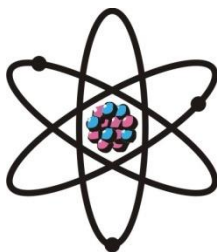


ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Журнал основан
в январе 1952 г.



№ 2 (151)
2013 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

М.И.Илолов – главный редактор, академик, доктор физико-математических наук, профессор; **С.О.Одинаев** – зам.главного редактора, академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Н.Г.Сапожников** – ответственный секретарь; **Х.М.Ахмедов** – академик, доктор химических наук; **П.Б.Бабаджанов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **Р.М.Марупов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **Х.Х.Муминов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Д.Усманов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

П.З.Рахмонов. Обобщённая тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми.....	7
М.Азизов, М.Пулатов. Точные значения n -поперечников некоторых классов функций, возникающих при решении задач уравнений математической физики	17
С.А.Алигаваров. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций двух переменных, задаваемых модулями непрерывности	28
К.К.Палавонов. О наилучшем приближении периодических функций и значениях поперечников функциональных классов в L_2	40

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОЛОГИЯ

Ф.С.Комилов, И.Л.Косимов. Имитационное моделирование рыбной популяции экосистемы пруда 52

ФИЗИКА

К.Комилов, А.К.Зарипов. Уравнения для бинарной плотности и бинарного потока частиц электропроводящих магнитных жидкостей 65

И.Х.Юсупов, А.Д.Бахдавлатов, Р.Марупов, Т.Шукуров. Исследование молекулярной динамики лекарственного растения родиолы холодной (*Rhodiola gelida schrenk*) методом спиновой метки 70

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

У.М.Мирсаидов, П.М.Ятимов, Э.Д.Маматов, З.В.Кобулиев, Ш.Б.Назаров. Хлорирование предварительно обожженного концентрата данбурита и расчёт кинетических параметров 79

О.Шамсара, З.К.Мухидинов, Д.Т.Бобокалонов, С.Р.Усманова, Л.Ш.Лиу. Формирование микрокапсул на основе высокометилированных пектинов и лактоглобулинов молочной сыворотки 85

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

М.И.Дёгтев, Е.М.Нечаева, А.А.Аминджанов, В.В.Фотин. Производные пиразолона в химии экстракции ртути (II) из хлоридных растворов..... 93

МЕТАЛЛУРГИЯ

Ю.Я.Валиев, М.А.Исроилов, Х.Э.Бобоев, Р.М.Бахретдинов, А.Х.Сафиев, Х.Сафиев. Исследование процесса извлечения водорастворимых солей из отработанных катодных и бортовых блоков электролизёров производства алюминия 101

ГЕОЛОГИЯ

А.Н.Колчин, А.Р.Файзиев. Корреляция нижнепермских кольцевых депрессионных структур Карамазара по вулканогенным толщам..... 106

ТЕХНИКА

Д.Рузиев. Оценка уязвимости крупнопанельных жилых зданий г. Душанбе по результатам натуральных обследований 118

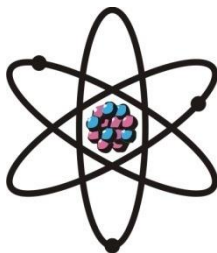
ХРОНИКА

К 100-летию со дня рождения И.А.Глухова..... 125

НОВЫЕ КНИГИ 126

**ШҮҮЪБАИ
ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,
ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА**

Маҷалла аз моҳи
январӣ соли 1952
нашр мешавад



№ 2 (151)
с. 2013

ҲАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:

М.И.Илолов – сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **С.О.Одинаев** – муовини сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Г.Сапожников** – котиби масъул; **Ҳ.М.Аҳмедов** – академик, доктори илми химия; **Р.Б.Бобочонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **И.Н.Ғаниев** – академик, доктори илми химия, профессор; **Р.М.Маърупов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор; **Х.Х.Муминов** – узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **С.Х.Неъматуллоев** – академик, доктори илмҳои техника; **З.Ҳ.Раҳмонов** – узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Рачабов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҷ.Усмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **А.Р.Ғайзиев** – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва минералогия, профессор; **Ҷ.Х.Холиқов** – академик, доктори илми химия, профессор.

МУНДАРИҶА

МАТЕМАТИКА

- П.З.Раҳмонов.** Муаммои тернарии Эстерман барои дараҷаҳои ғайрибутун бо чамъшавандаҳои қариб баробар 7
- М.Азизов, М.Пулатов.** Қимати аниқи n -кутрҳо барои баъзе синфи функсияҳо, ки дар ҳалли масъалаҳои муодилаҳои физикаи математикӣ пайдо мешаванд..... 17
- С.А.Алигаваров.** Беҳтарин формулаҳои кубатурӣ барои баъзе синфҳои функсияҳои дугағйирёбанда, ки бо модули бефосилагӣ дода шудаанд..... 28
- К.К.Палавонов.** Оид ба наздиккунии беҳтарини функсияҳои даврӣ ва қимати аниқи кутрҳои баъзе синфи функсияҳо дар L_2 40

ЭКОЛОГИЯИ МАТЕМАТИКӢ

Ф.С.Комилов, И.Л.Қосимов. Тархрезии тақлидии популятсияи моҳиҳои экосистемаи ҳавз..... 52

ФИЗИКА

К.Комилов, А.К.Зарипов. Муодилаҳо барои зичии бинарӣ ва сели бинарии зарраҳои моеъҳои магнитии электроноқил 65

И.Х.Юсупов, А.Д.Бахдавлатов, Р.Марупов, Т.Шукуров. Тадқиқи динамикаи молекулавии растании зарбехи доруворӣ бо усули нишонаҳои спинӣ 70

ХИМИЯИ ФИЗИКАВӢ

Ӯ.М.Мирсаидов, П.М.Ятимов, Э.Д.Маматов, З.В.Кобулиев, Ш.Б.Назаров. Хлоронидани концентрати данбурити қаблан пухташуда ва ҳисоб намудани параметрҳои кинетикӣ 79

О.Шамсара, З.Қ.Муҳидинов, Ҷ.Т.Бобокалонов, С.Р.Усманова, Л.Ш.Лиу. Зарраҳои ғилофакӣ аз пектинҳои баладметилӣ ва лактаглобулинҳои зардоби шир 85

ХИМИЯИ АНАЛИТИКӢ

М.И.Дёгтев, Е.М.Нечаева, А.О.Аминҷонов, В.В.Фотин. Ҳосилаҳои пиразолон дар химияи экстрактсияи симоби (II) аз маҳлулҳои хлоридӣ 93

МЕТАЛЛУРГИЯ

Ю.Я.Валиев, М.А.Исроилов, Х.Э.Бобоев, Ҳ.Сафиев, Р.М.Бахретдинов А.Х.Сафиев. Омӯзиши раванди ҷудонамоии намакҳои ҳалшаванда аз таркиби блокҳои истифодашудаи катодӣ ва канории электролизёрҳои истехсоли алюминий 101

ГЕОЛОГИЯ

А.Н.Колчин, А.Р.Файзиев. Мувофиқияти сохтори пастхамиҳои ҳалқамонанди перми поён дар Қарамазор аз рӯи қабатҳои вулқонӣ 106

ТЕХНИКА

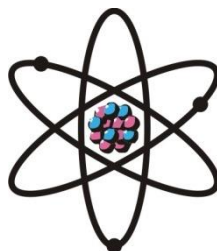
Ҷ.Р.Рузиев. Муайян намудани ҳолати техникаи биноҳои калонпанелии ш. Душанбе аз рӯи натиҷаҳои тафтишотҳои амалӣ 118

ХРОНИКА..... 125

КИТОБҲОИ НАВ..... 126

**DEPARTMENT OF
PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES**

The journal was established
in January 1952



№ 2 (151)
2013

EDITORIAL BOARD

Prof. **Mamadsho Ilolov**, Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; Prof. **Saidmukhammad Odinaev**, Doctor of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **Nikolay Sapozhnikov**, Secretary; **Khakim Akhmedov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Pulat Babadzhanov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Abdulkhak Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **Izatullo Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **Dzhuraboy Khalikov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Rakhim Marupov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Ulmas Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Khikmat Muminov**, Doctor of Physical and Mathematical; **Sabit Negmatullaev**, Doctor of Engineering; Prof. **Nusrat Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Zarullo Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Zafar Usmanov**, Doctor of Physical and Mathematical.

CONTENTS

MATHEMATICS

P.Z.Rakhmonov. Generalized Estermann ternary problem for noninteger powers with almost equal summands.....	7
M.Azizov, M.Pulatov. An exact values of n -widths of some classes of functions, which emergent in solving of mathematical physics equations problems.....	17
S.A.Aligavarov. The best cubature formulas for some classes of two variables functions given by modulus of continuity	28
K.K.Palavonov. About the best approximation of periodic functions and value of widths some classes in L_2	40

MATHEMATICAL ECOLOGY

F.S.Komilov, I.L.Kosimov. Simulation modeling of fish population ecosystem of the pond	52
---	----

PHYSICS

- K.Komilov, A.K.Zaripov.** The equations for binary density and the binary stream of particles of electroconducting magnetic liquids..... **65**
I.Kh.Yusupov, A.D.Bakhdavlatov, R.Marupov, T.Shukurov. Molecular dynamics of a wild-growing her *Rhodiola gelida* schrenk is studied by spin lable method..... **70**

PHYSICAL CHEMISTRY

- U.M.Mirsaidov, P.M.Yatimov, E.D.Mamatov, Z.V.Kobuliev, Sh.B.Nazarov.** Chlorination of prebaked danburite concentrate and evaluation of kinetics parameters... **79**
O.Shamsara, Z.K.Muhidinov, J.T.Bobokalonov, S.R.Usmanova, L.S.Liu. Formation of microcapsule from high methoxyl pectins and whey lactoglobulines..... **85**

ANALITICAL CHEMISTRY

- M.I.Degtev, E.N.Nechaeva, A.A.Aminjanov, V.V.Photin.** Pyrazolone derivatives in the extraction of hydrargyrum ions (II) from chloride solutions..... **93**

METALLURGY

- Yu.Ya.Valiev, M.A.Isroilov, H.E.Bobojev, R.M.Bahretdinov, A.H.Safiev, H.Safiev.** Study of the recovery of waste water soluble salts and cathode side blocks electrolyzers aluminum production..... **101**

GEOLOGY

- A.N.Kolchin, A.R.Fayziev.** Correlation of the lower permian depression ring structures in Karamazar volcanogenic series..... **106**

TECHNICS

- J.R.Ruziev.** Vulnerability asstssment large-residential buildings Dushanbe field survey results..... **118**

- CHRONICLE..... 125**

- NEW BOOKS..... 126**

УДК 511.524

П.З.РАХМОНОВ

ОБОБЩЁННАЯ ТЕРНАРНАЯ ПРОБЛЕМА ЭСТЕРМАНА ДЛЯ НЕЦЕЛЫХ
СТЕПЕНЕЙ С ПОЧТИ РАВНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию 08.07.2013 г.

При $H \geq N^{1-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2$, $\mathcal{L} = \ln N$ доказана асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N, \quad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| [m^c] - \frac{N}{3} \right| \leq H,$$

где N – достаточно большое натуральное число, c – нецелое фиксированное число с условиями

$$\|c\| \geq 3c \left(2^{\lceil c \rceil + 1} - 1 \right) \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}, \quad c > \frac{4}{3} + \mathcal{L}^{-0.3}.$$

Ключевые слова: почти равные слагаемые – тернарная проблема Эстермана – короткая тригонометрическая сумма с нецелой степенью натурального числа – асимптотическая формула.

Estermann [1] доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + n^2 = N, \tag{1}$$

где p_1, p_2 – простые числа, n – натуральное число.

Профессор В.Н.Чубариков поставил следующую задачу: рассмотрение уравнения (1), в котором слагаемое n^2 заменится на $[n^c]$, где c – нецелое фиксированное число и исследование его при более жестких условиях, а именно, когда слагаемые почти равны. Эту задачу мы называем обобщённой тернарной проблемой Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми.

Адрес для корреспонденции: Рахмонов Парвиз Заруллоевич. 119234, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, ДС МГУ, Б-1548. E-mail: parviz.msu@gmail.com

Теорема 1. Пусть N – достаточно большое натуральное число, $\mathcal{L} = \ln N$, c – нецелое фиксированное число с условиями

$$\|c\| \geq 3c \left(2^{\lfloor c \rfloor + 1} - 1\right) \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}, \quad c > \frac{4}{3} + \mathcal{L}^{0.3}. \quad (2)$$

Тогда при $H \geq N^{1-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2$ для $I(N, H)$ – числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N, \quad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| [m^c] - \frac{N}{3} \right| \leq H$$

в простых числах p_1, p_2 и натуральных m – справедлива асимптотическая формула:

$$I(N, H) = \frac{18}{3^{\frac{1}{c}} c} \cdot \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3}\right).$$

Следствие 1.1. Каждое натуральное число $N > N_0$ представимо суммой двух простых чисел p_1, p_2 и целой частью нецелой степени натурального m с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq N^{1-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2, \quad i = 1, 2, \quad \left| m - \left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{c}} \right| \leq \frac{3}{3^{\frac{1}{c}} c} N^{\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2 - \frac{9(c-1)}{3^{\frac{1}{c}} 2c^2} \mathcal{L}^A + 1,$$

где c – нецелое фиксированное число с условиями (2).

Лемма 1. Пусть $x \geq x_0 > 0$, $\mathcal{L}_x = \ln x$, A – фиксированное положительное число больше единицы, c – нецелое число с условиями

$$1 < c \leq \log_2 \mathcal{L}_x - \log_2 \ln \mathcal{L}_x^{6A}, \quad \|c\| \geq \left(2^{\lfloor c \rfloor + 1} - 1\right) (A+1) \mathcal{L}_x^{-1} \ln \mathcal{L}_x.$$

Тогда при $y \geq \sqrt{2cx} \mathcal{L}_x^{A+\theta}$ и $x^{1-c} y^{-1} \mathcal{L}_x^A \leq \alpha \leq 0.5$ справедлива оценка

$$S_c(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} e(\alpha [n^c]) \ll y \mathcal{L}_x^{-A},$$

где $\theta = 0$ при $c \geq 1.1$ и $\theta = 0.5$ при $c < 1.1$.

Доказательство см. [2,3].

Лемма 2. Пусть $x \geq x_0 > 0$, A – фиксированное положительное число больше единицы, c – нецелое число с условиями

$$1 < c \leq \log_2 \mathcal{L} - \log_2 \ln \mathcal{L}^{6A}, \quad \|c\| \geq \left(2^{\lfloor c \rfloor + 1} - 1\right) (A+1) \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}.$$

Тогда при $y \geq \sqrt{2c}x^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}^A$ и $|\alpha| \leq x^{1-c}y^{-1}\mathcal{L}^A$ справедлива асимптотическая формула

$$S_c(\alpha; x, y) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \int_{x-y}^x e(\alpha(t^c - 0.5)) dt + O\left(\frac{y |\sin \pi \alpha|}{\mathcal{L}^A}\right).$$

Доказательство см. [2,3].

Лемма 3. Пусть $x \geq x_0$, $y \geq x^{\frac{5}{8}} \exp(\ln x)^{0.67}$ и $|\alpha| \leq \frac{x}{y^2}$. Тогда справедливо

равенство:

$$S(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n) = \frac{\sin \pi \alpha y}{\pi \alpha} e\left(\alpha \left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O\left(y \exp(-\ln^4 \ln x)\right).$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично [4].

Доказательство теоремы. Не ограничивая общности, будем считать, что $H = N^{1-\frac{1}{2c}}\mathcal{L}^2$. Имеем

$$I(N, H) = \int_{-0.5}^{0.5} T^2(\alpha; N, H) T_c(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha,$$

$$T(\alpha; N, H) = \sum_{|p-N/3| \leq H} e(\alpha p), \quad T_c(\alpha; N, H) = \sum_{\lfloor n^c \rfloor - N/3 \leq H} e(\alpha \lfloor n^c \rfloor).$$

Отрезок интегрирования $[-0.5, 0.5]$ разделим на точки двух классов. К точкам первого класса отнесём интервал $\mathfrak{M} = [-\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$, где $\mathfrak{a} = (2cH)^{-1}\mathcal{L}^2$. Оставшиеся интервалы $\mathfrak{m}_+ = [\mathfrak{a}, 0.5]$ и $\mathfrak{m}_- = [-0.5, -\mathfrak{a}]$ отнесём к точкам второго класса. Обозначим через $I(\mathfrak{M})$, $I(\mathfrak{m}_+)$ и $I(\mathfrak{m}_-)$ соответственно интегралы по множествам \mathfrak{M} , \mathfrak{m}_+ и \mathfrak{m}_- . Будем иметь

$$I(N, H) = I(\mathfrak{M}) + I(\mathfrak{m}_+) + I(\mathfrak{m}_-).$$

В этой формуле $I(\mathfrak{M})$ доставляет главный член асимптотической формулы для $I(N, H)$, а $I(\mathfrak{m}_+)$ и $I(\mathfrak{m}_-)$ входят в его остаточный член, причём их модули совпадают.

Оценка интеграла $I(\mathfrak{m}_+)$. Имеем

$$I(\mathfrak{m}_+) = \int_{\mathfrak{m}_+} T^2(\alpha; N, H) T_c(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha.$$

Переходя к оценкам, найдём

$$I(\mathfrak{m}_+) = \max_{\alpha \in \mathfrak{m}_+} |T_c(\alpha, N, H)| \int_0^1 |T(\alpha; N, H)|^2 d\alpha = \max_{\alpha \in \mathfrak{m}_+} |T_c(\alpha, N, H)| \sum_{|p-N/3| \leq H} 1.$$

Согласно теореме об асимптотическом распределении простых чисел в промежутках малой длины ([5], стр. 142), промежуток $[N/3 - H, N/3 + H]$ при $H \geq N^{\frac{7}{12}} \exp(\ln N)^{0.8}$ содержит $\ll H \mathcal{L}^{-1}$ простых чисел. Поэтому, имея в виду, что

$$H = N^{1-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2 > N^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^2 > N^{\frac{7}{12}} \exp(\mathcal{L}^{0.8}),$$

найдем

$$I(\mathfrak{m}_+) \ll \frac{H}{\mathcal{L}} \cdot \max_{\alpha \in \mathfrak{m}_+} |T_c(\alpha, N, H)|. \quad (3)$$

Оценим $T_c(\alpha, N, H)$ для α из множества \mathfrak{m}_+ . Для этого сначала оценим сумму

$$S_c(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1) = \sum_{N_1 - H_1 < n \leq N_1 + H_1} e(\alpha [n^c]),$$

$$N_1 = \left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{c}}, \quad H_1 = \frac{3^{1-\frac{1}{c}} H}{c N^{1-\frac{1}{c}}} = \frac{3^{1-\frac{1}{2c}}}{c} N_1^2 \mathcal{L}^2,$$

воспользовавшись леммой 1 в случае $c > 1,1$ при $A=2$, $x = N_1 + H_1$, $y = 2H_1$, и проверим выполнение каждого из условий:

$$\|c\| \geq 3(2^{\lceil c \rceil + 1} - 1) \cdot \frac{\ln \ln(N_1 + H_1)}{\ln(N_1 + H_1)}, \quad (4)$$

$$2H_1 \geq \sqrt{2c(N_1 + H_1)} (\ln(N_1 + H_1))^2, \quad (5)$$

$$\mathfrak{ae} \geq \frac{\ln^2(N_1 + H_1)}{2H_1(N_1 + H_1)^{c-1}}. \quad (6)$$

Воспользовавшись определением параметров N_1 и H_1 , имеем

$$\frac{\ln \ln(N_1 + H_1)}{\ln(N_1 + H_1)} = \frac{\ln \ln N_1 + \ln \left(1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{H_1}{N_1} \right)}{\ln N_1} \right)}{\ln N_1 + \ln \left(1 + \frac{H_1}{N_1} \right)} = \frac{\ln \ln N_1}{\ln N_1} \left(1 + O \left(\frac{H_1}{N_1 \mathcal{L}} \right) \right) =$$

$$= \frac{c \ln \mathcal{L} - c \ln c + O(\mathcal{L}^{-1})}{\mathcal{L} - \ln 3} \left(1 + O\left(\frac{H_1}{N_1 \mathcal{L}}\right) \right) = \frac{c \ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}} + O\left(\frac{1}{\mathcal{L}}\right).$$

Отсюда и из условия $\|c\| \geq 3(2^{lc+1} - 1) \frac{c \ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}$ следует, что

$$\|c\| \geq 3(2^{lc+1} - 1) \left(\frac{\ln \ln(N_1 + H_1)}{\ln(N_1 + H_1)} + O\left(\frac{1}{\mathcal{L}}\right) \right),$$

то есть выполняется условие (4). Поступая аналогично, докажем справедливость условия (5):

$$\begin{aligned} & \frac{2H_1}{\sqrt{2c(N_1 + H_1)(\ln(N_1 + H_1))^2}} = \frac{\sqrt{2}H_1}{\sqrt{cN_1 \ln^2 N_1}} \left(1 + O\left(\frac{H_1}{N_1}\right) \right) = \\ & = \frac{\sqrt{2}c^{-1}3^{1-\frac{1}{2c}}N_1^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}^2}{\sqrt{cN_1}c^{-2}(\mathcal{L} - \ln 3)^2} \left(1 + O\left(\frac{\mathcal{L}^2}{N_1^{\frac{1}{2c}}}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}c3^{1-\frac{1}{2c}}}{(1 - \ln 3 \cdot \mathcal{L}^{-1})^2} \left(1 + O\left(\frac{\mathcal{L}^2}{N_1^{\frac{1}{2c}}}\right) \right) > 1. \end{aligned}$$

Из следующего равенства

$$\begin{aligned} & \frac{\ln^2(N_1 + H_1)}{2H_1(N_1 + H_1)^{c-1}} = \frac{\ln^2 N_1}{2H_1 N_1^{c-1}} \left(1 + O\left(\frac{H_1}{N_1}\right) \right) = \\ & = \frac{(\mathcal{L} - \ln 3)^2}{2cH} \left(1 + O\left(\frac{\mathcal{L}^2}{N_1^{\frac{1}{2c}}}\right) \right) = \alpha + O\left(\frac{\alpha}{\mathcal{L}}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

и условия $\alpha \in \mathfrak{m}_+ = [\alpha, 0.5]$ следует условие (6). Таким образом, согласно лемме 2, имеем

$$S_c(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1) \ll \frac{H_1}{(\ln(N_1 + H_1))^2} \ll \frac{H}{N_1^{1-\frac{1}{c}}\mathcal{L}^2}. \quad (8)$$

Пользуясь соотношением

$$\left(\frac{N}{3} \pm H\right)^{\frac{1}{c}} = \left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{c}} \left(1 \pm \frac{3H}{cN} + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right) \right) = N_1 \pm H_1 + O\left(\frac{H^2}{N^{2-\frac{1}{c}}}\right),$$

сумму $T_c(\alpha; N, H)$ выразим через $S_c(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)$. Имеем

$$T_c(\alpha; N, H) = S_c(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1) + O\left(\frac{H^2}{N^{2-\frac{1}{c}}}\right). \quad (9)$$

Отсюда и из оценки (8) получим

$$|T_c(\alpha; N, H)| \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathscr{L}^2} + \frac{H^2}{N^{2-\frac{1}{c}}} = \frac{H}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathscr{L}^2} \left(1 + \frac{H \mathscr{L}^2}{N} \right) \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathscr{L}^2}.$$

Подставляя эту оценку в (3), найдём

$$I(\mathfrak{m}_+) = \frac{H}{\mathscr{L}} \cdot \max_{\alpha \in \mathfrak{m}_+} |T_c(\alpha, N, H)| = \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathscr{L}^3}.$$

Вычисление интеграла $I(\mathfrak{M})$. По определению интеграла $I(\mathfrak{M})$ имеем:

$$I(\mathfrak{M}) = \int_{\mathfrak{M}} T^2(\alpha; N, H) T_c(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha. \quad (10)$$

Найдём асимптотическое поведение суммы

$$S\left(\alpha; \frac{N}{3} + H, 2H\right) = \sum_{\frac{N}{3}-H < n \leq \frac{N}{3}+H} \Lambda(n) e(\alpha n), \quad \alpha \in \mathfrak{M},$$

пользуясь леммой 3 при $x = \frac{N}{3} + H$, $y = 2H$. Воспользовавшись соответственно

условием $c > \frac{4}{3} + \mathscr{L}^{0.3}$ и определением параметра ε , проверим выполнение следующих двух её условий:

$$\begin{aligned} 2H &= 2\mathscr{L}^2 \exp\left(\left(1 - \frac{1}{2c}\right)\mathscr{L}\right) > 2\mathscr{L}^2 \exp\left(\left(1 - \frac{1}{\frac{8}{3} + 2\mathscr{L}^{0.3}}\right)\mathscr{L}\right) = \\ &= 2\mathscr{L}^2 \exp\left(\left(\frac{5}{8} + \frac{9\mathscr{L}^{0.3}}{8(4 + 3\mathscr{L}^{0.3})}\right)\mathscr{L}\right) > 2\mathscr{L}^2 \exp\left(\frac{5\mathscr{L}}{8} + \frac{\mathscr{L}^{0.7}}{4}\right) = \\ &= 2N^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}^2 \exp\left(\frac{\mathscr{L}^{0.7}}{4}\right) > \left(\frac{N}{3} + H\right)^{\frac{5}{8}} \exp\left(\ln\left(\frac{N}{3} + H\right)\right)^{0.67}, \end{aligned}$$

$$|\alpha| \leq \varepsilon = \frac{\mathscr{L}^2}{2cH} = \frac{\frac{N}{3} + H}{4H^2} \cdot \frac{2H\mathscr{L}^2}{c\left(\frac{N}{3} + H\right)} < \frac{\frac{N}{3} + H}{4H^2}.$$

Таким образом, согласно лемме 3, имеем

$$S\left(\alpha; \frac{N}{3} + H, 2H\right) = \frac{\sin 2\pi\alpha H}{\pi\alpha} e\left(\frac{\alpha N}{3}\right) + O\left(H \exp(-\ln^4 \mathcal{L})\right). \quad (11)$$

При $|p - N/3| \leq H$, пользуясь формулой Лагранжа о конечных приращениях, легко показать, что $\ln p = \ln N/3 + O(H/N)$. Поэтому

$$T(\alpha; N, H) = \frac{1}{\ln(N/3)} \cdot S\left(\alpha; \frac{N}{3} + H, 2H\right) + O\left(\frac{H^2}{N}\right).$$

Отсюда с учётом формулы (11) и соотношения

$$\frac{H^2}{N} = H \cdot N^{-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2 \ll H \exp(-\ln^4 \mathcal{L})$$

найдем

$$T(\alpha; N, H) = \frac{1}{\ln(N/3)} \cdot \frac{\sin 2\pi\alpha H}{\pi\alpha} e\left(\frac{\alpha N}{3}\right) + O\left(H \exp(-\ln^4 \mathcal{L})\right).$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и воспользовавшись соотношением

$$\left| \frac{\sin 2\pi\alpha H}{\pi\alpha} e\left(\frac{\alpha N}{3}\right) \right| \ll H,$$

находим

$$T^2(\alpha; N, H) = \frac{1}{\ln^2(N/3)} \cdot \frac{\sin^2 2\pi\alpha H}{(\pi\alpha)^2} e\left(\frac{2\alpha N}{3}\right) \ll H^2 \exp(-\ln^4 \mathcal{L}). \quad (12)$$

Теперь найдём асимптотическое поведение суммы

$$S_c(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1) = \sum_{N_1 - H_1 < n \leq N_1 + H_1} e(\alpha[n^c]), \quad \alpha \in \mathfrak{M},$$

воспользовавшись леммой 2 при $A = 2$, $x = N_1 + H_1$, $y = 2H_1$. Условия (4) и (5) леммы 1, выполнение которых мы показали при оценке $I(\mathfrak{m}_+)$, в точности являются и условиями леммы 2, а выполнение условия

$$\alpha \leq \frac{\ln^2(N_1 + H_1)}{2H_1(N_1 + H_1)^{c-1}}$$

непосредственно следует из (7) и условия $\alpha \in \mathfrak{M} = [-\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$. Поэтому, согласно лемме 2, имеем

$$S_c(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1) = \frac{1 - e(-\alpha)}{2\pi i \alpha} \int_{N_1 - H_1}^{N_1 + H_1} e(\alpha t^c) dt + O\left(\frac{H_1 |\sin \pi \alpha|}{(\ln(N_1 + H_1))^2}\right).$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством

$$\frac{H_1 \sin \pi \alpha}{(\ln(N_1 + H_1))^2} \ll \frac{H_1}{\mathcal{L}^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \mathcal{L}^2}{2cH}\right) \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^2} \cdot \frac{\mathcal{L}^2}{H} \ll \frac{1}{N^{1-\frac{1}{c}}} \ll \frac{H^2}{N^{2-\frac{1}{c}}},$$

и формулой (9), находим

$$\begin{aligned} T_c(\alpha; N, H) &= \frac{1 - e(-\alpha)}{2\pi i \alpha} \int_{N_1 - H_1}^{N_1 + H_1} e(\alpha t^c) dt + O\left(\frac{H^2}{N^{2-\frac{1}{c}}}\right) = \\ &= \frac{2H_1(1 - e(-\alpha))}{2\pi i \alpha} \int_{-0.5}^{0.5} e(\alpha(2H_1 t + N_1)^c) dt + O\left(\frac{H^2}{N^{2-\frac{1}{c}}}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Умножая неравенство (12) на тривиальное неравенство $T_c(\alpha; N, H) \ll H(N^{1-\frac{1}{c}})^{-1}$, находим

$$\begin{aligned} T^2(\alpha; N, H) T_c(\alpha; N, H) &= \frac{1}{\ln^2(N/3)} \cdot \frac{\sin^2 2\pi \alpha H}{(\pi \alpha)^2} e\left(\frac{2\alpha N}{3}\right) T_c(\alpha; N, H) \ll \\ &\ll \frac{H^3}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}} \exp(-\ln^4 \mathcal{L}). \end{aligned}$$

Применяя здесь соотношение (13), найдём

$$\begin{aligned} &T^2(\alpha; N, H) T_c(\alpha; N, H) - \\ &= \frac{1 - e(-\alpha)}{2\pi i \alpha} \cdot \frac{\sin^2 2\pi \alpha H}{(\pi \alpha)^2} \cdot \frac{2H_1}{\ln^2(N/3)} \cdot e\left(\frac{2\alpha N}{3}\right) \int_{-0.5}^{0.5} e(\alpha(2H_1 t + N_1)^c) dt \ll \\ &\ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3} \cdot \frac{H}{\mathcal{L}^2} \left(\frac{H \mathcal{L}^3}{N} + \mathcal{L}^4 \exp(-\ln^4 \mathcal{L})\right) \ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3} \cdot \frac{H}{\mathcal{L}^2} \ll \frac{H^2 \mathfrak{a}^{-1}}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3}. \end{aligned}$$

Подставляя значение $T^2(\alpha; N, H) T_c(\alpha; N, H)$ в формулу (10), имеем

$$I(\mathfrak{M}) = \int_{-\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}} T^2(\alpha; N, H) T_c(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha = \frac{2H_1 \cdot J(H)}{\ln^2(N/3)} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3}\right),$$

где

$$J(H) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e(-\alpha)}{2\pi i \alpha} \cdot \frac{\sin^2 2\pi \alpha H}{(\pi \alpha)^2} e\left(-\frac{\alpha N}{3}\right)^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} e(\alpha(2H_1 t + N_1)^c) dt d\alpha = 3H + O\left(\frac{H}{L}\right).$$

Следовательно,

$$I(\mathfrak{M}) = \frac{18}{3^c c} \cdot \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}} \mathcal{L}^3}\right).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math.Soc., 11(1937), pp. 501-516.
2. Рахмонов П.З. Короткие тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа // Вестн. Моск. ун-та. сер.1, математика, механика, 2012, №6, с.51-55.
3. Рахмонов П.З. Оценка коротких тригонометрических сумм с нецелой степенью натурального числа // ДАН РТ, 2012, т. 55, №3, с. 185-191.
4. Рахмонов З.Х. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами // ДАН РТ, 2000, т. 43, №3, с.27-40.
5. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана – М.: Физматлит, 1994, 375 с.

П.З.РАҲМОНОВ

МУАММОИ ТЕРНАРИИ ЭСТЕРМАН БАРОИ ДАРАҶАҶОИ ҒАЙРИБУ- ТУН БО ЧАМЪШАВАНДАҶОИ ҚАРИБ БАРОБАР

Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов

Ҳангоми $H \geq N^{1-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2$, $\mathcal{L} = \ln N$ формулаи асимптотӣ барои миқдори муодилаи

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N, \quad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| [m^c] - \frac{N}{3} \right| \leq H,$$

N – адади натуралии кифоя калон, c – адади фиксиронидашуда бо шартҳои

$$\|c\| \geq 3c \left(2^{\lceil c \rceil + 1} - 1 \right) \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}, \quad c > \frac{4}{3} + \mathcal{L}^{-0.3}.$$

исбот карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: чамъшавандаҳои қариб баробар – муаммои тернарии Эстерман – суммаи кӯтоҳи тригонометрӣ бо дараҷаи ғайрибутуни адади натуралӣ – формулаи асимптотӣ.

P.Z.RAKHMONOV

**GENERALIZED ESTERMANN TERNARY PROBLEM FOR NONINTEGER
POWERS WITH ALMOST EQUAL SUMMANDS**

Lomonosov Moscow State University

An asymptotic formula for the number of the solutions of the equation

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N, \quad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| [m^c] - \frac{N}{3} \right| \leq H,$$

has been proven for $H \geq N^{1-\frac{1}{2c}} \mathcal{L}^2$, $\mathcal{L} = \ln N$ where N is sufficiently large and c is fixed noninteger number satisfying the following conditions

$$\|c\| \geq 3c \left(2^{[c+1]} - 1 \right) \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}}, \quad c > \frac{4}{3} + \mathcal{L}^{0.3}.$$

Key words: Almost equal summands – termann's ternary problem – short exponential sums – asymptotic formula.

УДК 517.5

М.АЗИЗОВ, М.ПУЛАТОВ

**ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ n -ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ФУНКЦИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ УРАВНЕНИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

*Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни
Поступила в редакцию 06.05.2013 г.*

Основной целью статьи является нахождение точных значений различных n -поперечников классов функций, возникающих при решении известных граничных задач уравнений математической физики в гильбертовых пространствах.

Ключевые слова: гильбертово пространство – нижняя грань – линейный оператор – поперечник.

1. Пусть H – произвольное гильбертово пространство; Q – некоторый класс функций из H ; L_n – некоторое n -мерное подпространство из H ;

$$E(Q; L_n)_H = \sup \left\{ \inf \left\{ \|f - u\|_H : u \in L_n \right\} : f \in Q \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ E(f; L_n)_H : f \in Q \right\}$$

– наилучшее приближение класса Q подпространством L_n заданной размерности n и характеризует отклонение класса Q от подпространства L_n в метрике пространства H . Если обозначить через $\mathcal{L}(H, L_n)$ множество всех непрерывных операторов $A : H \rightarrow L_n$, действующих из H , в произвольное заданное подпространство $L_n \subset H$ размерности n , то возникает следующая задача. Требуется найти величину

$$\mathcal{E}(Q; L_n)_H = \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - Af\|_H : f \in Q \right\} : A \in \mathcal{L}(H, L_n) \right\}$$

и указать оператор $A^* \in \mathcal{L}(H, L_n)$, реализующий точную нижнюю грань:

Адрес для корреспонденции: Азизов Музафар. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет.
E-mail: azizov.muz@gmail.com

$$\mathcal{E}(Q; L_n)_H = \sup \left\{ \|f - A^* f\|_H : f \in Q \right\}.$$

Последнюю задачу можно рассматривать в более узком смысле. Нижнюю грань искать не по всему множеству $\mathcal{L}(H, L_n)$ непрерывных операторов $A : H \rightarrow L_n$, а только по некоторому классу таких операторов, которые определяются тем или иным способом задания. Например, в частности, можно выделить в $\mathcal{L}(H_2, L_n)$ класс $\Lambda(H_2, L_n)$ линейных непрерывных операторов $A : H \rightarrow L_n$ и рассматривать величину

$$\mathcal{E}(Q, L_n)_H = \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - Af\|_H : f \in Q \right\} : A \in \Lambda(H; L_n) \right\}.$$

Если в $\Lambda(H, L_n)$ выделить класс $\Lambda^\perp(H, L_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство L_n , то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in L_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathcal{E}^\perp(Q; L_n)_H = \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - Af\|_H : f \in Q \right\} : A \in \Lambda^\perp(H, L_n) \right\}.$$

Напомним далее определения n -поперечников, значения которых будут вычислены для некоторых классов функций, приведенных в следующем пункте. n -поперечником в смысле А.Н.Колмогорова [1] центрального симметричного класса функций $Q \subset H$ называется величина

$$d_n(Q; H)_H = \inf \left\{ \mathcal{E}(Q; L_n)_H : L_n \subset H \right\},$$

где нижняя грань рассматривается по всем подпространствам $L_n \subset H$ заданной размерности n . Аналогичным образом, линейным n -поперечником класса Q в пространстве H называется величина

$$\delta_n(Q; H) = \inf \left\{ \mathcal{E}(Q; L_n)_H : L_n \subset H \right\},$$

а величину

$$\pi_n(Q; H) = \inf \left\{ \mathcal{E}^\perp(Q; L_n)_H : L_n \subset H \right\},$$

называют проекционным n -поперечником. n -поперечником по Гельфанду называют величину

$$d^n(Q; L_n) = \inf \left\{ \sup \left\{ \|f\| : f \in Q \cap L^n \right\} : L^n \subset H \right\},$$

где нижняя грань на этот раз берется по всем подпространствам L^n коразмерности n из H . Пусть S – единичный шар в H . Величина

$$b_n(Q; L_n) = \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset Q \} : L_{n+1} \subset H \right\}$$

называется n -поперечником по Бернштейну.

Отметим, что нахождение оптимальных подпространств в определении соответствующих n -поперечников является наиболее интересной задачей теории аппроксимации в нормированных пространствах. Известно, что все вышеназванные n -поперечники при возрастании n являются монотонно убывающими и для произвольного гильбертова пространства H удовлетворяют соотношениям

$$b_n(Q; H) \leq d^n(Q; H) \leq d_n(Q; H) = \delta_n(Q; H) = \pi(Q; H).$$

Первое неравенство $b_n(\cdot) \leq d^n(\cdot)$ имеется в книге А.Пинкуса [2, стр.19], все остальные в книге В.М.Тихомирова [3, стр.239]. Нам потребуется следующая

Лемма 1 [3]. Пусть $\gamma(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных поперечников и $d_n(Q; H) \leq R$. Если шар S_{n+1} размерности не менее $n+1$ произвольного радиуса R содержится в классе Q , то $b_n(Q; H) \geq R$ и тогда $\gamma_n(Q; H) = R$.

2. Пусть H_1 и H_2 – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_{H_1}$ и $(\cdot, \cdot)_{H_2}$ и соответствующими нормами $\|\cdot\|_{H_1}$ и $\|\cdot\|_{H_2}$. Класс линейных непрерывных операторов, отображающих H_1 в H_2 , обозначим через $L(H_1, H_2)$, а через $K(H_1, H_2)$ обозначим класс компактных операторов, содержащихся в $L(H_1, H_2)$. Общеизвестными классами компактных операторов, отображающих $L_2(a, b)$ в $L_2(a, b)$ (где (a, b) – конечный или бесконечный интервал), являются интегральные операторы вида

$$(Tf)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y) f(y) dy,$$

где $\mathcal{K}(x, y)$ – ядро Гильберта-Шмидта, удовлетворяющее условию

$$\int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

Хорошо известно, что для каждого оператора $T \in L(H_1, H_2)$ существует сопряженный оператор $T' \in L(H_1, H_2)$, который находится из условия

$$(T_x, y)_{H_2} = (x, T'_y)_{H_1}, \quad x \in H_1, \quad y \in H_2.$$

Если $T \in L(H, H)$ и $T = T'$, то оператор T называется самосопряженным. Известно, что если $T \in K(H, H)$ является самосопряженным оператором, то все его собственные

значения действительны и любое решение φ уравнения $(T - \lambda I)^n \varphi = 0$ для некоторого λ и положительного числа n является собственным вектором оператора T . Самосопряженный компактный оператор T называют неотрицательным, если все его собственные значения неотрицательны, причем

$$\lambda_1(T) \geq \lambda_2(T) \geq \lambda_3(T) \geq \dots \lambda_n(T) > 0.$$

Пусть $T \in K(H_1, H_2)$. Тогда $T' T$ и $T T'$ являются самосопряженными неотрицательными компактными операторами. Числа (см., например, [2], стр. 65)

$$S_n(T) = [\lambda_n(T' T)]^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

называют сингулярными числами оператора T . А.Н. Колмогоров в [1] доказал, что $d_n(T(H_1); H_2) = S_{n+1}(T)$. Из (1) сразу ясно, что $S_n(T) = S_n(T')$ для всех компактных операторов T .

Пусть $\{S_n(T)\}$ – последовательность сингулярных чисел оператора T , а $\{\varphi_n\}$ – ассоциированные ортонормальные собственные векторы оператора T . Положим $\psi_n = T\varphi_n$. Множество $\{\psi_n\}$ состоит из собственных векторов оператора $TT' \in K(H_2, H_2)$ и $(\psi_i, \psi_j)_2 = \delta_{ij} [S_j(T)]^2$. В монографии [2] доказано, что если $T \in K(H_1, H_2)$ и $\{S_n(T)\}, \{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ имеют тот же смысл, что и выше, то

$$\gamma_n(T(H_1); H_2) = S_{n+1}(T), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\gamma_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n -поперечников.

3. Для фиксированного $R \in (0, 1]$ через $U_R = \{z : |z| < R\}$ обозначим круг радиуса R в комплексной плоскости \mathbb{C} и через $\partial U_R = \{z : |z| = R\}$ обозначим границу круга U_R . Пусть h – класс действительныхзначных в круге U_1 гармонических функций $u(z) \stackrel{\text{def}}{=} u(\rho e^{i\theta})$, $0 \leq \rho < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, являющихся решением краевой задачи Дирихле для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(\rho e^{i\theta}) := \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)^2 u(\rho e^{i\theta}) = 0, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

с краевыми условиями

$$u(\rho e^{i\theta}) \Big|_{\rho=1} = u(e^{i\theta}), \quad \frac{\partial u(\rho e^{i\theta})}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (2)$$

где $u(e^{i\theta}) \in L_2[0, 2\pi]$. Известно, что искомая функция $u(\rho e^{i\theta})$ задается формулой [4]

$$u(z) \equiv u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\rho, \theta - t) u(e^{it}) dt, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad (3)$$

где

$$\mathcal{K}(\rho, \theta) = \frac{(1 - \rho^2) \cdot (1 - \rho \cos t)}{2(1 - 2\rho \cos t + \rho^2)^2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}(1 - \rho^2)\right) \rho^k \cos k\theta. \quad (4)$$

Положим

$$H = \left\{ u(\rho e^{i\theta}) : u(\rho e^{i\theta}) \in \mathcal{H}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq 1 \right\},$$

$$H(U_R) = \left\{ u(re^{i\theta}) \in \mathcal{H}, \|u\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R |u(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta \right)^{1/2} < \infty \right\}, \quad 0 < R \leq 1.$$

Задача состоит в отыскании точного значения величины $\gamma_n(H; H(U_R))$, где $\gamma_n(\cdot)$ - любой из вышеперечисленных n -поперечников, а также в нахождении оптимальных подпространств, реализующих указанное точное значение. Для вычисления значения n -поперечников требуется определить компактный линейный оператор $T : L_2(\partial U_1) \rightarrow H(U_R)$. Легко видеть, что оператор T задается формулой

$$(Tu)(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\rho, \theta - t) u(e^{it}) dt, \quad (5)$$

где

$$\mathcal{K}(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{|k|}{2}(1 - \rho^2)\right) \rho^{|k|} e^{ikt}. \quad (6)$$

Сопряженный оператор $T' : H(U_R) \rightarrow L_2(\partial U_1)$ определим равенством

$$(T'v)(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R v(\rho e^{it}) \mathcal{K}(\rho, \theta - t) \rho d\rho d\theta. \quad (7)$$

В самом деле, для справедливости равенства (5) достаточно доказать, что для всех $u \in L_2(\partial U_1)$ и всех $v \in H(U_R)$ выполняется равенство

$$(Tu, v)_{H(U_R)} = (u, T'v)_{L_2(\partial U_1)}. \quad (8)$$

Соотношение (8) устанавливается непосредственной проверкой. Чтобы найти точное значение и оптимальные подпространства вышеперечисленных n -поперечников, достаточно найти собственные значения и собственные функции оператора $TT' : H(U_R) \rightarrow H(U_R)$.

Справедлива следующая

Лемма 2. Функции

$$v_k(\rho e^{it}) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|k|}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho^{|k|} e^{ikt}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

образуют полную систему собственных функций с соответствующими ненулевыми собственными значениями $\lambda_k = \varphi_k(R) R^{2(|k|+1)}$ оператора TT' , где

$$\varphi_k(R) = \frac{1}{8} \left(\frac{(|k|+2)^2}{|k|+1} - |k| R^2 + \frac{|k|^2}{|k|+3} R^4 \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Доказательство. Пусть $v \in H(U_R)$. Тогда, согласно равенствам (5) и (7), имеем:

$$\begin{aligned} (TT'v)(\rho e^{it}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\rho, \theta - t) (T'v)(e^{it}) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\rho; \theta - t) \mathcal{K}(r; \tau - t) dt \right] v(re^{i\tau}) r dr d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя разложение в ряд Фурье (6) функции $\mathcal{K}(\rho, \theta)$ для интеграла в квадратной скобке соотношение (9), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\rho; \theta - t) \mathcal{K}(r; \tau - t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{|k|}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho^{|k|} e^{ik(\theta-t)} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{|l|}{2} (1 - r^2) \right) r^{|l|} e^{il(\tau-t)} \right\} dt = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{|k|}{2} (1 - \rho^2) \right) \left(1 + \frac{|k|}{2} (1 - r^2) \right) (\rho r)^{|k|} e^{ik(\theta-\tau)} \equiv \mathcal{K}_1(\rho r; \theta - \tau). \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в равенство (9), будем иметь

$$(TT'v)(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathcal{K}_1(\rho r; \theta - t) v(re^{it}) r dr dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{|k|}{2} (1 - \rho^2) \right) \left(1 + \frac{|k|}{2} (1 - r^2) \right) (\rho r)^{|k|} e^{ik(\theta-t)} \right\} \times \\
&\quad \times \nu(re^{it}) r dr dt = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{|k|}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho^{|k|} e^{ik\theta} \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(1 + \frac{|k|}{2} (1 - r^2) \right) r^{|k|+1} \nu(re^{it}) e^{-ikt} dr dt \right\} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \nu_k(\rho e^{i\theta}) \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (TT' \nu_k)(\rho e^{i\theta}), \tag{10}
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\nu_k(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|k|}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho^{|k|} e^{ik\theta}, \tag{11}$$

$$\lambda_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(1 + \frac{|k|}{2} (1 - r^2) \right) r^{|k|+1} \nu(re^{it}) e^{-ikt} dr dt.$$

Полагая в правой части двойного интеграла $\nu(re^{it}) \equiv \nu_k(re^{it})$ и используя формулу (11), после простых вычислений получаем

$$\lambda_k = \varphi_k(R) R^2 (|k| + 1), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{12}$$

где

$$\varphi_k(R) \stackrel{def}{=} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{(|k|+2)^2}{|k|+1} - |k| R^2 + \frac{|k|^2}{|k|+3} R^4 \right). \tag{13}$$

Таким образом, из равенства (10) с учетом (12) следует, что

$$(TT' \nu_k)(\rho e^{i\theta}) = \lambda_k \nu_k(\rho e^{i\theta}) \equiv \varphi_k(R) R^{2(|k|+1)} \nu_k(\rho e^{i\theta}).$$

Остается доказать, что все собственные функции оператора TT' имеют ненулевые собственные значения. Предположим, что

$$TT' \nu = \lambda \nu \neq 0, \quad \text{но } (\nu, \nu_k)_{H(U_R)} = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

поэтому, имеем

$$0 = (TT' \nu, \nu_k)_{H(U_R)} = (T' \nu, T' \nu_k)_{L_2(\partial U_1)}.$$

Из (11) при $\rho = 1$ получаем $\nu_k(e^{i\theta}) = \frac{1}{4} e^{ik\theta}$, а потому

$$(T' \nu_k)(e^{i\theta}) = \varphi_k(R) R^{2(|k|+1)} e^{ik\theta} \equiv \lambda_k e^{ik\theta}.$$

Последнее равенство приводит к тому, что

$$(T' \nu, T' \nu_k)_{L_2(\partial U_1)} = \lambda_k (T' \nu, e^{ik\theta})_{L_2(\partial U_1)} = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

откуда $T' \nu \equiv 0$ и тем более $TT' \nu \equiv 0$, вопреки нашему предположению. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. Для классов функций H и $H(U_R)$ справедливы равенства

$$\gamma_0(H, H(U_R)) = \frac{R}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma_{2n-1}(H, H(U_R)) = \sqrt{\varphi_n(R)} \cdot R^{n+1}, \quad 0 < R \leq 1,$$

где $\varphi_n(R)$ определено равенством (12), а $\gamma_k(\cdot)$ – любой из перечисленных выше k -поперечников $b_k(\cdot), d_k(\cdot), d^k(\cdot), \delta_k(\cdot)$ либо $\pi_k(\cdot)$. При этом:

а) подпространство

$$L_{2n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{span} \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho e^{-i\theta}, \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho e^{-i\theta}, \dots, \right. \\ \left. \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho^{n-1} e^{-i(n-1)\theta}, \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho^{n-1} e^{-i(n-1)\theta} \right\}$$

является $(2n-1)$ -мерным оптимальным подпространством для колмогоровского $d_{2n-1}(H, H(U_R))$ и проекционного поперечников $\pi_{2n-1}(H, H(U_R))$;

б) подпространство

$$L_{2n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{span} \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho e^{-i\theta}, \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho e^{-i\theta}, \dots, \right. \\ \left. \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho^n e^{-in\theta}, \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho^n e^{in\theta} \right\}$$

является $(2n+1)$ -мерным оптимальным подпространством для бернштейновского поперечника $b_{2n+1}(H, H(U_R))$.

4. Пусть $\mathcal{K}(\rho, t)$ определено равенством (6). Равенством

$$u(z) \equiv u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\rho, \theta - t) d\mu(t), \quad (14)$$

где $\mu(t)$ – действительная функция (мера) ограниченной вариации на $[0, 2\pi)$, определим класс бигармонических в круге $U_1 = \{z : |z| < 1\}$ функций $u(z)$. Класс интегралов вида (14) можно отождествлять с классом \mathcal{B}^1 действительных бигармонических в U_1 функций $u(z)$, для которых величина

$$M_1(\rho, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(\rho e^{i\theta})| d\theta$$

равномерно ограничена при $\rho \rightarrow 1$ (см., например, [4], стр.2). Положим

$$\mathcal{K}_\rho = \left\{ u(\rho e^{i\theta}) : u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(\rho, \theta - t) d\mu(t), V_0(\mu) \leq 1 \right\}.$$

Требуется найти точное значение колмогоровского n -поперечника класса \mathcal{K}_ρ в норме пространства $L_2[0, 2\pi]$.

Теорема 2. Для класса \mathcal{K}_ρ при любом фиксированном $\rho \in (0, 1)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} d_{2n-1}(\mathcal{K}_\rho; L_2) &= E_n(\mathcal{K}_\rho)_{L_2} = e_n(\mathcal{K}_\rho)_{L_2} = \\ &= \frac{\rho^n}{4\sqrt{1-\rho^2}} \left\{ 2n^2(1-\rho^2) + n(3\rho^2 + 8)(1-\rho^2) + 2(\rho^2 + 4)(\rho^2 + 1) \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} d_{2n}(\mathcal{K}_\rho; L_2) &= E_n(\mathcal{K}_\rho)_{L_2} = e_n(\mathcal{K}_\rho)_{L_2} = \\ &= \frac{\rho^n}{4\sqrt{1-\rho^2}} \left\{ n^2(1+2\rho^2-\rho^4)(1-\rho^2) + n(7\rho^2+4)(1-\rho^2) + 2(\rho^4+7\rho^2+2) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Доказательство. Равенства (15) и (16) доказываются одним и тем же способом. Приводим доказательство равенства (15). Простой подсчёт с использованием равенства Парсеваля для ряда (6) при любом $\rho \in (0, 1)$ дает:

$$\begin{aligned} d_{2n-1}(\mathcal{K}_\rho; L_2) &= \left\{ \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2) \right)^2 \rho^{2k} \right\}^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho^{2k} + (1-\rho^2) \cdot \sum_{k=n}^{\infty} k \rho^{2k} + \frac{1}{4}(1-\rho^2)^2 \cdot \sum_{k=n}^{\infty} k^2 \rho^{2k} \right\}^{1/2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\rho^{2n}}{1-\rho^2} + \frac{1}{16} \rho(1-\rho^2)(9-\rho^2) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho^{2n}}{1-\rho^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{16} \rho^2(1-\rho^2)^2 \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\frac{\rho^{2n}}{1-\rho^2} \right) \right\}^{1/2} = \\
&= \frac{\rho^n}{4\sqrt{1-\rho^2}} \left\{ 2n^2(1-\rho^2) + n(3\rho^2+8)(1-\rho^2) + 2(\rho^2+4)(\rho^2+1) \right\}^{1/2}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Аналогичным образом, пользуясь равенством (17), получаем (16)

$$\begin{aligned}
d_{2n}(\mathcal{K}_\rho; L_2) &= \left\{ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{n}{2}(1-\rho^2) \right)^2 \rho^{2n} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2) \right)^2 \rho^{2k} \right\}^{1/2} = \\
&= \frac{\rho^n}{4\sqrt{1-\rho^2}} \left\{ n^2(1+2\rho^2-\rho^4)(1-\rho^2) + n(7\rho^2+4)(1-\rho^2) + 2(\rho^4+7\rho^2+2) \right\}^{1/2},
\end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmogoroff A.N. – Annalen of Math., 1936, №37, pp.107-111.
2. Pinkus A. n -width in approximation theory. – Berlin : Springer-Verlag, 1985.
3. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976, 324 с.
4. Шабозов М.Ш. – Укр.мат.журнал, 1986, т.47, №11, с.1540-1557.

М.АЗИЗОВ, М.ПУЛАТОВ

ҚИМАТИ АНИҚИ n -ҚУТРҲО БАРОИ БАЪЗЕ СИНФИ ФУНКСИЯҲОЕ, КИ ДАР ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲОИ МУОДИЛАҲОИ ФИЗИКАИ МАТЕМАТИКӢ ПАЙДО МЕШАВАНД

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Мақсади асосӣ дар ин мақола, ёфтани қимати аниқи n -қутрҳо, ки дар ҳалли масъалаҳои канонии муодилаҳои физикаи математикӣ пайдо мешаванд, дар фазои гилберт ҳал шудааст.

Калимаҳои калидӣ: фазои гилберт – сарҳади поёнӣ – оператори хаттӣ – қутр.

M.AZIZOV, M.PULATOV

**AN EXACT VALUES OF n -WIDTHS OF SOME CLASSES OF FUNCTIONS,
WHICH EMERGENT IN SOLVING OF MATHEMATICAL PHYSICS
EQUATIONS PROBLEMS**

S.Ayni Tajik State Pedagogical University

The main purpose of this paper is to find the exact values of n -width for classes of functions which emerge in solving the mathematical physics equations problems in Hilbert space.

Key words: Hilbert space – lower boundary – linear operator – widths.

УДК 517.5

С.А.АЛИГАВАРОВ

**НАИЛУЧШИЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, ЗАДАВАЕМЫХ МОДУЛЯМИ
НЕПРЕРЫВНОСТИ**

Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева

Поступила в редакцию 28.03.2013 г.

В работе решается задача минимизации погрешности кубатурной формулы на классах функций, задаваемых модулями непрерывности. Найдено точное значение погрешности на рассматриваемых классах функций двух переменных.

Ключевые слова: кубатурная формула – погрешность – верхняя грань – модуль непрерывности.

Вопросы оптимизации кубатурных формул для некоторых классов функций рассматривались, например, в работах [1-3]. Здесь для некоторых классов функций двух переменных, задаваемых модулями непрерывности от расстояния между точками прямоугольной области, найдены точные оценки погрешности на этих же классах функций.

Пусть функция $f(x, y)$ определена и интегрируема в прямоугольнике $Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ и требуется приближённо вычислить интеграл

$$J(f) = \iint_{(Q)} f(x, y) dx dy. \quad (1)$$

Всякая кубатурная формула

$$\mathcal{J}(f) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n p_{ki} f(x_k, y_i) + R_{mn}(f) := L(f; X, Y; P) + R_{mn}(f) \quad (2)$$

для приближённого вычисления интеграла (1) задаётся вектором $(X, Y; P)$ узлов

Адрес для корреспонденции: Алигаваров Сурадж Алигаварович. 736001, Республика Таджикистан, г.Хорог, ул.Ленина, 28, Хорогский государственный университет.
E-mail: surajo7_88@mail.ru.

$$X = \{x_k : a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b\},$$

$$Y = \{y_k : c \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq d\}$$

и коэффициентов

$$P = \{p_{ki} : k = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n\},$$

где p_{ki} – произвольные действительные числа, $R_{mn}(f) := R_{mn}(f; X, Y; P)$ – погрешность формулы (2) на функцию f . Для краткости точки прямоугольника Q будем иногда обозначать через $M = M(x, y)$, а узлы $M_{ki} = M(x_k, y_i)$. При фиксированных $m, n \in \mathbb{N}$ через \mathcal{A} будем обозначать множество векторов $(X, Y; P)$ узлов и коэффициентов, для которых формула (2) имеет смысл. Положим

$$|R_{mn}(f; X, Y; P)| = |J(f) - L(f; X, Y; P)|$$

и равенством

$$R_{mn}(\mathfrak{M}; X, Y; P) = \sup\{|R_{mn}(f; X, Y; P)| : f \in \mathfrak{M}\}$$

определим погрешность кубатурной формулы (2) на некотором классе \mathfrak{M} -функций $f(x, y)$, интегрируемых в области Q . Если задан класс \mathfrak{M} и множество векторов узлов и коэффициентов $(X, Y; P)$, то задача состоит в отыскании величины [1]

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M}) = \inf\{R_{mn}(\mathfrak{M}; X, Y; P) : (X, Y; P) \in \mathcal{A}\},$$

а также вектора $(X^0, Y^0, P^0) \in \mathcal{A}$, для которого

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M}) = R_{mn}(\mathfrak{M}; X^0, Y^0, P^0).$$

Кубатурная формула (2), определяемая вектором (X^0, Y^0, P^0) , является наилучшей для класса \mathfrak{M} среди всех кубатурных формул, у которых $(X, Y; P) \in \mathcal{A}$. Введём в рассмотрение следующие классы функций: $H_1^{\omega_1, \omega_2}(Q)$ – класс определённых на Q функций $f(x, y)$ таких, что для любых двух точек $(x', y'), (x'', y'') \in Q$, выполняется неравенство

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq \omega_1(|x' - x''|) + \omega_2(|y' - y''|),$$

где $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$ – заданные модули непрерывности, то есть непрерывные неубывающие полуаддитивные функции в нуле равные нулю.

Наряду с классом функций $H_1^{\omega_1, \omega_2}(Q)$, параллельно будем рассматривать классы $H_2^{\omega_1, \omega_2}(Q), H_{1, \rho}^{\omega}(Q)$ и $H_{2, \rho}^{\omega}(Q)$ – функций $f(x, y)$, определённых на Q и для любых точек

$$M' = M(x', y'), M'' = M(x'', y'') \text{ и } M^* = M\left(\frac{x' + x''}{2}, \frac{y' + y''}{2}\right),$$

принадлежащих области Q и удовлетворяющих соответствующим условиям

$$|f(M') + f(M'') - 2f(M^*)| \leq 2 \left[\omega_1 \left(\frac{|x' - x''|}{2} \right) + \omega_2 \left(\frac{|y' - y''|}{2} \right) \right],$$

$$|f(M') - f(M'')| \leq \omega(\rho(M', M'')),$$

$$|f(M') + f(M'') - 2f(M^*)| \leq \omega(\rho(M', M^*)) + \omega(\rho(M^*, M'')),$$

где $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности, а под $\rho(A, B)$ будем понимать одну из следующих метрик между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ из Q :

$$\rho_1(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ – евклидово расстояние,}$$

$$\rho_2(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \text{ – хэммингово расстояние,}$$

$$\rho_3(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} \text{ – расстояние Минковского.}$$

В принятых обозначениях, например, включение $f \in H_{1, \rho_1}^{\omega}(Q)$ предполагает выполнение неравенства (см., например, [1, стр. 177])

$$|f(M') - f(M'')| \leq \omega(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}),$$

а $f \in H_{2, \rho_1}^{\omega}(Q)$ предполагает выполнение неравенства

$$|f(M') + f(M'') - 2f(M^*)| \leq 2\omega \left[\sqrt{\left(\frac{x' - x''}{2}\right)^2 + \left(\frac{y' - y''}{2}\right)^2} \right],$$

для любых точек $M(x', y'), M(x'', y'')$ и $M^*\left(\frac{x' + x''}{2}, \frac{y' + y''}{2}\right)$ принадлежащих прямоугольнику Q .

Сформулируем следующее утверждение

Теорема 1. Среди кубатурных формул вида (2) наилучшей для классов функций $H_1^{\omega_1, \omega_2}(Q), H_2^{\omega_1, \omega_2}(Q)$ и $H_{1, \rho_i}^{\omega}(Q), H_{2, \rho_i}^{\omega}(Q) (i = 1, 2, 3)$ является формула

$$\iint_{(Q)} f(x, y) dx dy = 4hq \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n f(a + (2k-1)h, c + (2i-1)q) + R_{mn}(f), \quad (3)$$

где $h = (b-a)/(2m), q = (d-c)/(2n)$. При этом

$$\mathcal{E}_{mn}(H_2^{\omega_1, \omega_2}(Q)) = \mathcal{E}_{mn}(H_1^{\omega_1, \omega_2}(Q)) = 4mn \left(q \int_0^h \omega_1(t) dt + h \int_0^q \omega_2(\tau) d\tau \right), \quad (4)$$

$$\mathcal{E}_{mn}(H_{2, \rho_1}^\omega(Q)) = \mathcal{E}_{mn}(H_{1, \rho_1}^\omega(Q)) = 4mn \int_0^h \int_0^q \omega(\sqrt{t^2 + \tau^2}) dt d\tau, \quad (5)$$

$$\mathcal{E}_{mn}(H_{2, \rho_3}^\omega(Q)) = \mathcal{E}_{mn}(H_{1, \rho_3}^\omega(Q)) = 4mn \max \left\{ \int_0^h \omega(t) dt, \int_0^q \omega(\tau) d\tau \right\}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{mn}(H_{2, \rho_2}^\omega(Q)) &= \mathcal{E}_{mn}(H_{1, \rho_2}^\omega(Q)) = 4mn \int_0^h \int_0^q \omega(t + \tau) dt d\tau = \\ &= 4mn \begin{cases} \int_0^h t \omega(t) dt + h \int_h^q \omega(t) dt + \int_q^{q+h} (q+h-t) \omega(t) dt, & q > h; \\ \int_0^q t \omega(t) dt + q \int_q^h \omega(t) dt + \int_h^{h+q} (q+h-t) \omega(t) dt, & q < h; \\ \int_0^h t \omega(t) dt + \int_h^{2h} (2h-t) \omega(t) dt, & q = h. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что равенства (4) и (5) ранее были доказаны в работе [2] (см., также [1, с.177-185]). По той же схеме буквальным повторением доказываются оба соотношения (6) и (7). Ради полноты, приведём доказательство соотношения (7) для классов $H_{1, \rho_2}^\omega(Q)$ и $H_{2, \rho_2}^\omega(Q)$. В самом деле, следуя рассуждению работы [2], каждому вектору (X, Y) , задающему решётку узлов $M_{ki} = M(x_k, y_i)$, сопоставим множество $H_{1, \rho_2, X, Y}^\omega(Q)$ функций $f \in H_{1, \rho_2}^\omega(Q)$, таких, что $f(M_{ki}) = 0 (k = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n)$. Фиксируем произвольный вектор (X, Y) . Если $f \in H_{1, \rho_2, X, Y}^\omega(Q)$, то для любой точки $M(x, y) \in Q$ и любого узла M_{ki} будем иметь

$$|f(M)| = |f(M) - f(M_{ki})| \leq \omega(\rho_2(M, M_{ki})) = \omega(|x - x_k| + |y - y_i|),$$

и, следовательно, в силу решётчатого расположения узлов M_{ki} , а также монотонности модуля непрерывности $\omega(\delta)$, имеет место неравенство

$$|f(M)| \leq \omega(\min_k |x - x_k| + \min_i |y - y_i|) \equiv \Psi_{X,Y}(M). \quad (8)$$

Элементарно доказывается, что функция $\Psi_{X,Y}(M) \in H_{1,\rho_2}^\omega(Q)$. В самом деле, для произвольных точек $M' = M(x', y')$, $M'' = M(x'', y'')$, пользуясь свойствами модуля непрерывности, имеем

$$\begin{aligned} |\Psi_{X,Y}(M'') - \Psi_{X,Y}(M')| &= \left| \omega\left(\min_k |x'' - x_k| + \min_i |y'' - y_i|\right) - \right. \\ &\quad \left. - \omega\left(\min_k |x' - x_k| + \min_i |y' - y_i|\right) \right| \leq \\ &\leq \omega\left(\left|\min_k |x'' - x_k| - \min_k |x' - x_k|\right| + \left|\min_i |y'' - y_i| - \min_i |y' - y_i|\right|\right) \leq \\ &\leq \omega\left(\min_k |x'' - x'| + \min_i |y'' - y'|\right). \end{aligned}$$

Поскольку, кроме того, $\Psi_{X,Y}(M_{ki}) = 0$, то $\Psi_{X,Y} \in H_{1,\rho_2,X,Y}^\omega(Q)$. Это с учётом неравенства (8) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} R_{mn}(H_{1,\rho_2,X,Y}^\omega(Q); X, Y) &= \sup \left\{ \left| \iint_{(Q)} f(x, y) dx dy \right| : f \in H_{1,\rho_2,X,Y}^\omega(Q) \right\} = \\ &= \iint_{(Q)} \Psi_{X,Y}(X, Y) dx dy = R_{mn}(\Psi_{X,Y}). \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя лемму Д.7 (см., [1, с.178]) к правой части равенства (9), сразу получаем неравенство

$$R_{mn}(\Psi_{X,Y}) \geq R_{mn}(\Psi_{X^0, Y^0}),$$

где вектор X^0, Y^0 – вектор, задаваемый равенствами

$$\begin{aligned} x_k^0 &= a + (2k - 1)h, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad h = (b - a) / (2m); \\ y_i^0 &= c + (2i - 1)q, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad q = (d - c) / (2n). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, учитывая равенство (9), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{mn}(H_{1,\rho_2}^\omega(Q)) &\geq \inf \{ R_{mn}(H_{1,\rho_2,X,Y}^\omega(Q); X, Y) : (X, Y) \in \mathcal{A} \} = \\ &= R_{mn}(\Psi_{X^0, Y^0}) = \iint_{(Q)} \Psi_{X^0, Y^0}(X, Y) dx dy. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим кубатурную формулу (2), заданную вектором $(X^0, Y^0; P^0)$ узлов (10) и коэффициентов $p_{ki}^0 = 4hq(k = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n)$. Очевидно, что p_{ki} есть площадь прямоугольника

$$d_{ki}^0 = \{a + 2(k-1)h < x < a + 2kh, c + 2(i-1)q < y < c + 2iq\}$$

с центром в узле $M(x_k^0, y_i^0)$, а потому для любого $f \in H_{1,\rho_2}^\omega(Q)$ имеем

$$\begin{aligned} |R_{mn}(f; X^0, Y^0; P^0)| &= \\ &= \left| \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \iint_{d_{ki}^0} [f(x, y) - f(x_k^0, y_i^0)] dx dy \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \iint_{d_{ki}^0} \omega(|x - x_k^0| + |y - y_i^0|) dx dy \right| = \\ &:= \iint_{(Q)} \Psi_{X^0, Y^0}(x, y) dx dy = R_{mn}(\Psi_{X^0, Y^0}). \end{aligned}$$

Поскольку последнее неравенство справедливо для любой функции $f \in H_{1,\rho_2}^\omega(Q)$, то имеем

$$\mathcal{E}_{mn}(H_{1,\rho_2}^\omega(Q)) \leq R_{mn}(\Psi_{X^0, Y^0}). \quad (12)$$

Сравнение оценки снизу (11) и сверху (12) приводит к равенству

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{mn}(H_{1,\rho_2}^\omega(Q)) &= R_{mn}(\Psi_{X^0, Y^0}) = \iint_{(Q)} \Psi_{X^0, Y^0}(x, y) dx dy = \\ &= 4mn \int_0^h \int_0^q \omega(t + \tau) dt d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Легко проверить, что равенство (13) справедливо и на классе функций $H_{2,\rho_2}^\omega(Q)$. В самом деле, представим погрешность формулы (2) с заданным вектором $(X^0, Y^0; P^0)$ узлов и коэффициентов в виде

$$\begin{aligned} R_{mn}(f; X^0, Y^0; P^0) &= \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \int_0^h \int_0^q [f(x_k^0 + t, y_i^0 + \tau) + f(x_k^0 + t, y_i^0 - \tau) + \end{aligned}$$

$$+f(x_k^0 - t, y_i^0 + \tau) + f(x_k^0 - t, y_i^0 - \tau) - 4f(x_k^0, y_i^0)]dtd\tau. \quad (14)$$

Оценивая по абсолютной величине равенство (14), сразу получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{mn}(H_{2,\rho_2}^\omega(Q)) &\leq R_{mn}(H_{2,\rho_2}^\omega(Q); X^0, Y^0; P^0) \leq \\ &\leq 4mn \int_0^h \int_0^q \omega(t + \tau)dtd\tau = \mathcal{E}_{mn}(H_{1,\rho_2}^\omega(Q)). \end{aligned} \quad (15)$$

С другой стороны, учитывая включение $H_{1,\rho_2}^\omega(Q) \subset H_{2,\rho_2}^\omega(Q)$, имеем:

$$\mathcal{E}_{mn}(H_{2,\rho_2}^\omega(Q)) \geq \mathcal{E}_{mn}(H_{1,\rho_2}^\omega(Q)) = 4mn \int_0^h \int_0^q \omega(t + \tau)dtd\tau. \quad (16)$$

Сравнивая неравенства (15) и (16), после элементарной вычисления двойного интеграла в правой части (16), приходим к равенству (7). Таким же образом доказывается равенство (6). Теорема 1 доказана.

Определим промежуточный класс $H_{2-\alpha}^{\omega_1, \omega_2}(Q)$ между определенными выше классами функций $H_1^{\omega_1, \omega_2}(Q)$ и $H_2^{\omega_1, \omega_2}(Q)$ следующим образом: $H_{2-\alpha}^{\omega_1, \omega_2}(Q)$ состоит из всех функций $f(x, y)$, определенных в области Q и для любых указанных выше точек M', M'' и M^* из области Q и любого $\alpha \in [0, 1]$, удовлетворяющих условию

$$|(1 + \alpha)f(M') + (1 - \alpha)f(M'') - 2f(M^*)| \leq 2 \left[\omega_1 \left(\frac{|x' - x''|}{2} \right) + \omega_2 \left(\frac{|y' - y''|}{2} \right) \right].$$

Аналогичным образом определим класс $H_{2-\alpha, \rho}^\omega(Q)$, $0 \leq \alpha \leq 1$ – функций $f(x, y)$, определенных на Q и удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned} |(1 + \alpha)f(M') + (1 - \alpha)f(M'') - 2f(M^*)| &\leq \\ &\leq (1 + \alpha)\omega(\rho(M', M^*)) + (1 - \alpha)\omega(\rho(M'', M^*)), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\rho(A, B)$ – одно из вышеперечисленных расстояний. Из неравенства (17) сразу следует, что в крайних точках $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ класс $H_{2-\alpha, \rho}^\omega(Q)$ совпадает, соответственно, с классами $H_{2, \rho}^\omega(Q)$ и $H_{1, \rho}^\omega(Q)$. Докажем, что класс $H_{2-\alpha, \rho}^\omega(Q)$ является промежуточным для этих классов.

Лемма. Если $\omega_1(t)$, $\omega_2(\tau)$ и $\omega(\delta)$ являются произвольными модулями непрерывности соответственно на отрезках $0 \leq t \leq b - a$, $0 \leq \tau \leq d - c$ и $0 \leq \delta \leq d$ (d – диаметр обл. Q), то при любых $\alpha \in [0, 1]$ имеют место следующие включения

$$H_1^{\omega_1, \omega_2}(Q) \subset H_{2-\alpha, \rho}^{\omega_1, \omega_2}(Q) \subset H_2^{\omega_1, \omega_2}(Q), \quad (18)$$

$$H_{1, \rho_i}^\omega(Q) \subset H_{2-\alpha, \rho_i}^\omega(Q) \subset H_{2, \rho_i}^\omega(Q) \quad (i=1, 2, 3). \quad (19)$$

Доказательство. Не уменьшая общности, докажем включение (19), так как включение (18) доказывается аналогичным образом. Сначала докажем левую часть (19), то есть докажем, что для $0 \leq \alpha \leq 1$ имеет место включение $H_{1, \rho_i}^\omega(Q) \subset H_{2-\alpha, \rho_i}^\omega(Q)$. В самом деле, для $i=1$ из (17) сразу следует, что если $f \in H_{1, \rho_1}^\omega(Q)$, то

$$\begin{aligned} & |(1+\alpha)f(M') + (1-\alpha)f(M'') - 2f(M^*)| = \\ & = |(1+\alpha)[f(M') - f(M^*)] + (1-\alpha)[f(M'') - f(M^*)]| \leq \\ & \leq (1+\alpha)\omega(\rho_1(M', M^*)) + (1-\alpha)\omega(\rho_1(M^*, M'')) = \\ & = (1+\alpha)\omega\left[\sqrt{\left(\frac{x' - x''}{2}\right)^2 + \left(\frac{y' - y''}{2}\right)^2}\right] + \\ & + (1-\alpha)\omega\left[\sqrt{\left(\frac{x' - x''}{2}\right)^2 + \left(\frac{y' - y''}{2}\right)^2}\right] = \\ & = 2\omega\left[\sqrt{\left(\frac{x' - x''}{2}\right)^2 + \left(\frac{y' - y''}{2}\right)^2}\right], \end{aligned}$$

а это означает, что $f \in H_{2-\alpha, \rho_1}^\omega(Q)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$, и таким образом левая часть включения (19) доказана. Теперь докажем, что $H_{2-\alpha, \rho_1}^\omega(Q) \subset H_{2, \rho_1}^\omega(Q)$. Очевидно, что если при любом $\alpha \in [0, 1]$ функция $f \in H_{2-\alpha, \rho_1}^\omega(Q)$, то одновременно выполняются оба неравенства

$$\begin{aligned} & |(1+\alpha)f(M') + (1-\alpha)f(M'') - 2f(M^*)| \leq \\ & \leq (1+\alpha)\omega(\rho_1(M', M^*)) + (1-\alpha)\omega(\rho_1(M^*, M'')), \\ & |(1-\alpha)f(M') + (1+\alpha)f(M'') - 2f(M^*)| \leq \\ & \leq (1-\alpha)\omega(\rho_1(M', M^*)) + (1+\alpha)\omega(\rho_1(M^*, M'')). \end{aligned}$$

Учитывая эти неравенства для произвольной функции $f \in H_{2, \rho_1}^\omega(Q)$ будем иметь

$$\begin{aligned}
& |f(M') + f(M'') - 2f(M^*)| = \\
& = |[(1 + \alpha)f(M') + (1 - \alpha)f(M'') - 2f(M^*)] + \\
& + [(1 - \alpha)f(M') + (1 + \alpha)f(M'') - 2f(M^*)]| / 2 \leq \\
& \leq | (1 + \alpha)f(M') + (1 - \alpha)f(M'') - 2f(M^*) | / 2 + \\
& + | (1 - \alpha)f(M') + (1 + \alpha)f(M'') - 2f(M^*) | / 2 \leq \\
& \leq \{ (1 + \alpha)\omega(\rho_1(M', M^*)) + (1 - \alpha)\omega(\rho_1(M^*, M'')) \} + \\
& + \{ (1 - \alpha)\omega(\rho_1(M', M^*)) + (1 + \alpha)\omega(\rho_1(M^*, M'')) \} / 2 = \\
& = \omega(\rho_1(M', M^*)) + \omega(\rho_1(M^*, M'')),
\end{aligned}$$

то есть $f \in H_{2-\alpha, \rho_1}^\omega(Q)$, чем и завершаем доказательство леммы для класса $H_{2-\alpha, \rho_1}^\omega(Q)$. При $i = 2$ и $i = 3$ доказательство аналогично. Из доказанной леммы вытекают следующее утверждение.

Следствие 1. В условиях леммы для погрешности кубатурной формулы (2) при произвольном векторе $(X, Y; P)$ и любой $\alpha \in [0, 1]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
R_{mn}(H_1^{\omega_1, \omega_2}(Q); X, Y; P) &\leq R_{mn}(H_{2-\alpha}^{\omega_1, \omega_2}(Q); X, Y; P) \leq R_{mn}(H_2^{\omega_1, \omega_2}(Q); X, Y; P), \\
R_{mn}(H_{1, \rho}^\omega(Q); X, Y; P) &\leq R_{mn}(H_{2-\alpha, \rho}^\omega(Q); X, Y; P) \leq R_{mn}(H_{2, \rho}^\omega(Q); X, Y; P),
\end{aligned}$$

откуда, в свою очередь, сразу вытекают также неравенства

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{mn}(H_1^{\omega_1, \omega_2}(Q)) &\leq \mathcal{E}_{mn}(H_{2-\alpha}^{\omega_1, \omega_2}(Q)) \leq \mathcal{E}_{mn}(H_2^{\omega_1, \omega_2}(Q)), \\
\mathcal{E}_{mn}(H_{1, \rho}^\omega(Q)) &\leq \mathcal{E}_{mn}(H_{2-\alpha, \rho}^\omega(Q)) \leq \mathcal{E}_{mn}(H_{2, \rho}^\omega(Q)),
\end{aligned} \tag{20}$$

где $\rho(A, B)$ – одно из расстояний $\rho_i(A, B)$ ($i = 1, 2, 3$).

Воспользуясь результатом теоремы 1 и следствием 1, докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Среди кубатурных формул вида (2) наилучшей для классов функций $H_{2-\alpha}^{\omega_1, \omega_2}(Q), H_{2-\alpha, \rho_i}^\omega(Q)$ ($i = 1, 2, 3$) при любом $\alpha \in [0, 1]$ является формула прямоугольников (3). При этом для точной оценки погрешности формулы (3) на указанных классах функций справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{mn}(H_{2-\alpha}^{\omega_1, \omega_2}(Q)) = 4mn \left(q \int_0^h \omega_1(t) dt + h \int_0^q \omega_2(\tau) d\tau \right), \tag{4}'$$

$$\mathcal{E}_{mn}(H_{2-\alpha, \rho_1}^\omega(Q)) = 4mn \int_0^h \int_0^q \omega(\sqrt{t^2 + \tau^2}) dt d\tau, \quad (5)'$$

$$\mathcal{E}_{mn}(H_{2-\alpha, \rho_3}^\omega(Q)) = 4mn \max \left\{ \int_0^h \omega(t) dt, \int_0^q \omega(\tau) d\tau \right\}, \quad (6)'$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{mn}(H_{2-\alpha, \rho_2}^\omega(Q)) = \\ & = 4mn \begin{cases} \int_0^h t\omega(t) dt + h \int_h^q \omega(t) dt + \int_q^{q+h} (q+h-t)\omega(t) dt, & q > h; \\ \int_0^q t\omega(t) dt + q \int_q^h \omega(t) dt + \int_h^{h+q} (q+h-t)\omega(t) dt, & q < h; \\ \int_0^h t\omega(t) dt + \int_h^{2h} (2h-t)\omega(t) dt, & q = h. \end{cases} \quad (7)' \end{aligned}$$

Доказательство. Не уменьшая общности, докажем равенство (5)'. Согласно второму неравенству (20) следствия 1 и равенству (5), сразу запишем оценку снизу при всех $\alpha \in [0, 1]$:

$$\mathcal{E}_{mn}(H_{2-\alpha, \rho_1}^\omega(Q)) \geq \mathcal{E}_{mn}(H_{1, \rho_1}^\omega(Q)) = 4mn \int_0^h \int_0^q \omega(\sqrt{t^2 + \tau^2}) dt d\tau, \quad (21)$$

и доказательство сводится к получению оценки сверху, совпадающей с правой частью неравенства (21). С этой целью для произвольной $f \in H_{2, \rho_1}^\omega(Q)$, оценивая по абсолютной величине равенство (14), получаем

$$R_{mn}(H_{2, \rho_1}^\omega(Q); X^0, Y^0; P^0) = 4mn \int_0^h \int_0^q \omega(\sqrt{t^2 + \tau^2}) dt d\tau$$

и, согласно второму неравенству из (20), имеем

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{mn}(H_{2-\alpha, \rho_1}^\omega(Q)) \leq \mathcal{E}_{mn}(H_{2, \rho_1}^\omega(Q)) = \\ & = R_{mn}(H_{2, \rho_1}^\omega(Q); X^0, Y^0; P^0) = 4mn \int_0^h \int_0^q \omega(\sqrt{t^2 + \tau^2}) dt d\tau. \quad (22) \end{aligned}$$

Требуемое равенство (5)' получаем из сопоставления неравенств (21) и (22). Аналогичным образом доказываются равенства (4)', (6)' и (7)', чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Теорема 3. *Наилучшая кубатурная формула (3) для классов функций $H_{2-\alpha}^{\omega_1, \omega_2}(Q), H_{2-\alpha, \rho_1}^{\omega}(Q) (i=1, 2, 3)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ единственна.*

Доказательство. Не умаляя общности, утверждение теоремы докажем для класса $H_{2-\alpha, \rho_1}^{\omega}(Q)$. Будем следовать схеме рассуждения работы [3]. Предположим, что это не так, а именно, что существует другая формула вида (2) с вектором узлов и коэффициентов (X^*, Y^*, P^*) , имеющая на классе функций $H_{2-\alpha, \rho_1}^{\omega}(Q)$ точную оценку погрешности, равную правой части равенства (5)'. Тогда из соотношения

$$\begin{aligned} 4mn \int_0^h \int_0^q \omega(\sqrt{t^2 + \tau^2}) dt d\tau &= \inf \{ R_{mn}(H_{1, \rho_1}^{\omega}(Q); X, Y; P) : (X, Y; P) \in \mathcal{A} \} \leq \\ &\leq R_{mn}(H_{1, \rho_1}^{\omega}(Q); X^*, Y^*; P^*) = 4mn \int_0^h \int_0^q \omega(\sqrt{t^2 + \tau^2}) dt d\tau. \end{aligned}$$

получим, что

$$\mathcal{E}_{mn}(H_{1, \rho_1}^{\omega}(Q)) = R_{mn}(H_{1, \rho_1}^{\omega}(Q); X^*, Y^*; P^*) = 4mn \int_0^h \int_0^q \omega(\sqrt{t^2 + \tau^2}) dt d\tau.$$

Из полученного равенства заключаем, что формула (2) с векторами узлов и коэффициентов (X^*, Y^*, P^*) должна быть наилучшей и для класса $H_{1, \rho_1}^{\omega}(Q)$, чего быть не может, поскольку, как доказано в теореме 1 (равенство (5)), среди всех формул вида (2) формула прямоугольников (3) является наилучшей. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988, 256 с.
2. Корнейчук Н.П. – Матем. заметки, 1968, т.3, №5, с.565-576.
3. Лебедь Г.К. – ИАН СССР, сер.матем., 1970, т.34, с.639-661.

С.А.АЛИГАВАРОВ

БЕХТАРИН ФОРМУЛАҲОИ КУБАТУРӢ БАРОИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ ФУНКСИЯҲОИ ДУТАГӢИРӢБАНДА, КИ БО МОДУЛИ БЕФОСИЛАГӢ ДОДА ШУДААНД

Донишгоҳи давлатии Хоруг ба номи М.Назаршоев

Дар мақола масъалаи хурдкунии хатогии формулаи кубатурӣ барои синфҳои функсияҳо, ки бо модули бифосилагӣ дода шудааст, ҳал шудааст. Қимати аниқии хатогӣ дар синфи функсияҳои ду тағйирёбандаи додашуда, ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: формулаи кубатурӣ – ҳатоғӣ – сарҳади аниқи болои – модули бефосилагӣ.

S.A.ALIGAVAROV

THE BEST CUBATURE FORMULAS FOR SOME CLASSES OF TWO VARIABLES FUNCTIONS GIVEN BY MODULUS OF CONTINUITY

M.Nazashoev State University of Khorog

In this paper the problem of minimization error of cubature formulas on classes functions given by modulus of continuity is solved. The exact values of error on considered classes functions of two variables is founded.

Key words: cubature formula – error – upper boundary – modulus of continuity.

УДК 517.5

К.К.ПАЛАВОНОВ

**О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И
ЗНАЧЕНИЯХ ПОПЕРЕЧНИКОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ В L_2**

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 28.02.2013 г.

Для классов периодических функций, задаваемых модулями непрерывности m -го порядка $\omega_m(f; t)$ и удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}; t) dt \leq \Phi(h),$$

где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq \pi/n$, $\Phi(t)$ — произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$, вычислены точные значения различных n -поперечников.

Ключевые слова: наилучшее приближение – экстремальная характеристика – обобщенный модуль непрерывности – n -поперечники.

1. Пусть $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ - пространство измеримых по Лебегу вещественных 2π -периодических функций f , имеющих конечную норму

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Символом \mathcal{T}_{2n-1} обозначим подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка, не превосходящего $n-1$. Известно [1], что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

Адрес для корреспонденции: Палавовов Курбоназар Курбонбекович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет.
E-mail: kurbonazar-1987@mail.ru.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

величина её наилучшего полиномиального приближения элементами подпространства \mathcal{T}_{2n-1} равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &= \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где $\rho_k^2 := a_k^2 + b_k^2$, $S_{n-1}(f, x)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f . Под модулем непрерывности m -го ($m \in N$) порядка функции $f \in L_2$ понимаем величину

$$\omega_m(f, t) := \sup \{ \|\Delta_h^m(f)\| : |h| \leq t \},$$

где

$$\|\Delta_h^m(f)\| := \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x + (m-k)h)$$

конечная разность m -го порядка функции $f \in L_2$ в точке x с шагом h .

Под $L_2^{(r)}$ ($r \in Z_+$; $L_2^{(0)} \equiv L_2$) понимаем множество 2π периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка принадлежат пространству L_2 .

При решении экстремальных задач теории аппроксимации в пространстве L_2 , связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \chi \cdot n^{-r} \omega_m(f^{(r)}, t/n); t > 0,$$

где $f \in L_2^{(r)}$, $m \in N$, $r \in Z_+$, $f^{(0)} \equiv f$, рассматривались различные экстремальные характеристики, способствовавшие уточнению оценок сверху констант χ (см., например, [1]-[16]). В работе [1] Н.И.Черных отмечал, что поскольку функционал

$$\left\{ \frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^2(f, t) \sin ntdt \right\}^{1/2}$$

меньше джексоновского функционала $\omega_m(f, \pi/n)$ ($f \neq const$), то по-видимому, он более естественен для характеристики величин наилучших полиномиальных приближений

$E_{n-1}(f)$ периодических функций в L_2 . Исходя из сказанного, например, в [10] была рассмотрена следующая экстремальная характеристика

$$\chi_{m,n,r}(h) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \right)^{m/2}} \quad (1)$$

и показано, что при $0 < h \leq \pi / (2n)$; $n, m \in N$ и $r \in Z_+$ справедливы равенства

$$\chi_{m,n,r}(h) = \left\{ \frac{nh}{2(nh - \sin nh)} \right\}^{m/2}.$$

При этом полученная в [10] точная оценка величины (1) в определенном смысле обобщила один из результатов Л.В.Тайкова (см. теорему 1 из [2]) на случай произвольного модуля непрерывности m -го ($m = 2, 3, \dots$) порядка. В качестве модификации (1) рассмотрим следующую экстремальную характеристику

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(h) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \right)^{m/2}}; h > 0, \quad (2)$$

которая, как следует из хода рассуждений нижедоказываемой теоремы, возникает естественно с весовой функцией $\varphi(h) := (h-t) \cdot h^{-2} \geq 0$, $0 \leq t \leq h$. Заметим, что аналогичная задача с весом $\psi(h) := (h-t)$, $0 \leq t \leq h$ в пространстве $C := C[0, 2\pi]$ рассмотрена в работе [17].

Теорема 1. Пусть $m, n \in N$, $r \in Z_+$. Тогда для любого числа h , удовлетворяющего условию $0 < h \leq \pi / n$, справедливо равенство

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(h) = \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \cdot \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \quad (3)$$

Существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, $f_0^{(r)} \neq \text{const}$, реализующая в правой части (2) верхнюю грань, равную (3).

Доказательство. Для получения оценки сверху величины (2) воспользуемся схемой рассуждений работы [16], где доказано, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cos k\tau \leq E_{n-1}^{2(1-\frac{1}{m})}(f) \frac{\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau)}{2n^{2r/m}}. \quad (4)$$

Интегрируя обе части (4) по переменной τ от 0 до u , получаем

$$uE_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \frac{\sin ku}{k} \leq E_{n-1}^{2(1-\frac{1}{m})}(f) \frac{1}{2n^{2r/m}} \cdot \int_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau) d\tau. \quad (5)$$

Интегрируя повторно неравенство (5) по переменной u от $u=0$ до $u=h$, будем иметь

$$\frac{h^2}{2} E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \frac{1 - \cos kh}{k^2} \leq E_{n-1}^{2(1-\frac{1}{m})}(f) \frac{1}{2n^{2r/m}} \cdot \int_0^h \left(\int_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau) d\tau \right) du$$

или что то же

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \left(\frac{2}{kh} \sin \frac{ht}{2} \right)^2 \leq E_{n-1}^{2(1-\frac{1}{m})}(f) \frac{1}{n^{2r/m}} \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-u) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u) du.$$

Из последнего неравенство следует, что

$$\left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{m/2} \cdot E_{n-1}(f) \leq n^{-r} \left(\frac{1}{h^2} \int_0^h (h-u) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u) du \right)^{m/2},$$

откуда получаем

$$\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{1}{h^2} \int_0^h (h-u) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u) du \right)^{m/2}} \leq \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \quad (6)$$

Неравенство (6) справедливо для любой $f \in L_2^{(r)}$, $f^{(r)} \neq const$, а потому из неё следует оценка сверху для величины (2):

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(h) \leq \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \quad (7)$$

Для получения оценки снизу величины $\mathcal{K}_{m,n,r}(h)$ рассмотрим функцию $f_0 := \sin nx \in L_2$. Поскольку

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \omega_m^2(f_0, t) = 2^m n^r \sin^m \left(\frac{nh}{2} \right), 0 \leq h \leq \pi/n,$$

путем непосредственных вычислений получаем

$$\left(\frac{1}{h^2} \int_0^h (h-u) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u) du \right)^{m/2} = h^m \cdot n^r \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{m/2}.$$

Поэтому, учитывая определение величины (2), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{m,n,r}(h) &\geq \frac{n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\frac{1}{h^2} \int_0^h (h-u) \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, u) du\right)^{m/2}} = \\ &= \left\{1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Равенство (3) получаем из сопоставления оценки сверху (7) и оценки снизу (8), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

2. Через $b_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $d^n(\mathfrak{M}, L_2)$, $d_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $\delta_n(\mathfrak{M}, L_2)$ и $\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2)$ обозначим соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n -поперечники некоторого центрально-симметричного компакта в пространстве L_2 . Указанные n -поперечники связаны в L_2 следующими соотношениями [18], [19]:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \quad (9)$$

Также полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup\{E_n(f) : f \in \mathfrak{M}\},$$

$$(1 - \cos nt)_*^m := \{(1 - \cos nt)^m, \text{ если } 0 < nt \leq \pi; 2^m, \text{ если } nt \geq \pi\}. \quad (10)$$

Непрерывную возрастающую на полуотрезке $[0, \infty)$ функцию Φ — такую, что $\Phi(0) = 0$, будем называть мажорантой. Для произвольных чисел $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in \mathbb{R}_+$ введем в рассмотрение следующие функции:

$$W_m^{(r)}(h) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h^2} \cdot \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \leq 1 \right\},$$

$$W_m^{(r)}(h, \Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h^2} \cdot \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt \leq \Phi(h) \right\}.$$

В принятых обозначениях справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и для величины $h \in \mathbb{R}_+$ выполнено условие $0 < nh \leq \pi$. Тогда справедливы равенства

$$\gamma_{2n-1}(W_m^{(r)}(h), L_2) = \gamma_{2n}(W_m^{(r)}(h), L_2) =$$

$$= E_{n-1}(W_m^{(r)}(h)) = n^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2}, \quad (11)$$

где $\gamma_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n -поперечников.

Доказательство. Используя определение класса $W_m^{(r)}(h)$, а также неравенство (6) и соотношения (9), получаем оценки сверху

$$\begin{aligned} \gamma_{2n}(W_m^{(r)}(h), L_2) &\leq \gamma_{2n-1}(W_m^{(r)}(h), L_2) \leq d_{2n-1}(W_m^{(r)}(h), L_2) \leq \\ &\leq E_{n-1}(W_m^{(r)}(h)) \leq n^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2}, \end{aligned} \quad (12)$$

С целью получения оценок снизу n -поперечников класса $W_m^{(r)}(h)$ рассмотрим на множестве $\mathcal{T}_{2n+1} \cap L_2$ шар

$$S_{2n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ T_n(x) \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \leq n^{-r} \left(1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right)^{-m/2} \right\}.$$

Для произвольного полинома $T_n \in S_{2n+1}$ имеет место неравенство [3]:

$$\omega_m^2(T_n^{(r)}, t) \leq 2^m n^{2r} \cdot (1 - \cos nt)^m \|T_n\|^2, \quad (13)$$

откуда при $0 < h \leq \pi/n$ с учетом равенства (10) получаем

$$\frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, t) dt \leq 2n^{2r/m} \cdot \|T_n\|^{2/m} \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t)(1 - \cos nt) dt \leq 1. \quad (14)$$

Учитывая определение класса $W_m^{(r)}(h)$ и неравенство (14), имеем $S_{2n+1} \subset W_m^{(r)}(h)$, а потому, используя соотношение (9) и определение бернштейновского n -поперечника, запишем оценки снизу для рассматриваемых n -поперечников

$$\begin{aligned} \gamma_{2n-1}(W_m^{(r)}(h), L_2) &\geq \gamma_{2n}(W_m^{(r)}(h), L_2) \geq b_{2n}(W_m^{(r)}(h), L_2) \geq \\ &\geq b_{2n}(S_{2n+1}, L_2) \geq n^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Сопоставляя оценки сверху (12) и снизу (15), получаем требуемое равенство (11).

Теорема 2 доказана.

Вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций, принадлежащих $L_2^{(r)}$ $r \in Z_+$, рассматривались во многих

работах (см. например, [9]-[16] и приведенную там литературу). Для изучаемых нами в этой статье классов функций данный вопрос также является актуальным. Справедливо

Следствие 1. При выполнении условия теоремы 2, для любых $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\sup \left\{ |a_n(f)|, |b_n(f)| : f(x) \in W_m^{(r)}(h, \Phi) \right\} = n^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2}.$$

Теорема 3. Пусть мажоранта Φ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \geq \frac{2}{\pi^2 - 4} \cdot \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \cdot \int_0^h (h-t)(1 - \cos t)_* dt. \quad (16)$$

Тогда для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \gamma_{2n-1}(W_m^{(r)}(h, \Phi), L_2) &= \gamma_{2n}(W_m^{(r)}(h, \Phi), L_2) = \\ &= E_{n-1}(W_m^{(r)}(h, \Phi)) = \frac{1}{n^r} \cdot \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\}^{m/2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\gamma_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников, перечисленных ранее. Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (16), не пусто.

Доказательство. Полагая в вытекающем из соотношения (6) неравенстве

$$E_{n-1}^2(f) \leq n^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2} \cdot \left(\frac{1}{h^2} \int_0^h (h-u) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u) du \right)^{m/2},$$

$h = \pi/n$ и используя определение класса $W_m^{(r)}(h, \Phi)$, для произвольной функции $f \in W_m^{(r)}(h, \Phi)$ получаем

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{n^r} \cdot \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\}^{m/2}.$$

Из последнего неравенства с учётом соотношения (9) имеем оценки

$$\begin{aligned} \gamma_{2n}(W_m^{(r)}(h, \Phi), L_2) &\leq \gamma_{2n-1}(W_m^{(r)}(h, \Phi), L_2) \leq d_{2n-1}(W_m^{(r)}(h, \Phi), L_2) \leq \\ &\leq E_{n-1}(W_m^{(r)}(h, \Phi)) \leq n^{-r} \cdot \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\}^{m/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для получения оценок снизу этих n -поперечников, как и в предыдущей теореме, рассмотрим в $\mathcal{T}_{2n+1} \cap L_2$ шар

$$\tilde{\mathcal{S}}_{2n+1} := \left\{ T_n(x) \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \leq \frac{1}{n^r} \cdot \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right)^{m/2} \right\}$$

и докажем включение $\tilde{\mathcal{S}}_{2n+1} \subset W_m^{(r)}(h, \Phi)$. Используя неравенство (13) и учитывая условия (16), для произвольного тригонометрического полинома $T_n \in \tilde{\mathcal{S}}_{2n+1}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, t) dt &\leq 2n^{2r/m} \cdot \|T_n\|^{2/m} \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t)(1 - \cos nt)_* dt \leq \\ &\leq \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t)(1 - \cos nt)_* dt \leq \Phi(h). \end{aligned}$$

Этим с учётом определения класса $W_m^{(r)}(h, \Phi)$ доказали, что включение $\tilde{\mathcal{S}}_{2n+1} \in W_m^{(r)}(h, \Phi)$ выполняется. Используя определение бернштейновского n -поперечника, запишем оценки снизу

$$\begin{aligned} \gamma_{2n-1}(W_m^{(r)}(h, \Phi), L_2) &\geq \gamma_{2n}(W_m^{(r)}(h, \Phi), L_2) \geq \\ &\geq b_{2n}(W_m^{(r)}(h, \Phi), L_2) \geq b_{2n}(\tilde{\mathcal{S}}_{2n+1}, L_2) \geq n^{-r} \cdot \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{m/2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Равенство (17) является результатом сопоставления неравенства (18) и (19).

Во второй части доказательства теоремы покажем, что множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (16), не пусто. С этой целью рассмотрим функцию $\Phi_*(h) = h^\alpha$, где

$$\alpha = \frac{8}{\pi^2 - 4}, \quad (1, 3 < \alpha < 1, 4) \quad (20)$$

и убедимся в том, что для неё имеет место соотношение (16). Конкретизируя с этой целью в (16) функцию Φ , получаем неравенство

$$\left(\frac{nh}{\pi} \right)^\alpha \geq \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t)(1 - \cos nt)_* dt$$

или что то же

$$\left(\frac{nh}{\pi} \right)^\alpha \geq \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \frac{1}{(nh)^2} \int_0^{nh} (nh-t)(1 - \cos t)_* dt.$$

Полагая в последнем неравенстве $nh = \mu\pi$ ($0 \leq \mu \leq \infty$), получаем

$$\mu^{\alpha+2} \geq \frac{2}{\pi^2 - 4} \int_0^{\mu\pi} (\mu\pi - t)(1 - \cos t) dt. \quad (21)$$

Используя определение функции (10), неравенство (21) запишем в виде

$$\mu^{\alpha+2} \geq \frac{1}{\pi^2 - 4} \begin{cases} (\mu\pi)^2 - 2(1 - \cos \mu\pi), & \text{если } 0 \leq \mu \leq 1, \\ \pi^2 - 4 + \pi^2(\mu - 1)^2, & \text{если } \mu \geq 1, \end{cases} \quad (22)$$

которое еще нужно доказать.

Рассмотрим, исходя из (22), на отрезке $[0, 1]$ вспомогательную функцию

$$\varphi(\mu) := \mu^{\alpha+2} - \frac{1}{\pi^2 - 4} ((\mu\pi)^2 - 2(1 - \cos \mu\pi)). \quad (23)$$

Учитывая, что $1, 3 < \alpha < 1, 4$, в окрестности нуля справа имеем

$$\varphi(\mu) := \mu^{\alpha+2} \left(1 - \frac{\pi^4}{12(\pi^2 - 4)} O(\mu^{2-\alpha}) \right). \quad (24)$$

Из (24) следует, что существует отрезок $[0, a]$ $0 < a < 1$, на котором функция φ неотрицательна. Покажем, что и на всем отрезке $[0, 1]$ функция φ является таковой. Для этого применим метод рассуждений от противного, полагая, что на интервале $(0, 1)$ существует некоторая точка $\xi \in (0, 1)$, в которой функция φ меняет свой знак. Поскольку, как следует из (23), $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, то на основании теоремы Ролля производная первого порядка

$$\varphi'(\mu) = (\alpha + 2)\mu^{\alpha+1} - \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} \left(\mu - \frac{1}{\pi} \sin \mu\pi \right) \quad (25)$$

должна иметь на интервале $(0, 1)$ не менее двух различных нулей. Из формулы (25) и (20) следует, что $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$. Но тогда производная второго порядка

$$\varphi''(\mu) = (\alpha + 2)(\alpha + 1)\mu^\alpha - \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} (1 - \cos \mu\pi) \quad (26)$$

должна иметь на множестве $(0, 1)$ не менее трёх различных нулей. Из равенства (26) получаем $\varphi''(0) = 0$. Следовательно, и производная третьего порядка

$$\varphi'''(\mu) = (\alpha + 2)(\alpha + 1)\alpha\mu^{\alpha-1} - \frac{2\pi^3}{\pi^2 - 4} \sin \mu\pi \quad (27)$$

на интервале $(0, 1)$ должна иметь не менее трёх нулей. Поскольку, как следует из (27), $\varphi'''(0) = 0$, то производная четвертого порядка

$$\varphi^{(4)}(\mu) = (\alpha + 2)(\alpha + 1)\alpha(\alpha - 1)\mu^{\alpha-2} - \frac{2\pi^4}{\pi^2 - 4} \cos \mu\pi \quad (28)$$

также обязана иметь на $(0,1)$ не менее трёх различных нулей.

Из (28) видно, что производная $\varphi^{(4)}(\mu)$ на интервале $(0,1)$ является разностью двух функций, из которых первая принимает лишь положительные значения и является выпуклой вниз, а вторая является выпуклой вверх и положительной на интервале $(0,1/2)$ и отрицательной и выпуклой вниз на интервале $(1/2,1)$. Исходя из геометрических соображений очевидно, что функция $\varphi^{(4)}$ на $(0,1)$ может иметь не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость первого неравенства в соотношении (22).

Аналогичным образом, исходя из второго неравенства (22), рассмотрим, учитывая значения α , на множестве $1 \leq \mu < \infty$ вспомогательную функцию

$$\psi(\mu) := \mu^{\alpha+2} - 1 - \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} (\mu - 1)^2, \mu \geq 1.$$

Поскольку при $\mu \geq 1$ для её производной первого порядка имеем

$$\psi'(\mu) = (\alpha + 1)\mu^{\alpha+1} - \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} (\mu - 1) = \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} (\mu(\mu^\alpha - 1) + 1) > 0,$$

то из равенства $\psi(1) = 0$ следует, что функция $\psi(\mu)$ является положительной монотонно возрастающей на интервале $(1, \infty)$. Следовательно, и второе неравенство в условии (22) имеет место. Теорема 3 полностью доказана.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$ $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место следующее равенство

$$\sup \left\{ |a_n(f)|, |b_n(f)| : f(x) \in W_m^{(r)}(h, \Phi) \right\} = \frac{1}{n^r} \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\}^{m/2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Черных Н.И. – Матем. заметки, 1967, т.2, №5, с.513-522.
2. Тайков Л.В. – Матем. заметки, 1976, т.20, №3, с.433-438.
3. Тайков Л.В. – Матем. заметки, 1979, т.25, №2, с.217-223.
4. Лигун А.А. – Матем. заметки, 1978, т.24, №6, с.785-592.
5. Юдин В.А. – ДАН СССР, 1980, т.251, №1, с.54-57.
6. Бабенко А.Г. – Матем. заметки, 1986, т.39, №5, с.651-664.
7. Лигун А.А. – Матем. заметки, 1988, т.43, №6, с.757-769.
8. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p . Тула: ТулГУ, 1995.

9. Вакарчук С.Б. – Матем. заметки, 2005, т.78, №5, с.792-796.
10. Вакарчук С.Б. – Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.
11. Шабозов М.Ш. – Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
12. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. – ДАН России, 2010, т.435, №2, с.178-181.
13. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. – Матем. заметки, 2011, т.90, №5, с.764-775.
14. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. – Сибир. мат. журн., 2011, №4, с.1414-1427.
15. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. – Journal of Approximation Theory, 2012, v.164, issue 1, pp.869-878.
16. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. – Anal. Mathematica, 2012, т.38, с.147-159.
17. S.Foucart, Yu. Kryakin and A.Shadrin, On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric, Constr. Approx., 29(2009), p.157-179.
18. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1976.
19. Pinkus A. *n*-Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag. 1985.

К.К.ПАЛАВОНОВ

ОИД БА НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ФУНКСИЯҲОИ ДАВРӢ ВА ҚИМАТИ АНИҚИ ҚУТРҲОИ БАЪЗЕ СИНФИ ФУНКСИЯҲО ДАР L_2

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Барои синфи функсияҳои даврӣ, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби m -уми $\omega_m(f; t)$ дода шуда, шарти

$$\frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}; t) dt \leq \Phi(h),$$

–ро қаноат мекунад, дар ин ҷо $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq \pi/n$, $\Phi(t)$ — ихтиёри функсияи афзуншавандаи бефосила буда, $\Phi(0) = 0$ аст, қимати аниқи n -қутрҳои гуногун ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин – характеристикаи экстремалӣ – модули бефосилагии умумикардасуда – n -қутрҳо.

K.K.PALAVONOV

ABOUT THE BEST APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS AND VALUE OF WIDTHS SOME CLASSES IN L_2

Tajik National University

In the article for classes of periodic functions which is given by modulus of continuity of m -order $\omega_m(f; t)$ and satisfying the condition

$$\frac{1}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f^{(r)}; t) dt \leq \Phi(h),$$

were $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq \pi / n$, $\Phi(t)$ is an arbitrary continuous increasing function with $\Phi(0) = 0$, founded of exact value of some different n -widths.

Key words: the best approximation – extremal characteristic – generalized modulus of continuity – n -widths.

УДК 577.472

Ф.С.КОМИЛОВ, И.Л.КОСИМОВ

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫБНОЙ ПОПУЛЯЦИИ
ЭКОСИСТЕМЫ ПРУДА

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 18.05.2013 г.

Состояние экосистемы в каждый момент времени определяется концентрацией 15 фазовыми переменными. В модели рассматриваются три вида рыб – карп, белый толстолобик и белый амур. Другие переменные модели выбраны в соответствии с кормовой базой рыб и учёта круговорота вещества в экосистеме. Входными функциями модели являются температура воды и солнечная радиация. Включены также пять управляющих функций, характеризующих внесённые искусственные корма и минеральные удобрения.

Ключевые слова: рыбоводный пруд – экосистема – моделирование – рыба – карп – белый толстолобик – белый амур.

Работа [1] посвящена исследованию и имитационному моделированию экосистемы рыбоводного пруда. Математическая модель этой экосистемы включает только два вида рыбы – белого толстолобика (*TL*) и карпа (*CR*). Излюбленным кормом белого толстолобика является фитопланктон, а карпа – бентосные организмы.

Целью данной работы является математическое моделирование экосистемы рыбоводного пруда, в котором наряду с упомянутыми рыбами учитывается также и белый амур. В работе [2] обоснованы критерии выбора фазовых переменных такой модели и приведены приёмы включения в модель воздействующих внешних функций. Построению математической модели жизненного цикла макрофитов экосистемы рыбоводного пруда посвящена работа [3]. Макрофиты, то есть высшие водные растения, являются излюбленным кормом белого амура. Исходя из кормовой базы рыб и учитывая круговорот вещества в экосистеме пруда, в модель включены:

PT – фитопланктон, *MT* – полупогружённые макрофиты, *MR* – погружённые макрофиты, *ZO* – зоопланктон, *BK* – бактерии, *BN* – бентос, *DW* и *DS* – детрит в воде и в осадках,

Адрес для корреспонденции: Комилов Файзали Саъдуллоевич, Косимов Исмоил Латипович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: komfaiz@mail.ru; QosIsmoil@mail.ru.

соответственно. Лимитирующими биогенными элементами роста и развития фитопланктона и макрофитов в экосистеме предполагаются PW и PS – суммарный неорганический фосфор, NW и NS – суммарный неорганический азот в воде и в осадках, соответственно.

Поскольку, как правило, в экосистемах рыбных прудов углерод не лимитирует продукционные процессы, но при этом является основной по весу составляющей биомассы, то, введя обозначения CW и CS для суммарного неорганического углерода в воде и в осадках, соответственно, его потребление в модели мы учитываем косвенно.

Входными функциями модели являются температура воды $f(T)$ и интенсивность солнечной радиации на поверхности водоёма $\xi(I_0)$. Включены также пять управляющих функций, характеризующих внесение искусственного корма ($\varphi^{CO}(t)$ – комбикорм, $\varphi^{CU}(t)$ – куколки тутового шелкопряда, $\varphi^{KR}(t)$ – кормовые растения) и минеральные удобрения ($\varphi^{SU}(t)$ – суперфосфат, $\varphi^{SE}(t)$ – аммиачная селитра).

Переход вещества с одного трофического уровня на другой в модели моделируется s -образными функциями вида

$$r(i, j) = \frac{\mu_{ij} \cdot i^s}{K_{ij}^s + i^s} \cdot j, \quad (1)$$

описывающими скорости потребления i -го субстрата j -им организмом, находящемся на следующем трофическом уровне, в которых μ_{ij} – максимальная скорость потребления ($l/сутки$), K_{ij} – коэффициент полунасыщения ($мг/л$), s – параметр, задающий крутизну графика трофической функции.

Выедание, например, бентоса карпом будет задаваться функцией

$$r(BN, CR) = \frac{\mu_{BNCR} \cdot BN^s}{K_{BNCR}^s + BN^s} \cdot CR.$$

Потребление биогенных элементов (углерода, азота и фосфора) в экосистеме синхронизировано в соответствии с законами стехиометрии. Соотношение углерода, азота и фосфора в живых организмах поддерживается примерно постоянным:

$$CW : NW : PW = X^{CW} : X^{NW} : X^{PW},$$

где X^{CW} , X^{NW} , X^{PW} стехиометрические коэффициенты для фосфора, азота и углерода, соответственно. Чтобы обеспечить такое соотношение между CW , NW и PW в биоте, необходимо выдержать потоки потребляемых углерод-, азота- и фосфорсодержащих веществ в таких же отношениях.

На основе приведённых соображений потребление фосфора фитопланктоном будет определяться потоком

$$Y_{PT}^{PW} = \min \left\{ r(PW, PT), \frac{1}{X_{PT}^{NW}} \cdot r(NW, PT) \right\}, \quad (2)$$

где $r(i, j)$ – функция вида (1), $X^{NW} PT$ – стехиометрический коэффициент фитопланктона при потреблении азота. Потребление азота фитопланктоном будет пропорционально $Y_{PT}^{NW} = X_{PT}^{NW} \cdot Y_{PT}^{PW}$, а углерода – $Y_{PT}^{CW} = X_{PT}^{CW} \cdot Y_{PT}^{PW}$.

В соответствии с принципом лимитирующих факторов потребление биогенных элементов фитопланктоном определяется с помощью следующей формулы:

$$\Psi_{PT}(PW, NW, CW) = Y_{PT}^{PW} + X_{PT}^{NW} \cdot Y_{PT}^{PW} + X_{PT}^{CW} \cdot Y_{PT}^{PW}.$$

Потребление биогенных элементов бактериями описывается аналогично, но с другими стехиометрическими коэффициентами:

$$\Psi_{BK}(PW, NW, CW) = Y_{BK}^{PW} + X_{BK}^{NW} \cdot Y_{BK}^{PW} + X_{BK}^{CW} \cdot Y_{BK}^{PW}.$$

А потребление биогенных элементов погруженными макрофитами определяется их потоками из воды и со дна. Поэтому на основе законов стехиометрии потребление фосфора вычисляется следующим образом:

$$Y_{MR}^{PW+PS} = \min \left[r(PW, MR) + r(PS, MR), \frac{r(NW, MR) + r(NS, MR)}{X_{MR}^{NW}} \right],$$

где PW, PS или NW, NS – стехиометрические коэффициенты погружённого макрофита при потреблении фосфора и азота. По этой формуле, определяя лимитирующий биогенный элемент, потребляемые потоки азота и углерода погруженными макрофитами будут заново пересчитываться согласно следующим формулам:

$$Y_{MR}^{NW+NS} = X_{MR}^{NW} \cdot Y_{MR}^{PW+PS}, Y_{MR}^{CW+CS} = X_{MR}^{CW} \cdot Y_{MR}^{PW+PS},$$

$$\Psi_{MR}(PW, PS, NW, NS, CW, CS) = Y_{MR}^{PW+PS} + X_{MR}^{NW} \cdot Y_{MR}^{PW+PS} + X_{MR}^{CW} \cdot Y_{MR}^{PW+PS}.$$

Для полупогруженных макрофитов характерно преимущественное потребление биогенов со дна, причём величина этого потока не столько зависит от биомассы зелёной части растений, сколько от биомассы корней, которая не входит в число переменных модели. Будем предполагать, что биомасса корней пропорциональна доступным биогенам седиментов. Тогда поток биогенов, потребляемых из седиментов, можно описать функцией $q(i)$ [$i=PS, NS$ или CS]. Потребление биогенов из воды при помощи водных корней начинается лишь при превышении растворенными питательными веществами определенных пороговых концентраций. Соответствующая трофическая функция $p(i, MT)$ [$i=PW, NW$

или CW]. В итоге потребление биогенных элементов полупогружёнными макрофитами задается следующим образом:

$$Y_{MT}^{PW+PS} = \min \left[p(PW, MT) + q(PS), \frac{p(NW, MT) + q(NS)}{X_{MT}^{NW}} \right],$$

$$Y_{MT}^{NW+NS} = X_{MT}^{NW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS}, Y_{MT}^{CW+CS} = X_{MT}^{CW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS},$$

$$\Psi_{MT}(PW, PS, NW, NS, CW, CS) = Y_{MT}^{PW+PS} + X_{MT}^{NW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS} + X_{MT}^{CW} \cdot Y_{MT}^{PW+PS}.$$

Скорости процессов потребления и роста определяются не только количеством доступного субстрата, но и температурой и освещенностью. Предполагается, что лимитированные светом и температурой можно задать мультипликативными членами в общей функции потока вещества:

$$A_{ij} = f_j(T) \cdot \xi_j(I_0) \cdot \psi_j(\sum i) \cdot (1 - \delta_j).$$

Здесь A_{ij} – течение потока вещества из i -го блока к j -ому блоку (например, из блока фитопланктона к блоку зоопланктона), $\psi_j(\sum i)$ – функция выедания субстрата (продуцентов, консументов или биогентов, то есть в частности $\psi_j(\sum i) = r(i, j)$, или $p(i, j)$, или же $q(i)$ и т.д.), δ_j - потери j -го организма на метаболизм, $f_j(T)$, $\xi_j(I_0)$ - функции лимитирования j -го организма температурой и светом (для продуцентов), соответственно ($0 < f_j(T)$, $\xi_j(I_0) \leq 1$), $j = PT, MT, MR, ZO, BK, BN, TL, CR$ или BA , T – температура воды, I_0 – интенсивность солнечной радиации на поверхности пруда.

Зависимость роста организмов от температуры описывается модифицированной эмпирической функцией Лемана [4]:

$$f_j(T) = \begin{cases} \exp \left[-4,6 \cdot \left(\frac{T_{opt}^j - T}{T_{opt}^j - T_{min}^j} \right)^4 \right], & \text{если } T < T_{opt}^j \\ \exp \left[-4,6 \cdot \left(\frac{T - T_{opt}^j}{T_{max}^j - T_{opt}^j} \right)^4 \right], & \text{если } T \geq T_{opt}^j, \end{cases}$$

где T_{opt}^j – оптимальная температура для развития j -го организма, T_{min}^j , T_{max}^j – минимальная и максимальная пределы толерантности j -го организма по температуре, соответственно.

Функцию, описывающую лимитированные роста фитопланктона светом, следуя Стилу[4], зададим в виде:

$$\xi_{PT}(I_0) = \frac{I_h}{I_{opt}^{PT}} \cdot \exp\left(1 - \frac{I_h}{I_{opt}^{PT}}\right),$$

где I_{opt}^{PT} – оптимальная освещённость для фитопланктона, I_h – освещённость на заданной глубине h .

Для вычисления I_h используется эмпирический закон Бэра-Ламберта об экспоненциальном затухании света с увеличением глубины: $I_h = I_0 \cdot e^{-\nu h}$, где I_0 – суммарная солнечная радиация на поверхности пруда. Коэффициент затухания света ν естественно предположить пропорциональным концентрациям взвешенных в воде веществ (фитопланктона, макрофитов и детрита):

$$\nu = k_w + k_{pr} \cdot (PT + MR) + k_{dm} \cdot d_{dm} \cdot (DW + MT),$$

где k_w – коэффициент затухания в чистой воде, k_{pr} – коэффициент затемнения фитопланктоном PT и погружённым макрофитом MR , k_{dm} – коэффициент затемнения детритом DW и полупогружённым макрофитом MT , d_{dm} – доля детрита и полупогружённого макрофита, взвешенная в воде.

Для описания лимитирования роста полупогружённых макрофитов светом используется модифицированная формула Стила. В зависимости от роста тростников она работает в двух режимах:

$$\xi_{MT}(I_0) = \begin{cases} \frac{I_h}{I_{opt}^{MT1}} \cdot e^{\left(1 - \frac{I_h}{I_{opt}^{MT1}}\right)}, & \text{если } MT < MT_{cr} \\ \frac{I_0}{I_{opt}^{MT2}} \cdot e^{\left(1 - \frac{I_0}{I_{opt}^{MT2}}\right)}, & \text{если } MT \geq MT_{cr}, \end{cases}$$

где, по-прежнему, I_h – освещённость на заданной глубине h (вычисляется по формуле Бэра-Ламберта) и I_0 – суммарная солнечная радиация на поверхности водоема, а I_{opt}^{MT1} и I_{opt}^{MT2} – оптимальные освещённости для роста тростников под и над водой ($I_{opt}^{MT1} \leq I_{opt}^{MT2}$), соответственно и MT_{cr} – критическая концентрация тростников, которая оценивается их биомассой в момент выхода стебля из воды.

Функция, описывающая лимитированные роста MR -погружённых макрофитов светом, является функцией Ди Торо [4]:

$$\xi_{MR}(I_0) = \frac{e}{vh} \left[e^{\left(\frac{I_h}{I_{opt}^{MR}} \cdot vh \right)} - e^{-\frac{I_h}{I_{opt}^{MR}}} \right],$$

где I_{opt}^{MR} – оптимальная освещённость для роста и развития MR , а остальные коэффициенты и параметры имеют те же смысл, что и раньше.

Процессы бактериальной деструкции аппроксимируются уравнениями химической кинетики 1-го порядка, причём предполагается, что детрит вновь распадается на азот- и фосфорсодержащие питательные вещества в соответствии с их стехиометрическим содержанием. Здесь уместны аналогии с теорией ферментативных реакций: некий «субстрат» – детрит переходит в «продукт» – биогенные вещества под действием своего рода «фермента» – бактерий. Часть продукта при этом используется бактериями для поддержания собственной жизнедеятельности.

В итоге, скорость протекания процесса бактериального разложения будет описываться формулой:

$$r(DW, BK) = \frac{\mu_{DWBK} \cdot DW^s}{K_{DWBK}^s + DW^s} \cdot BK,$$

где μ_{DWBK} – максимальная скорость разложения детрита бактериями, K_{DWBK}^s – соответствующая константы полунасыщения.

На скорость процессов деструкции существенно влияет температура. Поскольку бактериальные процессы ингибируются температурами, практически недостижимыми в условиях естественных водоемов (+50-60°C), для описания температурной зависимости в этом случае используется формула Вант-Гоффа:

$$f_{DW}(T) = 2^{\frac{(T-T_0)}{10}},$$

отражающая факт увеличения скорости процессов в два раза при увеличении температуры на 10°C. Здесь T_0 – температура, при которой измерены остальные коэффициенты, входящие в описание процесса.

Таким образом, разложение детрита до фосфора определяется формулой:

$$A_{DWPW} = f_{DW}(T) \cdot k_{des} \cdot \frac{X_{BK}^{PW}}{X_{BK}^{PW} + X_{BK}^{NW} + X_{BK}^{CW} + k_{DWS}} \cdot r(DW, BK),$$

где k_{des} – коэффициент деструкции ($0 < k_{des} < 1$), X_{BK}^{PW} , X_{BK}^{NW} , X_{BK}^{CW} – стехиометрические коэффициенты бактерий при разложении детрита для фосфора, азота и углерода, соответственно; k_{DWS} – доля детрита, выходящего из круговорота и захороняемого в седментах.

Разложение детрита до азота и углерода, соответственно, будет:

$$A_{DWNW} = X_{BK}^{NW} \cdot A_{DWCW}, A_{DWCW} = X_{BK}^{CW} \cdot A_{DWPW}.$$

О питании рыб. Из литературных данных следует, что некоторым рыбам свойственна элективность питания, то есть питание с переключением. Например, толстолобик предпочитает использовать в качестве корма фитопланктон. Но когда фитопланктона мало или не подходит видовой состав, он переходит на питание заменяющим кормом – бактериопланктоном. Если и этой пищи становится недостаточно, то он может перейти на вынужденный корм, то есть детрит. Для описания питания с переключением мы используем практику моделирования по Кайракумскому водохранилищу [4] и рыбоводных прудов [1], где были использованы выводы, сделанные В.С.Теном, который проанализировал опытные данные Ивлева в зависимости питания от концентрации кормовых объектов на примере питания карпа. Интерпретация опытных данных затруднена тем, что при модельном исследовании принято оперировать такими понятиями, которые позволяют усматривать сущность процесса. Выбор их в значительной мере произволен. А экспериментатор ограничен лишь эмпирически доступными величинами.

Пусть имеющиеся корма – q_i ($i=1,2,\dots$) упорядочены по предпочтению q_1, q_2, \dots , причём q_1 – концентрация излюбленного корма. Тену удалось найти зависимость вероятности потребления объекта i -го типа η_i от суммарной концентрации объектов питания

$$q = \sum_{i=1}^n q_i,$$

где q_i – концентрация i -го вида жертв. Тогда вероятность $\eta_i=1$ при любом наборе q_1, q_2, \dots, q_n , а вероятность перехода на менее предпочтительный корм η_i есть функция концентраций q_{i-1} , т.е. $\eta_i(q_{i-1})$, $i=2,3,4,\dots$. Кривые $\eta_i(q)$, $i=2,3,\dots$ имеют перевернутый S-образный вид, причём $\eta_j < \eta_i$ при $j > i$ и

$$\lim_{n \rightarrow 0} \eta_i(q) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_i(q) = 0,$$

Это означает, что переходный режим выражен не чётко и охватывает полосу значений q , хотя зависимость η_i от q при больших q кажется сомнительной. Видимо, ближе к реальности зависимость $\eta_2(q_1)$, $\eta_3(q_1, q_2)$, $\eta_4(q_1, q_2, q_3)$ и т.д.

Так, для описания переключения толстолобика с питания бактериями в модели используется функция

$$\eta(PT) = \frac{e^{-\lambda_{PT}} \cdot (PT - m_{PT})}{1 + e^{-\lambda_{PT}} \cdot (PT - m_{PT})},$$

где λ_{PT} – параметр, характеризующий крутизну кривой, m_{PT} – коэффициент полуобеспеченности фитопланктоном, то есть значение PT , при котором $\eta(PT)=1/2$.

Тогда потребление бактерий толстолобиком в случае недостатка фитопланктона запишется в виде

$$A_{BKTL} = f_{TL}(T) \cdot \min \left\{ \left[r(P_{T_{cr}}, TL) - r(P, TL) \right], r(BK, TL) \cdot \eta(P) \right\} \cdot (1 - \delta_{TL}),$$

где $P_{T_{cr}}$ – критическое значение фитопланктона, при котором толстолобик переходит на питание бактериями. Разность двух трофических функций под знаком минимума обеспечивает ограничение скорости роста рыб так, чтобы она была не выше той, которая достигнута на излюбленном корме (при $P = P_{T_{cr}}$). При нехватке бактерий толстолобик переходит на питание детритом и т.д. В этом случае переключение – двухступенчатое, трехступенчатое и т.д.

Потребление толстолобиком фитопланктона представляется в виде

$$A_{PTTL} = f_{TL}(T) \cdot r(P, TL) \cdot (1 - \delta_{TL}).$$

Остались неописанными еще два процесса: метаболизм и смертность живых организмов экосистемы. Выделение живыми объектами водоёма продуктов метаболизма можно в первом приближении считать пропорциональным суммарному потреблению кормовых объектов. Выделение продуктов метаболизма и переход их в детрит в модели представлен следующим образом (на примере толстолобика):

$$C_{TLDS}^1 = (A_{PTTL} + A_{BKTL} + A_{DSTL}) \frac{\delta_{TL}}{(1 - \delta_{TL})},$$

где δ_{TL} – коэффициент метаболизма толстолобика, A_{PTTL} , A_{BKTL} , A_{DSTL} – потоки, описывающие потребление фитопланктона, бактерий и детрита толстолобиком, соответственно.

Кроме того, для рыб учитывается зависимость усвоения пищи от величины рациона. Например, при обильном питании толстолобика пища заглатывается непрерывно и проходит через кишечник с такой быстротой, что лишь 30-40% её усваивается, тогда как при умеренном питании усваивается в два раза больше [1,4].

Таким образом,

$$C_{TLDW}^2 = R_{TL}^2 \frac{\delta_{TL}^S}{R_{TL}^{max}},$$

где $R_{TL} = A_{PTTL} + A_{BKTL} + A_{DSTL}$, R_{TL}^{max} – максимальный рацион для толстолобика, δ_{TL}^S – суммарный метаболический параметр для толстолобика.

Смертность живых организмов, как известно из многих литературных источников, зависит от наличия растворённого в воде кислорода. В нашей модели предполагается, что наличие кислорода в воде не лимитирует процессов жизнедеятельности организмов и находится на уровне насыщенности. Поэтому, смертность организмов и их переход в детрит задаётся линейной функцией биомассы или концентрации живых объектов. Есте-

ственная смертность рыб в условиях оптимального режима в нагульном пруду должна отсутствовать. Но, учитывая вероятности паразитических и прочих инфекционных заболеваний рыбных популяций пруда, в модели учтена смертность рыб

$$C_{iDW}^3 = k_i^{cm} \cdot i,$$

где k_i^{cm} – коэффициент смертности i -го организма, $i=PT, ZO, BK, BN, TL, CR$ или BA .

Образующийся при этом детрит состоит из углерода, азота и фосфора, причём лишь азот и фосфор детрита включены в число переменных модели. Таким образом, например, поток A_{TLDW} характеризуется так:

$$A_{TLDW} = (\delta_{TL} + \delta_{TL}^S \cdot R_{TL} / R_{TL}^{max}) \cdot R_{TL} / (1 - \delta_{TL}) + k_{TL}^{cm} \cdot TL$$

Итак, нами представлены основные потоки вещества, необходимые для описания экосистемы рыбоводного пруда. На основе диаграммы потоков веществ [2] и с учётом вышеуказанных соображений теперь можно написать уравнения модели.

Уравнения модели

$$dPW/dt = A_{DWPW} - A_{PWPT} - A_{PWMT} - A_{PWMR} - A_{PWBK} - A_{PWPS} + A_{PSPW} + \varphi^{SU}(t)$$

$$dNW/dt = A_{DWNW} - A_{NWPT} - A_{NWMТ} - A_{NWMR} - A_{NWBK} - A_{NWNS} + A_{NSNW} + \varphi^{SE}(t)$$

$$dPS/dt = A_{DSPS} - A_{PSMT} - A_{PSMR} - A_{PSBK} + A_{PWPS} - A_{PSPW}$$

$$dNS/dt = A_{DNS} - A_{NSMT} - A_{NSMR} - A_{NSBK} + A_{NWNS} - A_{NSNW}$$

$$dMT/dt = A_{PWMT} + A_{NWMТ} + A_{CWMT} + A_{PSMT} + A_{NSMT} + A_{CSMT} - A_{MTBA} - A_{MTDW} - A_{MTDS}$$

$$dMR/dt = A_{PWMR} + A_{NWMR} + A_{CWMR} + A_{PSMR} + A_{NSMR} + A_{CSMR} - A_{MRBA} - A_{MRDW} - A_{MRDS}$$

$$dPT/dt = A_{PWPT} + A_{NWPT} + A_{CWPT} - A_{PTZO} - A_{PTTL} - A_{PTDW} - A_{PTBA}$$

$$dBK/dt = A_{PWBK} + A_{NWBK} + A_{CWBK} + A_{PSBK} + A_{NSBK} + A_{CSBK} - A_{BKZO} - A_{BKBN} - A_{BKDW} - A_{BKDS} - A_{BKTL}$$

$$dBN/dt = A_{BKBN} - A_{BNCR} - A_{BNDS}$$

$$dZO/dt = A_{PTZO} + A_{BKZO} - A_{ZOCR} - A_{ZODW}$$

$$dTL/dt = A_{PTTL} + A_{BKTL} + A_{DWTЛ} - A_{TLDW}$$

$$dCR/dt = A_{BNCR} + A_{ZOCR} - A_{CRDW} + [\alpha \cdot \varphi^{CO}(t) + \beta \cdot \varphi^{CU}(t)] \cdot CR$$

$$dBA/dt = A_{MTBA} + A_{MRBA} + A_{PTBA} - A_{BADW} + \gamma \cdot \varphi^{KR}(t) \cdot BA$$

$$dDW/dt = A_{PTDW} + A_{MTDW} + A_{MRDW} + A_{BKDW} + A_{ZODW} + A_{TLDW} + A_{CRDW} + A_{BADW} + A_{PTDW} + A_{BKDW} + A_{ZODW} + A_{TLDW} + A_{CRDW} + A_{BADW} - A_{DWPW} - A_{DWNW} - A_{DWCW} - A_{DWTЛ} - A_{DWDS} + A_{DSDW}$$

$$dDS/dt = A_{BKDS} + A_{BNDS} + A_{MTDS} + A_{MRDS} + A_{DWDS} - A_{DSDW} - A_{DSPS} - A_{DNS} - A_{DSCS}$$

Здесь α , β – доли комбикорма и куколок тутового шелкопряда, идущие на потребление карпа, соответственно, γ – доля кормовых растений, идущая на потребление белого амура.

Расшифровка Поточков

$$A_{DWPW} = f_{DW}(T) \cdot k_{des} \cdot X_{BK}^{PW} \cdot r(DW, BK) / (X_{BK}^{PW} + X_{BK}^{NW} + X_{BK}^{CW} + k_{DWS})$$

$$A_{DWNW} = X_{BK}^{NW} \cdot A_{DWPW}; A_{DWCW} = X_{BK}^{CW} \cdot A_{DWPW}$$

$$A_{DSPS} = f_{DS}(T) \cdot k_{des} \cdot X_{BK}^{PS} \cdot r(DS, BK) / (X_{BK}^{PS} + X_{BK}^{NS} + X_{BK}^{CS} + k_{DWS})$$

$$A_{DSNS} = X_{BK}^{NS} \cdot A_{DSPS}; A_{DSCS} = X_{BK}^{CS} \cdot A_{DSPS}$$

$$A_{PWPT} = f_{PT}(T) \cdot \xi_{PT}(I_0) \cdot Y_{PT}^{PW} \cdot (1 - \delta_{PT}); A_{NWPT} = X_{FT}^{NW} \cdot A_{PWPT}; A_{CWPT} = X_{FT}^{CW} \cdot A_{PWPT}$$

$$A_{PWBK} = f_{BK}(T) \cdot Y_{BK}^{PW} \cdot (1 - \delta_{BK}); A_{NWBK} = X_{BK}^{NW} \cdot A_{PWBK}; A_{CWBK} = X_{BK}^{CW} \cdot A_{PWBK}$$

$$A_{PWMR} = f_{MR}(T) \cdot \xi_{MR}(I_0) \cdot Y_{MR}^{PW+PS} \cdot r(PW, MR) / [r(PW, MR) + r(PS, MR)] \cdot (1 - \delta_{MR})$$

$$A_{NWMR} = f_{MR}(T) \cdot \xi_{MR}(I_0) \cdot Y_{MR}^{NW+NS} \cdot r(NW, MR) / [r(NW, MR) + r(NS, MR)] \cdot (1 - \delta_{MR})$$

$$A_{CWMR} = f_{MR}(T) \cdot \xi_{MR}(I_0) \cdot Y_{MR}^{CW+CS} \cdot r(CW, MR) / [r(CW, MR) + r(CS, MR)] \cdot (1 - \delta_{MR})$$

$$A_{PSMR} = f_{MR}(T) \cdot \xi_{MR}(I_0) \cdot Y_{MR}^{PW+PS} \cdot r(PS, MR) / [r(PW, MR) + r(PS, MR)] \cdot (1 - \delta_{MR})$$

$$A_{NSMR} = f_{MR}(T) \cdot \xi_{MR}(I_0) \cdot Y_{MR}^{NW+NS} \cdot r(NS, MR) / [r(NW, MR) + r(NS, MR)] \cdot (1 - \delta_{MR})$$

$$A_{CSMR} = f_{MR}(T) \cdot \xi_{MR}(I_0) \cdot Y_{MR}^{CW+CS} \cdot r(CS, MR) / [r(CW, MR) + r(CS, MR)] \cdot (1 - \delta_{MR})$$

$$A_{PWMT} = f_{MT}(T) \cdot \xi_{MT}(I_0) \cdot Y_{MT}^{PW+PS} \cdot p(PW, MT) / [p(PW, MT) + q(PS)] \cdot (1 - \delta_{MT})$$

$$A_{NWMT} = f_{MT}(T) \cdot \xi_{MT}(I_0) \cdot Y_{MT}^{NW+NS} \cdot p(NW, MT) / [p(NW, MT) + q(NS)] \cdot (1 - \delta_{MT})$$

$$A_{CWMT} = f_{MT}(T) \cdot \xi_{MT}(I_0) \cdot Y_{MT}^{CW+CS} \cdot p(CW, MT) / [p(CW, MT) + q(CS)] \cdot (1 - \delta_{MT})$$

$$A_{PSMT} = f_{MT}(T) \cdot \xi_{MT}(I_0) \cdot Y_{MT}^{PW+PS} \cdot q(PS) / [p(PW, MT) + q(PS)] \cdot (1 - \delta_{MT})$$

$$A_{NSMT} = f_{MT}(T) \cdot \xi_{MT}(I_0) \cdot Y_{MT}^{NW+NS} \cdot q(NS) / [p(PW, MT) + q(NS)] \cdot (1 - \delta_{MT})$$

$$A_{CSMT} = f_{MT}(T) \cdot \xi_{MT}(I_0) \cdot Y_{MT}^{CW+CS} \cdot q(CS) / [p(CW, MT) + q(CS)] \cdot (1 - \delta_{MT})$$

$$A_{PTTL} = f_{TL}(T) \cdot r(P, T, L) \cdot (1 - \delta_{TL}); A_{BNCR} = f_{CR}(T) \cdot r(B, N, C, R) \cdot (1 - \delta_{CR})$$

$$A_{MRBA} = f_{BA}(T) \cdot r(M, R, B, A) \cdot (1 - \delta_{BA}); A_{MTBA} = f_{BA}(T) \cdot r(M, T, B, A) \cdot (1 - \delta_{BA})$$

$$A_{BKTL} = f_{TL}(T) \cdot \min\{y1, y2\} \cdot (1 - \delta_{TL})$$

$$y1 = r(P, T, cr, TL) - r(P, T, L); y2 = r(B, K, TL) \cdot \eta(P, T);$$

$$A_{ZOCR} = f_{CR}(T) \cdot \min\{y3, y4\} \cdot (1 - \delta_{CR})$$

$$y3 = r(B, N, cr, CR) - r(B, N, C, R); y4 = r(Z, O, CR) \cdot \eta(B, N)$$

$$A_{DWTL} = f_{TL}(T) = \min\{[\min\{y1, y5\} - \min\{y1, y2\}], y6\} \cdot (1 - \delta_{TL})$$

$$y5 = r(B, K, cr, TL) \cdot \eta(P, T); y6 = r(D, W, TL) \cdot \eta(P, T) \cdot \eta(B, K)$$

$$A_{PTBA} = f_{BA}(T) \cdot \min\{y7, y8\} \cdot (1 - \delta_{BA}); y7 = [r(M, T, cr, BA) + r(M, R, cr, BA)] -$$

$$-[r(M, T, B, A) + r(M, R, B, A)]$$

$$y8 = r(P, T, B, A) \cdot [\eta(M, T) + \eta(M, R)]; A_{PTZO} = f_{ZO}(T) \cdot R(P, T, Z, O) \cdot (1 - \delta_{ZO})$$

$$A_{BKZO} = f_{ZO}(T) \cdot r(B, K, Z, O) \cdot (1 - \delta_{ZO})$$

$$A_{BKBN} = f_{BN}(T) \cdot r(B, K, B, N) \cdot (1 - \delta_{BN});$$

$$A_{PTDW} = \delta_{PT} \cdot (A_{PWPT} + A_{NWPT} + A_{CWPT}) / (1 - \delta_{PT}) + k_{PT}^{cm} \cdot PT$$

$$A_{BKDW} = \delta_{BK} \cdot (A_{PWBK} + A_{NWBK} + A_{CWBK}) / (1 - \delta_{BK}) + k_{BK}^{cm} \cdot BK;$$

$$A_{BKDS} = \delta_{BK} \cdot (A_{PSBK} + A_{NSBK} + A_{CSBK}) / (1 - \delta_{BK}) + k_{BK}^{cm} \cdot BK;$$

$$A_{ZODW} = \delta_{ZO} \cdot (A_{PTZO} + A_{BKZO}) / (1 - \delta_{ZO}) + k_{ZO}^{cm} \cdot ZO;$$

$$A_{BNDS} = (\delta_{BN} \cdot A_{BKBN}) / (1 - \delta_{BN}) + k_{BN}^{cm} \cdot BN;$$

$$A_{TLDW} = (\delta_{TL} \cdot \delta_{TL}^S \cdot R_{TL} / R_{TL}^{max}) \cdot R_{TL} / (1 - \delta_{TL}) + k_{TL}^{cm} \cdot TL;$$

$$A_{CRDW} = (\delta_{CR} \cdot \delta_{CR}^S \cdot R_{CR} / R_{CR}^{max}) \cdot R_{CR} / (1 - \delta_{CR}) + k_{CR}^{cm} \cdot CR;$$

$$A_{BADW} = (\delta_{BA} \cdot \delta_{BA}^S \cdot R_{BA} / R_{BA}^{max}) \cdot R_{BA} / (1 - \delta_{BA}) + k_{BA}^{cm} \cdot BA;$$

$$R_{TL} = A_{PTTL} + A_{BKTL} + A_{DWTL}; R_{CR} = A_{BNCR} + A_{ZOCR}; R_{BA} = A_{MTBA} + A_{MTBA} + A_{PTBA}$$

$$A_{MTDW} = KZ_{MT} \cdot MT + f_{MT}^{cm}(T) \cdot MT + k_{MT}^{cm} \cdot (A_{PWMT} + A_{NWMT} + A_{CWMT} + A_{PSMT} + A_{NSMT} + A_{CSMT}) \cdot \delta_{MT}$$

$$A_{MRDW} = KZ_{MR} \cdot MR + f_{MR}^{cm}(T) \cdot MR + k_{MR}^{cm} \cdot (A_{PWMR} + A_{NWMR} + A_{CWMR} + A_{PSMR} + A_{NSMR} + A_{CSMR}) \cdot \delta_{MR}$$

$$A_{MTDS} = f_{MT}^{ZP}(T) \cdot MT + (1 - K_{MT}^{cm}) \cdot (A_{PWMT} + A_{NWMT} + A_{CWMT} + A_{PSMT} + A_{NSMT} + A_{CSMT}) \cdot \delta_{MT}$$

$$A_{MRDS} = f_{MR}^{ZP}(T) \cdot MR + (1 - K_{MR}^{cm}) \cdot (A_{PWMR} + A_{NWMR} + A_{CWMR} + A_{PSMR} + A_{NSMR} + A_{CSMR}) \cdot \delta_{MR}$$

$$A_{DWDs} = k_{sed} \cdot DW; A_{DSDW} = k_{dif} \cdot DS$$

k_{MT}^{cm} и k_{MR}^{cm} – коэффициенты отмирания MT и MR в воде, k_{sed} – коэффициент седиментации детрита воды, k_{dif} – коэффициент диффузии детрита осадков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Комилов Ф.С., Шарапов Д.С. Имитационное моделирование управляемой высокопродуктивной экосистемы рыбоводного пруда. – Душанбе: Сохибкор, 2000, 80 с.
2. Комилов Ф.С., Косимов И.Л. – Вестник Таджикского национального университета, 2012, №3(85), с. 39-48.
3. Комилов Ф.С., Косимов И.Л. – Вестник Таджикского национального университета, 2012, №3(85), с. 22-28.
4. Комилов Ф.С. Компьютерное моделирование экосистем водохранилищ. – Душанбе: Сохибкор, 2010, 240 с.

Ф.С.КОМИЛОВ, И.Л.КОСИМОВ

ТАРҲРЕЗИИ ТАҚЛИДИИ ПОПУЛЯТСИЯИ МОҶИҶОИ ЭКОСИСТЕМАИ ҲАВЗ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Вазъи экосистема дар ҳар як лаҳзаи вақт бо ёрии консентрасияи 15 тағйирёбанда муайян карда мешавад. Дар модел се намуд моҳиҳо - зағорамоҳӣ, пешониғафси сафед ва амури сафед мавриди таҳқиқ қарор доданд. Дигар тағйирёбандаҳои модел тибқи ғизои пойгоҳии моҳиҳо ва баҳисобирии гардиши моҳаҳо дар

экосистема интихоб шудаанд. Ба сифати функцияҳои берунии модел ҳарорати об ва радиатсияи офтоб баромад мекунанд. Ҳамчунин ба модел панҷ функцияи идорӣ ҳамроҳ карда шудааст, ки онҳо низоми ба ҳавз иловакунии ғизои сунъӣ ва нуриҳои миниралиро ифода менамоянд.

Калимаҳои калидӣ: ҳавзи моҳипарварӣ – экосистема – тарҳрезӣ – моҳӣ – зағорамоҳӣ – пешониғафси сафед – амури сафед.

F.S.KOMILOV, I.L.KOSIMOV

SIMULATION MODELING OF FISH POPULATION ECOSYSTEM OF THE POND

Tajik National University

The situation ecosystem at each moment of time is defined concentration 15 phase variable. In models are considered three types of fish – carp, white silver carp and white amur. Other variable models are chosen in accordance with stern base of the fish and account of the rotation material in ecosystem. The Input functions to models are temperature of the water and solar radiation. They are enclosed also five controlling functions, characterizing contributing artificial stern and mineral fertilizers.

Key words: ecosystem – a fishpond-modeling – a fish – carp – white silver carp – white amur.

УДК 532.7 +537.84

К.КОМИЛОВ, А.К.ЗАРИПОВ

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ БИНАРНОЙ ПЛОТНОСТИ И БИНАРНОГО ПОТОКА ЧАСТИЦ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ МАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

*Научно-исследовательский институт Таджикского национального университета
Поступила в редакцию 14.05.2013 г.*

В работе на основе метода кинетических уравнений выведены дифференциальные уравнения для бинарной плотности и бинарного потока частиц электропроводящих магнитных жидкостей. Эти уравнения являются неоднородными уравнениями параболического типа. Решения этих уравнений полностью описывают пространственно-временные поведения бинарной плотности и бинарного потока частиц электропроводящих магнитных жидкостей, т.е. процесса структурной релаксации.

Ключевые слова: электропроводящие магнитные жидкости – бинарная плотность – бинарный поток частиц – структурная релаксация.

Магнитные жидкости (МЖ) представляют собой устойчивую коллоидную дисперсию однодоменных наночастиц ферро- или ферритмагнитных материалов в несущей жидкости. Благодаря особому сочетанию жидкого состояния среды и выраженных магнитных свойств магнитные жидкости привлекают всё больший научный интерес, а также находят широкое практическое применение в современных промышленных и биомедицинских технологиях.

На начальной стадии исследования свойств магнитных жидкостей предполагалось, что они, возможно, окажутся средой, электромагнитными свойствами которой можно будет управлять с помощью внешних полей. Однако впоследствии выяснилось, что эти ожидания оправдались лишь частично в отношении магнитных свойств, а в отношении их электрических свойств практически не оправдались [1].

Большинство существующих магнитных жидкостей является неэлектропроводящими, за исключением магнитных жидкостей, созданных на основе жидких металлов. По электрическим свойствам магнитные жидкости занимают промежуточное положение

Адрес для корреспонденции: Комилов Косим, Зарипов Авзалиш Карамонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет.
E-mail: k.komilov@mail.ru; E-mail: afzal.z@mail.ru

между проводниками второго рода и диэлектрическими жидкостями и могут быть рассмотрены как жидкие диэлектрики с относительно большими омическими потерями.

В последние годы на базе неэлектропроводящих магнитных жидкостей были получены новые композиционные материалы, свойства которых заметно зависели от воздействия электромагнитных полей. В неэлектропроводящие магнитные жидкости вводились наночастицы различных материалов, в результате их реологические, оптические и тепловые свойства изменялись под действием внешнего электромагнитного поля [2]. В ряде работ теоретически и экспериментально были исследованы возможности управления свойствами этих материалов [3,4]. Например, в работе [3] экспериментально исследована электропроводность магнитной жидкости, содержащей наночастицы графита. Так как размеры наночастиц графита несколько превосходят размеры ферромагнитных частиц магнитной жидкости, то магнитную жидкость можно рассматривать как сплошную намагничивающуюся среду. Помещённые в магнитной жидкости частицы графита в магнитном поле ведут себя как магнитные дырки.

Существующие модельные теории не полностью описывают физические свойства электропроводящих магнитных жидкостей. Динамика электропроводящих магнитных жидкостей демонстрирует очень богатый набор особенностей их поведения. Строгая теория этих явлений даже в пределе невзаимодействующих частиц не может быть построена из-за больших математических сложностей. По-видимому, важно по отдельности исследовать характерные предельные случаи, для которых был бы физически оправдан тот или иной набор приближений. Поэтому цель настоящего сообщения заключается в получении уравнения для бинарной плотности и бинарного потока частиц электропроводящих магнитных жидкостей.

В жидкостях существенную роль играет взаимодействие частиц, вследствие которого образуется определенная структура. Известно, что структура жидкостей далека от совершенства и в них имеет место ближний порядок, но, тем не менее, структура дает значительный вклад в формирование их свойств. При распространении любого, даже слабого возмущения, жидкость деформируется, и это приводит к нарушению равновесной структуры, то есть прежде всего нарушается степень ближнего порядка. Другими словами, изменяется бинарная функция распределения. Восстановление равновесной структуры сопровождается релаксационными процессами, которые по характеру отличаются от трансляционной релаксации. В связи с этим актуальным становится анализ характера структурных релаксационных процессов, определение их вклада в неравновесные характеристики электропроводящих магнитных жидкостей. Неравновесная структура и характер теплового движения молекул в жидкостях определяется посредством функции бинарной плотности и бинарного потока частиц. Пространственно-временное поведение функции бинарной плотности и бинарного потока частиц описывает восстановление равновесной структуры жидкости, то есть процесса структурной релаксации. Следуя методу, предложенному в [5] для однокомпонентных классических жидкостей, будем строить

уравнение для импульсных моментов двухчастичной функции распределения $f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$, которое имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \left[\frac{p_i^\alpha}{m} \frac{\partial f_2}{\partial q_i^\alpha} + F^\alpha(\vec{q}_i, t) \frac{\partial f_2}{\partial p_i^\alpha} - \frac{\partial \Phi(1,2)}{\partial q_i^\alpha} \frac{\partial f_2}{\partial p_i^\alpha} - \int \frac{\partial \Phi(i,3)}{\partial q_i^\alpha} \frac{\partial f_3}{\partial p_i^\alpha} d\vec{q}_3 d\vec{p}_3 \right] = \\ = \sum_{i=1}^2 \beta_i \frac{\partial}{\partial p_i^\alpha} \left[\frac{\tilde{p}_i^\alpha}{m} + kT(\vec{q}_i, t) \frac{\partial}{\partial p_i^\alpha} \right] f_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{x} = (\vec{q}, \vec{p})$, m , q_i^α , p_i^α – масса, компоненты координат и импульса частиц соответственно, $\tilde{p}_i^\alpha = p_i^\alpha - m\mathcal{G}_i^\alpha$ – относительный импульс, β – коэффициент трения частиц, k – постоянная Больцмана, $T(\vec{q}_i, t)$ – локальное значение температуры, $\vec{F} = \int \vec{f} dN$, а $\vec{f} = \mu_0 (\vec{M}\vec{N})\vec{H} + [\vec{j}\vec{B}]$. Первое слагаемое этого выражения представляет собой плотность силы, взаимодействия магнитного момента магнитной жидкости с неоднородным магнитным полем, второе определяет силу взаимодействия токов проводимости с полем.

Умножая уравнение (1) на $\mathbf{1}$ и \tilde{p}_1^α / m и затем интегрируя по всем значениям импульсов \vec{p}_1 и \vec{p}_2 , с учётом определения

$$n_2(\vec{q}_1, \vec{q}_2, t) = \int f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) d\vec{p}_1 d\vec{p}_2, \quad j_{2(i)}^\alpha(\vec{q}_1, \vec{q}_2, t) = \int \frac{p_i^\alpha}{m} f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) d\vec{p}_1 d\vec{p}_2,$$

а также импульсного момента трехчастичной функции распределения

$$n_3 = \int f_3(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, t) d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p}_3,$$

получим следующие уравнения для возмущенной части бинарной плотности n'_2 :

$$\frac{\partial n'_2}{\partial t} + \omega_0 \hat{L} n'_2(\vec{q}_1, \vec{r}, t) = R(\vec{q}_1, \vec{r}, t), \quad (2)$$

где $\omega_0 = 2kT_0 / \beta\sigma^2$, $L = -\frac{\partial}{\partial r^\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial}{\partial r^\alpha} \ln g_0(r) \right]$ – оператор Смолуховского в конфигурационном пространстве, $g_0(r) = \exp(-\psi_2^0 / kT_0)$, а

$$\begin{aligned} R(\vec{q}_1, \vec{r}, t) = - \left[\varphi(r) + \frac{n_0^2 \mu_0}{9\beta} (\vec{M}\vec{\nabla}) \left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{G}} \right)_{\rho, T} r \left(\frac{\partial g_0}{\partial r} \right) + \frac{2qBn_0 r^2}{\beta} \left(\frac{\partial g_0}{\partial r} \right) \right] \text{div } \vec{\mathcal{G}} + \\ + \varphi^{\alpha\beta}(r) \left[1 + \frac{\mu_0}{6\beta} (\vec{M}\vec{\nabla}) \left(\frac{\partial H}{\partial \mathcal{G}} \right)_{\rho, T} \right] \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}^\alpha}{\partial q_1^\beta} \right\} \end{aligned}$$

$$\varphi(r) = 2n_0^2 g_0 \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{\partial \ln g_0}{\partial \ln r} - \frac{1}{2} \left[n \left(\frac{\partial g_0}{\partial n} \right)_T + \gamma T \left(\frac{\partial g_0}{\partial T} \right)_n \right] \right\},$$

$$\gamma = (mC_v)^{-1} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_n,$$

$$\varphi^{\alpha\beta}(r) = 2n_0^2 \frac{\left(r^\alpha r^\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta^{\alpha\beta} \right)}{r} \frac{\partial g_0}{\partial r},$$

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{G}^\alpha}{\partial q_1^\beta} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{G}^\alpha}{\partial q_1^\beta} + \frac{\partial \mathcal{G}^\beta}{\partial q_1^\alpha} - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} \operatorname{div} \vec{\mathcal{G}} \right),$$

а также бинарного потока частиц электропроводящих магнитных жидкостей:

$$\frac{\partial J_2^\alpha(\vec{q}_1, \vec{r}, t)}{\partial t} + \omega_1 J_2^\alpha + \omega_2 L J_2^\alpha = Q^\alpha(\vec{q}_1, \vec{r}, t), \quad (3)$$

где $J_2^\alpha = J_{2(1)}^\alpha + J_{2(2)}^\alpha$, $J_{2(i)}^\alpha = j_{2(i)}^\alpha - n_2^0 \mathcal{G}_i^\alpha$, $n_2^0(r) = n_0^2 g(r)$, $\omega_1 = \beta/m$, $\omega_2 = \omega_0/2$, $r = (r_{1,2}/\sigma)$, $Q^\alpha(\vec{q}_1, \vec{r}, t) = \omega_1 \tilde{J}_2^\alpha(\vec{q}_1, \vec{r}, t)$,

$$\begin{aligned} \tilde{J}_2^\alpha(\vec{q}_1, \vec{r}, t) &= \frac{n^2 k T g_0(r)}{m} \frac{r^\alpha r^\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \ln g(r)}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T(1)}{\partial q_1^\beta} - \\ &- \frac{n^2 k T}{\beta} g_0(r) \left(\frac{\partial \ln g(r)}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T(1)}{\partial q_1^\alpha} - \frac{n^2}{\beta} \left(\frac{\partial g_0}{\partial r} \right) (\vec{j} \times \vec{B})^\alpha. \end{aligned}$$

Уравнения (2) и (3) представляют собой обобщённые уравнения Смолуховского для n_2' и бинарного потока частиц $J_2^\alpha(\vec{q}_1, \vec{r}, t)$ электропроводящих магнитных жидкостей в конфигурационном пространстве. Уравнение (2) полностью описывает пространственно-временное поведение возмущённой части бинарной плотности n_2' , а уравнение (3) описывает динамику изменения бинарного потока частиц в процессе стремления системы к равновесному состоянию. Как видно, в динамику изменения $J_2^\alpha(\vec{q}_1, \vec{r}, t)$ наряду с членом Смолуховского $\omega_0 L J_2^\alpha$, учитывающего вклад движений коллективного характера, вносит вклад член $\omega_1 J_2^\alpha$, связанный с трансляционной релаксацией и индивидуальным движением частиц. Эти уравнения являются неоднородными уравнениями параболического типа. Фундаментальное решение уравнения (2) позволяет определить выражение для тензора потока импульса, а решение уравнения (3) определяет вектор потока тепла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блум Э.Я., Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитные жидкости. – Рига: Зинатне, 1989, 386 с.
2. Dikansky Yu.I., Veguera J.G., Suzdaev V.N., Smerek Yu.L. – Magnetohydrodynamics, 2002, vol. 38, № 3, p. 281-285.
3. Диканский Ю.И., Вегера Ж.Г., Смерек Ю.Л., Аксенов А.В. – Нанотехника, 2009, №18, с. 20-24.
4. Закинян Р.Г., Смерек Ю.Л., Закинян А.Р. – Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2004, №3, с. 52-55.
5. Одинаев С., Адхамов А.А. Молекулярная теория структурной релаксации и явлений переноса в жидкостях. – Душанбе: Дониш, 1998, 230 с.

К.КОМИЛОВ, А.К.ЗАРИПОВ

МУОДИЛАҶО БАРОИ ЗИЧИИ БИНАРӢ ВА СЕЛИ БИНАРИИ ЗАРРАҶОИ МОЕӢҶОИ МАГНИТИИ ЭЛЕКТРОНОҚИЛ

Пажӯҳишгоҳи илмию тадқиқоти Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола бо ёрии усули муодилаҳои кинетикӣ муодилаҳо барои зичии бинарӣ ва сели бинарии зарраҳои моеъҳои магнитии электроноқил ҳосил карда шудаанд. Ҳалли ин муодилаҳо пурра рафтори фазогиро вақтии зичии бинарӣ ва сели бинарии зарраҳои моеъҳои магнитии электроноқилро тавсиф медиҳанд.

Калимаҳои калидӣ: моеъҳои магнитии электроноқил – зичии бинарӣ – сели бинарии зарраҳо – релаксатсияи сохторӣ

K.KOMILOV, A.K.ZARIPOV

THE EQUATIONS FOR BINARY DENSITY AND THE BINARY STREAM OF PARTICLES OF ELECTROCONDUCTING MAGNETIC LIQUIDS

The Scientific Research institute of Tajik National University

In work on the basis of a method of the kinetic equations it is output the differential equations for binary density and a binary stream of particles of electroconducting magnetic liquids. These equations are the nonuniform equations of parabolic type. The solution of these equations completely feature existential behaviour of binary density and a binary stream of particles of electroconducting magnetic liquids, i.e. process of a structural relaxation.

Key words: electroconducting magnetic liquids – binary density – binary stream of particles – structural relaxation.

УДК 541.64:543.422.23

И.Х.ЮСУПОВ, А.Д.БАХДАВЛАТОВ, Р.МАРУПОВ, Т.ШУКУРОВ

**ИССЛЕДОВАНИЕ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ ЛЕКАРСТВЕННОГО
РАСТЕНИЯ РОДИОЛЫ ХОЛОДНОЙ (*RHODIOLA GELIDA* SCHRENK)
МЕТОДОМ СПИНОВОЙ МЕТКИ**

*Физико-технический институт им.С.У.Умарова АН Республики Таджикистан
Поступила в редакцию 04.04.2013 г.*

Методом спиновой метки изучена молекулярная динамика дикорастущего лекарственного растения родиолы холодной. Показано, что параметры вращательной диффузии радикала, присоединённого к структурам родиолы холодной, зависят от места её произрастания и экологического состояния окружающей среды. Установлено, что при температуре свыше 313 К происходят структурные переходы, сопровождающиеся заметным увеличением вращательной диффузии радикала во всех изученных образцах.

Ключевые слова: родиола холодная – спиновая метка – молекулярная динамика – спектры ЭПР.

Лекарственные растения являются естественной кладовой природных лекарственных препаратов, широко используемых населением и медицинской промышленностью, свойства которых приведены и обобщены во многих литературных источниках, например в [1-6], включая сведения о биохимическом составе этих растений и рекомендации по их применению от тех или иных болезней. Следует отметить, что в этих работах отсутствуют данные о спектроскопических свойствах структур, характерных растениям (формирование молекулярной и физико-химической структуры растений в зависимости от их генетического происхождения, влияния места и экологии произрастания на биохимический состав и характер формирования меж- и внутримолекулярных водородных связей и др.).

В данной работе методом спиновых меток исследованы структурные свойства родиолы холодной, произрастающей в различных отдаленных друг от друга местностях и высотах над уровнем моря Республики Таджикистан и отличающихся по природно-

Адрес для корреспонденции: Юсупов Изатулло Ходжаевич. 734053, Республики Таджикистан, Душанбе, ул. Айни, 299/1, E-mail: usupizat@yandex.ru

климатическими условиями места произрастания – высоким уровнем солнечной и УФ-радиации, влажностью и постоянством снежного покрова, ветровой эрозией почвы и др.

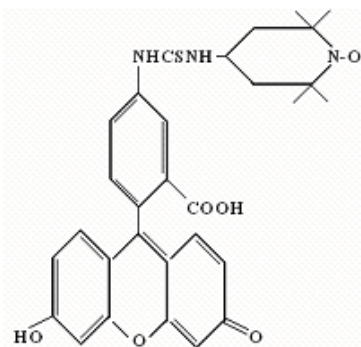
Метод спиновых меток [7-12] является одним из эффективных методов изучения изменений молекулярной динамики биологических объектов в области её присоединения и чувствительным к молекулярной подвижности макромолекулы.

Метод спиновых меток заключается в том, что в матрицу исследуемого образца вводят стабильный нитроксильный радикал, ЭПР-спектр которого чувствителен к конформационной подвижности макромолекулы, связанной с анизотропией g-фактора и сверхтонкого взаимодействия электронного спина с ядрами атома азота. Спектр ЭПР радикала зависит от его ориентации во внешнем магнитном поле.

Стохастические изменения ориентации радикала модулируют магнитные взаимодействия, поэтому форма спектра ЭПР зависит от вращательной подвижности радикала. По форме спектра, регистрируемого в стандартных условиях (первая гармоника сигнала поглощения, ненасыщающие значения микроволновой мощности), можно оценить время корреляции вращательных движений τ_c радикала в диапазоне $5 \cdot 10^{-11} \dots 10^{-7}$ с. [7-12].

Экспериментальная часть

Образцы корневища родиолы тщательно очищали от сопутствующих веществ, промывали обычной и дистиллированной водой, экстрагированным эфиром, спиртом и высушивали при комнатной температуре [13]. В качестве спиновой метки использовали стабильный нитроксильный радикал (I), имеющий следующую структурную формулу:



Исследуемые образцы лекарственных растений модифицировали спиновой меткой (I) следующим образом: навески образца по 25 мг помещали в 0.9 мл раствора в фосфатный буфер (pH = 9 – 10) с добавлением 0.1 мл этанолового раствора спиновой метки (I) с концентрацией (10^{-2} м/л), после чего концентрация радикала (I) в инкубационной среде достигала $4 \cdot 10^{-3}$ м/л [13]. Смесь выдерживали в течение пяти суток при комнатной температуре, затем нагревали два часа при 333–343 К. Модифицированные образцы отмывали от непрореагировавшего радикала в следующей последовательности: вода – этанол, вода – этанол и вода до получения неизменного сигнала ЭПР. После многократного промывания образцы сушили при комнатной температуре.

Спектры ЭПР регистрировали на радиоспектрометре РЭ-1306 в стандартных молибденовых ампулах с внутренним диаметром 3.0 мм, в которые помещали по 25 мг спинеченого образца. Спектры ЭПР записывали при следующих условиях: затухание СВЧ мощности 5 Дб, амплитуда развертки магнитного поля 200 Э, скорость развёртки магнитного поля 40 Э/мин, амплитуда ВЧ модуляции 100 кГц [13]. С целью смягчения и набухания структуры образец увлажняли водой.

В работах [14-17] показано, что модификация хлопковой целлюлозы спиновой меткой протекает по её гидроксильным группам. Так как по происхождению основы химической структуры хлопковое волокно и лекарственные растения очень близки и в основном состоят из целлюлозы, то можно утверждать, что радикал (1) ковалентно взаимодействует с гидроксильной группой структуры, преимущественно с ОН-группой целлюлозной основы лекарственных растений. Об этом свидетельствует вид спектра ЭПР (рис.1), соответствующего заторможенному вращению радикала с частотой вращения $\nu \approx 10^8 \text{ с}^{-1}$, а также практическая независимость спектра ЭПР от многократных промывок. Измерения проводились при температурах 77- 353 К.

Количество спиновых меток (R), присоединившихся к образцу, определяли путём сравнения спектров ЭПР меченого образца родиолы холодной и эталонного 50%-ого водоглицеринового раствора при 77 К по формуле:

$$R_{обр} = R_{эм} \cdot \frac{h_{обр} (\Delta H_{обр})^2}{h_{эм} (\Delta H_{эм})^2}, \quad (1)$$

где $R_{эм}$, $R_{обр}$ – количество спин-меток в эталоне и образце, соответственно; $h_{эм}$, $h_{обр}$ – соответственно высота центральной компоненты спектра ЭПР эталона и образца; $\Delta H_{эм}$, $H_{обр}$ – ширина центральной компоненты спектра ЭПР эталона и образца в Гс. Расчёт показал, что количество спиновых меток (R), присоединившихся к изученным образцам, составляет $12 \cdot 10^{17}$ спин/г, то есть одному грамму образца соответствует $12 \cdot 10^{17}$ спинов.

Время корреляции спин-меток определяли по формуле [6]:

$$\tau_c = 8 \cdot 10^{-10} \left(1 - \frac{2A_{zz}}{2A_{zz}^\infty} \right)^{-1.6} \text{ с}, \quad (2)$$

где $2A_{zz}$ – расстояние между внешними экстремумами спектра ЭПР образца при заданной температуре опыта; $2A_{zz}^\infty$ – расстояние между внешними экстремумами спектра ЭПР образца при температуре 77 К.

Формула (2) справедлива для процесса изотропного вращения нитроксильного фрагмента спиновой метки по механизму броуновской диффузии. Однако реальное вращение фрагмента спиновой метки в матрице родиолы холодной может быть анизотроп-

ным. Выбор модели вращения в рамках данных по спектроскопии ЭПР в 3-сантиметровом диапазоне представляет сложную, во многих случаях не решённую задачу. Как показано в работе [8], имеет место прямая пропорциональная зависимость между значением τ_c , рассчитанным из теоретических спектров [9] по формуле типа (2) для изотропного движения, и значениями τ_c^0 , заложенными в расчёты для анизотропного вращения.

Результаты и обсуждение

На рис.1 и в табл. 1 приведены следующие параметры спектров ЭПР изученных спин-меченых образцов при комнатной температуре: $2A'_z$ – расстояние между внешними экстремумами; Δl и Δh – полуширины линии в низком и высоком поле соответственно; h'/h – отношение амплитуд низкопольных линий слабо иммобилизованных меток и ΔH_0 ширина линии центрального компонента спектра ЭПР.

Как видно из рис. 1 (1), в спектрах ЭПР наблюдается свободная вращательная подвижность спиновой метки, которая характерна для радикала (I) в растворе с временем корреляции $\tau_c \leq 10^{-7}$ с. Спектры ЭПР спин-меченых образцов (рис.1 (2-6)) при комнатной температуре представляют собой суперпозиции двух сигналов и сильную заторможенность вращательной подвижности спиновой метки с временем корреляции $\tau_c \leq 10^{-8}$ с, что характеризует неоднородность аморфных областей в исследуемых образцах, в местах присоединения метки и свидетельствует об изменении системы меж- и внутримолекулярных водородных связей в области её присоединения.

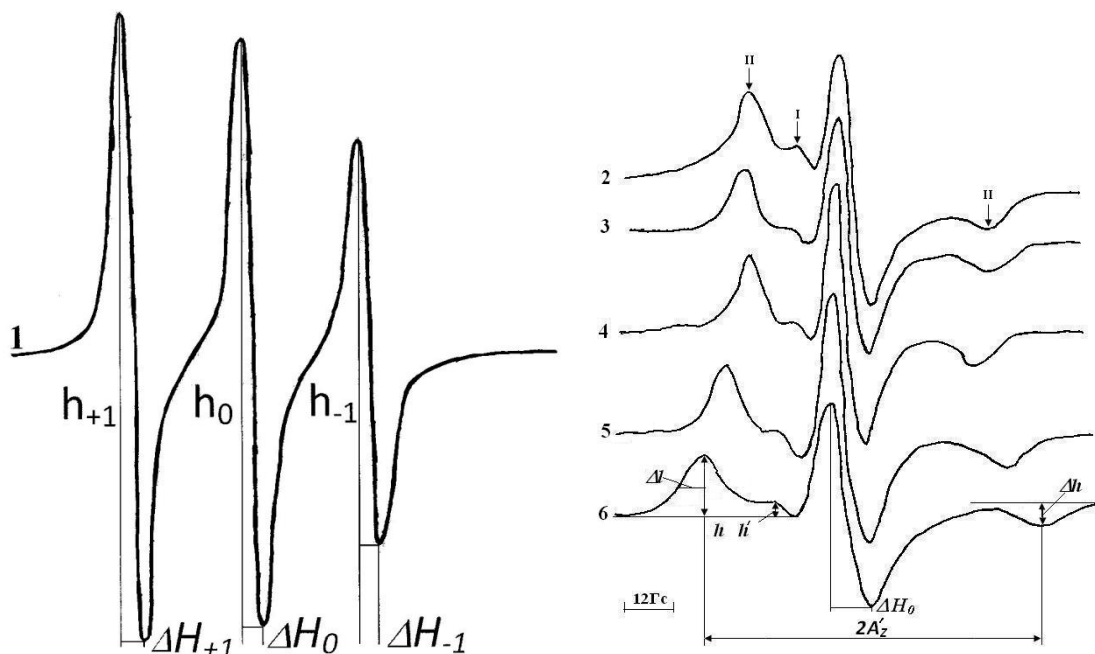


Рис. 1. ЭПР-спектры свободного нитроксильного радикала (I) в спиртовом растворе с концентрацией $4 \cdot 10^{-3}$ М/л и с временем корреляции ($\tau_c < 10^{-8}$ с.) – 1 и спин-меченных образцов радиолы хо-

лодной в зависимости от места произрастания, сухие относительно воздуха при комнатной температуре: Шугнан – 2; Рушан – 3; Мургаб – 4; Горная Матча – 5; Ходжа-Обигарм – 6.

Таблица 1

Параметры спектров ЭПР спин-меченых образцов радиолы холодной в зависимости от места и высоты произрастания

Место произрастания	Высота над уровнем моря (м)	Δl Гс	Δh Гс	ΔH_0 Гс	$2A'_z$ Гс	h'/h	$\tau_c \cdot 10^{-8}c$
Шугнанский район	2800	17	20	27	187	0.1	0.29
Рушанский район	1980	12	12	25	194	0.5	0.31
Мургабский район	3600	8	17	24	197	-	0.32
Горная Матча	2500	12	14	24	199	0.2	0.34
Ходжа-Обигарм	2000	14	14	29	204	0.3	0.36

Из табл. 1 следует, что параметры Δl и Δh в спектрах ЭПР, относящиеся к медленно вращающемуся (указанные стрелками II, рис.1) радикалу, изменяются незначительно, а параметр h'/h является очень чувствительным (табл. 2, рис.1, 2) и изменяется интенсивно, что характеризует появление нового компонента сигнала ЭПР, относящегося к быстро вращающемуся радикалу (указаны стрелками I на рис. 2), что свидетельствует о появлении сверхтонкой структуры (СТС) в спектрах исследуемых образцов.

Температурную зависимость спектров спин-меченых образцов снимали в интервале от 77 до 353 К. Как видно из рис. 2 (2), при температуре 293 К в ЭПР спектре проявляется вращательная подвижность, характерная для сильно заторможенного радикала, указанного стрелками II на рис.2 (2). Для увлажненных образцов с увеличением температуры выше 293 К подвижность спиновой метки возрастает, форма ЭПР-спектра изменяется, что свидетельствует о конформационном изменении структуры молекул в области присоединения метки и подтверждается уширением линий спектра (параметр Δl – ширина линии в низком поле) и уменьшением величины параметра $2A'_z$ – расстояния между внешними экстремумами (рис. 3), что является свидетельством изменения конформации молекул в области присоединения метки.

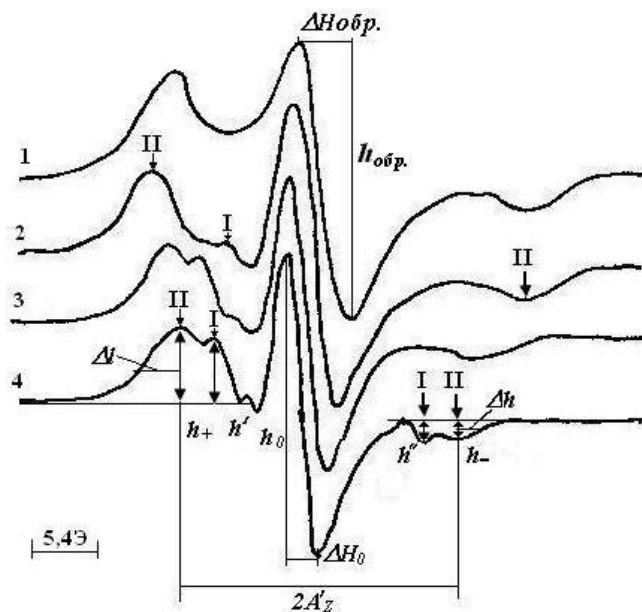


Рис. 2. ЭПР-спектры увлажнённой спин-меченой радиолы холодной

при различных температурах:

77К – 1, 293К – 2, 313К – 3,

353К – 4.

При температуре выше 313 К в спектрах ЭПР спин-меченого увлажненного образца появляются компоненты h' и h'' (рис. 2(4)), характерные для спектров ЭПР быстро вращающегося радикала (указанного стрелками I на рис. 2).

Как видно (рис.2 и табл. 2) с ростом температуры амплитуда выше указанных компонентов резко возрастает. Относительную долю быстро вращающихся радикалов характеризуют параметры h'/h_+ и h''/h_- - отношение амплитуды низкопольных и высокопольных линий соответственно слабо и сильно иммобилизованных меток для изученного образца. Спектры ЭПР спин-меченой родиолы существенно различаются по степени чувствительности h''/h_- и h'/h_+ к изменению температуры.

На рис. 2 (2- 4) приведены спектры ЭПР спин-меченого образца родиолы, увлажнённой водой. Спектры ЭПР увлажненного (рис.2) и сухого образцов (рис.1) родиолы заметно отличаются, подвижность метки возрастает в несколько раз, параметр $2A'z$ для сухих образцов составляет 198 Гс, для увлажненного образца параметр $2A'z$ уменьшается и составляет 182 Гс. При более высоких температурах (выше 293 К) в спектрах увлажнённых образцов наблюдается уширение линии спектра (параметр Δl) при одновременном уменьшении величины параметра $2A'z$ (рис.3), что свидетельствует о появлении высокоамплитудного движения нитроксильного фрагмента спиновой метки. Подобные эффекты вращательного уширения линий свидетельствуют о появлении движения спиновых меток, характеризующихся $\tau_c = 3 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 10^{-7}$ с [9]. В сухих образцах при тех же температурах уширения спектральных линий (параметр Δl) и уменьшения ($2A'z$) не наблюдается. В изученных образцах при минусовых температурах уширения спектральных линий Δl и параметр $2A'z$ не отмечается (рис.3), то есть «затормаживается», только при $T=273$ К «растормаживается» крупномасштабными движениями $\tau_c \leq 10^{-7}$ с, а уширение Δl и уменьшение $2A'z$ начинается при более высоких температурах (выше 293 К). При температурах ≥ 313 К в спектрах увлажнённых образцов появляются компоненты h' и h'' , характерные для спектров быстро вращающихся радикалов с $\tau_c \leq 10^{-8}$ с. Эти изменения относятся к спектрам медленно (указанно стрелками II на рис. 1 и рис. 2) и быстровращающихся (указано стрелками I на рис 2.) меток. Кроме того, появляются дополнительные линии (СТС) h'/h_+ и h''/h_- , которые равны 0.9 и 0.5, соответственно.

На рис. 3 представлен характер изменения $2A'z$ и Δl от температуры для родиолы холодной из Мургабского района Памира, указывающий на то, что содержание влажности в исследуемых образцах увеличивает подвижность спиновой метки. Это подтверждается также появлением узкого сигнала, соответствующего быстровращающимся радикальным фрагментам ($\tau_c \leq 10^{-9}$ с). С увеличением температуры ($T \geq 293$ К) происходит сужение спектральных линий параметра $2A'z$ (табл. 2 и рис.3) изученных образцов, что объясняется

появлением мелкомасштабных движений, приводящих к усреднению диполь-дипольных взаимодействий [9, 11].

Таблица 2

Параметры спектров ЭПР спин-меченой родиолы холодной из Мургабского района Памира (3600 м над ур.м.) при разных температурах

T, К	ΔI , Гс	Δh , Гс	$2A'_z$, Гс	h'/h	h''/h	$\tau_c \cdot 10^{-8}$ с
293	8	17	198	-	-	0.32
313	16	20	190	0.9	0.5	0.29
353	24	17	182	0.8	0.8	0.27

При температуре выше 313 К наблюдается уширение линии спектра (параметр ΔI), при одновременном уменьшении параметра $2A'_z$, а также появление новых спектральных линий h' и h'' (характерны для СТС) в целом говорит о сужении спектров ЭПР, что свидетельствует о увеличении подвижности спиновой метки в структуре родиолы холодной с $\tau_c \leq 10^{-7}$ с (см. табл.2 и рис. 2, 3).

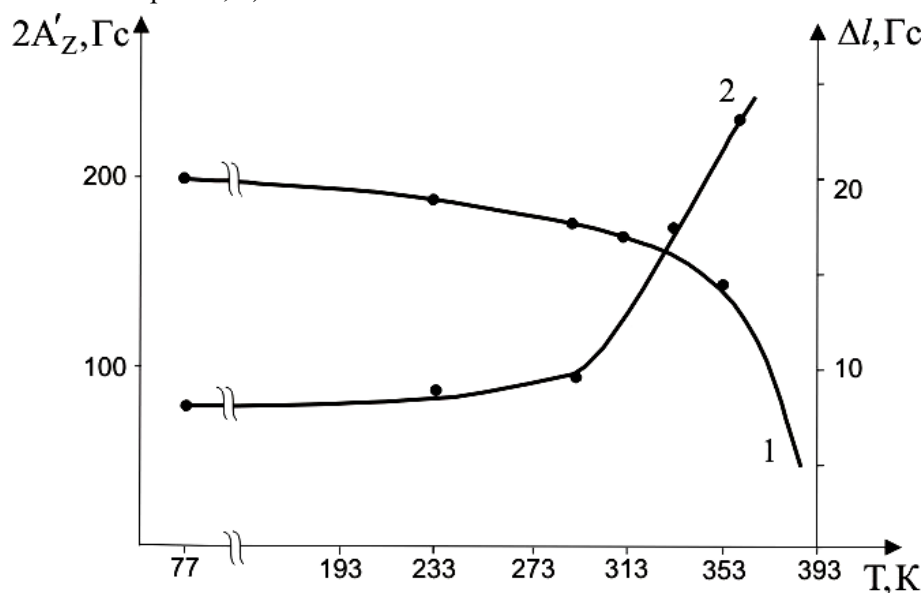


Рис. 3. Температурная зависимость параметров $2A'_z$ (кривая 1) и ΔI (кривая 2) спектров ЭПР спин-меченных увлажненных образцов родиолы холодной.

Полученные результаты соответствуют результатам по исследованию молекулярной динамики хлопкового волокна методом спиновых и люминесцентных меток [14-19] и удачно их дополняют.

Таким образом, на основании полученных результатов можно заключить, что параметры вращательной диффузии радикала, присоединённого к структуре родиолы холодной одного и того же генетического происхождения, зависят от места и высоты произрастания над уровнем моря, обусловлены влиянием почвенно-климатических и экологических условий на формирование молекулярной структуры в процессе синтеза биохимических компонентов в лекарственных растениях.

Авторы благодарят профессора Г.И.Лихтенштейна за интерес к работе и представление нитроксильного радикала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ходжиматов М. Дикорастущие лекарственные растения Таджикистана. – Душанбе: Гл. науч.ред. Тадж.сов.энциклопедии, 1989, 368 с.
2. Лекарственные растения и их применение. – Минск: Наука и техника, 1977, 592 с.
3. Хаитов И. Фармакогнозия в медицине (фитотерапия). – Худжанд: Совет общественного объединения «Илм», Золотой долины, 2004, 628 с.
4. Турова А.Д. Лекарственные растения СССР и их применение. – М., Медицина, 1974, 424 с.
5. Гаммерман А.Ф., Гром И.И. Дикорастущие лекарственные растения СССР – М.: Медицина, 1976, 288 с.
6. Лекарственные растения (каталог) – М.: Медицина, 1985, 256 с.
7. Лихтенштейн Г.И. Метод спиновых меток в молекулярной биологии. – М., Наука, 1977, 256 с.
8. Лихтенштейн Г.И., А.И. Котельников – Молекулярная биология. Т.17, №3, 1983, с.505-507.
9. Фрид Д.Ж. Метод спиновых меток. Теория и применение. – М., 1979, 97с.
10. Кольтовер В.К. – Итоги науки и техники. – Биофизика. М.: ВИНТИ, 1979, т11, с. 10.
11. Likhtenshtein G.I., Yamauchi J., Nakatsuji S., Smirnov A., Tamura R. Nitroxides: Application in Chemistry, Biomedicine, and Materials Science WILEY-VCH Weinheim(2008).
12. Likhtenshtein G.I. Stilbenes: Application in Chemistry. (Life Science and Materials Science WILEY-VCH Weinheim), (2009).
13. Юсупов И.Х., Бахдавлатов А.Д., Марупов Р. – ДАН РТ, 2012, т55, №11, с. 880-886.
14. Марупов Р., Юсупов И.Х., Бободжанов П.Х. и др. – ДАН СССР, 1981, т56, №2, с. 414-417.
15. Юсупов И.Х., Бободжанов П.Х., Марупов Р. и др. – ВМС. Сер. А, 1984, т.26, №2, с. 369-374.
16. Куликов А.В., Юсупов И.Х., Бабаджанов П.Х. и др. – Журнал прикладной спектроскопии, 1991, т.55, №6, с. 961-965.
17. Бабаджанов П.Х., Юсупов И.Х., Марупов Р. – Журнал прикладной спектроскопии, 1992, т.56, №3, с. 424-428.
18. Юсупов И.Х., Фогель В.Р., Котельников А.И. и др. – Биофизика, 1988, т.33, №3, с. 508-511.
19. Юсупов И.Х., Лихтенштейн Г.И. – Биофизика, 2012, т.57 №2, с. 286-291.

И.Х.ЮСУПОВ, А.Д.БАХДАВЛАТОВ, Р.МАРУПОВ, Т.ШУКУРОВ

ТАДҚИҚИ ДИНАМИКАИ МОЛЕКУЛАВИИ РАСТАНИИ ЗАРБЕХИ ДОРУВОРӢ БО УСУЛИ НИШОНАҲОИ СПИНИӢ

*Институту физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Бо усулҳои нишонаҳои спинӣ динамикаи молекулавию растанию зарбехи доруворӣ омӯхта шудааст. Нишон дода шудааст, ки параметрҳои даврзании дифузиони радикале, ки дар таркиби зарбехи доруворӣ шинонида шудааст, аз ҷой ва муҳити экологие, дар он ҷой мерӯяд, вобастагӣ дорад. Муайян шудааст, ки дар хароратҳои баланд аз 313 К, гузаришҳои структуравӣ ба амал меоянд, ки аз муҳити экологӣ, баланди аз сатҳ баҳр, ки дар он ҷой мерӯянд ва аз ташаккулёбии сохти молекулавию, ки дар натиҷаи раванди биосинтезию биохимиявӣ, дар растаниҳои доруворӣ ба амал меоянд, вобастагӣ дорад.

Калимаҳои калидӣ: зарбеҳои доруворӣ – нишонаҳои спинӣ – динамикаи молекулавӣ – спектрҳои резонанси электронию паромагнитӣ.

I.Kh.YUSUPOV, A.D.BAKHDAVLATOV, R.MARUPOV, T.SHUKUROV

**MOLECULAR DYNAMICS OF A WILD-GROWING HER
RHODIOLA GELIDA SCHRENK IS STUDIED BY SPIN LABEL METHOD**

S.Umarov Physical-Technical Institute, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

It is shown that parameters of rotary diffusion of the radical attached to structure of Rhodiola Gelida Schrenk depends on the place of its growth and the ecological condition of the environment. It is established that at a temperature over 313 K the structural transitions occurs, of which was accompanied by noticeable increase the rotary diffusion the radical in all studied samples.

Key words: *Rhodiola gelida* Schrenk – spin lable – molecular dynamics – EPR spectra.

УДК 521.633

У.М.МИРСАИДОВ, П.М.ЯТИМОВ, Э.Д.МАМАТОВ, З.В.КОБУЛИЕВ, Ш.Б.НАЗАРОВ

**ХЛОРИРОВАНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ОБОЖЖЕННОГО КОНЦЕНТРАТА
ДАНБУРИТА И РАСЧЁТ КИНЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ**

Институт химии им.В.И.Никитина АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 06.06.2013 г.

В статье приведены результаты хлорирования предварительно обожжённого концентрата данбурита, найдены оптимальные условия переработки и рассчитана кинетика процесса.

Ключевые слова: концентрат данбурита – предварительный обжиг – хлорирование.

Ранее нами было изучено кислотное разложение исходного и обожжённого концентрата данбурита [1-3].

Целью исследования является изучение процесса хлорирования предварительного обожжённого данбуритового концентрата и расчёт кинетического процесса.

Исследования показали, что наиболее выгодной для разложения данбурита является температура 950...980°C, так как данбурит разлагается с образованием дибората кальция $\text{CaO} \cdot \text{B}_2\text{O}_3$, силиката кальция $\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$ и кварца β - или γ - SiO_2 модификации. Рациональными условиями термической обработки являются: температура – 950...980°C, продолжительность прокаливания – 60 мин.

Для достижения максимальной степени извлечения оксидов изучено хлорирование предварительно обожжённого концентрата данбурита в присутствии активированного угля. Результаты хлорирования приведены на рис.1.

Влияние температуры. Хлорирование проводили в интервале температур 200...800°C при продолжительности процесса 60 мин и содержании восстановителя 25-30%. Как видно из рис.1а, при температуре 750°C степень извлечения оксидов достигает максимального значения, составляя (в %): Fe_2O_3 – 96.38, B_2O_3 – 80.21, Al_2O_3 – 68.4 и CaO – 92.85.

Продолжительность процесса. Результаты влияния продолжительности процесса на хлорирование оксидов Fe_2O_3 , B_2O_3 , Al_2O_3 и CaO , входящих в состав концентрата дан-

Адрес для корреспонденции: Маматов Эргаш Джумаевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: ergash76@mail.ru.

бурита, приведены на рис.1б. Интервал времени менялся от 15 до 120 мин. Постоянными параметрами были: размер частиц - 0.1 мм, температура - 750-8000С и содержание восстановителя – 20-30%. Выявлено, что максимальное извлечение оксидов из состава концентрата данбурита наблюдается при продолжительности хлорирования 60 мин и составляет (в %): Fe_2O_3 – 96.36, V_2O_5 – 78.4, Al_2O_3 -65.78 и CaO – 90.12. Результаты опытов показали, что при дальнейшем увеличении продолжительности процесса до 120 мин степень извлечения оксидов почти не изменяется.

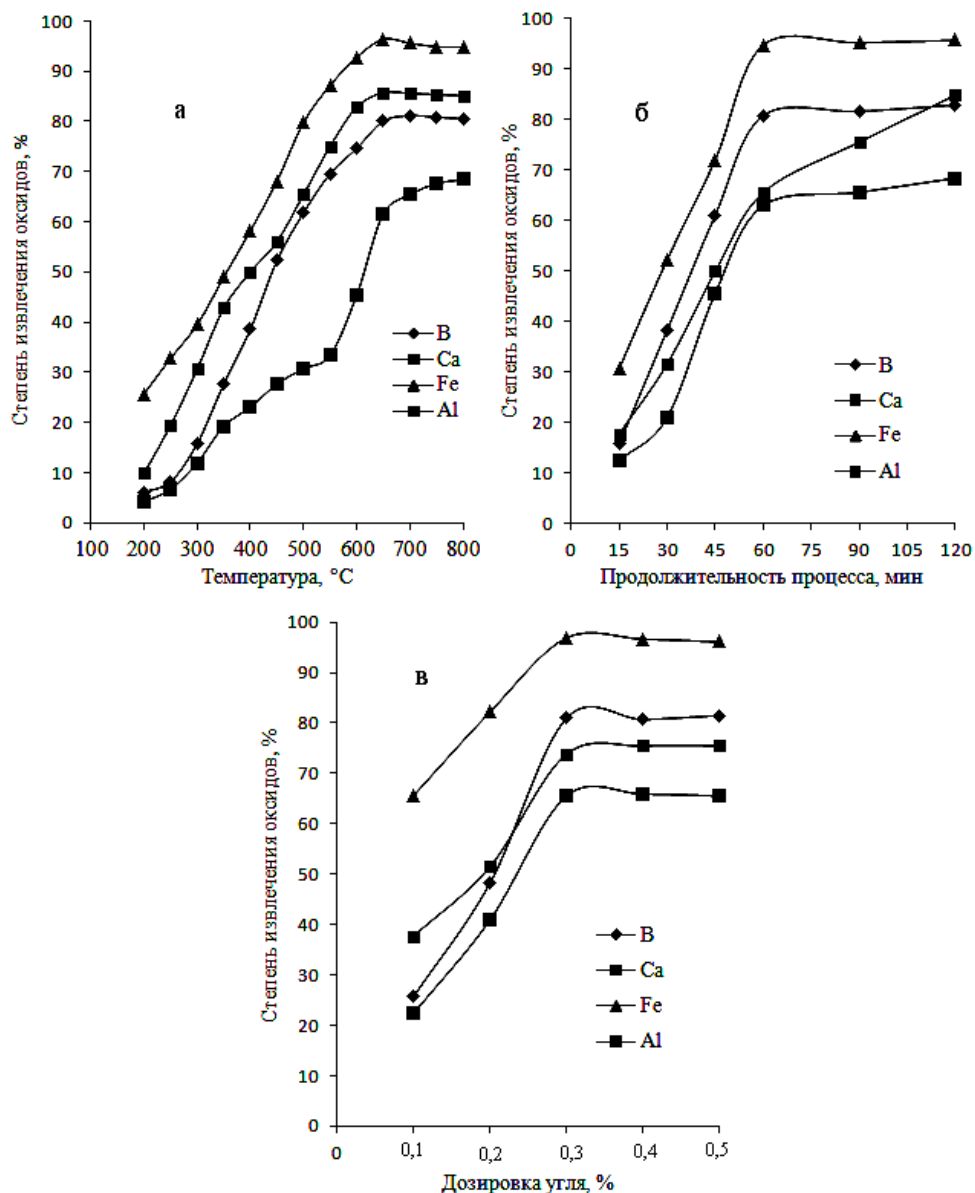


Рис.1. Зависимость степени извлечения оксидов V_2O_5 , Al_2O_3 , Fe_2O_3 и CaO от температуры (а), продолжительности процесса (б) и концентрации восстановителя (в) при хлорировании предварительно обожжённого концентрата данбурита.

Влияние содержания восстановителя. Влияние дозировки угля на хлорирование концентрата данбурита изучали при 750-800°C в течение 1 ч, которая изменялась от 10 до 50% от веса шихты. При увеличении активированного угля в шихте 30% - хлорирования оксидов железа, бора, алюминия и кальция достигает максимального значения и составляет (в %): Fe₂O₃ – 96.4, B₂O₃ – 81.5, CaO – 90.22 и Al₂O₃ - 68.78 (рис.1в). Установлено, что количество угля в шихте оказывает существенное влияние на степень хлорирования оксидов, однако дальнейшее увеличение его в шихте не приводит к существенному изменению степени хлорирования оксидов.

Изучена кинетика хлорирования предварительно обожжённого концентрата данбурита при оптимальных условиях.

Экспериментальные данные зависимости разложения обожжённого концентрата данбурита газообразным хлором для извлечения оксида бора получены при температуре 200...800°C и продолжительности процесса от 15 до 60 мин.

Константы скорости разложения обожжённой породы данбурита рассчитывали по кинетическому уравнению:

$$d\alpha / dt = K (1-\alpha),$$

где: α – степень извлечения оксида бора; τ – время в мин; K – константа скорости реакции азотнокислотного разложения концентрата данбурита, мин⁻¹ [4].

Для различных интервалов температуры были рассчитаны значения K_1, K_2, \dots и найдены их средние значения ($K_{ср}$).

В первом приближении построенные кинетические графики зависимости $\lg 1/(1-\alpha) \cdot 10$ от времени укладываются на прямую линию, имеющую отрицательный наклон.

Изменение константы скорости хлорирования обожжённого концентрата данбурита от температуры процесса подчиняется закону Аррениуса, что подтверждается прямой линейной зависимостью $\lg K$ от $1/T$ (рис.2).

Рассчитаны значения энергии активации хлорирования концентрата данбурита в присутствии активированного угля. Даная зависимость подчиняется корреляционному уравнению $LgK_{ср} = -941.59 \cdot (1/T) - 0.7699$ при значении коэффициента корреляции $R^2=0.9574$. Численное значение энергии активации равно 16.78 кДж/моль.

Таким образом, в результате проведённых исследований для хлорирования предварительно обожжённого концентрата данбурита можно рекомендовать следующие условия: температура хлорирования – 800°C, продолжительность процесса – 60 мин, содержание восстановителя – 30% и размер частиц – 0.1 мм.

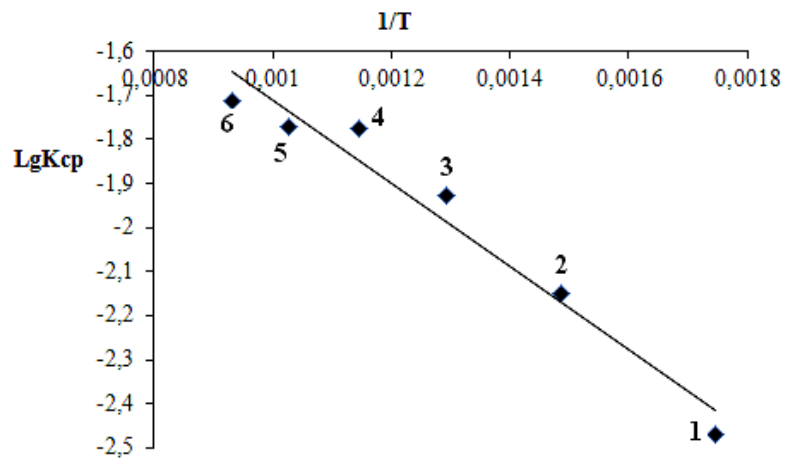


Рис.2. Зависимость $LgK_{ср}$ от обратной абсолютной температуры $1/T$ для процесса хлорирования концентрата данбурита в присутствии активированного угля.
 1 – при 300°C, 2 – 400°C, 3 – 500°C, 4 – 600°C, 5 – 700°C и 6 – 800°C.

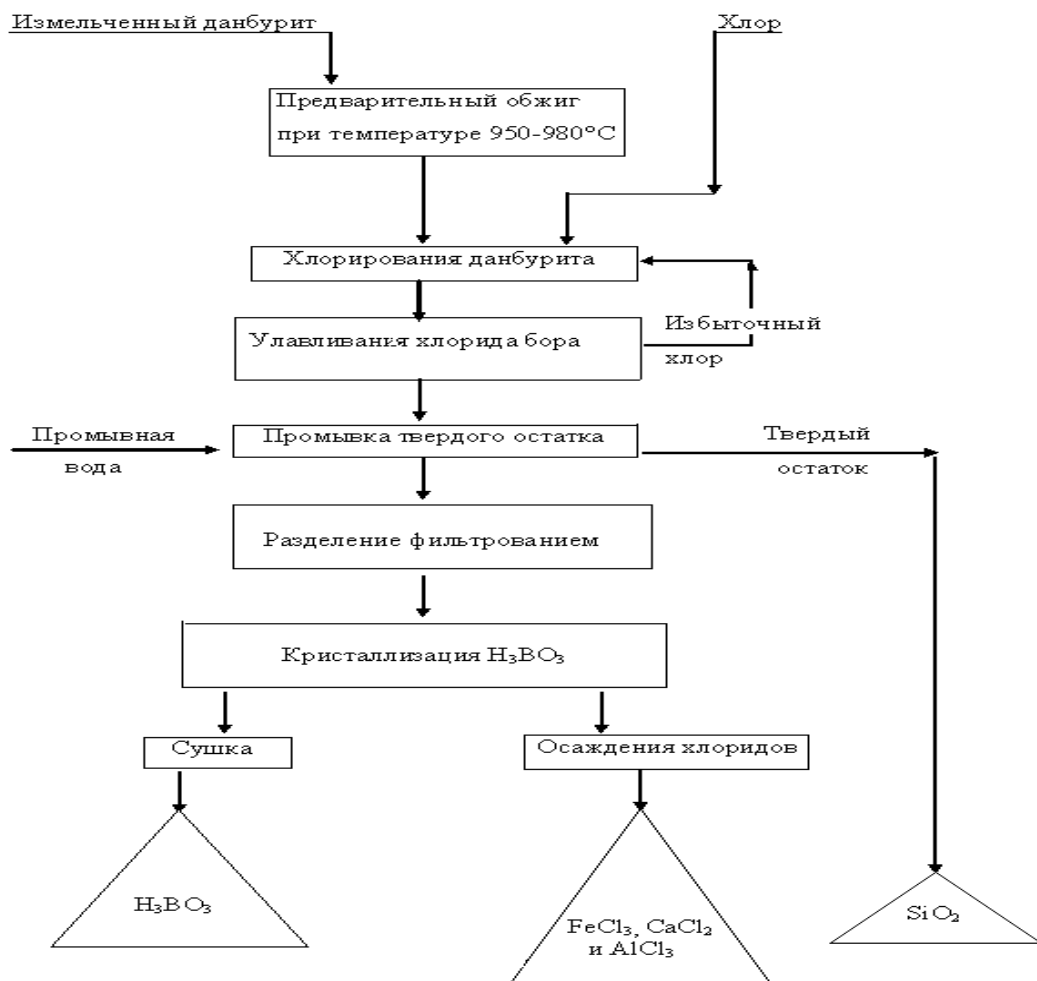


Рис.3. Принципиальная технологическая схема переработки данбуритов хлорным методом.

На основе проведённых исследований разработана принципиальная технологическая схема двухстадийной переработки данбуритов месторождения Ак-Архар хлорным методом. Сущностью двухстадийной переработки является получение хлоридов железа, алюминия и борной кислоты по отдельности на каждой стадии переработки.

На рис.3 представлена принципиальная технологическая схема переработки данбурита хлорным методом.

Предлагается схема хлорирования данбурита с последующим предварительным обжигом в интервале температур 950-980°C, когда вместе с сопутствующими оксидами хлорируется и оксид бора, который улавливается погашением в диэтиловом эфире. Полученные хлориды железа, алюминия и других оксидов осаждаются по общепринятым методикам, борная кислота, отделяемая из раствора методом перекристаллизации, представляет большой практический интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маматов Э.Д., Ашуров Н.А., Курбонов А.С., Ятимов П.М., Мирсаидов У.М. Сернокислотное разложение данбурита с последующим обжигом. – ДАН РТ, 2008, т.51, №9, с.672-674.
2. Ашуров Н.А., Маматов Э.Д., Ятимов П.М., Мирсаидов У.М. Кинетика сернокислотного разложения предварительно обожжённого данбурита месторождения Ак-Архар Таджикистана. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2008, №4 (133), с.36-40.
3. Курбонов А.С., Маматов Э.Д., Машаллах С., Мирсаидов У.М. Разложение данбуритового концентрата азотной кислотой. – ДАН РТ, 2010, т 53, №11, с.865-869.
4. Эммануэль Н.М., Кнорре Д.Г. Курс химической кинетики. – М.: Высшая школа, 1974, 400 с.

Ў.М.МИРСАИДОВ, П.М.ЯТИМОВ, Э.Д.МАМАТОВ, З.В.КОБУЛИЕВ,
Ш.Б.НАЗАРОВ

ХЛОРОНИДАНИ КОНСЕНТРАТИ ДАНБУРИТИ ҚАБЛАН ПУХТА- ШУДА ВА ҲИСОБ НАМУДАНИ ПАРАМЕТРҲОИ КИНЕТИКӢ

Институти химияи Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон ба номи В.И.Никитин

Дар мақола натиҷаҳои хлоронидани концентрати данбурити қаблан пухташуда, шароитҳои муносиби коркард ва раванди кинетикии ҳисоб кардани он оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: концентрати данбурит – қаблан пухташуда – хлоронидан.

U.M.MIRSAIDOV, P.M.YATIMOV, E.D.MAMATOV, Z.V.KOBULIEV, SH.B.NAZAROV

**CHLORINATION OF PREBAKED DANBURITE CONCENTRATE AND
EVALUATION OF KINETICS PARAMETERS**

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, Academy of the Republic of Tajikistan

The results of chlorination of prebaked danburite concentrate are presented in this work. The optimal conditions of reprocessing are found. The kinetics of process is evaluated.

Key words: danburite concentrate – prebaking – chlorination.

УДК 541.127 : 581.19:547

О.ШАМСАРА, З.К.МУХИДИНОВ, Д.Т.БОБОКАЛОНОВ*, С.Р.УСМАНОВА, Л.Ш.ЛИУ**

**ФОРМИРОВАНИЕ МИКРОКАПСУЛ НА ОСНОВЕ
ВЫСОКОМЕТИЛИРОВАННЫХ ПЕКТИНОВ И ЛАКТОГЛОБУЛИНОВ
МОЛОЧНОЙ СЫВОРОТКИ**

Институт химии им.В.И.Никитина АН Республики Таджикистан,

**Таджикский государственный медицинский университет им. Абуали ибн Сино,*

***Восточный региональный центр Госдепартамента США по сельскому хозяйству,
Филадельфия, США*

Поступила в редакцию 11.03.2013 г.

Изучен процесс формирования микрокапсул на основе ВМ-пектинов различной структуры, полученных из яблок и цитрусовых с концентратом лактоглобулина на поверхности раздела масло/вода. Найдены оптимальные условия для получения устойчивых эмульсий посредством изменения ионной силы системы, способных образовывать прочный слой на поверхности раздела фаз. Показано, что увеличение фракции белка в системе с яблочным пектином не влияет на количество инкапсулированного ЛВ по сравнению с цитрусовым пектином, где происходит увеличение захвата ЛВ, однако в обоих случаях уменьшаются объёмы эмульсий и образуется меньшее количество частиц.

Ключевые слова: ВМ-пектин – концентрат лактоглобулинов – эмульсия – инкапсулирование.

Исследование механизма взаимодействия белков и полисахаридов на поверхности масляных частиц открывает возможность для разработки новых ингредиентов и межфазных структур для применения в пищевой и фармацевтической промышленности. Предложенный многослойный способ формирования эмульсии масло в воде (М/В), основанный на адсорбции ионного эмульгатора (например, белков) на первом слое и противоположно заряженных полиэлектролитов на втором слое (например, полисахаридов) [1,2], может быть использован для создания микро- и наноразмерных средств доставки лекарств (СДЛ) и питательных веществ в организм. Такая система способна защитить лио-

Адрес для корреспонденции: Мухидинов Зайниддин Камарович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: zainy@mail.ru

фильные и протеиновые лекарственные вещества (ЛВ) от ферментативного расщепления, а также многих солей лекарственных веществ (ЛВ) от гидролиза в желудке.

В этом аспекте способность высокометилированного (ВМ) пектина образовывать растворимый комплекс с белками на поверхности эмульсионных частиц М/В посредством гидрофобных взаимодействий явилась основой при создании СДЛ в виде нано- и микрокапсул [3-7], которые могут найти широкое применение при создании инъекционных и аэрозольных форм ЛВ.

Целью настоящей работы было изучение процесса формирования микрокапсул на основе ВМ-пектинов различной структуры с концентратом лактоглобулина в эмульсионной системе М/В.

Экспериментальная часть

В экспериментах были использованы ВМ яблочный и цитрусовый пектины, полученные методом быстрой экстракции [8] и охарактеризованные содержанием галактуроновой кислоты (ГК), степенью этерификации (СЭ) карбоксильных групп и молекулярной массой (Mw): высокометилированный яблочный пектин (ВМЯ) - ГК 68%, СЭ 52%, Mw 130 KD; высокометилированный цитрусовый пектин (ВМЦ) - ГК 62.0%, СЭ 78.0%, Mw 195 KD. Концентрат лактоглобулинов (LgC), выделенный из молочной сыворотки [9], содержал: 37.35% β -LgA, 52.9% β -LgB и 9.7% α -LgA. В качестве ЛВ был использован нестероидный противовоспалительный препарат - пироксикам (РХ).

Микрокапсулы получали двустадийной процедурой: первичную эмульсию - гомогенизацией 4 мл подсолнечного масла с 10 мл 0.2% модельного ЛВ пироксикама (РХ) в этаноле и с соответствующим количеством водного раствора катионактивного эмульгатора - 2% β -LgC при перемешивании в течение 15 мин при 12000 об/мин, температуре 60°C на высокоскоростном гомогенизаторе ИКА Т-25 (ULTRA TURRAX, ИКА-WERKE GMBH & CO.KG, Germany). Затем в полученную эмульсию, не прекращая перемешивания, медленно добавляли соответствующий объём водного раствора противоположно заряженного пектина, который, адсорбируясь на поверхности липидных капель, образует вторичную эмульсию. Перемешивание продолжали ещё в течение 20 мин; полученную эмульсию промывали дистиллированной водой для удаления несвязанного ЛВ. Количество инкапсулированного РХ определяли на УФ-спектрометре при 335 нм.

Для характеристики устойчивости микрокапсулы суспендированы в воде на гомогенизаторе при 9000 об/мин. Количество частиц и их размеры определяли на микроскопе Motic type 102 M (Motic Instrument INC, Canada) с использованием компьютерной программы Motic Image Advanced 3.2. Размер частиц представлял собой объемно-весовой средний диаметр d_{43} , которые были рассчитаны по формуле.

$$d_{43} = \frac{\sum n_i d_i^4}{\sum n_i d_i^3},$$

где n_i – количество эмульсионных частиц с диаметром d_i .

Все измерения были выполнены на двух свежеприготовленных образцах, результаты представлены как средневывчисленные.

Характеристика микрокапсул: стабильность эмульсионных частиц (объём эмульсии) и степень инкапсулирования ЛВ для системы LgC /ВМЯ приведена в табл.1.

Таблица 1

Характеристика эмульсионных микрокапсул, полученных в водной среде

Весовое соотношение LgC/ВМЯ, г/г	Молярное соотношение LgC/ВМЯ	Объём эмульсии через день, мл	Количество инкапсулированного РХ,%
5:1	36.0	3.1	51.1
3:1	21.7	3.2	60.0
2:1	14.5	4.5	16.6
1:1	7.2	1.1	42.0
1:2	3.6	4.1	54.5
1:3	2.4	3.2	55.0
1:5	1.5	2.2	67.1

Данные, представленные в табл.1. указывают на то, что объёмы полученных эмульсий при всех соотношениях LgC/ВМЯ вначале составляли 27-31 мл, на следующий день объёмы снижались, достигая стабильного состояния, а через день образовывался компактный кремовидный слой (1.1-4.5 мл). Однако, несмотря на кремообразование, эмульсионные системы обладали высокой способностью задерживать ЛВ.

Основной движущей силой адсорбции полимера на каплях первичной эмульсии является электростатическое взаимодействие между заряженными группами на полимере и противоположно заряженными группами на коллоидных частицах [1-3,10-12]. Степень адсорбции полимера на заряженной поверхности зависит от свойств полимера и условий среды (температуры, рН, ионной силы и типа ионов) [11]. Из этого следует, что в условиях вышеупомянутых экспериментов образование устойчивых эмульсионных частиц является довольно сложным процессом. Различия в способности пектиновой цепочки образовывать эффективный вторичный слой на протеиновых молекулах вокруг масляной капли зависит от молекулярной массы и структуры пектинов [13]. Исходя из этого, нами проводилась модификация способа приготовления эмульсии: первичная эмульсия была приготовлена при значениях рН ниже изоэлектрической точки β -Lg, а пектины готовили в растворах с повышенной ионной силой, для предотвращения полиэлектролитного набухания пектиновых цепей. Полученные эмульсии, при выбранных оптимальных соотношениях биополимеров, были более устойчивыми при продолжительном хранении (табл. 2).

Таблица 2

Характеристика микрокапсул на основе пектинов, полученных в растворе NaCl

Тип пектина	Весовое соотношение LgC/ВМ, г/г	Мольное соотношение LgC/ВМ	Объём эмульсии на следующий день, мл	Количество инкапсулированного РХ, %
ВМЯ	3:1	22.0	23.0	57.8
ВМЯ	5:1	36.0	18.0	56.3

ВМЯ	10:1	72.0	17.0	53.2
ВМЦ	3:1	34.0	25.0	32.8
ВМЦ	5:1	54.0	21.0	46.7
ВМЦ	10:1	108.0	19.0	49.4

Микрокапсулы на основе ВМЦ- и ВМЯ-пектинов в 25% эмульсионной среде М/В, полученные таким способом, обладали наилучшими качествами и высокой степенью захвата модельного ЛВ. Характеристика микрокапсул, полученных в растворе NaCl при различных соотношениях белок/пектин, представлена в табл. 2. В таблице приведена характеристика полученных эмульсий М/В на основе LgC и двух ВМ-пектинов (ВМЯ и ВМЦ). Как видно, объём эмульсии, приготовленной в системе LgC/ВМЯ при соотношении 3:1, соответствующем 22 молям Lg/пектин, привел к значительному увеличению объёма эмульсии. Объёмы эмульсий LgC/ВМ пектин в обеих системах одинаково увеличились при соотношении биополимеров 5:1 в 6-7 раз и в 7-8 раз при соотношении 3:1 по сравнению с эмульсиями, приготовленными без добавления соли. Увеличение доли протеина в 10 раз в обоих случаях привело к уменьшению стабильности эмульсионных микрочастиц.

Степень инкапсулирования ЛВ в системе LgC/ВМЯ была выше, чем в системе LgC/ВМЦ. Количество инкапсулированного ЛВ с увеличением доли протеина в системах LgC/ВМЦ и LgC/ВМЯ не зависело от соотношения биополимеров. Устойчивость эмульсии при добавлении соли натрия, как было показано ранее [5], вероятно, усилило эффективность длины пектиновой цепочки путем уменьшения полиэлектролитного набухания полимерных цепей, и образования прочного слоя покрытой поверхности даже для ВМ-пектинов. Кроме того, присутствие противоионов натрия в системах с ВМ-пектинами, также может привести к частичному экранированию заряда, предотвращающему образование коацерватов между пектином и протеином. Данный процесс в силу самого факта устраняет образование капельных мостиков и флокуляцию капель.

Для того чтобы прояснить влияние структуры пектина и соотношения LgC/пектин на устойчивость кремообразования, были рассчитаны количество и размер частиц в эмульсиях.

На рис.1 представлена зависимость количества частиц в 1 мл эмульсии и их среднего диаметра от соотношения биополимеров в эмульсионной системе LgC/ВМЯ, измеренное на второй день. Большое количество частиц с минимальным средним диаметром было обнаружено в системе LgC/ВМЯ-пектин при молярном соотношении 22. Увеличение фракции протеина привело к заметному уменьшению количества частиц и увеличению их среднего диаметра. В результате средний диаметр частиц увеличился от 8.8 мкм до 13.1 мкм, в то время как общее количество частиц в объёме 1 мл резко снизилось от 1379 тыс. до 367 и 179 тыс., соответственно для LgC/ВМЯ при молярных соотношениях 37 и 72.

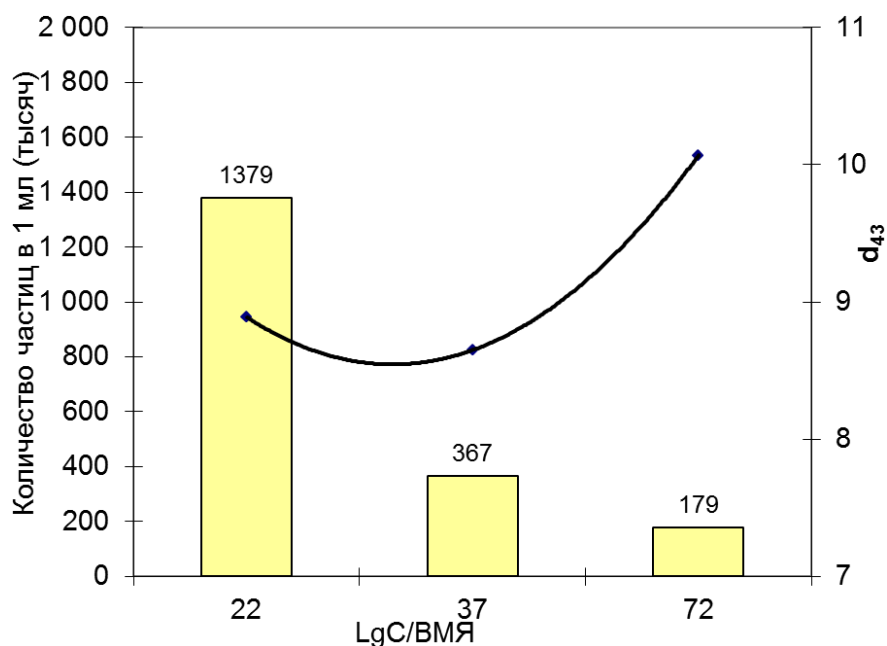


Рис.1. Зависимость количества микрочастиц в 1 мл эмульсии и их среднего объёмно-весаового диаметра (d_{43}) от соотношения биополимеров в эмульсионной системе LgC/BMЯ.

В эмульсионной системе с цитрусовым пектином (рис. 2) изменения количества микрочастиц и их среднего диаметра в зависимости от соотношения LgC/BMЦ происходят несколько по-другому: увеличение количества частиц проходит через максимум, при этом в точке максимума, равной 54, формируются частицы с минимальным диаметром (6.0 мкм).

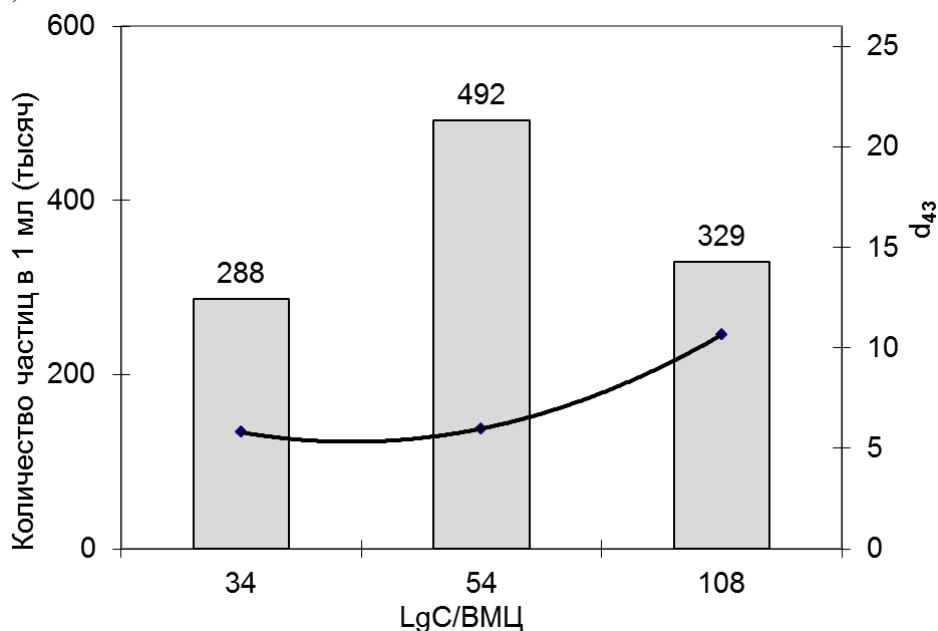


Рис.2. Зависимость количества микрочастиц в 1 мл эмульсии и их среднего объёмно-весаового диаметра от соотношения биополимеров в эмульсионной системе LgC/BMЦ.

В отличие от эмульсионной системы с ВМЯ-пектином, число частиц в эмульсионной системе LgC/ВМЦ при молярном соотношении 54 достигло 491 667, что в три раза меньше числа частиц с ВМ-яблочным пектином при молярном соотношении 22. Формирование относительно крупных частиц с ВМ-яблочным пектином, возможно, связано со структурой ВМЯ (разветвлённость макромолекулы) и плотностью заряда, а также с большим захватом ЛВ липидными каплями.

В присутствии противоионов натрия все исследуемые эмульсии были устойчивыми с высокой степенью инкапсулирования ЛВ. Стабильная эмульсия, содержащая большое количество частиц с меньшим средним диаметром (d_{43}), наблюдалась в системе β -LgC/ВМЯ с относительно низким соотношением по сравнению с ВМ-цитрусовым пектином.

С увеличением фракции белка в системе происходит уменьшение объёма эмульсии и, следовательно, образование меньшего количества частиц. С увеличением доли протеина молекулы белка взаимодействуют с пектиновой цепью на поверхности микрокапсул, что приводит к уменьшению количества частиц и увеличению среднего диаметра при хранении. Однако данный процесс не влияет на степень насыщения лекарством эмульсионных систем LgC/ВМЯ 22 и LgC/ВМЦ 54. Устойчивость эмульсий в данном случае, вследствие добавления соли натрия, вероятно, усилила эффективность длины пектиновой цепи путём уменьшения полиэлектролитного набухания полимерных цепей и образования плотного центра покрытой поверхности.

Таким образом, в данной работе изучен процесс формирования микрокапсул на основе комплексобразования ВМ-пектинов различной структуры, полученных из яблок и цитрусовых, с концентратом лактоглобулинов молочной сыворотки на поверхности эмульсионных частиц М/В, способных эффективно захватывать ЛВ. Найдены оптимальные условия для получения устойчивых эмульсий посредством изменения ионной силы системы, способной повышать эффективность длины пектиновой цепи и образовывать прочный слой на поверхности М/В. Показано, что увеличение фракции белка в системе с яблочным ВМ-пектином не влияет на количество инкапсулированного ЛВ по сравнению с цитрусовым ВМ-пектином, способным захватывать большее количество ЛВ, однако в обоих случаях происходит уменьшение объёма эмульсий и количества частиц. Разработанные системы доставки ЛВ в виде эмульсионных микрочастиц продемонстрировали способность эффективно захватывать ЛВ, что представляется важным при создании систем доставки инъекционных и аэрозольных ЛВ.

Работа выполнена в рамках проекта Международного научно-технического центра T-1419 при финансовой поддержке Госдепартамента США по сельскому хозяйству.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dickinson E. – Food Hydrocolloids, 2011, v.25(8), pp.1966-1983.
2. Guzey D., & McClements D.J. – Journal of Agricultural and Food Chemistry, 2007, v.55(2), pp. 475-485.

3. Ganzevles R.A., Fokkink R., van Vliet T., Cohen Stuart M.A., & de Jongh H. H. J. – Journal of Colloid and Interface Science, 2008, v.317(1), pp.137-147.
4. Muhiddinov Z.K., Khalikov D.Kh., Speaker T., Fassihi R. – Journal of Microencapsulation, 2004, v. 21 (7), pp.729-741.
5. Шарифова З.Б., Усманова С.Р., Мухидинов З.К., и др. – Изв. АН РТ. Отд. физ-мат, хим., геол. и техн.н., 2009, № 2 (135), с.72-78.
6. Мухидинов З.К., Касымова Г.Ф., Насриддинов А.С. и др. – Химико-фармцевтический журнал, 2012, т. 46, №5, с.70-73.
7. Tong L., Vollrath M.K., Krause J.P. and Sriamornsak P. – World Journal of Engineering, 2011, September 1, special issue, p.1123.
8. Патент РТ ТЈ 290; Способ получения пектина из растительного сырья Тадж. НПИЦентр. Бюл. № 57 (1), 2010./ Мухидинов З.К., Горшкова Р.М., Халиков Д.Х., Халикова С.
9. Мухидинов З.К., Джонмуродов А.С., Бобокалонов Д.Т. и др. – Здравоохранение Таджикистана, 2009, №5, с.44-49.
10. Jonsson M., Linse P. – Journal of Chemical Physics, 2001, v. 115, pp. 3406–3418.
11. Chodanowski P., Stoll S. – Journal of Chemical Physics, 2001, v.115, pp.4951–4960.
12. Ganzevles R. A., et al. – in: Food Colloids: Self-Assembly and Material Science, E. Dickinson and M. E. Leser (ed), Royal Society of Chemistry, Cambridge 2007, p. 195

О.ШАМСАРА, З.Қ.МУҲИДИНОВ, Ҷ.Т.БОБОКАЛОНОВ*, С.Р.УСМАНОВА,
Л.Ш.ЛИУ**

ЗАРРАҶОИ ҒИЛОФАКӢ АЗ ПЕКТИНҶОИ БАЛАДМЕТИЛӢ ВА ЛАКТАГЛОБУЛИНҶОИ ЗАРДОБИ ШИР

Институти химияи ба номи В.И.Никитини Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,

**Донишгоҳи давлатии тиббии Тоҷикистон ба номи Абуали ибни Сино,*

***Маркази Минтақавии Шарқии Департаменти давлатии ШМА дар хоҷагии қишлоқ*

Равиши тавлиди зарраҳои ғилофакӣ дар асоси пайвастагиҳои комплекси пектинҳои баландметилии (БМ) себ ва афлесун гирфташуда ва лактоглобулинҳои зардоби шир дар сатҳи сарҳадии омехтаи равғану об (эмулсия) омӯхта шудааст. Дар ин раванд, шароити муътадили ҳосилшавии ин намуд ғилофакҳои дорои ғунҷоиши максималии маводи дорувор, эмулсияи қавӣ бо роҳи тағйиротҳои қувваи ионии маҳлул, дарёб карда шудааст, ки аз таркиби мутаносибии биополимерҳо ва зичии заряднокии онҳо вобастагӣ дорад. Устувории ин зарраҳои ғилофаки дар системаи пектини себ назар ба пектини афлесун бартарӣ дорад. Ин ғилофакҳо ҳамчун барандагони дору истифодаи васеъ хоҳанд ёфт.

Калимаҳои калидӣ: пектини-БМ – фушурдаи лактоглобулинҳо – эмулсия – зарраҳои ғилофакӣ.

O.SHAMSARA, Z.K.MUHIDINOV, J.T.BOBOKALONOV*, S.R.USMANOVA, L.S.LIU**

**FORMATION OF MICROCAPSULE FROM HIGH METHOXYL PECTINS
AND WHEY LACTOGLOBULINES**

VI.Nikitin Institute of Chemistry, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,

**Abuali ibn Sino Tajik State Medical University,*

***Eastern Regional Research Center ARS USDA, USA*

The process of microencapsulation of model drug through complex formation between whey lactoglobulin concentrate (LgC) and different high methoxyl (HM-) pectins from apples and citrus in the oil/water (O/W) interface were investigated. There are optimum conditions for obtaining stable emulsions by changing the ionic strength of the system, capable of forming a solid layer at the O/W interface were studied. It is shown that the emulsion system formed by apple pectin has maximum particle number, higher drug loading efficiency in comparison with the citrus pectin. Delivery systems in the form of emulsion microparticles have demonstrated the ability to efficiently encapsulate the model drug-piroxicam, which can be widely used in the development of injectable and aerosol delivery systems.

Key words: HM-pectin – lactoglobulin concentrate – emulsion – microencapsulation.

УДК 542.61:546.492

М.И.ДЁГТЕВ, Е.М.НЕЧАЕВА, А.А.АМИНДЖАНОВ*, В.В.ФОТИН

**ПРОИЗВОДНЫЕ ПИРАЗОЛОНА В ХИМИИ ЭКСТРАКЦИИ РТУТИ (II)
ИЗ ХЛОРИДНЫХ РАСТВОРОВ**

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Россия,

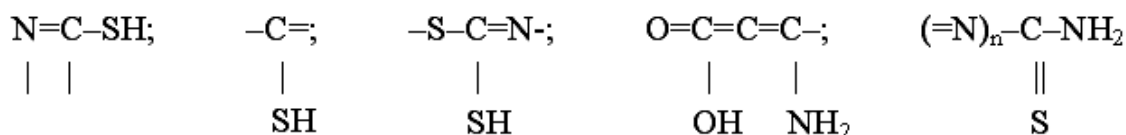
**Таджикский национальный университет*

Поступила в редакцию 10.12.2012 г.

Проведена оценка экстракционной способности диантипирил- и дипиразолонилметанов на примере извлечения ртути (II) из хлоридных растворов в СНС13. Выявлено влияние основности реагентов, длины цепи алкильного радикала у центрального атома молекулы реагента на коэффициент распределения ртути. Установлен состав, механизм извлечения комплексов и рассчитаны константы экстракции и распределения хлоридных комплексов ртути (II).

Ключевые слова: антипирин – диантипирилметаны – дипиразолонилметаны – экстракция – хлороформ – коэффициент распределения – константа экстракции – ртуть (II).

Известно, что ионы ртути (II) взаимодействуют с органическими реагентами различных классов, молекулы которых содержат следующие функционально-аналитические группировки [1]:



Широко распространёнными экстрагентами ионов ртути являются серосодержащие соединения, например, дитизон и его аналоги [2], сульфоксиды [3], диэтилдитиокарбаминат [4]. В работе М.Дёгтева и др. [5] для распределения ртути в хлороформ из растворов минеральных кислот предложены диантипирилсульфид и диантипирилсульфоксид. Нельзя не отметить перспективность применения для экстракции ртути (II) макро-

Адрес для корреспонденции: Аминджанов Азимджон Алимович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: azimjon51@mail.ru;

Дёгтев Михаил Иванович. 614990, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, 15, Пермский государственный национальный исследовательский университет. E-mail: anchet@psu.ru

циклов, особенно краун-эфиров, содержащих в молекуле реагента донорные атомы серы, азота и кислорода [6, 7].

В присутствии хлорид-, бромид-, иодид-ионов ртуть (II) образует комплексные соединения с диантипирилметаном (ДАМ) и его алкильными гомологами метил-, пропил-, фенилдиантипирилметаны (ДАЭ, ДАБ, ФДАМ) [8]. А.Бусев и Л.С.Хинтибидзе предложили использовать бромидные и иодидные комплексы ртути с диантипирилметанами для экстракционно-фотометрического определения элемента [9]. Окрашенные комплексы ртути имеют максимум поглощения при 320-325 нм, закон Бера соблюдается для 5-20 мкг Hg в 10 мл раствора. В работах [10, 11] предложены новые гомологи ДАМ – диантипирилдекан (ДАД) и диантипирилундекан (ДАУ) для экстракции хлоридных комплексных ионов ртути в хлороформ. Установлен состав извлекаемых комплексов и разработана экстракционно-фотометрическая методика определения ртути.

М.Дёгтевым предложена новая группа реагентов на основе 1-фенил-3-метилпиразолона-5 (ФМП) – дипиразолонилметаны, которые эффективно и селективно извлекают ионы металлов из аммиачных, щелочных, карбонатных, галогенидных и смешанных растворов в хлороформ [12]. Реагенты оказались эффективными при экстракции ртути (II) из аммиачных и щелочных растворов. Установлен состав и механизм экстракции ртути (II) [13].

В настоящем сообщении приведены сведения об экстракции ртути (II) из хлоридных растворов производными пиразолона.

Экспериментальная часть

Стандартный раствор сульфата ртути (0.1 моль/л) готовили растворением соответствующей навески соли $HgSO_4$ в 0.5 моль/л растворе H_2SO_4 . Концентрацию раствора определяли титрованием ЭДТА. В качестве экстрагентов применяли хлороформные растворы (0.1 моль/л) антипирина (АП), ДАМ, ДАБ, бутилдиантипирилметана (ДАП), гексилдиантипирилметана (ДАГ), дипиразолонилгептана (ДПГ) и ФМП. Хлороформ брали фармакопейный, реагенты ДАМ, ДАБ, ДАГ синтезировали по методу [8], ДПБ и ДПГ по известной методике [12]. Реагенты диантипирилдекан (ДАД) – (ди-(1,5-диметил-2-фенил-4-пиразолин-3-он-4-ил)декан) и диантипирилундекан (ДАУ) – (ди-(1,5-диметил-2-фенил-4-пиразолин-3-он-4-ил)ундекан) были получены нами впервые и описаны в работах [10, 11].

Соли KCl, KBr, KI квалификации "чда", их водные растворы (4 моль/л) получали растворением соответствующих навесок в дистиллированной воде, кислоты HCl, H_2SO_4 , HNO_3 и CH_3COOH были квалификации "чда" или "хч", их разбавленные растворы 2-4 моль/л готовили разбавлением в дистиллированной воде концентрированных кислот.

ЭДТА (этилендиаминтетрауксусной кислоты динатриевая соль) – 0.02 моль/л водный раствор, коэффициент поправки устанавливали по $MgSO_4$. $MgSO_4$ – 0.05 моль/л (фиксальный раствор, $ZnSO_4$ – 0.02 моль/л, аммиачно-аммонийный буферный раствор с $pH = 8-10$, NH_4OH – 15-25%-ный раствор аммиака, в качестве индикаторов применяли

бромкрезоловый зелёный (0.1%) и эриохром чёрный Т, которые готовили по методике [14].

Распределение ионов ртути (II) (0.01 моль/л) осуществляли в делительных воронках вместимостью 50 мл при комнатной температуре и перемешивании равных фаз (10 мл) водной и органической фаз в течение 10 мин., что достаточно для достижения химического равновесия. Необходимое значение кислотности среды создавали введением хлороводородной кислоты (HCl, H₂SO₄, HNO₃ и CH₃COOH) или растворов NH₄OH различной концентрации. Для установления степени извлечения (E, %) или коэффициента распределения (D) определяли содержание ртути (II) в органической и водной фазах комплексометрически [14].

Для определения состава экстрагируемых соединений применяли биогарифмический метод, а также метод химического анализа экстракта на все компоненты. В последнем случае в аликвотных частях экстракта определяли содержание реагента, ионов металла, водорода и галогенид-ионов. Концентрацию всех компонентов рассчитывали с учётом значений контрольного опыта.

Результаты и их обсуждение

При изучении влияния концентрации хлороводородной кислоты на степень извлечения ртути (II) установлено, что максимальной экстракционной способностью из реагентов группы ДАМ обладает ДАБ, поскольку легче протонируется и обеспечивает 100%-ное образование однокислотной соли (RH)Cl (таблица). Оптимальная кислотность водной фазы для экстракции ртути (II) ДАМ и его гомологом в СНCl₃ является 0.5 моль/л HCl. Извлечение Hg(II) раствором АП в хлороформе не превышает 62% в условиях 0.25 моль/л HCl, при этом его концентрация в 2.5 раза была выше, чем ДАМ или ДАП.

Таблица

Зависимость степени извлечения ртути(II) от концентрации HCl

$$V_b = V_o = 10 \text{ мл}$$

C(HCl), моль/л	E, %					
	АП* 0.25 М	ДАМ	ДАБ	ФМП	ДПБ	ДПГ
0.01	10.2	12.5	21.3	40.0	42.5	71.8
0.05	53.4	74.3	87.2	14.4	76.0	75.1
0.10	59.1	83.7	91.5	14.4	85.0	85.1
0.25	62.1	92.4	96.4	14.2	92.4	96.4
0.50	53.4	96.8	99.0	13.1	96.8	99.0
1.00	25.2	94.7	97.9	12.5	94.7	97.9
2.00	4.9	92.6	93.4	9.0	92.6	92.8

Согласно предварительным данным таблицы, извлечение ртути (II) из растворов HCl АП и ДАА (диантипирилалканы) в хлороформе зависит от устойчивости и заряда ртутьхлоридного комплексного иона, основности реагента и распределения его хлоридной соли.

Влияние HCl на распределение ионного ассоциата Hg(II) связано с изменением концентрации свободного экстрагента вследствие извлечения однокислотной соли (R·HCl) и неэкстрагируемой для ДАМ и его низших алкильных гомологов двухкислотной соли (R·2HCl) реагента. Распределение HCl зависит, в свою очередь, от природы органического растворителя и от основности реагента. Так, 50%-ное извлечение солей R·HCl в хлороформ наблюдается при концентрации HCl, моль/л: ДАМ (1.75), ДАБ (0.83), ДАГ (0.75), ДАД (0.54), ДАУ (0.46).

Таким образом, замена атома водорода у центрального углеродного атома молекулы реагента более нуклеофильным углеводородным радикалом усиливает основные свойства гомологов ДАМ и приводит к образованию экстрагируемой соли R·HCl при меньшей концентрации хлороводородной кислоты и, как следствие, наблюдается сдвиг максимума на кривых экстракции хлоридных комплексов ртути (II) в менее кислую область. Вместе с этим расширяется интервал концентраций HCl, в котором происходит максимальное извлечение Hg (II) при замене ДАМ его гомологами. Нельзя не учитывать и тот факт, что с утяжелением молекул ДАД и ДАУ растворимость их солей (R·HCl, R·2HCl) повышается в органическом растворителе, например, хлороформе.

Действительно, при увеличении концентрации кислоты > 0.5 моль/л экстракционная способность реагентов уменьшается, что связано с их переходом в однокислотную соль R·2HCl, не извлекающую ионы металлов (рис. 1). Однако высшие гомологи ДАМ-ДАУ и ДАД количественно извлекают ртуть (> 99.0) в интервале концентрации HCl, равном 0.5-7 моль/л.

Расширение интервала оптимальной кислотности объясняется, с одной стороны, увеличением основных свойств реагента, а с другой, – хорошей растворимостью одно- и двухкислотных солей реагентов в органическом растворителе.

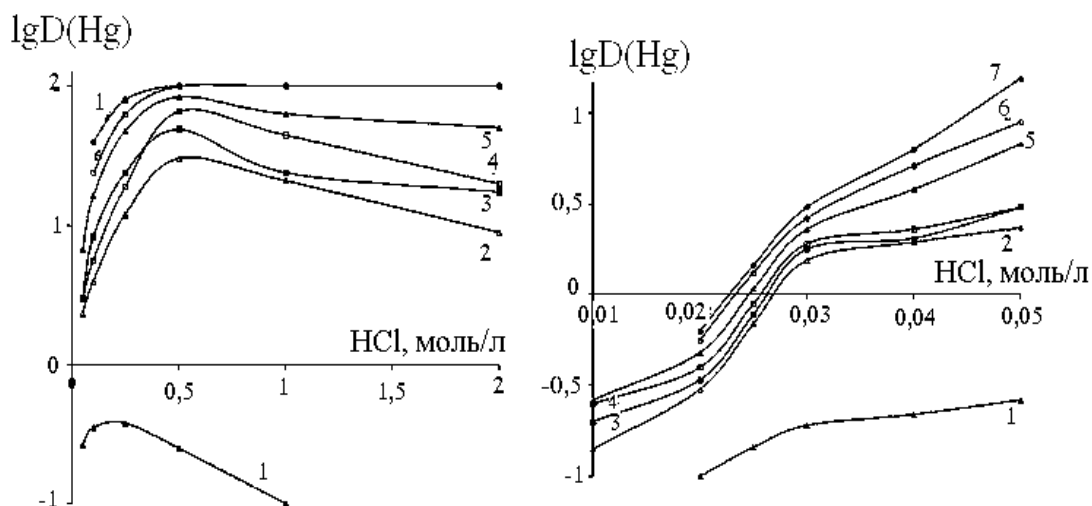


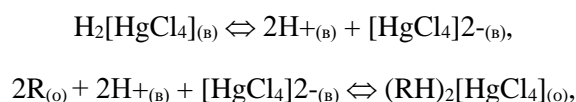
Рис. 1. Распределение ионов ртути (II) из растворов HCl в CHCl_3 , моль/л: $C_{\text{Hg}} = 0.01$; $C_{\text{R}} = 0.1$. 1 – АП; 2 – ДАМ; 3 – ДАБ; 4 – ДАП; 5 – ДАГ; 6 – ДАД; 7 – ДАУ.

Как видно из рис. 1, по значению концентрации хлороводородной кислоты при 50%-ном извлечении ртути ($\lg D = 0$) исследуемые реагенты можно расположить в следующий ряд: ДАМ > ДАБ > ДАП > ДАГ > ДАД > ДАУ, то есть с увеличением длины радикала при центральном углеродном атоме молекулы реагента значение pH_{50} смещается в менее кислую область.

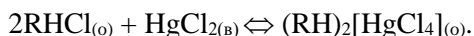
Изотермы экстракции ртути в хлороформ при оптимальной кислотности среды свидетельствуют о высокой ёмкости ДАА. Так, для 0.1 моль/л растворов реагентов экстракционная ёмкость (моль/л) по ртути составила: $8.03 \cdot 10^{-3}$ (АП); $4.65 \cdot 10^{-2}$ (ДАМ); $4.70 \cdot 10^{-2}$ (ДАБ); $4.74 \cdot 10^{-2}$ (ДАП); $4.80 \cdot 10^{-2}$ (ДАГ); $4.96 \cdot 10^{-2}$ (ДАД); $4.99 \cdot 10^{-2}$ (ДАУ).

Различными методами, включая молярных отношений, билогарифмических зависимостей $\lg D$ (Hg)- $\lg C$ (R) и $\lg D$ (Hg)- $\lg C$ (Cl-), химического анализа насыщенных ионами ртути (II) экстрактов установлено соотношение $Hg:R:H^+:Cl^- = 1:2:2:4$, где R – ДАА.

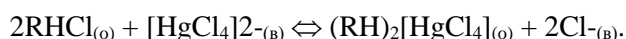
Принимая во внимание высокую устойчивость тетрахлоридного комплексного иона ртути (II) ($K_{\text{нест}}[HgCl_4]^{2-} = 6.03 \cdot 10^{-16}$ [14]), можно допустить, что распределение комплекса ртути с гомологами ДАМ ($C_nH_{2n+1} \geq C_6H_{13}$) протекает по реакции присоединения металлокомплексной кислоты к основанию молекулы реагента по схеме:



либо экстракция комплекса осуществляется по реакции присоединения соли металла к однокислотной соли реагента:

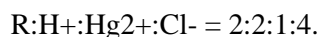


В случае ДАМ можно также допустить (в силу его меньшей основности по сравнению с гомологами) реакцию межфазного анионного обмена:



ДАД и ДАУ, в отличие от других гомологов ДАМ, растворяются в керосине при незначительном нагревании ($t = 40-50^\circ C$). При $C(HCl) = 1.0-2.0$ моль/л возможно экстракционное извлечение ионов ртути (II) в керосин с образованием третьей жидкой фазы, степень концентрирования ртути (II) в которой достаточно высока и составляет более 98%.

Доказано, что в третью фазу также экстрагируются соединения с соотношением



Для увеличения скорости расслаивания можно применять смесь керосин:хлороформ = 8.5:1.5.

При изучении распределения хлоридных ацидокомплексов ртути (II) в присутствии нитрат-ионов наблюдается подавление экстракции ионов ртути. В таких же условиях подавляется извлечение целого ряда ионов металлов, за исключением золота (III), тал-

лия (III) и меди (I). Таким образом, данный подход представляет не только теоретический, но и практический интерес, поскольку может найти применение для увеличения селективности выделения ионов металлов.

Подавление экстракции ацидокомплексов в смешанных системах связано с протеканием межфазных реакций анионного обмена согласно уравнению:



Фактор разделения (S) меди (I) и ртути (II) при 4 моль/л исходной концентрации $NaNO_3$ составляет $S_{Cu(I)/Hg} = E_{Cu(I)/Hg} = 2.78$ (ДАГ),

Изучены кинетические характеристики извлечения ртути (II) из хлоридных растворов ДАА в хлороформ. Порядок реакции определен графическим методом. Линейная зависимость наблюдается в координатах $\ln C(Hg_{2+(в)} - t)$, то есть процессы экстракции ртути (II) диантипирилалканами относятся к реакциям псевдопервого порядка. Значения констант скорости экстракции k ($t = 23-25^\circ C$), c^{-1} : $(3.06 \pm 0.10) \cdot 10^{-2}$ – ДАБ; $(3.66 \pm 0.14) \cdot 10^{-2}$ – ДАГ; $(3.97 \pm 0.07) \cdot 10^{-2}$ – ДАД коррелируют со значениями индукционных констант Тафта (σ^*) алкильных заместителей в молекулах реагента ($k = 25.61 \cdot (-\sigma^*) + 0.105$; $r^2 = 0.996$).

Значения констант распределения (lgP) комплексного аниона $HgCl_4^{2-}$ для ДАМ и его гомологов: 5.17 (ДАМ) < 5.20 (ДАБ) < 5.22 (ДАП) < 5.24 (ДАГ) < 5.28 (ДАД) < 5.30 (ДАУ) позволили установить зависимость между lgP и длиной алкильной цепи у центрального атома в молекуле реагента. Данные значения lgP удовлетворительно, коррелируют со значениями индукционных констант Тафта: $lgP = 2.504 (-\sigma) + 4.902$, $r^2 = 0.939$.

Кривые распределения ртути (II) дипиразолонилалканами из хлоридных растворов проходят через максимум (рис. 2). С увеличением $C_{HCl} > 0.25$ моль/л степень извлечения Hg (II) уменьшается вследствие образования комплексного аниона $[HgCl_4]_{2-}$, с одной стороны, и конкуренции кислоты за экстрагент – с другой стороны. Это подтверждают изотермы экстракции $HgCl_2$ из водных растворов KCl, а также данные по влиянию хлорида калия на распределение ртути из растворов хлороводородной кислоты. Замена хлороформа на дихлорэтан значительно увеличивает распределение Hg (II) ДПА. В данных условиях ФМП обладает очень низкой экстракционной способностью. Максимальное извлечение ртути составляет около 40%.

Изучение влияния H_2SO_4 на экстракцию $HgSO_4$ из растворов KCl показало, что распределение ртути увеличивается в интервале концентрации ионов водорода 0.1-1.0 моль/л, затем монотонно уменьшается. Это в одинаковой степени проявляется для $C_2H_4Cl_2$ и $CHCl_3$.

В нейтральных растворах ртуть экстрагируется по катионообменному механизму (аналогия с аммиачными, нитратными и ацетатными растворами), а из слабокислых – по механизму внедрения.

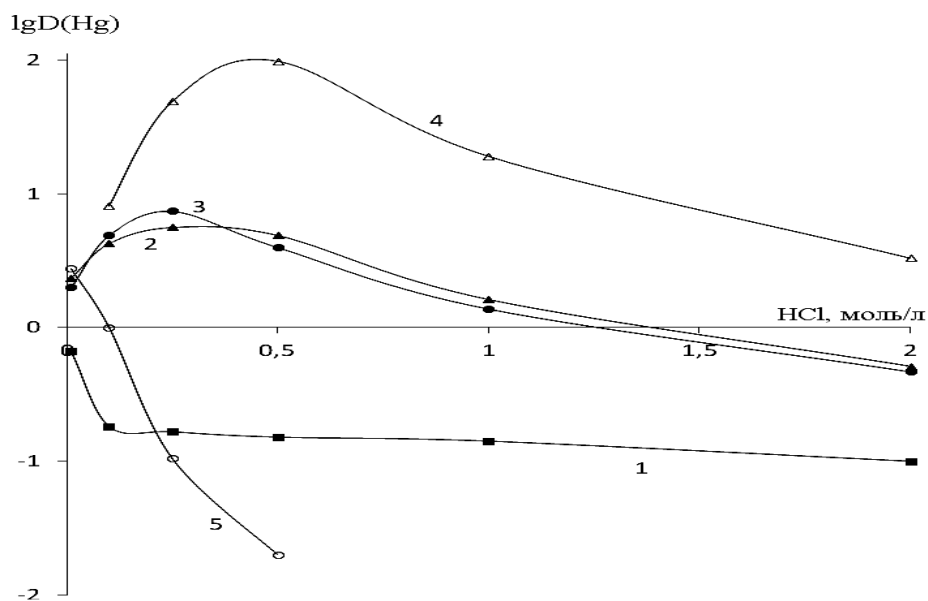


Рис. 2. Распределение Hg (II) из растворов HCl (1-4) и KCl (5) в CHCl_3 (1-3) и $\text{C}_2\text{H}_4\text{Cl}_2$ (4,5), моль/л: $C_{\text{Hg}}=0.01$, $C_{\text{R}}=0.1$. 1 – ФМП, 2 – ДПБ, 3-5 – ДПГ.

Распределение ртути является избирательным, поскольку в оптимальных условиях её экстракции медь (II), кобальт, никель, железо (III), цинк, кадмий, свинец, марганец (II), алюминий (III), щелочноземельные и редкоземельные элементы остаются в водном растворе.

Показана возможность применения экстракции диантипирилметанами и дипиразолонилалканами из кислых сред для концентрирования, выделения и определения ионов ртути (II). Разработаны гибридные методики определения Hg (II) с применением : 1) ДАД и дитизона; 2) ДПГ и тиокетона Михлера. Предел обнаружения ртути в экстракте равен в первом случае – 0.02 мкг/мл, во втором – 0.005 мкг/мл. Методики опробованы на модельных растворах, обладают высокой селективностью и хорошей воспроизводимостью ($Sr \leq 0.04$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Роева Н.Н., Н.Н. Роева, Саввин С.Б. – Журн. аналит. химии, 1992, т.47, № 10-11, с.1750-1794.
2. Jaffar M., Ashraf M. – J.Chin. Chem.Soc. 1987, Ser.2, № 4, pp.269-273.
3. Муринов Ю.И., Майстренко В.И., Афзалетдинова Н.Г. Экстракция металлов S,N-органическими соединениями – М.: Наука, 1993, 192 с.
4. Ishi Rawa Irumi, Sato Taichi, Nippon Kadaku Kaishi. – J. Chem. Soc. Jap. 2000, № 11, p. 779-785.
5. Дегтев М.И., Жихарева Т.В., Фотин В.В. – Журн. неорган. химии, 1996, т.41, № 8, с.1397-1401.
6. Поддубных Л.П., Дмитриенко С.Г., Кузьмин Н.М., Формановский А.А., Золотов Ю.А. – Журн. неорган. химии. 1986, т.31, № 7, с.1812-1816.
7. Пасекова Н.А. – Журн. неорган. химии, 1991, т.36, № 11, с.2971-2976.
8. Диантипирилметан и его гомологи как аналитические реагенты – Ученые записки, № 324 Перм. ун-та. – Пермь: 1974, 280 с.

9. Бусев А.И., Хинтибидзе Л.С. – Журн. аналит. химии, 1967, т.22, № 5, с.694-698
10. Дёгтев М.И. Нечаева Е.М. – Журн. неорган. химии, 2007, т.52, № 8, с.1381-1385.
11. Патент РФ. № 2339016. Способ концентрирования ртути (II) / Дёгтев М.И., Нечаева Е.М., Фотин В.В. // № 2007115175\04, заявлено 24.04.07. Опубл. 20.11.2008, бюл. № 32.
12. Дёгтев М.И., Химия экстракции ионов металлов производными пиразолона: Автореф. ... д.х.н. – Уфа, Ин-т органической химии УНЦ РАН, 1994, 44 с.
13. Дёгтев М.И., Хорькова М.А. – Журн. неорган. химии, 1987, т.32, № 9, с.2216-2219.
14. Лурье Ю.Ю. Справочник по аналитической химии – М.: Химия, 1967, 390 с.

М.И.ДЁГТЕВ, Е.М.НЕЧАЕВА, А.О.АМИНЦОНОВ*, В.В.ФОТИН

ҲОСИЛАҶОИ ПИРАЗОЛОН ДАР ХИМИЯИ ЭКСТРАКТСИЯИ СИМОБИ (II) АЗ МАҲЛУЛҶОИ ХЛОРИДӢ

*Донишгоҳи давлатии миллии таҳқиқотии Перм,
Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Ба қобилияти экстраксиякунии диантипирил- ва дипиразолонил-метанҳо дар мисоли ҷудокунии симоби (II) аз маҳлулҳои хлоридӣ дар CHCl_3 баҳо дода шудааст. Таъсири асоснокии моддаҳо, дарозии занҷири радикали алкилии атоми марказии молекулаи модда ба зароби тақсимшавии симоб муайян карда шуд. Таркиб, механизми ҷудокунии комплексо муайян карда шуда, собитаҳои экстраксия ва тақсимшавии пайвастиҳои хлориди симоби (II) ҳисоб карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: антипирин–диантипирилметанҳо – дипиразолонил-метанҳо – экстраксия – хлороформ – зароби тақсимшавӣ – собитаи экстраксия – симоби (II).

M.I.DEGTEV, E.N.NECHAIEVA, A.A.AMINJANOV, V.V.PHOTIN

PYRAZOLONE DERIVATIVES IN THE EXTRACTION OF HYDRARGYRUM IONS (II) FROM CHLORIDE SOLUTIONS

*Perm State University,
Tajik National University

The assessment of the extraction ability of diantipyryl- and dipyrazolonilmetanes, evidence from the hydrargyrum ions extraction from chloride solutions into chloroform, was appraised. The influence of reagents basicity, chain length of alkyl radical at the central atom of the molecule reagent on distribution ratio of hydrargyrum ions was established. The composition, the mechanism of the extracted complexes were determined, the extraction constants and the distribution ratios of the hydrargyrum (II) chloride complexes were calculated.

Key words: antipyrine – diantipyrylmetanes – dipyrazolonilmetanes – extraction – chloroform – distribution ratio – extraction constant – hydrargyrum (II).

УДК 669.054:669.071

Ю.Я.ВАЛИЕВ, М.А.ИСРОИЛОВ, Х.Э.БОБОЕВ, Р.М.БАХРЕТДИНОВ, А.Х.САФИЕВ,
Х.САФИЕВ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИЗВЛЕЧЕНИЯ ВОДОРАСТВОРИМЫХ
СОЛЕЙ ИЗ ОТРАБОТАННЫХ КАТОДНЫХ И БОРТОВЫХ БЛОКОВ
ЭЛЕКТРОЛИЗЁРОВ ПРОИЗВОДСТВА АЛЮМИНИЯ**

*Государственное учреждение «Научно-исследовательский институт металлургии»
ГУП «ТалКо»*

Поступила в редакцию 24.05.2013 г.

В работе приведены результаты исследований по установлению состава и оптимальных параметров извлечения водорастворимых солей из отработанных катодных и бортовых блоков электролизёров производства алюминия. Проведённые исследования показали, что из водных вытяжек твёрдых углеграфитовых отходов алюминиевого производства в промышленных условиях можно получить кальцинированную соду и фторид натрия. Кроме того, полученные водные вытяжки можно также использовать в качестве оросительного раствора газоочистительной системы.

Ключевые слова: отработанные катодные и бортовые блоки – утилизация углеграфитовых отходов – вытяжка растворимых солей.

В процессе производства алюминия углеродистая футеровка электролизных ванн – катодные и бортовые блоки, набойка подины, находясь под постоянным воздействием электролита, пропитывается фторидными солями и другими соединениями и с течением времени подвергается разрушению.

По истечению срока службы (42 мес) электролизёры отключают на капитальный ремонт. Отработанная подина, углеродистая набойка, катодные и бортовые блоки после демонтажа хранятся на складах твёрдых отходов предприятия и становятся опасным в экологическом отношении объектом. В тоже время они являются ценными источниками

Адрес для корреспонденции: Сафиев Хайдар. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Х.Хакимзаде, 17, Государственное учреждение «Научно-исследовательский институт металлургии» ГУП «ТалКо». E-mail: inmet.talco@mail.ru, h.safiev@mail.ru.

вторичного сырья, ввиду значительного содержания в них углеродистого материала, фторидных и других солей.

Поэтому из экономической и экологической точки зрения, утилизация твёрдых углеродистых отходов алюминиевого производства является актуальной задачей.

В настоящее время в развитых странах разработан ряд технологий по переработке отработанной подины электролизеров [1]. Эти технологии пока не нашли широкого промышленного применения и являются опытными разработками отдельных алюминиевых компаний.

На основе проведенных в ГУ «НИИМ» ГУП «ТАЛКО» исследований была разработана двухстадийная безотходная технология утилизации твёрдых углеродистых отходов с извлечением сорбированных солей и получением чистого углеродистого порошка [2].

В настоящей статье приводятся результаты исследований по составу и установлению оптимальных параметров извлечения водорастворимых солей из отработанных катодных (КБ) и бортовых блоков (ББ).

Для проведения исследований и получения надёжных результатов отработавшие свой срок КБ и ББ были взяты с электролизёров после их отключения на капитальный ремонт. Степень пропитки и загрязнения КБ и ББ солями электролита устанавливали по содержанию в них золы или по количеству извлечённых неорганических солей химическими методами.

С этой целью ББ и КБ по толщине были насквозь просверлены трубчатым сверлом для извлечения монолитных цилиндрических керновых проб диаметром 50 мм и длиной 150 мм. Полученные пробы с интервалом в 30 мм были распилены на отдельные сегменты для установления зонального распределения зольности от периферии вглубь блоков.

Озоление полученных проб проводилось в муфельной печи при 8500С с выдержкой 2 ч. Анализ показал, что содержание золы в КБ и ББ особо не отличается. По всей глубине блоков зола распределяется относительно равномерно, от 27 до 30%, в среднем – 29% [3]. Учитывая полученные результаты, отработанные КБ и ББ были целиком перемолоты и измельчены в шаровой мельнице до размера частиц <0.5 мм с составлением усреднённых проб отдельно для КБ и ББ.

Для выявления зависимости извлечения водорастворимых солей от соотношения твёрдой фазы к жидкой (Т:Ж) на примере усреднённой пробы ББ было проведено по 8 опытов – при комнатной температуре и кипячении.

В стаканы ёмкостью 0.4 л засыпали по 50 г навески порошка ББ, приливали дистиллированную воду в соотношении Т:Ж от 1:1 до 1:8. Пульпу периодически перемешивали, выдерживали 40 мин, а затем охлаждали и фильтровали. Осадок на фильтре промывали 8-10 раз. Твёрдый осадок высушивали в сушильном шкафу при 1200С, фильтраты выпаривали до сухих солей. Полученные продукты высушивали до постоянной массы, взвешивали, затем рассчитывалось количество извлечённых солей.

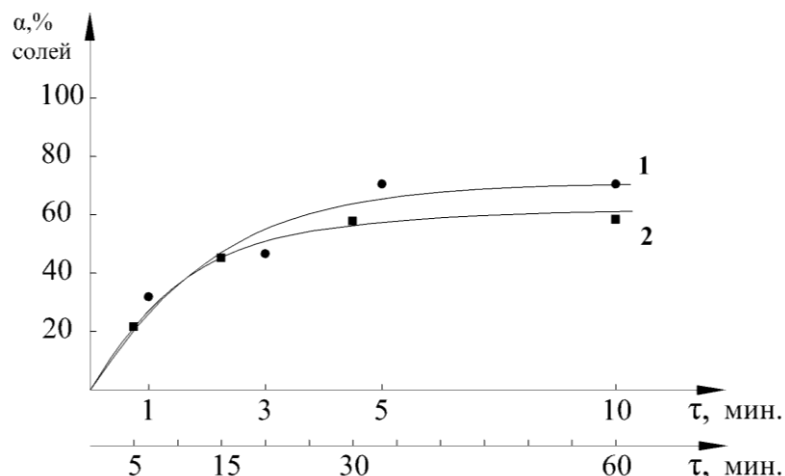


Рис.1. Зависимость степени извлечения водорастворимых солей из ББ от времени при кипячении (1) и комнатной температуре (2).

Как видно из рис.1, оптимальное извлечение солей из пробы соответствует соотношению Т:Ж=1:5-1:6. При этом количество извлечённых водорастворимых солей составляет при комнатной температуре 64.0% и при кипячении – 62.4%. С увеличением соотношения Т:Ж от 1:6 до 1:8 степень извлечения солей остается постоянной.

Далее при соотношении Т:Ж=1:5 при комнатной температуре и кипячении определяли зависимость степени извлечения от времени.

Как видно из рис.2, водный раствор насыщается извлечёнными солями при комнатной температуре в течение 30 мин. Степень извлечения солей составляет при этом 58.6% и далее с увеличением времени не изменяется. В опытах с кипячением водный раствор насыщается растворимыми солями в течение 5 мин. С увеличением времени степень извлечения не изменяется. Извлеченная масса солей остается постоянной – 70.6%.

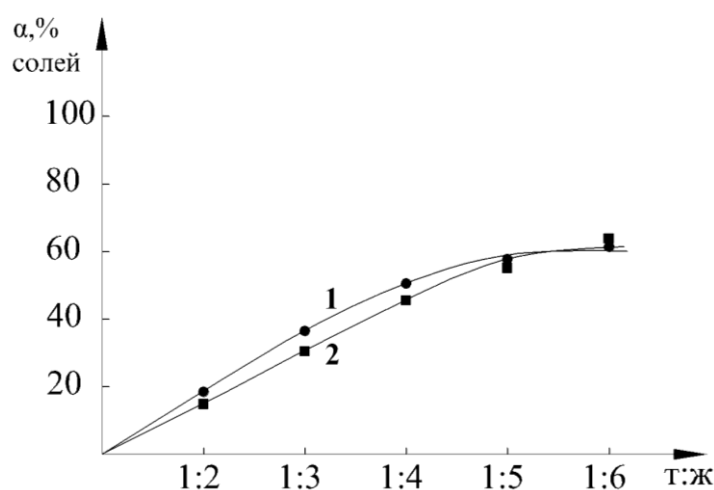


Рис.2. Зависимость степени извлечения водорастворимых солей из ББ от соотношения Т:Ж при кипячении (1) и комнатной температуре (2).

На основании установленных оптимальных условий водных вытяжек – соотношения Т:Ж = 1:5 и продолжительности 5 и 30 мин, были проведены контрольные опыты по извлечению водорастворимых солей из средних проб ББ и КБ, результаты которых приведены в табл.1

Таблица 1

Содержание компонентов в пробах КБ и ББ

Температура, °С	Наименование материала	Общая зольность, мас.%	Навеска, г	Выход минеральных солей		Остаточная зола	
				г	%	г	%
20	ББ	30.0	50	9.05	60.33	5.95	39.67
	КБ	28.9	50	8.02	55.5	6.43	44.50
98	ББ	30.0	50	9.80	65.33	5.25	34.67
	КБ	28.9	50	8.80	60.90	5.65	39.10

Как видно из полученных данных извлечение солей из ББ при комнатной температуре составляет 60%, из КБ – 55%, при кипячении, соответственно – 65 и 61% от исходного содержания золы в пробах, то есть разница находится в пределах 5%. Остаточная зола (труднорастворимые соли) в ББ и КБ составляет от 34 до 44%. Из водных вытяжек ББ и КБ после выпаривания были получены сухие соли, которые высушивали в сушильном шкафу при температуре 1200С и анализировали титриметрическим и гравиметрическим методами.

Таблица 2

Содержание водорастворимых солей в вытяжках, полученных из ББ и КБ (мас. %)

Углеродистые блоки	Na ₂ CO ₃	NaHCO ₃	Na ₂ SO ₄	NaF	H ₂ O
ББ	11.6	19.5	25.6	18.1	25.2
КБ	12.5	16.4	25.4	17.6	28

Как видно из табл.2, химические составы высушенных осадков в ББ и КБ приблизительно одинаковы и сложены в основном из карбонатов, сульфатов и фторидов натрия с содержанием в них связанной воды (кристаллогидраты) и других примесей. Проведённые исследования показали, что из водных вытяжек твёрдых углеграфитовых отходов алюминиевого производства в промышленных условиях можно получить кальцинированную соду и фторид натрия. Кроме того, полученные водные вытяжки можно также использовать в качестве оросительного раствора газоочистки в корпусах электролиза алюминия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мортен Сорлье, Харальд А. Ойя. Катоды в алюминиевом электролизе. II издание. – Красноярск, 1996.
2. Кабиров Ш.О., Исроилов М.А., Валиев Ю.Я. и др. Малый патент № ТЖ 529, 2012 г. Способ переработки углеграфитовых отходов алюминиевого производства.
3. Сафиев А.Х., Валиев Ю.Я., Бобоев Х.Э., Бердиев М., Раджабов Ш.. Исследование и разработка технологии комплексной переработки твердых углеродистых отходов производства алюми-

ния // Материалы V Международной научно-практической конференции «Перспективы применения инновационных технологий и усовершенствования технического образования в высших учебных заведениях стран СНГ», ч.1. – Душанбе, 2011.

Ю.Я.ВАЛИЕВ, М.А.ИСРОИЛОВ, Х.Э.БОБОЕВ, Ҳ.САФИЕВ,
Р.М.БАХРЕТДИНОВ А.Х.САФИЕВ

ОМУҶИШИ РАВАНДИ ЧУДОНАМОИИ НАМАКҲОИ ҲАЛШАВАНДА АЗ ТАРКИБИ БЛОҚҲОИ ИСТИФОДАШУДАИ КАТОДӢ ВА КАНОРӢ ЭЛЕКТРОЛИЗЁРҲОИ ИСТЕҲСОЛИ АЛЮМИНИЙ

*Муассисаи давлатии «Пажӯҳишгоҳи илмию таҳқиқотии металлургия»-и
КВД «Ширкати Алюминийи Тоҷик»*

Дар мақолаи мазкур натиҷаҳои омӯзиши раванди чудо намудани намакҳои дар об ҳалшаванда аз таркиби блокҳои коркардашудаи катодӣ ва канорӣ оварда шудаанд. Таҳқиқотҳо нишон доданд, ки дар шароити саноатӣ аз таркиби ҷабдаи оби партовҳои саҳти графитдори истеҳсоли алюминий, содаи калсинатсияшуда ва фториди натрийро ҳосил намудан имконпазир аст. Ҷабъаи ҳосилшударо барои тоза намудани газҳо дар истеҳсоли алюминий истифода бурдан мумкин аст.

Калимаҳои калидӣ: блокҳои коркардашудаи катодӣ ва канорӣ – утилизатсияи партовҳои ангишту графитдор – ҷабъаи намакҳои ҳалшаванда.

YU.YA.VALIEV, M.A.ISROILOV, H.E.BOBOEV, R.M.BAHRETDINOV, A.H.SAFIEV,
H.SAFIEV

STUDY OF THE RECOVERY OF WASTE WATER SOLUBLE SALTS AND CATHODE SIDE BLOCKS ELECTROLYZERS ALUMINUM PRODUCTION

State Institution «Scientific-research institute of Metallurgy» SUE «TALCO»

The paper presents the results of investigations to establish the optimal parameters of the extraction and composition of the water-soluble salts from waste cathode blocks and side pots. Studies have shown that aqueous extracts of solid carbon and graphite waste of aluminum production in an industrial environment can be soda ash and sodium fluoride. Furthermore, aqueous extracts obtained can also be used as a scrub solution irrigation system.

Key words: cathode and side blocks – Carbon Heel – water-soluble salt – water extract.

УДК 561.31(575)

А.Н.КОЛЧИН, А.Р.ФАЙЗИЕВ*

**КОРРЕЛЯЦИЯ НИЖНЕПЕРМСКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ДЕПРЕССИОННЫХ
СТРУКТУР КАРАМАЗАРА ПО ВУЛКАНОГЕННЫМ ТОЛЩАМ**

Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии

АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 24.04.2013 г.

На примере трех кольцевых вулcano-тектонических депрессий в Кармазаре проведена корреляция верхнепалеозойских эффузивов.

Ключевые слова: вулcano-тектоническая депрессия – корреляция – разрез – осадочно-эффузивная порода – вулcanoгенная толща – структур а.

В статье рассматривается опыт корреляции верхнепалеозойских эффузивов по природным вулcanoгенным толщам на примере Ташкескенской, Адрасманской и Акшуранской кольцевых нижнепермских вулcano-тектонических депрессий (ВТД). Корреляция проведена посредством анализа и обработки большого количества фондовых материалов местных геологических организаций, опубликованной литературы и авторских данных по съёмочным и ревизионным работам разных лет. Сопоставление трёх пространственно разобщённых депрессий на таком крупномасштабном стратиграфическом уровне, вопреки преобладающему отрицательному мнению, оказывается вполне возможным и позволяет уточнить расчленение на вулканические свиты применительно к последней [1] стратиграфической схеме осадочно-эффузивных пород Кармазарской рудной провинции.

Взаиморасположение анализируемых ВТД показано на рис. 1. Их общая геологическая позиция, параметры, внутренняя структура и осадочно-вулcanoгенное выполнение характеризовались многократно в сводных производственных отчётах (Ломовский, 1958; Андерсон, Колчин, 1959; Базель, 1960; Байков, 1968; Новосельцев, 1973; Шихин, Вашкарин, 1979; Запромётов, 1988), статьях [1, 2] и монографиях [3-7]. Главными особенностями депрессий признаны наложение на единый гранитоидный фундамент, сложность разрезов верхнепалеозойских вулканитов, недостаток флоро-фаунистических и радиологических данных и трудность корреляции не только по местным осадочным и эффузивным толщам, но и по более крупным стратонам – вулканическим свитам стратиграфической

схемы Н.П.Васильковского [7]. На полную невозможность корреляции вулканогенных толщ указано в [8].

Осуществляя корреляцию ВТД по природным вулканогенным толщам, авторы придерживались традиционного полевого расчленения эффузивов, принятого у геологов-производственников для Кармазара (Недзвецкий, 1947; Карпова, 1949; Андерсон, Колчин, 1959; Ломовский, 1961; Байков, 1968; Акимов, 1971; Починок, 1976; Коровин, 1977; Вашкарин, Шихин, 1979; Соколов, 1987). В последней сводной работе М.Е.Запромётова (1988) те же вулканогенные толщ получили ранг подсвит. В нашем понимании вулканогенная «толща» – это естественная, пространственная и временная (что допустимо ввиду значительной скорости накопления вулканического материала) совокупность осадочных, вулканомиктовых и вулканогенных пород, картируемых в виде обособленного тела. Толща начинается обычно (но не обязательно) туфо-конгломератами с материалом подстилающих пород, туфогенными песчаниками, туффитами. Вулканогенные образования могут быть разнофациальными (туфы, игнимбриты, жерловые и субвулканические производные). Петрохимический состав толщ отвечает составу преобладающей фации вулканитов. Индикаторную стратиграфическую роль такой фации повышают масштаб распространения и присутствие в базальных слоях толщ флоры и фауны определенного возраста.

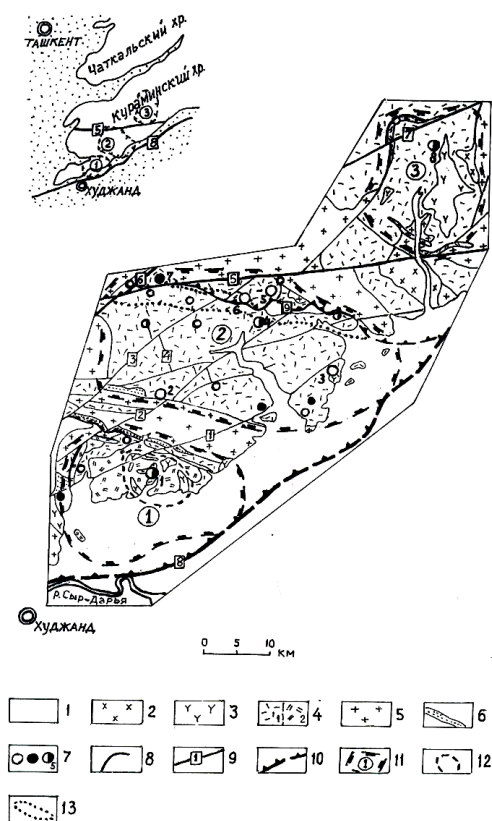


Рис.1. Схема геологического строения Ташкескенской, Адрасманской, Акшуранской кольцевых вулканотектонических депрессий: 1 – осадочные отложения (K₂-Q), 2 – аляскитовые граниты, граносиениты (P₁), 3 – сиенодиориты (P₁), 4 – осадочно-эффузивные (1) и субвулканические (2) породы (C₂-P₁), 5 – гранодиориты (C₂), сланцы, известняки (O-C₁), 7 – центры извержений эффузивов кислого, среднего-основного и смешанного составов (1.Самгар, 2.Канташ, 3.Бадам, 4.Канимансур, 5.Адрасман, 6.Акпет, 7.Караджен, 8.Акшуран), 8 – разломы полукольцевые, 9 – разломы линейные (1.Кызылтурский, 2.Кошмуллинский, 3.Тарыэканский, 4.Поперечный, 5.Баштавакский, 6.Железный, 7.Лашкерецкий), 10 – взброснадвижки (8.Северо-Ферганский, 9.Аккурский), 11 – границы ВТД (1.Ташкескенская, 2.Адрасманская, 3.Акшуранская), 12-границы кальдер, вложенных в ВТД, 13-периферический приразломный прогиб.

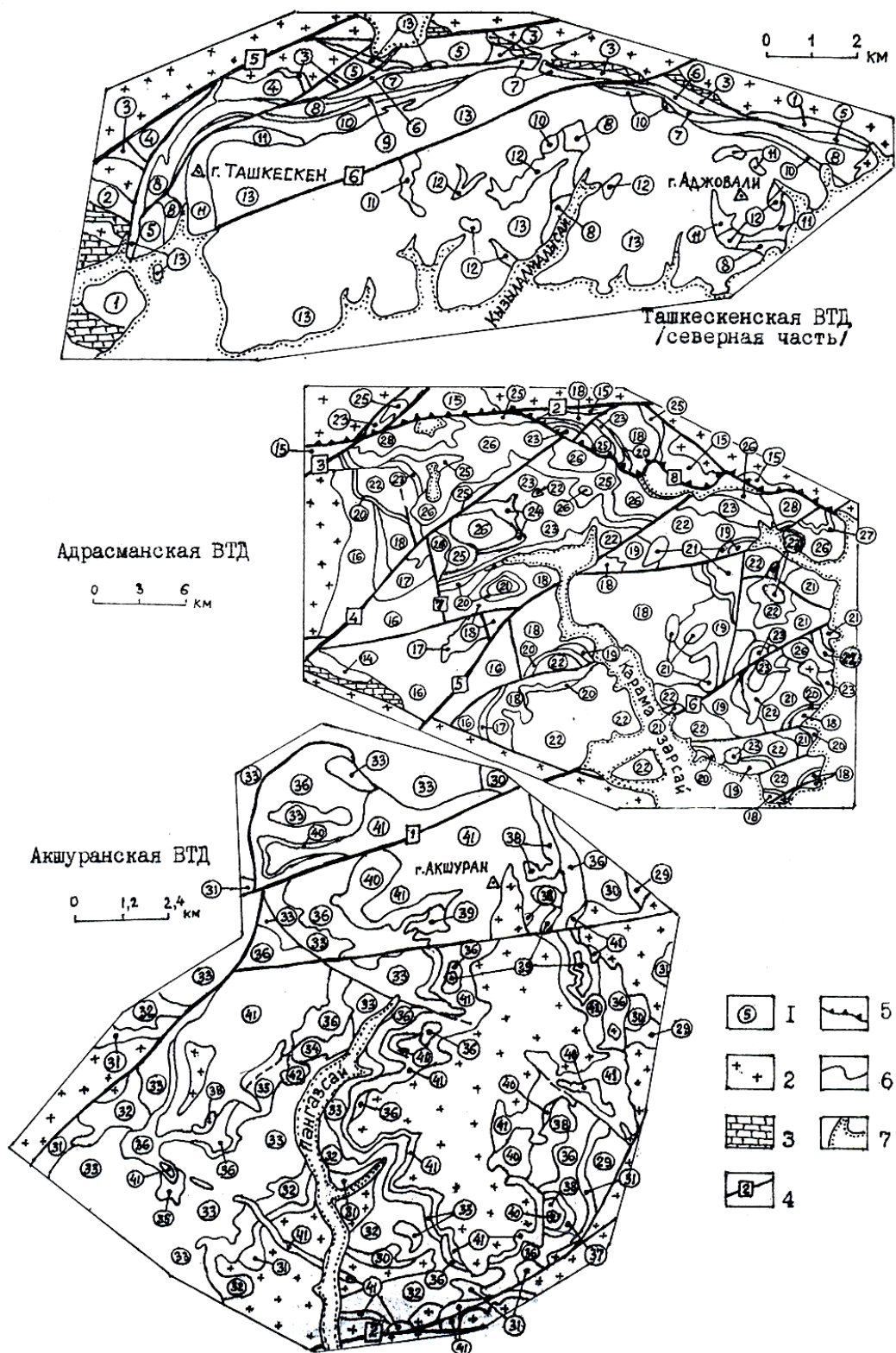


Рис. 2. Карты распространения вулканогенных толщ в Ташкентской, Адрасманской, Акшуранской вулcano-тектонических депрессиях: 1 – номера вулканогенных толщ, 2 – интрузивные породы, 3 – карбонатные и терригенные породы, 4 – разломы, 5 – надвиги, 6 – границы палеозойских

образований, 7 – границы мел-четвертичных отложений. Вулканогенные толщи. Ташкескенская ВТД: 1 – янгиканская, 2 – тутлыбулакская, 3 – кенгсайская, 4 – кошмуллинская, 5 – чокадамбулакская, 6 – кашкасайская, 7 – тереклисайская, 8 – пиязлысайская, 9 – спилитовая, 10 – кызылбулакская, 11 – ташкескенская, 12 – акбулакская, 13 – самгарская; Адрасманская ВТД: 14 – канташская, 15 – джамансайская, 16 – уткесуйская, 17 – чалысайская, 18 – алмалысайская (адрасманская), 19 – караташская, 20 – кызылтауская, 21 – нижнекушайнакская (асказанская), 22 – верхнекушайнакская (кушайнакская), 23 – тарыэканская, 24 – аксайская, 25 – сферолитовая, 26 – тавакская, 27 – долоньсайская, 28 – сарытайпанская; Акшуранская ВТД: 29 – сарыпульская, 30 – наугарзанская, 31 – алакисрокская (ашабинская), 32 – кухидарозская, 33 – суюгучакская, 34 – пангазская, 35 – сеидрабатская, 36 – кайнарская (куксарская), 37 – уругликская, 38 – карвансайская, 39 – айрыташская, 40 – куюндинская, 41 – бабайситенская (лашкерекская).

Разломы: 1 – Лашкерекский, 2 – Баштавакский, 3 – Железный, 4 – Тарыэканский, 5 – Кошмуллинский, 6 – Кызылтурский, 7 – Поперечный; 8 – Аккурский надвиг.

Корреляция вулканитов ВТД проведена в два взаимосвязанных этапа. На первом этапе по каждой из депрессий обрабатывались стратиграфические материалы 50-80 годов с фиксацией центров вулканической деятельности и ареалов распространения продуктов извержений, увязкой частных разрезов и сокращением числа выделенных геологами-съёмщиками вулканогенных толщ до представительного минимума за счёт толщ-аналогов, укрупнения объёма или незначительности площадного развития. Используются в основном стратиграфические данные Е.Д.Карповой (1949), В.Н.Байкова (1986) и В.А.Соколова (1987). Одному из авторов хорошо известны эффузивные разрезы Ташкескенской и Адрасманской депрессий (1955-1965, 2002-2004 гг.), менее Акшуранской (1952 г.).

Результаты первоэтапной обработки материалов иллюстрируются прилагаемыми схемой геологического строения ТД (рис. 1) и картами распространения вулканогенных толщ в их границах (рис. 2). Оба рисунка позволяют подметить, помимо ранее известных, дополнительные особенности строения ВТД. Так, максимумы вулканической деятельности приходятся на северные части депрессионных структур, где проявились и наибольшие по масштабу разрывно-пликативные деформации осадочно-эффузивных толщ. В таких «активных» частях отмечено образование приразломного прогиба (Адрасманская ВТД) и поздней кальдеры (Ташкескенская ВТД). Продукты извержений палеовулканов, в частности игнимбритовые покровы, наблюдаются и за пределами депрессий. Степень сохранности верхних вулканогенных толщ в мезозойском эрозионном срезе возрастает от Акшуранской депрессии к Ташкескенской (направление от центра к периферии Кураминского гранитоидного поднятия).

Второй этап корреляции выделяемых вулканогенных толщ – это уже непосредственное сопоставление трёх сводных стратиграфических разрезов-колонок ВТД (рис. 3). Проведено оно по принципу литолого-стратиграфической аналогии толщ в сочетании с фациальными признаками вулканитов, известными хроностратиграфическими уровнями и определениями абсолютного возраста эффузивов. В число толщ условно включен Сам-

гарский субинтрузив трахириолитов (самгарская «толща», №13), по традиции остались обособленными кошмуллинская (№4) и чокадамбулакская (№5) толщи, кызылтауская (№20) от нижнекушайнакской (№21), куюндинская (№40) от бабайситенской (№41), а алакисрокая и ашабинская объединены в одну толщу. В колонках вулканогенные толщи даны с названиями согласно первоисточникам и для лёгкости восприятия равными по мощности. Всего в сопоставление вовлечены 41 представительных для ВТД толщ (от 12 до 14 в каждом сводном разрезе). Опорным является разрез Адрасманской депрессии, наиболее изученный и несущий практически всю палеонтологическую и радиоизотопную нагрузку среднего карбона-нижней перми. В составе этого разреза Е.Д.Карпова (1949) впервые выделила 12 последовательно наслаивающихся эффузивных толщ (наши №15-26) – основу всех последующих стратиграфических построений для Центрального Карамазара. Такая схема наложения, дополненная сарыгтайпанской (Ломовский, 1961), долонысайской (Акимов, 1971) и канташской (Починок, 1976) толщами и авторскими коррективами [9-12], распространена на всю площадь Адрасманской депрессии. В сходном плане учтена последовательность накопления вулканического материала в Ташкескенской и Акшуранской ВТД по данным В.Н.Байкова (1986), частично А.А.Починка (1978), В.А.Соколова (1987) и М.Е.Запромётова (1988).

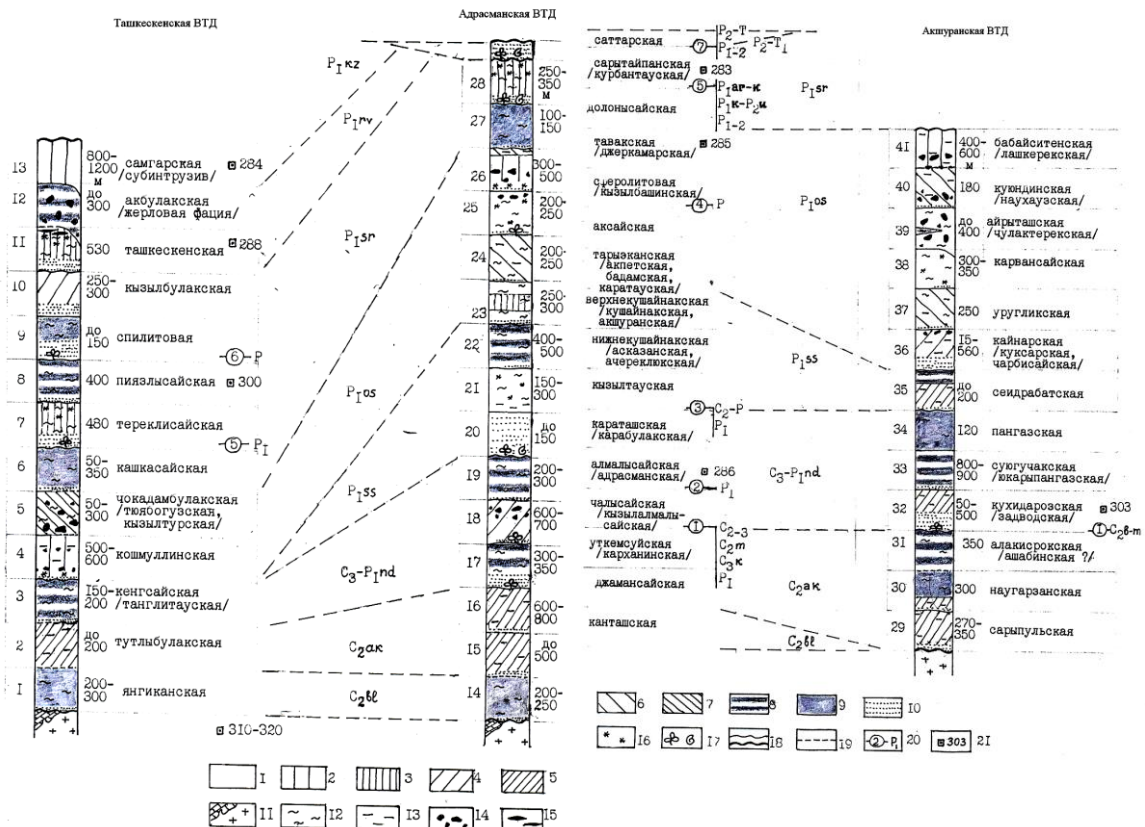


Рис. 3. Схема корреляции вулканогенных толщ Ташкескенской, Адрасманской, Акшуранской вулcano-тектонических депрессий: 1 – риолиты, 2 – трахириолиты, 3 – калиевые трахириолиты, 4 – риодациты, 5 – дациты, 6 – трахидациты, 7 – трахиты, 8 – андезитодациты, андезиты, 9 – андези-

тобазальты, 10 – терригенные и вулканомиктовые отложения, 11 – известняки, гранодиориты, 12 – лавы, 13 – туфы, игнимбриты, 14 – агломераты крупноглыбовые (ксенотуфы жерловые и направленного взрыва), 15 – обсидианы, 16 – сферолитовая структура пород, 17 – флора, фауна, 18 – поверхности слабого и интенсивного размыва пород, 19 – контакты вулканогенных толщ не наблюдались, 20 – хроностратиграфический уровень, его номер, возрастные индексы отложений, 21 – абсолютный возраст пород, млн. лет.

Примечание: скобках даны названия вулканогенных толщ-аналогов.

Нижние части всех трёх стратиграфических разрезов представлены андезитобазальтовыми, андезитовыми и дацитовыми толщами, верхние – преимущественно кислыми или контрастными по составу. Разрезы Адрасманской и Акшуранской депрессий более гомологичны по сравнению с Ташкескенской: для последней весьма характерны терригенно-вулканомиктовые составляющие верхних толщ №9-11 и завершающие вулканическую деятельность в Чаткало-Кураминском регионе трахириолиты кызылнуринского типа. Сопоставление «толща в толщу» в нижней части разрезов менее достоверно, чем по всей группе вулканогенных толщ №1-3, 14-19 и 29-34.

Породы этих толщ предшествуют этапу преобразования вмещающих палеоструктур (мульд) в депрессии. Их расчленению на две стратиграфические подгруппы помогают флора первого и второго хроностратиграфических уровней, широкое распространение игнимбритовых покровов однообразных дацитов в нижней подгруппе и преобладание в верхней туфолов риолитов и риодацитов с крупноглыбовыми агломератами (алмалысайская-адрасманская толща).

В Адрасманской и Акшуранской ВТД обособляются осадочно-вулканогенные толщи №20-22 и 35, залегающие с размывом на подстилающих вулканитах и имеющие смешанный риолитовый и андезитовый состав. Их основанию – терригенным слоям Кызылтауской (асказанской) толщи соответствует третий (нижнепермский) хроностратиграфический уровень. Выше этого уровня хорошо параллелизуются между собой полифациальные вулканогенные образования «эталонной» оясайской свиты (толщи № 23-26, 36-41). Для свиты реперными толщами оказываются аксайская – уругликская (роговообманковые трахидациты), сферолитовая – карвансайская (риолиты сферолитовой структуры) и особенно тавакская – бабайситенская с куюндинской (игнимбриты трахириолитов, трахидациты). Оясайские палеопостройки объединяют присутствие крупноглыбовых агломератов-ксенотуфов направленных взрывов на граничных переходах сферолитовой – тавакской и карвансайской – бабайситенской вулканогенных толщ, а также закономерная смена трахириолитовых игнимбритов на трахидацитовые до трахитовых (верхи тавакской толщи, куюндинская толща). В Ташкескенской депрессии те же покровы бордовых трахириолитов принадлежат кошмуллинской толще (№4), а трахидациты и трахиты – чокадамбулакской (№5).

Разрез вулканитов Акшуранской ВТД на уровне предверхнемеловой пенепленизации Палеокарамазара заканчивается бабайситенскими трахириолитами. Их аналоги в Ад-

расманской структуре – трахириолиты тавакской и джеркамарской толщ перекрыты ниже той же поверхности эрозии андезитобазальтами долонысайской и калиевыми риолитами сарытайпанской (курбантауской) толщ. В районе горы Ташкескен им соответствуют породы кашкасайской (№6) и тереклисайской (№7) толщ «надтавакского» стратоуровня. Выше тереклисайских риолитов последовательно наслаиваются контрастные по составу толщи №8-13, которым уже не находятся стратиграфические аналоги в смежных депрессиях*. Для этих толщ помимо контрастности состава (от калиевых трахириолитов до андезитобазальтов, спилитов) характерны большие объёмы базальных вулканомиктовых отложений (туфоконгломераты, туфогенные песчаники), обсидианы (ташкескенская толща) или жерловые глыбовые агломераты акбулакских андезиодацитов. Венчает осадочно-вулканогенный разрез самгарская «толща». силлообразная субинтрузия трахириолитов с гигантскими блок.ксенолитами пород верхних толщ Ташкескенской ВТД [12]. Породы кровли субинтрузии, предположительно эффузивы акбулакской толщи, уничтожены всё той же всетяньшаньской предверхнемеловой эрозией.

Приводимые соотношения вулканогенных толщ не противоречат давно известной и примечательной для Чаткало-Кураминского региона общей направленности эволюции вулканической деятельности в верхнем палеозое. смене во времени основных и средних изверженных пород на кислые по составу и позже на контрастные при одновременном росте доли терригенно-вулканомиктового материала как индикатора затухания магматического процесса. Трахитоидный вулканизм (толщи тавакского уровня) так же находит свое выражение на соответствующем переходе в регионе . от «кислой» (оясайской) группы вулканогенных толщ к «контрастной». Совместно с группой кислых вулканитов трахитоиды являются основными коррелятами для стратиграфических разрезов кольцевых депрессионных структур Карамазара. Немногочисленные определения абсолютного и геологического возраста вулканитов имеют вспомогательное коррелирующее значение.

Внешние возрастные рамки верхнепалеозойских вулканитов сопоставляемых ВТД датируются радиологическим методом. Согласно [13], возраст гранодиоритов карамазарского интрузивного комплекса, слагающих фундамент депрессий, соответствует геологическому – среднекаменноугольному (310-320 млн. лет). Для завершающих вулканический процесс в Карамазаре трахириолитов кызылнуринского типа (Самгарский субинтрузив) К.Аг изотопный метод даёт нижнепермское время внедрения: 282-285 [13] и 285-290 млн. лет. Не правы исследователи [1, 2, 14 и др.], включившие в состав кызылнуринских образований Адрасманской ВТД саттарскую осадочную толщу – терригенные отложения начальной (P₂.T₁) стадии развития мезозойской платформы Срединного Тянь-Шаня. На эту ошибку нами обращено внимание в [9]. Формирование всего верхнепалеозойского вулканического комплекса проходило в интервале времени от среднего карбона до ниж-

* В [1, 12] вулканогенные толщи №11 и 28 рассматриваются как аналоги по своему петрохимическому составу и принадлежности к кызылнуринской или равашской свитам.

ней перми. Не исключается, впрочем, и более узкий (С₃.Р₁) диапазон возраста. К сожалению, малое количество радиологических определений, их недостаточная точность (± 5 млн. лет) и пространственная разобщённость мало способствуют литолого-стратиграфическому сопоставлению отдельных вулканогенных толщ, а иногда и противоречат природным взаимоотношениям. Для кухидарозской толщи (№32) определено верхнекарбовое время образования, но это пока единственное известное нам значение абс. возраста для вулканитов Акшуранской ВТД.

Корреляционная роль органических остатков, обнаруженных в базальных слоях вулканогенных толщ, так же небольшая. В нижних дацит-андезитовых толщах такие остатки не найдены. Выше по эффузивному разрезу, главным образом в Адрасманской депрессии, палеонтологами выделены семь верхнепалеозойских хроностратиграфических уровней с флорой и фауной от среднего карбона до нижнего триаса [2,3,7,14,15]. Шесть первых из них приходятся на основания чалысайской – кухидарозской, алмалысайской, кзылтауской, сферолитовой, сарытайпанской.тереклисайской и спилитовой вулканогенных толщ, а седьмой – на саттарскую осадочную толщу (см. рис.3). Последний стратоев уровень, однако не верхнепалеозойский и нами при анализе не учитывался. Не способствуют сопоставлению толщ единичные находки растений нижней перми в разрезе Ташкескенской ВТД и отсутствие таковых в Акшуранской, как и неоднозначность возрастных данных палеонтологов. С учётом трёх опорных хроно-стратиграфических уровней (чалысайский, кзылтауский, сарытайпанский) можно выделить только две группы вулканогенных толщ примерно одного возраста: «надчалысайскую» (№ 17-19 и 32-34) и «надтавакскую» (№ 6-7 и 27-28). Следствием этого является определённая условность авторской группировки осадочно-эффузивных толщ ВТД в вулканические свиты стратиграфической схемы Н.П.Васильковского[7].

Традиционное объединение осадочно-эффузивных толщ в вулканические свиты [1,2,5,7,14,15] вполне правомочно в сравнении с расчленением вулканогенных образований на основе формационных исследований – делением на вулканические формации [4] или комплексы [5,6,13,14], соответствующие обычно всё тем же свитам по объёмам вулканитов. Для всех трёх методических подходов характеризуемой отправной стратиграфической единицей является одна и та же – вулканогенная толща местного или регионального распространения. Количество и сочетание толщ определяют объёмы выделяемых вулканических свит, формаций и комплексов с типичным для них набором стратиграфических, литологических и фациальных особенностей слагающих пород-

В разрезах эффузивов анализируемых ВТД выделены толщи регионального распространения. К ним в первую очередь относятся толщи кислого и трахитоидного состава: № 4-5, 25-26, 38-41. Их легко узнаваемые аналоги известны в нижнепермских кольцевых депрессиях юго-западного окончания Чаткальского хребта, в частности в Чилтенской, в которой многими геологами приняты за «эталон» оясайской свиты Н.П.Васильковского (Недзвецкий, 1949; Карпова, 1950; Ломовский, 1953; Соколов, Кол-

чин, 1957 и др.). Позже верхняя трахитоидная часть оясайской свиты Чаткальского и Кураминского хребтов была переведена в кызылнуринскую свиту (Ткачёв, Арапов, 1954-1955; Базель, 1961; Байков, 1968), нижняя кислая часть – в равашскую (Богомольный, 1971; Новосельцев, Лаверов, 1973; Ткачёв, 1988). Проверка временем, однако, не подтвердила этих решений (Коржаев, 1987; Соколов, 1987; Бенш, 1998). Об этом же свидетельствуют и результаты проведённого нами корреляционного анализа. Другим опорным элементом при выделении вулканических свит является самгарская «толща» (№13), трахириолиты которой не вызывают сомнения в принадлежности к субвулканическим образованиям кызылнуринской свиты. Оба лито-стратиграфические уровни позволили наметить условные рамки регионально известных вулканических свит с учётом деления геологов-карамазарцев (Карпова, 1949; Левин, 1954; Байков, 1968; Запромётов, 1988).

Как видно на рис. 3, авторская схема корреляции вулканогенных толщ ВТД содержит уточненные данные о количестве, объёмах и возрасте выделяемых вулканических свит по следующим позициям.

1. В объёме янгиканской (№1) и канташской (№14) толщ андезитобазальтов выделена балгалинская свита (C_2b1). Обе толщи представляются аналогами балгалинского (Ткачёв, 1988) или невичского (Колчин, 1957) вулканического комплекса юго-западного окончания Чаткальского хребта. Канташские андезитобазальты на юге Адрасманской ВТД несогласно и с размывом перекрыты базальными туфоконгломератами уткемсуйской толщи (№16). Возраст балгалинской свиты может отвечать раннемосковскому времени среднего карбона [4, 6].

2. Возраст вулканитов наadakской свиты (C_2-3nd) омоложен до C_3-P_1 ввиду противоречивости палеонтологических данных для чалысайского хроностратиграфического уровня: от C_2m (Савицкая, 1988) до P_1 (Масумов, 1978) и находок нижнепермской флоры в основании алмалысайской толщи риолитов и риодацитов [2, 14].

3. В сарысионскую свиту (P_{1ss}) помимо кызылтауской и сеидрабатской толщ (по Запромётову, 1988) включены нижнекушайнакская (асказанская) и верхнекушайнакская (кушайнакская). Положение в разрезе и смешанный породный состав объединяемых вулканогенных толщ, как показал ранее анализ (Колчин, 1999), соответствуют сарысионской свите Чаткальского хребта. В Адрасманской ВТД на такой объём свиты впервые указал В.Н.Левин (1954).

4. Оясайскую свиту (P_{1os}) представляют вулканогенные толщи № 4-5, 23-26 и 36-41. Это не противоречит мнению первых исследователей Карамазара (Карпова, 1948; Недзвецкий, 1949; Андерсон, Колчин, 1959; Ломовский, 1961 и др.). Нашим анализом установлено, что толщи №5 и 40-41 нельзя относить к образованиям кызылнуринской свиты как представлялось исследователям 60-80 годов (Базель, 1961; Богомольный, 1971; Байков, 1968; Арапов, 1983; Запромётов, 1988). Неправильное решение, к сожалению, отражено в [1, 4, 5, 15]. В последних сводных работах эти толщи получили статус оясайской свиты с ассельским временем накопления [6, 14].

5. Надтавакские группы вулканогенных толщ Адрасманской (№ 27-28) и Ташкескенской (№ 6-12) депрессий отнесены к шурабсайской и равашской свитам с условно учитываемой (Арапов, 1955; Байков, 1972) границей раздела между ними по туфоконгломератам ташкескенской толщи. Реперными породами для свит оказываются андезитобазальты кашкасайской и долоньсайской толщ, а также тереклисайские и сарытайпанские сферолито-флюидалные калиевые трахириолиты. Завершают равашскую свиту крупноглыбовые агломераты акбулакской толщи андезитоацитов [12]. Геологический и абсолютный возраст обеих вулканических свит определяется не точнее нижней перми [4, 13, 15].

6. К кызылнурунской свите (P_1kz) отнесены только трахириолиты Самгарского субвулканического лакколитообразного интрузива (самгарская «толща», № 13). Трахириолитами прорваны обсидианы ташкескенской и агломераты акбулакской толщ [12]- Нижнепермское время внедрения субинтрузива подтверждает радиологический метод [13, 16]. Включение в состав кызылнурунской свиты платформенных осадков саттарской толщи (P_2-T_1), как это сделали авторы работ [1, 2, 14], признано нами ошибочным [9, 10].

Как видим, корреляционный анализ, проведённый на примере трёх кольцевых ВТД, почти не затронул последовательного стратиграфического положения вулканических свит, выделенных исследователями Карамазара. Более существенные изменения претерпели объёмы и возрасты свит. Весьма резко сокращён объём кызылнурунской свиты и увеличен разрез сарысиюнских вулканитов. Не поддерживаются представления палеонтологов [2, 3, 14] о принадлежности к оясайской свите только алмалысайской толщи или о возможном увеличении в Адрасманской ВТД «эталонного» объёма этой свиты в связи с находками нижнепермской флоры в основании всё той же алмалысайской толщи. Для вулканитов надакской и сарысиюнской свит возраст омоложен соответственно до C_3 - P_1 и P_1 , а для равашской и кызылнурунской удревнён – P_1 . Вопрос включения сарытайпанской вулканогенной толщи в состав шурабсайской или равашской свит остаётся открытым: её аналогом помимо тереклисайской может быть ташкескенская толща.

В целом приведённые в статье стратиграфические данные имеют прикладное значение для Карамазарской рудной провинции и могут рассматриваться, как основа последующей корреляции вулканических толщ и свит нижнепермских кольцевых вулкано-структур всего Чаткало-Кураминского региона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Запромётов М.Е., Носова В.И., Машков А.Ф. Геологическое строение и полезные ископаемые Карамазарской рудной провинции. – Душанбе, рж, №5, 1993, с. 35.
2. Ткачёв В.Н., Искандарходжаев Т.А., Савицкая, Л.И., Шанин С.В. – Узб. геол. ж., 1988, №1, с.29-34.
3. Масумов А.С., Борисов О.М., Бенш Ф.Р. Верхний палеозой Среднего и Южного Тянь-Шаня. – Ташкент: Фан, 1978, 235 с.
4. Арапов В.А. Вулканизм и тектоника Чаткало-Кураминского региона. – Ташкент: Фан, 1983, 256 с.

5. Петрография Таджикистана. Т.1. (Карамазар и Моголтау). – Душанбе: Дониш, 1986, 284 с.
6. Атлас позднепалеозойских вулканоструктур Чаткало-Кураминского региона (Под редакцией Т.Ш.Шаякубова). – Ташкент: Изд-во МГ Уз-СССР, 1987, 350 с.
7. Васильковский Н.П. Стратиграфия и вулканизм верхнего палеозоя юго-западных отрогов Северного Тянь-Шаня. – Ташкент: Изд-во АН Уз. ССР, 1952, 304 с.
8. Винниченко Г.П., Кухтиков М.М. – Известия АН Тадж. ССР, № 2, 1985, с. 46-50.
9. Колчин А.Н., Файзиев А.Р. Саттарская осадочная толща как индикатор верхнепермской стадии мезозойской платформы Срединного Тянь-Шаня (Кураминская зона, горы Карамазар). Сб.: Труды Института геологии АН РТ. Новая серия. Вып. 3. Душанбе 2004, с. 119-130.
10. Колчин А.Н. Геологическая позиция комплекса нижнепермской флоры горы Сарытайпан /Кураминская зона, Центральный Карамазар. Сб. Труды Института геологии АН РТ. Новая серия. Вып. 3. Душанбе, 2004, с. 63-73.
11. Колчин А.Н., Файзиев А.Р. О стратиграфическом положении Адрасманской вулканогенной толщи верхнего палеозоя (Центральный Карамазар). Сб: Труды Института геологии АН РТ. Новая серия. Вып. 4. Душанбе, 2005, с. 22-34.
12. Колчин А.Н. Основные структурные элементы Самгарского субвулканического интрузива нежнепермских трахириолитовых порфиров (Кураминская зона, горы Карамазара). Сб.: Труды Института геологии АН РТ. Новая серия. Вып. 5. Душанбе, 2006, с. 88-100.
13. Таджикибаев Г.Т. Петрология малых интрузивов Карамазара (Срединный Тянь-Шань). Автореф. канд. диссерт. Душанбе, 1996, 37 с.
14. Геология и полезные ископаемые Республики Узбекистан. – Ташкент: Университет, 1998.
15. Расчленение стратифицированных и интрузивных образований Таджикистана – Душанбе: Дониш, 1976, 254 с.
16. Волков В.Н., Гольцман Ю.В., Аракелянц М.М., Таджикибаев Г.Т., Журавлёва Д.З. – Стратиграфия. Геологическая корреляция. 1997, т. 5, №1, с. 86-104.

А.Н.КОЛЧИН, А.Р.ФАЙЗИЕВ*

МУВОФИҚИЯТИ СОҲТОРИ ПАСТҲАМИҲОИ ҲАЛҚАМОНАНДИ ПЕРМИ ПОЁН ДАР ҚАРАМАЗОР АЗ РЎИ ҚАБАТҲОИ ВУЛҚОНӢ

*Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи
АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мисоли се пастхамии вулқонӣ-тектоникии ҳалқамонанд дар Қарамазор мувофиқияти эффузивҳои палеозои болоӣ гузаронида шудааст.

Калимаҳои калидӣ: пастхамии вулқонӣ-тектоникӣ – мувофиқият – бурриш – чинсҳои тахшинӣ – эффузивӣ – қабати вулқонӣ – сохтор.

A.N.KOLCHIN, A.R.FAYZIEV

**CORRELATION OF THE LOWER PERMIAN DEPRESSION RING
STRUCTURES IN KARAMAZAR VOLCANOGENIC SERIES**

*Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology,
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

Using three circular volcano-tectonic depressions in Karamazar correlate of upper volcanic rocks.

Key words: volcano-tectonic depression – correlation – section – sedimentary and volcanic rocks – volcanic series – structure.

УДК 699.841:691.42.

Д.РУЗИЕВ

ОЦЕНКА УЯЗВИМОСТИ КРУПНОПАНЕЛЬНЫХ ЖИЛЫХ ЗДАНИЙ Г. ДУШАНБЕ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАТУРНЫХ ОБСЛЕДОВАНИЙ

Таджикский технический университет им. академика М.С. Осими

Поступила в редакцию 14.03.2013 г.

Первые крупнопанельные жилые дома в г. Душанбе эксплуатируются уже 50 лет. За это время они ни разу не были обследованы, их техническое состояние не установлено, ремонтно-восстановительные и усиливающие мероприятия не проведены. В статье приведены результаты натурных обследований 1400 домов, определены их уязвимые места и их техническое состояние. Целью работы является определение технического состояния крупнопанельных зданий, как наиболее опасных, при длительной их эксплуатации путём натурного обследования их по внешним признакам.

Ключевые слова: стихийные бедствия – уязвимость – стыки панелей – типология – блокирование – секция.

С момента строительства первых крупнопанельных домов прошло 50 лет. За это время практически ни разу не проводились исследования технического состояния со стороны жилищно-эксплуатационных служб по улучшению их эксплуатационных качеств, особенно мест стыковых соединений крупноразмерных изделий заводского изготовления.

Особое беспокойство вызывало состояние рабочей арматуры в стыковых соединениях панелей, так как из-за некачественного выполнения работ по гидроизоляции стыков все эти годы арматура подвергалась коррозии.

С целью проведения анализа состояния сейсмостойкости крупнопанельных жилых домов г. Душанбе в 2008 г. было проведено обследование этих зданий по внешним признакам. Ниже приводятся некоторые результаты.

В 1961 г. в г. Душанбе был сдан в эксплуатацию первый домостроительный комбинат, который начал выпускать конструкции по номенклатуре изделий крупнопанельных домов серии «Стройиндустрия СССР». В начале объём зданий, возводимых из мел-

Адрес для корреспонденции: Рузиев Джума. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. академиков Раджабовых, 10 а, Таджикский технический университет.
E-mail: ruziev_r38@mail.ru

коштучных изделий, был больше объёма крупнопанельного строительства, в последующие годы соотношение объёмов строительства с каждым годом стало изменяться в пользу крупнопанельного. Уже в середине 60-х годов объём крупнопанельного домостроения в г. Душанбе достиг 80 тыс. кв.м общей площади жилых зданий в год, а к середине 70-х годов этот показатель достиг 160 тыс., а затем дошел до 240 тыс. кв. м за счёт ввода в эксплуатацию в г. Душанбе нового ДСК-2.

В то время в Таджикистане не было опыта оценки поведения крупнопанельных зданий в условиях реальных землетрясений. Впервые при Ташкентском землетрясении эти здания подверглись сейсмическим воздействиям значительной интенсивности. Результаты анализа поведения их в процессе землетрясений были обнадеживающими. При последующих землетрясениях они подтвердили достаточную сейсмостойкость при соответствующем качестве стыковых соединений.

В 70-ые годы на испытательном полигоне «Ляур» Института сейсмостойкого строительства и сейсмологии Академии наук Таджикской ССР были испытаны в натуральную величину два образца пятиэтажных крупнопанельных жилых домов серии 1ТТЖ-464. Результаты испытаний образцов также подтвердили их достаточную стойкость в условиях высокой сейсмичности.

Строительство крупнопанельных домов в г. Душанбе велось на правобережной части территории города с наиболее благополучными грунтовыми условиями и наименьшей сейсмической активностью. С целью определения технического состояния всех видов зданий в застройке всей правобережной части города проводилось детальное обследование не только крупнопанельных домов, построенных с небольшим интервалом во времени, но и по различным серийным типовым проектам кирпичных, каркасных, монолитных и т.д. зданий, построенных за счёт средств Государственного бюджета и составивших Государственный жилищный фонд г. Душанбе. Всего было обследовано более 1400 многоэтажных жилых зданий.

Типология обследованных зданий приводится в табл. 1

Таблица 1

Типологическая классификация многоэтажных зданий

Типы зданий		Наименование типов зданий	Суммарная общая площадь, м ²
Основные	Производные		
1.		<u>Многоэтажные здания:</u>	
	1.1	Монолитные, 16-этажные	7891
	1.2	Монолитные, 12-этажные	17136
	1.3	Монолитные, 8-9-этажные	1083
	1.4	12-этажные, способом подъема перекрытий	12237
	1.5	Каркасно-панельные, 9-этажные	35335
	1.6	Крупнопанельные, 9-этажные	456315
	1.7.1	Крупнопанельные, 5-этажные (серия 1ТТЖ-464)	650485
	1.7.2	Крупнопанельные, 4-этажные (серия 1ТТЖ-464)	860890
1.7.3	Крупнопанельные, 5-этажные («Стройиндустрия», Москва)	46940	

Типы зданий		Наименование типов зданий	Суммарная общая площадь, м ²
Основные	Производные		
	1.7.4	Крупнопанельные, 4-этажные (Москва)	202320
	1.8	Кирпичные, 4-этажные (серия ТЖ 1-401; 1ТЖ-401)	479983
	1.9	Общежития каркасные	19464
	1.10	Общежития кирпичные	8640
2.		<u>Малоэтажные здания:</u>	
	2.1	Кирпичные, 3-этажные	12049
	2.2	Кирпичные, 2-этажные	8021
Всего: 2819000 м ²			

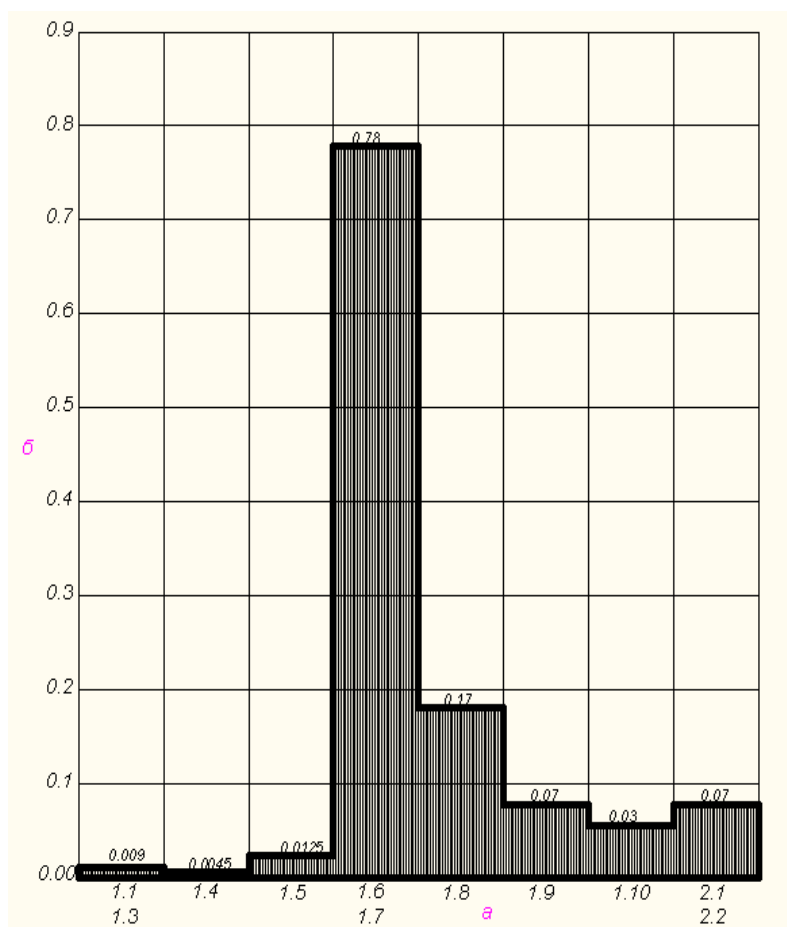


Рис.1. Типологическая классификация обследованных зданий правобережья г. Душанбе.
а) Типологический состав застройки. б) Удельный объём зданий.

Из диаграммы распределения типов зданий в общем объёме застройки правобережной части г. Душанбе с указанием удельных площадей (рис.1) видно, что свыше 75% суммарной площади жилых домов правобережья приходится на долю крупнопанельных зданий. В них проживают около 210 тыс. человек. Поэтому техническое состояние этих зданий в первую очередь вызывало наибольшую тревогу.

Таблица 2

Техническое состояние обследованных зданий

Типы зданий по общ. классификации	Наименование типов по общей типологической классификации	Классификация по MMSK-86		Степень повреждения	Процентное соотношение
		$\Sigma S_{ж}$	Нзд		
		С9	С9		
1.1	Монолитные, 16-этажные	7891	48	d=1	0.28
1.2	Монолитные, 12-этажные	17136	36	d=2	0.6
1.3	Монолитные, 8-9-этажные	1083	24;27	d=1	0.04
1.4	Подъёмом перекрытия, 12-этажные	12237	36	d=2	0.45
1.5	Каркасные, 9-этажные	35335	27	d=2; d=3	1.3
1.6	Крупнопанельные, 9-этаж.	456315	27	d=1; d=2	16.15
1.7.1	Крупнопанельные, 5-этаж. 1ТТЖ464	650485	15	d=1; d=3	23.0
1.7.2	Крупнопанельные, 4-этаж. 1ТТЖ464	860890	12	d=2	30.4
1.7.3	Крупнопанельные, 5-этаж., Москва	46940	15	d=2;d=3	1.7
1.7.4	Крупнопанельные, 4-этаж. Москва	202320	12	d=2	7.15
1.8	Кирпичные, 4-этажные	479983	12	d=2; d=4	16.95
1.9	Каркасные (общежития)	19464	18;27	d=2 ;d=3	1.35
1.10	Кирпичные (общежития)	8640	12	d=2 ;d=3	
2.1 2.2	Кирпичные, 2-3-этажные	20070	6;8	d=3; d=2; } d=2; d=3 }	0.75
Итого: 100%					

Существует ряд методик обследования и оценки технического состояния зданий и сооружений [1-4]. Обследование многоэтажных крупнопанельных зданий правобережной части г. Душанбе проводилось по методике, изложенной в официальном учебном издании, по которому осуществляется подготовка специалистов для строительных и эксплуатирующих отраслей [1], и по методике, рекомендуемой MMSK-86. В табл. 2 приведены данные о техническом состоянии всех типов обследованных зданий по этим методикам.

Из представленных материалов видно, что техническое состояние монолитных зданий оценивается, в основном, как «хорошее» (d=1); каркасных зданий – как «удовлетворительное» (d=2); крупнопанельных зданий – как «удовлетворительное» (d=2) и «хорошее» (d=1) в зависимости от срока ввода в эксплуатацию; кирпичных зданий – «удовлетворительное» (d=2) и «не совсем удовлетворительное» (d=3) и «неудовлетворительное» (d=4).

В табл. 3 и на рис. 2, 3 представлено распределение крупнопанельных зданий по показателям их удельного веса каждого из типов и с показателями технического состояния (рис. 3). Представленные данные показывают, что 4-5-этажные крупнопанельные до-

ма серии 1ТТЖ-464 и 9-этажные точечно-блокированные дома находятся в более надежном состоянии, чем крупнопанельные дома московской серии.

Сопоставление результатов оценки надежности зданий по [1] с результатами оценки по ММСК-86 представлено в табл. 2а.

Таблица 2а

Оценка состояния зданий по двум методикам

По [1]	По ММСК-86
«Хорошее»	d=1
«Удовлетворительное»	d=2
«Не совсем удовлетворительное»	d=3
«Неудовлетворительное»	d=4

Таблица 3

Техническое состояние крупнопанельных домов

Типы зданий	Наименование типов крупнопанельных зданий	Удельный вес		Степень повреждений (d), техническое состояние
		в общем объеме всех зданий, %	в объеме крупнопанельных зданий, %	
1.6	9-этажные крупнопанельные точечно-блокированные здания, Душанбе.	16.15	20.58	d=1, «хорошее» d=2, удов.»
1.7.1	5-этажные крупнопанельные многосекционные здания серии 1ТТЖ-464, Душанбе.	23.0	29.34	d=2, удов.» d=1, «хорошее»
1.7.2	4-этажные крупнопанельные многосекционные здания серии 1ТТЖ-464, Душанбе.	30.4	38.83	d=2, «удов.»
1.7.3	5-этажные крупнопанельные односекционные здания Московской серии «Стройиндустрия».	1.7	2.12	d=2, «удов.» d=3, «не совсем удов.»
1.7.4	4-этажные крупнопанельные многосекционные здания Московской серии «Стройиндустрия СССР».	7.15	9.13	d=2, «удов.»
Итого:		78.5	100	

Несмотря на все положительные стороны вероятность подвергаться коррозии арматуры велика. Приостанавливать коррозию арматур в местах стыковых соединений сборных конструкций практически невозможно, доступ к этим местам весьма затруднителен, обнаруживать дефекты невозможно, проводить ремонтно-восстановительные работы своими силами еще тяжелее и требует больших затрат.

Только в случае выполнения своевременных ремонтно-восстановительных работ возможно продление срока эксплуатации крупнопанельных зданий. Необходимо подумать о создании специализированной структуры по обслуживанию, ремонту и восстановлению, в необходимых случаях усилению крупнопанельных зданий.

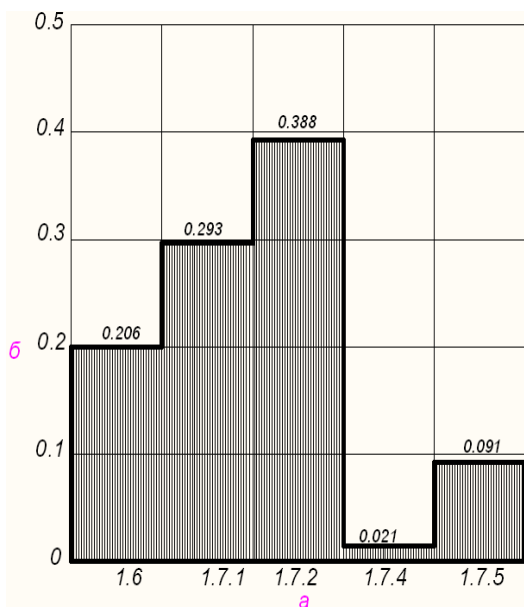


Рис.2. Типологическая классификация обследованных крупнопанельных зданий и их удельный объем.

- а) Типы крупнопанельных зданий.
 б) Удельный вес типов крупнопанельных зданий по надёжности.
 в) Техническое состояние зданий.

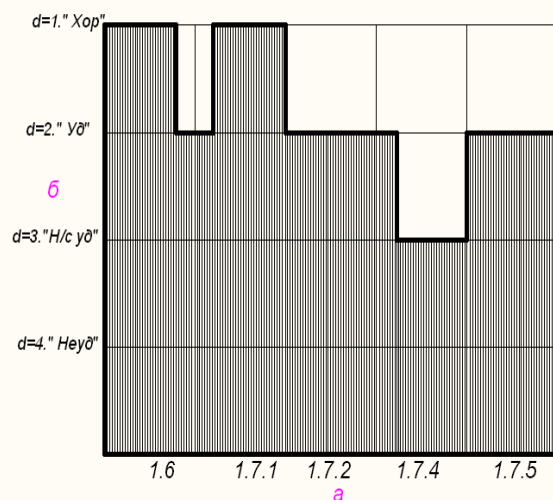


Рис.3. Распределение обследованных крупнопанельных зданий по показателям их технического состояния.

- а) Типы зданий.
 б) Техническое состояние зданий.

Работа выполнена в рамках Международного проекта «Усовершенствованное управление и риском стихийных бедствий в Таджикистане» в 2008 г. Заказчик – ПроООН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добромислов А.Н. Оценка надёжности зданий и сооружений по внешним признакам. Справочное издание – М.: Издательство АСВ РФ, 2004, 72 с.
2. Мешочек В.В., Матвеев Е.П. Пособие по оценке физического износа жилых и общественных зданий. – М.:1999, 31 с.
3. Пособие по обследованию строительных конструкций зданий. - М.:АО «ЦНИИ Промзданий»Госстроя СССР, 1997, 164 с.
4. Рекомендации по оценке надёжности строительных конструкций по внешним признакам. – М.: АО «ЦНИИ Промзданий Госстроя СССР», Пособие. – М.: 1989, 43 с.

Ҷ.Р.РУЗИЕВ

**МУАЙЯН НАМУДАНИ ҲОЛАТИ ТЕХНИКИИ БИНОҲОИ
КАЛОНПАНЕЛИИ Ш. ДУШАНБЕ АЗ РӯИ НАТИҶАҲОИ ТАҒТИ-
ШОТҲОИ АМАЛӢ**

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ

Аз даври сохтмони якумин биноҳои калопанелӣ дар Тоҷикистон 50 сол гузашт. Ба ҳолати техникий ин биноҳо имрӯз баҳо додан хело зарур шуда буд. Бо таъаббуси ООН ва кӯмаки молиявии Евросоюз, дар чорчӯбаи лоиҳаи байналмиллалӣ аз ҷониби ташкилоти ҷамъияти RMP International академияи илмҳои ҚТ ва Донишгоҳи техникий Тоҷикистон ба номи ак. М.С. Осимӣ ин корҳо иҷро шуд ва с.2009 ба фармоишгар супорида шуд. Дар мақола натиҷаҳои ҳамин тадқиқотҳо оварда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: фалокатҳои табиатӣ – сӯстӣ (камқувватӣ) – пайвасти ҷойҳои панелҳои калонандоза – типикунонӣ – қисми бино.

J.R.RUZIEV

**VULNERABILITY ASSTSSMENT LARGE-RESIDENTIAL BUILDINGS DU-
SHANBE FIELD SURVEY RESULTS**

M.C.Osimi Tajik Technical University

The first large-residential buildings in Dushanbe in operation for 50 years. During this time, they have not been examined, their technical condition is not set, reduction and strengthening activities are not carried out. And their share in the total volume of buildings is essential. The paper presents the results of field surveys 1400 homes, to determine their vulnerabilities and their technical condition.

Key words: natural disasters – vulnerability – joints of panels – Typology – don – blocking homes – single-section and multi-sectional homes.

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ И.А.ГЛУХОВА

4 мая 2013 г. в Институте химии имени В.И.Никитина состоялась конференция, посвященная 100-летию со дня рождения доктора химических наук, профессора, члена-корреспондента АН РТ, заслуженного деятеля науки Таджикской ССР Глухова Ивана Алексеевича.

В работе конференции приняло участие более 70 человек.

На конференции с докладами о научной деятельности Глухова И.А. выступили академики АН РТ директор Агенства по ядерной и радиационной безопасности У.М.Мирсаидов, директор Института химии Д.Х.Халиков, заведующий лабораторией геохимии и аналитической химии Д.Н.Пачаджанов, главный научный сотрудник лаборатории фармакологии К.Х.Хайдаров, а также заведующая лабораторией обогащения руд, доктор технических наук Зинченко З.А.

Выступившие отметили, что И.А.Глухов является одним из основателей направления химии редких и рассеянных элементов. Огромна роль И.А.Глухова в развитии процесса низкотемпературного хлорирования природных соединений редких и рассеянных элементов.

Работая в Институте химии со дня его открытия, И.А.Глухов являлся одним из активных организаторов становления его научных направлений в области неорганической химии.

Научную трудовую деятельность, начиная с 1944 г., И.А.Глухов провел в следующих научных организациях, занимая должности заведующего лабораторией Среднеазиатской станции «Главпарфюмер» (1944-1946 гг.), заведующего лабораторией химии редких металлов Института химии АН ТаджССР (1956-1982 гг.), заведующего группой хлорной технологии Института химии им. В.И.Никитина АН РТ (1982-1997 гг.).

За заслуги в научной и общественной деятельности Ивану Алексеевичу Глухову в 1973 г. было присвоено почетное звание заслуженного деятеля науки Таджикской ССР. Он награжден медалью «За трудовые отличия» и Почетной грамотой Президиума Верховного Совета Таджикской ССР.

Д.Х.Халиков, В.Д.Абулхаев

НОВЫЕ КНИГИ

У.М.Мирсаидов, Э.Д.Маматов, Х.С.Сафиев

**Особенности процесса хлорного разложения бор- и алюмосиликатных руд
Душанбе: Дониш, 2013. 74 с.**

В монографии систематизированы химические основы хлорного метода переработки бор- и алюминийсодержащего сырья Таджикистана. Описано хлорное разложение данбурита Ак-Архарского месторождения Таджикистана и хлорные процессы с участием алюмосиликатных руд – нефелиновых сиенитов, каолиновых глин, сиаллитов, аргиллитов и др. Найдены оптимальные условия проведения процесса. Предложены принципиальные технологические схемы переработки бор- и алюминийсодержащих руд хлорными методами. Кроме того, описаны некоторые особенности низкотемпературного хлорирования.

Книга предназначена для научных и инженерно-технических работников научно-исследовательских и проектных институтов химической промышленности, занимающихся вопросами технологий производства бора и алюминия. Она также полезна аспирантам и студентам химико-технологических и металлургических специальностей.

У.М.Мирсаидов, Э.Д.Маматов

**Комплексная переработка бор- и алюмосиликатного сырья Таджикистана
Душанбе: Дониш, 2013. 115 с.**

В монографии систематизированы химические основы кислотного и хлорного методов переработки бор- и алюминийсодержащего сырья Таджикистана. Кроме того, описаны кислотное и хлорное разложения данбурита Ак-Архарского месторождения Таджикистана и кислотное разложение алюмосиликатных руд – цеолитов, бентонитов, аргиллитов и каолиновых глин. Найдены оптимальные условия проведения процесса. Предложены принципиальные технологические схемы переработки бор- и алюминийсодержащих руд Таджикистана.

Книга предназначена для научных и инженерно-технических работников научно-исследовательских и проектных институтов химической промышленности, занимающихся вопросами технологий производства бора и алюминия. Она будет также полезна аспирантам и студентам химико-технологических и металлургических специальностей.

**Урановое наследие Советского Союза в Центральной Азии: проблемы и решения
Материалы Международного семинара «Урановое наследие Советского Союза в
Центральной Азии: проблемы и решения»
Душанбе, 20-22 ноября 2012 г., 101 с.**

В книге помещены статьи о современных радиологических и экологических проблемах в странах Центральной Азии, которые являются наследием интенсивно развиваемых ранее отраслей промышленности по добыче и переработке урана бывшего СССР.

После распада Советского Союза разработки большинства месторождений урансодержащих руд в Узбекистане, Таджикистане, Кыргызстане и частично в Казахстане были завершены. Однако после закрытия основных рудников практически одновременно все эти страны столкнулись с проблемой безопасного управления урановыми отходами, закрытием шахт и необходимостью восстановления территорий, где ранее располагались урановые объекты. Типичной проблемой для стран региона является недостаток или даже отсутствие предыдущего опыта оценки безопасности и планирования реабилитационных мероприятий. Недостаточным также является опыт стран в формировании стратегии, организации и проведении комплексного мониторинга окружающей среды в районах влияния бывших урановых объектов. Аналитические возможности и методический опыт большинства лабораторий, которые должны проводить мониторинг окружающей среды являются также очень ограниченными для адекватного анализа экологической ситуации и рисков для населения в местах проживания на загрязненных территориях.

Книга рассчитана на научных и инженерно-технических работников, работающих в области рекультивации отходов урановой промышленности.

Редакция и корректура – Н.Г.Сапожников

Сдано в набор 15.07.2013 г. Подписано в печать 29.07.2013 г.
Печать офсетная. Формат 70×100 1/16. Гарнитура Times. Усл. печ. л.8. Заказ № ____.
Тираж 300 экз.

*Адрес редколлегии: 734025, Душанбе, пр.Рудаки, 33, каб. 11.
Тел.:2-21-62-64. E-mail: danrt@mail.ru
Издательство «Дониш»: 734029, Душанбе, ул.Айни, 121, корп.2.0*
