^*, U_1) > 0$ и ядро интегрального оператора $P_{U_1}B_nP_{U_2}$ ограничено. Это доказывает первую часть леммы. Пусть $z_0 \in D$. Для доказательства второй части леммы достаточно показать, что существует такая окрестность U точки z_0, что оператор B_nP_U вполне непрерывен в $L_p(D), >1.$ Выберем окрестность U точки z_0 так, чтобы замыкание $U \in D$, тогда $\rho(\overline{U}, \Gamma) = \inf |z - t| = d_1 > 0.$ При $\zeta \in U$ выполняется неравенство $|\zeta| < 1 - d_1$. $|\zeta| < 1 - d_2$. В силу оценки $|1 - \zeta\bar{z}|^{-2} < d_1^{-2}$ ядро интегрального оператора B_nP_U ограничено, а поэтому он вполне непрерывен в $L_p(D), \eth > 1$. Лемма доказана.

Определение 5. Операторы A_1, A_2 $(L_p(D) -> L_p(D))$ будем называть эквивалентными в точке $z_0 (\in D),$ если по любому $\varepsilon (> 0)$ найдется такая окрестность $u(\text{э}\, x_0),$ что $|||\, A_1P_u - A_2P_u\, ||| < \varepsilon$ и $|||\, P_uA_1 - P_uA_2\, ||| < \varepsilon.$ Сокращённо будем писать $A_1 \overset{z_0}{\sim} A_2.$

Определение 6. Оператор A назовем локальным оператором Нётера в точке z_0, если он обладает левым и правым локальными регуляризаторами в этой точке. Для сокращения обозначений вместо «локальный оператор Нётера в точке» z_0 будем писать $n.z_0$.

Пусть $a(z), b(z)$ – непрерывные функции в $\overline{D}$. Тогда из [15] следует, что оператор умножения на непрерывную функцию $(Af)(z) = a(z)f(z)$ эквивалентен в любой точке z_0 $(\in D)$ оператору умножения на постоянную $a(z_0)f(z)$, а также если $z_0 \in \overline{D}$, то операторы $b(z)(S_{\mp n}f)(z) \overset{z_0}{\sim} b(z_0)(S_{\mp n}f)(z).$

Из леммы 4 следует, что если $h(z)$ – непрерывная функция в $\overline{D}$, то

$$\begin{cases} h(z)(B_n f)(z) \overset{z_0}{\sim} h(z_0)(B_n f)(z), \text{ если } z \in \Gamma; \\ h(z)(B_n f)(z) \overset{z_0}{\sim} 0, \text{ если } z \in intD. \end{cases}$$

3. Алгебра, порожденная матричными сингулярными операторами из (2). Рассмотрим алгебру $\mathscr{R}$, порождённую всеми действующими в пространстве $L_p^2(D), 1 < p < \infty$ матричными сингулярными операторами вида A из (2), $T \in \mathscr{I}$ где через $\mathscr{I}$, обозначен идеал содержащихся в $L_p^2(D)$ вполне непрерывных операторов.

Лемма 5. *Матричный оператор A, заданный левой частью формулы (2):*

$$A = \begin{pmatrix} a(z)I + h(z)B_n & b(z)S_{-n} \\ c(z)S_n & d(z)I + \delta(z)\overline{B}_n \end{pmatrix} + T, \tag{4}$$

является элементом алгебры $\mathscr{R}$, и обратно, всякий оператор из алгебры $\mathscr{R}$ представим в виде (2).

Доказательство леммы 5. Пусть операторы $A^{(k)}, (k = 1, 2)$ имеют вид (2):

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_k(z)I + h_k(z)B_n & b_k(z)S_{-n} \\ c_k(z)S_n & d_k(z)I + \delta_k(z)\overline{B}_n \end{pmatrix} + T,$$

где I – тождественный оператор. Тогда очевидно, что $A^{(1)} + A^{(2)}$ имеет такой же вид. Далее, пусть $A^{(1)} \cdot A^{(2)} = A$, тогда на основании результатов леммы 1–4 для элементов матрицы A получим:

$$A_{11} = A_{11}^{(1)} \cdot A_{11}^{(2)} + A_{12}^{(1)} \cdot A_{21}^{(2)} = (a_1 I + h_1 B_n)(a_2 I + h_2 B_n)) + b_1 S_{-n} \cdot c_2 S_n + T =$$

$$= (a_1 a_2 + b_1 c_2)I + (a_1 h_2 + a_2 h_1 + h_1 h_2 - b_1 c_2)B_n + T;$$

$$A_{12} = A_{11}^{(1)} \cdot A_{21}^{(2)} + A_{12}^{(1)} \cdot A_{22}^{(2)} = (a_1 I + h_1 B_n) b_2(z) S_{-n} + (d_2 I + \delta_2 \overline{B}_n) b_1 S_{-n} =$$

$$= (a_1 b_2 + d_2 b_1) S_{-n} + T;$$

$$A_{21} = A_{21}^{(1)} \cdot A_{11}^{(2)} + A_{22}^{(1)} \cdot A_{12}^{(2)} = c_1(z) S_n (a_2 I + h_2 B_n) + (d_1 I + \delta_1 \overline{B}_n) c_2 S_n =$$

$$= (c_1 a_2 + d_1 c_2) S_n + T;$$

$$A_{22} = A_{21}^{(1)} \cdot A_{12}^{(2)} + A_{22}^{(1)} \cdot A_{22}^{(2)} = c_1 S_n b_2 S_{-n} + (d_1 I + \delta_1 \overline{B}_n)(d_2 I + \delta_2 \overline{B}_n) =$$

$$= (d_1 d_2 + c_1(z) b_2) I + (d_1 \delta_2 + d_2 \delta_1(z) + \delta_1 \delta_2 - c_1 b_2)\overline{B}_n + T.$$

Таким образом, коэффициенты матричного оператора A находятся по формулам:

$$\begin{aligned} a &= a_1a_2 + b_1c_2,\ d = c_1b_2 + d_1d_2; \quad h = a_1h_2 + a_2h_1 + h_1h_2 - b_1c_2, \\ b &= a_1b_2 + b_1d_2,\ c = c_1a_2 + d_1c_2; \quad \delta = d_1\delta_2 + d_2\delta_1 + \delta_1\delta_2 - c_1b_2, \end{aligned} \tag{5}$$

следовательно A имеет вид (2) и $A \in \mathscr{R}$. Обратно, если задан матричный оператор $A \in \mathscr{R}$, то задавая матричный оператор $A_2 \in \mathscr{R}$ с условиями

$$a_2(z)d_2(z) - b_2(z)c_2(z) \neq 0 \text{ для } \forall z \in \overline{D},$$

$$(a_2(z) + h_2(z))(d_2(z) + \delta_2(z)) \neq 0 \text{ для } \forall z \in \Gamma,$$

найдём $a_1(z), b_1(z), c_1(z), d_1(z), h_1(z), \delta_1(z)$, то есть матричный оператор A_1.

Каждому матричному оператору $A \in \mathscr{R}$ сопоставим в качестве символа матрицу вида

$$\sigma_A(z,t) = \begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & D(t) \end{pmatrix}, \quad \Delta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}, \quad z \in \overline{D},$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} a(t) + h(t) & 0 \\ 0 & d(t) + \delta(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \Gamma,$$

то есть матрица-функция $\sigma_A(z,t)$ непрерывна на компакте $\overline{D} \times \Gamma$. Множество символов, определённых таким образом, обозначим через $\mathscr{M}$. Очевидно, что $\sigma_I(z,t) = E$, где E – единичная матрица из $\mathscr{M}$, а в силу (3) нетрудно убедиться, что

$$\sigma_{A_1+A_2}(z,t) = \sigma_{A_1}(z,t) + \sigma_{A_2}(z,t),$$
$$\sigma_{A_1 \cdot A_2}(z,t) = \sigma_{A_1}(z,t) \cdot \sigma_{A_2}(z,t).$$

Таким образом, $\mathscr{M}$ есть алгебра. Покажем теперь, что выполнены условия, обеспечивающие применимость к матричным операторам из $\mathscr{R}$ теоремы 6.4.1 из [3]. Прежде всего имеет место

Лемма 6. *Символ $\sigma_A(z,t) \in \mathscr{M}$ матричного оператора $A \in \mathscr{R}$ тождественно равен нулю, тогда и только тогда, когда $A \in \mathscr{I}$.*

Необходимость. Пусть $A \in \mathscr{R}$, имеет вид (3) и пусть $\sigma_A(z,t) \equiv 0$ при $z \in \overline{D}$, и $h(t) \equiv \delta(t) \equiv 0$ при $t \in \Gamma$. Тогда $a(z) \equiv b(z) \equiv c(z) = d(z) \equiv 0$ при $t \in \Gamma$. Поэтому $A \in \mathscr{I}$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть $A \in \mathscr{I}$. Покажем, что тогда $\sigma_A(z,t) \neq 0$ при некотором $z \in \overline{D}$. Предположим обратное, то есть пусть, например, $a(z) \neq 0$ и $c(z) \neq 0$ при некотором $z \in \overline{D}$. Пусть z_0 – строго внутренняя точка области D. Тогда в силу непрерывности функции $a(z) \neq 0$ и $c(z) \neq 0$ при $z \in U_{z_0}$, где $U_{z_0} = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$, причём $\overline{U}_{z_0} \in intD$. Поскольку оператор $P_{U_{z_0}}$ умножения на

характеристическую функцию U_{z_0} ограничен в $L_p(D)$, то $P_{U_{z_0}} A P_{U_{z_0}} \in \mathscr{J}$. Учитывая, что ядра операторов B и $\overline{B}$ имеют особенность лишь на границе Γ области D, имеем

$$P_{U_{z_0}} A P_{U_{z_0}} = \begin{pmatrix} a(z)I & b(z)S_{-n} \\ c(z)S_n & d(z)I \end{pmatrix} \in \mathscr{J}, \quad z \in U_{z_0}.$$

$$P_{U_{t_0}} A P_{U_{t_0}} = \begin{pmatrix} a(t)I + h(t)B & b(t)S_{-n} \\ c(t)S_n & d(t)I + \delta(t)\overline{B} \end{pmatrix}, \quad t \in U_{t_0}.$$

Так как $a(z) \neq 0$ и $c(z) \neq 0$ при $z \in U_{z_0}$, то отсюда следует, что вполне непрерывным из $L_p^2(U_{z_0})$ в $L_p^2(U_{z_0})$ должен быть матричный оператор:

$$P_{U_{z_0}} A P_{U_{z_0}} = \begin{pmatrix} I & \dfrac{b(z)}{a(z)} S_{-n} \\ \dfrac{d(z)}{c(z)} S_n & I \end{pmatrix} \in \mathscr{J}, \quad z \in U_{z_0}.$$

Покажем, что на самом деле это не так. Рассмотрим ограниченную в $L_p^2(U_{z_0})$ последовательность вектор-функций: $f^{(n)}(z) = \begin{pmatrix} f_1^{(n)}(z) \\ f_2^{(n)}(z) \end{pmatrix}$

$$f_1^{(n)}(z) = \begin{cases} (\overline{z} - \overline{z}_0)^n, \text{ если } z \in U_{z_0}; \\ 0, \text{ если } z \in \overline{D} \setminus U_{z_0}. \end{cases}, \quad f_2^{(n)}(z) = \begin{cases} (z - z_0)^n, \text{ если } z \in U_{z_0}; \\ 0, \text{ если } z \in \overline{D} \setminus U_{z_0}. \end{cases},$$

Без особого труда можно убедиться, что $(P_{U_{z_0}} A f^{(n)} P_{U_{z_0}}) = f^{(n)}$, то есть матричный оператор $P_{U_{z_0}} A P_{U_{z_0}}$ имеет в U_{z_0} бесконечное число линейно независимых решений $f^{(n)}(z)$, что противоречит вполне непрерывности матричного оператора $P_{U_{z_0}} A P_{U_{z_0}}$. Поэтому предположение $a(z) \neq 0$ и $c(z) \neq 0$ неверно, и $a(z) \equiv 0$ и $\tilde{n}(z) \equiv 0$, где $z_0 \in intD$. Поскольку z_0 – любая внутренняя точка области D, то в силу непрерывности функций $a(z)$ и $c(z)$, $a(z) \equiv 0$ и $c(z) \equiv 0$ в D.

Следствие. Из результатов лемм 5 и 6 следует, что если $z \in intD$, то

$$P_{U_{z_0}} A P_{U_{z_0}} \overset{z_0}{\sim} \begin{pmatrix} a(z_0)I & b(z_0)S_{-n} \\ c(z_0)S_n & d(z_0)I \end{pmatrix}, \quad z \in U_{z_0}$$

и если $z \in \Gamma$, то

$$P_{U_{t_0}} A P_{U_{t_0}} \overset{t_0}{\sim} \begin{pmatrix} a(t_0)I + h(t_0)B_n & b(t_0)S_{-n} \\ c(t_0)S_n & d(t_0)I + \delta(t_0)\overline{B}_n \end{pmatrix}, \quad t \in U_{t_0}.$$

Лемма 7. *Пусть символ матричного оператора* A *из* $\mathcal{R}$ *не вырождается. Тогда:*

если $z_0 \in D$, *то матричный оператор*

$$R_{z_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{d(z_0)}{\Delta(z_0)} I & -\dfrac{b(z_0)}{\Delta(z_0)} S_{-n} \\ -\dfrac{c(z_0)}{\Delta(z_0)} S_n & \dfrac{a(z_0}{\Delta(z_0)} I \end{pmatrix}, \; z \in U_{z_0}, \; \Delta(z_0) = a(z_0)d(z_0) - b(z_0)c(z_0)$$

будет левым и правым локальным регуляризатором оператора A_{z_0} *в точке* z_0 *;*

если же $t_0 \in \Gamma$, *то*

$$R_{t_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{d(t_0)}{\Delta(t_0)} I - \dfrac{d(t_0)h(z_0) + b(t_0)c(t_0)}{\Delta(t_0)(a(t_0) + h(t_0))} B_n & -\dfrac{b(t_0)}{\Delta(t_0)} S_{-n} \\ -\dfrac{c(t_0)}{\Delta(t_0)} S_n & \dfrac{a(t_0}{\Delta(t_0)} I - \dfrac{a(t_0)\delta(t_0) + b(t_0)c(t_0)}{\Delta(t_0)(d(t_0) + \delta(t_0))} \overline{B}_n \end{pmatrix}, \quad t \in U_{t_0},$$

$$\Delta(t_0) = a(t_0)d(t_0) - b(t_0)c(t_0),$$

будет левым и правым локальным регуляризатором оператора A_{t_0} *в точке* t_0.

В итоге имеем

Теорема. *Для того, чтобы произвольный матричный оператор* A *из алгебры* $A \in \mathscr{R}$ *был нётеровым в пространстве* $L_p^2(D), 1 < p < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{aligned} &a(z)d(z) - b(z)c(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad \forall z \in \overline{D}, \\ &a(t) + h(t) \neq 0, \, d(t) + \delta(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad \forall t \in \Gamma. \end{aligned} \tag{6}$$

При выполнении этих условий индекс матричного оператора A *равен*

$$\varkappa = -\frac{n}{2\pi}[\arg((a(t) + h(t))(\overline{d(t)} + \overline{\delta(t)}))]|_{\Gamma}.$$

Поступило 25.02.2025 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Михлин С.Г. Сингулярные интегральные уравнения. – Успехи матем.наук, 1948, №3, с.29-112.
2. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962, 254 с.
3. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: ВШ, 1977, 625 с.

4. Вольперт А.И. Об индексе краевых задач для системы гармонических функций с тремя независимыми переменными. – ДАН СССР, 1960, т.133. №1, с.13-15.
5. Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области. – ДАН СССР, 1971, т.197, №46, с.1251-1254.
6. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1987, 415 с.
7. Комяк И.И. Условия нётеровости и формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений по круговой области. – Дифференц. уравнения, 1980, т.16, №2, с.328-343; 1991, №1, с.19-28.
8. Джангибеков Г. Формула обращения одного двумерного сингулярного уравнения. – Докл. АН ТаджССР, 1984, т.27, №5, с.243-248.
9. Бильман Б.М., Джангибеков Г. Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области. – ДАН СССР, 1986, т.288, №4, с.792-797.
10. Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе. – Успехи математических наук, 1988, т.43, вып.3(261), с.171-172.
11. Джангибеков Г. Нётеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов. – Изв.вузов. Математика, 1991, №1, с.19-28.
12. Джангибеков Г., Козиев Г.М. К теории двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем дифференциальных уравнений. – Чебышевский сборник, 2024, т.25, вып.5, с.74-89.
13. Джангибеков Г. Избранные научные труды по теории разрешимости сингулярных операторов. – Душанбе,. 2019, 233 с.
14. Calderon A.P., Zygmund A. On singular integrals. – Amer. J. Math., 1956, v.78, №2, 289-309.
15. Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. – Изв. АН СССР, сер. матем. I-II, 1965, т.29, №3,4, с.567-580, 757-782.
16. Джангибеков Г., Савлатов Ф. О поликерн-функциях ограниченной области и их связь с сингулярными интегральными операторами. – Вестник Филиала МГУ им. М.В.Ломоносов в г.Душанбе. Сер. естест. наук, 2018, №1, с.11-40.

Г.Ҷангибеков, Г.М.Қозиев, Н.Г.Валиев

ОИДИ НЁТЕРОВӢ БУДАН ВА ИНДЕКСИ ЯК ОПЕРАТОРИ МАТРИСАВИИ ИНТЕГРАЛИИ СИНГУЛЯРӢ АЗ РӮИ СОҲАИ МАҲДУД

Академияи миллии илмии Тоҷикистон,

Институти математика ба номи А.Ҷӯраеви АМИ Тоҷикистон

Дар фазои лебегии $L_p^2(D)\,(1<p<\infty)$ вектор-функсияҳо бо 2 ташкилкунандаҳои бо дараҷаи p дар D суммирондашаванда, алгебраи банаховии $\mathscr{R}$ омухта шудааст, ки тариқи операторҳои дученакаи сингулярии матритсавӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд тавлид гардидааст. Шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани операторҳо аз ин алгебра ёфта шуда, индекси онҳо ҳисоб карда шудааст, ки метавонад ғайринулӣ бошад.

Калимаҳои калидӣ: *операторӣ интегралии сингулярии матрисавӣ, символи операторӣ матрисавӣ, нётеровӣ будан, индекси операторӣ матрисамӣ.*

G.Jangibekov, G.M.Qoziev, N.G.Valiev

ON NOETHERIANITY AND THE INDEX OF A MATRIX SINGULAR INTEGRAL OPERATOR OVER A BOUNDED DOMAIN

National Academy of Sciences of Tajikistan,
A. Juraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan

In the Lebesgue space $L_p^2(D)\,(1 < p < \infty)$ of vector functions with 2 components, summable in D with degree p, the Banach algebra $\mathscr{R}$ generated by some matrix two-dimensional singular operators over a bounded domain is studied. Necessary and sufficient conditions for the waterness of operators from this algebra are obtained and an index is calculated, which can be nonzero.

Key words: *matrix singular integral operator, symbol of the matrix operator, noetherianity, index of the matrix operator.*

Сведения об авторах:

1. **Джангибеков Гулходжа** – доктор физ.-мат. наук., Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, заведующий отделом. E-mail: gulkhoja@list.ru;
2. **Козиев Гулназар Мавлоназарович** – кандидат физ.-мат. наук, доцент, Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана, заведующий кафедрой «Математика в экономике». E-mail: gulnazar88@mail.ru;
3. **Валиев Наджиб Гуломамадович** – кандидат физ.-мат. наук, доцент, Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана, кафедра «Математика в экономике». E-mail: najibvaliev@mail.ru.

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК ТАДЖИКИСТАНА
2025, том 68, №4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5
Специальность: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ф.М.Мадимарова

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ДЖЕКСОНА-СТЕЧКИНА ДЛЯ СОВМЕСТНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ «УГЛАМИ»

Университет Центральной Азии

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.Ш.Шабозовым 05.03.2025 г.)

В метрике L_2 получены точные неравенства между величиной наилучших совместных приближений дифференцируемых 2π-периодических по каждой из переменных функций и их последовательных производных $f^{(\mu,\nu)}(x,y)$ $(0\le\mu\le r, 0\le\nu\le s, \mu,\nu\in\mathbb{Z}_+, r,s\in\mathbb{Z}_+)$ тригонометрическими "углами" с двойными интегралами, содержащими смешанные модули непрерывности высших порядков старших производных $f^{(r,s)}(x,y)$. Найдены точные значения верхней грани наилучших совместных приближений некоторых классов функций, задаваемых указанными модулями непрерывности.

Ключевые слова: *наилучшее совместное приближение, тригонометрические "углы", смешанный модуль непрерывности, верхняя грань.*

1. Введение. Вспомогательные факты. Среди задач приближения функций одной из важнейших является экстремальная задача о наилучших совместных приближениях функций и их последовательных производных полиномами и их соответствующими производными в различных нормированных пространствах. Сформулированная задача в случае совместного приближения периодических функций одного переменного и их производных тригонометрическими полиномами в пространстве $L_2 := L_2[0,2\pi]$ на классах $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}[0,2\pi]$ – функции f, у которой производная $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно-непрерывна, а r-я производная $f^{(r)}(x)\in L_2$ решалась в работе [1]. Аналогичная задача для классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространствам Харди и Бергмана, рассмотрена в работах [2, 3].

Целью данной работы является получение результатов, связанных с точными оценками погрешности среднеквадратического совместного приближения функций двух переменных тригонометрическими "углами" и их соответствующими производными. Отметим, что понятие "угол" было введено М.К.Потаповым [4, 5] и в дальнейшем с успехом применялось многими математиками (см., например, [6-15] и литературу, приведенную в них).

Адрес для корреспонденции: *Мадимарова Фавзия Мадимаровна. 734019, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Носир Мухаммад, 61/2, Университет Центральной Азии. E-mail: favzimadimarova@gmail.com.*

Предварительно приводим определения и вспомогательные факты, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть $(X,\|\cdot\|_X)$ и $(Y,\|\cdot\|_Y)$ – линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m := span\{u_0(x),u_1(x),\ldots,u_m(x)\}, V_n := span\{v_0(y),v_1(y),\ldots,v_n(y)\}$$

– их конечномерные подпространства $U_m \subset X, V_n \subset Y$. Выражение вида

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{\nu=0}^{m} u_\nu(x)\psi_\nu(y) + \sum_{\mu=0}^{n} v_\mu(y)\varphi_\mu(x),$$

где $\{\varphi_\mu(x)\}_{\mu=0}^{n}$ и $\{\psi_\nu(y)\}_{\nu=0}^{m}$ – соответственно произвольные наборы функций из пространств X и Y, назовём обобщённым полиномом, порождённым подпространствами U_m и V_n. Указанные обобщённые полиномы образуют подпространства, которые обозначим

$$G_{m,n} := G(U_m,V_n) = U_m \otimes Y \oplus V_n \otimes X,$$

где операции "$\otimes$" и "$\oplus$" обозначают соответственно декартово произведение и прямую сумму множеств. Пусть $(Z,\|\cdot\|_Z)$ – линейное нормированное пространство, содержащее подпространство $G_{m,n}$. Обозначим

$$\mathscr{E}_{m,n}(f)_Z := \mathscr{E}(f;G_{m,n})_Z =$$

$$= \mathscr{E}(f;G(U_m,V_n))_Z = \inf\{\| f - g_{m,n} \|_Z : g_{m,n} \in G_{m,n}\}, \quad (1)$$

и если $\mathfrak{M}$ – некоторое множество функций f, то положим

$$\mathscr{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z := \mathscr{E}(\mathfrak{M},G_{m,n})_Z = \sup\{\mathscr{E}_{m,n}(f)_Z : f \in \mathfrak{M}\}. \quad (2)$$

Величина (1) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $G_{m,n}$, а (2) – отклонение множества $\mathfrak{M}$ от $G_{m,n}$ в нормированном пространстве $(Z,\|\cdot\|_Z)$. Всюду далее полагаем $X = Y = L_2[0,2\pi]$, $Z = L_2(Q)$, $Q := \{0 \le x,y \le 2\pi\}$. Пусть теперь

$$U^*_{2m+1} := span\{e^{ipx}\}_{p=-m}^{m} \subset L_2[0,2\pi], V^*_{2m+1} := span\{e^{iqx}\}_{q=-n}^{n} \subset L_2[0,2\pi].$$

Очевидно, что функция

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{|p|\le m} \psi_p(y)e^{ipx} + \sum_{|q|\le n} \phi_q(x)e^{iqy}, \quad m,n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

принадлежит подпространству $G(U^*_{2m+1},V^*_{2n+1})$. Функции вида (3) называют тригонометрическими "углами" [4, 5] или тригонометрическими квазиполиномами [18]. Пусть $L_2 := L_2(Q)$,

$Q := \{0 \le x, y \le 2\pi\}$ – пространство комплекснозначных 2π-периодических по каждой из переменных функций f, суммируемых с квадратом модуля и конечной нормой

$$\| f \|_2 = \| f \|_{L_2}(Q) = \left(\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} | f(x,y) |^2 \, dxdy \right)^{1/2}.$$

Для функции $f \in L_2(Q)$ с формальным разложением в двойной ряд Фурье

$$f(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}, \tag{4}$$

где

$$c_{pq}(f) := \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x,y) e^{-i(px+qy)} dxdy$$

– двойные коэффициенты Фурье функции $f \in L_2(Q)$, квазиполиномом Фурье порядка $(m,n), m,n \in \mathbb{N}$ называют выражение

$$\Phi_{m,n}(f; x, y) = \left(\sum_{|p| \le m} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{|q| \le n} - \sum_{|p| \le m} \sum_{|q| \le n} \right) c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}. \tag{5}$$

Легко проверить, что $\Phi_{m,n}(f)$ принадлежит $G(U_m^*, V_n^*)$. В [15] доказано, что

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} =$$

$$= \inf \left\{ \left\| f - g_{m-1,n-1} \right\|^2_{L_2(Q)} : g_{m-1,n-1} \in G\left(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1}\right) \right\} =$$

$$= \left\| f - \Phi_{m-1,n-1}(f) \right\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{|p| \ge m} \sum_{|q| \ge n} \left| c_{pq}(f) \right|^2 = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho^2_{p,q}(f), \tag{6}$$

где для краткости в последней двойной сумме положено

$$\rho^2_{p,q}(f) := \left| c_{p,q}(f) \right|^2 + \left| c_{-p,q}(f) \right|^2 + \left| c_{p,-q}(f) \right|^2 + \left| c_{-p,-q}(f) \right|^2. \tag{7}$$

Через $C^{(r,s)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$ обозначим множество функций $f \in C(Q)$, имеющих в квадрате Q непрерывные частные производные

$$f^{(\mu,\nu)}(x,y) := \partial^{\mu+\nu} f / \partial x^\mu \partial y^\nu, \; \mu \le r, \nu \le s,$$

а через $L_2^{(r,s)} := L_2^{(r,s)}(Q), r,s \in \mathbb{N}$ – множество функций $f \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$, $r \ge 2, s \ge 2$, у которых частные производные $f^{(r,\nu)}, r \in \mathbb{N}, \nu = \overline{0, s-1}$, $f^{(\mu,s)}, \mu = \overline{0, r-1}$, $s \in \mathbb{N}$ существуют,

кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования, частные производные $f^{(r,0)}$, $f^{(0,s)}$ и смешанная производная $f^{(r,s)}$ принадлежат пространству L_2.

Для произвольной функции $f \in L_2$ определим разность $f(x,y)$ k-го порядка по переменной x и l-го порядка по переменной y

$$\Delta_{u,\upsilon}^{k,l} f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{k}\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu+\nu}\binom{k}{\nu}\binom{p}{\mu} f(x+\nu u,\, y+\mu\upsilon).$$

При решении некоторых задач теории аппроксимации иногда удобнее использовать следующую характеристику гладкости функции $f \in L_2$:

$$\Omega_{k,l}(f;t,\tau)_2 =$$

$$= \left\{ \frac{1}{t^k \tau^l} \int_0^t \cdots \int_0^t \int_0^\tau \cdots \int_0^\tau \left\| \Delta_{u,\upsilon}^{k,l} f(\cdot,\cdot) \right\|^2 du_1 \cdots du_k d\upsilon_1 \cdots d\upsilon_l \right\}^{1/2}, \quad t,\tau > 0, \tag{8}$$

где $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$, $\bar{\upsilon} = (\upsilon_1, \upsilon_2 \ldots \upsilon_l)$, а $\Delta_{u,\upsilon}^{k,l} := \Delta_{u_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{u_k}^1 \circ \Delta_{\upsilon_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{\upsilon_l}^1$, (см., например, [16, 17]). Обозначим $sinct := (\sin t)/t$ $(t \neq 0)$, доопределив данную функцию значением 1 в точке $t = 0$, полагая $sinc0 := 1$. Поскольку функции $\{e^{i(px+qy)}\}$, $p,q = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ образуют в области $Q := \{(x,y) : 0 \le x, y \le 2\pi\}$ ортогональную систему, то, пользуясь рядом Фурье функции $f \in L_2(Q)$ в комплексной форме (4) и используя равенство Парсеваля, запишем

$$\left\| \Delta_{u,v}^{k,l} f(\cdot,\cdot) \right\|_2^2 =$$

$$= 2^{k+l} \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \rho_{p,q}^2(f) \prod_{\nu=1}^{k}\prod_{\mu=1}^{l}(1-\cos\nu u_k)(1-\cos\mu v_l). \tag{9}$$

Подставляем (9) в формулу (8), которая после выполнения некоторых несложных вычислений приобретает явный вид

$$\Omega_{k,l}(f;t,\tau)_2 = 2^{k+l} \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} |c_{p,q}(f)|^2 (1-sinc\,pt)^k (1-sincq\tau)^l =$$

$$= 2^{k+l} \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \rho_{p,q}^2(f)(1-sinc\,pt)^k (1-sincq\tau)^l, \quad t,\tau > 0. \tag{10}$$

В случае $k = l$, полагаем $\Omega_{k,k}(f;t,\tau)_2 := \Omega_k(f;t,\tau)_2$.

Заметим, что если функция $f \in L_2^{(r,s)}$, то, дифференцируя двойной ряд (4) r раз по переменной x и s раз по переменной y в смысле сходимости в L_2, запишем

$$f^{(r,s)}(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}(ip)^r(iq)^s c_{p,q}(f)e^{i(px+qy)} =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}c_{p,q}(f^{(r,s)})e^{i(px+qy)},$$

где ради краткости положено

$$c_{p,q}(f^{(r,s)}) = (ip)^r(iq)^s c_{p,q}(f).$$

Поскольку

$$|c_{p,q}(f^{(r,s)})|^2 = p^{2r}q^{2s}\,|c_{p,q}(f)|^2,$$

то в силу равенства (7) имеем

$$\rho^2_{p,q}(f^{(r,s)}) = p^{2r}q^{2s}\rho^2_{p,q}(f). \tag{11}$$

Учитывая равенство (11), из (10) для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ получаем

$$\Omega_{k,l}(f^{(r,s)};t,\tau)_2 = 2^{k+l}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho^2_{p,q}(f)(1-sinc\,pt)^k(1-sinc\,q\tau)^l.$$

Рассмотрим теперь экстремальную задачу об одновременном приближении функций $f \in L_2^{(r,s)}$ и их смешанных частных производных $f^{(\mu,\nu)}$, $0 \le \mu \le r$, $0 \le \nu \le s$, тригонометрическими “углами” и их соответствующими производными:

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2 = \inf\left\{\left\|f^{(\mu,\nu)} - g^{(\mu,\nu)}_{m-1,n-1}\right\|_2^2 : g_{m-1,n-1} \in G\left(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1}\right)\right\}.$$

В силу формул (6) и (10) имеем

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_2 = \left\|f^{(\mu,\nu)} - \Phi_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)\right\|^2 =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho^2_{p,q}(f^{(\mu,\nu)}) = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{2\mu}q^{2\nu}\rho^2_{p,q}(f),$$

где функция $\Phi_{m-1,n-1}(g)$ определена равенством (5).

2. Основные результаты. В обозначениях, принятых в предыдущем пункте, справедлива следующая

Теорема 1. *Для любых* $m,n \in \mathbb{N}$, $r,s,\mu,\nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge \mu, s \ge \nu$ *и* $(t,\tau) \in (0,3\pi/4m]\times(0,3\pi/4n]$ *имеет место точное неравенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\Omega_{k,l}(f^{(r,s)};t,\tau)_2} =$$

$$= \frac{1}{[2(1-\operatorname{sinc} mt)]^{k/2}[2(1-\operatorname{sinc} n\tau)]^{l/2}}. \tag{12}$$

Существует функция $f_0 \in L_2^{(r,s)}$, *для которой (12) обращается в равенство.*

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 при* $t = \pi/(2m)$, $\tau = \pi/(2n)$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}} \frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\Omega_{k,l}(f^{(r,s)};\pi/(2m),\pi/(2n))_2} = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{(k+l)/2}. \tag{13}$$

Отметим, что в свою очередь из экстремального равенства (13) для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ вытекает неравенство типа Джексона–Стечкина для совместного приближения тригонометрическим “углом” с точной константой

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2 \le \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{(k+l)/2} \frac{1}{m^{r-\mu}n^{s-\nu}} \cdot \Omega_{k,l}\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2.$$

Теорема 2. *Пусть* $m,n,r,s \in \mathbb{N}$, $\mu,\nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge \mu + k/2$, $s \ge \nu + k/2$. *Тогда справедливо точное равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}} \frac{m^{r-(\mu+k/2)}n^{s-(\nu+k/2)}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\left\{\int\limits_0^{\pi/(2m)}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2\,dtd\tau\right\}^{k/2}} = \left\{4\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right\}^{-k/2}. \tag{14}$$

В частности из (14) для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ *вытекает следующее неравенство типа Джексона-Стечкина*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)}) \le$$

$$\le \frac{1}{m^{r-k}n^{s-k}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^k\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{-k/2}\Omega_k\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2.$$

Поступило 05.03.2025 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2. – Матем. заметки, 2012, т.92, №4, с.497-514.
2. Шабозов М.Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди. – Тр. ИММ УрО РАН, 2023, т.29, №4. с.283-291.

3. Шабозов М.Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана B_2. – Матем. заметки, 2023, т.114, №3, с.435-446.
4. Потапов М.К. О приближении «углом». – Proc. of the Conf. on Constructive Theory of Function. Budapesht, 1972, с.371-399.
5. Потапов М.К. Приближение «углом» и теоремы вложения. – Mathematica Balkanica, 1972, №2, с.183-198.
6. Томич М. О приближении углом функций с доминирующим модулем гладкости. – Publ. Inst. Math. Beograd, 1972, т.23, 37, 2, с.193-206, с.183-198.
7. Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных. – Изв. вузов. Матем., 1991, №7, с. 14-25.
8. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов. – Укр. матем. журн., 1996, т.48, №3, с.301-308.
9. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных. – ДАН России, 2005, т.404, №4, с.406-464.
10. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. О точных значениях квазапопречников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных. – Укр. матем. журн., 2009, т.61, №6, с.855-864.
11. Shabozov M.Sh., Akobirshoev M.O. Exact estimates of quasiwidths of some classes of differentiable periodic functions of two variables. – Anal. Math., 2009, т.35, №1, 61-72 p.
12. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложения к теории аппроксимации. – Укр. матем. журн., 2011, т.63, №12, с.1579-1601.
13. Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшем приближении “углом” в среднем на плоскости $\mathbb{R}^2$ с весом Чебышева-Эрмита. – Збірник праць Інституту математики НАН Украіни, 2014, т.11, №3, с.35-46.
14. Вакарчук С.Б., Швачко А.В. Неравенства колмогоровского типа для производных функций двух переменных и их приложение к аппроксимации “углом”. – Известия вузов. Матем., 2015, №11, с.2-22.
15. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2. – Чебышевский сб., 2019, т.20, вып.2, с.348-365.
16. Vakarchuk S.B. Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2-approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes. – East Journal on Approximations, 2004, v.10, №1-2, pp.27-39.
17. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2. – Матем. заметки, 2005, т.78, №5, с.792-796.
18. Брудный Ю.А. Приближение функций n-переменных квазимногочленами. – Изв. АН СССР. Сер. математика, 1979, т.34, 3, с.564-583.

Ф.М.Мадимарова

ОИДИ НОБАРОБАРИ НАМУДИ ҶЕКСОН–СТЕЧКИН БАРОИ НАЗДИККУНИИ ҲАМҶОЯИ ФУНКСИЯҲОИ ДУТАҒЙИРЁБАНДА БА ВОСИТАИ “КУНҶҲО”-И ТРИГОНОМЕТРӢ

Донишгоҳи Осиёи марказӣ

Дар фазои L_2 нобаробариҳои аниқ байни бузургии наздиккунии беҳтарини якҷояи функсияи 2π-даврӣ аз руйи як тағйирёбанди $f(x,y)$ ва ҳосилаҳои хусусии он $f^{(\mu,\nu)}(x,y)$ $(0 \le \mu \le r, 0 \le \nu \le s, \mu,\nu \in \mathbb{Z}_+, r,s \in \mathbb{Z}_+)$ ба воситаи “кунҷҳои” тригонометрӣ ва интегралҳои дукарата, ки модулҳои омехтаи бефосилагии тартиби олӣ $f^{(r,s)}(x,y)$-ро дар бар мегиранд, ёфта шудааст. Қиматҳои аниқи сарҳади болоии наздиккунии ҳамҷояи беҳтарини баъзе синфҳои функсияҳо, ки ба воситаи модулҳои бефосилагии нишондодашуда дода шудаанд, ёфта шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: *наздиккунии ҳамҷояи беҳтарин, “кунҷҳо”-и тригонометрӣ, модули бефосилагии омехта, сарҳади болоӣ.*

F.M.Madimarova

ON JACKSON-STECHKIN-TYPE INEQUALITIES FOR SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY TRIGONOMETRIC ANGLES

University of Central Asia

In the metric L_2 obtained exact inequalities between the quantity best joint approximations of periodic differentiable 2π for each of the variable functions $f(x,y)$ and their consecutive derivative $f^{(\mu,\nu)}(x,y)$ $(0 \le \mu \le r, 0 \le \nu \le s, \mu,\nu \in \mathbb{Z}_+, r,s \in \mathbb{Z}_+)$ by trigonometric “angles” with double integrals, containing mixed modules of continuity of higher order of higher derivatives $f^{(r,s)}(x,y)$. The exact values of the upper bound of the best joint approximations of some clases of functions given by the specified moduli of continuity are found.

Key words: *best general approximations, trigonometric “angles” mixed modulus of continuity, upper bounds.*

Сведения об авторе:

1. **Мадимарова Фавзия Мадимаровна** – Университет Центральной Азии, координатор по математике. E-mail: favzimadimarova@gmail.com.

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК ТАДЖИКИСТАНА
2025, том 68, №4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9
Специальность: 01.01.02. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

А.Г.Олими

ФОРМУЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ *m* ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова

(Представлено академиком НАН Таджикистана Н.Раджабовым 17.02.2025 г.)

В работе для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка со сверхсингулярной точкой, в случаях, когда точка совпадает с граничной или внутренней точкой интервала, переходом к соответствующей равносильной системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода со слабой особенностью, найдено интегральное представление общего решения. Полученные представления применяются для изучения поведения решений в окрестности особой точки, выяснения постановки и исследования задач типа Коши и линейного сопряжения.

Ключевые слова: *система обыкновенных дифференциальных уравнений, сверхсингулярная точка, система интегральных уравнений Вольтерра со слабой особенностью, интегральное представление общего решения, характеристическое свойство, поведение решений, задача типа Коши, задача типа линейного сопряжения.*

На множестве $\Gamma_c = \Gamma \setminus \{c\}$ рассмотрим систему уравнений

$$y_j'' + \frac{2p_j(x)}{|x-c|^{\alpha}} y_j' + \sum_{k=1}^{m} \frac{r_{jk}(x)}{|x-c|^{2\alpha}} y_k = \frac{f_j(x)}{|x-c|^{2\alpha}}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

где $\Gamma = (a,b)\ (a<b)$, $\alpha > 1$ – действительное число, c, $a \le c \le b$ особая сверхсингулярная точка системы, $p_j(x)$, $r_{jk}(x)$, $f_j(x)$ – известные функции, причем $p_j(c+0) \ne 0$, $p_j(c-0) \ne 0$, соответственно, а $y_j(x)$ – искомые функции.

Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с коэффициентами, имеющими сингулярности различных порядков и их системы, являлись объектом изучения в многочисленных исследованиях (см., например, [1-12]). В данной статье методика исследования, разработанная в работах [3-11], а также результаты, полученные там, обобщаются и развиваются на новый класс систем уравнений вида (1).

Адрес для корреспонденции: *Олими Абдуманон Гафорзода. 735700, Республика Таджикистан, г. Худжанд, проезд Мавлонбекова, 1, Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова. E-mail: Abdumanon1950@mail.ru.*

1. Случай $c = a$. В этом случае справедливо утверждение.

Теорема 1. *Пусть в системе (1) основным считается уравнение с номером* s *и* $p_j(x) \in C^1(\bar{\Gamma})$, $r_{jk}(x)$, $f_j(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $j,k = \overline{1,m}$. *Функция* $p_s(x)$ *при* $\alpha \geq 2$ *в точке* a *удовлетворяет условию*

$$\left|p_s(x) - p_s(a)\right| \leq H_s^+ (x-a)^{h_s^+},\ H_s^+ > 0,\ h_s^+ > \alpha - 1 \text{ при } x \to a+0,$$

также $p_s(a) > 0$, *а функции* $r_{jk}(x)$, $k \neq j$, $f_j(x)$, $R_{js,a}^{\alpha,+}(x)$ *и* $\Omega_{js}(x)$, $j,k = \overline{1,m}$ *в этой точке равняются нулю и удовлетворяют условиям*

$$r_{jk}(\xi) = o\left[(x-a)^{\delta_{jk}^+}\right],\ k \neq j,\ R_{js,a}^{\alpha,+}(x) = o\left[(x-a)^{\gamma_{js}^+}\right],\ \Omega'_{js}(x) = o\left[(x-a)^{\varepsilon_{js}^+}\right],$$

$$\delta_{jk}^+, \gamma_{js}^+ > 2\alpha - 1,\ \varepsilon_{js}^+ > 2\alpha - 2,\ j,k = \overline{1,m} \text{ при } x \to a+0.$$

Тогда следующие задачи являются эквивалентными: интегрирование системы дифференциальных уравнений (1) в классе функций $C^2(\Gamma)$ *и решение следующей системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода со слабо особыми ядрами и непрерывной правой частью:*

$$\varphi_j(x) + \sum_{k=1}^{m} \int_a^x K_{jk,a}^{\alpha,+}(x,\xi)\varphi_k(\xi)\,d\xi = T_a^{\alpha,+}\left[p_s(x), f_j(x), c_{j1}^+, c_{j0}^+\right],\ j = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Здесь

$$K_{jk,a}^{\alpha,+}(x,\xi) = (x-\xi) r_{jk}(\xi)(\xi-a)^{-2\alpha}, k \neq j,\ K_{jj,a}^{\alpha,+}(x,\xi) =$$

$$= \left\{(x-\xi)\left\{R_{js,a}^{\alpha,+}(\xi) + (\xi-a)^{\alpha}\Omega_{js}'(\xi) + [p_s(\xi) - \alpha(\xi-a)^{\alpha-1}]\Omega_{js}(\xi)\right\} -\right.$$

$$\left. -(\xi-a)^{\alpha}\Omega_{js}(\xi)\right\}(\xi-a)^{-2\alpha},$$

$$T_a^{\alpha,+}\left[p_s(x), f_j(x), c_{j1}^+, c_{j0}^+\right] = \int_a^x (x-\xi) f_j(\xi)(\xi-a)^{-2\alpha} \times$$

$$\times exp\left[w_{p_s,a}^{\alpha,+}(\xi) - p_s(a)\omega_a^{\alpha,+}(\xi)\right]d\xi + c_{j1}^+(x-a) + c_{j0}^+,$$

$$R_{js,a}^{\alpha,+}(x) = r_{jj}(x) - (x-a)^{\alpha} p_s'(x) + \alpha(x-a)^{\alpha-1} p_s(x) - p_s^2(x),\ \Omega_{js}(x) =$$

$$= 2\left[p_s(x) - p_j(x)\right],\ w_{p_s,a}^{\alpha,+}(x) = \int_a^x \left[p_s(t) - p_s(a)\right](t-a)^{-\alpha}\,dt,$$

$\omega_a^{\alpha,+}(x) = [(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}]^{-1}$, а c_{j1}^+, c_{j0}^+ *– произвольные вещественные постоянные.*

Для доказательства теоремы 1, используя методику работ [5-11], с помощью функции $p_s(x)$ уравнения системы преобразуем к виду с одинаковыми левыми сверхсингулярными частями в соответствии с формулой (1.2) из работы [3, с.23], далее выписываем их решение по формуле (1.3) из [3, с.23], преобразуем полученный результат и вводим новые функции равенством

$$y_j(x)=\exp\left[-w^{\alpha,+}_{p_s,a}(x)+p_s(a)\omega^{\alpha,+}_a(x)\right]\varphi_j(x),\ \ j=\overline{1,m}.$$

Замечание 1. Теорема 1 остаётся верной и в случае $p_s(a)<0$, если функция $f_j(x), j=\overline{1,m}$ равняется нулю в точке a и обладает асимптотическим поведением

$$f_j(x)\exp\left[-p_s(a)\omega^{\alpha,+}_a(x)\right]=o\left[(x-a)^{\beta^+_j}\right],\ \ \beta^+_j>2\alpha-1\ \text{ при }\ x\to a+0.$$

Из теоремы 1, также как в [7,8,10], вытекает

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 общее решение системы уравнений (1) из класса $C^2(\Gamma)$ выражаются формулой

$$y_j(x)=\exp[-w^{\alpha,+}_{p_s,a}(x)+p_s(a)\omega^{\alpha,+}_a(x)]\Bigg\{\ T^{\alpha,+}_a\left[p_s(x),f_j(x),c^+_{j1},c^+_{j0}\right]-$$

$$-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\int_a^x\Gamma^{\alpha,+}_{jk,a}(x,\xi)T^{\alpha,+}_a\left[p_s(\xi),f_k(\xi),c^+_{k1},c^+_{k0}\right]d\xi-$$

$$-\int_a^x\Gamma^{\alpha,+}_{jj,a}(x,\xi)T^{\alpha,+}_a\left[p_s(\xi),f_j(\xi),c^+_{j1},c^+_{j0}\right]d\xi\ \Bigg\}\equiv$$

$$\equiv Q^{\alpha,+}_{j,a}\left[(p),(r),(f),c^+_{11},c^+_{10},\ldots,c^+_{m1},c^+_{m0}\right],\ \ j=\overline{1,m},\qquad(3)$$

где $\Gamma^{\alpha,+}_{jk,a}(x,\xi)$, $j,k=\overline{1,m}$ – являются резольвентами системы интегральных уравнений (2) и для краткости положено $(p)\equiv\{p_1(x),\ldots,p_m(x)\}$, $(r)\equiv\{r_{11}(x),\ldots,r_{1m}(x),\ldots,r_{m1}(x),\ldots,r_{mm}(x)\}$, $(f)\equiv\{f_1(x),\ldots,f_m(x\}$.

Следствие 1. Из представления (3), также как в работах [3,6,8,10], получим следующее заключение о поведение решений системы (1) в окрестности сверхсингулярной точки a в зависимости от знака числа $p_s(a)$: при $x\to a+0$ любое решение системы (1) имеет экспоненциальное поведение, бесконечно возрастает и подчиняется асимптотическому равенству $y_j(x)=O\left\{\exp\left[p_s(a)\omega^{\alpha,+}_a(x)\right]\right\}$, $j=\overline{1,m}$, когда $p_s(a)>0$; устремляется к нулю согласно асимптотическому равенству $y_j(x)=o\left\{\exp\left[p_s(a)\omega^{\alpha,+}_a(x)\right]\right\}$, $j=\overline{1,m}$, когда $p_s(a)<0$.

Следствие 2. Представление (3) характеризуется свойством, выражаемым следующими равенствами:

$$\left\{\exp\left[-p_s(a)\omega_a^{\alpha,+}(x)\right]B_{p_s,a}^{\alpha,+q}y_j\right\}_{x=a+0}=c_{jq}^{+},\ \ j=\overline{1,m}\ ,\ \ q=0,1, \tag{4}$$

$$B_{p_s,a}^{\alpha,+}y=y'+\frac{p_s(x)}{(x-a)^{\alpha}}y,\ \ B_{p_s,a}^{\alpha,+0}y\equiv y,$$

которые являются для него формулами обращения.

С помощью формулы (3) и равенств (4) исследуем следующую задачу:

Задача 1. Найти такое решение системы (1) из класса $C^2(\Gamma)$, которое подчиняется следующим начальным условиям в сверхсингулярной точке a:

$$\left\{\exp\left[-p_s(a)\omega_a^{\alpha,+}(x)\right]B_{p_s,a}^{\alpha,+q}y_j\right\}_{x=a+0}=y_{jq}^{+},\ \ j=\overline{1,m},\ \ q=0,1,$$

где y_{jq}^{+} – заданные вещественные числа.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 1 задача 1 имеет единственное решение, выражаемое формулой*

$$y_j(x)=Q_{j,a}^{\alpha,+}\left[(p),(r),(f),y_{11}^{+},y_{10}^{+},...,y_{m1}^{+},y_{m0}^{+}\right],\ \ j=\overline{1,m}.$$

2. Случай $c=b$. В этом случае имеем утверждение

Теорема 4. *Пусть в системе (1)* $c=b$, *основным считается уравнение с номером* l *и* $p_j(x)\in C^1(\overline{\Gamma})$, $r_{jk}(x)$, $f_j(x)\in C(\overline{\Gamma})$, $j,k=\overline{1,m}$. *Функция* $p_l(x)$ *при* $\alpha\geq 2$ *в точке* b *удовлетворяет условию*

$$\left|p_l(b)-p_l(x)\right|\leq H_l^{-}(b-x)^{h_l^{-}},\ \ H_l^{-}>0,\ \ h_l^{-}>\alpha-1\ \ при\ \ x\to b-0,$$

также $p_l(b)<0$, *а функции* $r_{jk}(x)$, $k\neq j$, $f_j(x)$, $R_{jl,b}^{\alpha,-}(x)$ *и* $\Omega_{jl}(x)$, $j,k=\overline{1,m}$ *в этой точке равняются нулю и удовлетворяют условиям*

$$r_{jk}(\xi)=o\left[(b-x)^{\delta_{jk}^{-}}\right],\ \ k\neq j,\ \ R_{jl,b}^{\alpha,-}(x)=o\left[(b-x)^{\gamma_{jl}^{-}}\right],\ \ \Omega'_{jl}(x)=o\left[(b-x)^{\varepsilon_{jl}^{-}}\right],$$

$$\delta_{jk}^{-},\gamma_{jl}^{-}>2\alpha-1,\varepsilon_{jl}^{-}>2\alpha-2,\ \ j,k=\overline{1,m}\ \ при\ \ x\to b-0.$$

Тогда следующие задачи являются эквивалентными: интегрирование системы дифференциальных уравнений (1) в классе функций $C^2(\Gamma)$ *и решение следующей системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода со слабо особыми ядрами и непрерывной правой частью:*

$$\psi_j(x)-\sum_{k=1}^{m}\int_x^b K_{jk,b}^{\alpha,-}(x,\xi)\psi_k(\xi)d\xi=T_b^{\alpha,-}\left[p_l(x),f_j(x),c_{j1}^{-},c_{j0}^{-}\right],\ \ j=\overline{1,m}, \tag{5}$$

где

$$K_{jk,b}^{\alpha,-}(x,\xi)=(x-\xi)r_{jk}(\xi)(b-\xi)^{-2\alpha},\ k\neq j,\ K_{jj,b}^{\alpha,-}(x,\xi)=\Big\{\ (x-\xi)\times$$

$$\times\Big\{R_{jl,b}^{\alpha,-}(\xi)+(b-\xi)^{\alpha}\Omega_{jl}{}'(\xi)+\Big[p_l(\xi)+\alpha(b-\xi)^{\alpha-1}\Big]\Omega_{jl}(\xi)\ \Big\}-$$

$$-(b-\xi)^{\alpha}\Omega_{jl}(\xi)\ \Big\}(b-\xi)^{-2\alpha},$$

$$T_b^{\alpha,-}\Big[p_l(x),f_j(x),c_{j1}^-,c_{j0}^-\Big]=c_{j1}^-(b-x)+c_{j0}^--\int_x^b(x-\xi)\,f_j(\xi)(b-\xi)^{-2\alpha}\times$$

$$\times\exp\Big[w_{p_l,b}^{\alpha,-}(\xi)+p_l(b)\omega_b^{\alpha,-}(\xi)\Big]d\xi,$$

$$R_{jl,b}^{\alpha,-}(x)=r_{jj}(x)-(b-x)^{\alpha}p_l'(x)-\alpha(b-x)^{\alpha-1}p_l(x)-p_l^2(x),$$

$$w_{p_l,b}^{\alpha,-}(x)=\int_x^b\Big[p_l(b)-p_l(t)\Big](b-t)^{-\alpha}dt,\omega_b^{\alpha,-}(x)=[(\alpha-1)(b-x)^{\alpha-1}]^{-1},$$

а c_{j1}^-,c_{j0}^- *– произвольные вещественные постоянные.*

Теорема 4 доказывается подобно теореме 1, использованием методики работ [5-11], при этом используются функция $p_l(x)$ и формулы (2.2) и (2.3) из работы [3, с. 26].

Замечание 2. Итог теоремы 4 остаётся верным и в случае $p_l(b)>0$, если функция $f_j(x),j=\overline{1,m}$ равняется нулю в точке b и подчиняется асимптотическому равенству

$$f_j(x)\exp\Big[p_l(b)\omega_b^{\alpha,-}(\xi)\Big]=o\Big[(b-x)^{\beta_j^-}\Big],\ \beta_j^->2\alpha-1\ \text{при}\ x\to b-0.$$

На основании теоремы 4, также как в [5-10], получается заключение:

Теорема 5. *При выполнении условий теоремы 4 общее решение системы уравнений (1) из класса* $C^2(\Gamma)$ *выражается следующей формулой, зависящей от* $2m$ *произвольных постоянных:*

$$y_j(x)=\exp\Big[-w_{p_l,b}^{\alpha,-}(x)-p_l(b)\omega_b^{\alpha,-}(x)\Big]\Big\{\ T_b^{\alpha,-}\Big[p_l(x),f_j(x),c_{j1}^-,c_{j0}^-\Big]+$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\int_x^b\Gamma_{jk,b}^{\alpha,-}(x,\xi)T_b^{\alpha,-}\Big[p_l(\xi),f_k(\xi),c_{k1}^-,c_{k0}^-\Big]d\xi+$$

$$+\int_x^b\Gamma_{jj,b}^{\alpha,-}(x,\xi)T_b^{\alpha,-}\Big[p_l(\xi),f_j(\xi),c_{j1}^-,c_{j0}^-\Big]d\xi\ \Big\}\equiv$$

$$\equiv Q_{j,b}^{\alpha,-}\left[(p),(r),(f),c_{11}^{-},c_{10}^{-},...,c_{m1}^{-},c_{m0}^{-}\right],\ j=\overline{1,m}, \tag{6}$$

где $\Gamma_{jk,b}^{\alpha,-}(x,\xi),\ j,k=\overline{1,m}$ – *являются резольвентами системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода (5).*

Следствие 3. Из представления (6) и соответствующей системы интегральных уравнений, рассуждениями как в работах [5-10], получим следующее заключение о поведение решений системы (1) в окрестности особой точки b в зависимости от знака числа $p_l(b)$: все решения растут или убивают как экспоненциальная функция, при $x\to b-0$, если $p_l(b)<0$, любое решение бесконечно возрастает и подчиняется асимптотическому равенству $y_j(x)=O\left\{\exp\left[-p_l(b)\omega_b^{\alpha,-}(x)\right]\right\},\ j=\overline{1,m}$; если $p_l(b)>0$, стремиться к нулю с асимптотическим поведением $y_j(x)=o\left\{\exp\left[-p_l(b)\omega_b^{\alpha,-}(x)\right]\right\}$, $j=\overline{1,m}$.

Следствие 4. Представление (6) обладает характеристическим свойством, выражаемым следующими равенствами:

$$\left\{\exp\left[p_l(b)\omega_b^{\alpha,-}(x)\right]B_{p_l,b}^{\alpha,-q}y_j\right\}_{x=b-0}=(-1)^q c_{jq}^{-},\ j=\overline{1,m}\ ,\ q=0,1, \tag{7}$$

$B_{p_l,b}^{\alpha,-}y=y'+\dfrac{p_l(x)}{(b-x)^{\alpha}}y,\ B_{p_l,b}^{\alpha,-0}y\equiv y.$ Равенства (7) являются формулами обращения для представления (6).

Задача 2. Найти такое решение системы (1) из класса $C^2(\Gamma)$, которое подчиняется следующим начальным условиям в сверхсингулярной точке b:

$$\left\{\exp\left[p_l(b)\omega_b^{\alpha,-}(x)\right]B_{p_l,b}^{\alpha,-q}y_j\right\}_{x=b-0}=y_{jq}^{-},\ j=\overline{1,m},\ q=0,1,$$

где y_{jq}^{-} – заданные действительные числа.

Теорема 6. *При выполнении условий теоремы 4 задача 2 имеет единственное решение, выражаемое формулой*

$$y_j(x)=Q_{j,b}^{\alpha,-}\left[(p),(r),(f),-y_{11}^{-},y_{10}^{-},...,-y_{m1}^{-},y_{m0}^{-}\right],\ j=\overline{1,m}.$$

Замечание 3. В проведенных в пунктах 1 и 2 рассуждениях, полагая $s=1,2,\ldots,m\left(l=1,2,\ldots,m\right)$ можно получить, соответственно, m формул для общего решения системы (1) в интегральном виде, изучить свойства решений выражаемых ими, поставить и исследовать граничные задачи, подобные задачам 1 и 2.

3. Случай $a<c<b$. Полагая $\Gamma_c=\Gamma_1\cup\Gamma_2,\ \Gamma_1=(a,c),\Gamma_2=(c,b)$, систему (1) изучим как объединение следующих систем:

$$y_j'' + \frac{2p_j(x)}{(c-x)^{\alpha}} y_j' + \sum_{k=1}^{m} \frac{r_{jk}(x)}{(c-x)^{2\alpha}} y_k = \frac{f_j(x)}{(c-x)^{2\alpha}}, \quad j = \overline{1,m}, \quad x \in \Gamma_1, \tag{8}$$

$$y_j'' + \frac{2p_j(x)}{(x-c)^{\alpha}} y_j' + \sum_{k=1}^{m} \frac{r_{jk}(x)}{(x-c)^{2\alpha}} y_k = \frac{f_j(x)}{(x-c)^{2\alpha}}, \quad j = \overline{1,m}, \quad x \in \Gamma_2, \tag{9}$$

которые имеют правую и левую граничную сверхсингулярную точку c, соответственно.

На основе теорем 4 и 1, применённым к этим системам, также как в [8-11], имеем следующие утверждения:

Теорема 7. *Допустим, что для системы (1) выполняются условия:*

1) функции $p_j(x)$, $p_j'(x)$, $r_{jk}(x)$, $f_j(x)$, $j,k = \overline{1,m}$ *непрерывны на* $\overline{\Gamma}$ *кроме, может быть точки* c, *а в самой этой точке у них возможен только лишь разрыв первого рода;*

2) в системе (8) основным является уравнение с номером l, *функция* $p_l(x)$ *в случае* $\alpha \geq 2$ *в точке* $x = c$ *удовлетворяет условию:*

$$\left| p_l(c-0) - p_l(x) \right| \leq H_l^{-}(c-x)^{h_l^{-}}, \ H_l^{-} > 0, \ h_l^{-} > \alpha - 1 \ \textit{при} \ x \to c-0,$$

а функции $r_{jk}(x)$, $k \neq j$, $R_{jl,c}^{\alpha,-}(x)$ *и* $\Omega_{jl}(x)$ *стремятся к нулю в соответствии со следующим асимптотическим равенством:*

$$r_{jk}(\xi) = o\left[(c-x)^{\delta_{jk}^{-}}\right], \ k \neq j, \ R_{jl,c}^{\alpha,-}(x) = o\left[(c-x)^{\gamma_{jl}^{-}}\right], \ \Omega_{jl}'(x) = o\left[(c-x)^{\varepsilon_{jl}^{-}}\right],$$

$$\delta_{jk}^{-}, \gamma_{jl}^{-} > 2\alpha - 1, \ \varepsilon_{jl}^{-} > 2\alpha - 2, \ j,k = \overline{1,m} \ \textit{при} \ x \to c-0;$$

3) в системе (9) основным считается уравнение с номером s, *а функция* $p_s(x)$ *в случае* $\alpha \geq 2$ *в точке* $x = c$ *удовлетворяет условию:*

$$\left| p_s(x) - p_s(c+0) \right| \leq H_s^{+}(x-c)^{h_s^{+}}, \ H_s^{+} > 0, \ h_s^{+} > \alpha - 1 \ \textit{при} \ x \to c+0,$$

а функции $r_{jk}(x)$, $k \neq j$, $R_{js,c}^{\alpha,+}(x)$ *и* $\Omega_{js}(x)$ *стремятся к нулю согласно приведённому ниже асимптотическому равенству, соответственно:*

$$r_{jk}(\xi) = o\left[(x-c)^{\delta_{jk}^{+}}\right], \ k \neq j, \ R_{js,c}^{\alpha,+}(x) = o\left[(x-c)^{\gamma_{js}^{+}}\right], \ \Omega_{jl}'(x) = o\left[(x-c)^{\varepsilon_{js}^{+}}\right],$$

$$\delta_{jk}^{+}, \gamma_{js}^{+} > 2\alpha - 1, \ \varepsilon_{js}^{+} > 2\alpha - 2, \ j,k = \overline{1,m} \ \textit{при} \ x \to c+0;$$

4) имеют место соотношения $p_l(c-0) < 0$, $p_s(c+0) > 0$.

Тогда общее решения системы (1) из класса $C^2(\Gamma_c)$ *дается формулой вида*

$$y_j(x)=\begin{cases} Q_{j,c}^{\alpha,-}\left[(p),(r),(f),c_{11}^{-},c_{10}^{-},\ldots,c_{m1}^{-},c_{m0}^{-}\right] \ \textit{при} \ \ x\in\Gamma_1, \\ Q_{j,c}^{\alpha,+}\left[(p),(r),(f),c_{11}^{+},c_{10}^{+},\ldots,c_{m1}^{+},c_{m0}^{+}\right] \ \textit{при} \ \ x\in\Gamma_2, \end{cases} \quad j=\overline{1,m}, \tag{10}$$

содержащей $2m$ *произвольные постоянные.*

Следствие 5. Теорема 7 остается верной и при любом другом сочетании знаков чисел $p_l(c-0), p_s(c+0)$. При этом функция $f_j(x), j=\overline{1,m}$ должна подчиняться дополнительному условию, а именно: в случае $p_l(c-0)>0$ она стремиться к нулю в соответствии с асимптотическим равенством

$$f_j(x)\exp\left[p_l(c-0)\omega_b^{c,-}(\xi)\right]=o\left[(c-x)^{\beta_j^-}\right], \ \beta_j^->2\alpha-1 \ \text{при} \ x\to c-0;$$

в случае $p_s(c+0)<0$ стремиться к нулю в соответствии с асимптотическим равенством

$$f_j(x)\exp\left[-p_s(c+0)\omega_c^{\alpha,+}(x)\right]=o\left[(x-c)^{\beta_j^+}\right], \ \beta_j^+>2\alpha-1 \ \text{при} \ x\to c+0.$$

Следствие 6. Из представления (10) и соответствующих систем интегральных уравнений вытекает, что в окрестности точки c все решения системы (1) возрастают или убивают как экспоненциальная функция в зависимости от сочетания знаков чисел $p_l(c-0), p_s(c+0)$. При $x\to c-0$ все решения бесконечно возрастают и подчиняются асимптотическому равенству

$$y_j(x)=O\left\{\exp\left[-p_l(c-0)\omega_c^{\alpha,-}(x)\right]\right\}, \ \ j=\overline{1,m}, \text{ в случае } \ p_l(c-0)<0;$$

устремляются к нулю и подчиняются асимптотическому равенству

$$y_j(x)=o\left\{\exp\left[-p_l(c-0)\omega_c^{\alpha,-}(x)\right]\right\}, \ \ j=\overline{1,m}, \text{ в случае } \ p_l(c-0)>0;$$

при $x\to c+0$ все решения системы (1) бесконечно возрастают с асимптотическим поведением

$$y_j(x)=O\left\{\exp\left[p_s(c+0)\omega_c^{\alpha,+}(x)\right]\right\}, \ \ j=\overline{1,m}, \text{ в случае } \ p_s(c+0)>0;$$

устремляются к нулю с асимптотическим поведением

$$y_j(x)=o\left\{\exp\left[p_s(c+0)\omega_c^{\alpha,+}(x)\right]\right\}, \ \ j=\overline{1,m}, \text{ в случае } \ p_s(c+0)<0.$$

Следствие 7. Решения системы (1), представленные формулой (10) обладают свойством, выражаемым следующими характеристическими равенствами:

$$\left\{\exp\left[p_l(c-0)\omega_c^{\alpha,-}(x)\right]B_{p_l,c}^{\alpha,-q}y_j\right\}_{x=c-0}=(-1)^q c_{jq}^{-},$$

$$\left\{\exp\left[-p_s(c+0)\omega_c^{\alpha,+}(x)\right]B_{p_s,c}^{\alpha,+q}y_j\right\}_{x=c+0}=c_{jq}^{+}, \ \ j=\overline{1,m} \ , \ \ q=0,1, \tag{11}$$

которые являются формулами обращения для представления (10).

Задача 3. Требуется найти такое решение системы (1) из класса $C^2\left(\Gamma_c\right)$, которое подчиняется следующим условиям в точке c:

$$\left\{\exp\left[p_l\left(c-0\right)\omega_c^{\alpha,-}\left(x\right)\right]B_{p_l,c}^{\alpha,-q}y_j\right\}_{x=c-0}=y_{jq}^{-},$$

$$\left\{\exp\left[-p_s\left(c+0\right)\omega_c^{\alpha,+}\left(x\right)\right]B_{p_s,c}^{\alpha,+q}y_j\right\}_{x=c+0}=y_{jq}^{+},$$

$j=\overline{1,m}$, $q=0,1$, где $y_{jq}^{\pm}$ – заданные произвольные действительные числа.

Теорема 8. При выполнении условий теоремы 7 задача 3 имеет единственное решение, которое дается формулой

$$y_j\left(x\right)=\begin{cases}Q_{j,c}^{\alpha,-}\left[\left(p\right),\left(r\right),\left(f\right),-y_{11}^{-},y_{10}^{-},...,-y_{m1}^{-},y_{m0}^{-}\right] \ \textit{при} \ \ x\in\Gamma_1,\\ Q_{j,c}^{\alpha,+}\left[\left(p\right),\left(r\right),\left(f\right),y_{11}^{+},y_{10}^{+},...,y_{m1}^{+},y_{m0}^{+}\right] \ \textit{при} \ \ x\in\Gamma_2,\end{cases} \quad j=\overline{1,m}.$$

Задача 4. Найти такое решение системы (1) из класса $C^2\left(\Gamma_c\right)$, которое подчиняется следующей системе условий:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=0}^{1}b_{ij}^{q,-}\left\{\exp\left[p_l\left(c-0\right)\omega_c^{\alpha,-}\left(x\right)\right]B_{p_l,c}^{\alpha,-q}y_j\right\}_{x=c-0}+$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=0}^{1}{}_{i(m+j)}^{q,+}\left\{\exp\left[-p_s\left(c+0\right)\omega_c^{\alpha,+}\left(x\right)\right]B_{p_s,c}^{\alpha,+q}y_j\right\}_{x=c+0}b=d_i,\ i=\overline{1,\mu},$$

где $b_{ij}^{q,-}, b_{i(m+j)}^{q,+}$ – заданные произвольные вещественные числа.

На основе формул обращения (11) из условий задачи 4 переходим к следующей системе μ линейных алгебраических уравнений относительно $4m$ произвольных постоянных $c_{jq}^{\mp}$:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=0}^{1}(-1)^q b_{ij}^{q,-}c_{jq}^{-}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=0}^{1}b_{i(m+j)}^{q,+}c_{jq}^{+}=d_i,\ i=\overline{1,\mu}. \tag{12}$$

Сформулируем следующее общее заключение о разрешимости задачи 4:

Теорема 9. *Пусть выполняются условия теоремы 7. Тогда, если система (12) совместна и определённа, то задача 4 имеет единственное решение, если неопределённа, то задача имеет бесконечно много решений, и её решения выражаются с помощью решений системы (12) формулой (10). В случае несовместности системы (12) задача 4 не имеет решения.*

Замечание 4. В проведенных в этом пункте рассуждениях для каждого значения $s=1,2,\ldots,m$ придавая l значения $l=1,2,\ldots,m$ можно получить m^2 формул для общего решения системы (1) с внутренней сверхсингулярной точкой c, изучить их свойства и свойства выражаемых ими решений, а также исследовать соответствующие задачи, подобные задачам 3 и 4.

Поступило 24.02.2025 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Rajabov N. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients. – Dushanbe: TSNU, 1998, 160 p.
2. Rajabov N. Linear conjugate boundary value problems for the first order ordinary sistem of linear differential equations with singular or super-singular coefficients. – Proceedings of the Second ISAAC Congress. – London: Kluwer Academic Publishers, 2000, vol. I., pp.175-183.
3. Раджабов Н., Олимов А.Г., Дадоджанова М.Я. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида с правой или левой сверхсингулярной точкой. – Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки, 2016, №2(37), с. 22-30.
4. Олимов А.Г., Дадоджанова М.Я. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида с сингулярной точкой. – Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки, 2016, №3 (38), с. 24-31.
5. Олимов А.Г., Раджабов Н. Интегральные представления и задачи типа Коши для одной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой. – Доклады АН Республики Таджикистан, 2016, т. 59, № 3-4, с. 99-105.
6. Олимов А.Г., Раджабов Н. Интегральные представления и задачи типа Коши для одной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка со сверх сингулярной точкой. – Доклады АН Республики Таджикистан, 2017, т. 60, №7–8, с. 279-285.
7. Олими А.Г. Представление общего решения в интегральном виде и задача типа Коши для системы *m* линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с граничной сингулярной точкой. – Учёные записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки, 2021, №4 (59), с. 3-12.
8. Олими А.Г. Представление общего решения в интегральном виде и задачи типов Коши и линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой. – Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук, 2021, №1, с. 60-77.
9. Олими А.Г. Формула представления общего решения и граничные задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с внутренней сингулярной точкой. – Учёные записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки, 2021, №4 (59), с. 13-19.
10. Олими А.Г. Интегральное представление общего решения и граничные задачи для системы *m* линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с особой точкой разного порядка. – Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук, 2021, №3, с. 131 -147.
11. Олими А.Г. Дадоджанова М.Я. Формула общего решения в интегральном виде, задачи типов Коши и линейного сопряжения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с внутренней слабо сингулярной точкой. – Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б.Г.Гафурова. Естественные и экономические науки, 2022, №3(62), с. 16-21.

12. Меликов О.И. Об одной системе модельных дифференциальных уравнений второго порядка с одной сингулярной точкой, когда корни соответствующего характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными. – Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2022, том 65, №7-8, с. 470-479.

А.Ғ.Олимӣ

ФОРМУЛАИ ТАСВИРИ ҲАЛЛИ УМУМӢ ВА МАСЪАЛАҲОИ КАНОРӢ БАРОИ СИСТЕМАИ *m* МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ОДИИ ХАТТИИ ТАРТИБИ ДУЮМ БО НУҚТАИ СИНГУЛЯРНОКИАШ БАЛАНД

Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи Б. Ғафуров

Дар мақола барои системаи муодилаҳои дифференсиалии одии хаттии тартиби дуюм бо нуқтаи сингулярнокиаш баланд, дар ҳолатҳое, ки нуқта бо нуқтаи сарҳадӣ ва дохилии интервал ҳамчоя мегардад, бо роҳи гузаштан ба системаи баробарқувваи мувофиқи муодилаҳои интегралии навъи дуюми Волтерр бо махсусияти суст, тасвири интегралии ҳалли умумӣ ёфта шудааст. Тасвирҳои ёфташуда барои омӯзиши рафтори ҳалҳо дар атрофи нуқтаи махсус, муайян кардани гузориш ва тадқиқи масъалаҳои намуди Кошӣ ва хаттӣ-ҳамроҳшавӣ татбиқ карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: *системаи муодилаҳои дифференсиалии одӣ, нуқтаи дорои сингулярнокии баланд, системаи муодилаҳои интегралии Волтерр бо махсусияти суст, тасвири интегралии ҳалли умумӣ, хосияти характеристикӣ, рафтори ҳалҳо, масъалаи намуди Кошӣ, масъалаи намуди хаттӣ-ҳамроҳшавӣ.*

A.G.Olimi

A FORMULA FOR REPRESENTING A GENERAL SOLUTION AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A SYSTEM OF *m* INEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH A SUPERSINGULAR POINT

B.Gafurov Khujand State University

In the work for a system of linear ordinary differential equations of the second order with a supersingular point, in cases where the point coincides with the boundary or inner point of the interval, by passing to the corresponding equivalent system of Volterra integral equations of the second kind with a weak singularity, an integral representation of the general solution is found. The obtained representations are used to study the behavior of solutions in the vicinity of a singular point, to clarify the formulation and study problems of Cauchy and linear conjugation type.

Key words: *system of ordinary differential equations, supersingular point, Volterra system of integral equations with weak singularity, integral representation of a general solution, characteristic property, behavior of solutions, Cauchy type problem, linear conjugation type problem.*

Сведения об авторе:

1. Олими Абдуманон Гафорзода – кандидат физико-математических наук, Худжандский государственный университет им. академика Б.Гафурова, доцент кафедры “Математический анализ”. E-mail: Abdumanon1950@mail.ru.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95
Специальность: 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Д.С.Сафаров, Дж.Мухаммадали

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава

(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана И.К.Курбановым 11.02.2025 г.)

В работе исследованы задачи нахождения ограниченных решений для неоднородного уравнения метааналитических функций второго порядка на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Ключевые слова: *регулярные решения, ограниченное решение, двоякопериодические функции, метааналитическая функция.*

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим комплексное уравнение вида [2]

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw_{\bar{z}} + bw = f(z), \tag{1}$$

где $z = x + iy, 2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$ – оператор Коши-Римана, $4\partial_{\bar{z}\bar{z}} = \partial_{xx} + +2i\partial_{xy} - \partial_{yy}$ – дифференциальный оператор Бицадзе, a, b, f – заданные функции комплексного переменного z, $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ – искомая функция.

1. Уравнение высокого порядка

$$\partial_{\bar{z}}^n w + a_1 \partial_{\bar{z}}^{n-1} w + \cdots + a_n w = 0, \tag{2}$$

впервые рассматривал В.Н.Колосов [8] в связи с его применением в плоской задаче теории упругости и предложил определенный алгоритм для получения его решения. Суть его алгоритма сводится к тому, чтобы рассматривать переменное $\bar{z}$ как независимое от z и затем решать уравнение (2) как обыкновенное линейное дифференциальное уравнение.

Следует отметить, что теория обыкновенного дифференциального уравнения не может быть дословно перенесена на случай уравнения (2) [12].

В случае постоянных коэффициентов a_k, $k = \overline{1,n}$ некоторые свойства решений уравнения (2) изучались М.Б.Балком и М.Ф.Зуевым (см. библиография к статье [3]), а также [4], [13], [15].

Согласно этим работам, уравнение (2) для постоянных коэффициентов в классе ограниченных на всей плоскости $\mathbb{C}$ имеет решение вида

Адрес для корреспонденции: *Сафаров Джумабой Сафарович, Мухаммадали Джурамурод. 735140, Республика Таджикистан, г. Бохтар, ул. Айни, 67. Бохтарский государственный университет им. Н.Хусрава. E-mail: safarov-5252@mail.ru; dzhuramurod68@bk.ru.*

$$w(z)=\sum_{k=1}^{n}A_k\exp(\lambda_k\bar{z}-\bar{\lambda}_k z)\,, \tag{3}$$

где A_k – постоянные, λ_k – простые корни уравнения

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_n=0. \tag{4}$$

Легко видеть, что решений вида

$$w_k(z)=\exp(\lambda_k\bar{z}-\bar{\lambda}_k z),k=1,2,\cdots,n$$

образуют фундаментальную систему решений и формула Остроградского-Лиувилля имеет вид

$$\mathrm{W}[z]=B[w_1,w_2\ ,\cdots,w_n]=c\prod_{i\neq j}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)\exp(\lambda_j\bar{z}-\bar{\lambda}_j z),$$

где c – постоянная.

В случае переменных коэффициентов для решений уравнения (2), свойства вронскиана не сохраняется. В этом можно убедится на примере, приведенном в [6]. Например, функции

$$w_1=\exp(z\bar{z}),\quad w_1=\exp(z^2\bar{z})$$

являются решениями уравнения

$$w_{\bar{z}\bar{z}}-z(z+1)w_{\bar{z}}+z^3w=0\,.$$

Определитель Вронского для них равен

$$\mathrm{W}[z]=B[w_1,w_2]=z(z-1)\exp[z(z+1)\bar{z}].$$

Отсюда видно, что $\mathrm{W}(0)=0,\ \mathrm{W}(1)=0$ но, тем не менее, $\mathrm{W}[\bar{z},z]\not\equiv 0$ и свойства вронскиана не сохраняется.

В работах [6], [10], когда все $a_k(\bar{z},z)$ – аналитические функции независимых переменных $\bar{z}$ и z (то есть разложимые в ряд Тейлора) [9], дано обоснование алгоритму Колосова и уточнён диапазон его применимости. Показано, что уравнение (2) имеет систему аналитических решений по $\bar{z}$ и z, для которых вронскиан отличен от нуля всюду в рассматриваемой области G, содержащей точки $\bar{z}$ и z. Отсюда следует, что существует единственное в области G уравнение вида (2). Справедлива формула Остроградского-Лиувилля

$$V(\bar{z},z)=W(\bar{z}_0,z)\exp\left[-\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}}a_1(t,z)\,dt\right],$$

где $W=B[w_1,w_2,\cdots,w_n]$ – вронскиан, составленный из n аналитических решений $w_1(\bar{z},z),\ w_2(\bar{z},z),\cdots,\ w_n(\bar{z},z)$ уравнения (2).

Для уравнений (1), (2) в случае постоянных коэффициентов задача существования и нахождения двоякопериодических решений с заданными периодами h_1, h_2 , $Im(h_2 / h_1) \neq 0$ исследована в работах [13-16].

При этом, использованы интегральные операторы с ядрами $\zeta(z)$ – дзета и $\sigma(z)$ – сигма-функции Вейерштрасса [1].

В работе [13] показано, что если $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ – корни уравнения (4) с кратностями $\mu_1,\ \mu_2, \cdots,\ \mu_p,\ \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p = n, p < n,$ то при $\lambda_k \in \Gamma$, Γ – решетка периодов и $k = \overline{1, p}$, $p < n$, $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2 \ ,\ m_1,\ m_2 - целые\}$, то однородное уравнение имеет решения вида

$$w(z) = \sum_{k=1}^{p} A_k \exp\left(\lambda_k \overline{z} - \overline{\lambda}_k z\right), p < n.$$

А когда все $\lambda_k \overline{\in} \Gamma$, $k = \overline{1, p}$, то уравнение (2) имеет только нулевое решение $w(z) \equiv 0$ в классе регулярных двоякопериодических функций [14].

Пусть все коэффициенты $a_k(z)$ – двоякопериодические с периодами h_1, h_2 и $a_k \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, где Ω – основной параллелограмм периодов решетки Γ, содержащий начало координат с вершинами $z_0,\ z_0 + h_1\ , z_0 + h_1 + h_2\ ,\ z_0 + h_2\ ,\ z_0$ – произвольная точка плоскости $\mathbb{C}$.

Если $w_1(z),\ w_2(z), \cdots,\ w_n(z)$ система регулярных, то есть из класса C^n двоякопериодических решений уравнения (2), тогда справедлива формула [12]

$$w(\overline{z}, z) = \begin{cases} c \exp\left[-\mathrm{T}_\zeta a_1(z) + bz\right], & \text{если } a_1^0 \in \Gamma, \\ 0, & \text{при } a_1^0 \in \overline{\Gamma}, \end{cases}$$

где c – произвольная постоянная, $\mathrm{T}_\zeta \rho(z)$ – интегральный оператор с ядром $\zeta(z)$ –дзета-функция Вейерштрасса, построенная на периодах h_1, h_2 [1],

$$a_1^0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a_1(z)\, d_t\Omega, \tag{5}$$

$d_t\Omega$ – элемент площади, $a_1(z) = a_1(\overline{z}, z)$.

Так, для уравнения (2) в случае, когда $a_1^0 \in \Gamma$, свойства вронскиана сохраняется для его системы n – решений $w_1(z),\ w_2(z), \cdots,\ w_n(z)$ из класса C_*^n. C_*^n – класс двоякопериодических функций с периодами h_1, h_2 и принадлежащих классу $C^n(\Omega) \cap C^{n-1}(\overline{\Omega})$.

2. Находим ограниченные решения уравнения (1), когда a,b –постоянные. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – различные корни характеристического уравнения, то имеется система фундаментальных решений для однородного уравнения (1) [4]

$$w_1(z)=\exp(\lambda_1\bar{z}-\bar{\lambda}_1 z), w_2(z)=\exp(\lambda_2\bar{z}-\bar{\lambda}_2 z).$$

Решение неоднородного уравнения (1) методом Лагранжа [12] будем искать в виде

$$w(z)=\varphi(z)w_1(z)+\psi(z)w_2(z), \tag{6}$$

где $\varphi(z),\psi(z)$ – искомые ограниченные функции класса $C^1(\mathbb{C})$.

Подставляя (6) в (1), как обычно, для искомых функций получим систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_{\bar{z}}\, e^{\lambda_1\bar{z}-\bar{\lambda}_1 z}+\psi_{\bar{z}}\, e^{\lambda_2\bar{z}-\bar{\lambda}_2 z}=0, \\ \lambda_1\varphi_{\bar{z}}\, e^{\lambda_1\bar{z}-\bar{\lambda}_1 z}+\lambda_2\psi_{\bar{z}}\, e^{\lambda_2\bar{z}-\bar{\lambda}_2 z}=f(z). \end{cases}$$

Решая эту систему для функции $\varphi(z),\psi(z)$ получим неоднородные системы уравнений Коши-Римана

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{z}} &= -\frac{f(z)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1\bar{z}+\bar{\lambda}_1 z}=F_1(z), \\ \psi_{\bar{z}} &= \frac{f(z)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2\bar{z}+\bar{\lambda}_2 z}=F_2(z). \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим через $C_\alpha(\mathbb{C})$ – класс равномерно непрерывных функций по Гёльдеру в $\mathbb{C}$ с показателем α, $\alpha\in(0,1)$ и ограниченных в $\mathbb{C}$.

В монографии [5] все решения неоднородного уравнения Коши–Римана найдены с помощью так называемого интегрального оператора Векуа

$$(\mathrm{T}V)(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{V(\zeta)}{\zeta-z}d_\zeta\mathbb{C}.$$

Приведем теорему из [5].

Теорема [5] 1. *Если* $V(z)\in L_p(\mathbb{C})\cap L_{p'}(\mathbb{C})$, *где* $1<p'<2,2<p<\infty$, *тогда функция* $g(z)=(\mathrm{T}V)(z)$ *является ограниченной и равномерно непрерывной по Гёльдеру, с показателями* $\alpha=(p-2)/p$ *и удовлетворяет неравенствам*

$$\left|g\left(z\right)\right| \le \mathrm{M}_{p,p'} L_p L_{p'}\left(V,\mathbb{C}\right),\ z \in C,$$

$$\left|g\left(z_1\right)-g\left(z_2\right)\right| \le \mathrm{M}_{p,p'} L_p L_{p'}\left(V,\mathbb{C}\right)\left|z_1-z_2\right|^{(p-2)/p},\ z_1,z_2 \in C,$$

то есть функция $g\left(z\right) \in C_\alpha\left(\mathbb{C}\right)$, $\alpha = \left(p-2\right)/p$, где

$$L_p L_{p'}\left(V,\mathbb{C}\right) = L_p\left(V,\overline{\mathbb{C}}\right) + L_{p'}\left(V,\mathbb{C}\right),$$

$$\mathrm{M}_{p,p'} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{2-q}\right)^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{q'-2}\right)^{\frac{1}{q'}},$$

$$q = p/\left(p-1\right)\left\langle 2, q' = p'/\left(p'-1\right)\right\rangle 2.$$

Функция $g\left(z\right)$ *имеет обобщенные производные в смысле Соболева в* $\mathbb{C}$ *и имеют место следующие формулы дифференцирования*

$$\left(g\left(z\right)\right)_{\bar{z}} = V\left(z\right),\ \left(g\left(z\right)\right)_z = SV\left(z\right), \tag{8}$$

причем $\left(SV\right)\left(z\right) \in L_p\left(\mathbb{C}\right)$, $1 < p < \infty$.

Заметим, что если еще $V\left(z\right) \in C_\alpha\left(\mathbb{C}\right), \alpha \in \left(0,1\right)$, то производные (8) существуют в обычном классическом понимании производной [5].

Легко заметить, что если $f\left(z\right) \in L_p L_{p'}\left(\mathbb{C}\right) \cap C_\alpha\left(\mathbb{C}\right)$, то функции $F_1\left(z\right), F_2\left(z\right)$, также принадлежат этому классу

$$L_p L_{p'}\left(\mathbb{C}\right) = L_p\left(\mathbb{C}\right) \cap L_{p'}\left(\mathbb{C}\right).$$

Теперь находим ограниченные функции $\varphi\left(z\right), \psi\left(z\right)$ соответственно из уравнений (7). Интегрируя первое уравнение (7), получим

$$\varphi\left(z\right) = \Phi\left(z\right) + \left(\mathrm{T}F_1\right)\left(z\right), \tag{9}$$

где $\Phi\left(z\right)$ – целая функция на плоскости $\mathbb{C}$.

Так как $\varphi\left(z\right)$ и $g\left(z\right) = \left(\mathrm{T}F_1\right)\left(z\right)$ – ограниченные функции на всей плоскости, то целая функция должна быть ограниченной и

$$\left|\Phi\left(z\right)\right| \le K \text{, при } z \in \mathbb{C} \cup \left\{\infty\right\}.$$

Тогда по теореме Лиувилля [9], такая функция является постоянной, то есть функция $\varphi\left(z\right)$ в представлении (9) выражается формулой

$$\varphi(z) = A_1 + (TF_1)(z), \tag{10}$$

где A_1 – произвольная постоянная.

Аналогично, интегрируя второе уравнение (7) находим функцию $\psi(z)$ в виде

$$\psi(z) = A_2 + (TF_2)(z),$$

A_2 – постоянная.

Подставляя значения функций $\varphi(z), \psi(z)$ в представление (6), получим формулу

$$w(z) = e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z}\left(A_1 + \frac{1}{\pi(\lambda_2 - \lambda_1)} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} e^{-\lambda_1 \bar{\zeta} + \bar{\lambda}_1 \zeta} d_\zeta \mathbb{C} \right) +$$

$$+ e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z}\left(A_2 - \frac{1}{\pi(\lambda_2 - \lambda_1)} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} e^{-\lambda_2 \bar{\zeta} + \bar{\lambda}_2 \zeta} d_\zeta \mathbb{C} \right), \tag{11}$$

или

$$w(z) = w_0(z) + w_1(z), \tag{12}$$

где $w_0(z)$ – решение однородного уравнения (1),

$$w_0(z) = A_1 e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z} + A_2 e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z} \tag{13}$$

а $w_1(z)$ – частное решение неоднородного уравнения

$$w_1(z) = \frac{1}{\pi(\lambda_2 - \lambda_1)} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\left[e^{-\lambda_1(\overline{\zeta - z}) + \bar{\lambda}_1(\zeta - z)} - e^{-\lambda_2(\overline{\zeta - z}) + \bar{\lambda}_2(\zeta - z)} \right] d_\zeta \mathbb{C}. \tag{14}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть характеристическое уравнение однородного уравнения (1)*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

имеет простые корни λ_1, λ_2 *и функция*

$$f(z) \in C_\alpha(\mathbb{C}) \cap L_{pp'}(\mathbb{C}),\ 1 < p' < 2,\ p > 2.$$

Тогда уравнение (1) имеет ограниченные решения в классе $C^1(\mathbb{C})$, *представимые в виде (12), в котором* $w_0(z)$ *– решение однородного уравнения, а* $w_1(z)$ *– частное решение неоднородного уравнения.*

Таким образом, однородное уравнение имеет два решения, а неоднородное уравнение всегда разрешимо.

Следствие. *Задача отыскания решения уравнения (1) в классе ограниченных регулярных функций нетёрово.*

Поступило 12.02.2025 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ахиезер И.И. Элементы теории эллиптических функций [Текст] – М.: Наука, 1970, 304 с.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981, 448 с.
3. Балк М.Б., Зуев М.Ф. О полианалитических функциях. – Успехи математических наук, 1970, т. XXV, вып. 5(155), с. 203-224.
4. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения. – Итоги науки и техн. Соврем. проблемы мат. Фундам. направления, 1991, т. 85, с. 187-246.
5. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции [Текст] – М.: Физматгиз, 1959, 628 с.
6. Жегалов В.И. Об одном обобщении полианалитических функций – Тр. семинара по краевым задачам – Казань: Изд-во КГУ, 1975, вып. 12, с. 50-57.
7. Зуев М.Ф. К теореме единственности для метааналитических функций – Смоленский матем. сб., 1979, №2, с. 54-59.
8. Колосов Г.В., Применение комплексной переменной к теории упругости – ОНТИ, 1935.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973, 736 с.
10. Малеин Ю.С. Строение решений некоторых уравнений с оператором Коши-Римана – Матем. анализ и теория функций, 1974, №3, с. 172 -178.
11. Раджабов Н.Р., Расулов А. Интегральные представления и граничные задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений высшего порядка [Текст] – ДАН СССР, 1985, т. 282, №4, с. 795-799.
12. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.-Л.: огиз «Гостехиздат», 1945, 405 с.
13. Сафаров Д.С., Саидназаров Р.С. Двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем высокого порядка [Текст] – ДАН РТ, 2014, т. 57, №5, с. 363-370.
14. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщённые аналитические функции и их приложения [Текст] – Душанбе: Дониш, 2012, 190 с.
15. Саидназаров Р.С. Двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка [Текст] – Вестник ТНУ, 2015, №1/1(156), с. 8-16.
16. Саидназаров Р.С. О многообразии двоякопериодических решений одной эллиптической системы второго порядка [Текст] – Вестник ТНУ, 2015, №1/1(156), с. 47-53.

Д.С.Сафаров, Дж.Мухаммадали

ҲАЛҲОИ МАҲДУД БАРОИ МУОДИЛАИ ҒАЙРИЯКҶИНСАИ ФУНКСИЯҲОИ МЕТААНАЛИТИКИИ ТАРТИБИ ДУЮМ

Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав

Дар мақола масъалаи ёфтани ҳалҳои маҳдуд барои муодилаи ғайриякҷинсаи функсияҳои метааналитикии тартиби дуюм дар тамоми ҳамвории комплексии $\mathbb{C}$ мавриди таҳқиқ қарор гирифтааст.

Калимаҳои калидӣ: *ҳалли регулярӣ, ҳалли маҳдуд, функсияҳои дудаврдошта, функсияи метааналитикӣ.*

D.S.Safarov, J.Muhammadali

BOUNDED SOLUTIONS FOR THE INHOMOGENEOUS EQUATION OF METAANALYTIC FUNCTIONS OF SECOND ORDER

N.Khusrav Bakhtar state university

In this paper we study the problem of finding bounded solutions for the inhomogeneous equation of metaanalytic functions of the second order on the whole complex plane $\mathbb{C}$.

Key words: *regular solutions, bounded solution, bipartite functions, metaanalytic function.*

Сведения об авторах:

1. **Сафаров Джумабой Сафарович** – доктор физико-математических наук, Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава, профессор кафедры “Математический анализ и дифференциальные уравнения”. E-mail: safarov-5252@mail.ru;
2. **Мухаммадали Джурамурод** – Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава, преподаватель кафедры “Математический анализ и дифференциальные уравнения”. E-mail: dzhuramurod68@bk.ru.

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК ТАДЖИКИСТАНА
2025, том 68, №4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.2
Специальность: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ф.С.Савлатов

АЛГЕБРА ОПЕРАТОРОВ БЕРГМАНА С ОТРАЖЕНИЕМ

Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.И. Илоловым 20.03.2025)

В работе исследуется алгебра двумерных интегральных операторов типа Бергмана с отражением $(Wf)(z) = f(\bar{z})$. *Строится алгебра символов таких операторов. Доказано необходимое и достаточное условие нётеровости операторов из указанной алгебры и дана формула для подсчёта индекса операторов.*

Ключевые слова: *оператор Бергмана, символ-оператор, алгебра операторов, индекс операторов.*

В лебеговом пространстве $L^p(\overline{G})$, $p>1$, рассмотрим сингулярный интегральный оператор вида

$$A = aI + bW + cB + d\overline{B} + e\overline{B}W + \alpha BW + \beta D + \gamma\overline{D} + \delta DW + \nu\overline{D}W + T, \tag{1}$$

где $a(z), b(z), c(z), d(z), e(z), \alpha(z), \beta(z), \gamma(z), \delta(z), \nu(z)$ – непрерывные в замкнутом круге $\overline{G}$ функции. G – единичный круг комплексной плоскости $G = \{z : |z| < 1\}$, $z = x + iy$, ограниченной окружностью Γ, а $\overline{G} = G \cup \Gamma$. Операторы B, $\overline{B}, D, \overline{D}$ имеют вид

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{(1-z\bar{\zeta})^2}\,ds_\zeta, \quad (\overline{B}f)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{(1-\bar{z}\zeta)^2}\,ds_\zeta,$$

$$(Df)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{(1-z\zeta)^2}\,ds_\zeta, \quad (\overline{D}f)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{(1-\bar{z}\bar{\zeta})^2}\,ds_\zeta.$$

Здесь B – интегральный оператор с ядром, $B(z,\zeta)$ – керн-функция Бергмана, I – единичный оператор, T – вполне непрерывный оператор, черта над функцией означает переход к комплексно–сопряженным значениям, ds_ζ – элемент плоской меры Лебега.

Заметим что $\overline{B} = KBK$ и $(Wf) = f(\bar{z})$, а двукратный интеграл $(Bf)(z)$ в точке $z\bar{\zeta} = 1$ имеет полюс второго порядка. Функция $\dfrac{1}{(1-z\bar{\zeta})^2}$ имеет особенность только на границе области G, когда ζ и z одновременно находятся на границе. Поэтому функция со слабой особенностью понимается

Адрес для корреспонденции: *Савлатов Францсуан Сангмамадович, 734055, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр. Борбад, 48/5, Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана. E-mail: frantssuan.savlatov@gmail.com.*

как вполне непрерывный оператор, и интеграл понимается как интеграл Лебега (множество нулевых измерений не учитывается). Оператор $(Df)(z)$ тоже понимается как интеграл Лебега. Его полюс находится на границе Γ при $z\zeta = 1$.

Интегральные операторы с ядром Бергмана $B(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{\pi}(1-z\overline{\zeta})^{-2}$ встречаются в теории обобщенных аналитических функций [1], а также в различных проблемах теории конформных отображений и римановых поверхностей [2, 3]. Здесь на основании формул композиции операторов B, $\overline{B}$, D, $\overline{D}$ и локального метода И.Б.Симоненко [4] получены необходимые и достаточные условия нётеровости оператора A и вычислен его индекс.

Отметим, что А. Джураев [5] и И.И. Комяк [6] рассматривали частный случай оператора A, когда $b = e = \alpha = \beta = \gamma = \delta = \nu = 0$.

Ниже приведено общее описание алгебры операторов типа (1).

Следующие утверждения следуют из [7-9]

Лемма 1. *Операторы B, $\overline{B}$ действуют в пространстве $L^p(\overline{G}), p>1$ и являются линейными ограниченными операторами.*

Лемма 2. *Если $a(z)\in C_\alpha(\overline{G})$, то операторы $BaI-aB$ и $\overline{B}aI-a\overline{B}$ вполне непрерывны в $L^p(\overline{G}), p>1$.*

Доказательство. Пусть вначале $a(z)\in C_\alpha(\overline{G})$, где $0<\alpha<1$. Во внутренних точках области G оператор B особенностей не имеет, а для точек z,ζ границы Γ оператор $aB-Ba$ имеет слабую особенность, ибо для его ядра имеется оценка

$$\left|\frac{a(\zeta)-a(z)}{(1-z\overline{\zeta})^2}\right| \le \frac{M\,|\zeta-z|^\alpha}{|1-z\overline{\zeta}|^2} = \frac{M}{|1-z\overline{\zeta}|^{2-\alpha}}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда функция $a(z)$ просто непрерывна в $\overline{G}$. Произвольную непрерывную функцию $a(z)$ можно аппроксимировать функциями $a_n(z)$ из класса $C_\alpha(\overline{G})$. Согласно неравенству

$$\|(aB-aB)f-(a_nB-Ba_n)f\| \le \|B(a-a_n)f\| + \|(a-a_n)Bf\| \le$$

$$\le \|B\| \max_{z\in\overline{D}} |a(z)-a_n(z)|,$$

последовательность вполне непрерывных операторов a_nB-Ba_n, действующих в $L^p_{\beta-2/p}(G)$, равномерно сходится к оператору $aB-Ba$. Поэтому оператор $aB-Ba$ вполне непрерывен в $L^p_{\beta-2/p}(G)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если* $c(z)$ - *непрерывна в* $\overline{G}$ *и* $c(t)=0$ *при* $t\in\Gamma$, *то оператор* $c(z)B$ *вполне непрерывен в* $L^p_{\beta-2/p}(G)$ $(1<p<\infty, 0<\beta<2)$.

Доказательство. Обозначим через P_M оператор умножения на характеристическую функцию измеримого множества $M\subset G$. Пусть G_ε – внутренняя подобласть области G такая, что каждая точка ее границы попадает в ε – окрестность некоторой точки Γ. Представим оператор $c(z)B$ в виде.

$$c(z)B=c(z)BP_{D_\varepsilon}+c(z)P_{D_\varepsilon}BP_{D\setminus D_\varepsilon}+c(z)P_{D\setminus D_\varepsilon}BP_{D\setminus D_\varepsilon}.$$

Ядра первых двух операторов ограничены, а поэтому эти операторы вполне непрерывны в $L^p_{\beta-2/p}(G)$. Норма третьего оператора в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ при $\varepsilon\to 0$ стремится к нулю в силу условия на $c(z)$. Поэтому $c(z)B$ вполне непрерывен.

Лемма 4. *Пусть* $f(z)\in L^p(G)$, $p>1$. *Тогда имеют место формулы*

$$(BBf)(z)=(Bf)(z),\ z\in G\quad (\overline{B}Bf)(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}f(\sigma)ds_\sigma. \tag{2}$$

Доказательство. Из равенства

$$(Bf)(z)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{zf(\zeta)}{(1-z\overline{\zeta})}ds_\zeta\right),$$

где $\dfrac{\partial}{\partial z}$ означает обобщенную производную по z, выходит, что

$$(BBf)(z)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{zds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}\frac{f(\sigma)ds_\sigma}{(1-\zeta\overline{\sigma})^2}\right).$$

Поскольку внешний интеграл на границе окружности $\Gamma:|\zeta|=1$ имеет слабую особенность, а для внутреннего интеграла слабая особенность существует только в окружности, то меняем порядок интеграла и получаем:

$$(BBf)(z)=\frac{\partial}{\partial z}[\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}f(\sigma)ds_\sigma\frac{\partial}{\partial\overline{\sigma}}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{z\overline{\sigma}ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})(1-\zeta\overline{\sigma})}\right)]. \tag{3}$$

Вычисляем внутренний интеграл. Для этого, когда $|z|<1$, $|\zeta|<1$ и $|\sigma|<1$, и, используя

$$\frac{1}{1-z\overline{\zeta}}=\sum_{k=0}^{\infty}(z\overline{\zeta})^k,\ \frac{1}{1-\zeta\overline{\sigma}}=\sum_{j=0}^{\infty}(\zeta\overline{\sigma})^j,$$

мы получаем следующее равенство

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{z\overline{\sigma}ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})(1-\zeta\overline{\sigma})}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}z^{k+1}\overline{\sigma}^{j+1}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\overline{\zeta}^{k}\zeta^{j}ds_\zeta=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(z\overline{\sigma})^{k+1}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}|\zeta|^{2k}\,ds_\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z\overline{\sigma})^{k+1}}{k+1}.$$

Подставив эти значения в уравнение (3) и применив дифференцирование по переменным z и $\overline{\sigma}$, получим искомое равенство.

$$(BBf)(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}f(\sigma)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(z\overline{\sigma})^{k}ds_\sigma=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}\frac{f(\sigma)ds_\sigma}{(1-z\overline{\sigma})^{2}}=(Bf)(z).$$

Теперь докажем равенство $(\overline{B}Bf)(z)$. Аналогично мы получаем

$$(\overline{B}Bf)(z)=\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}ds_\zeta}{1-\overline{z}\zeta}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}\frac{f(\sigma)ds_\sigma}{(1-\zeta\overline{\sigma})^{2}}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left[\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}f(\sigma)ds_\sigma\frac{\partial}{\partial\overline{\sigma}}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}\overline{\sigma}ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\sigma})}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left[\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}f(\sigma)ds_\sigma\frac{\partial}{\partial\overline{\sigma}}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\overline{z}^{k+1}\overline{\sigma}^{j+1}\zeta^{k+j}ds_\zeta\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left[\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}\overline{z}f(\sigma)ds_\sigma\frac{\partial}{\partial\overline{\sigma}}\left(\frac{\overline{\sigma}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}ds_\zeta\right)\right]=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}f(\sigma)ds_\sigma.$$

Результат. Имеют место следующие равенства: $\overline{B}^{2}=\overline{B}$ и $B\overline{B}=\overline{B}B$.

Лемма 5. *Пусть* $f(z)\in L^{p}(G),\ p>1$. *Тогда имеют место формулы*

$$(D\overline{D}f)(z)=(Bf)(z)\quad(BDf)(z)=(Df)(z)\tag{4}$$

Доказательство. Для доказательства равенств (4) воспользуемся доказательством равенств (2). То есть сначала мы записываем это равенство в открытом виде, а затем, используя формулу дифференцирования интегралов со слабой особенностью и используя формулу суммы бесконечно убывающей прогрессии, мы получим

$$(D\overline{D}f)(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{ds_\zeta}{(1-\zeta z)^{2}}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}\frac{f(\sigma)ds_\sigma}{(1-\overline{\sigma}\overline{\zeta})^{2}}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{zds_\zeta}{(1-\zeta z)}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}\frac{f(\sigma)ds_\sigma}{(1-\overline{\sigma}\overline{\zeta})^{2}}\right)=$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{z ds_\zeta}{(1-\zeta z)}\frac{\partial}{\partial\overline{\sigma}}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}\frac{\overline{\sigma} f(\sigma) ds_\sigma}{(1-\overline{\sigma}\overline{\zeta})}\right)\right].$$

Поменяем порядок интегрирования и найдем

$$(D\overline{D}f)(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1} f(\sigma) ds_\sigma\right)\frac{\partial}{\partial\overline{\sigma}}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{z\overline{\sigma} ds_\zeta}{(1-\zeta z)(1-\overline{\sigma}\overline{\zeta})}\right). \tag{5}$$

Обозначим внутренний интеграл через J и вычислим его. Когда $|z|<1, |\zeta|<1$ и $|\sigma|<1$, имеет место равенство

$$\frac{1}{1-\zeta z} = \sum_{k=0}^{\infty}(\zeta z)^k, \qquad \frac{1}{1-\overline{\sigma}\overline{\zeta}} = \sum_{j=0}^{\infty}(\overline{\sigma}\overline{\zeta})^j.$$

Используя эти равенства, получим

$$J = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{z\overline{\sigma} ds_\zeta}{(1-\zeta z)(1-\overline{\sigma}\overline{\zeta})} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z^{k+1}\overline{\sigma}^{j+1}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\zeta^k\overline{\zeta}^j ds_\zeta.$$

Здесь, в зависимости от значений k и j, возможны два случая

1. Если $k = j$, то

$$J_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1}\overline{\sigma}^{k+1}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\zeta^k\overline{\zeta}^k ds_\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(z\overline{\sigma})^{k+1}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}(\zeta\overline{\zeta})^k = \sum_{k=0}^{\infty}(z\overline{\sigma})^{k+1}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}|\zeta|^{2k} =$$

$$= \left\{\zeta = \rho e^{i\alpha} \Rightarrow |\zeta|^{2k} = |\rho^{2k}e^{2ik\alpha}| = \rho^{2k} \Rightarrow ds_\zeta = \rho d\rho d\alpha;\ 0\le\rho\le 1;\ 0\le\alpha\le 2\pi\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(z\overline{\sigma})^{k+1}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^1\rho^{2k+1}d\rho\int_0^{2\pi}d\alpha\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(z\overline{\sigma})^{k+1}\left(2\int_0^1\rho^{2k+1}d\rho\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(z\overline{\sigma})^{k+1}\frac{1}{k+1}.$$

2. Если $k \neq j$, то

$$J_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z^{k+1}\overline{\sigma}^{j+1}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\zeta^k\overline{\zeta}^j ds_\zeta =$$

$$\left\{\zeta = \rho e^{i\alpha}, \overline{\zeta} = \rho e^{-i\alpha} \Rightarrow \zeta^k\overline{\zeta}^j = \rho^{k+j}e^{(k-j)i\alpha} \Rightarrow ds_\zeta = \rho d\rho d\alpha;\ 0\le\rho\le 1;\ 0\le\alpha\le 2\pi\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z^{k+1}\overline{\sigma}^{j+1}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^1 \rho^{k+j+1}d\rho\int_0^{2\pi} e^{(k-j)i\alpha}d\alpha\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z^{k+1}\overline{\sigma}^{j+1}\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k+j+2}\frac{e^{(k-j)i\alpha}}{(k-j)i}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z^{k+1}\overline{\sigma}^{j+1}\left[\frac{1}{\pi}\frac{1}{(k+j+2)(k-j)i}\left(e^{2(k-j)i\pi}-e^{0}\right)\right] =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z^{k+1}\overline{\sigma}^{j+1}\left[\frac{1}{\pi}\frac{1}{(k+j+2)(k-j)i}(1-1)\right] = 0.$$

Поскольку $k \neq j$, искомый интеграл равен нулю, поэтому мы будем рассматривать только случай, когда $k = j$. То есть

$$J_1 = J = \sum_{k=0}^{\infty}(z\overline{\sigma})^{k+1}\frac{1}{k+1}.$$

Поставив это значение в равенство (7), получим

$$(D\overline{D}f)(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\sigma|<1} f(\sigma)ds_\sigma \frac{\partial}{\partial\overline{\sigma}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(z\overline{\sigma})^{k+1}\frac{1}{k+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\sigma|<1} f(\sigma)ds_\sigma\left(\sum_{k=0}^{\infty}(z)^{k+1}(\overline{\sigma})^{k}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\iint_{|\sigma|<1} f(\sigma)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(z\overline{\sigma})^{k}\right)ds_\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint_{|\sigma|<1}\frac{f(\sigma)ds_\sigma}{(1-z\overline{\sigma})^2} = (Bf)(z).$$

Лемма полностью доказана.

Аналогично примем следующие леммы без доказательства.

Лемма 6. *Пусть* $f(z) \in L^p(G),\ p > 1$. *Тогда имеют место формулы*

$$[(Bf)(z)]^2 = (D\overline{D}f)(z) = (Bf)(z),\ (BDf)(z) = (D\overline{B}f)(z) = (Df)(z),$$

$$[(\overline{B}f)(z)]^2 = (\overline{D}Df)(z) = (\overline{B}f)(z),\ (\overline{B}\,\overline{D}f)(z) = (\overline{D}Bf)(z) = (\overline{D}f)(z). \qquad (6)$$

Лемма 7. *Пусть* $f(z) \in L^p(G),\ p > 1$. *Тогда имеют место формулы*

$$[(Df)(z)]^2 = [(\overline{D}f)(z)]^2 = (DBf)(z) = (\overline{D}\,\overline{B}f)(z) = (B\overline{B}f)(z) =$$

$$= (\overline{B}Bf)(z) = (\overline{B}Df)(z) = (B\overline{D}f)(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{|\sigma|<1} f(\sigma)ds_\sigma. \qquad (7)$$

Определение. Говорят, что оператор A образует алгебру $\Re$, если существуют два таких оператора A_1 и A_2 из $\Re$, что $A_1 + A_2 = A_3 \in \Re$ и $A_1 \cdot A_2 = A_4 \in \Re$.

Имеет место

Теорема 1. *Оператор A, заданный формулой (1), является элементом алгебры $\Re$.*

Доказательство. Пусть

$$A_1 = a_1 I + b_1 W + c_1 B + d_1 \overline{B} + e_1 \overline{B}W + \alpha_1 BW + \beta_1 D + \gamma_1 \overline{D} + \delta_1 DW + \nu_1 \overline{D}W + T_1,$$

$$A_2 = a_2 I + b_2 W + c_2 B + d_2 \overline{B} + e_2 \overline{B}W + \alpha_2 BW + \beta_2 D + \gamma_2 \overline{D} + \delta_2 DW + \nu_2 \overline{D}W + T_2,$$

где I – тождественный, а T_i $(i = 1, 2)$ – вполне непрерывные операторы в $L^p(G)$, $p > 1$. Прежде всего нетрудно проверить, что произведение двух операторов A_1 и A_2 с коэффициентами $a_j, b_j, c_j, d_j, e_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, \nu_j$ $(j = 1, 2)$ дает оператор A. Коэффициенты оператора $A = A_1 A_2 = aI + bW + cB + d\overline{B} + e\overline{B}W + \alpha BW + \beta D + \gamma \overline{D} + \delta DW + \nu \overline{D}W + T$ вычисляются по формулам

$$a(z) = a_1(z)a_2(z) + b_1(z)b_2(\overline{z}); \quad b(z) = a_1(z)b_2(z) + b_1(z)a_2(\overline{z});$$

$$c(z) + \delta(z) = a_1(z)c_2(z) + a_1(z)\delta_2(z) + b_1(z)e_2(\overline{z}) + b_1(z)\gamma_2(\overline{z}) + c_1(z)a_2(z) + \delta_1(z)a_2(z) +$$

$$+ c_1(z)c_2(z) + c_1(z)\delta_2(z) + c_2(z)\delta_1(z) + \delta_1(z)\delta_2(z) + \alpha_1(z)b_2(\overline{z}) + \beta_1(z)b_2(\overline{z}) +$$

$$+ \alpha_1(z)e_2(\overline{z}) + \alpha_1(z)\gamma_2(\overline{z}) + \beta_1(z)e_2(\overline{z}) + \beta_1(z)\gamma_2(\overline{z});$$

$$d(z) + \nu(z) = a_1(z)d_2(z) + a_1(z)\nu_2(z) + b_1(z)\alpha_2(\overline{z}) + b_1(z)\beta_1(\overline{z}) + d_1(z)a_2(z) + \nu_1(z)a_2(z) +$$

$$+ d_1(z)d_2(z) + d_1(z)\nu_2(z) + \nu_1(z)d_2(z) + \nu_1(z)\nu_2(z) + e_1(z)b_2(\overline{z}) + \gamma_1(z)b_2(\overline{z}) +$$

$$+ e_1(z)\alpha_2(\overline{z}) + e_1(z)\beta_2(\overline{z}) + \gamma_1(z)\alpha_2(\overline{z}) + \gamma_1(z)\beta_2(\overline{z});$$

$$\alpha(z) + \beta(z) = a_1(z)\alpha_2(z) + a_1(z)\beta_2(z) + b_1(z)d_2(\overline{z}) + b_1(z)\nu_2(\overline{z}) + c_1(z)b_2(z) + \delta_1(z)b_2(z) +$$

$$+ c_1(z)\alpha_2(z) + c_1(z)\beta_2(z) + \delta_1(z)\alpha_2(z) + \delta_1(z)\beta_2(z) + \alpha_1(z)a_2(\overline{z}) + \beta_1(z)a_2(\overline{z}) +$$

$$+ \alpha_1(z)d_2(\overline{z}) + \alpha_1(z)\nu_2(\overline{z}) + \beta_1(z)d_2(\overline{z}) + \beta_1(z)\nu_2(\overline{z});$$

$$e(z) + \gamma(z) = a_1(z)e_2(z) + a_1(z)\gamma_2(z) + b_1(z)c_2(\overline{z}) + b_1(z)\delta_2(\overline{z}) + d_1(z)b_2(z) + \nu_1(z)b_2(z) +$$

$$+ d_1(z)e_2(z) + d_1(z)\gamma_2(z) + \nu_1(z)e_2(z) + \nu_1(z)\gamma_2(z) + e_1(z)a_2(\overline{z}) +$$

$$+ \gamma_1(z)a_2(\overline{z}) + e_1(z)c_2(\overline{z}) + e_1(z)\delta_2(\overline{z}) + \gamma_1(z)c_2(\overline{z}) + \gamma_1(z)\delta_2(\overline{z}).$$

Имеет место

Теорема 2. *Для того чтобы оператор* $A = aI + bW + cB + d\overline{B} + e\overline{B}W + \alpha BW + \beta D + \gamma\overline{D} + \delta DW + \nu\overline{D}W + T$, *действующий в* $L^p(\overline{G})$, $p > 1$, *был оператором Нётера, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:*

$$\Delta(z) = a(z)a(\bar{z}) - b(z)b(\bar{z}) \neq 0, \ z \in \overline{G};$$

$$\Delta_1(z) = [a(t) + c(t) + \delta(t)] \times [a(\bar{t}) + d(\bar{t}) + \nu(\bar{t})] -$$

$$-[b(t) + \alpha(t) + \beta(t)] \times [b(\bar{t}) + e(\bar{t}) + \gamma(\bar{t})] \neq 0, \ t \in \Gamma.$$

Теорема 3. *Индекс н оператора* $A = aI + bW + cB + d\overline{B} + e\overline{B}W + \alpha BW + \beta D + \gamma\overline{D} + \delta DW + \nu\overline{D}W + T$, *действующего в* $L_p(\overline{G})$, $p > 1$, *вычисляется по формуле* $IndA = -\frac{1}{2\pi}[Arg\Delta_1(t)]_\Gamma$.

Замечание 1. При $b(z) = e(z) = \alpha(z) = \delta(z) = \nu(z) = 0$ в (1) оператор A изучен в работе [10].

Замечание 2. Аналогичные результаты устанавливаются и для операторов вида (1) с матричными коэффициентами.

Поступило 20.03.2025 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959, 672 с.
2. Шиффер М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конформном отображении. В кн.: Международный математиченский конгресс в Эдинбурге (обзорные доклады). – М.: Физматгиз, 1962. с.193-218
3. Шиффер М., Спенсер Д.К. Функционалы на конечных римановых поверхностях. – М., 1957.
4. Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I, II. – Изв. АН СССР, сер. матем., 1965, т.29, №3-4, с.567-580, 757-782.
5. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1987, 415 с.
6. Комяк И.И. Об условиях н и формуле для индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений. – Докл. АН БССР, 1979, т.23, №1, с.8-11.
7. Комяк И.И. Условия н и формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений по круговой области. – Дифференц. уравнения, 1980, т.16, №2, с.328-343.
8. Комяк И.И. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов по круговой области. – Докл. АН БССР, 1979, т.23, №11, с.972-975.
9. Джангибеков Г. Н и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов. – Изв.Вузов, 1991, №1, с.19-28.
10. Ф.С Савлатов. Алгебраи оператор намуди Бергман бо инъикос. – Вестник ТНУ, 2016, №1/2(196), с.65-70.

Ф.С.Савлатов

АЛГЕБРАИ ОПЕРАТОРҲОИ БЕРГМАН БО ИНЪИКОС

Донишгоҳи байналмилалии сайёҳӣ ва соҳибкории Тоҷикистон

Дар мақола алгебраи операторҳои интегралии сингулярии дученакаи намуди Бергман бо инъикоси $(Wf)(z) = f(\bar{z})$ омӯхта шудааст. Символи алгебраи чунин намуди операторҳо сохта шуда, теоремаи шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани операторҳои аз алгебраи нишондодашуда ҳосил гардидааст ва теорема барои ҳисоб намудани индекси операторҳо ҳосил карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *оператори Бергман, символи оператор, алгебраи операторҳо, индекси операторҳо.*

F.S.Savlatov

BERGMAN OPERATOR ALGEBRA WITH REFLECTION

International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan

The work investigates the algebra of two-dimensional integral operators of the Bergman type with reflection $(Wf)(z) = f(\bar{z})$. The algebra of symbols of such operators is constructed. A theorem is proven that provides a necessary and sufficient condition for the invertibility of operators from the mentioned algebra, and a formula for calculating the index of these operators is given.

Key words: *the Bergman operator, operator symbol, operator algebra, operator index.*

Сведения об авторе:

1. **Савлатов Францсуан Сангмамадович** – докторант PhD кафедры ФАДУ Таджикского национального университета, Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана, ассистент кафедры «Математика в экономике». E-mail: frantssuan.savlatov@gmail.com.

МАТЕМАТИКА

УДК 536.46

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ;
1.3.17. Химическая физика, горение и взрыв, физика экстремальных состояний вещества;
1.3.3. Теоретическая физика.

М.М.Кабилов[*,], З.Б.Шерматова[**], П.Б.Садриддинов[*,***], Б.Дж.Гулбоев[*,**]**

О ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ ГАЗОВ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОПОТЕРЬ

[*]Национальная академия наук Таджикистана,
Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана,
[**]Российско-Таджикский (Славянский) университет,
[***]Таджикский национальный университет

(Представлено академиком НАН Таджикистана М.И.Илоловым 29.01.2025 г.)

В статье исследуется распространение волны горения газа в инертной пористой среде с использованием эквивалентной математической модели фильтрационного горения газов (ФГГ), учитывающей теплопотери в зоне горения. Частные решения модели получены в виде произведения двух затухающих экспоненциальных функций от независимых переменных. Эти решения представляют собой функции температуры пористой среды, смеси газов и относительной концентрации недостающего компонента, зависящие от координаты и времени. Рассмотрены случаи, когда температуры пористой среды и смеси газов тождественно равны, что наблюдается при численном решении задачи структуры стационарной волны ФГГ. Для каждого частного решения определяются максимальная температура, скорость волны, а также формулы для расчёта неизвестного параметра и инкремента затухания.

Ключевые слова: *математическая модель, горение газов, пористая среда, смеси газов, теплопотерь, температура, концентрация, скорость волны, режим.*

Цель настоящей работы заключается в представлении волны горения как аналитического решения эквивалентной математической модели фильтрационного горения газов (ФГГ) с учётом теплопотерь [1] и в определении зависимости температуры фаз от времени и координаты, максимальной температуры, скорости волны, а также формулы для расчёта неизвестного параметра и инкремента затухания.

В работе [1] разработана методика нахождения аналитического решения эквивалентной математической модели в виде зависимостей температур (пористой среды, газа) и концентрации

Адрес для корреспонденции: *Кабилов Маруф Махмудович. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. М.Турсун-заде, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: maruf1960@mail.ru.*

недостающего компонента смеси газов от времени и координат. Следуя этой методике, в данной работе выбирается другое нестационарное аналитическое решение модели, представляющее собой произведение двух затухающих экспоненциальных функций независимых переменных. Поскольку решением модели являются функции температуры и концентрации от времени и координат, их затухание приведёт к прекращению горения. Но насколько они быстро затухают показывают расчёты, производимые по зависимостям и формулам, получении которых задача настоящей работы. В связи с этим, в первом приближении, рассмотрим частные случаи распространения волны, где функции температуры пористой среды и смеси газов тождественно равны.

Отметим, что математическая модель фильтрационного горения газов (ФГГ) с учётом теплопотерь разрабатывается для анализа влияния теплопотерь на горение и его устойчивость. Эти вопросы были изучены теоретически и экспериментально в работах [2-5], где в расчётах параметров была использована ньютоновская зависимость теплопотерь от температуры, то есть в математической модели, член выражающий теплопотерь представлялся линейной зависимостью от температуры, а её интенсивность - коэффициентом теплоотдачи, что очень удобно при аналитическом рассмотрении задачи. Как отмечено в [6], наибольший интерес представляют три аспекта проблемы: влияние теплопотерь на скорость распространения волны, влияние теплопотерь на максимальную температуру пористой среды и определение предельных теплопотерь для существования ФГГ. Второй аспект проблемы была решена в 90-ые годы 20 столетия [7], то есть была получена формула максимальной температуры пористой среды, которая содержала наряду с другими константами, коэффициент теплопотери в окружающее пространство и скорость вдува смеси в пористый блок, чего ждала теория горения газов за время своего существования. В последующие годы в работах [8, 9] были получены формулы максимальной температуры пористой среды, подтверждающие формулу работы [7]. Вопрос о влиянии внешних теплопотерь на распространение стационарных волн ФГГ теоретически и экспериментально рассматривался в [2] и по результатам расчётов сделан вывод о существовании предельного значения теплопотерь, приводящих к срыву горения, и минимальной скорости фильтрации, ниже которой распространение волны невозможно при конечном уровне теплопотерь. Имеется множество работ, в которых характеристики волн ФГГ изучался методом численного моделирования [10-21]. В [21] приведены результаты численного определения пределов распространения стационарной волны фильтрационного горения метановоздушной смеси в зависимости от толщины, теплопроводности пористого элемента, состава и скорости вдува смеси при различных диаметрах частиц пористой среды и коэффициентах теплоотдачи во внешнюю среду и подтверждены все выводы работы [2], а также установлена максимальная время прогорания огнепреградителя.

Для решения поставленной задачи используем общеизвестную математическую модель ФГГ при наличии теплопотерь [1, 4, 6, 10, 14-16]

$$\rho_1 c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} + \rho_1 c_p \upsilon_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\alpha_c S_c (T_1 - T_2) + \rho_1 QJ\,,\ \ J = \eta k_0 \exp(-E/RT_1),$$

$$\rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \alpha_2 \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \alpha_c S_c (T_1 - T_2) + \alpha_{0,e}(T_0 - T_2)\,,$$

$$\rho_1 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \rho_1 \upsilon_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\rho_1 J, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 \upsilon_1}{\partial x} = 0, \quad \rho_1 T_1 = \rho_{10} T_0, \tag{1}$$

$$\alpha_c = \frac{Nu \cdot \lambda_1}{d_{eff}}, \quad S_c = \frac{6\alpha_2}{d}, \quad \alpha_{0,e} = \frac{2\alpha_w}{R_w}$$

$$Nu = 0.395\,\mathrm{Re}^{0.64}\,\mathrm{Pr}^{1/3}, \quad \mathrm{Re} = \frac{\upsilon_1 d_{eff}\rho_1}{\mu_1 \alpha_1}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{c_p \mu_1}{\lambda_1}\,, \quad d_{eff} = \frac{2\alpha_1 d}{3\alpha_2}.$$

Начальные и граничные условия задачи представимо в виде

$$\begin{gathered} t = 0: \quad T_1 = T_{10}(x), \quad T_2 = T_{20}(x), \ \eta = \eta_0(x), \\ x = 0: \ T_1 = T_0, \quad T_2 = T_0, \quad \eta = \eta_0, \\ x = l: \ \frac{\partial T_1}{\partial x} = 0; \ \ \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0; \quad \eta = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь T_1, T_2 – температуры фаз (газа и пористой среды), η – массовая концентрация реагирующего компонента, υ_1 – скорость движения смеси газов; ρ_1, ρ_2 – приведённые плотности фаз; c_p, c_2 – удельные теплоёмкости; λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности в газе и пористой среде; α_c – коэффициент поверхностного теплообмена между фазами; S_c – удельная поверхность частиц, $\alpha_{0,e}$ – коэффициент теплоотдачи в окружающее пространство; Q – тепловой эффект реакции; E – энергия активации; R – универсальная газовая постоянная; k_0 – предэкспонент, Nu, Re, Pr – числа Нусельта, Рейнолдьса, Прандтля соответственно, d_{eff} – эффективный диаметр, d – диаметр частиц, α_1, α_2 – объёмные содержания фаз, μ_1 – динамическая вязкость газа.

Система (1) с граничными условиями (2) описывает структуры нестационарных волн ФГГ. Здесь под волнами подразумевается профили температур (газа, пористой среды) и концентрации недостающего компонента, которые зависят от времени и координат и распространяются со скоростью, также зависящей от времени и координат. Отметим, что в теории горения для исследования структуры стационарных волн горения, обычно из подобной системы (1) посредством преобразования, переходят в подвижную систему координат. При этом полагают, что все входящие в систему неизвестные функции не зависят от времени, и, как следствие этого, производные по времени от этих функций равны нулю. Но, полученная система дифференциальных уравнений содержит дополнительную неизвестную константу U – скорость волны, что усложняет решение задачи. Несмотря на это, в настоящей работе, исследование проводится в подвижной системе координат ($x = \xi + U\tau,\ t = \tau$), и рассматривается околостационарный режим распространения волны горения. Этот режим предполагает, что распределения параметров (плотность, температура, концентрация) по существу не отличаются от

стационарных распределений, а волна движется со стационарной скоростью. Для дальнейшего исследования систему (1) перепишем в обезразмеренных переменнах и параметрах [1]

$$\gamma_1\frac{\partial\theta_1}{\partial\bar\tau}+\gamma_1(1-\frac{1}{u_0})\frac{\partial\theta_1}{\partial\bar\xi}=-\alpha'\gamma_1(\theta_1-\theta_2)+n\exp\left(\frac{E}{RT_e}\left(1-\frac{1}{T_0/T_e+\theta_1RT_e/E}\right)\right),$$

$$\gamma_2\frac{\partial\theta_2}{\partial\bar\tau}-\gamma_2\frac{1}{u_0}\frac{\partial\theta_2}{\partial\bar\xi}=\gamma_1\chi_2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\bar\xi^2}+\alpha'\gamma_1(\theta_1-\theta_2)-\alpha'_{0,e}\theta_2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial n}{\partial\bar\tau}+(1-\frac{1}{u_0})\frac{\partial n}{\partial\bar\xi}=-n\exp\left(\frac{E}{RT_e}\left(1-\frac{1}{T_0/T_e+\theta_1RT_e/E}\right)\right),\quad u_0=\frac{\upsilon_{10}}{U}.$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$T_1-T_0=\frac{RT_e^2}{E}\theta_1,\ T_2-T_0=\frac{RT_e^2}{E}\theta_2,\ \eta=\eta_0 n,\ \ \xi=L\bar\xi,\ \tau=\frac{\bar\tau\exp(E/RT_e)}{k_0},$$

$$\gamma_1=\frac{c_PRT_e^2}{Q\eta_0E},\quad \alpha'=\frac{\alpha_cS_c}{\rho_{10}c_pk_0\exp(-E/RT_e)},\quad \alpha'_{0,e}=\frac{RT_e^2\alpha_{0,e}}{E\rho_{10}Q\eta_0k_0\exp(-E/RT_e)}, \tag{4}$$

$$\gamma_2=\gamma_1\varphi,\quad L=\frac{\upsilon_{10}}{k_0\exp(-E/RT_e)},\quad \chi_2=\frac{\alpha_2\lambda_2}{\rho_{10}c_pk_0\exp(-E/RT_e)L^2},\quad \alpha_c=\frac{Nu\cdot\lambda_1}{d_{eff}},$$

$$T_e=T_0+\frac{Q\eta_0}{c_p(1+\varphi/(1-u_0))\sqrt{1+4\Delta/u^2}},\ u=1-\frac{u_0}{1+\varphi},\ \varphi=\frac{\rho_2c_2}{\rho_{10}c_p},\ \Delta=\frac{(\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2)\alpha_{0,e}}{(\rho_{10}c_p+\rho_2c_2)^2U^2}.$$

При этом начальные и граничные условия приобретает вид

$$\begin{gathered}\bar\tau=0:\quad \theta_1=\theta_{10}(\bar\xi),\qquad \theta_2=\theta_{20}(\bar\xi),\qquad n=n_0(\bar\xi),\\ \bar\xi=-\infty:\ \ \theta_1=0,\ \ \theta_2=0,\ \ n=1,\\ \bar\xi=+\infty:\ \ \frac{\partial\theta_1}{\partial\bar\xi}=0;\ \ \frac{\partial\theta_2}{\partial\bar\xi}=0;\quad n=0.\end{gathered} \tag{5}$$

В [1] в результате алгебраических преобразований над уравнениями системы (3) построена следующая эквивалентная математическая модель ФГГ при наличии теплопотерь

$$\begin{gathered}\frac{\partial(\gamma_1\theta_1+n)}{\partial\bar\tau}+(1-\frac{1}{u_0})\frac{\partial(\gamma_1\theta_1+n)}{\partial\bar\xi}=-\alpha'\gamma_1(\theta_1-\theta_2),\\ \gamma_2\frac{\partial\theta_2}{\partial\bar\tau}-\gamma_2\frac{1}{u_0}\frac{\partial\theta_2}{\partial\bar\xi}=\gamma_1\chi_2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\bar\xi^2}+\alpha'\gamma_1(\theta_1-\theta_2)-\alpha'_{0,e}\theta_2,\\ \frac{\partial(\gamma_1\theta_1+\gamma_2\theta_2+n)}{\partial\bar\tau}+\frac{\partial}{\partial\bar\xi}\left(\gamma_1(1-\frac{1}{u_0})\theta_1-\frac{\gamma_2}{u_0}\theta_2+(1-\frac{1}{u_0})n+f\theta_2\right)-f\frac{\partial\theta_2}{\partial\bar\xi}=\gamma_1\chi_2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\bar\xi^2}-\alpha'_{0,e}\theta_2.\end{gathered} \tag{6}$$

Как видим, в третье уравнение системы добавлен и вычтен член $f\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\bar{\xi}}$. Далее, в [1] разработана методика нахождения аналитического решения системы (6). При этом предполагается, что выражение под частным производным, второй член в третьем уравнении системы (6), не зависит от времени и координат, как аналог интеграла энергии системы при стационарном распространении волны

$$\gamma_1\left(1-\frac{1}{u_0}\right)\theta_1-\frac{\gamma_2}{u_0}\theta_2+\left(1-\frac{1}{u_0}\right)n+f\theta_2=const \tag{7}$$

Здесь f – неизвестный параметр. Условие (7) означает, что рассматривается околостационарный режим, то есть структура волны находятся на стадии перехода к структуре стационарной волны. Удовлетворяя левую граничную условию $(\theta_1=0,\ \theta_2=0,\ n=1)$, находим $const=1-1/u_0$. Далее, применяя к (7) граничное условие при $\bar{\xi}=0$ $(\theta_1=\theta_{1m},\ \theta_2=\theta_{2m},\ n=0)$ получим

$$\theta_{1m}=\frac{1}{\gamma_1}-\frac{f-\gamma_2/u_0}{\gamma_1(1-1/u_0)}\theta_{2m} \tag{8}$$

В результате, из (7) имеем

$$\gamma_1\theta_1+n=\gamma_1\theta_{1m}+\frac{f-\gamma_2/u_0}{1-1/u_0}(\theta_{2m}-\theta_2). \tag{9}$$

Подставляя (9) в третье уравнение системы (6) получим

$$\left(\gamma_2-\frac{f-\gamma_2/u_0}{1-1/u_0}\right)\frac{\partial\theta_2}{\partial\bar{\tau}}=\gamma_1\chi_2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\bar{\xi}^2}+f\frac{\partial\theta_2}{\partial\bar{\xi}}-\alpha'_{0,e}\theta_2 \tag{10}$$

Отметим, что уравнение (10) при $f=\gamma_2$ было исследовано в [1]. Как видим, уравнение (10) это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и поэтому решение ищется в виде $\theta_2=\theta_{2m}\exp(-a\bar{\tau}+p\bar{\xi})$. Подставляя это решение в уравнение (10) относительно p получим характеристическое уравнение

$$p^2+\frac{f}{\gamma_1\chi_2}p-\frac{1}{\gamma_1\chi_2}\left(\alpha'_{0,e}-\left(\gamma_2-\frac{f-\gamma_2/u_0}{1-1/u_0}\right)a\right)=0. \tag{11}$$

Решением которой являются

$$p_{1,2}=-\frac{f}{2\gamma_1\chi_2}\pm\sqrt{\left(-\frac{f}{2\gamma_1\chi_2}\right)^2+\frac{\alpha'_{0,e}-a\left(\gamma_2-(f-\gamma_2/u_0)/(1-1/u_0)\right)}{\gamma_1\chi_2}}. \tag{12}$$

Следовательно, решение дифференциального уравнения (10) можно представить в виде

$$\theta_2(\bar{\tau},\bar{\xi})=\begin{cases}\theta_{2m}exp(-a\bar{\tau}+p_2\bar{\xi}), & \bar{\xi}<0\\ \theta_{2m}exp(-a\bar{\tau}+p_1\bar{\xi}), & \bar{\xi}>0.\end{cases} \tag{13}$$

Далее, из второго уравнения системы (6) находим функцию $\theta_1(\bar{\tau},\bar{\xi})$

$$\theta_1(\bar{\tau},\bar{\xi})=\theta_2+\frac{1}{\gamma_1\alpha'}\left(\gamma_2\frac{\partial\theta_2}{\partial\bar{\tau}}-\frac{\gamma_2}{u_0}\frac{\partial\theta_2}{\partial\bar{\xi}}-\gamma_1\chi_2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\bar{\xi}^2}+\alpha'_{0,e}\theta_2\right)$$

и подставляя выражение $\theta_2(\bar{\tau},\bar{\xi})$ из (13) получим

$$\theta_1(\bar{\tau},\bar{\xi})=\begin{cases}\theta_{2m}\left[1-\frac{1}{\gamma_1\alpha'}\left(-a\gamma_2+\alpha'_{0,e}-\frac{\gamma_2}{u_0}p_2-\gamma_1\chi_2p_2^2\right)\right]exp(-a\bar{\tau}+p_2\bar{\xi}), & \bar{\xi}<0\\ \theta_{2m}\left[1-\frac{1}{\gamma_1\alpha'}\left(-a\gamma_2+\alpha'_{0,e}-\frac{\gamma_2}{u_0}p_1-\gamma_1\chi_2p_1^2\right)\right]exp(-a\bar{\tau}+p_1\bar{\xi}), & \bar{\xi}>0.\end{cases} \tag{14}$$

Используя (9), находим функцию относительной концентрации недостающего компонента в виде

$$n=\gamma_1(\theta_{1m}-\theta_1)+\frac{f-\gamma_2/u_0}{1-1/u_0}(\theta_{2m}-\theta_2). \tag{15}$$

Зависимость (15) означает, что относительная концентрация недостающего компонента будет полностью израсходована в момент, когда температура смеси газов и пористой среды достигнет максимального значения.

Теперь рассмотрим частные случаи:

1. Случай, когда один из корней характеристического уравнения равен нулю, а другой отрицателен.

Такое возможно при условиях $a=\alpha'_{0,e}/(\gamma_1+\gamma_2-1)$, $f=\gamma_2/u_0+(1-\gamma_1)(1-1/u_0)$ и из (12) имеем

$$p_1=-\frac{f}{\gamma_1\chi_2},\quad p_2=0.$$

Выражение для неизвестного параметра f получено из (8) при $\theta_{1m}=\theta_{2m}$.

Тогда решения (13) и (14) приобретают вид

$$\theta_2(\bar{\tau},\bar{\xi})=\begin{cases}\theta_{2m}exp(-a\bar{\tau}), & \bar{\xi}<0\\ \theta_{2m}exp(-a\bar{\tau}+p_1\bar{\xi}), & \bar{\xi}>0.\end{cases}$$

$$\theta_1(\bar{\tau},\bar{\xi})=\begin{cases}\theta_{2m}\left[1-\frac{1}{\gamma_1\alpha'}\left(-a\gamma_2+\alpha'_{0,e}\right)\right]exp(-a\bar{\tau}), & \bar{\xi}<0\\ \theta_{2m}\left[1-\frac{1}{\gamma_1\alpha'}\left(-a\gamma_2+\alpha'_{0,e}-\frac{\gamma_2}{u_0}p_1-\gamma_1\chi_2p_1^2\right)\right]exp(-a\bar{\tau}+p_1\bar{\xi}), & \bar{\xi}>0.\end{cases} \tag{16}$$

Скорость распространения волны определяется как решение уравнения

$$-a\gamma_2+\alpha'_{0,e}-\frac{\gamma_2}{u_0}p_1-\gamma_1\chi_2p_1^2=0. \tag{17}$$

Заметим, что при $\gamma_1=1,\ U=0\Rightarrow\ f=0,\ p_1=0,\ \theta_{2m}=1$ и $\theta_1(\bar\tau,\bar\xi)\equiv\theta_2(\bar\tau,\bar\xi)$. При этом из условия $\gamma_1=1$ получаем $T_e=\sqrt{\dfrac{Q\eta_0E}{c_pR}}$ и приравнивая его с формулой равновесной температуры (T_e) в (4) при $U=0$ имеем соотношение аналогичное в [22]

$$T_0=\sqrt{\frac{Q\eta_0E}{c_pR}}-\frac{Q\eta_0}{c_p}\ .$$

Как отмечено в [2] T_0 и T_e температуры слева и справа от зоны реакции соответственно.

2. Случай, когда корны характеристического уравнения кратны.

Это возможно при условиях $a=(\alpha'_{0,e}+(f^2/4\gamma_1\chi_2))/(\gamma_1+\gamma_2-1)$ и $f=\gamma_2/u_0$ из (12) имеем

$$\theta_2(\bar\tau,\bar\xi)=\begin{cases}0, & \bar\xi<0\\ \theta_{2m}exp(-a\bar\tau+p\bar\xi), & \bar\xi>0,\end{cases}\qquad p=-f/2\gamma_1\chi_2\ ,$$

$$\theta_1(\bar\tau,\bar\xi)=\begin{cases}0, & \bar\xi<0\\ \theta_{1m}\left[1-\dfrac{1}{\gamma_1\alpha'}\left(-a\gamma_2+\alpha'_{0,e}-\dfrac{\gamma_2}{u_0}p-\gamma_1\chi_2p^2\right)\right]exp(-a\bar\tau+p\bar\xi), & \bar\xi>0.\end{cases} \tag{18}$$

В этом случае для определения $\theta_{1m},\ \theta_{2m}$ имеем два соотношения, один из них соотношение под номером (8), другое получаем из (18)

$$\theta_{1m}\left[1-\frac{1}{\gamma_1\alpha'}\left(-a\gamma_2+\alpha'_{0,e}-\frac{\gamma_2}{u_0}p-\gamma_1\chi_2p^2\right)\right]=\theta_{2m}.$$

Разрешая их совместно, находим

$$\theta_{2m}=\frac{1-\dfrac{1}{\gamma_1\alpha'}\left(-a\gamma_2+\alpha'_{0,e}-\dfrac{\gamma_2}{u_0}p-\gamma_1\chi_2p^2\right)}{\gamma_1+\dfrac{f-\gamma_2}{1-1/u_0}\left[1-\dfrac{1}{\gamma_1\alpha'}\left(-a\gamma_2+\alpha'_{0,e}-\dfrac{\gamma_2}{u_0}p-\gamma_1\chi_2p^2\right)\right]} \tag{19}$$

Из условия

$$-a\gamma_2+\alpha'_{0,e}-\frac{\gamma_2}{u_0}p-\gamma_1\chi_2p^2=0$$

получим уравнение для определения параметра f

$$f^2-\frac{2\gamma_2(1-1/(\gamma_1+\gamma_2))}{u_0}f+\frac{4\chi_2(1-\gamma_1)}{1+\varphi}=0,$$

корни которого перепишем в виде

$$f_{1,2}=\frac{\gamma_2}{u_0}-\frac{\gamma_2}{u_0(\gamma_1+\gamma_2)}\pm\sqrt{\left(\frac{\gamma_2(\gamma_1+\gamma_2-1)}{u_0(\gamma_1+\gamma_2)}\right)^2-\frac{4\chi_2(1-\gamma_1)}{1+\varphi}}.$$

Из условия $f=\gamma_2/u_0$ получим соотношение для определения скорости распространения волны U

$$-\frac{\gamma_2}{u_0(\gamma_1+\gamma_2)}\pm\sqrt{\left(\frac{\gamma_2(\gamma_1+\gamma_2-1)}{u_0(\gamma_1+\gamma_2)}\right)^2-\frac{4\chi_2(1-\gamma_1)}{1+\varphi}}=0. \qquad (20)$$

При этом $\theta_{1m}=\theta_{2m}=1/\gamma_1$ $(T_{1m}=T_{2m}=T_0+Q\eta_0/c_p)$. Преобразуя соотношение (20), получим

$$u_0^2=\frac{\gamma_2^2(1+\varphi)(1-2/(\gamma_1+\gamma_2))}{4\chi_2(1-\gamma_1)}.$$

3. Случай, когда корни характеристического уравнения разные.

При $f=\gamma_2/u_0$ из (12) имеем

$$\theta_{1,2}(\bar{\tau},\bar{\xi})=\begin{cases}\theta_{2m}exp(-a\bar{\tau}+p_2\bar{\xi}), & \bar{\xi}<0\\ \theta_{2m}exp(-a\bar{\tau}+p_1\bar{\xi}), & \bar{\xi}>0.\end{cases} \qquad (21)$$

В этом случае $\theta_{2m}=1/\gamma_1$, стационарная скорость волны равна нулю $(U=0)$, следовательно $f=0$ и $p_{1,2}=\pm\sqrt{(\alpha'_{0,e}-a\gamma_2)/\gamma_1\chi_2}$. Такое решение (21) наблюдается при численном решении задачи структуры стационарной волны, в случае интенсивного межфазного теплообмена.

Поступило 29.01.2025 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кабилов М.М., Шерматова З.Б. Эквивалентная математическая модель фильтрационного горения газов при наличии теплопотерь. – ДАН РТ, 2023, т. 66, №3-4, с.187-195.
2. Потытняков С. И., Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. Влияние теплопотерь на распространение стационарных волн при фильтрационном горении газов. – Физика горения и взрыва, 1984, т.20, №1, с.19-26.
3. Лаевский Ю.М., Бабкин В.С., Дробышевич В.И., Потытняков С.И. К теории фильтрационного горения газов. – Физика горения и взрыва, 1984, т.20, №6, с. 3-13.
4. Потытняков С.И., Лаевский Ю.М., Бабкин В.С., Дробышевич В.И. Исследование тепловой структуры волны фильтрационного горения газов. – Физика горения и взрыва, 1985, т. 21, №2, с. 19-26.
5. Бабкин В.С., Лаевский Ю.М. Фильтрационное горение газов. – Физика горения и взрыв, 1987, т. 23, №5, с. 27-44.

6. Добрего К.В., Жданок С.А. Физика фильтрационного горения газов. – Минск: Институт тепло- и массообмена им.А.В.Лыкова НАНБ, 2002, 203 с.
7. Кабилов М.М. Влияние теплопотерь на устойчивость стационарных волн при фильтрационном горении газов. – ДАН РТ, 1994, т.37, № 3-4, с. 24-28.
8. Добрего К.В., Жданок С.А. Инженерный расчёт характеристик волны фильтрационного горения на основе двухтемпературной одномерной модели. – Инженерно-физический журнал, 1998, т.71, №3, с.424-432.
9. Какуткина Н.А., Коржавин А.А., Мбрава М. Особенности фильтрационного горения водородо-, пропано- и метановоздушных смесей в инертных пористых средах. – Физика горения и взрыва, 2006, т.42, №4, с.8-20.
10. Какуткина Н.А., Коржавин А.А., Намятов И.Г., Рычков А.Д. Закономерности распространения пламени через насадку коммуникационных огнепреградителей. – Физика горения и взрыва, 2007, т.43, №4, с.23-38.
11. Foutko S.I., Zhdanok S.A., Shabunya S.I. Superadiabatic combustion wave in a diluted methane air mixture under filtration in a packed bed. – 26thSymp. (Int.) on Combustion. Naply, Italy. The Combustion Institute, 1996, vol. 2, p.1556-1565.
12. Martynenko V.V., Shabunya S.I. Two-temperature model of filtrational combustion. 2D approach – 27th Symp. (Int.) on Combustion: Abst. Work-in-Progress Posters. Pittsburg, PA. The Combustion Institute, 1998, p.408.
13. Brenner G. Numerical and experimental investigation of matrix-stabilized metan/air combustion in porous inert media. – Combustion and Flame. 2000, v.123, Issue 1-2, pp.201-203.
14. Лаевский Ю.М., Яушева Л.В. Численное моделирование фильтрационного горения газа на основе двухуровневых полунеявных разностных схем. – Вычислительные технологии, 2007, т. 12, № 2, с. 90–103.
15. Какуткина Н.А., Рычков Д.А. Моделирование нестационарных процессов фильтрационного горения газа. – Физика горения и взрыва, 2010, т.46, №3, с.44-51.
16. Прокофьев В.Г., Кирдяшкин А.И., Саламатов В.Г., Смоляков В.К. Нестационарное горение газа в инертном пористом слое. – Физика горения и взрыва, 2010, т.46, №6, с.32-38.
17. Кабилов М.М., Халимов И.Х. Численное исследование стационарной структуры волны фильтрационного горения газов при наличии теплопотерь. – ДАН РТ, 2013, т. 56, №4, с.297-304.
18. Кандрюкова Т.А., Лаевский Ю.М. О численном моделировании фильтрационного горения газов на многоядерных вычислительных системах. – Сибирский журнал индустральной математики, 2014, т.17, № 1, с. 55–64.
19. Носова Т.А. Вычислительные модели фильтрационного горения газа в режиме низких скоростей: дис… канд. физико-матем. наук: 05.13.18. – Инс. выч. мат. и мат. геофизики СО РАН, Новосибирск, 2018, 102 с.
20. Kabilov M.M., Gulboev B.J. Similarity of temperature and concentration fields in filtration combustion of gases. – Journal of Applied Data Analysis and Modern Stochastic Modelling, 2024, vol. 1, №1, pp. 29-38.
21. Кабилов М.М., Халимов И.И., Шерматова З.Б. Влиянии толщины, теплопроводности пористого элемента, состава и скорости вдува смеси на пределы распространения волны фильтрационного горения метановоздушной смеси. – ДАН РТ, 2024, т.67, № 9-10, с. 462-470.

М.М.Қобилов[*,], З.Б.Шерматова[**], П.Б.Садриддинов[*,***], Б.Ҷ.Гулбоев[*,**]**

ДАР БОРАИ ҲАЛЛҲОИ ХУСУСИИ МОДЕЛИ МАТЕМАТИКИИ БАРОБАРҚУВВАИ СӮЗИШИ ФИЛТРОНАИ ГАЗҲО ҲАНГОМИ ТАЛАФОТИ ГАРМӢ

[*]Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,
Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраеви АМИ Тоҷикистон,
[**]Донишгоҳи (Славянии) Россияю Тоҷикистон,
[***]Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақолаи мазкур паҳншавии мавҷҳои сӯзиши газ дар муҳити ковоки инертӣ бо истифода аз модели математикии баробарқувваи сӯзиши филтронаи газ (СФГ), бо назардошти талафоти гармӣ аз соҳаи сӯзиш таҳлил карда шудааст. Ҳаллҳои хусусии ин модель дар намуди ҳосили зарби ду функсияи камшавандаи экспоненсиалии аз тағйирёбандаҳои мустақил иборат буда, ёфта шудааст. Ин ҳалҳо функсияҳои ҳарорати муҳити ковок, омехтаи газҳо ва консентратсияи нисбии компоненти камтарини омехта мебошанд, ки аз координата ва вақт вобастаанд. Ҳолатҳое баррасӣ карда мешаванд, ки ҳарорати муҳити ковок ва омехтаи газҳо якхела мебошанд, ки ҳангоми ҳалли ададии масъалаи сохтори мавҷи статсионарии СФГ мушоҳида мешавад. Барои ҳар як ҳалли хусусӣ ҳарорати максималӣ, суръати мавҷ, инчунин формулаҳо барои ҳисоб кардани параметри номаълум ва афзоиши хомӯшшавӣ муайян карда мешаванд.

Калимаҳои калидӣ: *модели математикӣ, сӯзиши газҳо, муҳити ковок, омехтаи газҳо, талафоти гармӣ, ҳарорат, консентратсия, суръати мавҷ, режим.*

M.M.Kabilov[*,], Z.B.Shermatova[**], P.B.Sadriddinov[*,***], B.J.Gulboev[*,**]**

ON PARTIAL SOLUTIONS OF THE EQUIVALENT MATHEMATICAL MODEL OF FILTRATION COMBUSTION OF GASES IN THE PRESENCE OF HEAT LOSSES

[*]National Academy of Siences of Tajikistan,
A.Juraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan,
[**]Russian-Tajik (Slavic) University,
[***]Tajik National University

The paper studies the propagation of a gas combustion wave in an inert porous medium using an equivalent mathematical model of filtration gas combustion (FGC) that takes into account heat losses in the combustion zone. The partial solutions of the model are obtained as the product of two damped exponential functions from independent variables. These solutions are functions of porous medium temperature, gas mixture and relative concentration of the missing component, depending on coordinate and time. The cases when the temperatures of the porous medium and the gas mixture are identically equal are considered, which is observed in the numerical solution of the steady-state FGC wave structure problem. The maximum

temperature, wave velocity, and formulas for calculating the unknown parameter and the damping increment are determined for each particular solution.

Key words: *mathematical model, combustion gases, porous medium, gas mixtures, heat loss, temperature, concentration, wave speed, regime.*

Сведения об авторах:

1. **Кабилов Маруф Махмудович** – доктор физ.-мат. наук, Российско-Таджикский (Славянский) университет, доцент кафедры информатики и информационных технологий. E-mail: maruf1960@mail.ru;
2. **Шерматова Зайнаб Бахромовна** – Российско-Таджикский (Славянский) университет, преподаватель кафедры информатики и информационных технологий;
3. **Садриддинов Парвиз Бахриддинович** – кандидат физико-математических наук, Таджикский национальный университет, доцент кафедры вычислительной математики и механики;
4. **Гулбоев Бахтиёр Джуракулович** – кандидат физико-математических наук, доцент, Российско-Таджикский (Славянский) университет, заведующий кафедрой математики и физики.

ФИЗИКА

УДК 530.314
Специальность: 1.3.8. Физика конденсированного состояния.

Х.Хабибуллоев

ИССЛЕДОВАНИЕ РОЛИ РАСПАДА ХИМИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ ЭЛАСТОМЕРОВ В МЕХАНИЧЕСКИ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Национальная академия наук Таджикистана,
Ходжентский научный центр НАН Таджикистана

(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана И.Ш.Нормановым 19.02.2025 г.)

В данной работе экспериментально изучена временная и температурная зависимость прочности предварительно растянутых эластомеров марок СКИ-3, НК и СКД в области температур высокоэластичности. Обнаружено, что она для исследованных эластомеров описывается уравнением С.Н. Журкова. Определены значения параметров уравнения Журкова (U_o, γ, τ_o) для СКИ-3, СКД и НК. На основании близости значения U_o со значением U_o для полимеров алифатического ряда предположено, что в процессе разрушения предварительно растянутых эластомеров в области температур высокоэластичности распад химических связей может играть превалирующую роль.

Ключевые слова: *эластомер, высокоэластичность, температура, прочность.*

Систематические исследование зависимости механической прочности различных материалов от времени нахождения под нагрузкой позволили С.Н.Журкову выдвинуть кинетическую концепцию прочности твердых тел и термофлуктационный механизм разрушения [1], основанный на кинетической теории С.Я.Френкеля [2]. Д.Саидовым показано [3], что разрушение эластомеров в области ниже температуры стеклования также описывается соотношением С.Н.Журкова [1]. Анализ работ до 2024 г. [4,5] показал, что кинетика разрушения эластомеров в области температур выше T_c не исследована.

Целью настоящей работы явилось исследование временной зависимости прочности эластомеров в области температур высокоэластичности, то есть выше температуры стеклования. Объектами исследования являлись: серные вулканизаты натурального каучука (НК), синтетических каучуков марок (СКИ-3) и (СКД).

Задача исключения влияния актов перегруппировки участков макромолекулы на процесс разрушения решалась способом предварительного растягивания образца вулканизата до некоторой степени удлинения.

1. Временная зависимость прочности предварительно ориентированных эластомеров при постоянной температуре

На рис. 1 приведены графики логарифмической зависимости времени до разрушения ($lg\ \tau$) от величины внешной нагрузки (σ) для образцов из СКИ-3, СКД и НК при постоянной температуре.

Адрес для корреспонденции: *Хабибуллоев Хамидулло. Республика Таджикистан, г. Ходжент, Северо-западная промзона. Ходжентский научный центр НАН Таджикистана. E-mail: progress370035@yandex.ru.*

Как видно из рис. 1, рассматриваемая зависимость $lg\,\tau = f(\sigma)$ для всех трех эластомеров в интервале времени долговечности $0 \leq \tau \leq 5 \cdot 10^4$ с имеет прямолинейный вид, и ее можно аппроксимировать уравнением Журкова [6]

$$\tau = A * e^{-\alpha\sigma} \tag{1.1}$$

Как известно, такая зависимость характерна для полимеров [6,7] и для эластомеров ниже температура стеклования [3]. В то же время для низкомодульных эластомеров (к классу которых можно отнести и использованные нами объекты) в области температур 293÷313 К зависимость $lg\,\tau = f(\sigma)$ нелинейна [8] и описывается уравнением Бартенева.

$$\tau = B * \sigma^{-n} \tag{1.2}$$

Учитывая эти данные, можно сделать заключение, что, предварительно растягивая эластомер и в области выше Тс, можно наблюдать явление перехода вида зависимости $\tau = f(\sigma)$ от уравнения Бартенева (1.2) к уравнению Журкова (1.1).

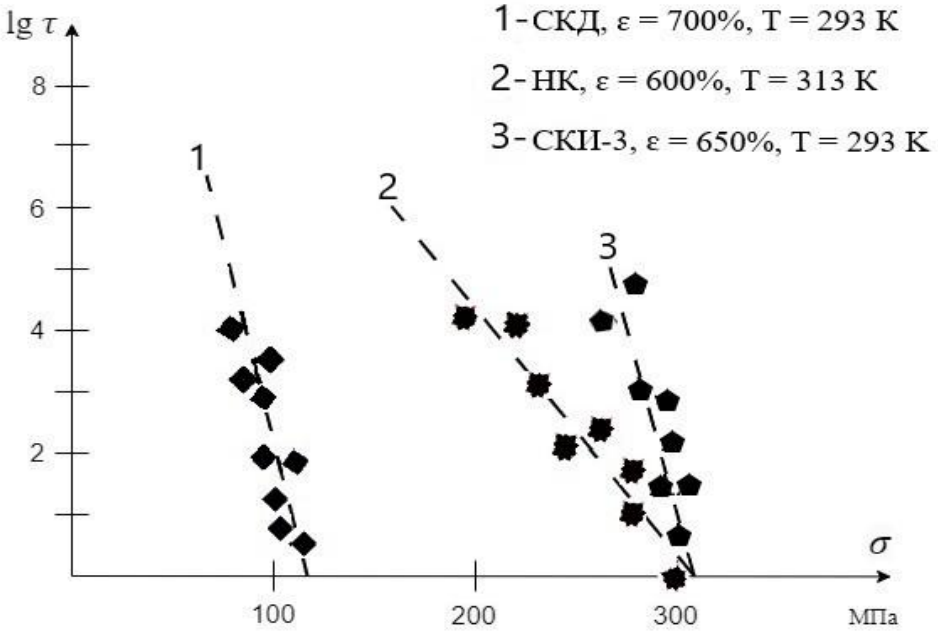

Рис. 1. Графики зависимости $lg\,\tau$ от величины σ

Таким образом можно предположить, что предварительное растяжение образца эластомера, в области температур высокоэластичности, также способствует стабилизации его структуры в процессе разрушения.

Далее по методике изложенной в [7] используя графики на рисунке 1 были определены значения начальной энергии активации процесса разрушения (U_0) для исследованных нами эластомеров. Они оказались равными $215 \pm 12 \frac{кДж}{моль}$, $137 \pm 12 \frac{кДж}{моль}$, $143 \pm 12 \frac{кДж}{моль}$ для СКИ-3,СКД и НК соответственно. (U_0) для СКД и НК по своему значению близки к значению (U_0) для ПП и ПЭ [7]. Согласно [9] (U_0) для ПП и ПЭ близка к значению энергии активации терморазложения «слабых» С-С связей главной цепочки макромолекул этих полимеров. Поэтому, исходя из близости значения (U_0) для

эластомеров СКД и НК со значением (U_0) для ПП и ПЭ, а также преимущественного выхода мономеров СКИ-3 при механо- и терморазложении [11], можно предположить, что в наших условиях эксперимента при разрушении СКД и НК распад химических связей играет доминирующую роль. Значение (U_0) для СКИ-3 оказалось заметно высоким, несмотря на идентичность состава НК и СКИ-3. Выяснение причины этой разницы имеет принципиальное значение, поэтому требуется тщательная проверка надежности определения (U_0) и правильности предположения $\tau_o = 10^{-13}c$.

2. Разрушения предварительно ориентированного СКИ-3 при различных температурах испытания

На рис. 2 приведены графики зависимости логарифма долговечности ($lg\ \tau$) от величины растягивающей нагрузки (σ) образцов из СКИ-3 при различных температурах. Как видно из рис. 2, изучаемая зависимость линейна в выбранном интервале температур. Изменение температуры, сохраняя прямолинейность зависимости $lg\ \tau$ от σ, сказывается только на ее наклоне. Чем ниже температура, тем круче наклон. Также видно, что экстраполяционные линии для трех температур пересекаются в одной точке, имеющей по оси ординат значение 10^{-13}с, то есть температурно-временная зависимость прочности предварительно растянутого СКИ-3 аналогична такой зависимости для других полимеров [7] и для эластомеров при $T < T_c$ [3].

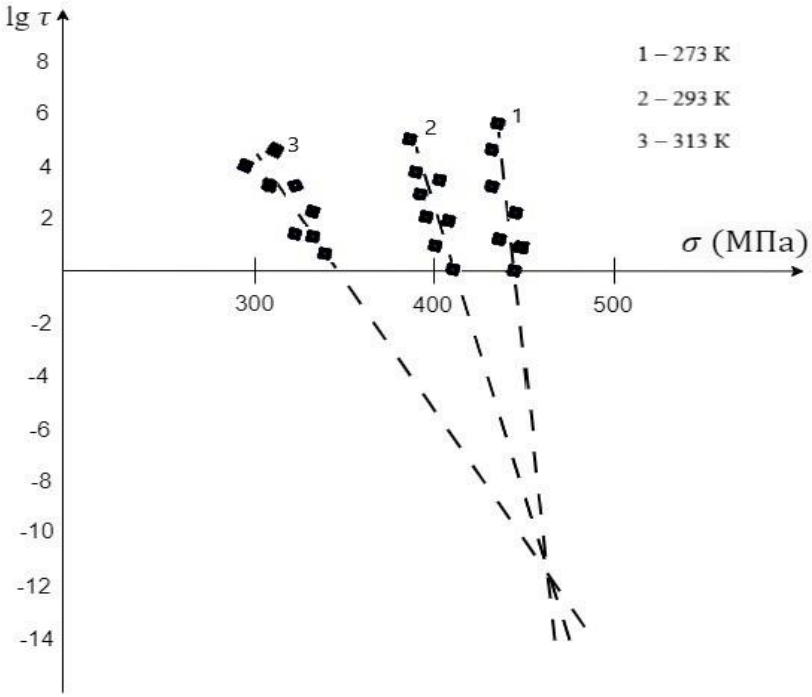

Рис. 2. Логарифмическая зависимость долговечности при разных температурах для предварительно ориентированного СКИ-3 (ε =700%) (цифры у прямых означают значение температуры в К).

Перестройка зависимости ($lg\ \tau$) от (σ) в зависимость ($lg\ \tau$) от ($\frac{1}{T}10^{-3}$) по методике [5] показал, что в температурно-временной зависимости прочности предварительно ориентированного СКИ-3 в выбранном интервале σ и T наблюдается эффект "смещения" полюса, который ранее обнаружен и для других полимеров [7]. Поэтому температурно-временную зависимость прочности предварительно ориентированного СКИ-3 при $T > T_c$ можно описать уравнением [7]

$$\tau = \tau_0 * exp\left[\frac{U_0 - \gamma(\sigma,T)\sigma}{RT}\right] \quad (2.1)$$

где $\gamma(\sigma,T)$ – усредненное значение коэффициента γ в данном интервале σ и Т. Значение (U_0), определенное из данных на рис. 2, оказалось равным 123 ± 20 $\frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$. Сравнивая последнее со значением(U_0) для СКД и НК, можно заметить их близость. Для исключения влияния эффекта смещения полюса на корректность значения U_0 были проведены дополнительные опыты по методике изучения зависимости разрывной прочности от температуры [10].

3. Температурная зависимость разрывной прочности предварительно ориентированных эластомеров СКИ-3 и НК

Зависимость разрывной прочности (σ_p) от температуры определяли для СКИ-3 и НК предварительно растянутых на 750% и 650% соответственно. Разрывную прочность определяли с постоянной скоростью нагружения $V_н = 5$ МПа/сек.

На рис. 3 приведены зависимости (σ_p) от температуры для исследованных объектов.

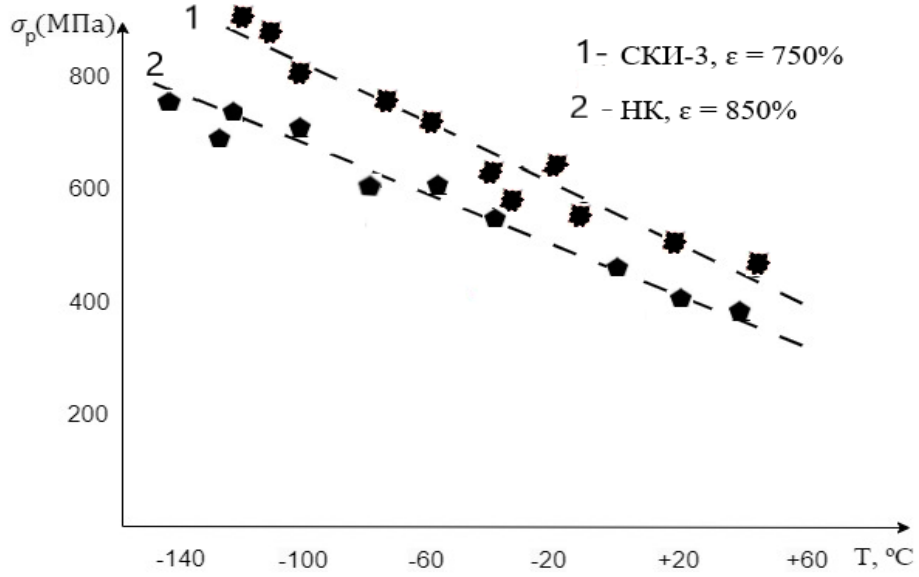

Рис. 3. Зависимость разрывной прочности предварительно растянутых эластомеров от температуры.

Видно, что они линейны для обоих эластомеров в выбранном интервале температур. Полученную зависимость прочности σ_p от температуры можно хорошо аппроксимировать уравнением [10]:

$$\sigma_p = \frac{U_0}{\gamma} - \frac{RT}{\gamma} ln \frac{\tau}{\tau_0}. \quad (3.1)$$

Используя это соотношение, можно определить значение энергии активации (U_0) по методике, разработанной в [8].

Вычисленное значение U_0 по методике [8] с использованием данных из графика на рис. 3 оказалось равным 117 ± 16 $\frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$ и $119 \pm 16 \frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$ для СКИ-3 и НК соответственно.

Сравнение этих значений со значениями U_0, изложенными выше, показывает их близость. Таким образом, можно считать, что приведенные нами значения U_0 достаточно корректны и на их основе

можно делать определенные заключения. Итоги проведенных в настоящей работе исследований состоят в следующем.

Решена задача сведения к минимуму влияния актов молекулярных перегруппировок на кинетику процесса разрушения эластомеров СКИ-3, СВД и НК в области температур высокоэластичности при неизменности состава эластомера.

Изучена временная зависимость прочности предварительно растянутых эластомеров (СКИ-3, СВД, НК) при постоянной температуре в области температур высокоэластичности; показано, что для предварительно растянутых эластомеров (СКИ-3,СВД и НК) зависимость логарифма долговечности от величины внешней нагрузки при постоянной температуре имеет линейный вид.

Изучена температурно-временная зависимость прочности предварительно растянутого СКИ-3; обнаружено явление "смещения" полюса.

Изучена температурная зависимость разрывной прочности предварительно растянутых образцов из СКИ-3 и НК; показано, что она линейна.

Определены значения параметров уравнения Журкова $((U_0)\,,\gamma,\tau_0)$ для СКИ-3 и (U_0) СКД и НК. Сравнивая значения (U_0), из различных независимых опытов, показана их корректность.

На основании близости значения (U_0) со значением (U_0) для полимеров алифатического ряда и идентичности [11] состава продуктов механо- и термодеструкции предположено, что в процессе разрушения предварительно растянутых эластомеров в области температур высокоэластичности распад химических связей может играть превалирующую роль.

Поступило 19.02.2025 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Журков С.Н. Кинетическая концепция прочности твердых тел (термофлуктуационный механизм разрушения). – Изв. АН СССР, неорганич. материалы, 1967, т.3, вып.10, с.1767-1776.
2. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. – Л.: Наука, 1975. – 592с.
3. Саидов Д. Изучение кинетики разрушения некоторых полимеров. – Автореф. дисс. .... канд.физ-мат. наук. – Душанбе, 1972.
4. Туйчиев Ш., Хусейнов О., Гинзбург Б.М., Туйчиев Л., Акназарова Ш., Рашидов Д., Табаров С.Х., Махмудов И. Влияние фуллерена С60 на деформацинные и термические поведение элементов структуры эластомера СКИ-3. – Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2015, т. 14, №168, с.63-68.
5. Youwei M., Chunmiao X., Yu R., Jiangang G., Yixin X., Shengyu Sh. Sustainable, recyclable and biodegradable castor oil-derived elastomers enabled by dynamic acetoacetyl formed amides. – Chemical Engineering Journal, 2024, v. 491.
6. Журков С.Н., Нарзуллаев Б.Н. Временная зависимость прочности твердых тел. – Журн. техн. физ., 1953, т.23, №10, с. 1677-1689.
7. Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа просности твердых тел. – М.: Наука, 1974, 560 с.
8. Бартенев Г.М., Зуев Ю.С. Прочность и разрушение высокоэластичных материалов. – М.-Л.: Химия, 1964, 387с.

9. Амелин А.В., Поздняков О.Ф., Регель В.Р., Санфирова Т.П. Сопоставление энергии активации процессов термодеструкции и механического разрушения полимеров. – Физ. тв. тела, т.12, №9, с. 2528-2534.
10. Савицкий А.В., Мальчевский В.А., Санфирова Т.П., Зосин А.П. Температурная зависимость прочности полимеров. – Высокомол. соед., 1974, т.16, А, №9, с.2130-2136.
11. Хабибуллоев Х., Саидов Д. Масс-спектрометрический анализ продуктов механо- и термодеструкции стереорегулярных эластомеров. – Каучук и резина, 1982, вып, с. 41-43.

Х.Хабибуллоев

ТАДҚИҚИ САҲМИ КАНДАШАВИИ АЛОҚАҲОИ КИМИЁВИИ ЭЛАСТОМЕРҲО ДАР ҲОЛАТИ ШИДДАТНОКИИ МЕХАНИКӢ

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

Маркази илмии Хуҷандии АМИ Тоҷикистон

Дар кори мазкур бо усули таҷрибавӣ вобастагии мустаҳкамии эластомерҳои пешакӣ ёз дода шуда аз вақт ва дараҷаи ҳарорат, дар ҳудуди дараҷаи ҳароратҳои зиёдэластикӣ омӯхта шудааст. Муайян шудааст, ки он барои эластомерҳои тадқиқшуда бо муодилаи С.Н.Журков тавсиф мешавад. Қиматҳои параметрҳои муодилаи Журков (U_0, γ, τ_0) барои СКИ-3 ва U_0 барои КТ ва СКД ёфта шудаанд. Дар асоси наздикии қимати (U_0) бо қимати U_0 барои полимерҳои гурӯҳи алифатӣ фарзия пешниҳод шудааст, ки дар раванди вайроншавии эластомерҳои пешакӣ ёз дода шуда, дар ҳудуди дараҷаи ҳарорати зиёдэластикӣ, кандашавии алоқаҳои кимёвӣ саҳми бартар доранд.

Калимаҳои калидӣ: *эластомер, зиёдэластикӣ, дараҷаи ҳарорат, мустаҳкамӣ.*

Kh.Khabibulloev

INVESTIGATION OF THE ROLE OF CHEMICAL BOND DECOMPOSITION OF ELASTOMER IN MECHANICALLY STRESSED CONDITION

National Academy of Sciences of Tajikistan,

Khujand scientific centre, NAS of Tajikistan

In this study, the time and temperature dependence of the strength of pre-stretched elastomers of SKI-3, NK, and SKD grades in the high-elasticity temperature range was experimentally investigated. It was found that for the studied elastomers, this dependence can be described by S.N. Zhurkov's equation. The parameters of Zhurkov's equation (U_o, γ, τ_o) were determined for SKI-3, SKD, and NK. Based on the close correspondence of U_o values with those of aliphatic polymers, it is hypothesized that, in the failure process of press stretched elastomers in the high-elasticity temperature region, the rupture of chemical bonds may play a dominant role.

Key words: *elastomer, high elasticity, temperature, strength.*

Сведения об авторе:

1. **Хабибуллоев Хамидулло** – кандидат физико-математических наук, Ходжентский научный центр Национальной академии наук Таджикистана, старший научный сотрудник. E-mail: progress370035@yandex.ru.

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК ТАДЖИКИСТАНА
2025, том 68, №4

ФИЗИКА

УДК 532.7+532.133
Специальность: 1.3.8. Физика конденсированных сред
1.3.3. Теоретическая физика

Д.М.Акдодов, С.Д.Баладжонзода

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ ПОЛЯРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ

Таджикский национальный университет

(Представлено членом-корреспондентом НАН Таджикистана Т.Х.Салиховым 17.02.2025 г.)

Исследованы зависимости коэффициентов сдвиговой $\eta_s(\omega)$ и объемной $\eta_V(\omega)$ вязкостей, а также модулей сдвиговой μ(ω) и объемной K(ω) упругости полярных жидкостей от термодинамических параметров состояния и угловой ориентации молекул. Для этого использованы полученные ранее аналитические выражения для $\eta_s(\omega)$, $\eta_V(\omega), \mu(\omega)$ и K(ω), когда потоки затухают по степенному и экспоненциальному законам. Аналитические выражения для $\eta_s(\omega)$, $\eta_V(\omega), \mu(\omega)$ и K(ω), в подынтегральных выражениях содержат потенциальную энергию взаимодействия $\Phi_{ab}(|\vec{r}|)$ и радиальную функцию распределения $g_{ab}(|\vec{r}|)$. Проведены численные расчеты для метилового спирта и воды в широком интервале температур и плотностей. Полученные результаты сравнены с экспериментальными данными и находятся в удовлетворительном согласии.

Ключевые слова: *трансляционная и структурная релаксация, коэффициенты сдвиговой и объемной вязкостей, модули объёмной и сдвиговой упругостей, потенциал межмолекулярного взаимодействия, радиальная функция распределения.*

Полярные жидкости широко применяются в различных областях техники и технологии, медицине, промышленности и др. В связи с этим знание их вязкостных, теплопроводящих, электропроводящих и акустических свойств играет принципиальную роль.

Теоретическому и экспериментальному исследованию вязкоупругих свойств жидкостей посвящено большое количество работ. Например, работа [1] посвящена сдвиговым и объемным модулям упругости простых жидкостей, рассматриваемым как реальные части комплексного обобщенного модуля упругости, который устанавливает связь между тензором напряжения и градиентом скорости. В работе [2] с помощью метода коррелятивных функций распределения исследуются упругие свойства жидкостей. Другим широко применяемым подходом для изучения явлений переноса и упругих свойств жидкостей является метод временных корреляционных функций. Как отмечено Р. Кубо в работах [3,4], этот метод обладает строгим теоретическим обоснованием и применим к неравновесным процессам. В рамках метода были получены выражения для коэффициентов переноса через интегралы по времени от временных корреляционных функций соответствующих потоков. Эффективность применения метода во многом определяется адекватным выбором динамических величин, установлением

Адрес для корреспонденции: *Акдодов Донаёр Мавлобахшович. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: donaer.a@mail.ru*

взаимосвязей между ними и способом описания их временной эволюции. Для этих целей в [5-7] разработаны дополнительные инструменты, включая методы проекционных операторов и неравновесного статистического оператора. На их основе были проведены детальные исследования явлений переноса и упругих свойств жидкостей [8-11]. В исследовании [12] рассматривается учет потенциальных функций взаимодействия между частицами (молекулами, атомами) в любых фазах. В [13] всесторонне анализируется применение методов Монте-Карло, молекулярной динамики, интегрального уравнения для изучения свойств и структуры воды. В работах [14-16] на основе молекулярно-кинетической теории с учетом природы затухания потока импульса в импульсно-конфигурационном пространстве детально исследована область частотной дисперсии вязкостных и упругих свойств жидкостей.

Перечисленные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что динамические вязкоупругие свойства жидкостей можно адекватно описать, в первую очередь, с учетом молекулярной структуры, а во вторую очередь – с учетом механизмов происходящих в них внутренних релаксационных процессов. Строгие статистические теории жидкостей позволяют учитывать сложное взаимодействие между молекулами, а также влияние таких факторов, как размерные эффекты, ориентация молекул и наличие дисперсных фаз. Такой подход в том числе относится к полярным жидкостям с учетом, как молекулярной структуры, так и внутренних релаксационных процессов. Поэтому целью настоящей работы является исследование коэффициентов сдвиговой $\eta_s(\omega)$ и объемной $\eta_V(\omega)$ вязкостей, а также соответствующих им модулей сдвиговой $\mu(\omega)$ и объёмной $K(\omega)$ упругостей полярных жидкостей от термодинамических параметров состояния. Аналитические выражениях для $\eta_s(\omega)$, $\eta_V(\omega)$, $\mu(\omega)$ и $K(\omega)$ были получены на основе кинетических уравнений для одночастичной $f_a(\overrightarrow{x_a},t)$ и двухчастичной $f_a(\overrightarrow{x_a},\overrightarrow{x_a},t)$ функций распределения в случае затухания релаксирующих потоков по степенному и экспоненциальному законам. Получение коэффициентов $\eta_s(\omega)$, $\eta_V(\omega)$, $\mu(\omega)$ и $K(\omega)$ подробно метод рассмотрен в работах [14-16]. Согласно им эти коэффициенты имеют вид:

а) в случае диффузионного закона затухания тензора напряжения:

$$\eta_s(\omega)=\frac{nkT\tau}{1+(\omega\tau)^2}+\frac{2\pi n^2\sigma^3}{15}\int_0^{\infty}drr^3\frac{\partial\Phi(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r}\int_{-\infty}^{+\infty}G_1(r,r_1,\omega)\frac{\partial g(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r_1}r_1\partial\overrightarrow{r_1}, \quad (1)$$

$$\eta_V(\omega)=\frac{2\pi n^2\sigma^3}{3}\int_0^{\infty}dr\,r^3\frac{\partial\Phi(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r}\int_{-\infty}^{+\infty}G_1(r,r_1,\omega)\,\varphi_0(|\overrightarrow{r_1}|)\partial\overrightarrow{r_1}, \quad (2)$$

$$\mu(\omega)=\frac{nkT(\omega\tau)^2}{1+(\omega\tau)^2}+\frac{2\pi n^2\sigma^3\omega}{15}\int_0^{\infty}dr\,r^3\,\frac{\partial\Phi(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r}\int_0^{\infty}G_2(r\,,r_1,\omega)\frac{\partial g(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r_1}r_1\partial\overrightarrow{r_1}, \quad (3)$$

$$K(\omega)=K_s+\frac{2\pi n^2\sigma^3\omega}{3}\int_0^{\infty}dr\,r^3\frac{\partial\Phi(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r}\int_{-\infty}^{+\infty}G_2(r,r_1,\omega)\,\varphi_0(|\overrightarrow{r_1}|)\partial\overrightarrow{r_1}, \quad (4)$$

где

$$K_r(\omega)=\frac{2\pi n^2\sigma^3\omega}{3}\int_0^{\infty}dr\,r^3\frac{\partial\Phi(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r}\int_{-\infty}^{+\infty}G_2(r,r_1,\omega)\,\varphi_0(|\overrightarrow{r_1}|)\partial\overrightarrow{r_1} \quad (5)$$

– релаксационный модуль упругости.

б) в случае экспоненциального закона затухания тензора напряжения:

$$\eta_s(\omega)=\frac{nkT\tau}{1+(\omega\tau)^2}+\frac{2\pi}{15}\frac{n^2kT\sigma^3\tau_0}{1+(\omega\tau_0)^2}\int_0^{\infty}\frac{\partial\Phi^*(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r}\frac{\partial g_0(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r}r^4\partial r \quad (6)$$

$$\eta_V(\omega) = \frac{2\pi}{3}\frac{n^2kT\sigma^3\tau_0}{1+(\omega\tau_0)^2}\int_0^\infty \frac{\partial\Phi^*(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r}\ \varphi_0(r)r^3\partial r \tag{7}$$

$$\mu(\omega) = \frac{nkT\omega^2}{1+\omega^2} - \frac{\omega^2(\frac{\tau_0}{\tau})^2}{1+\omega^2(\frac{\tau_0}{\tau})^2}\frac{2\pi}{15}n^2kT\sigma^3\int_0^\infty \frac{\partial\Phi^*(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r}\frac{\partial g(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r}r^4\partial r \tag{8}$$

$$K(\omega) = K_s - \frac{\omega^2\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2}{1+\omega^2\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2}\frac{2\pi}{3}n^2kT\sigma^3\int_0^\infty \frac{\partial\Phi^*(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r}\ \varphi_0(|\overrightarrow{r_1}|)r^3\partial r \tag{9}$$

где

$$K_r(\omega) = \frac{\omega^2(\frac{\tau_0}{\tau})^2}{1+\omega^2(\frac{\tau_0}{\tau})^2}\frac{2\pi}{3}n^2kT\sigma^3\int_0^\infty \frac{\partial\Phi^*(|\overrightarrow{r_1}|)}{\partial r}\ \varphi_0(r)r^3\partial r, \tag{10}$$

$K_s = n\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T + \frac{T}{nC_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_n^2$ – адиабатический объёмный модуль упругости жидкости,

$$G_1(r,r_1,\omega) = \frac{\tau_0(2\pi\tau_0)^{-\frac{1}{2}}}{4\pi r r_1}\left(e^{-\varphi_1}(sin\varphi_1 - cos\varphi_1) - e^{-\varphi_2}(sin\varphi_2 - cos\varphi_2)\right),$$

$$G_2(r,r_1,\omega) = -\frac{\tau_0(2\pi\tau_0)^{-\frac{1}{2}}}{4\pi r r_1}\left(e^{-\varphi_1}(sin\varphi_1 + cos\varphi_1) - e^{-\varphi_2}(sin\varphi_2 + cos\varphi_2)\right),$$

$$\varphi_0(|\overrightarrow{r_1}|) = \frac{r_1}{3}\frac{\partial g(r_1)}{\partial r_1} - \left[n\left(\frac{\partial g(r_1)}{\partial n}\right)_T + \gamma T\left(\frac{\partial g(r_1)}{\partial T}\right)_n\right],\ \varphi_1 = \frac{\alpha}{2}(r-r_1), \varphi_2 = \frac{\alpha}{2}(r+r_1),$$

$\alpha = (2\omega\tau_0)^{\frac{1}{2}}, \tau = \frac{m}{2\beta}$, $\tau_0 = \frac{\beta\sigma^2}{2kT}$, $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота, $\omega^* = \omega\tau$ – приведенная частота, $\Phi^*(r) = \frac{\Phi(r)}{kT}$ – приведенный потенциал межмолекулярного взаимодействия.

Для проведения численных расчетов $\eta_s(\omega)$, $\eta_V(\omega)$, $\mu(\omega)$ и $K(\omega)$, согласно выражению (1)-(10) необходим выбор потенциала межмолекулярного взаимодействия $\Phi(r)$ и радиальной функции распределения g(r).

В качестве потенциала межмолекулярного взаимодействия $\Phi_{ab}(r,\theta_a,\theta_b,\xi_a-\xi_b)$ для полярных жидкостей принимаем потенциал Штокмайера [17], имеющий вид

$$\Phi_{ab}(r,\theta_a,\theta_b,\xi_a-\xi_b) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6\right] - \frac{d_a d_b}{r^3}V(\theta_a,\theta_b,\xi_a-\xi_b \tag{11}$$

где

$$V(\theta_a,\theta_b,\xi_a-\xi_b) = 2cos\theta_a cos\theta_b - sin\theta_a sin\theta_b \cos(\xi_a-\xi_b),$$

а радиальная функция распределения $g(|\overrightarrow{r_1}|)$ согласно [18] принимает вид

$$g(|\overrightarrow{r_1}|) = y(\rho^*)exp(-\frac{\Phi(|\overrightarrow{r_1}|)}{kT}), \tag{12}$$

где $y(\rho^*)$ – бинарная функция распределения двух полостей, $r=r_{12}/\sigma$ – безразмерное взаимное расстояние молекул, σ – диаметр молекул. В первом приближении угловую зависимость функции $V(\theta_a,\theta_b,\xi_a-\xi_b)$ выбираем при определённых углах.

В качестве контактного значения $y(\rho^*)$ на расстоянии $0<r<\sigma$ ($r\approx1$) примем выражение, полученное Карнаханом и Старлингом [14]:

$$y(\rho^*) = \frac{(2-\rho*)}{2(1-\rho*)^3}, \quad (13)$$

где $\rho^* = \frac{\pi}{6} N_0 \sigma^3 \frac{\rho}{M}$ – приведенная плотность жидкости.

На расстоянии $1<r<2$ (то есть $\sigma<r_{12}<2\sigma$) для $y(r)$ берем аналитическое выражение, полученное Вертхеймом [19] как решение уравнения Перкуса-Йевика для твердых сфер

$$y(r) = \frac{C_0 e^{t_0(r-1)} + \frac{2}{3} C_1 e^{\gamma(1+\alpha_1)(r-1)}}{r(1-\rho^*)^2}, \quad (14)$$

где

$$C_0 = \frac{1}{3}(H_0 + H_1 + H_2)\,,\; t_0 = \gamma(1 - 2\alpha_1)\,,$$

$$C_1 = N_0 cos[\gamma\beta(r-1)] + N_1 sin[\gamma\beta(r-1)]\,,\; \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 + x_2)\,,$$

$$H_0 = 1 + \frac{1}{2}\rho^*,$$

$$H_1 = \frac{\sqrt{f^2 + \frac{1}{8}}}{4\rho^*}\left[x_2^2\left(1 - 3\rho^* - 4\rho^{*^2}\right) + x_1^2\left(1 - \left(\frac{5}{2}\right)\rho^{*^2}\right)\right],$$

$$H_2 = \frac{\sqrt{f^2 + \frac{1}{8}}}{4\rho^*}\left[x_1^2\left(1 - 3\rho^* - 4\rho^{*^2}\right) + x_2^2\left(1 - \left(\frac{5}{2}\right)\rho^{*^2}\right)\right],$$

$$x_{1,2} = \sqrt[3]{f \pm \sqrt{f^2 + \frac{1}{8}}}\,,\; f = \frac{(3 + 3\rho^* - \rho^{*^2})}{4\rho^*},$$

$$\gamma = 2\rho^*(1-\rho^*)\,,\; \alpha_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\; N_0 = H_0 - \frac{H_1 + H_2}{2},\; N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(H_1 - H_2)\,.$$

Имеется аналитическое выражение для решения уравнения Перкуса-Йевика в области $1<r<5$ (т.е. $\sigma<r_{12}<5\sigma$), полученное в [20]. Однако в силу громоздкости и малости вклада $y(r)$ в области $r>2$ ограничимся выбором (14). Выражение (12) с учетом (13) и (14) при заданном потенциале взаимодействия между молекулами жидкости (11) определяет аналитический вид равновесной радиальной функции распределения $g(r, \theta, n, T)$ как функции температуры, плотности и ориентации полярной молекулы.

Используя выражение для $g(r,n,T)$, можно рассчитать значение коэффициента трения полярных жидкостей β согласно [16] в широком интервале изменения температуры, давления и плотности по формуле

$$\beta^2 = \rho\sigma \int_0^\infty \nabla^2 \Phi(r,\theta)\, g(r,\theta,n,T)\partial\vec{r}, \quad (15)$$

где ρ – плотность жидкости, $\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)$ – радиальная часть оператора Лапласа.

Учет формул (11), (12) и (15) в выражениях (1)-(10) позволяет провести численный расчет коэффициентов сдвиговой $\eta_s(\omega)$ и объемной $\eta_V(\omega)$ вязкостей, модулей объёмной $K(\omega)$, релаксационной $K_r(\omega)$, адиабатической K_s и сдвиговой $\mu(\omega)$ упругостей в широком диапазоне термодинамических

параметров состояния для полярных жидкостей. В качестве полярных жидкостей рассмотрены вода и жидкого метанола. При этом молекулярные параметры, входящие в потенциал Штокмайера ($d_a, d_b, \frac{\varepsilon}{k}, \sigma$), взяты из [21,22], а соответствующие экспериментальные значение плотности ρ и температуры T из [23,24].

Для количественного сравнения результатов численных расчетов с экспериментальными данными в табл. 1 и 2 приведены теоретические значения коэффициентов сдвиговой вязкости $\eta_s(\omega)$ и объемной вязкости $\eta_v(\omega)$ в зависимости от температуры и плотности, вычисленные по формулам (1), (2), (5), (6) при частоте $\omega^* = 10^{-5}$ и фиксированных значениях углов $\theta_1 = \pi/6$, $\theta_2 = \pi/3$, $\xi_1 - \xi_2 = 0$ для метилового спирта и воды. Из таблицы следует, что полученные теоретические результаты находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

Таблица 1

Изочастотные зависимости коэффициентов сдвиговой и объемной вязкостей от температуры и плотности для метилового спирта ($\omega^* = 10^{-5}$, $\theta_1 = \pi/6$, $\theta_2 = \pi/3$, $\xi_1 - \xi_2 = 0$).

t, °C [23]	ρ, кг/м³ [23]	η_s, мПа · с				η_V, мПа · с		η_V/η_s	
		[23]	форм. (6)	форм. (1)		форм. (7)	форм. (2)	фор.(7)/ фор.(6)	фор.(2)/ фор.(1)
10	801.0	-	0.4989	0.4831		3.8953	3.7893	7.8080	7.8437
20	791.5	0.5780	0.4513	0.4394		3.4002	3.2909	7.5337	7.4893
30	782.5	0.5090	0.4104	0.4021		2.9837	2.8775	7.2707	7.1564
40	774.0	0.4460	0.3749	0.3700		2.6315	2.5322	7.0187	6.8436
50	765.0	0.3930	0.3431	0.3412		2.3233	2.2326	6.7713	6.5443
60	755.5	0.3470	0.3144	0.3150		2.0527	1.9714	6.5283	6.2581
70	746.0	0.3060	0.2889	0.2917		1.8177	1.7462	6.2929	5.9865
80	735.5	0.2710	0.2652	0.2699		1.6066	1.5446	6.0586	5.7239
90	725.0	0.2400	0.2439	0.2502		1.4225	1.3698	5.8317	5.4746

Таблица 2

Изочастотные зависимости коэффициентов сдвиговой и объемной вязкости от температуры и плотности для воды ($\omega^* = 10^{-5}$, $\theta_1 = \pi/6$, $\theta_2 = \pi/3$, $\xi_1 - \xi_2 = 0$).

t, °C [24]	ρ, кг/м³ [24]	η_s, мПа · с				η_V, мПа · с			η_V/η_s		
		[24]	форм. (6)	форм. (1)		[24]	форм. (6)	форм. (1)	[24]	фор.(7)/ фор.(6)	фор.(2)/ фор.(1)
0	999.87	1.7865	0.7715	1.5020		5.610	2.3494	3.6110	3.1402	3.0451	2.4041
5	999.99	1.5177	0.7560	1.4817		4.550	2.1670	3.4663	2.9980	2.8665	2.3394
10	999.73	1.3061	0.7404	1.4605		3.750	1.9984	3.3267	2.8711	2.6992	2.2779
15	999.13	1.1381	0.7248	1.4384			1.8428	3.1922		2.5425	2.2193
20	998.23	1.0020	0.7093	1.4157		2.840	1.6991	3.0629	2.8343	2.3956	2.1636
25	997.07	0.8903	0.6939	1.3926			1.5666	2.9390		2.2577	2.1105
30	995.68	0.7976	0.6787	1.3692		2.270	1.4444	2.8203	2.8460	2.1282	2.0598
40	992.40	0.6531	0.6492	1.3226		1.810	1.2278	2.5989	2.7714	1.8912	1.9650
50	988.00	0.5471	0.6199	1.2740			1.0444	2.3932		1.6849	1.8785
60	983.20	0.4666	0.5920	1.2267		1.470	0.8885	2.2068	3.1505	1.5009	1.7989
80	971.80	0.3547	0.5390	1.1331		1.220	0.6443	1.8788	3.4395	1.1955	1.6581
90	965.30	0.3148	0.5139	1.0871			0.5495	1.7346		1.0693	1.5955
100	958.30	0.2822	0.4896	1.0418			0.4692	1.6018		0.9582	1.5375

Согласно табл. 1 и 2, построены температурные зависимости отношения $\eta_V(\omega)/\eta_s(\omega)$, численные значения которого находятся в интервале от 1 до 8 при фиксированной частоте. В соответствии с

релаксационной теорией, в данном интервале измерений проявляется вклад структурной релаксации в вязкоупругие свойства жидкостей. Так, на рис. 1 и 2 показаны зависимости коэффициента объемной $\eta_v(\omega)$ вязкости и релаксационного модуля упругости $K_r(\omega)$ для метилового спирта и воды от углов θ_1 и θ_2 при фиксированном значении ξ_1-ξ_2=0 ^{0} и постоянной температуре.

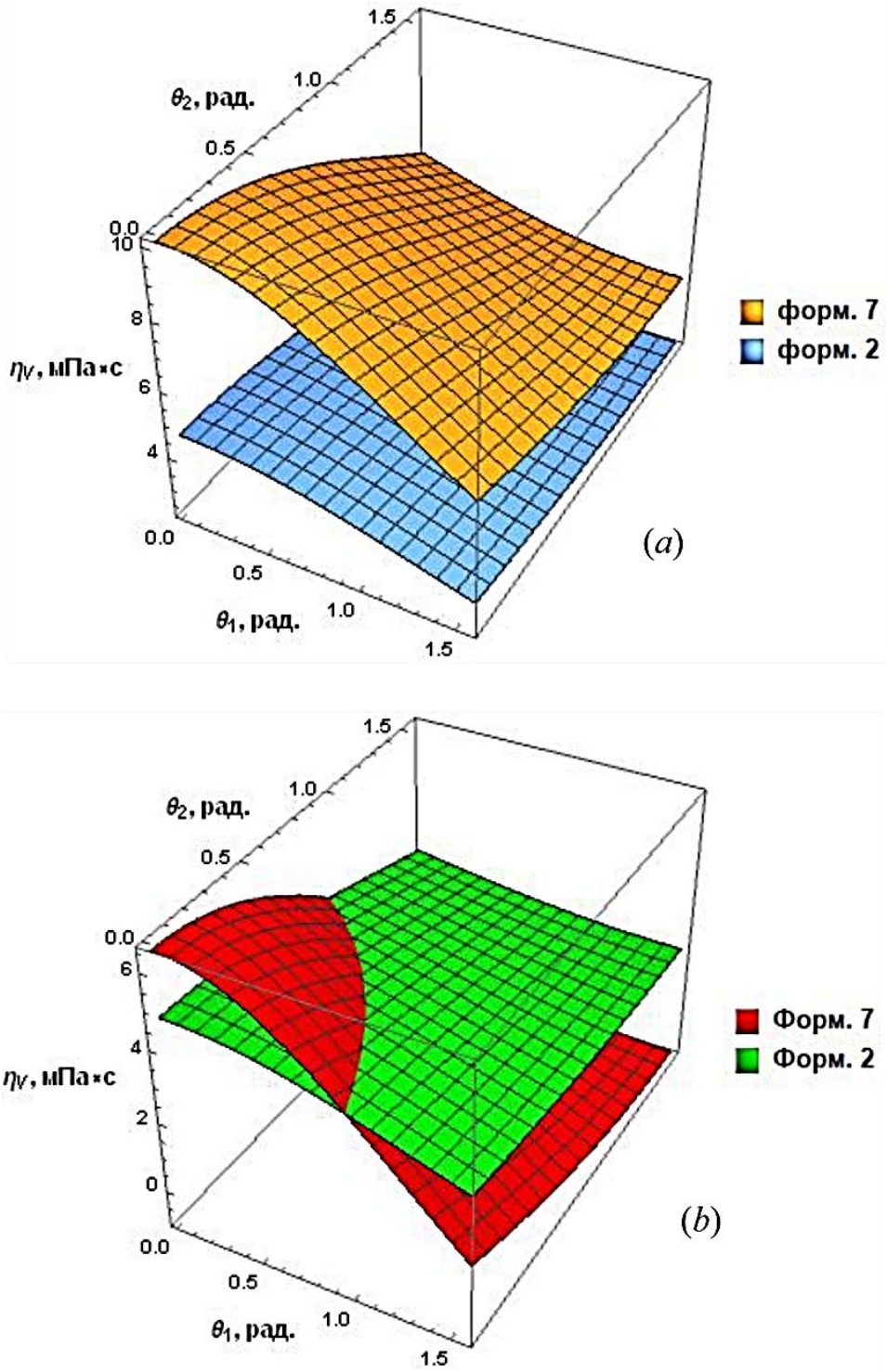

Рис. 1. Зависимость коэффициента объемной вязкости $\eta_v(\omega)$ от углов θ_1 и θ_2, при фиксированных значениях ξ_1-ξ_2=0:
(a) для метилового спирта при температуре t=20°C; (b) для воды при температуре t=15°C.

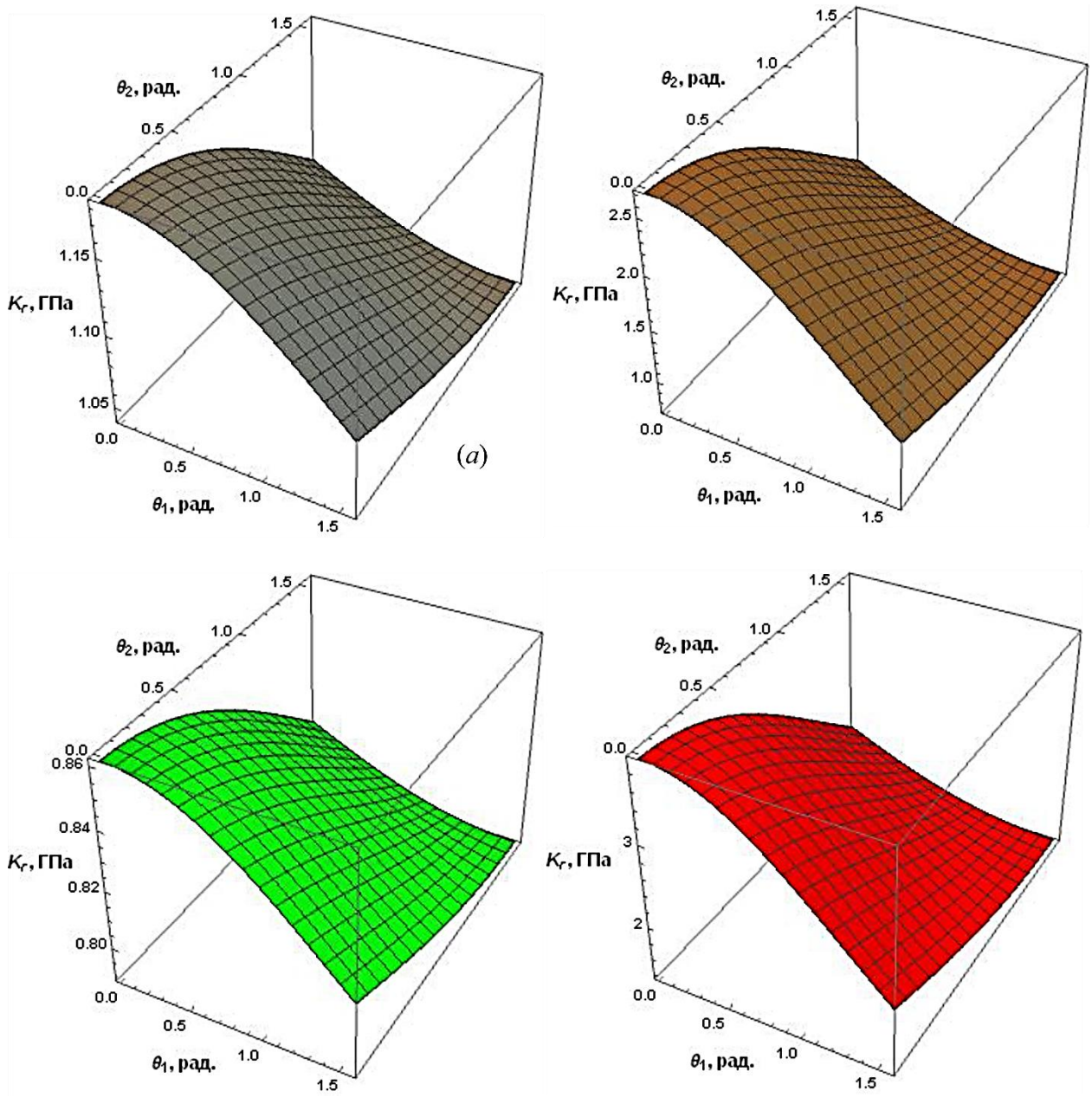

Рис. 2. Зависимость релаксационного модуля упругости $K_r(\omega)$ от углов θ_1 и θ_2, при фиксированных значениях ξ_1-ξ_2=0:
(a) для метилового спирта при температуре t=20°C по формуле (5); (b) для метилового спирта при температуре t=20°C по формуле (10); (c) для воды при температуре t=15°C по формуле (5); (d) для воды при температуре t=15°C по формуле (10).

Из рис. 1 и 2 видно, что $\eta_V(\omega)$ и $K_r(\omega)$ зависят от закона затухания релаксирующих потоков по-разному, что обусловлено учётом вкладов релаксационных процессов в эти величины. Следовательно, вязкоупругие свойства полярных жидкостей тесно связаны с природой восстановления равновесной структуры и сложным взаимодействием между молекулами, а также с влиянием различных факторов, таких как размерные эффекты и ориентация молекул.

Поступило 17.02.2025 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Zwanzig R. High frequency elastic module of simple fluids. – J. Chem. Phys., 1965, v.43, №12, pp. 4464-4471.
2. Фишер И.З. Статистическая теория жидкостей. – М.: Физматгиз, 1961, 280 с.
3. Кубо Р. Некоторые вопросы статистической теории необратимых процессов. – В сб.: Термодинамика необратимых процессов. – М.: ИЛ., 1962, с. 345-421.
4. Физика простых жидкостей, том 1 (Под ред. П.Темперли и др.). – М.: Мир, 1971 308 с.
5. Mori H. Statistical-mechanical theory of transport in fluids. – Phys. Rev., 1958, v.112, №6, pp. 1829-1842.
6. Mori H. Transport, collective motion, and Brownian motion. – Prog. of Theor. Phys., 1965, v.33, №3, pp. 423-455.
7. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. – М.: Наука, 1971, 415 с.
8. Nossal R. Collective motion in simple classical fluids. – Phys. Rev., 1968, 166, №1, pp. 81-88.
9. Брук-Левинсон Э.Т., Немцов В.Б., Ротт Л.А. Статистическое вычисление комплексного объемного модуля упругости. – Акуст. журн., 1970, v.16, вп.2, с. 206-212.
10. Куни Ф.М. Статистическая теория вязкоупругих свойств жидкостей. – ТМФ, 1974, т.21, №2, с. 233-246.
11. Luttinger J.M. Theory of thermal transport coefficient. – Phys. Rev., 1964, v.135, №6, pp. 1505-1514.
12. Товбин Ю.К. Учет наведенных диполей в дискретной модели полярной жидкости. – Журнал физической химии, 2014, т. 88, №11, с. 1752-1765.
13. Кутепов А.М. Вода. Структура, состояние, сольватация. – М.: Наука, 2003, 404 с.
14. Odinaev S., Akdodov D., Mirzoaminov Kh. Study of frequency dispersion of shear and bulk viscosity coefficients for liquid argon, krypton and xenon under different parameters of state. – Journal of Molecular Liquids, 2011, v.164, № 1-2, pp. 22-28.
15. Одинаев С., Акдодов Д., Мирзоаминов Х.М. Исследование частотной дисперсии динамических модулей упругости простых жидкостей в зависимости от природы затухания релаксирующих потоков. – ДАН РТ, 2011, т. 54, №1, с. 27-34.
16. Одинаев С., Акдодов Д.М., Баладжонзода С.Д. Частотная дисперсия вязкоупругих свойств полярных жидкостей в случае экспоненциального закона затухания релаксирующих потоков. – Известия Национальной академии наук Таджикистана. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2024, № 1 (194), с. 41-49.
17. Каплан И.Г. Межмолекулярные взаимодействия. Физическая интерпретация, компьютерные расчеты и модельные потенциалы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012, 394 с.
18. Юхновский И.Р., Головко М.Ф. Статистическая теория классических равновесных систем. – Киев: Наука думка, 1980, 372 с.
19. Wertheim M.S. Exast solution of the Percus-Yevick integral equation for hard spheres. – Phys. Rev. Lett., 1963, v.10, № 8, pp. 321-323.
20. Smith W.R., Henderson D.J. Analitical representation of the Precus-Yevick hard sphere radial distribution function. – Mol. Phys., 1970, v.19, № 3, pp. 441-446.
21. Рид Р., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. – Л.: «Химия», 1971, 709 с.
22. Осипов О.А., Минкин В.И., Гарновский А.Д. Справочник по дипольным моментам. – М.: «Высшая школа», 1971, 416 с.
23. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. – М.: «Наука», 1972, 720 с.
24. Зацепина Г.Н. Свойства и структура воды. – М.: Изд. МГУ, 1974, 168 с.

Д.М.Акдодов, С.Д.Балаҷонзода

ҲИСОБИ РАҚАМИИ ХОСИЯТҲОИ ЧАСПАКИЮ ЧАНДИРИИ МОЕЪҲОИ ҚУТБӢ АЗ ПАРАМЕТРҲОИ ҲОЛАТ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Вобастагии коэффисиентҳои часпакии лағжишӣ $\eta_s(\omega)$ ва часпакии ҳаҷмии $\eta_V(\omega)$, инчунин модулҳои лағжишӣ μ(ω) ва ҳаҷмӣ K(ω) моеъҳои қутбӣ аз параметрҳои термодинамикии ҳолат ва ориентасияи кунҷии молекулҳо таҳқиқ гардидаанд. Бо ин мақсад ифодаҳои аналитикии пештар ба дастомада барои $\eta_s(\omega)$, $\eta_V(\omega)$, μ(ω) ва K(ω) дар мавриди хомӯшшавии сели релаксатсионӣ бо қонунҳои экспоненсиалӣ ва дараҷагӣ истифода шудаанд. Ифодаҳои аналитикии $\eta_s(\omega)$, $\eta_V(\omega)$, μ(ω) ва K(ω) дар ифодаҳои таҳтиинтегралӣ энергияи потенсиалии таъсири мутақобилаи молекулаҳо $\Phi_{ab}(|\vec{r}|)$ ва функсияи радиалии тақсимот $g_{ab}(|\vec{r}|)$-ро доранд. Ҳисобҳои рақамӣ барои барои спирти метил ва об дар соҳаи васеи температура ва зичӣ анҷом дода шудаанд. Натиҷаҳои ба дастомада бо маълумоти таҷрибавӣ муқоиса шуда, мувофиқати қаноатбахшро нишон медиҳанд.

Калимаҳои калидӣ: *релаксацияи транслятсионӣ ва сохторӣ, коэффисиентҳои часпакии лағжишӣ ва ҳаҷмӣ, модулҳои чандирии ҳаҷмӣ ва лағжишӣ, потенсиали таъсири мутақобила, функсияи радиалии тақсимот.*

D.M.Aqdodov, S.D.Balajonzoda

NUMERICAL CALCULATION OF THE VISCOELASTIC PROPERTIES OF POLAR LIQUIDS AS THE FUNCTION OF STATE PARAMETERS

Tajik National University

The dependencies of the shear viscosity coefficient $\eta_s(\omega)$ and the bulk viscosity coefficient $\eta_V(\omega)$, as well as the shear modulus μ(ω) and the bulk modulus K(ω) of polar liquids, on thermodynamic state parameters and molecular angular orientation have been studied. Previously obtained analytical expressions for $\eta_s(\omega)$, $\eta_V(\omega)$, μ(ω), and K(ω) were used, where the flows decay according to power and exponential laws. The analytical expressions for $\eta_s(\omega)$, $\eta_V(\omega)$, μ(ω), and K(ω) contain potential energy interaction $\Phi_{ab}(|\vec{r}|)$ and the radial distribution function $g_{ab}(|\vec{r}|)$ in the integrands. Numerical calculations were performed for methyl alcohol and water over a wide range of temperatures and densities. The obtained results were compared with experimental data and found to be in satisfactory agreement.

Key words: *translational and structural relaxation, shear and bulk viscosity coefficients, bulk and shear modulus, intermolecular interaction potential, radial distribution function.*

Сведения об авторах:

1. **Акдодов Донаёр Мавлобахшович** – доктор физико-математических наук, Таджикский национальный университет, и.о. профессора, заведующий кафедрой общей физики. E-mail: donaer.a@mail.ru;
2. **Баладжонзода Суалмонджон Дододжон** – докторант PhD, Таджикский национальный университет. E-mail: sulaymonbalajonzoda@gmail.com.

ЭНЕРГЕТИКА И ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

УДК 551.555.4
Специальность: 2.4.5. Энергетические системы и комплексы

Член-корреспондент НАН Таджикистана У.Мадвалиев,
Н.И.Усмонзода*, А.Р.Рустамзода, М.А.Кудусов

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА СЕЗОННОЙ СТРУКТУРЫ ПРИЗЕМНОЙ СКОРОСТИ ВЕТРА НА ОСНОВЕ ДАННЫХ METAR АЭРОПОРТА «ХУДЖАНД»

Национальная академия наук Таджикистана,
Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана,
****Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова***

Проведен комплексный анализ сезонной структуры приземной скорости ветра по данным METAR, собранным на территории аэропорта «Худжанд» (Таджикистан) за период 2015–2024 гг. Для описания распределения ветра использовано двухпараметрическое распределение Вейбулла, параметры которого оценены методами максимального правдоподобия, моментов и наименьших квадратов. Реализованы алгоритмы исключения выбросов и адаптивной дискретизации (Фридман–Дьяконис). Проведено сезонное сравнение точности моделей по критерию RMSE с визуализацией ошибок и параметров в виде тепловых карт, а также построены Q–Q графики. Метод максимального правдоподобия обеспечил наилучшее соответствие эмпирическим данным во всех сезонах. Выявлено, что зимой и летом ветровой режим характеризуется большей устойчивостью, а весной и осенью — выраженной турбулентностью. Представленные результаты могут быть использованы для обоснования зонирования по ветровому потенциалу и уточнения параметров расчёта энергоотдачи на ранних этапах проектирования объектов ВИЭ.

Ключевые слова: *распределение Вейбулла, приземная скорость ветра, METAR, сезонный анализ, метод максимального правдоподобия, энергетический потенциал ветра.*

Оценка статистических характеристик ветра на уровне приземных слоёв атмосферы является основой для моделирования ветроэнергетического потенциала, оценки надёжности энергоснабжения и разработки инфраструктурных решений в области ВИЭ [1, 2]. Наиболее широкое распространение для описания распределения скорости ветра получило двухпараметрическое распределение Вейбулла, успешно применяемое как в инженерных расчётах [3], так и в климатических исследованиях [4]. Однако, как показывают сравнительные работы [5], точность аппроксимации зависит от выбора метода оценки параметров и структуры исходных данных. Среди различных моделей, применяемых для описания скорости ветра, распределение Вейбулла получило широкое распространение благодаря способности одновременно учитывать как режимы устойчивого ветра, так и турбулентные колебания. Вместе

Адрес для корреспонденции: *Мадвалиев Умархон, 734024, Таджикистан, г. Душанбе, ул. Дружбы Народов, 62; 734063, Душанбе, проспект Айни, 299/1, E-mail: umarkhon@mail.ru.*

с тем в литературе встречаются и альтернативные подходы, включая логнормальное, гамма- и логлогистическое распределения. Выбор в пользу распределения Вейбулла обусловлен его адаптивностью к разным типам ветровых режимов и наличием физически интерпретируемых параметров формы и масштаба, что особенно важно при сезонном моделировании в условиях орографически неоднородной местности.

Множество исследований выполнено на основе данных глобальных реанализов (ERA5, MERRA-2), обеспечивающих широкое покрытие и высокую пространственную разрешающую способность [6, 7]. Однако орографическое сглаживание и усреднение, свойственные данным реанализа, существенно ограничивают их применимость в сложнопересечённой местности [8]. Альтернативой могут быть измерения наземных автоматических метеостанций, однако такие данные зачастую недоступны или имеют значительные пропуски в развивающихся странах, включая государства Центральной Азии.

В Центральной Азии выполнен ряд работ по оценке ветрового потенциала на основе данных ERA5 [9, 10] и краткосрочных измерений LIDAR (например, в проектах USAID и ADB [11]). Однако в большинстве случаев отсутствует сезонная дифференциация ветрового режима и не проводится детальное сопоставление методов оценки параметров распределения. Работы, выполненные в горных районах Ирана [12], Турции [13], Пакистана [14] и Казахстана [15], показали, что стандартные методы подгонки Вейбулла могут давать значительные расхождения при наличии сложной топографии и нестабильных ветровых профилей.

Кроме того, несмотря на высокую доступность авиационных метеорологических данных (METAR), их использование для ветрового анализа остаётся ограниченным. В опубликованной литературе METAR применяется преимущественно для валидации краткосрочных прогнозов [16], но почти не используется в задачах оценки сезонной структуры и параметрического моделирования. Это создаёт обоснованный исследовательский пробел, особенно в регионах с ограниченным наблюдательным покрытием.

С учётом указанных ограничений представляется актуальным использование высокочастотных и стандартизированных метеорологических данных формата METAR для оценки сезонных характеристик ветрового режима в условиях сложного рельефа. Целью настоящего исследования является количественная оценка параметров распределения скорости приземного ветра на основе многолетних METAR-наблюдений аэропорта «Худжанд» (Северный Таджикистан), с применением трёх методов параметризации распределения Вейбулла — максимального правдоподобия, моментов и наименьших квадратов. Работа включает оценку точности каждого метода, построение доверительных интервалов параметров, а также анализ сезонной изменчивости распределения ветровой скорости на протяжении десятилетнего периода.

Материалы и методы

В качестве исходного материала использованы метеорологические сводки формата METAR, предоставленные Международной организацией гражданской авиации (ICAO) через автоматические станции наблюдения. Анализ выполнен по данным аэропорта «Худжанд» (ICAO: UTDL, Республика Таджикистан), охватывающими период с января 2015 года по декабрь 2024 года. Наблюдения

осуществлялись с регулярной частотой (каждые 30 минут), включали скорость и направление приземного ветра, выраженные в узлах.

Общий объём выборки составил более 174 тыс. записей. Первичная фильтрация включала:

- удаление недостоверных значений (отметки "M", "T" и пропуски),
- преобразование единиц в систему СИ (1 kt = 0.51 м/с),
- ограничение диапазона скоростей значением 50 м/с как физически реалистичной верхней границей.

Часовые метки были приведены к часовому поясу Азия/Душанбе (UTC+5), и дополнительно извлечены признаки "год", "месяц" и "сезон". Сезонное деление принято по стандартной метеорологической схеме: зима (декабрь–февраль), весна (март–май), лето (июнь–август), осень (сентябрь–ноябрь). Для зимы применено объединение декабрь–январь–февраль в рамках «сезонного года» (например, зима 2022 включает декабрь 2021 и январь–февраль 2022).

Для повышения устойчивости оценки параметров распределения предварительно применялась фильтрация выбросов с использованием межквартильного размаха (IQR). Значения, превышающие верхнюю квартильную границу более чем на 1.5×IQR, исключались из выборки. Это позволило устранить возможные аномальные наблюдения, вызванные ошибками записи или редкими шквалистыми порывами. Количество интервалов в гистограммах определялось автоматически по правилу Фридмана–Дьякониса:

$$h = 2 \cdot IQR \cdot n^{-\frac{1}{3}}, \qquad N = \frac{\max(x) - \min(x)}{h}$$

что обеспечивало объективную и адаптивную дискретизацию плотности вероятности в зависимости от объёма и дисперсии данных.

Скорость приземного ветра в большинстве случаев описывается двухпараметрическим распределением Вейбулла, плотность которого задаётся выражением:

$$f(x; k; \mathrm{c}) = \frac{k}{c}(\frac{k}{c})^{k-1} exp\left[-(\frac{x}{c})^{k}\right], x \geq 0,$$

где: $k > 0$ — параметр формы, отражающий вариабельность (турбулентность) ветра; $\mathrm{c} > 0$ — параметр масштаба, определяющий положение пика распределения; x — скорость ветра (м/с).

Параметр формы интерпретируется как индикатор однородности ветрового режима: при $k < 2$ наблюдаются резкие порывы и высокая турбулентность, при: $k > 2.5$ — поток становится более стационарным. Масштабный параметр коррелирует с модальной скоростью и может быть использован при предварительной оценке удельной мощности ветра. Распределение Вейбулла широко используется в ветроэнергетике благодаря своей способности адекватно описывать как низкоскоростные, так и порывистые ветровые потоки [1, 2]. Для оценки параметров k и c применялись три независимых метода:

а) Метод максимального правдоподобия (Maximum Likelihood Estimation –MLE). Параметры определялись путём максимизации логарифмической функции правдоподобия:

$$\ln L(k, c) = n \ln k - n \ln c + (k - 1) \sum \ln x_i - \sum \left(\frac{x_i}{c}\right)^k,$$

при $x_i \geq 0$. Параметр сдвига фиксировался на нуле для соответствия физическому смыслу. Метод обеспечивает асимптотическую состоятельность, но чувствителен к выбросам при малых выборках.

б) Метод моментов (Percentile method – PCTL). Параметры определяются из следующих уравнений:

$$\mu = \mathrm{c} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right), \sigma^2 = c^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - (\Gamma(1 + \frac{1}{k}))^2\right],$$

где μ и σ^2 — выборочные значения средних и дисперсии. Метод прост в реализации, но менее точен при асимметричных распределениях.

в) Метод наименьших квадратов (Least Squares–LSQ). Минимизация проводилась по критерию наименьших квадратов между гистограммной (эмпирической) оценкой плотности и функцией плотности распределения Вейбулла:

$$S(k, c) = \sum\left[f_{\text{эмп}}(x_j) - f_{\text{мод}}(x_j; k; \mathrm{c})\right]^2$$

Метод более устойчив к шуму в хвостах, но чувствителен к выбору числа и ширины бинов.

Для обеспечения сопоставимости методов параметры определялись по одной и той же выборке после исключения выбросов. Следует отметить, что метод наименьших квадратов может демонстрировать нестабильность при наличии шумов в хвостах распределения, а также чувствителен к выбору ширины бинов и их количества. Это может вызвать смещение оценки параметров в сезонах с высокой асимметрией или при ограниченном числе наблюдений. Тем не менее, данный метод остаётся полезным при визуальном сопоставлении эмпирических и теоретических плотностей.

Для количественной оценки точности аппроксимации применялись следующие критерии:

- среднеквадратичное отклонение (Root Mean Square Error–RMSE) между эмпирической гистограммой и теоретической плотностью распределения;
- статистика Колмогорова–Смирнова, с проверкой значимости при уровне $\alpha = 0.05$ [17];
- Q–Q графики, иллюстрирующие согласованность квантилей эмпирических данных и теоретической модели.

Аппроксимация признавалась удовлетворительной в случаях, когда наблюдались одновременно невысокие значения RMSE и p-величина превышала 0.05. Сравнение эффективности методов проводилось на основании совокупности статистических критериев и визуальной оценки соответствия формы распределения.

Для построения доверительных интервалов параметра формы применялся бутстрэп-подход с 100 повторными случайными подвыборками из исходной выборки. Для каждой подвыборки параметры переоценивались методом максимального правдоподобия, после чего рассчитывался 95%-ный доверительный интервал с использованием перцентильного метода:

$$CL_{95\%} = [Perc_{2.5\%}, Perc_{97.5\%}]$$

Применение бутстрэп-методологии позволяет количественно оценить статистическую неопределённость параметров распределения, возникающую в условиях сезонной нестабильности ветрового режима. Это повышает обоснованность и надёжность выводов при последующем использовании результатов в задачах ветроэнергетического проектирования и сценарного анализа [18, 19].

Анализ ограничен приземным уровнем атмосферы (~10 м), где измерения METAR наиболее репрезентативны. Помимо этого, классическое распределение Вейбулла не учитывает вероятность нулевой скорости ветра, что может приводить к переоценке плотности в области малых значений, особенно в условиях штилевых режимов. Альтернативой может быть использование смешанных моделей (например, биномиальное распределение + Вейбулл), позволяющих более точно описывать застойные состояния. Эти аспекты не включены в настоящее исследование и могут быть предметом дальнейших работ. Работа не включает вертикальную экстраполяцию и не учитывает влияние крупных атмосферных циркуляций. Представленная методика воспроизводима и может быть адаптирована к другим аэропортам и станциям с наличием базы данных наблюдений скорости ветра.

Р е з у л ь т а т ы

Сравнение сезонных распределений (рис. 1) показало устойчивое преимущество метода максимального правдоподобия по критерию RMSE. Наименьшие отклонения между модельной и эмпирической плотностями получены в зимний период, а наибольшие — летом.

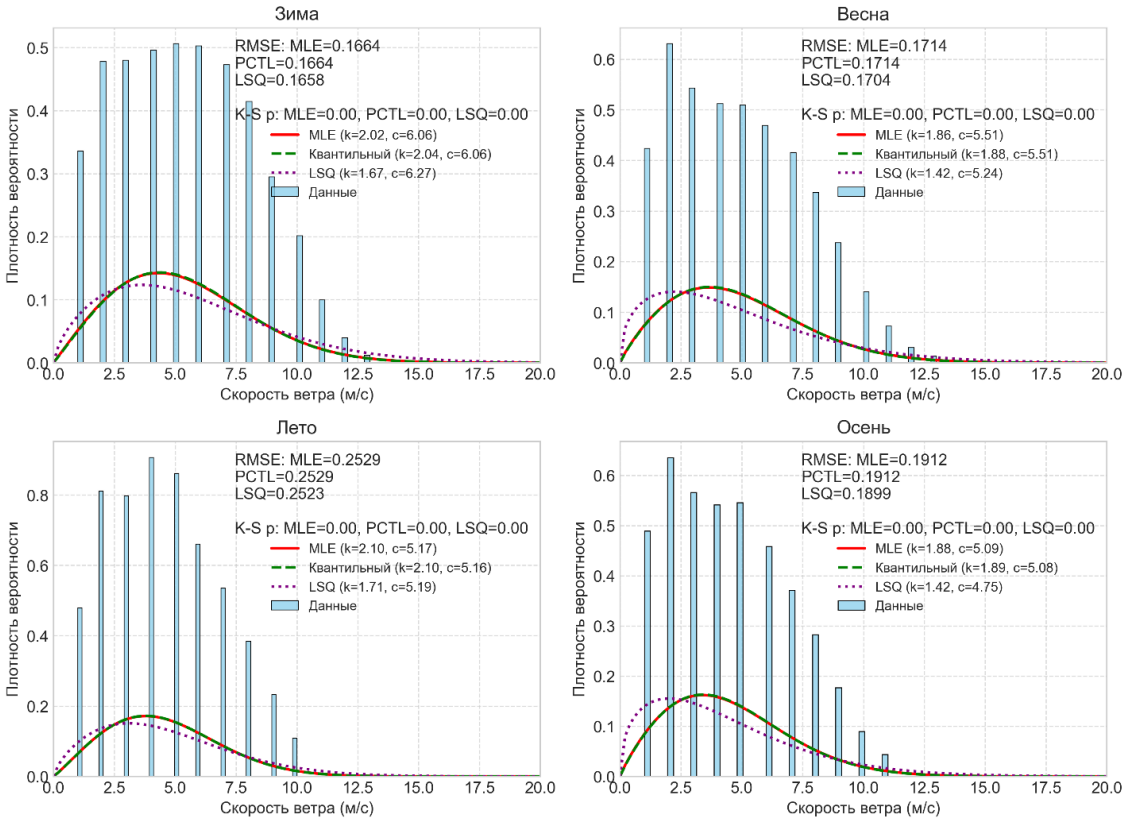

Рис. 1. Сравнение сезонных распределений приземной скорости ветра с аппроксимацией распределением Вейбулла по методам MLE, PCTL и LSQ.

Во всех сезонах значения параметра формы k по MLE превышают 1.8, достигая максимума 2.10 летом, что соответствует более регулярному характеру ветра в тёплый сезон. Повышенные значения параметра формы $k > 2$ указывают на устойчивый характер ветрового потока и снижение частоты порывов. Напротив, понижение k до значений около 1.8 весной и осенью может интерпретироваться как усиление турбулентных процессов, характерных для переходных сезонов. Подобная сезонная динамика параметра формы была зафиксирована в работах по Турции [13] и Ирану [12], что подтверждает общие

климатические закономерности для регионов с выраженной континентальностью. Параметр масштаба *c* варьирует от 6.06 зимой до 5.09 осенью.

По данным METAR за 10 лет выявлена слабовыраженная отрицательная тенденция изменения средней скорости ветра (рис. 2). Линейный тренд имеет наклон — 0.010м/с в год, однако статистическая значимость низка (p = 0.117), что позволяет трактовать его как фоновое изменение.

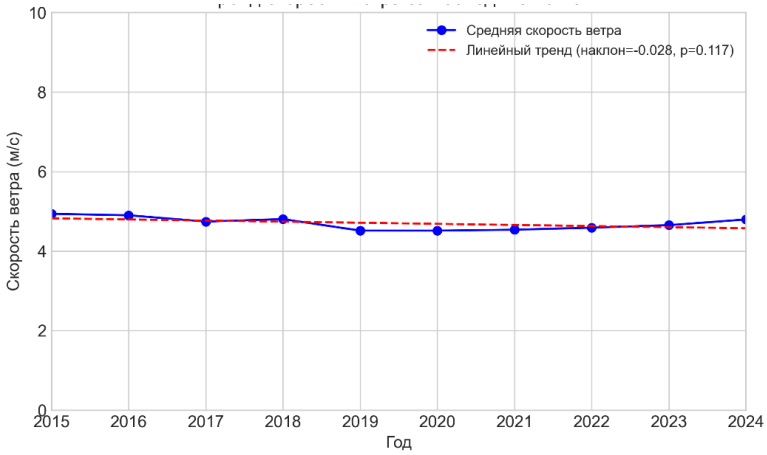

Рис. 2. Линейный тренд средней скорости приземного ветра аэропорта «Худжанд» за период 2015–2024 гг.

Квантильные графики (рис. 3) демонстрируют высокую степень согласованности модели и данных. Наиболее плотное прилегание наблюдается зимой и летом, где форма распределения близка к симметричной. Весной и осенью отмечаются умеренные отклонения в правом хвосте, что объясняется ростом турбулентности и появлением редких экстремальных значений.

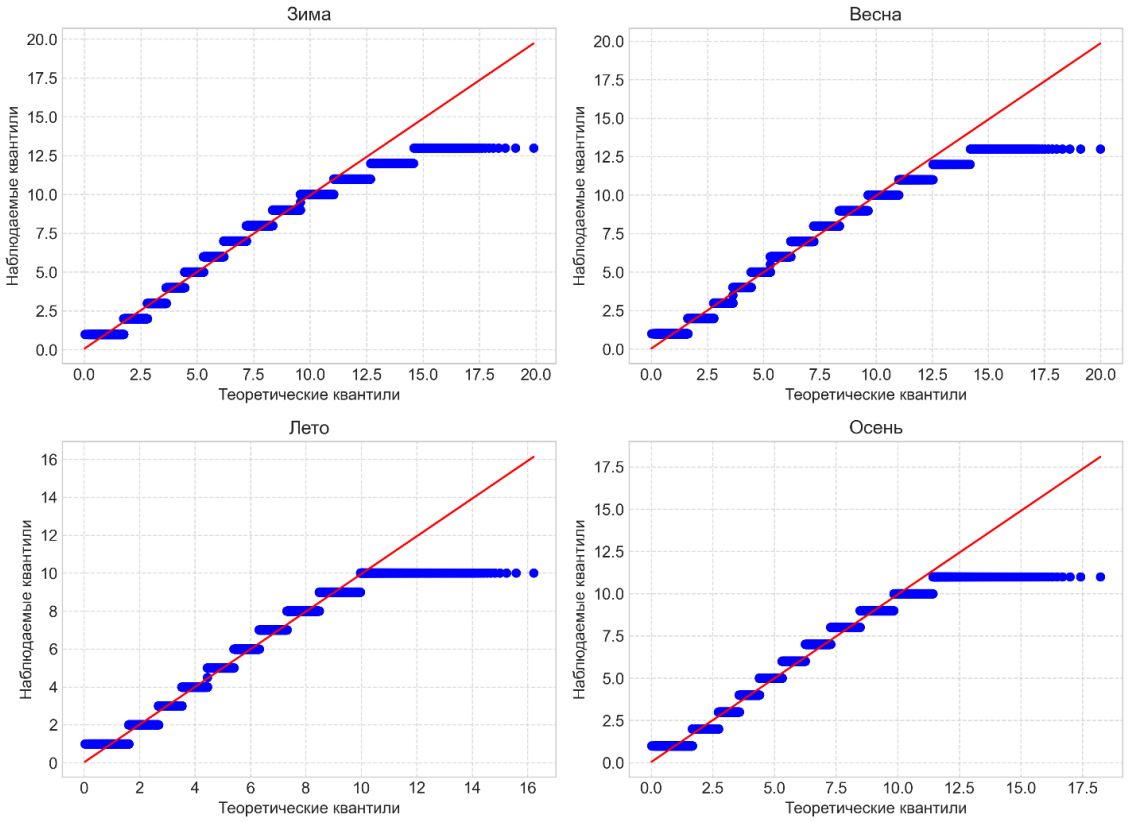

Рис. 3. Q–Q графики соответствия эмпирических и теоретических квантилей по сезонам (метод MLE).

Карты параметров (рис. 4) позволяют визуализировать сезонную структуру ветрового режима: летом и зимой наблюдается наиболее стабильный поток (высокое k), тогда как весной и осенью — более турбулентный. Значения параметра масштаба согласуются с сезонной структурой средней скорости ветра.

Анализ RMSE (рис. 5) подтвердил, что метод MLE во всех случаях даёт наименьшие или сопоставимые отклонения. Метод моментов показал стабильные результаты, особенно в переходные сезоны. Метод LSQ оказался наиболее чувствителен к структуре выборки и демонстрировал повышенные значения RMSE в тёплый период года.

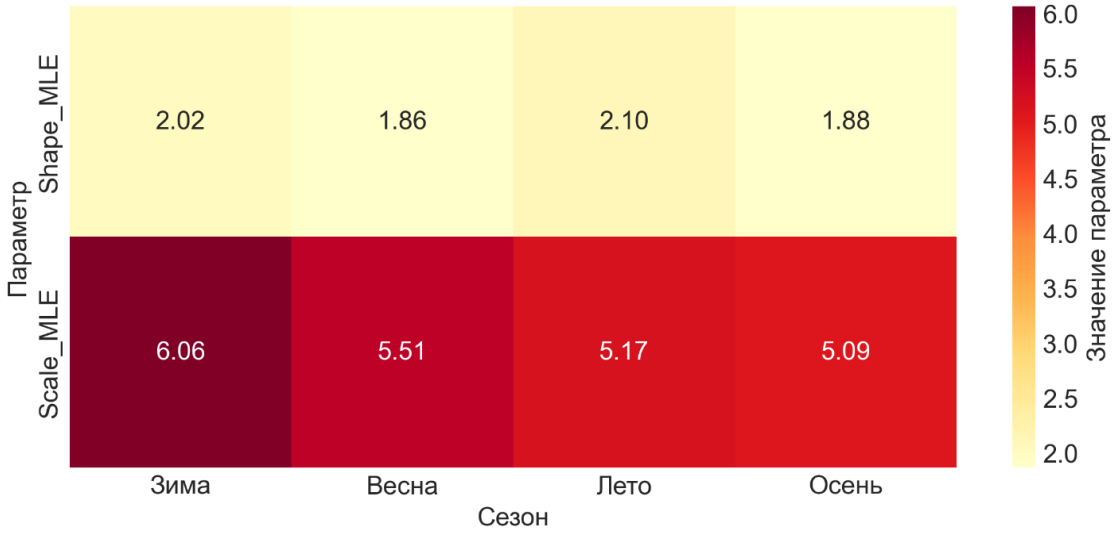

Рис. 4. Тепловая карта сезонных значений параметров формы и масштаба распределения Вейбулла (MLE).

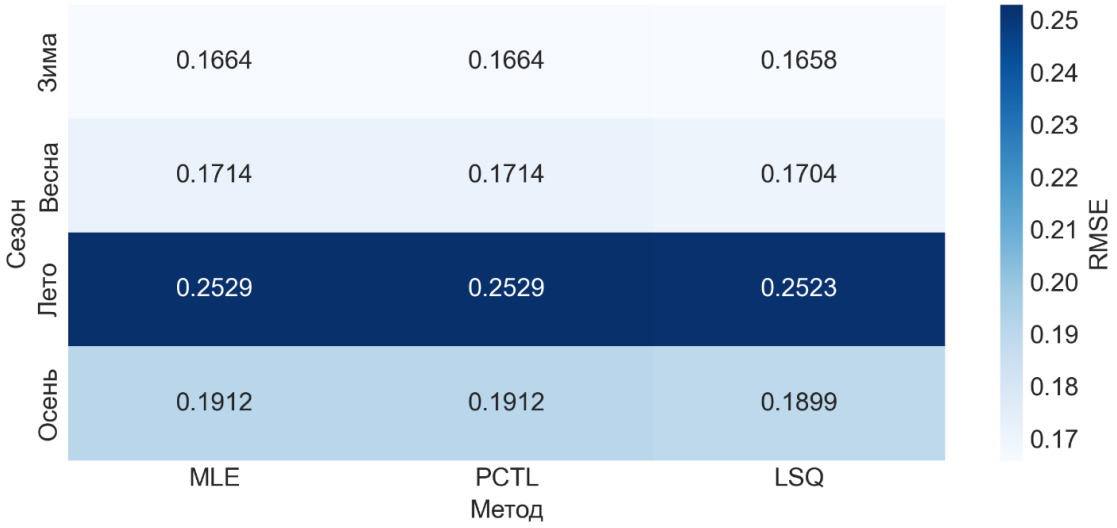

Рис. 5. Тепловая карта значений RMSE для методов MLE, PCTL и LSQ по каждому сезону.

Для количественной оценки неопределённости параметров Вейбулла в условиях сезонной изменчивости приземной скорости ветра применялась бутстрэп-методология со 100 повторными подвыборками. Результаты, представленные на рисунке 6, демонстрируют 95%-ные доверительные интервалы для параметра формы k и параметра масштаба c по каждому сезону.

Как видно из графика, наименьшая вариативность параметров наблюдается зимой, что указывает на стабильный характер распределения. В летний период доверительные интервалы параметров k

и c существенно шире, отражая более выраженную турбулентность и нестабильность ветрового режима. Подобная сезонная дифференциация имеет практическую значимость при оценке надёжности моделей прогнозирования и расчёта ожидаемой энергоотдачи ВЭУ.

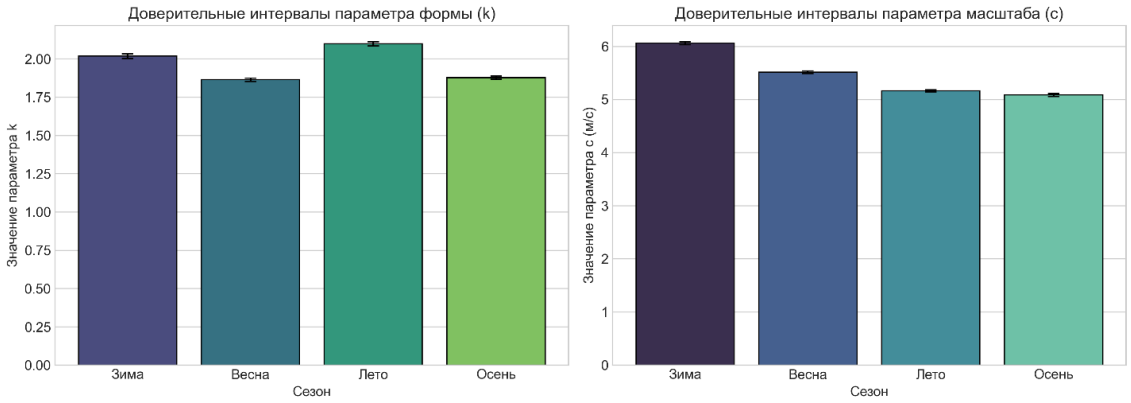

Рис. 6. 95%-ные доверительные интервалы сезонных параметров распределения Вейбулла, рассчитанные методом бутстрэп. Слева – параметр формы (k), справа – параметр масштаба (c).

На основе полученных параметров распределения Вейбулла для каждого сезона была рассчитана удельная плотность ветровой энергии по формуле:

$$E = \frac{1}{2}\rho c^3 \Gamma(1 + \frac{3}{k})$$

где $\rho = 1{,}26$ кг/м^3— плотность воздуха на уровне аэропорта «Худжанд» (высота ~430 м над уровнем моря), c и k — параметры масштаба и формы соответственно, Г — гамма-функция. Расчёты выполнены для каждого сезона по значениям, полученными методом максимального правдоподобия, и представлены в табл. 1.

Таблица 1

Расчёт сезонной плотности ветровой энергии на основе параметров распределения Вейбулла (метод MLE) и локальной плотности воздуха для аэропорта «Худжанд».

Сезон	k (форма)	c (масштаб, м/с)	Плотность энергии E, Вт/м²
Зима	1.92	6.06	260.7
Весна	1.86	5.64	238.1
Лето	2.10	5.17	221.4
Осень	1.88	5.09	203.2

Как видно из таблицы, наибольшая плотность ветровой энергии наблюдается в зимний период, что согласуется с увеличением масштабного параметра c и более стабильной структурой ветра (высокое значение k). Наименьшая энергоотдача зафиксирована осенью, при наименьшем значении параметра масштаба. Полученные значения могут использоваться для первичной оценки сезонной энергоэффективности ветроустановок и сравнительного зонирования.

Проведённый сравнительный анализ трёх методов оценки параметров двухпараметрического распределения Вейбулла позволил выявить метод максимального правдоподобия как наиболее устойчивый и точный для сезонной аппроксимации приземной скорости ветра. Данный метод показал минимальные значения среднеквадратичного отклонения и высокую степень согласованности с эмпирическими данными, что подтверждено квантильными графиками (Q–Q).

В то время как методы моментов и наименьших квадратов дают схожие оценки параметров формы и масштаба, они демонстрируют различную чувствительность к структуре исходной выборки. Метод моментов теряет точность при наличии асимметрии распределения и тяжёлых хвостов, а LSQ зависит от параметров дискретизации и может быть нестабилен в условиях ограниченного объёма данных. Сезонная структура параметра формы указывает на повышение регулярности ветра в зимний и летний периоды ($k > 2$) и усиление турбулентности весной и осенью (k ≈1.86). Такое поведение согласуется с результатами, полученными в аналогичных по рельефу районах Турции, Ирана и Казахстана, что указывает на универсальность выявленных закономерностей для горных и предгорных зон. Дополнительным вкладом исследования стало использование алгоритма исключения выбросов, автоматического выбора числа интервалов по правилу Фридмана–Дьякониса и тепловых карт параметров. Также впервые для региона выполнено сопоставление точности трёх методов оценки параметров по RMSE с визуализацией в виде матрицы, что усиливает воспроизводимость анализа и даёт основу для обоснованного выбора модели в прикладных задачах.

Хотя результаты обладают высокой степенью надёжности, ограничения касаются как данных (отсутствие вертикального профиля ветра, отсутствие синхронных данных реанализов), так и масштабируемости подхода. В будущем возможно расширение исследования за счёт интеграции с данными ERA5, а также учёта метеорологических условий на различных высотах. Это позволит получить более полное представление о ветровом режиме региона и его потенциале для ветроэнергетики.

В ы в о д ы

Анализ сезонных распределений приземной скорости ветра по данным METAR за 2015–2024 гг. подтвердил эффективность использования двухпараметрического распределения Вейбулла. Метод максимального правдоподобия (MLE) продемонстрировал наилучшие результаты среди сравниваемых подходов, обеспечив минимальные значения RMSE и высокую визуальную согласованность согласно Q–Q графикам. Наибольшая регулярность ветрового режима зафиксирована зимой и летом (значения параметра формы $k > 2$), в то время как весна и осень характеризуются большей дисперсией и турбулентностью. Использование тепловых карт и алгоритмов устойчивой обработки данных позволило выявить закономерности сезонной изменчивости с высокой степенью воспроизводимости. Методика может быть адаптирована для аналогичных исследований в других регионах и интегрирована с моделями данных реанализов для расширения пространственного охвата. Результаты имеют прикладное значение при оценке энергетического потенциала ветра и предварительном зонировании территорий под объекты ВИЭ. Будущие исследования могут включать расширение методологии за счёт интеграции с данными глобальных реанализов (например, ERA5) и моделирования высотных профилей ветра для уровней 50–100 м. Это позволит использовать полученные параметры в качестве входных данных для расчёта ожидаемой энергоотдачи в установках различного масштаба и обоснованного выбора площадок для размещения объектов ВИЭ.

Поступило 17.02.2025 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Carta J.A., Ramírez P., Velázquez S. A review of wind speed probability distributions used in wind energy analysis: Case studies in the Canary Islands. – Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2009, vol. 13, № 5, pp. 933–955.
2. Seguro J.V., Lambert T.W. Modern estimation of the parameters of the Weibull wind speed distribution for wind energy analysis. – Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2000, vol. 85, №1, pp. 75–84.
3. Akdağ S.A., Dinler A. A new method to estimate Weibull parameters for wind energy applications. – Energy Conversion and Management, 2009, vol. 50, №7, pp. 1761–1766.
4. Celik A.N. A statistical analysis of wind power density based on the Weibull and Rayleigh models at the southern region of Turkey. – Renewable Energy, 2004, vol. 29, №4, pp. 593–604.
5. Mohammadi K., Mostafaeipour A. Using different methods for modelling wind power density distribution: A case study for east and southeast regions of Iran. – Energy Conversion and Management, 2013, vol. 65, pp. 463–470.
6. Hersbach H., Bell B., Berrisford P., et al. The ERA5 global reanalysis. – Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 2020, vol. 146, №730, pp. 1999–2049.
7. ECMWF. ERA5 reanalysis documentation [Electronic resource]. – URL: https://www.ecmwf.int/en/forecasts/datasets/reanalysis-datasets/era5
8. Badosa J., et al. Solar irradiance variability and consistency analysis between ground-based measurements and satellite-derived data. – Journal of Applied Meteorology and Climatology, 2013, vol. 52, №2, pp. 370–386.
9. USAID. Central Asia Wind and Solar Atlas. – United States Agency for International Development, 2020. – URL: https://www.usaid.gov/
10. Asian Development Bank. Wind Energy Resource Mapping and Renewable Energy Zoning in Tajikistan. – ADB, 2022, 89 p.
11. Nazarov A., Suleimenov B., Tulegenov A., et al. Wind energy assessment in Kazakhstan based on ground measurements and satellite data. – Energy Policy and Technology, 2021, vol. 8, №3, pp. 120–134.
12. Goudarzi H., Sabzehgar R. Wind speed analysis in western Iran: Weibull parameterization and energy potential. – International Journal of Renewable Energy, 2017, vol. 12, №2, pp. 45–56.
13. Ustaoglu B., Turhan E. Estimation of wind speed distributions in Turkish mountainous terrain using multiple fitting methods. – Energy and Environment, 2020, vol. 18, №4, pp. 211–220.
14. Raza M., Ahmad A. Seasonal wind speed characteristics and modeling using different distributions: A case study from Pakistan. – Energy Studies Review, 2016, vol. 13, №1, pp. 55–66.
15. Mukhtarov K., Alimbayev T., Zhakypov Y., et al. Assessment of wind conditions in southern Kazakhstan using lidar data. – Science and Technology in Energy, 2022, vol. 6, №2, pp. 87–95.
16. World Meteorological Organization. Guide to Meteorological Instruments and Methods of Observation. WMO-No. 8. – Geneva: WMO, 2018, 8th ed., 712 p.
17. Massey F.J. The Kolmogorov–Smirnov test for goodness of fit. – Journal of the American Statistical Association, 1951, vol. 46, №253, pp. 68–78.
18. Efron B., Tibshirani R.J. An Introduction to the Bootstrap. – New York: Chapman & Hall/CRC, 1993, 436 p.

19. Scott D.W. Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization. – Wiley-Interscience, 1992, 384 p.

У.Мадвалиев, Н.И.Усмонзода*, А.Р.Рустамзода, М.А.Кудусов

БАҲОДОДИ ПАРАМЕТРИИ ТАҚСИМОТИ МАВСИМИИ СУРЪАТИ БОДИ РӮИЗАМИНӢ БО ИСТИФОДА АЗ МАЪЛУМОТИ METAR ДАР ФУРУДГОҲИ «ХУҶАНД»

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,
Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умаров АМИТ,
****Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи академик Б. Ғафуров***

Таҳлили маҷмӯии сохтори мавсимии суръати боди рӯизаминӣ дар асоси маълумоти METAR, ки дар фурудгоҳи «Хуҷанд» (Тоҷикистон) аз соли 2015 то 2024 ҷамъоварӣ шудааст, гузаронида шуд. Барои тавсифи тақсимоти шамол тақсимоти дупараметраи Вейбулл истифода гардид, ки параметрҳои он бо усулҳои эҳтимолияти максималӣ, моментҳо ва квадратҳои хурдтарин баҳо дода шуданд. Алгоритмҳои хориҷ намудани нуқтаҳои ғайримуқаррарӣ (аномалӣ) ва дискретонии адаптивӣ (бо усули Фридман–Дяконис) татбиқ гардиданд. Муқоисаи мавсимии дақиқии моделҳо бо меъёри RMSE сурат гирифт, ки хатоҳо ва параметрҳои он дар шакли харитаҳои ҳароратӣ, инчунин графикҳои Q–Q таҷассум ёфтанд. Усули эҳтимолияти максималӣ дар ҳамаи фаслҳо мутобиқати беҳтаринро бо маълумоти таҷрибавӣ таъмин намуд. Маълум гашт, ки реҷаи шамол дар зимистон ва тобистон бо устувории баландтар, вале дар фаслҳои баҳору тирамоҳ бо ноустувории турбулентӣ тавсиф мешавад. Натиҷаҳои пешниҳодшуда метавонанд барои асосноксозии минтақаҳои дорои иқтидори баланди бодӣ ва дақиқ кардани параметрҳои ҳисобнамоии самаранокии энергетикӣ дар марҳилаҳои аввали тарроҳии иншооти манбаъҳои барқароршавандаи энергия истифода гарданд.

Калимаҳои калидӣ: *тақсимоти Вейбулл, суръати боди рӯизаминӣ, METAR, таҳлили мавсимӣ, усули эҳтимолияти максималӣ, иқтидори энергетикии бод.*

U.Madvaliev, N.I.Usmonzoda*, A.R.Rustamzoda, M.A.Kudusov

PARAMETRIC ASSESSMENT OF SEASONAL DISTRIBUTIONS OF SURFACE WIND SPEED BASED ON METAR DATA FROM KHUJAND AIRPORT

National Academy of Sciences of Tajikistan,
S. U. Umarov Physical-Technical Institute of the NAST
****Khujand State University named after academician B.Gafurov***

This study presents a comprehensive analysis of the seasonal structure of surface wind speed based on METAR data collected at Khujand Aerodrome (Tajikistan) from 2015 to 2024. The two-parameter Weibull distribution was used to approximate the empirical wind speed distributions, with parameter estimation performed using maximum likelihood (MLE), moments (PCTL), and least squares (LSQ) methods. Outlier filtering via the IQR method and adaptive bin selection using the Freedman–Diaconis rule were applied to improve

robustness. Seasonal model accuracy was compared using RMSE, with results visualized through heatmaps and Q–Q plots. The MLE method demonstrated the best fit in all seasons. The shape parameter indicated greater wind regularity in summer and winter, while spring and autumn were marked by increased turbulence. The findings can support wind potential zoning and early-stage estimation of energy yield in wind power project planning.

Key words: *Weibull distribution, surface wind speed, METAR, seasonal analysis, maximum likelihood estimation, wind energy potential.*

Сведения об авторах:

1. **Мадвалиев Умархон** — д.ф.-м.н., член-корр. НАН Таджикистана, главный научный сотрудник, Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана. E-mail: umarkhon@mail.ru;
2. **Усмонзода Нилуфар Илхом** — преподаватель кафедры теории физики, Худжандский государственный университет им. академика Б.Гафурова. E-mail: nilufar.kuchkorova.94@mail.ru;
3. **Рустамзода Аъзам Рустам** — научный сотрудник, Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана. E-mail: muqumov@physics.msu.ru;
4. **Кудусов Мансур** — младший научный сотрудник, Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАН Таджикистана. E-mail: m.kudusov@systemavto.tj.

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

УДК 539.01-539.12;621.039
Специальность: 1.4.4. Физическая химия

А.Ш.Насруллоев, К.О.Бобоев, Дж.Н.Эшов, Б.Б.Баротов, И.Мирсаидзода

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ТЕРМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАНОВЫХ РУД ТАДЖИКИСТАНА

Национальная академия наук Таджикистана,
Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана У. Мирсаидовым 04.06.2024 г.)

Приводятся результаты исследований дифференциально- термического анализа урановых руд Таджикистана. Предложены способы разложения урановых руд различных месторождений Таджикистана в соответствии с их минералогическим составом.

Ключевые слова: *дериватограмма, анализ, руда, минералы, карбонат, силикат, уран, месторождение.*

Поиски промышленных урановых руд в Таджикистане начались в послевоенные годы и вскоре увенчались открытием целого ряда месторождений. До этого момента на севере республики с 1926 года было известно месторождение Табошар, из руды которого, содержащей не только уран, периодически добывался радий. В 1940 году наличие урана было также установлено на месторождении Адрасман, где с середины 30-х годов прошлого века добывался висмут [1].

Как известно, дифференциально-термический анализ (ДТА) является наиболее распространённым методом термического анализа из-за широкого спектра получаемой информации [2-4].

В настоящей работе при помощи ДТА изучены урановые руды месторождений Таджикистана: «Восточный Памир-1», «Западный Таджикистан», «Центральный Таджикистан», «Северный Таджикистан-2» и дана оценка превращения минералов, находящихся в указанных рудах.

Для работы использовали дериватограф «Labsys Evo-1600» фирмы «Setaram». «LabSys Evo» – современный дериватограф (синхронный термический анализатор). Он совмещает в себе одновременное проведение термогравиметрии и дифференциальной сканирующей калориметрии (ТГА-ДТА/ДСК, TG-DTA/DSC) и обладает наилучшей чувствительностью и точностью анализа. «LabSys Evo» – дериватограф с TG весами точностью 0.01 мг и 3D (Calvet) DSC сенсором теплоты, печью с обогревом до 1600°C и водяным охлаждением. Чувствительность 3D сенсора 0.5 мВ/мВт, высокая скорость нагрева/охлаждения печи 100°C/мин (минимальная 0.1°C/мин), точность измерения C_p достигает значения 2% во всём температурном диапазоне. 3D C_p (Calvet) сенсор состоит из 10 термопар, полностью окружающих образец. Имеется возможность использовать корундовые и платиновые тигли объёмом

Адрес для корреспонденции: *Бобоев К.О, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана. E-mail: boboyev.komron@bk.ru.*

0.1 мл при различных газовых средах (воздух, азот, кислород, гелий, аргон, водород и др. или их смеси). Скорость нагрева составляла 10°С/мин.

Дифференциально-термический анализ (ДТА) образцов урансодержащей руды месторождения «Центральный Таджикистан» отображён на рисунке 1. Согласно расположению термических кривых, в урансодержащей руде основными минералами являются: доломиты, слюды, кварцы, каолиниты.

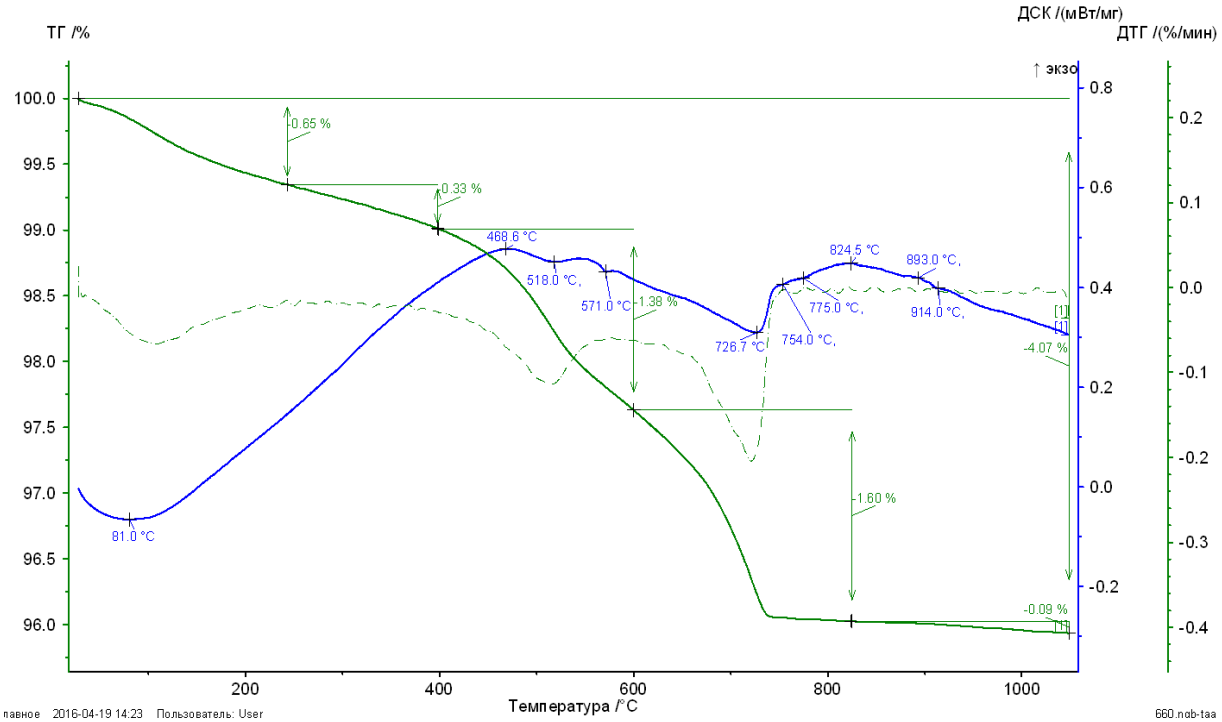

Рис. 1. Термограмма образцов урансодержащей руды месторождения “Центральный Таджикистан”.

Карбонаты (доломиты). Как можно увидеть из рисунка 1, в диапазоне t, составляющем от 650 до 800°С, пик эндоэффекта заметно проявлен на линии ДСК, его проявление вызывает термическая ассоциация минерала доломита, который входит в состав исследуемой руды. Данный эндоэффект достигает максимума при t=726.7°С. Также на линиях ДСК (дифференциально-сканирующая калориметрия) отчётливо виден незначительный эндоэффект, происходящий при t=775°С.

Слюда. На линиях ДСК отчётливо проявляется значительный эндоэффект при t=1000°С, который связан с разложением кристаллической решётки слюды и удалением конституционной воды из состава слюды. Также отмечен незначительный экзоэффект при t=824.5°С, который указывает на окисление железа из состава слюды.

Кварц. Его присутствие в урансодержащей руде идентифицировали согласно пика на рисунке 1, который проявился при t=571°С. Данный пик характеризует переход α-формы кварца в его β-форму.

Каолинит. На кривых линиях при ДТА анализе отражаются три эффекта, из которых два – это эндоэффекты, проявление которых происходит при t=81 и 518°С, а один эффект относится к экзоэффекту – он проявляется при t=893°С. Первый эндоэффект характеризует слабую структуру каолинита, он происходит при удалении с поверхностного слоя каолинита молекул адсорбированной воды, при этом отмечается незначительная потеря массы образца руды, составляющая ~ 0.65%. Следующий эндоэффект при t=518°С отмечен при дегидроксилизации минерала каолинита, при этом потеря массы образца руды составляет 1.38% в диапазоне t от 400 до 600°С. При пересчёте на чистый каолинит

потери составляют 9.9%. Экзоэффект, проявившийся на линии ДТА при t=893°C свидетельствует об образовании фазы шпинели в каолините и дисперсности минерала каолинита.

Дифференциально-термический анализ образцов урансодержащей руды месторождения «Восточный Памир-1» отображён в рисунке 2. Согласно расположению термических кривых, в урансодержащей руде основными минералами являются кальцит, доломиты и слюды.

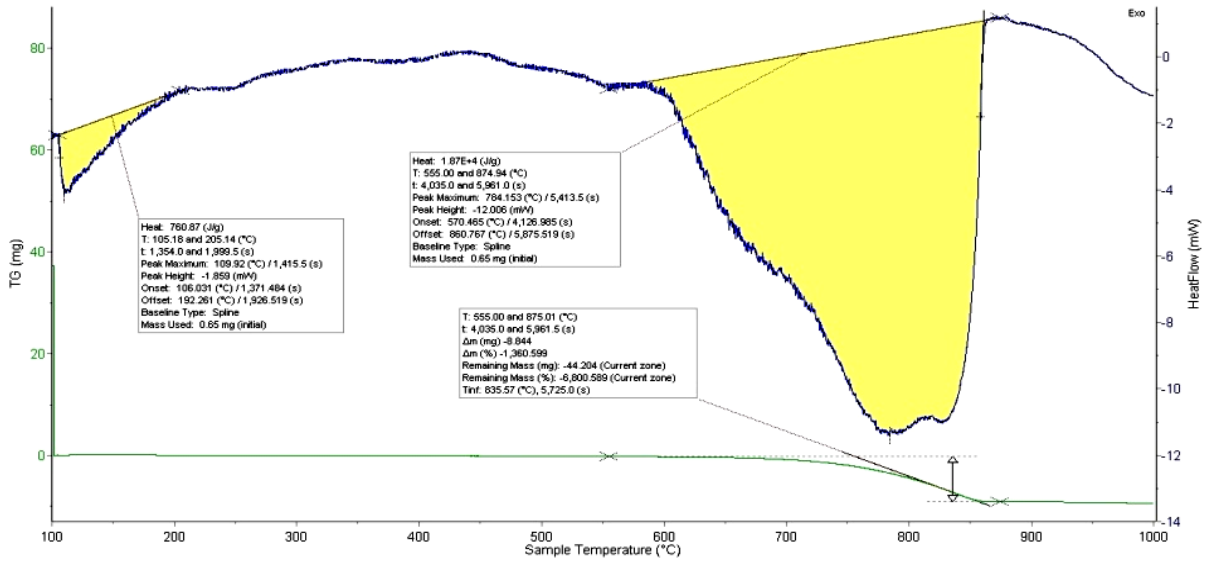

Рис. 2. Дериватограмма пробы месторождения «Восточный Памир-1»
(нагрев до 1000°C, при скорости 10 К/мин в течении 1 ч, 30 мин, масса навески 0.65 мг).

Соответственно, как показывают кривые ДТА, урансодержащая руда месторождения «Восточный Памир-1» по своим минералогическим характеристикам относится к карбонатному и для её выщелачивания целесообразно применять карбонаты щелочных металлов.

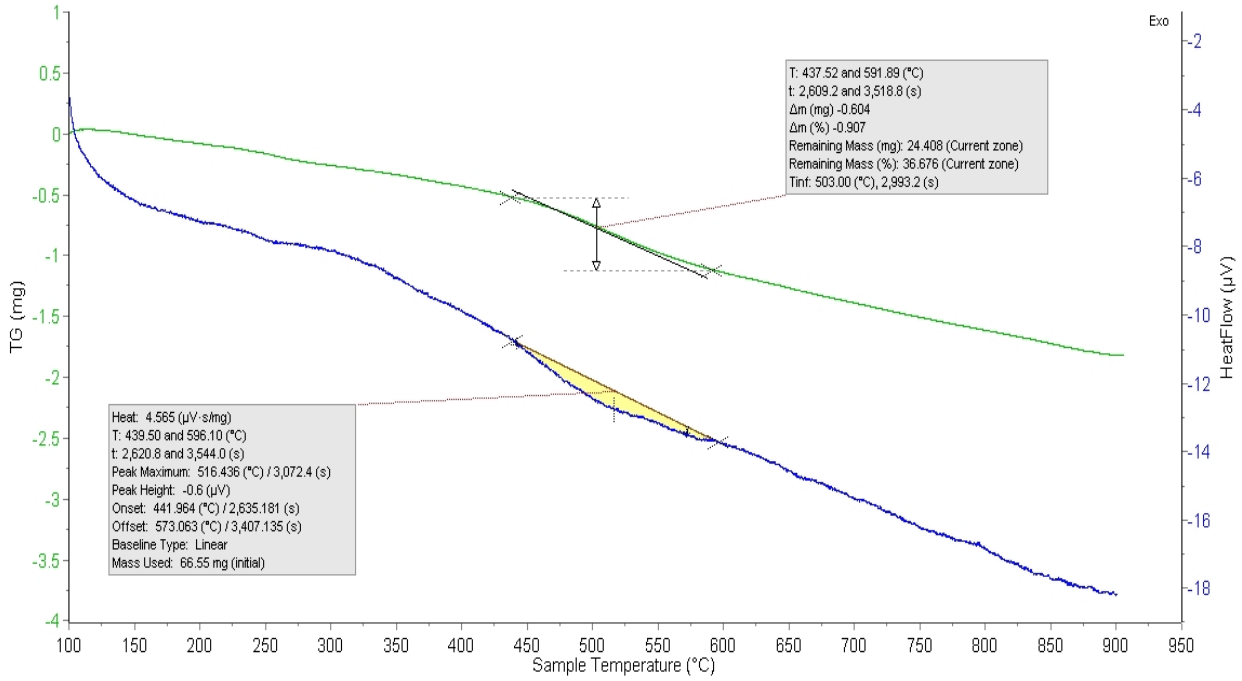

Рис. 3. ДТА руды месторождения “Западный Таджикистан”.

Для урансодержащей руды из месторождения “Западный Таджикистан” также был проведён ДТА анализ, результаты которого приведены на рисунке 3. Состав минералов этого месторождения трудно идентифицировать по полученным кривым ДТА. В этих рудах, по-видимому, содержится большое количество кварца (свыше 50%), незначительное количество каолинита, урансодержащие минералы находятся в малых количествах, поэтому не обнаруживаются в кривых ДТА. Как видно из рисунка 3, в широком эндоэффекте при 450-600°С происходит дегидроксилизация каолинита.

На рисунке 4 представлены кривые ДТА урансодержащей руды месторождения “Северный Таджикистан-2”. В данной термограмме мы наблюдаем эндоэффект при 450-550°С, который также связан с превращением каолинита.

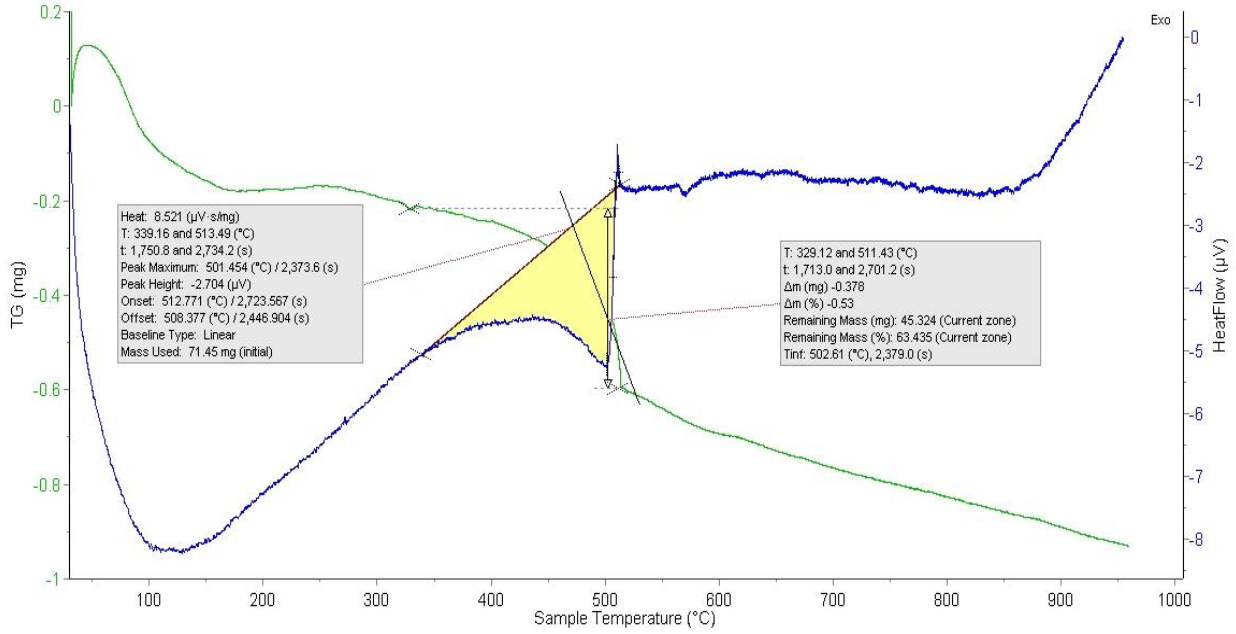

Рис. 4. ДТА руды месторождения «Северный Таджикистан-2»

В урановых рудах месторождений “Западный Таджикистан” и “Северный Таджикистан-2” не наблюдается α- и β-перехода кварца, а также ДТА показывает отсутствие карбонатных соединений.

Соответственно, как показывают кривые ДТА, урансодержащая руда месторождения «Центральный Таджикистан» и «Восточный Памир-1» по своими минералогическими характеристиками относятся к карбонатному сырью, поэтому для их переработки целесообразно применять карбонатный способ выщелачивание. Для урановых руд месторождений “Западный Таджикистан” и “Северный Таджикистан-2” предлагается сернокислотный способ переработки сырья.

З а к л ю ч е н и е

Проведённые дифференциально-термические анализы урансодержащих руд Таджикистана показали, что по минералогическому составу урановые руды месторождений Таджикистана относятся в основном к силикатным и карбонатным.

Поступило 11.06.2024 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Разыков З.А., Гусаков Э.Г., Марущенко А.А., Ботов А.Ю., Юнусов М.М. Урановые месторождения Таджикистана. – Худжанд: ООО «Хуросон», 2001, 212 с.
2. Шестак Я. Теория термического анализа: Физико-химические свойства твёрдых неорганических веществ. – Thermophysical properties of solids: Therir measurements and theoretical thermal analysis / Пер. с англ. — М.: Мир, 1987, 456 с.
3. Егунов В. П. Введение в термический анализ: монография. – Самара, 1996, 270 с.
4. Харрингтон, Н. И. Технология производства урана. – М.: Госатомиздат, 1961, 586 с.

А.Ш.Насруллоев, К.О.Бобоев, Ҷ.Н.Эшов, Б.Б.Баротов, И.Мирсаидзода

ТАҲЛИЛИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ТАҶЗИЯИ МАЪДАНҲОИ УРАНИИ ТОҶИКИСТОН

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии АМИ Тоҷикистон

Натиҷаҳои тадқиқоти дифференсиалии ҳароратии маъданҳои урании Тоҷикистон пешниҳод карда шудаанд. Усулҳои таҷзияи маъданҳои урании конҳои гуногуни Тоҷикистон мувофиқи таркиби минералогиашон пешниҳод карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: *дериватограмма, таҳлил, маъдан, карбонат, силикат, уран, кон.*

A.Sh.Nasrulloev, K.B.Boboev, J.N.Eshov, B.B.Barotov, I.Mirsaidzoda

DIFFERENTIAL THERMAL ANALYSIS OF URANIUM ORES OF TAJIKISTAN

National Academy of Sciences of Tajikistan,

Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety and Security Agency, NAS of Tajikistan

The results of studies of differential thermal analysis of uranium ores in Tajikistan are presented. Methods have been proposed for the decomposition of uranium ores from various deposits of Tajikistan in accordance with their mineralogical composition.

Key words: *Derivatogram, analysis, ore, minerals, carbonate, silicate, uranium, deposit.*

Сведения об авторах:

1. **Насруллоев Асомуддин Шарифович** – Агенство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, докторант PhD. E-mail: nasrulloevasomuddin@gmail.com;
2. **Бобоев Комрон Одилович** – Агенство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, научный сотрудник. E-mail: boboyev.komron@bk.ru;
3. **Эшов Джурамурод Нурмуродович** – Агенство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, старший научный сотрудник. E-mail: j.eshov@cbrn.tj;
4. **Баротов Бахтиёр Бурхонович** – кандитат технических наук, Агенство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, заместитель директора по науке, образование, обучение и технических услуг. E-mail: b.barotov@cbrn.tj;
5. **Мирсаидзода Илхом** – доктор технических наук, профессор, Агенство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, директор. E-mail: i.mirsaidzoda@cbrn.tj.

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

УДК 662.73:547.992.2:631.811.98
Специальность: 1.4.4. Физическая химия

М.Д.Исобаев, С.И.Рустамзода, Ш.А.Мингбоев, М.Д.Давлятназарова

ОРГАНО-МИНЕРАЛЬНЫЕ КОМПОНЕНТЫ БУРЫХ УГЛЕЙ. 1. ВЫЩЕЛАЧИВАНИЕ ГУМИНОВЫХ КИСЛОТ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Национальная академия наук Таджикистана,
Институт химии им. В.И. Никитина НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 02.12.2024 г.)

Проведен сравнительный анализ процесса выщелачивания гуминовых кислот при нормальной и экстремальной температурах. В условиях повышенного атмосферного давления (1.5 атм.) закрытой системы увеличен верхний температурный предел реакционной массы до 110°С. При этом отмечено сокращение времени достижения равновесия и увеличение выхода конечного продукта. Разработана методика контроля процесса накопления гуминовых кислот с использованием спектрофотометрического анализа.

Ключевые слова: *бурый уголь, гуминовые кислоты, выщелачивание. спектрофотометрический анализ.*

Важным составляющим компонентом угля являются органические кластеры, позволяющие при определенных условиях получать из угля ценные продукты, такие как химические реактивы и полупродукты для химической промышленности. Технология глубокой переработки предполагает значительное расширение ассортимента полезных веществ [1-3], выделенных из угля, в число которых входят гуминовые кислоты (ГК), являющиеся стимуляторами роста и развития сельскохозяйственных культур [4].

Проведенные исследования по содержанию ГК в углях месторождений Таджикистана показали, что основные месторождения с большими разведанными запасами угля, такие как «Зидди», «Фан Ягноб» и «Назар Айлок» не содержат ГК в достаточном количестве и не могут быть использованы для промышленной переработки с целью получения ГК.

Биологическая активность ГК с точки зрения влияния на урожайность сельскохозяйственных культур наиболее полно исследованы в регионах, где содержание гумуса в почве достаточное для хорошего плодородия [5] и внесение ГК не является актуальным.

Для почвенного покрова на лессовой основе, как в случае природных условий Таджикистана, внесение дополнительных удобрений типа ГК является актуальным и крайне необходимым.

Адрес для корреспонденции: *Исобаев Музафар Джумаевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни 299/2, Институт химии имени В.И. Никитина НАНТ. E-mail: coordin@yandex.ru.*

До последнего времени этому вопросу не уделялось должного внимания вследствие отсутствия надежного источника ГК.

В связи с этим, в лаборатории органического синтеза Института химии им. В.И. Никитина Национальной академии наук Таджикистана, в рамках проекта Министерства экономики и торговли РТ: «Разработка инновационных технологий синтеза биологически активных веществ на основе ацетиленовых производных и выделенных из природных источников», рег.№ 0121TJ 1153 от 05.04.21, проведены НИР по разработке технологии глубокой переработки угля месторождений Таджикистана с целью выделения биологически активных веществ из углей, месторождений с небольшой мощностью пластов угля, среди которых перспективным в этом плане, по данным проведенных анализов является месторождение «Шишкат», расположенное на севере Таджикистана, в Согдийской области.

На месторождении «Шишкат» выявлен угольный пласт мощностью 2-2.5 м, который находится в нижней части терригенно-угленосной формации юрского периода. Общая мощность юрских отложений данного месторождения составляет 45-50 м.

По литературным данным [6] угли имеют теплотворность в расчете на сухую массу 7000 ккал/кг до 21-23% зольности и от 10.8 до 16.2% летучих веществ В зоне окисления данные угли имеют высокое содержание ГК в пределах 32-52%.

Постановка на промышленную основу процессов извлечения ГК из бурых углей требует разработки экономически выгодных и эффективных технологий, позволяющих получать продукцию с наибольшим выходом конечного продукта при минимальных энергетических нагрузках.

Для оптимизации технологий извлечения ГК из бурых углей выбор соответствующих экспресс методов, позволяющих оперативно проводить кинетические исследования, является актуальной задачей. Ниже приведены разработки, направленные на интенсификацию процессов выделения ГК из бурых углей.

В работе [7] процесс выделения ГК из бурых углей Тюльганского месторождения Южно-Уральского бассейна РФ проводился путем выщелачивания ГК и последующим возвращением их в исходное состояние в индивидуальном виде при подкислении раствора солей ГК. Таким образом получены данные по зависимости выхода ГК от времени путем обработки порошка фракции угля, имеющего степень измельчения 2-5 мм. Кинетические измерения проводились в интервале температур 20-60°С, и концентраций NaOH от 1% до 16%. Показано так же, что наибольший выход продукта наблюдается при использовании 6%-ного раствора щелочи.

Исследования проводились при относительно низких температурах, вследствие чего вопрос об оптимизации временного интервала выщелачивания ГК и достижения максимального выхода конечного продукта оставался открытым.

С учетом, представленных в вышеуказанной работе данных, была поставлена цель, провести выщелачивание ГК в условиях максимально достижимых температур воздействия на реакционную массу.

В соответствии с известными законами теории растворов, в закрытой системе имеется возможность посредством повышения внешнего давления достичь необходимого уровня повышения температуры реакционной массы.

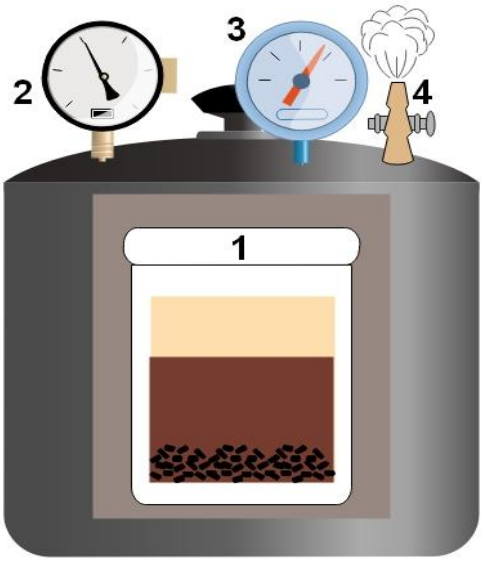

Рис. 1. Схема установки для проведения высокотемпературных исследований водных растворов ГК. Составные компоненты: 1. Реакционная камера; 2. Барометр; 3. Датчик для измерения температуры; 4. Регулятор давления внутри реакционной камеры.

Для этих целей сконструирована установка, схема которой представлена ниже, позволяющая посредством внешнего давления водяных паров, выбирать оптимальный температурный режим выщелачивания ГК.

Температура реакционной массы экспериментально определялась посредством измерения показаний термопары.

Внешнее давление водяных паров внутри закрытой системы устанавливалось посредством регулирующего клапана.

Контроль за образованием солей ГК проводился методом спектрофотомерии по изменению оптической плотности исследуемого раствора, замер которой проводился каждые 30 минут. Для перевода оптической плотности в единицы концентрации построен калибровочный график (рис. 2) в координатах: оптическая плотность-концентрация.

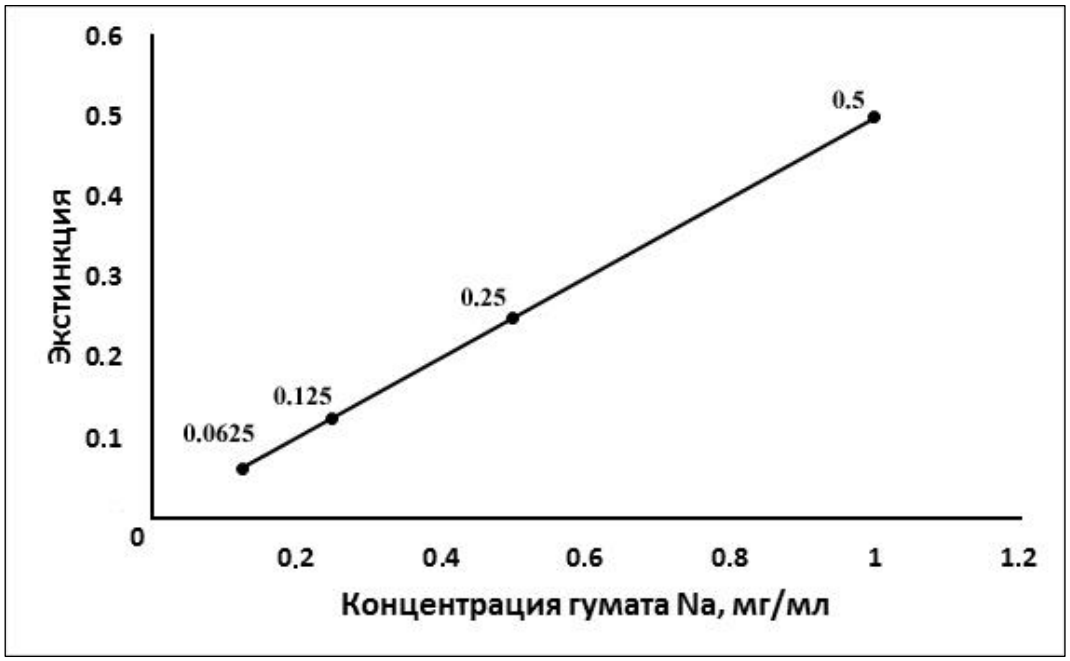

Рис. 2. Калибровочный график зависимости экстинкции раствора от концентрации гумата Na.

При построении калибровочного графика количество образовавшейся соли ГК определялось весовым методом, посредством перевода солей в соответствующие ГК, которые практически не растворимы в воде.

На рис. 3 представлены кривые кинетики выщелачивания ГК при обработке твердой измельченной массы бурого угля до размера частиц 1 мм щелочным раствором NaOH и изменении температурного режима от 25 °С до 110 °С.

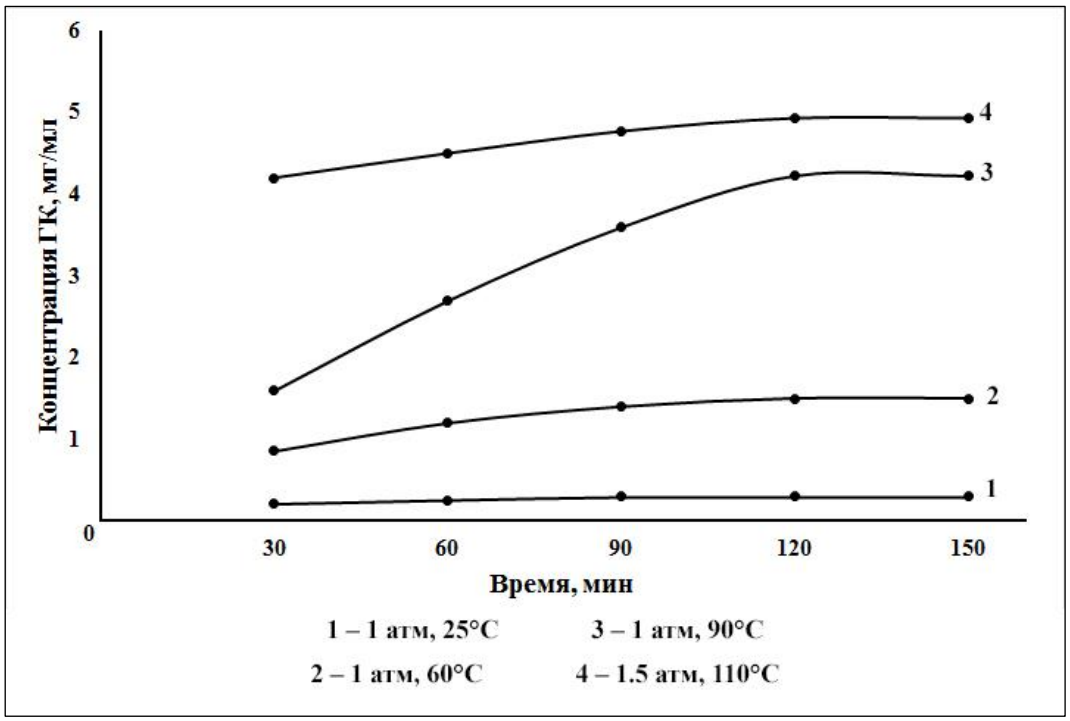

Рис. 3. Кинетика выщелачивания ГК при изменении температурного режима экстракции.

По современным представлениям о строении ГК, карбоксильные группы, связанные с ароматическим циклом, являются основными функциональными группами, участвующие в формировании вторичной структуры ГК.

В подтверждении данного постулата, при исследовании воздействия ультразвука, переменного и постоянного магнитных полей обнаружено, что в свободном состоянии ГК представляют собой высокоорганизованную структуру, стабилизированную за счет межмолекулярных водородных связей. При воздействии внешних магнитных полей и ультразвука наблюдается увеличение относительного количества свободных карбоксильных групп, что интерпретируется как разрушение вторичной структуры ГК [8].

В нашем случае повышение температуры реакционной среды имеет аналогичную направленность, то есть допускает формирование свободных карбоксильных групп, что в свою очередь, приводит к появлению новых реакционных центров взаимодействия карбоксильных групп с молекулами щелочи. В соответствии с этим повышается выход конечного продукта – солей ГК. Найдено, что максимальный выход солей ГК составляет: при температуре 25°С – 0.3 мг/мл, при 60°С – 1.5 мг/мл, при 90°С – 4.23 мг/мл и при 110°С – 4.94 мг/мл.

Приняв величину выхода ГК при температуре 110°С (4.94 мг/мл) за 100%, можно подсчитать выход солей ГК на каждой из четырех реакций, данные которых приведены в виде диаграммы на рис. 4.

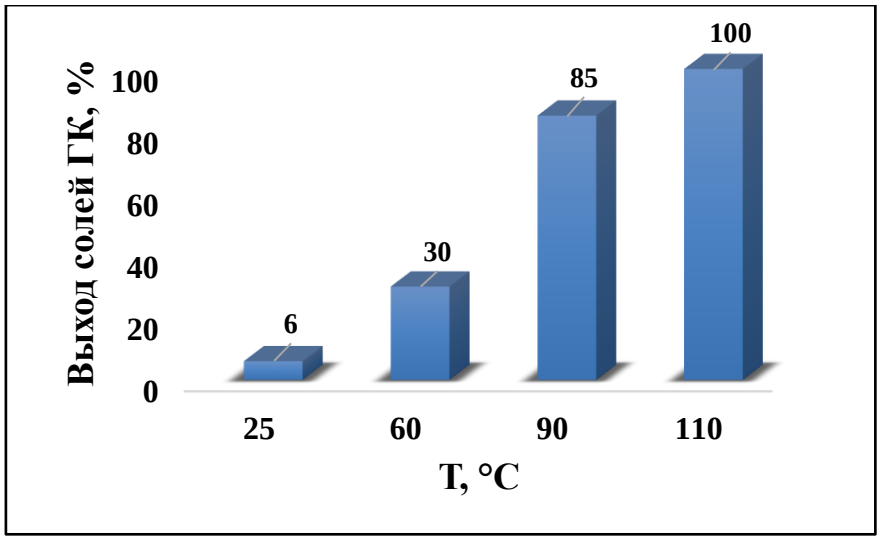

Рис. 4. Диаграмма выхода продуктов при различных температурах. 100%-ный выход соответствует T=110°C.

Из представленных в диаграмме данных следует, что повышение температурного режима выщелачивания ГК свыше 100°C позволяет получить дополнительно свыше 10% ценного биологически активного продукта, что имеет свою экономическую целесообразность и требует внести изменение в технологическую схему выделения ГК из бурых углей.

Можно легко подсчитать, что при крупно тоннажном производстве применение метода проведения экстракции ГК в экстремальных условиях позволяет получить огромные прибыли.

Поимо этого, на наш взгляд, следует внести изменения в ГОСТ 9517-94 «Твердое топлива. Метод определения выхода гуминовых кислот», разработанный соответствующими ведомствами СНГ, так как положения данного ГОСТ рассчитаны на проведение анализов при температуре водяной бани (100°C) в течение 2 ч. и не в полной мере отражают истинное содержание ГК в углях.

Поступило 15.01.2025 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исобаев М.Д., Мингбоев Ш.А., Давлатназарова М.Д. Динамика образования коксового газа из бурого угля при изменении технологического режима – Химия твердого топлива, 2019, №4, с. 67-70. – DOI 10.1134/S0023117719040078.
2. Исобаев М.Д., Давлатназарова М.Д., Мингбоев Ш.А. Использование продуктов термической обработки угля в качестве технических адсорбентов – Химия твердого топлива, 2020, №2, с. 30-33. – DOI 10.31857/S0023117720020048.
3. Исобаев М.Д., Мингбоев Ш.А., Рустамзода С.И., Давлатназарова М.Д. Получение угольного пека на основе жидких отходов газификации угля – Химия твердого топлива, 2021, №1, с. 40-43. – DOI 10.31857/S0023117721010060.
4. Кобилов Ю.Т., Пулодбекова А., Мингбоев Ш.А., Абдуллаев А. Влияние солей гуминовых кислот на энергию прорастания пшеницы (*Triticum aestivum* L.) – Известия Национальной академии наук Таджикистана. Отделение биологических наук, 2023, № 2(221), с. 52-59.
5. Новикова Е.Е., Кунцевич А.А., Сазонкин К.Д., Ручкина А.В. Влияние гуминовых кислот на повышение плодородия почвы – Инновации в сельском хозяйстве и экологии: Материалы II

Международной научно-практической конференции, Рязань, 21 сентября 2023 года – Рязанский государственный агротехнологический университет им. П.А.Костычева, 2023, с. 260-264.
6. Переясловский И.В., Махмудов Э. Шишкат – перспективное комплексное месторождение в Центральном Таджикистане. – В книге: Геология и полезные ископаемые бассейна р. Зеравшан. – Душанбе: Дониш, 1989, с. 145-149.
7. Жирнов Б.С., Хайбуллин А.А., Сычков П.А., Кулембетов Д.Ф., Тагиров М.А. Кинетика извлечения гуминовых кислот из бурого угля Тюльганского месторождения – Башкирский химический журнал, 2009, №2, с. 169-172.
8. Москаленко Т.В., Михеев В.А., Данилов О.С. Интенсификация извлечения гуминовых кислот из торфа под воздействием магнитного и ультразвукового полей – Вестник Иркутского государственного технического университета, 2011, №2 (49), с. 142-146.

М.Д.Исобаев, С.И.Рустамзода, Ш.А.Мингбоев, М.Д.Давлятназарова

КОМПОНЕНТҲОИ ОРГАНО-МИНЕРАЛИИ АНГИШТИ БУРӢ. 1. ҶУДОКУНИИ КИСЛОТАҲОИ ГУМИНӢ ДАР ШАРОИТИ ЭКСТРЕМАЛӢ

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,
Институти кимиёи ба номи В.И.Никитин АМИ Тоҷикистон

Таҳлили муқоисавии протсесси ҷудокунии кислотаҳои гуминӣ дар ҳарорати мӯътадил ва экстремалӣ гузаронида шуд. Дар шароити баланд шудани фишори атмосферии (1.5 атм.) системаи пӯшида дараҷаи баланди ҳароратии массаи реаксионӣ то 110°С зиёд карда шуд. Дар баробари ин, кӯтоҳ шудани муҳлати расидан ба мувозинат ва афзоиши баромади маҳсулоти ниҳоӣ қайд карда шуд. Бо ёрии таҳлили спектрофотометрӣ усули назорати протсесси ҷамъшавии кислотаҳои гуминӣ кор карда баромада шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *ангишти бурӣ, кислотаҳои гуминӣ, ҷудокунии кислотаҳои гуминӣ, таҳлили спектрофотометрӣ.*

M.D.Isobaev, S.I.Rustamzoda, Sh.A.Mingboev, M.D.Davlyatnazarova

ORGANO-MINERAL COMPONENTS OF BROWN COALS. 1. LEACHING OF HUMIC ACIDS IN EXTREME CONDITIONS

National Academy of Sciences of Tajikistan,
Institute of Chemistry named after V.I.Nikitin, NAS of Tajikistan

A comparative analysis of the humic acid leaching process at normal and extreme temperatures was carried out. Under conditions of increased atmospheric pressure (1.5 atm.) of a closed system, the upper temperature limit of the reaction mass was increased to 110°C. At the same time, a reduction in the time to achieve equilibrium and an increase in the yield of the final product were noted. A method for monitoring the accumulation of humic acids using spectrophotometric analysis was developed.

Key words: *brown coal, humic acids, leaching, spectrophotometric analysis.*

Сведения об авторах:

1. **Исобаев Музафар Джумаевич** – доктор химических наук, профессор, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, главный научный сотрудник. E-mail: coordin@mail.ru;
2. **Рустамзода Сухроб Истами** – Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, научный сотрудник. E-mail: srustamzoda@mail.ru;
3. **Мингбоев Шерозджон Абдуворисович** – кандидат химических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, старший научный сотрудник;
4. **Давлятназарова Мохира Давлатназаровна** – Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, старший научный сотрудник.

РАДИАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ

УДК 691-434
Специальность: 2.4.9. Ядерные энергетические установки, топливный цикл, радиационная безопасность

И.Мирсаидзода, Х.М.Назаров, Д.И.Мирзоев, М.М.Исматдинов

РАДИАЦИОННО-ЗАЩИТНЫЙ КОМПОЗИТ НА ОСНОВЕ КАЛЬЦИТА

Национальная академия наук Таджикистана,
Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана

(Представлено академиком НАН Таджикистана У.М.Мирсаидовым 12.02.2025 г.)

В данной статье приводятся результаты исследования радиационно-защитного свойства композита из местных сырьевых материалов Таджикистана. Одним из компонентов композиционного материала является кальцит – ракушечник. Ракушечник, благодаря своей пористой структуре и наличию природных компонентов, может использоваться в строительстве как дополнительный материал для защиты от радиации. Его эффективность в этом контексте обусловлена способностью поглощать и ослаблять часть гамма-излучения. Использование таких композитов перспективно для строительства различных защитных сооружений, включая кабинеты лучевой диагностики.

Ключевые слова: *ракушечник, минерал, кальцит, рациональное природопользование, композит, состав, свойства.*

Строительная отрасль сегодня использует широкий ассортимент материалов, применение многих из них стало возможным благодаря достижениям новых технологий в химической промышленности. При строительстве загородных домов во внешней отделке зданий предпочитают использовать натуральные камни. В связи с растущим спросом на загородные дома самым распространенным и недорогим материалом для строительства и оформления фасадов становится ракушечник [1].

Одним из приоритетных направлений развития современной науки является рациональное природопользование, что может быть полностью реализовано в технологии получения строительных материалов из местного сырья [2-5].

В недрах Таджикистан залегают огромные запасы минералов, такие как: барит, бентонит, кальцит и т.д. Все эти минералы используются в строительной индустрии. В связи с этим поиск строительных материалов, имеющих радиационно-защитные свойства из местного сырья, и вопросы их практического применения на сегодня становятся актуальными.

Целью исследования явилось изучение радиационно-защитных свойств композиционного материала, содержащих кальцит-ракушечник и его пригодности в качестве альтернативного материала для защиты от вредного воздействия радиации в рентгеновских кабинетах медицинских учреждений.

Объект исследования: Минерал кальцит-ракушечник, отобранный из карьера, который расположен неподалеку от города Исфары (рис. 1).

Адрес для корреспонденции: *Мирсаидзода Илхом, 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр.Рудаки, 33, Агентство по ХБРЯ безопасности НАНТ. E-mail: i.mirsaidzoda@cbrn.tj.*

По происхождению ракушечники различаются:

-оолитовый ракушечник, образованный небольшими минералами шарообразной формы, скрепленными, подобно рыбьим икринкам.

-пизолит – камень, сформированный шарообразными камешками величиной с горошину. Каждая «горошина» обладает ядром, песчинкой или частичкой ракушки.

-образованный осадочным кальцитом минерал – травертин.

а б

Рис. 1. Местоположение и координаты точки отбора проб кальцит-ракушечника: а) Село Яккачинор (Арабқишлоқ) – 70.517980E/40.166360N; б) Село Моҳпарӣ 70.585350E/40.176070N

Вид ракушечника (рис. 2) определяется этиологией и составом минеральной породы.

Рис. 2. Общий вид ракушечника

Методы исследования. В рамках исследования были подготовлены образцы камня – ракушечника для определения его радиационно-защитных свойств. Образцы были предварительно измельчены до фракции 0,074 мм для проведения детального анализа. Основные этапы испытаний включали:

- *Рентгенофазовый анализ* (РФА) материала с использованием рентгеновского дифрактометра марки «XRDynamic 500» Anton Paar, Австрия.

- *Дифференциальный термический анализ* (ДТА) для выявления термических переходов был проведён с помощью дериватографа марки «Labsys Evo-C1600» фирмы «Setaram Instrumentation», Франция.

- *Радиационно-защитные свойства композита* для определения коэффициента ослабления гамма- и рентгеновского излучения и оценки эффективности образца проводили с применением

дозиметра ДКС АТ 1121 (Республики Беларусь), на расстоянии 1 см от рентгеновского аппарата марки SF-80, Япония.

Подготовка смеси: Исходный измельченный кальцит-ракушечник смешивали с связующим компонентом в соотношении 75% (кальцит-ракушечник), 15% (портландцемент марки М-500) и 10% (воды). Полученная смесь была насыпана в прессовочную форму и запрессована под давлением. Спрессованный композит в виде плит толщиной 10 и 20 мм высушивался для удаления избыточной влаги.

Р е з у л ь т а т ы и и х о б с у ж д е н и я

По результатам рентгенофазового анализа (рис. 3) образца ракушечника установлено, что кальцит ($CaCO_3$) – основная фаза (91.3% по массе), с высоким вкладом в интенсивность пиков. Цинцит (ZnO) – вторичная фаза (6.3%), характеризующаяся определёнными пиками на диаграмме. Рутил (TiO_2) – небольшое количество (2.4%), что подтверждается слабыми пиками. График интенсивности демонстрирует распределение пиков, соответствующих этим фазам, в зависимости от угла 2θ. Анализ подтверждает преобладание кальцита в структуре. Сравнивая химический состав ракушечника, можно заметить, что он близок к кальциту (CaO 56%, CO_2 44.0%).

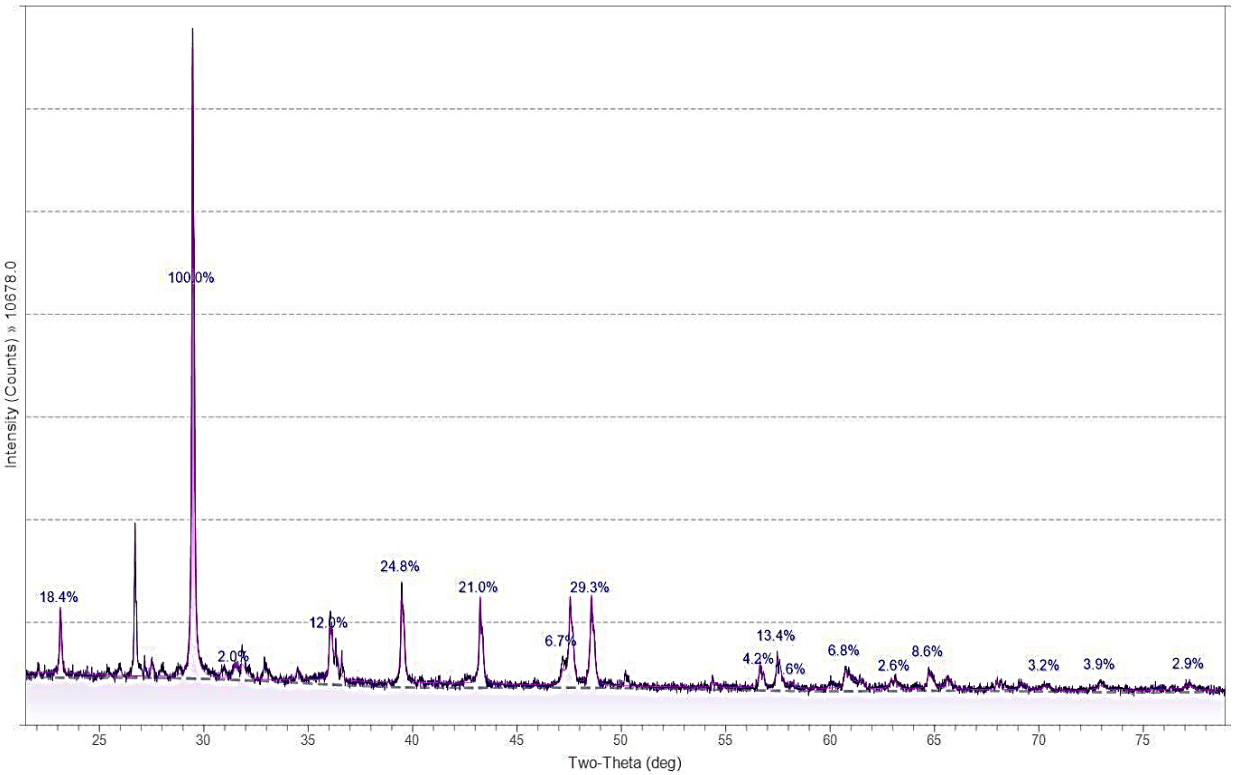

Рис. 3. Рентгеновский дифрактометрический анализ кальцит-ракушечника

На рис. 4 представлены термические кривые кальцит-ракушечника где наблюдается изменение массы образца (1) в зависимости от температуры и термических превращений (2).

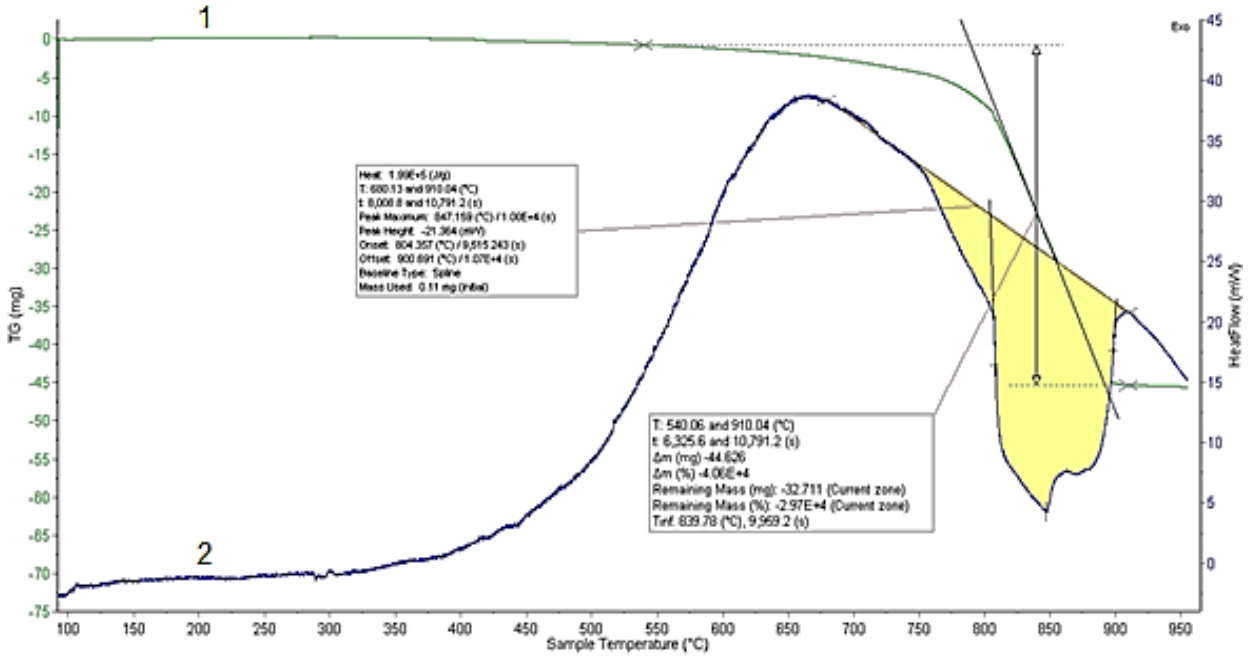

Рис. 4. Термические кривые кальцит-ракушечника

На термических кривых кальцит-ракушечника, наблюдается эндотермический эффект при 847.159°C (выделение кристаллизационной воды). При этом убыль массы составляет 44.626 мг (4.06%). Показаны процессы разложения кальцит-ракушечника, сопровождающиеся выделением тепла, который составляет $1.99 \cdot 10^5$ Дж/г (экзотермическая реакция).

Испытание радиационно-защитных свойств образцов проводили при максимальном напряжении 70 кВт/200 мА, 80 мс. В ходе испытания дозиметр был изолирован свинцовым листом от попадания остаточных и отраженных излучений. При этом среднее фоновое значение гамма-излучения в рентгеновском кабинете составляло 0.25 мкЗв/час. Мощности дозы излучения радиационного источника в среднем составляло 1770 мкЗв/час. Полученные результаты обобщены в табл. 1.

Таблица 1

Линейный коэффициент ослабления рентгеновского излучения (мкЗв/час)

Фоновое значание рентгеновского кабинета	Мощность дозы источника	Толщина плит, мм	
		10	20
0.25	1770	105	6.5

Анализ полученных результатов показал, что образец композита с толщиной 20 мм имеет наименьший (6.5 мкЗв/час) линейный коэффициент ослабления рентгеновского излучения. Уменьшение мощности дозы излучения радиационного источника в 273 раза, что свидетельствует о его превосходящих радиационно-защитных свойствах. Установлено, что результаты испытаний зависят от плотности и минерального состава кальцита. Композит, обладающий высоким содержанием кальцита и плотной структурой, способен обеспечивать более высокую степень радиационной защиты.

З а к л ю ч е н и е

Полученные результаты позволяют прийти к выводу о применимости исследованного композита в качестве альтернативного материала для рентгенозащитных перегородок и экранов. Кроме того,

кальцит-ракушечник, расположенный на территории города Исфары можно использовать в качестве основы для разработки новых видов строительных материалов.

Благодарности

Авторы выражают благодарность сотрудникам лаборатории Агентства по ядерной и радиационной безопасности НАН Таджикистана и рентгенологу ЧДММ «Наргиз» г.Худжанд Усмонову Илхомджону Исломджоновичу за активное содействие и помощь при проведении необходимых испытаний.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болотин А.В., Лунегова А.А., Жукова Г.Г., Овсянникова Д.Н. К вопросу о применении ракушечника в строительстве. – Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура, 2019, т.10, №3, с.61-75.
2. Мирзоев Д.И., Назаров Х.М., Тиллобоев Х.И., Бобоев Б.Д. Композиция для покрытия поверхности радиоактивного хвостохранилища. – Учёные записки ХГУ. Серия естественные и экономические науки, 2020, №4 (55), с.48-52.
3. Назаров Х.М., Мирзоев Д.И. Особенности формирования радиационно-защитных композиционных материалов. – Мат-лы Междунар. науч.-практ. конф. “Использование природных ресурсов, экология и устойчивое развитие” – Бустон, ГМИТ, 2022, с.32-36.
4. Мирсаидзода И., Назаров Х.М., Мирзоев Д.И., Бобоев Б.Д. Композиция для снижения эксхаляции радона. – Мат-лы респуб. науч.-практ. конф. «Инновационное развитие науки». – Душанбе, Государственное научное учреждение «Центр исследования инновационных технологий», 2020, с.109-111.
5. Мирсаидзода И., Мирзоев Д.И., Назаров Х.М., Баротов Б.Б., Хомидов Ф.А., Муродов Ш.Р., Мирсаидов У. Сухая отделочная строительная смесь (варианты). – Малый патент Республики Таджикистан №TJ 1222, МПК G21F1/10, 2021, Бюл.178, 10 с.

И.Мирсаидзода, Х.М.Назаров, Д.И.Мирзоев, М.М.Исматдинов

КОМПОЗИТИ АЗ РАДИАТСИЯ МУҲОФИЗАТКУНАНДА ДАР АСОСИ КАЛСИТ

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии АМИ Тоҷикистон

Дар ин мақола натиҷаҳои таҳқиқоти хосиятҳои композити аз радиатсия муҳофизаткунанда дар асоси ашёи хоми махаллӣ Тоҷикистон сохташуда оварда шудааст. Яке аз компонентҳои маводи композитсионӣ калсит мебошад. Ҷинсҳои сангин аз сабаби сохтори ковок ва мавҷудияти компонентҳои табиӣ метавонанд дар сохтмон ҳамчун маводи иловагӣ барои муҳофизат аз радиатсия истифода шаванд. Самаранокии он дар ин замина ба қобилияти азхуд кардан ва суст кардани як қисми радиатсияи гамма вобаста аст. Истифодаи ин гуна композитҳо барои сохтани иншоотҳои гуногуни мухофизатӣ, аз чумла кабинетҳои радиология перспективанок аст.

Калимаҳои калидӣ: *сангҳои сангӣ, минерал, калсит, идоракунии муҳити зист, таркиб, таркиб, хосиятҳо.*

I.Mirsaidzoda, Kh.M.Nazarov, D.I.Mirzoev, M.M.Ismatdinov

RADIATION PROTECTIVE COMPOSITE BASED ON CALCITE

National Academic Sciences of Tajikistan,

Chemical, biological, radiological and nuclear Safety and Security Agency, NAS of Tajikistan

This paper presents the results of a study of the radiation protective properties of a composite made from local raw materials in Tajikistan. One of the components of the composite material is calcite – shell rock. Shell rock, due to its porous structure and the presence of natural components, can be used in construction as an additional material for protection against radiation. Its effectiveness in this context is due to its ability to absorb and attenuate part of the gamma radiation. The use of such composites is promising for the construction of various protective structures, including radiology rooms.

Key words: *shell rock, mineral, calcite, environmental management, composite, composition, properties.*

Сведения об авторах:

1. **Мирсаидзода Илхом** – доктор технических наук, профессор, Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана, директор. E-mail: i.mirsaidzoda@cbrn.tj;
2. **Назаров Холмурод Марипович** – доктор технических наук, профессор, Филиал Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана, заместитель директора. E-mail: holmurod18@mail.ru;
3. **Мирзоев Далер Иномжонович** – кандидат технических наук, Филиал Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана, старший научный сотрудник. E-mail: daler-mirzoev-2014@mail.ru;
4. **Исматдинов Муминжон Мухамадович** – Филиал Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана, научный сотрудник. E-mail: muminjon4141@gmail.com.