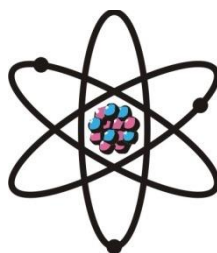


ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Журнал основан
в январе 1952 г.



№ 4 (153)
2013 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

М.И.Илолов – главный редактор, академик, доктор физико-математических наук, профессор; **С.О.Одинаев** – зам.главного редактора, академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Н.Г.Сапожников** – ответственный секретарь; **Х.М.Ахмедов** – академик, доктор химических наук; **П.Б.Бабаджанов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **Р.М.Марупов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **Х.Х.Муминов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Д.Усманов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

З.Х.Рахмонов. Оценка коротких сумм значений характеров.....	7
М.Ш.Шабозов, Н.Ф.Олифтаев. Наилучшие приближения и точные значения поперечников некоторых классов периодических функций в L_2	23
К.Тухлиев. Точные верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм ряда Фурье-Чебышёва в пространстве L_2 . I.	33
О.К.Фарайдунов. Об оценке погрешности квадратурной формулы Эрмита-Чебышёва.....	47
М.Исмат. О классическом и обобщенном решении задачи типа Коши для оператора Даламбера произвольной степени.....	57

ИНФОРМАТИКА

З.Д.Усманов, М.Довудов. Алгоритм представления таджикских словосочетательных словоформ фрагментами предложений **69**

ФИЗИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА

Т.А.Василенко, А.К.Кириллов, А.С.Дорошкевич, А.В.Шило. Эффекты воздействия низкочастотных импульсов магнитного поля на электрофизические характеристики каменного угля **77**

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

С.К.Насриддинов, Д.Ш.Шарипов, М.С.Исломова, А.Бадалов. Получение и термодинамические характеристики тетрагидрата фторида и гидроксокарбоната кобальта (II) **86**

Х.А.Рахимов, В.Д.Абулхаев, И.Н.Ганиев, С.О.Убайдов. Диаграмма состояния системы $Gd_5Bi_3-Lu_5Bi_3$ **93**

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

М.Бобоназаров, М.М.Рахимова, Б.Мирзоев. Седиментационный анализ фосфоритной муки месторождения Каратаг Республики Таджикистан **98**

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

А.Шарифов, А.А.Акрамов, Я.Г.Назирова, А.К.Муминов. Прочность и деформативность бетонов с добавкой щелочного экстракта стеблей хлопчатника. **106**

СТРАТИГРАФИЯ

А.А.Сабилов. Фораминиферовая шкала девонской системы Таджикистана **113**

МИНЕРАЛОГИЯ

А.Р.Файзиев, Н.Ф.Набиев, А.В.Буряк. Сульфиды Пакрутского золоторудного месторождения (Центральный Таджикистан) **122**

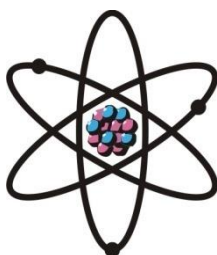
ТЕХНИКА

Х.М.Ахмедов, Х.С.Каримов, Н.М.Сафаралиев, А.Г.Маркаев, Ф.У.Обидов, Р.А.Исмоилов, Ф.Ахмедов, З.Кабутов. Двухконтурная солнечная водонагревательная установка на основе первичного алюминия **131**

ХРОНИКА **138**

ШҮЪБАИ
ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,
ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА

Мачалла аз мохи
январ соли 1952
нашр мешавад



№ 4 (153)
с. 2013

ҲАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:

М.И.Илолов – сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **С.О.Одинаев** – муовини сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Г.Сапожников** – котиби масъул; **Ҳ.М.Ахмедов** – академик, доктори илми химия; **Р.Б.Бобочонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **И.Н.Ғаниев** – академик, доктори илми химия, профессор; **Р.М.Маърупов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор; **Ҳ.Ҳ.Муминов** – узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **С.Х.Неъматуллоев** – академик, доктори илмҳои техникӣ; **З.Х.Раҳмонов** – узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Рачабов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҷ.Усмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **А.Р.Ғайзиев** – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва минералогия, профессор; **Ҷ.Х.Холиқов** – академик, доктори илми химия, профессор.

МУНДАРИҶА

МАТЕМАТИКА

З.Ҳ.Рамонов. Баҳои суммаи кӯтоҳи қимати характерҳо	7
М.Ш.Шабозов, Н.Ф.Олифтаев. Наздиккунии беҳтарин ва қимати аниқи қутрҳо барои баъзе синфи функсияҳои даврӣ дар фазои L_2	23
К.Тухлиев. Сарҳади аниқи болоии тамоили баъзе синфи функсияҳо аз суммаи хусусии катори Фурье-Чебышёв дар фазои L_2 . I	33
О.Қ.Фарайдунов. Оиди баҳодии саҳви формулаҳои квадратурии Эрмит-Чебышёв	47
М.Исматӣ. Дар бораи ҳалҳои классикӣ ва умумишудаи масъалаи навъи Коши барои дараҷаи дилҳои оператори Даламбер	57

ИНФОРМАТИКА

З.Қ.Усмонов, Г.М.Довудов. Алгоритми табдилдиҳии калимаҳои маҷмӯи забони тоҷикӣ ба фрагменти ҷумла **69**

ФИЗИКАИ ЧИСМҲОИ САХТ

Т.А.Василенко, А.К.Кириллов, А.С.Дорошкевич, А.В.Шило. Эффеќти таъсири импульсҳои каммавҷи майдони магнитӣ ба ҳолати электрофизиќии ангиштсанг **77**

ХИМИЯИ ҒАЙРИОРГАНИКӢ

С.К.Насриддинов, Д.Ш.Шарипов, М.С.Исломова, А.Бадалов. Ҳосил намудан ва тавсироти термодинамиќии тетрагидрат фторид ва хидроксокарбонати кобалти (II)..... **86**

Х.А.Раҳимов, В.Д.Абулхаев, И.Н.Ғаниев, С.О.Убайдов. Диаграммаи ҳолати системаи $Gd_5Vb_3 - Lu_5Vb_3$ **93**

ХИМИЯИ ФИЗИКАВӢ

М.Бобоназаров, М.М.Раҳимова, Б.Мирзоев. Таҳлили седиментатсионии хокаи фосфорити кони Қаратоғи Ҷумҳурии Тоҷикистон **98**

ТЕХНОЛОГИЯИ ХИМИЯВӢ

А.Шарифов, А.А.Акрамов, Я.Г.Назиров, А.К.Муминов. Боқувватӣ ва ба деформатсия табоварии бетонҳо бо иловаи экстракти ишқории ғӯзапоя **106**

СТРАТИГРАФИЯ

А.А.Собиров. Ҷадвали фораминиферии системаи девони Тоҷикистон..... **113**

МИНЕРАЛОГИЯ

А.Р.Ғайзиев, Н.Ғ.Набиев, А.В.Буряк. Сулфидҳои кони тиллои Покруд (Тоҷикистони Марказӣ)..... **122**

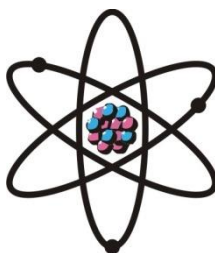
ТЕХНИКА

Х.М.Ахмедов, Х.С.Каримов, Н.М.Сафаралиев, А.Г.Маркаев, Ғ.У.Обидов, Р.А.Исмоилов, Ғ.Ахмедов, З.К.Кабутов. Обгармкунаки офтобии дуконтур дар асоси алюминии аввалия..... **131**

ХРОНИКА..... **138**

**DEPARTMENT OF
PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES**

The journal was established
in January 1952



№ 4 (153)
2013

EDITORIAL BOARD

Prof. **Mamadsho Ilolov**, Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; Prof. **Saidmukhammad Odinaev**, Doctor of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **Nikolay Sapozhnikov**, Secretary; **Khakim Akhmedov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Pulat Babadzhanov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Abdulkhak Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **Izatullo Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **Dzhuraboy Khalikov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Rakhim Marupov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Ulmas Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Khikmat Muminov**, Doctor of Physical and Mathematical; **Sabit Negmatullaev**, Doctor of Engineering; Prof. **Nusrat Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Zarullo Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Zafar Usmanov**, Doctor of Physical and Mathematical.

CONTENTS

MATHEMATICS

Z.Kh.Rakhmonov. Estimation of short character sums	7
M.Sh.Shabozov, N.F.Oliftaev. The best approximation and an exact values of widths for some classes periodic functions in L_2 space	23
K.Tukhliev. Upper bounds of the deviations of certain classes of functions from their partial sums of Fourier-Chebyshev in L_2 space. I.....	33
O.Q.Faraydunov. Error estimation of quadrature formula Hermite-Chebyshev	47
M.Ismati. About classical and generalized solutions of problem type Coushi for operator Dalamber of arbitrary degrec	57

INFORMATICS

Z.D.Usmanov, G.M.Dovudov. Algorithm for representing a specific tajik word form as a phrase piece	69
--	----

SOLID-STATE PHYSICS

T.A.Vasilenko, A.K.Kirillov, A.S.Doroshkevych, A.V.Shylo. Effects of low frequency pulsed magnetic field on the electrical characteristics of coal 77

INORGANIC CHEMISTRY

S.K.Nasriddinov, D.Sh.Sharipov, M.S.Islomova, A.Badalov. Synthesis and thermodynamic characteristics of fluoridetetrahydrate cobalt (II) and hidroksokarbonate 86

Kh.A.Rakhimov, V.D.Abulkhaev, I.N.Ganiev, S.O.Ubaydov. State diagram of the $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$ system 93

PHYSICAL CHEMISTRY

M.Bobonazarov, M.M.Rakhimova, B.Mirzoev. Sedimentation analysis of phosphorite of the Karatag deposit of the Republic of Tajikistan 98

CHEMICAL ENGINEERING

A.Sharifov, A.A.Akramov, Y.G.Nazirov, A.K.Muminov. Strength and deformability of concrete with the addition alkaline extract of cotton stalks..... 106

STRATIGRAPHY

A.A.Sabirov. The foraminiferal scale of devonian system of Tajikistan..... 113

MINERALOGY

A.R.Fayziev, N.F.Nabiev, A.V.Buryak. Sulfides Pakrut gold deposit (Central Tajikistan) 122

TECHNICS

Kh.M.Akhmedov, Kh.S.Karimov, N.M.Safaraliev, A.G.Markaev, F.U.Obidov, R.A.Ismoilov, F.Akhmedov, Z.Q.Kabutov. Double contour solar water heater on the base of primary aluminum..... 131

CHRONICLE 138

УДК 511.325

З.Х.РАХМОНОВ

ОЦЕНКА КОРОТКИХ СУММ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРОВ

Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 04.12.2013 г.

При $y \geq q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ и $(\eta, q) = 1$ получена нетривиальная оценка сумм значений примитивного характера по модулю q на последовательности сдвинутых чисел $n - \eta$, $x - y < n \leq x$, $(n, q) = 1$.

Ключевые слова: нетривиальная оценка – характер Дирихле – сдвинутые простые числа – короткая сумма характеров.

Для неглавного характера $\chi(n)$ по модулю q Д.Берджесс [1] получил оценку

$$\sum_{x-y < n \leq x} \chi_q(n) \ll y^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}+\varepsilon},$$

которая является нетривиальной при $y \gg q^{\frac{1}{3}+4\varepsilon}$. При изучении закона распределения значений χ_q на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p - l$, $(l, q) = 1$ возникает задача получения нетривиальной оценки сумм вида

$$S_q(y) = \sum_{\substack{x-y < n \leq x \\ (n, q) = 1}} \chi_q(n - \eta), \quad (\eta, q) = 1.$$

Ранее сумма $S_q(y)$ в случае простого q рассматривалась в работах [2,3], а в случае составного q – в работах [4-7]. Основным результатом этой работы является следующая теорема о нетривиальной оценке суммы $S_q(y)$ при составном q , которая ранее была анонсирована в [8] и [9].

Адрес для корреспонденции: Рахмонов Зарулло Хусенович. Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, /4, Институт математики АН РТ. E-mail: zarullo_r@mail.ru.

Теорема 1. Пусть χ_q – примитивный характер по модулю q , $(\eta, q) = 1$, δ – положительное сколь угодно малое постоянное число, $0,1 \leq \sigma < 0,9$, $y \geq q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta}$, тогда

$$S_q(y) \ll y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q).$$

Следствие 1. Пусть $(\eta, q) = 1$ и $y \geq q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta}$, тогда

$$S_q(y) \ll y \exp(-1,5\sqrt{\ln q}).$$

Основные утверждения, позволившие получить оценку $S_q(y)$, содержатся в леммах 1, 3, 4, 5.

Лемма 1. Пусть σ – фиксированное число, $0,1 \leq \sigma < 0,9$, тогда

$$\sum_{\substack{d|D \\ d > \exp(\ln D^2)^\sigma}} \frac{\mu^2(d)}{d} \ll \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma D).$$

Доказательство. Разобьем интервал суммирования на интервалы вида $M < d \leq 2M$. Получим не более $\ln D$ сумм $S(M)$ вида

$$S(M) = \sum_{\substack{d|D \\ M < d \leq 2M}} \frac{\mu^2(d)}{d} \ll M^{-1} \sum_{\substack{d|D \\ d \leq 2M}} 1.$$

Пусть $D = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ – каноническое разложение числа D на простые сомножители и q_i i – тое простое число. Очевидно, существует k такое, что

$$D_1 = q_1 q_2 \dots q_k \leq D < q_1 q_2 \dots q_k q_{k+1}, \quad k \geq t.$$

Согласно закону распределения простых чисел

$$\ln D_1 = \sum_{i \leq k} \ln q_i = \sum_{p \leq q_k} \ln p > \frac{q_k}{2},$$

так что $q_k < 2 \ln D_1 \leq 2 \ln D$. Пусть $D_2 = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_t^{\alpha_t}$, очевидно $D_2 \leq D$ и $q_t \leq q_k$, тогда

$$S(M) \ll M^{-1} \sum_{\substack{d|D \\ d \leq 2M}} 1 \leq M^{-1} \sum_{\substack{d|D_2 \\ d \leq 2M}} 1.$$

Лемма 2. [10]. Пусть $F(x, z, q)$ – количество чисел $\leq x$, взаимно простых с q , $q \leq x$ и имеющих только простые делители меньше z , $\ln x \leq z \leq x^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha = \ln z / \ln x$; тогда

$$F(x, z, q) \ll x \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \left(\ln \frac{1}{\alpha} + \ln \ln \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} + \frac{2\theta}{\alpha \ln \frac{1}{\alpha}}\right); \quad |\theta| \leq 1.$$

Числа d , $d \setminus D_2$ состоят из простых делителей $q_j \leq q_t$. Так как $q_t < 2 \ln D$, то последняя сумма не превосходит количества чисел $\leq 2M$ и имеющие только простые делители меньше $2 \ln D$, то есть

$$S(M) \ll M^{-1} F(2M, 2 \ln D, 1).$$

Воспользовавшись леммой 2 при

$$x = 2M, \quad q = 1, \quad z = 2 \ln D, \quad \alpha = \frac{\ln z}{\ln x} = \frac{\ln \ln D^2}{\ln 2M},$$

имеем

$$\begin{aligned} S(M) &\ll \exp\left(-\frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2} \left(\ln \ln 2M - \ln \ln \ln D^2 + \ln \ln \frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2}\right) + \frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\theta \ln 2M}{\ln \ln D^2 \ln \frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2}}\right) = \exp\left(-\frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2} (\ln \ln 2M - \mathcal{B})\right), \\ \mathcal{B} &= \ln \ln \ln D^2 - \ln \ln \frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2} + 1 + 2\theta \left(\ln \frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Из условия $2M > \exp(\ln D^2)^\sigma$ следует, что $\ln D^2 < (\ln 2M)^{\frac{1}{\sigma}}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &\leq \ln \ln (\ln 2M)^{\frac{1}{\sigma}} - \ln \ln \frac{\ln 2M}{\ln (\ln 2M)^{\frac{1}{\sigma}}} + 1 + 2 \left(\ln \frac{\ln 2M}{\ln (\ln 2M)^{\frac{1}{\sigma}}}\right)^{-1} = \\ &= 1 + \ln \sigma^{-1} + O\left(\frac{\ln \sigma^{-1} + \ln \ln \ln 2M}{\ln \ln 2M}\right) < 2 + \ln 10 \leq 5 < \frac{1}{3} \ln \ln 2M. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S(M) \ll \exp\left(-\frac{\ln 2M}{\ln \ln D^2} (\ln \ln 2M - \mathcal{B})\right) \ll \exp\left(-\frac{2 \ln 2M \ln \ln 2M}{3 \ln \ln D^2}\right).$$

Из условия $2M > \exp(\ln D^2)^\sigma$ следует, что

$$\ln 2M > \ln^\sigma D^2, \quad \ln \ln 2M > \sigma \ln \ln D^2.$$

Поэтому

$$S(M) \ll \exp\left(-\frac{2\sigma}{3} \ln^\sigma D^2\right) \ll \ln^{-1} D \cdot \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma D).$$

Лемма 3. Пусть K – число решений сравнения:

$$(nd - \eta)y \equiv (n_1d - \eta)y_1 \pmod{q},$$

$$M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y, y_1 \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y_1, q) = 1,$$

где $(\eta, q) = 1$, d – делитель числа q , $2NY < q$, $d < Y$, $\rho(qd^{-1}, Y)$ — число делителей β числа qd^{-1} , удовлетворяющего условиям $qY^{-1} \leq \beta < qd^{-1}$ и $(\beta, d) = 1$. Тогда справедливо соотношение:

$$K \leq NY_q + \frac{2Y^2}{d} + \frac{2Y^2}{d} \rho(qd^{-1}, Y) + \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d}.$$

Доказательство. При $y = y_1$, разделив обе части сравнения на y , $(y, q) = 1$, находим

$$nd \equiv n_1d \pmod{q}, \quad M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y \leq Y, \quad (y, q) = 1.$$

Разделив обе части сравнения и модуль на число d , найдем

$$n - n_1 \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \quad M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y \leq Y, \quad (y, q) = 1.$$

Из условий $|n - n_1| < N$ и $2N \leq qY^{-1} < qd^{-1}$ следует, что последнее сравнение превращается в уравнение

$$n - n_1 = 0, \quad M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y \leq Y, \quad (y, q) = 1,$$

то есть если $y = y_1$, то $n = n_1$. Отсюда получаем

$$K = NY_q + 2\kappa, \tag{1}$$

где κ — число решений сравнения

$$(nd - \eta)y \equiv (n_1d - \eta)y_1 \pmod{q},$$

$$M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y < y_1 \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y_1, q) = 1$$

или сравнения

$$(ny - n_1y_1)d \equiv \eta(y - y_1) \pmod{q}, \tag{2}$$

$$M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y < y_1 \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y_1, q) = 1.$$

Левая часть и модуль сравнения (2) делятся на число d . Следовательно, делится на число d и его правая часть, то есть число $\eta(y - y_1)$. Число η является взаимно простым с числом d , поэтому на d делится число $y - y_1$, то есть $y - y_1 \equiv 0 \pmod{d}$ или $y_1 = y + td$. Таким образом, сравнение (2) принимает вид

$$(n_1(y + td) - ny)d \equiv \eta td \pmod{q},$$

$$M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1.$$

Разделяя обе части этого сравнения и его модуль на число d , получим

$$(n - n_1)y \equiv (n_1d - \eta)t \pmod{qd^{-1}}, \quad (3)$$

$$M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1.$$

Разбивая множество решений сравнения (3), имеем

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3, \quad (4)$$

где κ_1 , κ_2 и κ_3 — число решений сравнения (3), обладающих соответственно свойствами:

1. $n_1d - \eta \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}$;
2. $(n_1d - \eta)t \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}$ и $n_1d - \eta \not\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}$;
3. $(n_1d - \eta)t \not\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}$.

Оценка κ_1 . Сравнение $n_1d - \eta \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}$ не имеет решения при $(d, qd^{-1}) > 1$, а при $(d, qd^{-1}) = 1$ имеет не более одного решения $n_1 = n_1^*$, $(n_1^*, qd^{-1}) = 1$, так как $2N < qd^{-1}$, то есть N — длина интервала изменения n_1 меньше модуля сравнения. Сравнение (3) при $n_1 = n_1^*$ принимает вид

$$(n - n_1^*)y \equiv 0 \pmod{qd^{-1}},$$

$$M < n \leq M + N, \quad 1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1$$

и при фиксированных y и t имеет одно решение $n = n_1^*$. Следовательно,

$$\kappa_1 \leq Y_q \left(\frac{Y}{d} + 1 \right) \leq \frac{2Y^2}{d}.$$

Оценка κ_2 . Воспользовавшись условиями случая, сравнение (3) представим в виде системы сравнений

$$(n_1 - n)y \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \quad (5)$$

$$(n_1 d - \eta)t \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}$$

с условиями

$$n_1 d - \eta \not\equiv 0 \pmod{qd^{-1}},$$

$$M < n, n_1 \leq M + N, \quad 1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = (y + td, q) = 1.$$

Из условий $(y, q) = 1$, $|n - n_1| < N$ и $2N \leq qd^{-1}$ следует, что первое сравнение системы (5) равносильно уравнению $n_1 = n$, поэтому количество решений системы (5) равно количеству решений сравнения

$$(nd - \eta)t \equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \quad nd - \eta \not\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \quad (6)$$

$$M < n \leq M + N, \quad 1 \leq y < y + td \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1.$$

Произведение чисел $nd - \eta$ и t делится на qd^{-1} , но само число $nd - \eta$ не делится на qd^{-1} , поэтому для каждого решения сравнения (6) существует делитель β числа qd^{-1} , что $\beta < qd^{-1}$ и

$$nd - \eta \equiv 0 \pmod{\beta}, \quad t \equiv 0 \pmod{q(d\beta)^{-1}}.$$

Из условия $(d, \eta) = 1$ вытекает, что сравнение $nd - \eta \equiv 0 \pmod{\beta}$ имеет решение только при $(\beta, d) = 1$. При $(\beta, d) = 1$ символом $\kappa_2(\beta)$ обозначим число решений системы сравнений

$$\begin{aligned} n &\equiv \eta d_\beta^{-1} \pmod{\beta}, & M < n \leq M + N, & \quad dd_\beta^{-1} \equiv 1 \pmod{\beta} \\ t &\equiv 0 \pmod{q(d\beta)^{-1}}, & 1 \leq y < y + td \leq Y, & \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1, \end{aligned}$$

или число решений сравнения

$$\begin{aligned} n &\equiv \eta d_\beta^{-1} \pmod{\beta}, & M < n \leq M + N, & \quad dd_\beta^{-1} \equiv 1 \pmod{\beta} \\ & & 1 \leq y < y + tq\beta^{-1} \leq Y, & \quad (y, q) = 1, \quad (y + tq\beta^{-1}, q) = 1. \end{aligned}$$

Границы изменения переменных y и t в этом сравнении представим в виде

$$1 \leq y < Y, \quad 1 \leq t \leq \frac{Y - y}{q\beta^{-1}}, \quad (y, q) = 1, \quad (y + tq\beta^{-1}, q) = 1. \quad (7)$$

При $y > Y - q\beta^{-1}$ верхняя граница изменения t меньше нижней, поэтому область (7) можно представить в виде

$$1 \leq y \leq Y - q\beta^{-1}, \quad 1 \leq t \leq \frac{Y - y}{q\beta^{-1}}, \quad (y, q) = 1, \quad (y + tq\beta^{-1}, q) = 1.$$

В свою очередь, если $\beta \leq qY^{-1}$, то $Y - q\beta^{-1}$ — верхняя граница изменения y меньше нижней границы. Следовательно, $\kappa_2(\beta) = 0$ при $\beta \leq qY^{-1}$, а при $qY^{-1} < \beta < qd^{-1}$ для $\kappa_2(\beta)$ получим оценку

$$\kappa_2(\beta) \leq \left(\frac{N}{\beta} + 1\right) \sum_{\substack{1 \leq y < Y - q\beta^{-1} \\ (y, q) = 1}} \left[\frac{Y - y}{q\beta^{-1}} \right] \leq \left(\frac{NY}{q} + \frac{Y\beta}{q}\right) \sum_{\substack{1 \leq y < Y - q\beta^{-1} \\ (y, q) = 1}} 1.$$

Далее, воспользовавшись соотношениями $2NY < q$, $\beta < qd^{-1}$ и $d < Y$, найдем

$$\kappa_2(\beta) \leq \left(1 + \frac{Y}{d}\right) \sum_{\substack{1 \leq y < Y - q\beta^{-1} \\ (y, q) = 1}} 1 \leq \frac{2Y}{d} \sum_{\substack{1 \leq y < Y - q\beta^{-1} \\ (y, q) = 1}} 1 < \frac{2Y^2}{d}.$$

Суммируя это неравенство по всем делителям β числа qd^{-1} , удовлетворяющим условиям $qY^{-1} \leq \beta < qd^{-1}$ и $(\beta, d) = 1$ и обозначая количество таких делителей символом $\rho(qd^{-1}, Y)$, получим

$$\kappa_2 \leq \sum_{\substack{(\beta, d) = 1, \beta | qd^{-1} \\ qY^{-1} \leq \beta < qd^{-1}}} \kappa_2(\beta) \leq \frac{2Y^2}{d} \rho(qd^{-1}, Y).$$

Оценка κ_3 . Напомним, что κ_3 — число решений сравнения

$$(n_1 - n)y \equiv (n_1d - \eta)t \pmod{qd^{-1}}$$

с условиями

$$\begin{aligned} (n_1d - \eta)t &\not\equiv 0 \pmod{qd^{-1}}, \quad M < n, n_1 \leq M + N, \\ 1 \leq y < y + td &\leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y + td, q) = 1. \end{aligned}$$

Для фиксированной пары (n_1^*, t^*) символом $\kappa_3(\lambda)$ обозначим число решений сравнения

$$(n - n_1^*)y \equiv \lambda \pmod{qd^{-1}}, \quad M < n \leq M + N, \quad 1 \leq y < y + t^*d \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (8)$$

где $\lambda \neq 0$ – абсолютно наименьший вычет числа $(n_1^*d - \eta)t^*$ по модулю qd^{-1} . Воспользовавшись границами изменения переменных n , n_1 и y , и условием $2NY < q$, найдем

$$0 < |(n - n_1^*)y| < NY < \frac{q}{2}.$$

Из этого неравенства следует, что сравнение (8) превращается в уравнение

$$(n - n_1^*)y = \lambda, \quad M < n \leq M + N, \quad 1 \leq y < y + t^*d \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (9)$$

где для параметра λ выполняется соотношение

$$1 \leq |\lambda| < NY.$$

Таким образом, для фиксированной пары (n_1^*, t^*) , $\kappa_3(\lambda)$ – количество решений сравнения (8) равно числу решений уравнения (9), для которого справедливо неравенство

$$\kappa_3(\lambda) \leq \tau(|\lambda|) \leq 0,5(NY)^\delta.$$

Количество всех возможных пар (n_1^*, t^*) не превосходит $N(Yd^{-1} + 1)$. Следовательно,

$$\kappa_3 \leq N \left(\frac{Y}{d} + 1 \right) \cdot 0,5(NY)^\delta \leq \frac{(NY)^{1+\delta}}{d}.$$

Подставляя найденные оценки для κ_1 , κ_2 и κ_3 в (4), а затем в (1), найдем

$$K = NY_q + 2(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) \leq NY_q + \frac{2Y^2}{d} + \frac{2Y^2}{d} \rho(qd^{-1}, Y) + \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d}.$$

Лемма 4. Пусть $(\eta, q) = 1$, $y < x$, тогда

$$S_q(y) = \sum_{\substack{x-y < n \leq x \\ (n, q) = 1}} \chi_q(n - \eta) \ll 2^{\omega(q)} \sqrt{q} \ln q.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $y > 2^{\omega(q)} \sqrt{q} \ln q$. Имеем равенство:

$$S_q(y) = \frac{1}{q} \sum_{t=1}^q e\left(\frac{\eta t}{q}\right) \sum_{\substack{x-y < n \leq x \\ (n, q) = 1}} e\left(-\frac{tn}{q}\right) \sum_{a=1}^q \chi_q(a) e\left(\frac{at}{q}\right).$$

Пользуясь формулой, которая устанавливает связь между значениями примитивных характеров и значениями сумм Гаусса ([11], стр. 120), имеем

$$\begin{aligned}
S_q(y) &= \frac{\tau(\chi_q)}{q} \sum_{t=1}^q \bar{\chi}_q(t) e\left(\frac{\eta t}{q}\right) \sum_{\substack{x-y < n \leq x \\ (n,q)=1}} e\left(-\frac{tn}{q}\right) = \\
&= \frac{\tau(\chi_q)}{q} \sum_{t=1}^q \bar{\chi}_q(t) e\left(\frac{\eta t}{q}\right) \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{x-y < nd \leq x} e\left(-\frac{tnd}{q}\right).
\end{aligned}$$

Последняя сумма по n при $d > y$ и $[x/d] = [(x-y)/d]$ пустая, а при $d > y$ и $[x/d] = [(x-y)/d] + 1$ состоит из одного слагаемого. Поэтому при $d \leq y$, воспользовавшись для целых n_1 и n_2 равенством

$$\sum_{n_1 \leq n \leq n_2} e\left(-\frac{tdn}{q}\right) = \frac{\sin \frac{\pi td(n_2 - n_1 + 1)}{q}}{\sin \frac{\pi td}{q}} e\left(-\frac{td(n_1 + n_2)}{2q}\right)$$

и переходя к оценкам и имея виду, что $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$, найдем

$$\begin{aligned}
|S_q(y)| &\leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\substack{t=1 \\ (t,q)=1}}^q \left(\sum_{\substack{d|q \\ d \leq y}} \frac{\mu^2(d)}{\left|\sin \frac{\pi t}{q/d}\right|} + 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\substack{d|q \\ d \leq y}} \mu^2(d) \sum_{t_1=0}^{d-1} \sum_{\substack{t_2=1 \\ (t_1 q/d + t_2, q)=1}}^{q/d} \left| \sin \frac{\pi t_2}{q/d} \right|^{-1} \\
&+ \frac{\varphi(q)}{\sqrt{q}} \leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\substack{d|q \\ d \leq y}} d \mu^2(d) S(d) + \frac{\varphi(q)}{\sqrt{q}}, \quad S(d) = \sum_{t=1}^{q/d-1} \left| \sin \frac{\pi t}{q/d} \right|^{-1}.
\end{aligned}$$

Если qd^{-1} — нечётное число, то, воспользовавшись последовательно неравенствами $\sin \pi \alpha \geq 2\alpha$ при $0 \leq \alpha \leq 1/2$ и $\frac{1}{t} \leq \ln \frac{2t+1}{2t-1}$, найдем

$$\begin{aligned}
S(d) &= 2 \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} \left| \sin \frac{\pi t}{qd^{-1}} \right|^{-1} \leq 2 \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} \left(\frac{2t}{qd^{-1}} \right)^{-1} = \frac{q}{d} \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} \frac{1}{t} \leq \\
&\leq \frac{q}{d} \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} (\ln(2t+1) - \ln(2t-1)) = \frac{q}{d} \ln qd^{-1} \leq \frac{q}{d} \ln q.
\end{aligned}$$

Если qd^{-1} — чётное число, то

$$\begin{aligned}
S(d) &= 2 \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} \left| \sin \frac{\pi t}{qd^{-1}} \right|^{-1} + 1 \leq 2 \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} \left(\frac{2t}{qd^{-1}} \right)^{-1} + 1 = \frac{q}{d} \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} \frac{1}{t} + 1 \leq \\
&\leq \frac{q}{d} \sum_{t=1}^{\frac{qd^{-1}-1}{2}} (\ln(2t+1) - \ln(2t-1)) + 1 = \frac{q}{d} \ln(qd^{-1} - 1) + 1 \leq \frac{q}{d} \ln q.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|S_q(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\substack{d|q \\ d \leq y}} d \mu^2(d) \cdot \frac{q}{d} \ln q + \frac{\varphi(q)}{\sqrt{q}} \ll \sqrt{q} \ln q \sum_{d|q} \mu^2(d) = 2^{\omega(q)} \sqrt{q} \ln q.$$

Лемма 5. Пусть σ — вещественное число, M , N , d и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta, q) = 1$, $N < q^{\frac{7}{12}} d^{-\frac{1}{2}}$, $0, 1 \leq \sigma < 0, 9$, $d \leq \exp(\ln q^2)^\sigma$, тогда

$$S = \sum_{M < n \leq M+N} \chi_q(nd - \eta) \leq N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}. \quad (10)$$

Доказательство. Оценку (10) для суммы S докажем методом математической индукции по N . При $N \leq q^{\frac{1}{3}}$ для правой части оценки (10) справедливо неравенство

$$N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} \geq N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} > N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}} \geq N^{\frac{2}{3}} (N^3)^{\frac{1}{9}} = N,$$

то есть в этом случае оценка (10) является тривиальной и её возьмем в качестве базы индукции.

Далее будем считать, что $N > q^{\frac{1}{3}}$. Производя в сумме S сдвиг интервала суммирования на h , $1 \leq h \leq H < N$, получим

$$S = \sum_{M < n \leq M+N} \chi_q((n+h)d - \eta) + \sum_{M < n \leq M+h} \chi_q(nd - \eta) - \sum_{M+N < n \leq M+N+h} \chi_q(nd - \eta).$$

Оценивая две последние суммы, воспользовавшись предположением индукции, имеем

$$S \leq \left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi_q((n+h)d - \eta) \right| + 2H^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}.$$

Полагая в этом неравенстве $h = yz$ и суммируя его по y и z в пределах

$$1 \leq y \leq Y, (y, q) = 1, 1 \leq z \leq Z, (z, q) = 1, Y = \left[0, 5Nq^{-\frac{1}{6}}d \right], Z = \left[0, 5q^{\frac{1}{6}}d^{-1} \right],$$

приходим к неравенству:

$$|S| \leq (Y_q Z_q)^{-1} \left| \sum_{\substack{1 \leq y \leq Y \\ (y, q) = 1}} \sum_{\substack{1 \leq z \leq Z \\ (z, q) = 1}} \sum_{M < n \leq M+N} \chi_q((n+yz)d - \eta) \right| + 2(YZ)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}},$$

где Y_q и Z_q — соответственно количества чисел $y \in [1, Y]$ и $z \in [1, Z]$, взаимно простых с числом q . Определяя y^{-1} из сравнения $yy^{-1} \equiv 1 \pmod{q}$, имеем

$$|S| \leq (Y_q Z_q)^{-1} \sum_{M < n \leq M+N} \sum_{\substack{1 \leq y \leq Y \\ (y, q) = 1}} \left| \sum_{\substack{1 \leq z \leq Z \\ (z, q) = 1}} \chi_q((nd - \eta)y^{-1} + zd) \right| + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}.$$

Обозначая в этом неравенстве символом $I(\lambda)$ — число решений сравнения

$$(nd - \eta)y^{-1} \equiv \lambda \pmod{q}, \quad M < n \leq M + N, \quad 1 \leq y \leq Y, \quad (y, q) = 1,$$

получим

$$|S| \leq \frac{W(d)}{Y_q Z_q} + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}, \quad W(d) = \sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda) \left| \sum_{\substack{1 \leq z \leq Z \\ (z, q) = 1}} \chi_q(\lambda + zd) \right|. \quad (11)$$

Возводя обе части этого равенства в куб, воспользовавшись неравенством Гёльдера и соотношением

$$\sum_{\lambda=1}^q I(\lambda) \leq NY_q,$$

будем иметь:

$$W^3(d) \leq (NY_q)^2 \sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda) \left| \sum_{\substack{1 \leq z \leq Z \\ (z, q) = 1}} \chi_q(\lambda + zd) \right|^3.$$

Возводя обе части последнего неравенства в квадрат и воспользовавшись неравенством Коши, получим

$$W^6(d) \leq (NY_q)^4 KV, \quad K = \sum_{\lambda=0}^{q-1} I^2(\lambda), \quad V = \sum_{\lambda=0}^{q-1} \left| \sum_{\substack{1 \leq z \leq Z \\ (z, q) = 1}} \chi_q(\lambda + zd) \right|^6. \quad (12)$$

Лемма 6. [1]. Для произвольного натурального $Z_0 \leq q^{\frac{1}{6}}$ справедливо соотношение

$$\sum_{z_1, \dots, z_6=1}^{Z_0} \left| \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi_q \left(\frac{(\lambda + z_1)(\lambda + z_2)(\lambda + z_3)}{(\lambda + z_4)(\lambda + z_5)(\lambda + z_6)} \right) \right| \ll Z_0^3 q^{1+\delta}.$$

Пользуясь леммой 6, получим

$$V = \sum_{\lambda=0}^{q-1} \sum_{\substack{z_1, \dots, z_6=1 \\ (z_1, q) = \dots = (z_6, q) = 1}}^Z \chi \left(\frac{(\lambda + z_1 d)(\lambda + z_2 d)(\lambda + z_3 d)}{(\lambda + z_4 d)(\lambda + z_5 d)(\lambda + z_6 d)} \right) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{z_1, \dots, z_6=1}^Z \left| \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi \left(\frac{(\lambda + z_1 d)(\lambda + z_2 d)(\lambda + z_3 d)}{(\lambda + z_4 d)(\lambda + z_5 d)(\lambda + z_6 d)} \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{z_1, \dots, z_6=1}^{Zd} \left| \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi \left(\frac{(\lambda + z_1)(\lambda + z_2)(\lambda + z_3)}{(\lambda + z_4)(\lambda + z_5)(\lambda + z_6)} \right) \right| \leq Z^3 d^3 q^{1+\delta}. \end{aligned}$$

Сумма K равна числу решений сравнения

$$\begin{aligned} (nd - \eta)y^{-1} &\equiv (n_1 d - \eta)y_1^{-1} \pmod{q}, \\ M < n, \quad n_1 &\leq M + N, \quad 1 \leq y, \quad y_1 \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y_1, q) = 1, \end{aligned}$$

или сравнения

$$\begin{aligned} (nd - \eta)y &\equiv (n_1 d - \eta)y_1 \pmod{q}, \\ M < n, \quad n_1 &\leq M + N, \quad 1 \leq y, \quad y_1 \leq Y, \quad (y, q) = 1, \quad (y_1, q) = 1. \end{aligned}$$

Для этого сравнения все условия леммы 3 выполняются:

$$\begin{aligned} 2NY &= 2N \left[0, 5Nq^{-\frac{1}{6}}d \right] \leq N^2 q^{-\frac{1}{6}}d < \left(q^{\frac{7}{12}} d^{-\frac{1}{2}} \right)^2 q^{-\frac{1}{6}}d = q, \\ \frac{Y}{d} &= \frac{\left[0, 5Nq^{-\frac{1}{6}}d \right]}{d} > \frac{\left[0, 5q^{\frac{1}{6}}d \right]}{d} > 0, 3q^{\frac{1}{6}} > 1. \end{aligned}$$

Согласно этой лемме имеем

$$K \leq \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d} \left(1 + \frac{d}{2(NY)^\delta} + \frac{Y}{N(NY)^\delta} (\rho(qd^{-1}, Y) + 1) \right).$$

Отсюда, с учётом соотношений $d \leq \exp(\ln q^2)^\sigma \leq q^{\frac{\delta}{4}}$, $\rho(qd^{-1}, Y) + 1 \leq \tau(q) \leq q^\delta$, $(NY)^\delta \geq (0, 1N^2 q^{-\frac{1}{6}}d)^\delta > 0, 1q^{\frac{\delta}{2}}$, находим

$$K \leq \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d} \left(1 + \frac{5q^{\frac{\delta}{4}}}{q^{\frac{\delta}{2}}} + \frac{10q^\delta}{q^{\frac{1}{6} + \frac{\delta}{2}}} \right) \leq \frac{3(NY)^{1+\delta}}{d}.$$

Подставляя эту оценку и оценку суммы V в правую часть неравенства (12), а затем в (11), получим

$$|S| \leq \frac{\left((NY_q)^4 KV \right)^{\frac{1}{6}}}{Y_q Z_q} + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} \leq \frac{3^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{6}} N^{\frac{5}{6}} Y^{\frac{1}{6}} Z^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{3}} (qNY)^\delta}{Y_q^{\frac{1}{3}} Z_q} + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}. \quad (13)$$

Далее воспользовавшись известными неравенствами

$$\left| \sum_{\substack{u=1 \\ (u,q)=1}}^U 1 - \frac{\varphi(q)}{q} U \right| \leq 2^{\omega(q)}, \quad \omega(q) \leq \frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q}, \quad \frac{\varphi(q)}{2q} \leq \frac{c_\phi}{\ln \ln q},$$

где c_ω и c_ϕ — абсолютные постоянные, найдем

$$\left| Y_q - \frac{\varphi(q)}{q} Y \right| \leq 2^{\omega(q)} \leq 2^{\frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q}} = q^{\frac{c_\omega \ln 2}{\ln \ln q}} < \frac{\varphi(q)}{2q} q^{\frac{1}{7}} < \frac{\varphi(q)}{2q} \left[0,5 N q^{-\frac{1}{6}} \right] = \frac{\varphi(q)}{2q} Y,$$

$$\left| Z_q - \frac{\varphi(q)}{q} Z \right| \leq 2^{\omega(q)} \leq 2^{\frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q}} = q^{\frac{c_\omega \ln 2}{\ln \ln q}} < \frac{\varphi(q)}{2q} q^{\frac{1}{7}} < \frac{\varphi(q)}{2q} \left[0,5 q^{\frac{1}{6}} \right] = \frac{\varphi(q)}{2q} Z,$$

то есть

$$Y_q > \frac{\varphi(q)}{2q} Y \geq \frac{c_\phi Y}{\ln \ln q}, \quad Z_q > \frac{\varphi(q)}{2q} Z \geq \frac{c_\phi Z}{\ln \ln q}.$$

Пользуясь этими неравенствами в (13), параметры Y_q и Z_q выразим соответственно через Y и Z . Имеем

$$|S| \leq \frac{3^{\frac{1}{6}}}{c_\phi^{\frac{4}{3}}} \cdot \frac{q^{\frac{1}{6}} N^{\frac{5}{6}} d^{\frac{1}{3}} (qNY)^{\frac{\delta}{6}} \ln^{\frac{4}{3}} \ln q}{Y^{\frac{1}{6}} Z^{\frac{1}{2}}} + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}.$$

Далее имея ввиду, что $Y = \left[0,5 N q^{-\frac{1}{6}} d \right]$, $Z = \left[0,5 q^{\frac{1}{6}} d^{-1} \right]$ и $N < q^{\frac{7}{12}}$, найдем
($0,5^{-2/3+\delta/6} = 2^{2/3-\delta/6} < 2$)

$$\begin{aligned} |S| &\leq \frac{2 \cdot 3^{\frac{1}{6}}}{c_\phi^{\frac{4}{3}}} \cdot \frac{q^{\frac{1}{6}} N^{\frac{5}{6}} d^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} \left(q^{1-\frac{1}{6}} N^2 d \right)^{\frac{\delta}{6}} \ln^{\frac{4}{3}} \ln q}{N^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{12} - \frac{1}{36}}} + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} = \\ &= \frac{2 \cdot 3^{\frac{1}{6}}}{c_\phi^{\frac{4}{3}}} \cdot q^{\frac{1}{9}} N^{\frac{2}{3}} d^{\frac{2}{3}} \left(q^{\frac{5}{6}} N^2 d \right)^{\frac{\delta}{6}} \ln^{\frac{4}{3}} \ln q + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} \leq \\ &\leq \frac{2 \cdot 3^{\frac{1}{6}}}{c_\phi^{\frac{4}{3}}} \cdot N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9}} d^{\frac{2}{3}} q^{\frac{\delta}{3}} \ln^{\frac{4}{3}} \ln q + 2^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} = \\ &= \left(2 \cdot 3^{\frac{1}{6}} c_\phi^{-\frac{4}{3}} q^{-\frac{\delta}{6}} \ln^{\frac{4}{3}} \ln q + 2^{-\frac{1}{3}} \right) N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} \leq N^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим случай $q^{\frac{7}{12}} < y \leq 0,5q$. Воспользовавшись леммой 4 и известным неравенством

$$\omega(q) \leq \frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q},$$

где c_ω – абсолютная постоянная, имеем равенство:

$$S \leq 2^{\omega(q)} \sqrt{q} \ln q \leq \frac{\sqrt{q} \cdot \exp\left(\frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q}\right)}{y} \cdot y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q).$$

Отсюда, имея в виду, что $y > q^{\frac{7}{12}} > \sqrt{q} \cdot \exp\left(\frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q}\right)$, находим

$$S \ll y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q).$$

Пусть теперь $q^{\frac{1}{3} + \frac{\delta}{3}} \leq y \leq q^{\frac{7}{12}}$. Имеем равенство:

$$S = \sum_{x-y < n \leq x} \chi_q(n-\eta) \sum_{d|(n,q)} \mu(d) = \sum_{d|q} \mu(d) S(d), \quad S(d) = \sum_{x-y < nd \leq x} \chi_q(nd-\eta).$$

Разбивая сумму S на две части, имеем

$$S = S_1 + S_2, \quad S_1 = \sum_{\substack{d|q \\ d \leq \exp(\ln q^2)^\sigma}} \mu(d) S(d), \quad S_2 = \sum_{\substack{d|q \\ \exp(\ln q^2)^\sigma < d \leq x}} \mu(d) S(d).$$

Для оценки суммы S_2 воспользуемся тривиальной оценкой суммы $S(d)$ и леммой 1.

Имеем

$$\begin{aligned} S_2 &\ll \sum_{\substack{d|q \\ \exp(\ln q^2)^\sigma < d \leq x}} \mu^2(d) \left(\frac{y}{d} + 1\right) \ll y \sum_{\substack{d|q \\ \exp(\ln q^2)^\sigma < d \leq x}} \frac{\mu^2(d)}{d} + \tau(q) \ll \\ &\ll y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q) + q^\delta \ll y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q). \end{aligned}$$

Оценим теперь S_1 . Для этого оценим $S(d)$, воспользовавшись леммой 5 при

$$M = \left\lfloor \frac{x-y}{d} \right\rfloor, \quad N = \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x-y}{d} \right\rfloor \ll \frac{y}{d},$$

имеем

$$S(d) \ll \left(\frac{y}{d}\right)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} d^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}}.$$

Следовательно,

$$S_1 \ll y^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} \sum_{\substack{d|q \\ d \leq \exp(\ln q^2)^\sigma}} \mu^2(d) \ll y^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} 2^{\omega(q)} \leq y^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{9} + \frac{\delta}{2}} \exp\left(\frac{c_\omega \ln 2 \ln q}{\ln \ln q}\right) \leq$$

$$\leq y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q) \cdot \left(\frac{q^{\frac{1}{3} + \frac{3\delta}{2}} \cdot \exp\left(\frac{c_\omega \ln 2 \ln q}{\ln \ln q} + 3\sigma 2^{\sigma-1} \ln^\sigma q\right)}{y} \right)^{\frac{1}{3}} <$$

$$< y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q) \cdot \left(\frac{q^{\frac{1}{3} + \frac{8}{5}\delta}}{y} \right)^{\frac{1}{3}} \leq y \exp(-2^{\sigma-1} \sigma \ln^\sigma q).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Burgess D.A. The character sum estimate with $r=3$ // London Math. Soc. 33 (1986). 219-226.
2. Виноградов И.М. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1952.
3. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами // Известия АН СССР, сер. матем. 1970. Т. 34. С. 299 – 321.
4. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле // УМН. 1986. Т. 41. 1. С. 201 – 202.
5. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами // ДАН Таджикской ССР. 1986. Т. 29. №1. С. 16-20.
6. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды Математического института РАН. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.
7. Фридландера Дж. Б., Гонг К., Шпарлинский И. Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Матем. заметки. 2010. Т. 88. В. 4. С. 605 – 619.
8. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. №1. С. 5 – 9.
9. Рахмонов З.Х. Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика 2013. Т. 13. Вып. 4(2). С. 113 – 117.
10. Виноградов А.И. О числах с малыми простыми делителями // ДАН СССР. 1956. Т. 109. №4. С. 683 – 686.
11. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.

З.Х.РАМОНОВ

БАҶОИ СУММАИ КЎТОҶИ ҚИМАТИ ХАРАКТЕРҲО

Институти математикаи ба номи А.Чӯраевӣ

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Ҳангоми $y \geq q^{\frac{1}{3} + \varepsilon}$ ва $(\eta, q) = 1$ баҳои ғайритривиалии суммаи қиматҳои характери примитивӣ аз рӯи модули q дар пайдарпаи лағҷонидашудаи $n - \eta$, $x - y < n \leq x$, $(n, q) = 1$ гирифта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: баҳои ғайритривиалиӣ – характери Дирихле – ададҳои соддаи лағҷонидашуда – суммаи кӯтоҳи характерҳо.

Z.Kh.RAKHMONOV

ESTIMATION OF SHORT CHARACTER SUMS

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

Nontrivial estimate was obtained for sums of values of primitive character modulo q on the sequence of shifted numbers $n - \eta$, $xy < n \leq x$, $(n, q) = 1$ for $y \geq q^{\frac{1}{3} + \varepsilon}$ and $(\eta, q) = 1$.

Key words: Nontrivial estimate – Dirichlet character – Shifted primes – short character sums.

УДК 517.5

М.Ш.ШАБОЗОВ, Н.Ф.ОЛИФТАЕВ*

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ В L_2

Институт математики им. Дзюраева, АН Республики Таджикистан,

**Таджикский национальный университет*

Поступила в редакцию 15.10.2013 г.

Для τ -модулей непрерывности m -го порядка, введенных К.Г.Ивановым, рассматривается экстремальная задача отыскания точной константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина в пространстве L_2 . Вычислены значения различных n -поперечников классов функций, задаваемых усредненными с положительным весом значениями τ -модулей непрерывности r -ых производных функций, удовлетворяющих определенным ограничениям.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение – точные константы – неравенства типа Джексона-Стечкина – τ -модуль гладкости – аппроксимационная характеристика – n -поперечник.

1. Пусть \mathbb{N} — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; \mathbb{R}_+ — множество положительных чисел вещественной оси; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство 2π -периодических измеримых функций, суммируемых с квадратом на $[0, 2\pi]$, с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Адрес для корреспонденции: Шабозов Мирганд Шабозович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Институт математики АН РТ. E-mail: shabozov@mail.ru;
Олифтаев Нодир Фезилобекович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: nodir_89@inbox.ru

Хорошо известно, что если $f \in L_2$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

– формальное разложение f в ряд Фурье, то ее наилучшее приближение подпространством T_{2n-1} тригонометрических полиномов порядка не более $n-1$ в метрике пространства L_2 равно

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &= \inf \left\{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathfrak{T}_{n-1} \right\} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$S_{n-1}(f; x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

– частная сумма порядка $\leq n-1$ ряда Фурье функции f , а

$$\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f), \quad k \geq n, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Через $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$; $L_2^{(0)} = L_2$) обозначим множество всех функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых $(r-1)$ -я производная $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} = f$) абсолютно непрерывна, а r -я производная $f^{(r)} \in L_2$. Модулем непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$ называют величину

$$\omega_m(f; t)_2 = \sup \left\{ \|\Delta_h^m(f)\| : |h| \leq t \right\},$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f(x + ih)$$

– конечная разность m -го порядка функции f с шагом h .

Под неравенствами типа Джексона-Стечкина в рассматриваемом нормированном функциональном пространстве X понимают соотношения, в которых величина наилучшего приближения функции $f \in X$:

$$E_N(f)_X := E(f, \mathfrak{N}_N)_X = \inf \left\{ \|f - g\|_X : g \in \mathfrak{N}_N \right\}$$

заданным N -мерным подпространством $\mathfrak{N}_N \in X$ оценивается через модуль непрерывности самой функции или некоторой ее производной. При решении экстремальных задач теории аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве L_2 точные константы

$$\chi_{m,n,r}(t) := \sup \left\{ \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\omega_m(f^{(r)}; t/n)_2} : f \in L_2^{(r)}; f^{(r)} \neq \text{const} \right\} \quad (2)$$

в неравенствах типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \chi n^{-r} \omega_m(f^{(r)}; t/n)_2, \quad f \in L_2^{(r)}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad t > 0$$

рассматривались многими авторами (см., например, [1,2,3,4,5] и приведенную там литературу). Так, в [5] изучалась аппроксимационная характеристика

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi; t) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^t \omega_m^p(f^{(r)}; \tau)_2 \varphi(\tau) d\tau \right)^{1/p}}, \quad (3)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq \pi/n$, $\varphi(t) \geq 0$ – суммируемая на $(0, h]$ функция и для $0 < p \leq 2$ доказаны неравенства

$$\left\{ A_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1} \leq X_{m,n,r,p}(\varphi; h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} A_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}, \quad (4)$$

$$A_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}, \quad k \geq n.$$

Отметим, что неравенства (4) для $\varphi(t) \equiv 1$ получено в [4], а при $p = 2$ ранее получены в [2]. Здесь мы приводим обобщение неравенства (4) для некоторых других характеристик гладкостей функции $f \in L_2$.

2. В работах [6,7] Камен Г.Иванов ввёл в рассмотрение τ -модули гладкости и изучил их свойства, а С.Б.Вакарчук [8] решил ряд экстремальных задач, а также нашел точные значения различных n -поперечников для некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 .

Пусть $\lambda(x)$ – произвольная положительная 2π -периодическая функция, а $w(x)$ – непрерывная неотрицательная функция периода 2π . τ -модулем гладкости m -го порядка функции $f \in L_{\max(p,p')} [0, 2\pi]$ ($p, p' \geq 1$) называют величину

$$\tau_m(f, w; \lambda)_{p, p'} = \left\| w(\cdot) \omega_m(f, \cdot; \lambda(\cdot))_{p'} \right\|_p,$$

где

$$\omega_m(f, x; \lambda(x))_{p'} = \left\{ \frac{1}{2\lambda(x)} \int_{-\lambda(x)}^{\lambda(x)} |\Delta_h^m f(x)|^{p'} dh \right\}^{1/p'}.$$

Условимся, что если $w(x) \equiv 1$, то вместо $\tau_m(f, 1; \lambda)_{p, p'}$ будем писать просто $\tau_m(f; \lambda)_{p, p'}$. В [7] доказано, что если, например, $\lambda(x) \equiv u = \text{const} > 0$, $f \in L_p[0, 2\pi]$, $w(x) \equiv 1$ и $p' \in [0, p], 1 < p < \infty$, то

$$\tau_m(f; u)_{p, p'} \asymp \omega_m(f; u)_p, \quad (5)$$

где символ \asymp означает соотношение слабой эквивалентности.

В связи с характеристикой (3) и неравенством (4) определенным интерес представляет отыскание точного значения величины

$$\chi_{n, m, r, q}(\varphi; h)_{p'} = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \tau_m^q(f^{(r)}; t)_{p', 2} \varphi(t) dt \right)^{1/q}}, \quad (6)$$

где $1 \leq p' \leq 2$, $0 < q \leq 2$, $h > 0$ и $\varphi(t)$ – суммируемая на $[0, h]$ функция.

Следуя работе [8], введём обозначение

$$\mathcal{J}_m(v) = \int_0^v (1 - \cos \tau)^m d\tau. \quad (7)$$

Основным результатом работы является следующая общая

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq \pi/n$, $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$ – суммируемая на $[0, h]$ функция. Тогда имеют место неравенства

$$\frac{1}{\beta_{n, m, r, q}(\varphi; h)} \leq \chi_{n, m, r, q}(\varphi; h)_2 \leq \frac{1}{\inf_{n \leq k < \infty} \beta_{k, m, r, q}(\varphi; h)}, \quad (8)$$

$$\beta_{k, m, r, q}(\varphi; h) := \left(k^{rq} \int_0^h ((kt)^{-1} \mathcal{J}_m(kt))^{q/2} \varphi(t) dt \right)^{1/q}. \quad (9)$$

Из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1. Пусть $k, n, m \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q \leq 2$, $\varphi(t) \geq 0$ – суммируемая на $(0, h]$ функция, $0 < h \leq \pi / n$. Тогда, если

$$\inf\{\beta_{k,m,r,q}(\varphi; h) : k \geq n\} = \beta_{n,m,r,q}(\varphi; h), \quad (10)$$

то имеет место соотношение

$$\mathcal{X}_{n,m,r,q}(\varphi; h)_2 = \{\beta_{n,m,r,q}(\varphi; h)\}^{-1}. \quad (11)$$

В частности, (11) выполняется для весовой функции

$$\varphi(t) := \varphi_1(t) = (kt)^{q/2}, \quad n \leq k < \infty, \quad k, n \in \mathbb{N} \text{ при } 1/r < q \leq 2, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что проверка равенства (10) для всех неотрицательных суммируемых на отрезке $[0, h]$ весовых функций $\varphi(x)$ затруднительна, поэтому воспользуемся более узким классом дифференцируемых функций.

Лемма 1. Пусть весовая функция $\varphi(t)$, заданная на отрезке $[0, h]$, является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой на нем. Если при некоторых $r \in \mathbb{N}$, $1/r \leq q \leq 2$ и любых $t \in [0, h]$ выполнено неравенство

$$(rq - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0, \quad (12)$$

то справедливо соотношение (10) и имеет место равенство (11).

В равенстве (9) положим $h = a/n$, где $0 < a \leq \pi$, $\varphi_*(t) = g(nt)$, $g(u) \geq 0$ – суммируемая неэквивалентная нулю на отрезке $[0, a]$ функция. Имеем

$$\begin{aligned} \beta_{k,m,r,q}(\varphi_*; a/n) &= \left\{ k^{rq} \int_0^{a/n} ((kt)^{-1} \mathcal{J}_m(kt))^{q/2} g(nt) dt \right\}^{1/q} = \\ &= n^{r-\frac{1}{q}} \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^{rq} \int_0^a \left(\left(\frac{kt}{n} \right)^{-1} \mathcal{J}_m \left(\frac{kt}{n} \right) \right)^{q/2} g(t) dt \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \beta_{k,m,r,q} \left(\varphi_*; \frac{a}{n} \right) : n \leq k < \infty \right\} &= \\ = n^{r-\frac{1}{q}} \inf_{x \geq 1} \left\{ x^{rq} \int_0^a ((xt)^{-1} \mathcal{J}_m(xt))^{q/2} g(t) dt \right\}^{1/q}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя равенство (13) и утверждение теоремы 1, получаем

Следствие 2. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $k, n \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq 2$, $0 < b \leq \pi$, $g(t) \geq 0$ – суммируемая на отрезке $[0, a]$ функция. Тогда имеют место двойные неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{\{\mu_{m,r,q}(a; g; 1)\}^{1/q}} &\leq \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^a \tau_m^q(f^{(r)}; t/n)_{2,2} g(t) dt \right)^{1/q}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\left\{ \inf_{x \geq 1} \mu_{m,r,q}(a; g; x) \right\}^{1/q}}, \end{aligned}$$

где

$$\mu_{m,r,q}(a; g; x) := x^{rq} \int_0^a ((xt)^{-1} \mathcal{J}_m(xt))^{q/2} g(t) dt.$$

Если при этом функция $g(t)$ такова, что

$$\inf \{ \mu_{m,r,q}(a; g; x) : x \geq 1 \} = \mu_{m,r,q}(a; g; 1),$$

то справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^a \tau_m^q(f^{(r)}; t/n)_{2,2} g(t) dt \right)^{1/q}} = \frac{1}{\{\mu_{m,r,q}(a; g; 1)\}^{1/q}}. \quad (14)$$

Следствие 3. Пусть $0 < a \leq \pi$; $n, k, r \in \mathbb{N}$. Если для некоторого $q \in (0, 2]$ функция $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} t^{rq-1} g_1(t)$, где $g_1(t) \geq 0$ – невозрастающая суммируемая на отрезке $[0, a]$ функция, то выполняется равенство

$$\inf \{ \mu_{m,r,q}(a; t^{rq-1} g_1(t); x) : x \geq 1 \} = \mu_{m,r,q}(a; t^{rq-1} g_1(t); 1) \quad (15)$$

и справедливо соотношение

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^a \tau_m^q(f^{(r)}; t/n)_{2,2} t^{rq-1} g_1(t) dt \right)^{1/q}} = \frac{1}{\{\mu_{m,r,q}(a; t^{rq-1} g_1(t); 1)\}^{1/q}}. \quad (16)$$

В случае $m = 1$ можно получить более обозримое утверждение.

Теорема 2. Пусть $m = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq 3\pi / (4n)$, $\varphi(t)$ – неотрицательная суммируемая на отрезке $(0, h]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{X}_{n,1,r,q}(\varphi;h)_2 = \left(n^{rq} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{q/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}. \quad (17)$$

Согласно определению (6), равенство (17) перепишем в эквивалентном виде

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{\sqrt{2} n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; t)_{2,2} \varphi(t) dt \right)^{1/q}} = \left(\int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{q/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}. \quad (18)$$

Хорошо известно, что для функции $f \in L_2^{(r)}$ ее промежуточные производные $f^{(r-s)}$ ($s = 1, 2, \dots, r-1$) принадлежат пространству L_2 . Представляет интерес отыскание точных верхних граней величины $E_{n-1}(f^{(r-s)})_2$ на классе $L_2^{(r)}$. Подобная задача решалась в работе [9], когда гладкостная характеристика функций $f \in L_2^{(r)}$ задавалась специальным модулем непрерывности m -го порядка. Используя соотношение (18), докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $s = \overline{0, r-1}$; $0 < q \leq 2$; $0 < h \leq 3\pi / (4n)$; $\varphi(t) \geq 0$ – суммируемая на отрезке $(0, h]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{\sqrt{2} n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; t)_{2,2} \varphi(t) dt \right)^{1/q}} = \left(\int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{q/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}. \quad (19)$$

Если $n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $s = \overline{0, r-1}$; $q = 2$; $0 < h \leq 3\pi / (4n)$ и $\varphi(t) \equiv 1$, то

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int_0^h \tau_1^2(f^{(r)}; t)_{2,2} dt \right)^{1/2}} = \left\{ \frac{n}{2(nh - \text{Si}(nh))} \right\}^{1/2}, \quad (20)$$

где $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ – интегральный синус. Если же $n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $s = \overline{0, r-1}$;

$q = 2$; $0 < h \leq 3\pi / (4n)$ и $\varphi(t) \equiv t$, то справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int_0^h t \tau_1^2(f^{(r)}; t)_{2,2} dt \right)^{1/2}} = \frac{1}{h \sqrt{1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2}}. \quad (21)$$

3. Всюду далее через $b_n(\mathfrak{N}; L_2)$, $d_n(\mathfrak{N}; L_2)$, $\delta_n(\mathfrak{N}; L_2)$, $d^n(\mathfrak{N}; L_2)$, $\Pi_n(\mathfrak{N}; L_2)$ обозначим соответственно *бернштейновский*, *колмогоровский*, *линейный*, *гельфандовский*, *проекционный* n -поперечники. Положим еще

$$E_{n-1}(\mathfrak{N}) := \sup\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{N}\}.$$

Символом $W_{q,1}^{(r)}(h; \varphi)$; $1/r < q \leq 2$; $r \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+$ и произвольной неотрицательной суммируемой на отрезке $(0, h]$ функции $\varphi(x)$ выполняется ограничение

$$\left\{ \int_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; u)_{2,2} \varphi(u) du \right\}^{1/q} \leq 1.$$

Теорема 4. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1/r < q \leq 2$, $0 < h \leq 3\pi / (4n)$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(W_{q,1}^{(r)}(h; \varphi); L_2) &= \lambda_{2n-1}(W_{q,1}^{(r)}(h; \varphi); L_2) = E_{n-1}(W_{q,1}^{(r)}(h; \varphi)) = \\ &= 2^{-1/2} n^{-r} \left\{ \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2} \varphi(t) dt \right\}^{-1/q}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n -поперечников.

Следствие 4. В условиях теоремы 4 при $q = 2$ и $\varphi(t) \equiv 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(W_{2,1}^{(r)}(h; 1); L_2) &= \lambda_{2n-1}(W_{2,1}^{(r)}(h; 1); L_2) = \\ &= E_{n-1}(W_{2,1}^{(r)}(h; 1)) = n^{-r} \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где $Si(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ – интегральный синус.

Следствие 5. В условиях теоремы 4 при $q = 2$, $\varphi_0(t) = t$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(W_{2,1}^{(r)}(h; \varphi_0); L_2) &= \lambda_{2n-1}(W_{2,1}^{(r)}(h; \varphi_0); L_2) = E_{n-1}(W_{2,1}^{(r)}(h; \varphi_0)) = \\ &= n^{-r+\frac{2}{p}} \left\{ \left(\frac{nh}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2 \right\}^{-1/2}, \quad 0 < nh \leq \pi. \end{aligned}$$

В частности, при $nh = \pi$ имеем

$$\begin{aligned}\lambda_{2n}(W_{2,1}^{(r)}(\pi/n; \varphi_0); L_2) &= \lambda_{2n-1}(W_{2,1}^{(r)}(\pi/n; \varphi_0); L_2) = \\ &= E_{n-1}(W_{2,1}^{(r)}(\pi/n; \varphi_0)) = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi^4 - 16}} \cdot n^{-r + \frac{2}{p}}.\end{aligned}$$

Следствие 6. Если выполнены условия теоремы 4, то выполняются следующие равенства

$$\begin{aligned}\sup\{|a_n(f)| : f \in W_{q,1}^{(r)}(h; 1)\} &= \sup\{|b_n(f)| : f \in W_{q,1}^{(r)}(h; 1)\} = \\ &= 2^{-1/2} n^{-r + \frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt \right\}^{-1/q}.\end{aligned}$$

В частности, при $q = 2$

$$\sup\{|a_n(f)|, |b_n(f)| : f \in W_{2,1}^{(r)}(\pi/n; 1)\} = n^{-r} \left\{ \frac{n}{2(nh - \text{Si}(nh))} \right\}^{-1/2}.$$

Следствие 7. Если выполнены условия теоремы 4, то при $q = 2$, $\varphi_o(t) = t$ и $0 < nh \leq \pi$ имеют место равенства

$$\sup\{|a_n(f)|, |b_n(f)| : f \in W_{2,1}^{(r)}(h; \varphi_o)\} = n^{-r + \frac{2}{p}} \left\{ \left(\frac{nh}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2 \right\}^{-1/2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки, 1979, т.25, №2, с.217-223.
2. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки, 1978, т. 24, №6, с. 785–792.
3. Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 // Мат. заметки, 1986, т.39, №5, с.651-664.
4. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Мат. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
5. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки, 2011, т.90, №5, с. 764–775.
6. Ivanov Kamen G. On a new characteristic of functions. I // Сердика Българ. Мат. Списание, 1982, т.8, №3, с. 262–279.
7. Ivanov Kamen G. On a new characteristic of functions. II // Direct and converse theorems for the best algebraic approximation in $C[-1; 1]$ and $L_p[-1; 1]$ Сердика Българ. Мат. Студ, 1983, т.5, с. 151-163.

8. Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точных значениях их n -поперечников // Мат. заметки, 2001, т.70, №3, с. 334-345.
9. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки, 2012, т.92, №4, с.497-514.

М.Ш.ШАБОЗОВ, Н.Ф.ОЛИФТАЕВ*

НАЗДИККУНИИ БЕХТАРИН ВА ҚИМАТИ АНИҚИ ҚУТРҲО БАРОИ БАЪЗЕ СИНФИ ФУНКСИЯҲОИ ДАВРӢ ДАР ФАЗОИ L_2

*Институти математикаи ба номи А.Чураеви,
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,
Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Барои τ -модулҳои бефосилагии тартиби m -ум, ки К.Г.Иванов дар илм дохил карда аст, масъалаи ҳисобкунии доимии аниқ дар нобаробарии намуди Чексон-Стечкин дар фазои L_2 дида баромада шудааст. Қимати аниқи n -қутрҳо барои синфи функсияҳои ба воситаи вазни мусбати қимати миёнаи τ -модулҳои бефосилагии тартиби r -уми ҳосилаи функсияҳо, ки шартҳои муайяно қаноат мекунанд, ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарини полиномиалӣ – доимии аниқ – нобаробарии намуди Чексон-Стечкин – τ -модулҳои бефосилагӣ – характеристикаи аппроксиматсионӣ – n -қутрҳо.

M.SH.SHABOZOV, N.F.OLIFTAEV*

THE BEST APPROXIMATION AND AN EXACT VALUES OF WIDTHS FOR SOME CLASSES PERIODIC FUNCTIONS IN L_2 SPACE

*A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republik Tajikistan,
Tajik National University

For the τ -modulus of continuity of m -th order, formulated by K.G.Ivanov was solved the problem of calculation the exact values of constant in the inequalities of Jackson-Stechkin type in L_2 space. The exact values of n -widths for the class of functions which are given by averaged positive weights with the values of τ -modulus of continuity of the r -order derivatives, satisfying a certain restrictions are calculated

Key words: best polynomial approximations – exact constant – Jackson’s inequality type – τ -modulus of continuity – approximative characteristic – n -widths.

УДК 517.5

К.ТУХЛИЕВ

ТОЧНЫЕ ВЕРХНИЕ ГРАНИ ОТКЛОНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ФУНКЦИЙ ОТ ИХ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДА ФУРЬЕ- ЧЕБЫШЁВА
В ПРОСТРАНСТВЕ L_2 . I.

Худжандский государственный университет им. Б.Гафурова
Поступила в редакцию 03.09.2013 г.

Даны точные оценки скорости сходимости ряда Фурье-Чебышёва на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся обобщенным модулем непрерывности m -го порядка в пространстве $L_2 := L_2((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1; 1])$. Вычислены точные верхние грани отклонений заданных классов функций от их частных сумм ряда Фурье-Чебышёва в пространстве L_2 . Найдены точные значения n -поперечников классов функций, определенных при помощи осредненных модулей непрерывности m -го порядка.

Ключевые слова: оператор обобщенного сдвига – модуль непрерывности m -го порядка – верхние грани – ряд Фурье-Чебышёва – дифференциальный оператор.

1. Пусть \mathbb{N} – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$;
 $L_2 := L_2\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}; [-1; 1]\right)$ – пространства суммируемых с квадратом функций $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ с весом Чебышёва $1/\sqrt{1-x^2}$ и конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\int_{-1}^1 \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)^{1/2}.$$

Адрес для корреспонденции: Тухлиев Камаридин. 735700, Республика Таджикистан, г.Худжанд, мкр. 20, Худжандский государственный университет. E-mail: kataridin.t54@mail.ru

Следуя работе [1], в пространстве L_2 введём оператор

$$F_h f(x) = \frac{1}{2} \left[f \left(x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h \right) + f \left(x \cos h - \sqrt{1-x^2} \sin h \right) \right], \quad (1)$$

который будем называть *оператором обобщенного сдвига*.

В [1] введен специальный модуль непрерывности следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned} \Delta_h(f; x) &= F_h f(x) - f(x) = (F_h - I)f(x), \\ \Delta_h^m(f; x) &= \Delta_h(\Delta_h^{m-1}(f; \cdot); x) = (F_h - I)^m f(x) = \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x), \end{aligned}$$

где $F_h^0 f(x) \equiv f(x)$, $F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x))$, $k=1, 2, \dots, m$; $m \in \mathbb{N}$ и I – единичный оператор в пространстве L_2 .

Определим модуль непрерывности m -го порядка равенством

$$\Omega_m(f; t) = \sup \left\{ \left\| \Delta_h^m(f; \cdot) \right\| : |h| \leq t \right\}. \quad (2)$$

Легко проверить, что функция $\Omega_m(f, t)$ обладает всеми свойствами модуля непрерывности m -го порядка (см., например, [2, с.157-170]).

Пусть далее

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k \arccos x), k=1, 2, \dots$$

– ортонормированная система многочленов Чебышёва в пространстве L_2 . Тогда, как хорошо известно,

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x), \quad c_k(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) dx \quad (3)$$

есть ряд Фурье-Чебышёва функции $f \in L_2$, а $S_{n-1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$ – частичные суммы ряда (3). Известно [3, с.47], что

$$\|f\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f) \right)^{1/2}, \quad \|f - S_{n-1}(f)\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right)^{1/2}.$$

Пусть теперь $\mathcal{D} = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка. В работе [1] доказано, что для произвольных функций $f \in L_2$, имеющих обобщённые производные в смысле Леви [4, с.172], коэффициенты Фурье-Чебышёва ряда (3) удовлетворяют соотношения

$$c_k(f) = (-1)^k k^{-2r} c_k(\mathcal{D}^r f), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\mathcal{D}^0 f = f$, $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $r = 1, 2, \dots$. Там же доказано, что для указанных коэффициентов также имеют место равенства

$$c_k(F_h f) = \cos kh \cdot c_k(f), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где функция $F_h f$ определена равенством (1).

Обозначим через $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$; $L_2^{(0)} \equiv L_2$) – класс функций $f \in L_2$, у которых $\mathcal{D}^r f$ принадлежит пространству L_2 . Применением равенства Парсеваля в [1] для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ получено соотношение

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r f)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f). \quad (4)$$

В дальнейшем полагаем, что для произвольной $f \in L_2^{(r)}$, $\mathcal{D}^r f \neq const$.

Обозначим через $\mathcal{E}_{n-1}(f)$ наилучшее приближение функций $f \in L_2$ элементами подпространства \mathcal{P}_n – алгебраических полиномов степени $\leq n$ в пространстве L_2 :

$$\mathcal{E}_{n-1}(f) = \inf \{ \|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_n \}.$$

Хорошо известно [3], что

$$\mathcal{E}_{n-1}(f) = \|f - S_{n-1}(f)\|. \quad (5)$$

Задача состоит в том, что если \mathfrak{M} – некоторый класс функций, принадлежащий L_2 , то требуется найти верхнюю грань

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M}) = \sup \{ \mathcal{E}_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M} \}. \quad (6)$$

Следующая теорема является в определенном смысле аналогом теоремы 1 из работы Н.И.Черныха [5] для пространства $L_2((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1; 1])$.

Теорема 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in L_2^{(r)}$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(f) \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) \sin nh dh \right)^m. \quad (7)$$

Доказательство. Применяя неравенства Гельдера для рядов, при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$, для произвольной $f \in L_2^{(r)}$, с учетом равенства (4) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \cos kh &= \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \cos kh = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) (1 - \cos kh) = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^{2-1/m} |c_k(f)|^{1/m} (1 - \cos kh) \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right)^{1-1/(2m)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} c_k^2(f) \right)^{1/(2m)} \leq \\ &\leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f) \right)^{1/(2m)} = \\ &= (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \left\| \Delta_h^m(\mathcal{D}^r f) \right\|^{1/m} \leq \\ &\leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h). \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f) \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \cos kh. \quad (8)$$

Умножая обе части неравенства (8) на $\sin nh$ и интегрируя по аргументу h в промежутке $[0, \pi/n]$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \mathcal{E}_{n-1}^2(f) &\leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) \sin nh dh + \\ &+ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \int_0^{\pi/n} \sin nh \cos kh dh. \end{aligned} \quad (9)$$

Но так как

$$\int_0^{\pi/n} \sin nh \cos kh dh = \begin{cases} 0, & \text{если } k = n, \\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2n}{k^2 - n^2} \cdot \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right), & \text{если } k > n, \end{cases}$$

то второе слагаемое в правой части неравенства (9) неположительно, а потому из (9) имеем

$$\frac{2}{n} \mathcal{E}_{n-1}^2(f) \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) \sin nh \, dh,$$

откуда

$$\mathcal{E}_{n-1}^{1/m}(f) \leq n^{-2r/m+1} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) \sin nh \, dh$$

или, что то же,

$$\mathcal{E}_{n-1}(f) \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) \sin nh \, dh \right)^m.$$

Из теоремы 1 сразу вытекает

Следствие 1. В утверждении теоремы 1 имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t) \sin nt \, dt \right)^m} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^m. \quad (11)$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (10) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}(f) &= \|f - S_{n-1}(f)\| \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t) \sin nt \, dt \right)^m = \\ &= \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^m \left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t) \sin nt \, dt \right)^m, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t) \sin nt \, dt \right)^m} \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^m, \quad (12)$$

и поскольку неравенство (12) верно для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, то, переходя к верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$, будем иметь

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t) \sin nt \, dt \right)^m} \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^m. \quad (13)$$

С другой стороны, для функции

$$f_0(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x) = T_n(x),$$

имеем

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r f_0)\|^2 = (1 - \cos nh)^{2m} n^{4r}, \quad 0 < h \leq \pi/n,$$

$$\|f_0 - S_{n-1}(f_0)\| = \|f_0\| = 1,$$

а потому

$$\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; t) = n^{2r/m} (1 - \cos nt), \quad 0 < h \leq \pi/n.$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; t) \sin nt \, dt \right)^m &= \left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} n^{2r/m} (1 - \cos nt) \sin nt \, dt \right)^m = \\ &= \left(n^{2r/m} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos t) \sin t \, dt \right)^m = n^{2r} \left(\frac{2}{\pi} \right)^m, \end{aligned}$$

$$\|f_0 - S_{n-1}(f_0)\|^2 = \|T_n\|^2 \equiv 1.$$

Используя полученные соотношения, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t) \sin nt \, dt \right)^m} &\geq \\ &\geq \frac{n^{2r} \|f_0 - S_{n-1}(f_0)\|}{\left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; t) \sin nt \, dt \right)^m} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^m. \end{aligned} \quad (14)$$

Сравнивая неравенства (13) и (14) получаем требуемое равенство (11), чем и завершаем доказательство следствия 1.

Теорема 2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_2^{(r)}$ и $0 \leq t \leq \pi/n$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(f) \leq \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^m \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right)^m. \quad (15)$$

Доказательство. Интегрируя неравенство (9) по аргументу h в пределах от 0 до t ($0 \leq t \leq \pi/n$), получаем

$$t \mathcal{E}_{n-1}^2(f) \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \frac{\sin kt}{k}. \quad (16)$$

Отсюда, поделив обе части неравенства (16) на t , будем иметь

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f) \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \frac{\sin kt}{kt}. \quad (17)$$

Воспользуясь тем фактом, что [6]

$$\max_{k \geq n} \frac{\sin kt}{kt} = \frac{\sin nt}{nt}, \quad (18)$$

из неравенства (17) запишем

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f) \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right) \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh,$$

откуда сразу следует, что

$$\left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right) (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{1/m} \leq \frac{1}{n^{2r/m}} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh$$

или, что то же,

$$\mathcal{E}_{n-1}(f) \leq \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^m \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right)^m, \quad (19)$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Следствие 2. При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_2^{(r)}$ и $0 < t \leq \pi/n$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right)^m} = \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{-m}.$$

В частности,

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right)^m} = 1.$$

Доказательство. Из неравенства (19), справедливого для произвольной $f \in L_2^{(r)}$, получаем оценку сверху

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right)^m} \leq \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{-m}, \quad (20)$$

и так как для функции $f_0(x) := T_n(x) = \sqrt{2/\pi} \cos(n \arccos x)$

$$\|f_0 - S_{n-1}(f_0)\| \equiv 1,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; h) dh = n^{2r/m} \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos nt) dt = n^{2r/m} \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right), \quad 0 < t \leq \frac{\pi}{n},$$

то мы имеем оценку снизу

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right)^m} \geq \\ & \geq \frac{n^{2r} \|f_0 - S_{n-1}(f_0)\|}{\left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; h) dh \right)^m} = \frac{n^{2r}}{n^{2r} \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^m} = \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{-m}. \end{aligned} \quad (21)$$

Сравнивая неравенства (20) и (21), получаем утверждение следствия 2.

Отметим, что теорема 2 и следствие 2 в некотором смысле являются обобщением результата С.Б.Вакарчука [7] о полиномиальном приближении 2π -периодических функций, принадлежащих пространству $L_2[0, 2\pi]$, на случай приближения функций, принадлежащих пространству $L_2((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1; 1])$. Имеет место также

Теорема 3. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_2^{(r)}$ и $0 < t \leq \pi/n$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(f) \leq \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nt} \sin \frac{nt}{2} \right)^2 \right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{2}{t^2} \int_0^t (t-\tau) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau \right)^m.$$

Доказательство. В самом деле, интегрируя по t в пределах от $t=0$ до $t=u$ в обеих частях неравенства (16) получаем

$$\frac{u^2}{2} \mathcal{E}_{n-1}^2(f) \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \int_0^u \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh dt + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \frac{1 - \cos ku}{k^2}.$$

Поделив обе части полученного неравенства на $u^2/2$ и воспользуясь элементарным тождеством

$$\int_0^u \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh dt = \int_0^u (u-t) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t) dt,$$

приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}^2(f) &\leq \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \left(\frac{2}{ku} \sin \frac{ku}{2} \right)^2 + \\ &+ (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} \frac{1}{n^{2r/m}} \cdot \frac{2}{u^2} \int_0^u (u-t) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Используя соотношение (18), из (22) выводим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}^2(f) &\left\{ 1 - \left(\frac{2}{nu} \sin \frac{nu}{2} \right)^2 \right\} \leq \\ &\leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} \frac{1}{n^{2r/m}} \cdot \frac{2}{u^2} \int_0^u (u-t) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$(\mathcal{E}_{n-1}(f))^{1/m} \leq \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nu} \sin \frac{nu}{2} \right)^2 \right\}^{-1} \frac{1}{n^{2r/m}} \cdot \frac{2}{u^2} \int_0^u (u-t) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t) dt.$$

Возведя обе стороны последнего неравенства в степень m , будем иметь

$$\mathcal{E}_{n-1}(f) \leq \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nu} \sin \frac{nu}{2} \right)^2 \right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{2}{u^2} \int_0^u (u-t) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t) dt \right)^m, \quad (23)$$

откуда и следует утверждение теоремы 3.

Замечание. Результат теоремы 3 является распространением результата работы [8] о приближении периодических дифференцируемых функций $f \in L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ тригонометрическими полиномами порядка $\leq 2n-1$ на случай приближения функции $f \in L_2^{(r)}((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1; 1])$ частными суммами Фурье-Чебышёва степени $\leq n-1$.

Следствие 3. В утверждении теоремы 3 справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r}(f)}{\left(\frac{2}{t^2} \int_0^t (t-\tau) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau \right)^m} = \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nu} \sin \frac{nu}{2} \right)^2 \right\}^{-m}. \quad (24)$$

Доказательство. Из неравенства (23) для произвольной $f \in L_2^{(r)}$ получаем оценку сверху

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{2}{t^2} \int_0^t (t-\tau) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau \right)^m} \leq \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nu} \sin \frac{nu}{2} \right)^2 \right\}^{-m}. \quad (25)$$

С целью получения оценки снизу, равную правой части (25), введем в рассмотрение функцию $f_0(x) = \sqrt{2/\pi} \cos(n \arccos x)$, для которой при доказательстве следствия 1 установили равенство

$$\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; t) = n^{2r/m} (1 - \cos nt), \quad 0 < t \leq \pi/n.$$

Далее, простой подсчет показывает, что

$$\left(\frac{2}{t^2} \int_0^t (t-\tau) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; \tau) d\tau \right)^m = n^{2r} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nt} \sin \frac{nt}{2} \right)^2 \right\}^m.$$

Воспользовавшись этой формулой, получаем оценку снизу

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{2}{t^2} \int_0^t (t-\tau) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau \right)^m} \geq \frac{n^{2r} \|f_0 - S_{n-1}(f_0)\|}{\left(\frac{2}{t^2} \int_0^t (t-\tau) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; \tau) d\tau \right)^m} =$$

$$= \frac{n^{2r}}{n^{2r} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nu} \sin \frac{nu}{2} \right)^2 \right\}^m} = \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nu} \sin \frac{nu}{2} \right)^2 \right\}^{-m}. \quad (26)$$

Сопоставляя неравенства (25) и (26), получаем требуемое равенство (24).

2. В этом пункте мы решаем задачу отыскания верхних граней приближения некоторых классов функций частичными суммами ряда Фурье-Чебышёва

$$S_{n-1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$$

в пространстве L_2 . С этой целью определим нужные нам классы функций посредством некоторой заданной мажоранты.

Пусть $\Phi(t)$ – произвольная непрерывная неубывающая на $[0, +\infty)$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Введем в рассмотрение следующие классы функций: $W_m^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$ – класс функций $f \in L_2^{(r)}$ ($r = 0, 1, \dots; L_2^{(0)} = L_2$), для которых при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство

$$\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t) \sin ntdt \leq \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right);$$

$W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$ — класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < h \leq \pi/n$ выполняется неравенство

$$\frac{2}{h^2} \int_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau \leq \Phi(h)$$

и, наконец, $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$ – аналогичный класс функций, для которых

$$\frac{1}{h} \int_0^h (h - \tau) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau \leq \Phi(h).$$

Имеют место следующие утверждения

Теорема 4. При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < h \leq \pi/n$ справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{1}{n^{2r}} \Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad (27)$$

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)) = \left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right)^{-m} \frac{1}{n^{2r}} \Phi^m(h), \quad (28)$$

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)) = \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}} \Phi^m(h). \quad (29)$$

Доказательство. Соотношения (27)-(29) доказываются по одной и той же схеме, поэтому мы докажем только равенство (29). В самом деле, используя определение класса $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$, из неравенства (23) для произвольной $f \in W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$ имеем

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \|f - S_{n-1}(f)\| : f \in W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi) \right\} &\leq \\ &\leq \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}} \Phi^m(h). \end{aligned} \quad (30)$$

Легко проверить, что функция

$$f_1(x) = \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}} \Phi^m(h) T_n(x),$$

где по-прежнему $T_n(x) = \sqrt{2/\pi} \cos(n \arccos x)$, $-1 \leq x \leq 1$ принадлежит классу $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$ и для этой функции

$$\|f_1 - S_{n-1}(f_1)\| = \|f_1\| = \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}} \Phi^m(h),$$

а потому мы имеем следующую оценку снизу

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \|f - S_{n-1}(f)\| : f \in W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi) \right\} &\geq \\ &\geq \|f_1 - S_{n-1}(f_1)\| = \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}} \Phi^m(h). \end{aligned} \quad (31)$$

Сравнивая оценку сверху (30) и оценку снизу (31), приходим к нужному нам неравенству (29), чем и завершаем доказательство теоремы 4.

Следствие 4. В утверждении теоремы 4, соответственно при $h = \pi / (2n)$ и $h = \pi / n$, выполняются равенства

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,\pi/(2n)}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)) = \left(\frac{\pi}{\pi - 2} \right)^m \frac{1}{n^{2r}} \Phi^m\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,\pi/n}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)) = \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \right)^m \frac{1}{n^{2r}} \Phi^m \left(\frac{\pi}{n} \right).$$

Автор благодарит профессора М.Ш.Шабозова за ценные замечания и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абилов В.А., Абилова Ф.В. – Журнал вычислительной математики и математической физики, 2002, т.42, №4, с.451-458.
2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977, 511 с.
3. Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962, 500 с.
4. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969, 480 с.
5. Черных Н.И. – Матем. заметки, 1967, т.2, №5, с.513-522.
6. Тайков Л.В. – Матем. заметки, 1976, т.20, №3, с.433-438.
7. Вакарчук С.Б. – Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.
8. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. – Analysis Mathematica, 2012, tomus 38, №2, pp.154-165.

К.ТУХЛИЕВ

САРҲАДИ АНИҚИ БОЛОИИ ТАМОИЛИ БАЪЗЕ СИНФИ ФУНКСИЯҲО АЗ СУММАИ ХУСУСИИ ҚАТОРИ ФУРЬЕ- ЧЕБЫШЁВ ДАР ФАЗОИ L_2 .

I

Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи Б.Ғафуров

Дар фазои $L_2 := L_2((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1; 1])$ баҳои аниқи суръати наздикшавии қатори Фурье-Чебышёв барои баъзе синфи функцияҳо, ки ба воситаи оператори дифференсиалии тартиби дуум ифода ёфта характеризиронида мешаванд, дода шудааст. Сарҳади аниқи болоии тамоили синфи функцияҳои додашуда аз суммаи хусусии қатори Фурье-Чебышёв дар фазои L_2 ёфта шудааст. Қимати аниқи n -кутрҳои синфи функцияҳо, ки ба воситаи модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби m -ум дода шудаанд, ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: оператори умумикардашудаи ғечиш – модули бефосилагии тартиби m -ум – сарҳадҳои болоӣ – қатори Фурье-Чебышёв – оператори дифференсиалӣ.

K.TUKHLIEV

**UPPER BOUNDS OF THE DEVIATIONS OF CERTAIN CLASSES
OF FUNCTIONS FROM THEIR PARTIAL SUMS OF FOURIER-CHEBYSHEV
IN L_2 SPACE. I**

B.G.Gafurov Khugand State University

The exact estimates of the rate of convergence of the Fourier-Chebyshev on some classes of functions defined by a differential operator of the second order and characterized by generalized modulus of continuity of the m th order in the space $L_2 := L_2((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1; 1])$ are given. The upper bounds of deviations given classes of functions from their partial sums of Fourier-Chebyshev in L_2 space are calculated. The exact values of the n -widths of classes of functions defined by the averaged modulus of continuity m th order are found.

Key words: generalized shift operator – modulus of continuity of m -order – upper bounds – Fourier-Chebyshev series – differentiation operator.

УДК 517.5

О.К.ФАРАЙДУНОВ

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ
ЭРМИТА-ЧЕБЫШЁВА

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 26.02.2013 г.

Найдены асимптотические точные оценки остатка квадратурной формулы Эрмита-Чебышёва для определенных интегралов на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(\sqrt{1-x^2})^{-1}$ по узлам в нулях многочленов Чебышёва первого рода на некоторых классах функций, задаваемых модулями непрерывности m -го порядка, характеризующимися оператором обобщённого сдвига.

Ключевые слова: квадратурная формула – модуль непрерывности – погрешность – дифференциальный оператор.

1. В настоящей работе решены задачи наилучшего приближения функций действительного переменного алгебраическими полиномами на отрезке $[-1; 1]$ с весом Чебышёва $\mu(x) := (\sqrt{1-x^2})^{-1}$ и даны их приложения к оценке погрешности квадратурной формулы Эрмита-Чебышёва на некоторых классах функций, задаваемых обобщёнными модулями непрерывности.

Пусть $L_2 := L_2(\mu(x); [-1, 1])$ – пространство суммируемых с квадратом функций f с весом $\mu(x) := (\sqrt{1-x^2})^{-1}$ и конечной нормой

$$\|f\| := \left(\int_{-1}^1 \mu(x) f^2(x) dx \right)^{1/2} < \infty.$$

В пространстве L_2 рассмотрим оператор

Адрес для корреспонденции: Фарайдунов Осим Косумиоевич. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: osim.88.tj@mail.ru

$$F_h f(x) = \frac{1}{2} [f(x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h) + f(x \cos h - \sqrt{1-x^2} \sin h)]. \quad (1)$$

Следуя работе В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [1], определим разности первого и высших порядков следующим образом:

$$\Delta_h(f; x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E)f(x),$$

$$\Delta_h^m(f; x) = \Delta_h[\Delta_h^{m-1}(f; \cdot); x] = (F_h - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где

$$F_h^0 f(x) = f(x), \quad F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x)), \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad m \in \mathbb{N}$$

и E – единичный оператор в пространстве L_2 . Определим модуль непрерывности m -го порядка равенством

$$\Omega_m(f; t) := \sup \left\{ \left\| \Delta_h^m(f; \cdot) \right\| : |h| \leq t \right\}. \quad (2)$$

Легко проверить, что функция (2) обладает всеми свойствами модуля непрерывности m -го порядка [2, с.157-170].

Пусть

$$\mathcal{D} = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx} \quad (3)$$

– дифференциальный оператор второго порядка. Операторы высших порядков определяют рекуррентным путём

$$\mathcal{D}^r := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}), \quad r = 2, 3, \dots$$

Указанные операторы можно интерпретировать обычными производными

$$\mathcal{D}^1 f(x) = (1-x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} - x \frac{df}{dx}; \quad \mathcal{D}^2 f(x) = \mathcal{D}(\mathcal{D}f), \dots$$

Через $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} = L_2$) обозначим множество функций $f(x)$, имеющих обобщённые производные в смысле Леви [3, с.172], таких, для которых $\|\mathcal{D}^r f\| < \infty$. Всюду далее обозначим через

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k \arccos x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

– ортонормированную систему многочленов Чебышёва первого рода в пространстве L_2 .
Для произвольной функции $f \in L_2$ запишем ее разложение в ряд Фурье-Чебышёва

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x), \quad c_k(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) dx, \quad (5)$$

где $T_k(x)$ – определены равенствами (4), а через

$$S_{n-1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$$

обозначим частичные суммы ряда (5). Если \mathcal{P}_n – множество всех алгебраических многочленов степени $\leq n$, то согласно теореме Теплера [4, с.307] получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}(f) &= \inf \{ \|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты $c_k(f)$ определены во втором формуле (5).

Отметим, что последовательное применение оператора (3) к полиномам Чебышёва (4) приводит к равенствам

$$\mathcal{D}T_k(x) = -k^2 T_k(x), \dots, \mathcal{D}^r T_k(x) = (-1)^r k^{2r} T_k(x). \quad (7)$$

В [1], используя равенства (7), доказано, что между коэффициентами Фурье-Чебышёва $c_k(f)$ ряда (5) функции $f \in L_2$ и соответствующими коэффициентами разложения в ряд Фурье-Чебышёва $\mathcal{D}^r f$ имеет место соотношение

$$c_k(f) = (-1)^r k^{-2r} c_k(\mathcal{D}^r f), \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Там же доказано, что между коэффициентами $c_k(f)$ и соответствующими коэффициентами $c_k(F_h f)$ оператора сдвига (1) имеет место следующая связь

$$c_k(F_h f) = \cos kh \cdot c_k(f), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Воспользуясь равенствами (7) – (9), для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ в предположении, что $\mathcal{D}^r f \neq \text{const}$, легко вывести соотношение

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r f)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f). \quad (10)$$

Теорема 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in L_2^{(r)}$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r-m} \cdot \mathcal{E}_{n-1}(f)}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right)^m} = \left(\frac{2}{\pi - 2} \right)^m. \quad (11)$$

Доказательство. В принятых нами обозначениях, из доказательства леммы 3 работы [1], для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ легко вывести следующее неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f) \leq \left(\mathcal{E}_{n-1}^2(f) \right)^{1-1/2m} n^{-2r/m} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \cos kh. \quad (12)$$

Интегрируя обе части неравенства (12) по аргументу h от 0 до t , получаем

$$t \mathcal{E}_{n-1}^2(f) \leq \left(\mathcal{E}_{n-1}^2(f) \right)^{1-1/2m} n^{-2r/m} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \frac{\sin kt}{k}.$$

Поделив обе части полученного неравенства на t и пользуясь тем, что при $0 < nt \leq \pi/2$ имеет место неравенство

$$\max_{k \geq n} \frac{\sin kt}{kt} = \frac{\sin nt}{nt},$$

будем иметь

$$\left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right) \mathcal{E}_{n-1}^2(f) \leq \left(\mathcal{E}_{n-1}^2(f) \right)^{1-1/2m} n^{-2r/m} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh. \quad (13)$$

Из (13) получаем

$$\left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right) \left(\mathcal{E}_{n-1}(f) \right)^{1/m} \leq \frac{1}{n^{2r/m}} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh,$$

или, что то же,

$$\mathcal{E}_{n-1}(f) \leq \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \cdot \left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right)^m. \quad (14)$$

В правой части (14), полагая $t = \pi / (2n)$, получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f) \leq \left\{ \frac{2}{\pi - 2} \right\}^m \cdot \frac{1}{n^{2r-m}} \cdot \left(\int_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right)^m. \quad (15)$$

Оценку сверху получаем из неравенства (15)

$$\frac{n^{2r-m} \mathcal{E}_{n-1}(f)}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right)^m} \leq \left(\frac{2}{\pi-2} \right)^m. \quad (16)$$

Так как для функции $f_0(x) := T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x)$

$$\mathcal{E}_{n-1}(f_0) := \|f_0 - S_{n-1}(f_0)\| = \|f_0\| = \|T_n\| = 1, \quad (17)$$

то мы имеем

$$\int_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; h) dh = n^{2r/m} \int_0^{\pi/(2n)} (1 - \cos nh) dh = n^{2r/m-1} \cdot \frac{\pi-2}{2}. \quad (18)$$

Учитывая равенства (17) и (18), имеем:

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r-m} \mathcal{E}_{n-1}(f)}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right)^m} &\geq \frac{n^{2r-m} \mathcal{E}_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; h) dh \right)^m} = \\ &= \frac{n^{2r-m}}{\left(n^{2r/m-1} (\pi-2) / 2 \right)^m} = \left(\frac{2}{\pi-2} \right)^m. \end{aligned} \quad (19)$$

Сопоставив оценки (16) и (19), получим требуемое равенство (11), чем и завершим доказательство теоремы 1. Из доказанной теоремы вытекает следующее

Следствие. В условиях теоремы 1 имеет место двойное неравенство

$$1 \leq \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r} \mathcal{E}_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f; \pi/(2n))} \leq \left(\frac{\pi}{\pi-2} \right)^m. \quad (20)$$

Доказательство. Из неравенства (15), пользуясь тем, что модуль непрерывности $\Omega_m(f, t)$ является монотонно возрастающая функция, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}(f) &\leq \left\{ \frac{2}{\pi-2} \right\}^m \cdot \frac{1}{n^{2r-m}} \cdot \left(\frac{\pi}{2n} \right)^m \cdot \Omega_m \left(\mathcal{D}^r f; \frac{\pi}{2n} \right) = \\ &= \left(\frac{\pi}{\pi-2} \right)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \cdot \Omega_m \left(\mathcal{D}^r f; \frac{\pi}{2n} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Из неравенства (21) следует оценка сверху

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r} \cdot \mathcal{E}_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f; \pi / (2n))} \leq \left(\frac{\pi}{\pi - 2} \right)^m. \quad (22)$$

Так как для рассмотренной в теореме 1 экстремальной функции

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x) \in L_2^{(r)}, \quad \mathcal{E}_{n-1}(f_0) = 1,$$

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0; h) = n^{2r} (1 - \cos nh)^m, \quad \Omega_m(\mathcal{D}^r f_0; \pi / (2n)) = n^{2r},$$

то мы имеем оценку снизу

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r} \mathcal{E}_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f; \pi / (2n))} \geq \frac{n^{2r} \mathcal{E}_{n-1}(f_0)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0; \pi / (2n))} = \frac{n^{2r}}{n^{2r}} = 1. \quad (23)$$

Из оценки сверху (20) и оценки снизу (23) следует двойное неравенство (18) и этим доказательство следствия завершается.

2. Дадим теперь приложение теоремы 1 к оценке погрешности квадратурной формулы Эрмита-Чебышёва.

Рассматривается квадратурная формула Эрмита-Чебышёва

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right) + R_n(f), \quad (24)$$

по узлам в нулях многочленов Чебышёва первого рода для некоторых классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности высшего порядка, характеризующихся операторами обобщённого сдвига.

Хорошо известно, что квадратурная формула (24) имеет наивысшую алгебраическую степень точности, то есть формула (24) точна для многочленов степени $\leq 2n-1$. Формула (24) имеет равные коэффициенты, а потому чаще используется в задачах численного анализа и теории приближения функций (см., например, монографии [5] и [6]).

Рассмотрим следующий класс функций. Пусть $\Phi(t)$ – неубывающая на \mathbb{R}_+ функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Через $W_m^{(r)} L_2(D, \Phi)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in (0, \pi]$ выполняется условие

$$\frac{1}{h} \int_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t) dt \leq \Phi(h).$$

Если \mathfrak{M} есть некоторый класс функций, принадлежащих L_2 , то требуется найти верхнюю грань погрешности квадратурной формулы (24):

$$R_n(\mathfrak{M}) = \sup\{|R_n(f)|: f \in \mathfrak{M}\} = \\ = \sup\left\{\left|\int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right)\right|: f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Имеет место следующее утверждение, являющееся уточнением и обобщением основного результата работы [1].

Теорема 2. Пусть при любом $m \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$

$$\int_0^1 \Phi^m\left(\frac{\pi t}{m}\right) t^{2r-3/2} dt < +\infty.$$

Тогда для погрешности квадратурной формулы (24) имеет место оценка

$$R_n(W_m^{(r)}L_2(D; \Phi)) \leq 2^r \sqrt{2\pi} \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \int_0^1 \Phi^m\left(\frac{\pi t}{n}\right) t^{2r-3/2} dt.$$

В частности, если $\Phi_*(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 2$, $m \in \mathbb{N}$, $2r + m\alpha > 1/2$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$R_n(W_m^{(r)}L_2(\mathcal{D}, \Phi_*)) \leq 2^r \sqrt{2\pi} \left(\frac{\pi^{1+\alpha}}{\pi-2}\right)^m \cdot \frac{1}{2m\alpha + 4r - 1} \cdot \frac{1}{n^{2r+m\alpha}}.$$

Доказательство. Пользуясь полученными в предыдущем пункте результатами, легко доказать теорему 2. Прежде всего заметим, что из неравенства (15) с учётом определения класса $W_m^{(r)}L_2(\mathcal{D}; \Phi)$ для произвольной функции этого класса имеем:

$$\mathcal{E}_{n-1}(f) \leq \left(\frac{2}{\pi-2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2r-m}} \cdot \left(\int_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh\right)^m = \\ = \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \cdot \left(\frac{2\pi}{n} \int_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh\right)^m \leq \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \cdot \Phi^m\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

или, что то же, согласно соотношению (5) запишем

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \leq \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{n^{4r}} \cdot \Phi^{2m}\left(\frac{\pi}{2n}\right). \quad (25)$$

Учитывая, что для погрешности квадратурной формулы (24) имеет место равенство [1]

$$\begin{aligned}
R_n(f) &= \int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right) = \\
&= -\sqrt{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m c_{2nm}(f),
\end{aligned} \tag{26}$$

оценим ряд, стоящий в правой части (26), пользуясь оценкой (25). Имеем:

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_{km}^2(f) \leq \sum_{k=nm}^{\infty} c_k^2(f) \leq \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{(nm)^{4r}} \cdot \Phi^{2m}\left(\frac{\pi}{2nm}\right), \tag{27}$$

откуда при любом $n \in \mathbb{N}$ следует, что

$$\sum_{k=n}^{2n-1} c_{km}^2(f) \leq \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{(nm)^{4r}} \cdot \Phi^{2m}\left(\frac{\pi}{2nm}\right). \tag{28}$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма. Для произвольной функции $f \in W_m^{(r)} L_2(\mathcal{D}; \Phi)$, при выполнении ограничения

$$\int_0^1 \Phi^{mp} \left(\frac{\pi t}{m}\right) t^{2rp+p/2-2} dt < +\infty, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 0 < p \leq 2$$

выполняется неравенство

$$\sum_{k=n}^{\infty} |c_{km}(f)|^p \leq 2^{2rp+p/2-1} \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{mp} \cdot \frac{1}{m^{2rp}} \cdot \int_0^1 \Phi\left(\frac{\pi x}{m}\right) x^{2rp+p/2} dx. \tag{29}$$

Доказательство. Мы фактически следуем схеме рассуждений, приведенное в [1]. В самом деле, применяя неравенство Гёльдера для сумм, с учётом (28) получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{km}(f)|^p &\leq \left\{ \sum_{k=n}^{2n-1} c_{km}^2(f) \right\}^{p/2} \cdot (2n)^{1-p/2} \leq \\
&\leq \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{mp} \cdot \frac{1}{(nm)^{2rp}} \cdot \Phi^{mp}\left(\frac{\pi}{2nm}\right) \cdot (2n)^{1-p/2} = \\
&= 2^{2rp} \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{mp} \cdot m^{-2rp} \cdot \Phi^{mp}\left(\frac{\pi}{2nm}\right) \cdot (2n)^{-2rp-p/2+1}.
\end{aligned}$$

Отсюда будем иметь

$$\sum_{k=n}^{\infty} |c_{km}(f)|^p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=2^k n}^{2^{k+1} n-1} |c_{km}(f)|^p \leq$$

$$\leq 2^{rp} \left(\frac{\pi}{\pi-2} \right)^{mp} \cdot \frac{1}{m^{2rp}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \Phi^{mp} \left(\frac{\pi}{2^k nm} \right) \cdot (2^k n)^{-2rp-p/2+1}. \quad (30)$$

Оценим сумму

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Phi^{mp} \left(\frac{\pi}{2^k nm} \right) \cdot (2^k n)^{-2rp-p/2+1}.$$

Заметим, что

$$\Phi^{mp} \left(\frac{\pi}{2^k nm} \right) \cdot (2^k n)^{-2rp-p/2+1} = \int_{2^k n}^{2^{k+1} n} \Phi^{mp} \left(\frac{\pi}{2^k nm} \right) \cdot (2^k n)^{-2rp-p/2} dt$$

и так как при $2^k n \leq t \leq 2^{k+1} n$

$$\begin{aligned} \Phi^{mp} \left(\frac{\pi}{2^{k+1} nm} \right) \cdot (2^{k+1} n)^{-2rp-p/2} &\leq \Phi^{mp} \left(\frac{\pi}{mt} \right) \cdot t^{-2rp-p/2} \leq \\ &\leq \Phi^{mp} \left(\frac{\pi}{2^k nm} \right) \cdot (2^k n)^{-2rp-p/2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Из неравенств (30) и (31) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} |c_{km}(f)|^p &\leq 2^{rp} \left(\frac{\pi}{\pi-2} \right)^{mp} \cdot \frac{1}{m^{2rp}} \cdot \int_n^{+\infty} \Phi^{mp} \left(\frac{\pi}{mt} \right) \cdot t^{-2rp-p/2} dt = \\ &= 2^{rp} \left(\frac{\pi}{\pi-2} \right)^{mp} \cdot \frac{1}{m^{2rp}} \cdot \int_0^{1/n} \Phi^{mp} \left(\frac{\pi t}{m} \right) \cdot t^{2rp+p/2-2} dt, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение леммы.

Следствие. В условиях леммы при $p = 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n |c_{km}(f)| \leq 2^r \left(\frac{\pi}{\pi-2} \right)^m \cdot \frac{1}{m^{2r}} \cdot \int_0^{1/n} \Phi^m \left(\frac{\pi t}{m} \right) \cdot t^{2r-3/2} dt. \quad (32)$$

Утверждение теоремы 2 с учётом равенства (26) вытекает из неравенства (32). Теорема 2 доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Об одной квадратурной формуле. — ЖВМ и МФ, 2002, т.42, №4, с.451-458.
2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977, 512 с.

3. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969.
4. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.: Гостехиздат, 1949, 688 с.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 632 с.
6. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967, 500 с.

О.Қ.ФАРАЙДУНОВ

ОИДИ БАҲОДИИ САҲВИ ФОРМУЛАҲОИ КВАДРАТУРИИ ЭРМИТ-ЧЕБЫШЁВ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола баҳои аниқи асимптотикии формулаи квадратурии Эрмит-Чебышёв барои интегралҳои муайян дар порчаи $[-1, 1]$ бо вазни $(\sqrt{1-x^2})^{-1}$ аз рӯи гиреҳои дар нулҳои бисёрраъзогии Чебышёви чинси яқум дар баъзе синфи функсияҳо ёфта шудааст, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби m -ум дода шуда, аз рӯи оператори умумикардшудаи гечиш характеризонида мешаванд.

Калимаҳои калидӣ: формулаи квадратурӣ – модули бефосилагӣ – хатогӣ – оператори дифференсиалӣ.

O.Q.FARAYDUNOV

ERROR ESTIMATION OF QUADRATURE FORMULA HERMITE-CHEBYSHEV

Tajik National University

Asymptotically exact estimates for the remainder of the quadrature formula for Hermite-Chebyshev definite integrals on the interval $[-1, 1]$ with weight $(\sqrt{1-x^2})^{-1}$ on nodes at the zeros of Chebyshev polynomials of the first kind on some classes of functions defined by the moduli of continuity of m th order, characterized by generalized shift operator.

Key words: quadrature formula – modulus of continuity – error – differentiation operator.

УДК 517.944; 946

М.ИСМАТИ

О КЛАССИЧЕСКОМ И ОБОБЩЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТИПА
КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДАЛАМБЕРА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

Институт предпринимательства и сервиса

Министерства энергетики и промышленности Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 03.04.2013 г.

В статье для оператора Даламбера произвольной степени $k(\geq 2)$ в евклидовом пространстве E_n произвольной размерности $n(\geq 2)$ установлена корректная разрешимость задачи типа Коши для классического и обобщенного решения.

Ключевые слова: задача Коши – задача типа Коши – оператор Даламбера – разрешимость – корректная разрешимость.

1. Рассмотрим следующую задачу типа Коши для уравнения четвёртого порядка:

$$\left. \begin{aligned} L_a^2 u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 u = f(x, t), \quad x \in E_1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad L_a u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial L_a u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x) \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где $L_a = \partial^2 / \partial t^2 - a^2 \cdot \partial^2 / \partial x^2$ – оператор Даламбера.

Введём обозначение

$$L_a u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = Z(x, t) \quad (2)$$

и для $Z(x, t)$ будем решать следующую задачу Коши:

Адрес для корреспонденции: Исмати Мухамаджон. 734055, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Борбада, 48/5, Институт предпринимательства и сервиса. E-mail: mismati@mail.ru

$$\left. \begin{aligned} L_a Z(x, t) &= f(x, t), \quad x \in E_1, \quad t > 0 \\ \frac{\partial^i Z}{\partial t^i} \Big|_{t=0} &= \varphi_i(x), \quad i = 0, 1 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Известно, что решение задачи (3) даётся формулой Даламбера

$$Z(x, t) = \frac{\varphi_0(x + at) + \varphi_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\tilde{\alpha}) d\tilde{\alpha} + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tilde{\tau} \int_{x-a(t-\tilde{\tau})}^{x+a(t-\tilde{\tau})} f(\tilde{\alpha}, \tilde{\tau}) d\tilde{\alpha}. \quad (4)$$

Нетрудно проверить, что функция $Z(x, t)$ удовлетворяет уравнению и начальным условиям задачи (3). Более того, эта задача поставлена корректно.

Подставляя значение $Z(x, t)$ из (4) в уравнение (2), с учётом задачи (1) получим следующую задачу Коши:

$$\left. \begin{aligned} L_a u(x, t) &= Z(x, t) \in E_1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Ясно, что решение задачи (5) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} Z(\xi, \tau) d\xi, \quad (6)$$

где

$$Z(\xi, \tau) = \frac{\varphi_0(\xi + a\tau) + \varphi_0(\xi - a\tau)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{\xi-a\tau}^{\xi+a\tau} \varphi_1(\tilde{\alpha}) d\tilde{\alpha} + \frac{1}{2a} \int_0^\tau d\tilde{\tau} \int_{\xi-a(\tau-\tilde{\tau})}^{\xi+a(\tau-\tilde{\tau})} f(\tilde{\alpha}, \tilde{\tau}) d\tilde{\alpha}. \quad (7)$$

Определение 1. Функция $u(x, t) \in C^3(t=0) \cap C^4(t>0)$ называется классическим решением задачи типа Коши (1), если она удовлетворяет уравнению и начальным условиям этой задачи в обычном классическом смысле.

Имеет место

Теорема 1. Пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и правая часть уравнения $f(x, y)$ в задаче (1) удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi(x) \in C^4(E_1), \quad \psi(x) \in C^3(E_1), \quad \varphi_0(x) \in C^3(E_1),$$

$$\varphi_1(x) \in C^2(E_1), \quad f(x, y) \in C^2(E_1 \times t > 0).$$

Тогда классическое решение задачи (1) существует, выражается формулами (6) и (7), оно единственно и непрерывно зависит от начальных функций и от правой части уравнения $f(x, y)$, то есть задача (1) поставлена корректно в классическом смысле.

Отметим, что в терминах пространства С.Л.Соболева $W_2^l(E_1 \times t > 0)$ с целыми l , условия, наложенные на начальные функции и на правую часть уравнения $f(x, y)$, могут быть обобщены следующим образом:

$$\varphi(x) \in W_2^5(E_1), \psi(x) \in W_2^4(E_1)_1, \varphi_0(x) \in W_2^4(E_1),$$

$$\varphi_1(x) \in W_2^3(E_1), f(x, t) \in W_2^3(E_1 \times t > 0),$$

чтобы все эти производные были интегрируемы с квадратом по некоторой ограниченной области. К примеру, условия, наложенные на функции $\varphi(x)$, означают, что эта функция должна обладать интегрируемыми с квадратом обобщенными производными до пятого порядка по некоторой ограниченной (относительно переменной t) области.

Доказательство. Нетрудно проверить, что функция $u(x, t)$ из (6), где $Z(x, t)$ определена формулой (7) и удовлетворяет уравнению и начальным условиям задачи (1). Действительно, применяя к обеим частям формулы (6) оператор Даламбера L_a , получим: $L_a u = Z(x, t)$.

При этом, допустимо дифференцирование по параметрам под знаком интеграла. Кроме того, должны выполняться следующие условия гладкости: $\varphi(x) \in C^2(E_1)$, $\psi(x) \in C^1(E_1)$, $Z(x, t) \in C^1(E_1 \times t > 0)$. Отсюда, в свою очередь, получим: $L_a^2 u = L_a Z \equiv f(x, t)$. При этом требуется, чтобы

$$\varphi(x) \in C^4(E_1), \psi(x) \in C^3(E_1), \varphi_0(x) \in C^3(E_1),$$

$$\varphi_1(x) \in C^2(E_1), f(x, y) \in C^2(E_1 \times t > 0).$$

Выполнимость двух последних начальных условий задачи (1) в силу (2) следует из формулы (7), а выполнимость двух первых начальных условий следует из формулы (6).

Докажем единственность решения. Для функций из указанного класса в теореме справедливо интегральные представления (6) и (7). Предполагая справедливость этих формул с одними и те же самыми исходными данными, для их разности получим: $u(x, t) \equiv 0$.

Непрерывную зависимость решения от начальных функций и от правой части уравнения $f(x, y)$ можно доказать, например, так. Пусть $u(x, t)$ решение задачи (1) с исходными данными (начальных функций и правой части) $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и $f(x, t)$, а $\tilde{u}(x, t)$ – решение задачи (1) с исходными данными $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{\varphi}_0(x)$, $\tilde{\varphi}_1(x)$ и $\tilde{f}(x, t)$. Пусть

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| < \varepsilon, |\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| < \varepsilon, |\varphi_1(x) - \tilde{\varphi}_1(x)| < \varepsilon, |f(x, t) - \tilde{f}(x, t)| < \varepsilon.$$

Тогда, согласно с (6) и (7), для разности $|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)|$ получим:

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon t + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} [\varepsilon + \varepsilon\tau + \varepsilon\tau^2] d\alpha = \\ &= \varepsilon \left(1 + t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{12} \right) \leq M(T) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

где $\left(1 + T + \frac{T^3}{3} + \frac{T^4}{12} \right) = M(T)$. Отсюда получим утверждение теоремы. Теорема полностью доказана.

Теперь будем решать задачу типа Коши для уравнения шестого порядка

$$\left. \begin{aligned} L_a^3 u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^3 u = f(x, t), \quad x \in E_1, \quad t > 0, \\ L_a^i u \Big|_{t=0} &= \varphi_i(x), \quad \frac{\partial L_a^i u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_i(x), \quad i = 0, 1, 2 \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где $L_a^0 u = u$, $L_a^1 u = L_a u, \dots$

Введя обозначение (2), для $Z(x, t)$ получим следующую задачу типа Коши:

$$\left. \begin{aligned} L_a^2 Z &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 Z = f(x, t), \quad x \in E_1, \quad t > 0, \\ L_a^i Z \Big|_{t=0} &= \varphi_i(x), \quad \frac{\partial L_a^i Z}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_i(x), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Ясно, что решение задачи (9) имеет вид

$$Z(\xi, \tau) = \frac{\varphi_1(\xi + a\tau) + \varphi_1(\xi - a\tau)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{\xi - a\tau}^{\xi + a\tau} \psi_1(\tilde{\alpha}) d\tilde{\alpha} + \frac{1}{2a} \int_0^\tau d\tilde{\tau} \int_{\xi - a(\tau - \tilde{\tau})}^{\xi + a(\tau - \tilde{\tau})} \tilde{u}(\tilde{\alpha}, \tilde{\tau}) d\tilde{\alpha}, \quad (!)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\tilde{\alpha}, \tilde{\tau}) &= \\ &= \frac{\varphi_2(\tilde{\alpha} + a\tilde{\tau}) + \varphi_2(\tilde{\alpha} - a\tilde{\tau})}{2} + \frac{1}{2a} \int_{\tilde{\alpha} - a\tilde{\tau}}^{\tilde{\alpha} + a\tilde{\tau}} \psi_2(\alpha_1) d\alpha_1 + \frac{1}{2a} \int_0^{\tilde{\tau}} d\tau_1 \int_{\tilde{\alpha} - a(\tilde{\tau} - \tau_1)}^{\tilde{\alpha} + a(\tilde{\tau} - \tau_1)} f(\alpha_1, \tau_1) d\alpha_1 \end{aligned} \quad (!!)$$

Тогда для неизвестной функции $u(x, t)$ получим следующую задачу Коши:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u &= \tilde{u}(x, t), x \in E_1, t > 0, \\ u(x, 0) &= \phi_0(x), u_t(x, 0) = \psi_0(x) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ясно, что решение задачи Коши (10), а следовательно, и решение задачи типа Коши (8) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{\phi_0(x+at) + \phi_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_0(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} Z(\xi, \tau) d\xi,$$

где $Z(\xi, \tau)$ и $\tilde{u}(\tilde{\alpha}, \tilde{\tau})$ соответственно определяются по формулам (!) и (!!).

Таким же образом для любого натурального k последовательно можно найти решение задачи типа Коши для уравнения порядка $2k$:

$$\left. \begin{aligned} L_a^k u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^k u = f(x, t), x \in E_1, t > 0, \\ L_a^i u \Big|_{t=0} &= \varphi_i(x), \frac{\partial L_a^i u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_i(x), i = 0, 1, 2, \dots, k-1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

в квадратурах. А именно, пусть известны решения задач (1), (8),... и задачи

$$\left. \begin{aligned} L_a^{k-1} u &\equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{k-1} Z = f(x, t), x \in E_1, t > 0, \\ L_a^i Z \Big|_{t=0} &= \varphi_i(x), \frac{\partial L_a^i Z}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_i(x), i = 1, \dots, k-1. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Тогда решение задачи

$$\left. \begin{aligned} L_a u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = Z(x, t), x \in E_1, t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi_0(x), u_t(x, 0) = \psi_0(x) \end{aligned} \right\},$$

а следовательно, и решение задачи типа Коши (11) имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x+at) + \varphi_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_0(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} Z(\xi, \tau) d\xi, \quad (13)$$

где $Z(\xi, \tau)$ есть решение задачи (12).

Определение 2. Функция $u(x, t) \in C^{2k-1}(t=0) \cap C^{2k}(t>0)$ называется классическим решением задачи типа Коши (1), если она удовлетворяет уравнению и начальным условиям этой задачи в обычном классическом смысле.

Замечание. В нашем случае в определении 2 достаточно было предполагать существование всех тех непрерывных производных до $2k$ -го порядка, которые входят в выражение оператора $L_a^k u$. Мы, ради простоты изложения, приняли вышеприведенный вариант.

Нетрудно сформулировать вышеприведенную теорему и для уравнения $2k$ -го порядка, то есть для задачи (12). А именно, имеет место

Теорема 2. Пусть начальные функции $\varphi_i(x), \psi_i(x)$ ($i=0, 1, \dots, k-1$) и правая часть уравнения задачи (11) удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) \in C^{2k}(E_1), \psi_0(x) \in C^{2k-1}(E_1), \varphi_1(x) \in C^{2k-1}(E_1), \psi_1(x) \in C^{2k-2}(E_1), \\ \varphi_2(x) \in C^{2k-2}(E_1), \psi_2(x) \in C^{2k-3}(E_1), \dots, \varphi_{k-1}(x) \in C^{k-1}(E_1), \psi_{k-1}(x) \in C^k(E_1), \\ f(x, y) \in C^k(E_1 \times t > 0). \end{aligned}$$

Тогда классическое решение задачи (11) существует и представляется в виде формулы (13), где $Z(\xi, \tau)$ есть решение задачи (12); оно единственно и непрерывно зависит от начальных функций и от правой части уравнения $f(x, y)$, то есть задача (11) поставлена корректно в классическом смысле.

Отметим также, что в терминах пространства С.Л.Соболева $W_2^l(E_1 \times t > 0)$ с целыми l , условия, наложенные на начальные функции и на правую часть уравнения $f(x, y)$ в теореме 2, могут быть обобщены следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) \in W_2^{2k+1}(E_1), \psi_0(x) \in W_2^{2k}(E_1), \varphi_1(x) \in W_2^{2k}(E_1), \psi_1(x) \in W_2^{2k-1}(E_1), \dots, \\ f(x, t) \in W_2^{k+1}(E_1 \times t > 0) \end{aligned}$$

и чтобы все эти производные были интегрируемы с квадратом по некоторой ограниченной области.

2. Решение задачи типа Коши для волнового оператора второй степени в многомерном пространстве. Рассмотрим следующую задачу типа Коши для уравнения четвертого порядка в евклидовом пространстве E_n произвольной размерности $n(\geq 2)$:

$$\left. \begin{aligned} L_a^2 u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) u = f(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad L_a u \Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial L_a u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x) \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Известно [1], что решение задачи Коши для волнового уравнения $L_a V = f$ в евклидовом пространстве E_n имеет вид:

$$\begin{aligned} V(x, t) &= A_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \int_0^{at} (a^2 t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r T_r(\varphi) dr + A_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^{at} (a^2 t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} T_r(\psi) dr + \\ &+ A_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t d\tau \int_0^{a\tau} (a^2 \tau^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r T_r(f(x, t - \tau)) dr, \end{aligned} \quad (15)$$

где $A_n = \frac{1}{a^{n-1}(n-2)!}$, $T_r(\phi(x_1, \dots, x_n)) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{|x-\xi|^2=r^2} \phi(x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n) dS_\xi$,

$\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ – площадь n -мерной сферы радиуса единица, Γ – гамма-функция Эйлера.

Отметим, для того чтобы функция V , определяемая формулой (15), имела две непрерывные производные, достаточно, чтобы соответственно функции ϕ и ψ, f имели $[n/2] + 3$ и $[n/2] + 2$ обобщенные производные, интегрируемые с квадратом по некоторой конечной области.

Пусть

$$L_a u = V(x, t). \quad (16)$$

Тогда решением задачи типа Коши

$$\left. \begin{aligned} L_a V(x, t) &= f(x, t), \quad x \in E_n, \quad t > 0 \\ \frac{\partial^i L_a V}{\partial t^i} \Big|_{t=0} &= \varphi_i(x), \quad i = 0, 1 \end{aligned} \right\},$$

аналогично формуле (15), будет функция

$$\begin{aligned} V(x, t) &= A_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \int_0^{at} (a^2 t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r T_r(\varphi_0) dr + A_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^{at} (a^2 t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} T_r(\varphi_1) dr + \\ &+ A_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t d\tilde{\tau} \int_0^{a\tilde{\tau}} (a^2 \tilde{\tau}^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r T_r(f(x, t - \tilde{\tau})) dr, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$T_r(\varphi_0(x_1, \dots, x_n)) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{|x-\tilde{\xi}|^2=r^2} \varphi(x_1 + \tilde{\xi}_1, \dots, x_n + \tilde{\xi}_n) dS_{\tilde{\xi}},$$

$$T_r(\varphi_1(x_1, \dots, x_n)) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{|x-\tilde{\xi}|^2=r^2} \varphi_1(x_1 + \tilde{\xi}_1, \dots, x_n + \tilde{\xi}_n) dS_{\tilde{\xi}},$$

$$T_r(f(x_1, \dots, x_n)) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{|x-\tilde{\xi}|^2=r^2} f((x_1 + \tilde{\xi}_1, \dots, x_n + \tilde{\xi}_n), t - \tau) dS_{\tilde{\xi}}.$$

Подставляя это значение $V(x,t)$ из (17) в уравнение (16), с учётом задачи (14), получим следующую задачу Коши для определения функции $u(x,t)$:

$$\left. \begin{aligned} L_a u(x,t) &= V(x,t) \in E_n, t > 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

Ясно, что решение задачи (18) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \int_0^{at} (a^2 t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r T_r(\varphi) dr + A_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^{at} (a^2 t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} T_r(\psi) dr + \\ &+ A_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t d\tau \int_0^{a\tau} (a^2 \tau^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r T_r(V(\xi, t - \tau)) dr, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V(\xi, \tau) &= A_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} \int_0^{a\tau} (a^2 \tau^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r T_r(\varphi_0) dr + A_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial \tau^{n-2}} \int_0^{a\tau} (a^2 \tau^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} T_r(\varphi_1) dr + \\ &+ A_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial \tau^{n-2}} \int_0^\tau d\tilde{\tau} \int_0^{a\tilde{\tau}} (a^2 \tilde{\tau}^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r T_r(f(\xi, \tau - \tilde{\tau})) dr, \end{aligned}$$

в которой вместо τ надо взять $t - \tau$.

В терминах пространства W_2^l с целыми l имеет место

Теорема 2. Пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и правая часть уравнения задачи (14) удовлетворяют следующим условиям:

$\varphi(x) \in W_2^{[n/2]+5}(E_N)$, $\psi(x) \in W_2^{[n/2]+4}(E_N)$, $\varphi_0(x) \in W_2^{[n/2]+4}(E_N)$, $\varphi_1(x) \in W_2^{[n/2]+3}(E_N)$, $f(x,t) \in W_2^{[n/2]+3}(E_N \times (t > 0))$ и все эти производные интегрируемы с квадратом по некоторой ограниченной (относительно переменной t) области.

Тогда классическое решение задачи (14) существует, оно единственно и непрерывно зависит от начальных функций и от правой части уравнения $f(x, y)$, то есть задача (14) поставлена корректно в классическом смысле

Наконец, рассмотрим следующую задачу типа Коши:

$$\left. \begin{aligned} L_a^k u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^k u = f(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n, \quad t > 0, \\ L_a^i u \Big|_{t=0} &= \phi_i(x), \quad \frac{\partial L_a^i u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_i(x), \quad x \in E_n, \quad i = 0, 1, \dots, k-1 \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

В этом случае в терминах пространства W_2^l с целыми l имеет место

Теорема 3. Пусть начальные функции $\phi_i(x)$, $\psi_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, k-1$ и правая часть f уравнения задачи (14) удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &\in W_2^{[n/2]+1+2k}(E_N), \quad \psi_0(x) \in W_2^{[n/2]+2k}(E_N), \quad \phi_1(x) \in W_2^{[n/2]+2k}(E_N), \\ \psi_1(x) &\in W_2^{[n/2]+2k-1}(E_N), \dots, \quad f(x, t) \in W_2^{[n/2]+k+1}(E_N \times (t > 0)) \end{aligned}$$

и все эти производные интегрируемы с квадратом по некоторой ограниченной (относительно переменной t) области.

Тогда классическое решение задачи (19) существует, оно единственно и непрерывно зависит от начальных функций и от правой части уравнения $f(x, y)$, то есть задача (19) поставлена корректно в классическом смысле.

3. Обобщенные решения задачи типа Коши. Пусть $u_n(x, t)$ – последовательность классических решений задачи (1), а $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, $\phi_{0n}(x)$, $\phi_{1n}(x)$ и $f_n(x, t)$ – последовательность исходных данных (начальных функций и правой части) этой задачи.

Определение 1. Пусть последовательность исходных данных задачи (1) соответственно равномерно сходится к функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ и $f(x, y)$. Тогда равномерный предел последовательности классических решений $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u(x, t)$ задачи (1), определяемых по формулам (6) и (7), называется обобщенным решением задачи (1). Ясно, что это обобщенное решение является непрерывным в области $Q = E_1 \times (t > 0)$. Для этого решения, как мы уже знаем, справедливы интегральные представления (6) и (7). Они получаются предельным переходом под знаком интеграла из (6) и (7) при $n \rightarrow \infty$, то есть это решение существует и даётся формулами (6) и (7). Очевидно, это решение единственно. Действительно, если имеется ещё такое решение с теми же самыми исходными данными, то для их разности получим: $u(x, y) \equiv 0$. Обобщенное решение задачи (1) можно определить и другим способом.

Определение 2. Пусть последовательность функций $u_n(x, t)$ соответственно являются классическими решениями задач:

$$\left. \begin{aligned} L_a^2 u_n &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_n = f_n(x, t), \quad x \in E_1, \quad t > 0, \quad n = 1, 2, \dots \\ u_n(x, 0) &= 0, \quad u_n'(x, 0) = 0, \quad (u_n'' - a^2 u_n'')|_{t=0} = 0, \quad (u_n''' - a^2 u_n''')|_{t=0} = 0 \end{aligned} \right\}.$$

и последовательность $f_n(x, t)$ сходится в среднем к $f(x, t)$.

Функция $u \in L_2(E_1)$, являющаяся пределом в средней последовательности функций $u_n(x, t)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u_n - u)^2 dx = 0$$

при заданных нулевых начальных условиях, называется обобщённым решением задачи (1). При этом для волнового уравнения известно [2], что если последовательность функций $f_n(x, t)$ сходится в среднем равномерно по t к функции $f(x, t)$, то последовательность решений $u_n(x, t)$ также сходится в среднем равномерно по t к решению $u(x, t)$.

Это обобщенное решение единственно, ибо последовательность функций $u_n(x, t)$ не может иметь двух пределов $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ в среднем. В противном случае мы имели бы

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u_1 - u_2)^2 dx \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} [(u_1 - u_n) + (u_n - u_2)]^2 dx \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} [(u_1 - u_n)^2 + (u_n - u_2)^2] dx \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

и $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ совпали бы почти всюду. Существование обобщённого в смысле определения 2 решения следует из теоремы Рисса-Фишера.

Аналогично определяются обобщённые решения более общей задачи типа Коши (11).

Замечания.

1. В работе [4] по вине автора произошли некоторые опечатки. А именно, задачу (13) из [4] следует написать в виде задачи (11), а задачу (14) в виде задачи (12) настоящей статьи. В связи с этим теорему 2 надо сформулировать в виде теоремы 2 настоящей статьи. Метод доказательства идентично.

2. В замечании 1 из [4] для оператора Даламбера степени k начальные условия надо брать в виде

$$L_a^i u \Big|_{t=0} = \varphi_i(x), \frac{\partial L_a^i u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_i(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots, k-1, \quad \text{где } L_a^0 u = u,$$

и рассматривать задачу типа Коши (19).

3. Условия гладкости, наложенные на начальных функций $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$ и функции $f(x, t)$ в теореме 3 при $k = 1$ в точности совпадают с соответствующими условиями работы С.Л.Соболева [3] для задачи Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В.М. и др. Линейные уравнения математической физики, СМБ. – М.: Наука, 1964.
2. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.
3. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988, 336 с.
4. Исмати М. – Изв. АН РТ. Отд. физ.мат.хим.геол. и техн.н., 2011, №4.
5. Исмати М., Исматов Н.М. Обобщенные решения смешанных задач для уравнения динамики упругого тела и о некоторых локальных и нелокальных задачах математической физики. – Душанбе: ИПС, 2009, 160 с.

М.ИСМАТИ

ДАР БОРАИ ҲАЛҶОИ КЛАССИКӢ ВА УМУМИШУДАИ МАСЪАЛАИ НАВӢИ КОШИ БАРОИ ДАРАҶАИ ДИЛҶОӢИ ОПЕРАТОРИ ДАЛАМБЕР

*Вазорати энергетика ва саноати Ҷумҳурии Тоҷикистон
Донишқадаи соҳибкорӣ ва хизмат*

Дар мақола барои дараҷаи $k (\geq 2)$ -и оператори Даламбер дар фазои дил-хоҷенакаи евклидии $E_n (n \geq 2)$ корректӣ гузошташавии масъалаи намуди Коши барои ҳалҶоии классикӣ ва умумишуда нишон дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: масъала Коши – масъалаи навӣ Коши – оператори Даламбер – корректӣ ҳалшавандагӣ – ҳалҶоии классикӣ ва умумишуда.

M.ISMATI

**ABOUT CLASSICAL AND GENERALIZED SOLUTIONS OF PROBLEM TYPE
COUSHI FOR OPERATOR DALAMBER OF ARBITRARY DEGREE**

*Institute of entrepreneurship and service,
Ministry of energy and industry Republic of Tajikistan*

In the present paper in n - dimensional Euclidian space established of correct solvability problem type Coushi for operator Dalamber of degrees $k(\geq 2)$ for classical and generalized solutions.

Key words: Problem of Coushi – problem type of Coushi – operator Dalamber – solvability – correct solvability – classical and generalized solutions.

УДК 81'322::811.222.8::519.25

З.Д.УСМАНОВ, М.ДОВУДОВ*

АЛГОРИТМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТАДЖИКСКИХ
СЛОВСОЧЕТАТЕЛЬНЫХ СЛОВОФОРМ ФРАГМЕНТАМИ
ПРЕДЛОЖЕНИЙ

*Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан,
*Худжандский политехнический институт
Таджикского технического университета им. академика М.С.Осими
Поступила в редакцию 15.11.2013 г.*

Рассматриваются таджикские словоформы, не соотносимые к каким-либо частям речи. Предлагается алгоритм для формирования словосочетания, эквивалентного по смыслу заданной словоформе.

Ключевые слова: таджикский язык – словоформа – постфикс – словосочетание – алгоритм – автоматизация.

В таджикском языке будем различать три типа постфиксов – *словоизменяющие, словообразовательные и “словосочетательные”*.

Словоизменяющий постфикс выделяет из списка словоформ вполне определённой лексемы одну словоформу с присущими ей грамматическими категориями. Словоизменения, порождаемые такими постфиксами, выражают неопределённость (шахре), уменьшительность (хонача), степени сравнения (сурх-сурхтар-сурхтарин-сурхак), спряжения по лицам (рафтам-рафтӣ-рафт...), изменения по времени (кардам-кардаам...) и по числам (одам-одамон...) и т.д.

Словообразовательный постфикс своим присоединением к основе слова создаёт производное слово, основа которого образована от исходной основы, связывается с ней по смыслу и объясняется ею (кор-коргар, омӯз-омӯзиш, мард-мардона).

Постфикс, присоединение которого к основе слова образует словоформу, эквивалентную по смыслу сочетанию слов, назван нами словосочетательным (бароятон = барои

Адрес для корреспонденции: Усманов Зафар Джураевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/1, Институт математики АН РТ. E-mail: zafar-usmanov@rambler.ru.

шумо; китобамрову = китоби манро ва; гуфтатон = гуфти шумо; чорам = чори ман, ...), а содержащая такой постфикс словоформа – словосочетательной*. Очевидно, что словоформы такого типа не могут быть отнесены к какой-либо части речи.

1. Парадигмообразующие постфиксы. Произвольный постфикс PS таджикского языка целесообразно представлять в виде конкатенации

$$PS = PS^1 \oplus PS^2$$

суффикса PS^1 и окончания PS^2 (иными словами, соответственно в виде парадигмообразующего и парадигмоформирующего постфиксов). Не останавливаясь на подробном описании множества PS^1 , отметим, что на данный момент нами выявлено 2935 его элементов, причём все они представляют собой либо словоизменительные, либо словообразовательные постфиксы. Добавим к сказанному, что парадигмообразующие постфиксы PS^1 состоят не более чем из 5 простых постфиксов.

2. Парадигмоформирующие постфиксы, обозначаемые через PS^2 , в общем случае являются составными, сформированными из простых постфиксов. Последние, в соответствии с грамматикой таджикского языка, классифицируются как

VE (verb ending) – *личные окончания глаголов* (+ам, +ям, +й, +ад, +яд, +ем, +ед, +анд, +янд);

PE (predicative ending) – *предикативные окончания* (+ам, +ям, +й, +аст, +яст, +ст, +ем, +ед, +анд, +янд);

E (pronominal enclitic) – *местоименные энклитики* (+ам, +ат, +аш, +амон, +атон, +ашон, +ям, +ят, +яш, +ямон, +ятон, +яшон);

PP (postposition) – *послелог* (+ро);

UN (union) – *союзы* (+у, +ю, +ву);

I (izafet) – *изафет* (+и).

Допустимые порядки их присоединения друг к другу в согласии с грамматикой таджикского языка представлены на рисунке в графическом виде.

В рисунок включены два дескриптора с именами PS^2 – постфикс и END. Они не являются узлами графа и предназначены только для того, чтобы исходящими от них стрелками отметить, соответственно, первый и последний простые постфиксы в структуре составного постфикса. Прочие стрелки являются рёбрами графа, указывающими порядок следования простых постфиксов.

* Используемое нами определение отлично от общепринятого, в котором словосочетание – это соединение двух или нескольких знаменательных слов, связанных по смыслу и грамматически, служащее для расчленённого обозначения единого понятия.

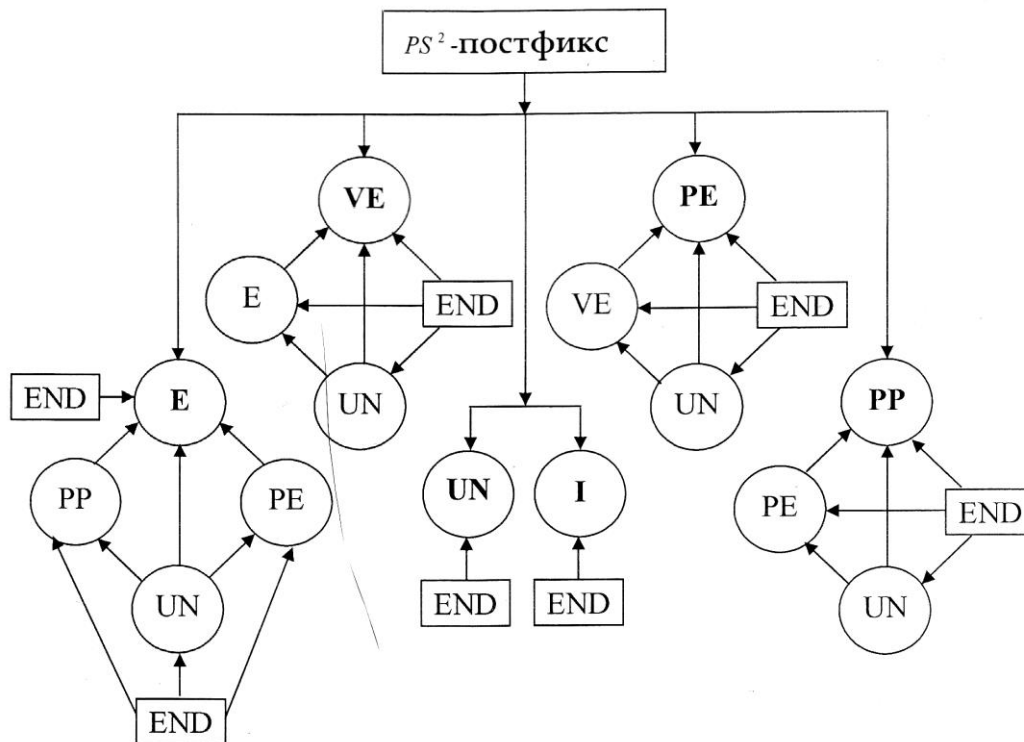


Рис. Структуры PS^2 - постфиксов.

В графе содержатся 20 различных структур PS^2 - постфиксов. Для большей ясности эти структуры, сгруппированные по первому простому постфиксу, приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Структуры PS^2 - постфиксов

Е-группа	VE-группа	PE-группа	PP-группа	UN-группа	I-группа
Е	VE	PE	PP	UN	I
$E \oplus PP$	$VE \oplus E$	$PE \oplus VE$	$PP \oplus PE$		
$E \oplus UN$	$VE \oplus UN$	$PE \oplus UN$	$PP \oplus UN$		
$E \oplus PE$	$VE \oplus E \oplus UN$	$PE \oplus VE \oplus UN$	$PP \oplus PE \oplus UN$		
$E \oplus PP \oplus UN$					
$E \oplus PE \oplus UN$					

Что касается описания всего многообразия PS^2 - постфиксов, то оно получается путём подстановок всевозможных значений, которые могут принимать простые постфиксы, в указанные в таблице 1 структуры. Формальное выполнение такой процедуры выявляет 1492 элемента множества $\{PS^2\}$, однако экспертный анализ, основанный на действующей грамматике таджикского языка, сужает круг реальных PS^2 - постфиксов до 344 элементов (см. табл. 2).

Таблица 2

Список парадигмоформирующих постфиксов

Уровень	Постфикс	Число
1	+й, +ад, +ам, +амон, +анд, +аст, +ат, +атон, +аш, +ашон, +ву, +ед, +ем, +и, +ро, +ст, +у, +ю, +яд, +ям, +ямон, +янд, +яст, +ят, +ятон, +яш, +яшон	27
2	+ад-ам, +ад-амон, +ад-ат, +ад-атон, +ад-аш, +ад-ашон, +ад-у, +ам-й, +ам-анд, +ам-аст, +ам-ат, +ам-атон, +ам-аш, +ам-ашон, +ам-ед, +ам-ем, +амон-й, +амон-ам, +амон-анд, +амон-аст, +амон-ед, +амон-ем, +амон-ро, +амон-у, +ам-ро, +ам-у, +анд-й, +анд-ам, +анд-амон, +анд-ат, +анд-атон, +анд-аш, +анд-ашон, +анд-у, +аст-у, +ат-й, +ат-ам, +ат-анд, +ат-аст, +ат-ед, +ат-ем, +атон-й, +атон-ам, +атон-анд, +атон-аст, +атон-ед, +атон-ем, +атон-ро, +атон-у, +ат-ро, +ат-у, +аш-й, +аш-ам, +аш-анд, +аш-аст, +аш-ед, +аш-ем, +ашон-й, +ашон-ам, +ашон-анд, +ашон-аст, +ашон-ед, +ашон-ем, +ашон-ро, +ашон-у, +аш-ро, +аш-у, +й-ву, +ед-ам, +ед-амон, +ед-аш, +ед-ашон, +ед-у, +ем-ат, +ем-атон, +ем-аш, +ем-ашон, +ем-у, +ро-ву, +ро-ст, +ро-ю, +ст-й, +ст-ам, +ст-анд, +ст-ед, +ст-ем, +ст-у, +й-ю, +яд-ам, +яд-амон, +яд-ат, +яд-атон, +яд-аш, +яд-ашон, +яд-у, +й-ям, +ям-й, +ям-анд, +ям-аст, +ям-ат, +ям-атон, +ям-аш, +ям-ашон, +ям-ед, +ям-ем, +й-ямон, +ямон-й, +ямон-ам, +ямон-анд, +ямон-аст, +ямон-ед, +ямон-ем, +ямон-ро, +ямон-у, +ям-ро, +ям-у, +янд-ам, +янд-амон, +янд-ат, +янд-атон, +янд-аш, +янд-ашон, +янд-у, +яст-у, +ят-й, +ят-ам, +ят-анд, +ят-аст, +ят-ед, +ят-ем, +ятон-й, +ятон-ам, +ятон-анд, +ятон-аст, +ятон-ед, +ятон-ем, +ятон-ро, +ятон-у, +ят-ро, +ят-у, +й-яш, +яш-й, +яш-ам, +яш-анд, +яш-аст, +яш-ед, +яш-ем, +й-яшон, +яшон-й, +яшон-ам, +яшон-анд, +яшон-аст, +яшон-ед, +яшон-ем, +яшон-ро, +яшон-у, +яш-ро, +яш-у	158
3	+й-ямон-у, +й-ям-у, +й-яшон-у, +й-яш-у, +ад-амон-у, +ад-ам-у, +ад-атон-у, +ад-ат-у, +ад-ашон-у, +ад-аш-у, +ам-й-ву, +ам-й-ю, +ам-анд-у, +ам-аст-у, +ам-атон-у, +ам-ат-у, +ам-ашон-у, +ам-аш-у, +ам-ед-у, +ам-ем-у, +амон-й-ву, +амон-й-ю, +амон-ам-у, +амон-анд-у, +амон-аст-у, +амон-ед-у, +амон-ем-у, +амон-ро-ву, +амон-ро-ю, +ам-ро-ву, +ам-ро-ю, +анд-й-ву, +анд-й-ю, +анд-амон-у, +анд-ам-у, +анд-атон-у, +анд-ат-у, +анд-ашон-у, +анд-аш-у, +ат-й-ву, +ат-й-ю, +ат-ам-у, +ат-анд-у, +ат-аст-у, +ат-ед-у, +ат-ем-у, +атон-й-ву, +атон-й-ю, +атон-ам-у, +атон-анд-у, +атон-аст-у, +атон-ед-у, +атон-ем-у, +атон-ро-ву, +атон-ро-ю, +ат-ро-ву, +ат-ро-ю, +аш-й-ву, +аш-й-ю, +аш-ам-у, +аш-анд-у, +аш-аст-у, +аш-ед-у, +аш-ем-у, +ашон-й-ву, +ашон-й-ю, +ашон-ам-у, +ашон-анд-у, +ашон-аст-у, +ашон-ед-у, +ашон-ем-у, +ашон-ро-ву, +ашон-ро-ю, +аш-ро-ву, +аш-ро-ю, +ед-амон-у, +ед-ам-у, +ед-ашон-у, +ед-аш-у, +ем-атон-у, +ем-ат-у, +ем-ашон-у, +ем-аш-у, +ро-ст-у, +ст-й-ву, +ст-й-ю, +ст-ам-у, +ст-анд-у, +ст-ед-у, +ст-ем-у, +яд-амон-у, +яд-ам-у, +яд-атон-у, +яд-ат-у, +яд-ашон-у, +яд-аш-у, +ям-й-ву, +ям-й-ю, +ям-анд-у, +ям-аст-у, +ям-атон-у, +ям-ат-у, +ям-ашон-у, +ям-аш-у, +ям-ед-у, +ям-ем-у, +ямон-й-ву, +ямон-й-ю, +ямон-ам-у, +ямон-анд-у, +ямон-аст-у, +ямон-ед-у, +ямон-ем-у, +ямон-ро-ву, +ямон-ро-ю, +ям-ро-ву, +ям-ро-ю, +янд-амон-у, +янд-ам-у, +янд-атон-у, +янд-ат-у, +янд-ашон-у, +янд-аш-у, +ят-й-ву, +ят-й-ю, +ят-ам-у, +ят-анд-у, +ят-аст-у, +ят-ед-у, +ят-ем-у, +ятон-й-ву, +ятон-й-ю, +ятон-ам-у, +ятон-анд-у, +ятон-аст-у, +ятон-ед-у, +ятон-ем-у, +ятон-ро-ву, +ятон-ро-ю, +ят-ро-ву, +ят-ро-ю, +яш-й-ву, +яш-й-ю, +яш-ам-у, +яш-анд-у, +яш-аст-у, +яш-ед-у, +яш-ем-у, +яшон-й-ву, +яшон-й-ю, +яшон-ам-у, +яшон-анд-у, +яшон-аст-у, +яшон-ед-у, +яшон-ем-у, +яшон-ро-ву, +яшон-ро-ю, +яш-ро-ву, +яш-ро-ю,	159

В этой таблице PS^2 - постфиксы разделены на три группы по уровням сложности (простые, двухсложные и трёхсложные) и для наглядности представлены в разделённом на простые постфиксы виде. Отметим также, что элементы множества PS^2 состоят не более чем из 3-х простых постфиксов.

3. Распознавание морфов таджикских словоформ WF . С помощью разработанного авторами статьи морфораспознавателя – полуавтоматической итеративной процедуры, предназначенной для формирования базы морфов таджикского языка на основе обработки текстового файла, см.[1,2,3], – любая таджикская словоформа в общем случае представляется в форме

$$WF = PR \oplus R \oplus PS^1 \oplus PS^2,$$

где PR – префикс, R – корень, PS^1 и PS^2 , соответственно, словоизменительный (или словообразовательный) и словосочетательный постфиксы.

4. Алгоритм для представления словосочетательной словоформы фрагментом предложения. При анализе произвольной словоформы WF будем различать случаи отсутствия или наличия в ней постфикса PS^2 . В первом случае алгоритм оставляет словоформу неизменной, поскольку она является результатом словоизменения или же словообразования некоторой основы. В обоих случаях словоформа относится к определённой части речи.

Во втором случае словоформа переписывается в виде

$$WF = WF^* \oplus PS^2, \tag{1}$$

где

$$WF^* = PR \oplus R \oplus PS^1.$$

Правила преобразования словоформы (1) в эквивалентный по смыслу фрагмент предложения приведены в таблице 3 в зависимости от части речи основы WF^* словоформы и значений, принимаемых постфиксом PS^2 .

Таблица 3

Представление словоформы фрагментом предложения

№	Значения PS^2	Эквивалентный фрагмент предложения	Примеры
1	UN	$\{WF^* ва\}$	карду = кард ва китобу = китоб ва
2	I	$\{WF^* \oplus и\}$	китоби = китоби
3	E	$\{WF^* \oplus и PRN(E)\}$	китобам = китоби ман
4	$E \oplus UN$	$\{WF^* \oplus и PRN(E) ва\}$	китобаму = китоби ман ва
5	$E \oplus PP$	$\{WF^* \oplus и PRN(E) \oplus ро\}$	китобамро = китоби манро
6	$E \oplus PE$	$\{WF^* \oplus и PRN(E) хаст \oplus PE\}$	китобамй = китоби ман хастй

№	Значения PS^2	Эквивалентный фрагмент предложения	Примеры
7	$E \oplus PE \oplus UN$	$\{WF^* \oplus \text{и} PRN(E) \text{хаст} \oplus PE \text{ва}\}$	китобамиву = китоби ман хаст ва
8	$E \oplus PP \oplus UN$	$\{WF^* \oplus \text{и} PRN(E) \oplus \text{ро} \text{ва}\}$	китобмарову = китоби манро ва
9	VE	$\{WF^* \oplus VE\}$	кардам = кардам
10	$VE \oplus UN$	$\{ WF^* \oplus VE \text{ва}\}$	кардаму = кардам ва
11	$VE \oplus E$	$\{PRN(VE) PRN(E) \oplus \text{ро} WF^* \oplus VE\}$ или $\{PRN(VE) \text{ба} PRN(E) WF^* \oplus VE\}$	гуфтамат = ман туро гуфтам бинамат = ман туро бинам гуфтамат = ман ба ту гуфтам
12	$VE \oplus E \oplus UN$	$\{PRN(VE) PRN(E) \oplus \text{ро} WF^* \oplus VE \text{ва}\}$ или $\{PRN(VE) \text{ба} PRN(E) WF^* \oplus VE \text{ва}\}$	гуфтамату = ман туро гуфтам ва бинамату = ман туро бинам ва гуфтамату = ман ба ту гуфтам ва
13	PE	$\{PRN(PE) WF^* \text{хаст} \oplus PE\}$	китобед = шумо китоб хастед
14	$PE \oplus UN$	$\{PRN(PE) WF^* \text{хаст} \oplus PE \text{ва}\}$	китобеду = шумо китоб хастед ва
15	$PE \oplus VE$	$\{PRN(PE) \text{ме} \oplus WF^* \oplus PE\}$	гуфтандӣ = онҳо мегуфтанд
16	$PE \oplus VE \oplus UN$	$\{PRN(PE) \text{ме} \oplus WF^* \oplus PE \text{ва}\}$	гуфтандиву = онҳо мегуфтанд ва
17	PP	$\{WF^* \oplus \text{ро}\}$	китобро = китобро
18	$PP \oplus UN$	$\{WF^* \oplus \text{ро} \text{ва}\}$	китоброву = китобро ва
19	$PP \oplus PE$	$\{WF^* \oplus \text{ро} \text{аст}\}$	китоброст = китобро аст
20	$PP \oplus PE \oplus UN$	$\{WF^* \oplus \text{ро} \text{аст} \text{ва}\}$	китобросту = китобро аст ва

Из таблицы видно, что постфикс PS^2 в словоформе (1) может принимать любое из 20 значений, указанных во втором столбце. Фрагмент предложения, эквивалентный по смыслу рассматриваемой словоформе, даётся в 3-м столбце. Границы фрагмента отмечены фигурными скобками. Внутри них символ \oplus обозначает соединения без пробела цепочки букв, расположенных до и после символа. Пробелы между словами для наглядности отмечены вертикальным отрезком. Примеры, поясняющие содержание фрагментов предложений, даются в 4-м столбце. В них в левой позиции приводятся словоформы, а в правой, с применением знака равенства, выписывается эквивалентный фрагмент предложения. Как видно из таблицы, в случае когда PS^2 - постфикс принимает значения I, VE или PP, соответствующие им словоформы являются результатами словоизменения и потому не имеют отношения к фрагментированию.

Отметим также, что обозначение $PRN(X)$, используемое в ячейках столбца 2, определяет функцию, заданную на элементах множеств E, PE, VE, то есть на местоименных энклитиках, предикативных окончаниях и личных окончаниях глаголов. Отображение, осуществляемое этой функцией, характеризуется таблицей 4.

Рассмотренный алгоритм реализован в виде компьютерной программы, выполняющей автоматическое представление словосочетательной словоформы эквивалентным по смыслу сочетанием слов.

Таблица 4

Определение функции PRN(X)

Значения аргументов X	Значения функции PRN(X)
+ам, +ям	ман
+й, +ат, +ят,	ту
+ад, +аст, +аш, +ст, +яд, +яст, +яш	ӯ(вай)
+амон, +ем, +ямон,	мо
+атон, +ед, +ятон,	шумо
+анд, +ашон, +янд, +яшон,	онҳо

Исследования настоящей статьи поддерживаются грантом 8749 Фонда Сороса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усманов З.Д., Солиев О.М., Довудов Г.М. О множестве постфиксов таджикского литературного языка. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2010. т.53, № 2, с. 99 -103.
2. Усманов З.Д., Довудов Г.М. О статистических закономерностях морфемной базы таджикского языка. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2010. т.53, № 3, с.188-191.
3. Усманов З.Д., Довудов Г.М. Частотный морфемный словарь таджикского литературного языка. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2010. т.53, № 4. с.257-262.

З.Ҷ.УСМОНОВ, Г.М.ДОВУДОВ*

АЛГОРИТМИ ТАБДИЛДИҶИИ КАЛИМАҶОИ МАҶМЌИИ ЗАБОНИ ТОҶИКӢ БА ФРАГМЕНТИ ҶУМЛА

Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,

**Донишқадаи политехникии Донишгоҳи техникии Тоҷикистон*

ба номи академик М.С.Осими дар и. Хуҷанд

Дар мақола калимаҳои забони тоҷикӣ, ки баробарвазни фрагменти ҷумла буда, ба ягон ҳиссаи нутқ мутаалиқ нестанд, мавриди омӯзиш қарор гирифтаанд. Алгоритми табдили калимаҳои мазкур ба фрагменти ҷумла, ки аз рӯи мазмун ба он мутаносиб аст, оварда мешавад.

Калимаҳои калидӣ: забони тоҷикӣ – калима – постфикс – калимаҳои маҷмӯӣ – алгоритм – автоматиронӣ.

Z.D.USMANOV, G.M.DOVUDOV*

**ALGORITHM FOR REPRESENTING A SPECIFIC TAJIK WORD FORM
AS A PHRASE PIECE**

*A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,
Khujand's Polytechnic Institute of M.S.Osimi Tajik Technical University

The subjects of our discussion are Tajik word forms not related to any of the parts of speech. We offer an algorithm for constructing a piece of phrase, equivalent in meaning to the given word form.

Key words: Tajik language – word form – postfix – phrase – algorithm – automation.

УДК 537.868; 53.043

Т.А.ВАСИЛЕНКО, А.К.КИРИЛЛОВ, А.С.ДОРОШКЕВИЧ*, А.В.ШИЛО*

**ЭФФЕКТЫ ВОЗДЕЙСТВИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ИМПУЛЬСОВ
МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
КАМЕННОГО УГЛЯ**

Институт физики горных процессов НАН Украины,

**Донецкий физико-технический институт им. А.А.Галкина НАН Украины*

Поступила в редакцию 26.11.2013 г.

Методом электрохимического импеданса исследовался уголь ранней стадии метаморфизма. Представлены зависимости от частоты относительной диэлектрической проницаемости, удельной электропроводности и тангенса потерь для исходного, увлажненного и просушенного образца. Показано, что воздействие импульсным магнитным (МИВ) полем с интенсивностью $H = 10^5 \div 10^6$ А/м и частотой следования импульсов $\nu = 1$ Гц приводит к существенному изменению этих величин. Образцы имели различающиеся отклики на МИВ в зависимости от влажности. С помощью эквивалентных электрических схем определены характерные времена релаксации магнитоиндуцированной поляризации молекул флюида и твёрдой матрицы углей. Наибольшие изменения происходят на межфазных границах образца. При длительных релаксационных процессах не наблюдается возвращения всех электрофизических характеристик к исходному состоянию, а их изменение в процессе релаксации носит знакопеременный характер. Работа показывает потенциальную возможность эффективной дегазации угольных пластов при помощи МИВ.

Ключевые слова: каменный уголь – электрические свойства – слабые импульсные магнитные поля – магнитоиндуцированные эффекты – дегазация каменноугольных пластов.

В условиях интенсификации добычи угля в шахтах Украины актуальной является дегазация угольных пластов, обеспечивающая безопасность работы шахтеров. В настоящее время есть достаточно традиционных способов дегазации и извлечения метана. Тем не менее разрабатываются новые подходы для решения таких задач. Один из них предусматривает воздействие электромагнитным полем на угольный пласт [1]. Эффективным

Адрес для корреспонденции: Дорошкевич Александр Сергеевич. 83114, Украина, г. Донецк, ул. Р.Люксембург, 72, Донецкий физико-технический институт НАН Украины. E-mail: matscidep@aim.com.

методом, позволяющим исследовать влияние электромагнитного облучения на электрофизические свойства пористых сред в широком интервале частот, является метод электрохимического импеданса.

Материалы и методы исследования

В качестве образцов использовались образцы угля марки ДГ из шахты «Россия» Донецкого угольного бассейна. Образцы представляли собой прямоугольные пластины толщиной до 5 мм и площадью плоско-параллельных граней $\sim 100 \text{ мм}^2$. На поверхности этих граней механическим способом наносились графитовые электроды.

Исследовалось две серии образцов, отличающихся содержанием влаги. Первая серия имела количество влаги, соответствующее нормальным физическим условиям (состояние поставки). Вторая серия была практически полностью обезвожена. Измерения электрофизических параметров исходных образцов проводились до и после воздействия последовательности униполярных экспоненциально-нарастающих импульсов магнитного поля ($H = 10^5\text{-}10^6 \text{ А/м}$), далее, магнитоимпульсное воздействие (МИВ) [2]. Частота следования импульсов 1 Гц при общей протяженности порядка 600 мкс и времени обработки 1 ч.

Запись спектров электрохимического импеданса (СЭИ) проводилась при комнатной температуре (19°C) с помощью прецизионного виртуального измерителя-анализатора параметров импеданса типа 2В-1 [3]. Регистрировались частотные зависимости мнимой $\text{Im}Z(\omega)$ и реальной $\text{Re}Z(\omega)$ составляющих комплексного сопротивления $Z(\omega)$ в диапазоне частот $f = \omega/2\pi$ 1 Гц – 1 МГц. Запись СЭИ-спектров проводилась до, непосредственно после, а также через 20, 40, 60 мин, 2, 3, 5, 24 и 48 часов после экспозиции образцов МИВ. Аппроксимацию экспериментальных спектров СЭИ выполняли с помощью программного пакета EIS Spectrum Analyser [4]. Анализировались также частотные зависимости действительной $\text{Re}Z$, мнимой $\text{Im}Z$ компонент комплексного импеданса и тангенса диэлектрических потерь $\text{tg}\delta = \text{Im}Z/\text{Re}Z$.

Результаты измерений

Образцы в состоянии поставки. На рис.1 представлены спектры образцов в состоянии поставки (первой серии). Годограф существенно отличается от полуокружности в координатах $\text{Im}Z\text{--Re}Z$. Следовательно, характер импедансных спектров образцов первой серии не соответствует простой модели дебаевской релаксации с эквивалентной схемой параллельного соединения емкости и активного сопротивления, а имеет сложную зависимость отклика на возбуждающий сигнал в используемом частотном диапазоне. О чем свидетельствуют и частотные зависимости от частоты тангенса диэлектрических потерь (рис.2).

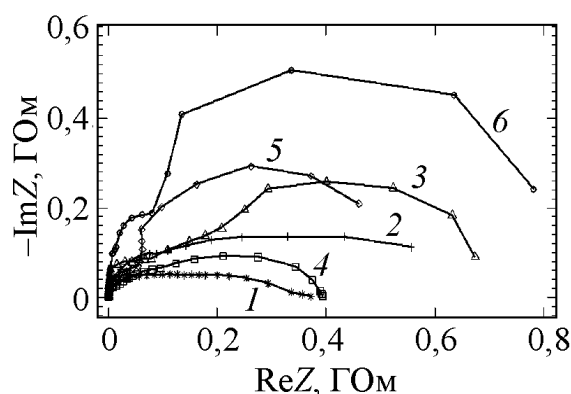


Рис. 1. Импедансные спектры образцов в состоянии поставки: 1 – непосредственно после МИВ; 2 – через 40 мин; 3 – через 2 ч; 4 – через 5 ч; 5 – через 24 ч; 6 – через 48 ч.

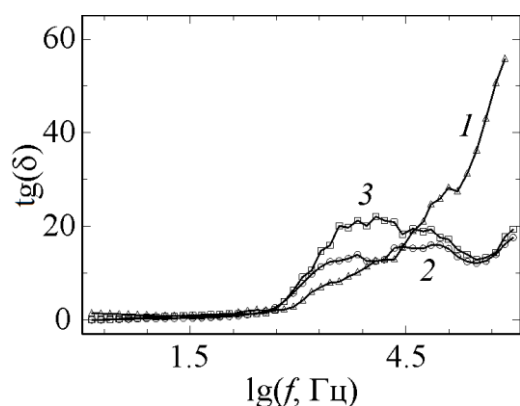


Рис. 2. Зависимость от частоты тангенса диэлектрических потерь до (1), после (2) и через 2 ч после МИВ (3).

Пространственная организация образцов. С точки зрения теории дисперсных систем, исследуемые образцы могут быть представлены в виде ультрадисперсной системы, где дисперсной фазой является агрегат угольного вещества, а дисперсионной средой – вода, распределенная в объеме порового пространства в молекулярном и диссоциированном виде. По агрегатному состоянию фаз в материале угля можно выделить три основных компонента: пористая углеродная матрица, вода и газ, заполняющие свободный объем пор. Многофазность данной физической системы объясняет сложность протекающих в ней электрофизических процессов.

Электрические свойства. Рассмотрим исследуемую дисперсную систему в терминах эффективных диэлектрических проницаемостей ϵ или электропроводностей σ . На комплексной плоскости диэлектрическая проницаемость представляется в виде вектора

$$\epsilon^* = \epsilon' - j\epsilon'' , \quad (1)$$

где j – мнимая единица. Действительная ϵ' и мнимая ϵ'' компоненты диэлектрической проницаемости выражаются соответственно через ёмкость $C(\omega)$ и электрическое сопротивление $R(\omega)$ образца через следующие равенства:

$$\frac{d}{S} \sigma'(\omega) = \frac{d}{S} \epsilon''(\omega) \quad (2)$$

где d и S – толщина образца и площадь электродов на его поверхности соответственно, ω – циклическая частота.

Удельная электропроводность (действительная часть комплексной величины $\sigma'(\omega)$), характеризующая активные потери, связана с диэлектрической проницаемостью равенством

$$\sigma'(\omega) = \epsilon''(\omega) \epsilon_0 \omega \quad (3)$$

Частотные зависимости этих величин для образцов первой серии представлены на рис.3.

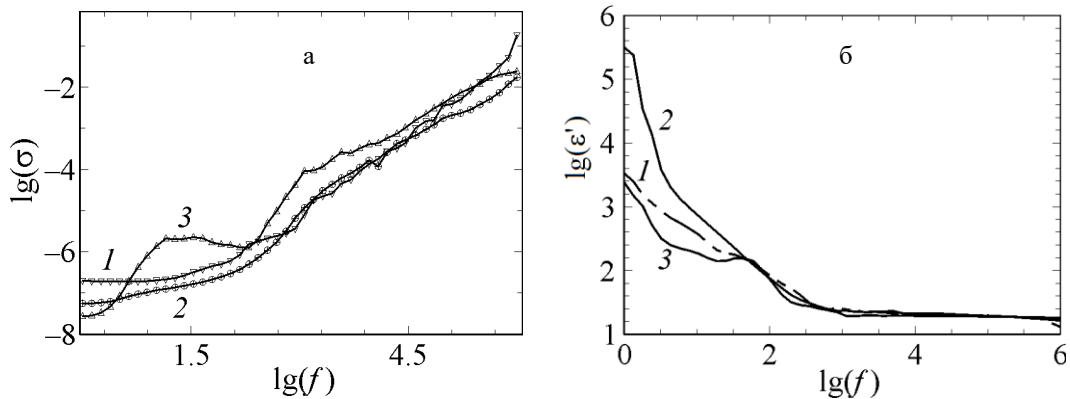


Рис. 3. Зависимость электропроводности σ' (а) и действительной компоненты диэлектрической проницаемости ϵ' (б) образца первой серии от частоты в двойных логарифмических координатах до (1), после (2) и через 48 ч (3) после МИВ.

Пространственная организация системы после МИВ. Действительные части электропроводности σ' (рис.3, а) и диэлектрической проницаемости ϵ' (рис.3, б) для образцов первой серии в двойных логарифмических координатах имеют соответственно линейную и экспоненциальную зависимости от частоты сигнала. Согласно [5], тангенс угла наклона графика $\sigma(f)$ в двойных логарифмических координатах связан с фрактальной размерностью D_f поверхности пор равенством $\alpha = (D_f - 1)/2$. Для исходного образца и непосредственно после МИВ D_f превышает размерность пространства вложения $d = 3$ для поверхности ($\alpha > 1, D_f > 3$). Через 40 мин, а также через 5 и 48 часов после МИВ значения D_f равны соответственно: 2.88, 2.68 и 2.84, то есть МИВ приводит к изменению фрактальной размерности системы, которая эволюционирует в процессе релаксации.

Влияние МИВ на величину диэлектрической проницаемости материала образцов в состоянии поставки. Основной особенностью электрофизических параметров исследуемых образцов являются сравнительно высокие [6–9] значения диэлектрической

проницаемости ϵ' в исследуемом интервале частот (рис. 3,б). Согласно рис. 3,б, в низкочастотном интервале ($f \rightarrow 0$) МИВ приводит к существенному: (от $\epsilon' > 10^3$ до $\epsilon' > 10^4$) повышению значения диэлектрической проницаемости образцов. При максимальной частоте измерений $f = 1$ МГц ϵ' достигает значений 16–20, которые превосходят значение $\epsilon' = 4$, приведённое в литературе [6-9] для сухих углей. Это означает, что в структуре угля ДГ находится достаточно большое количество молекул воды, которые поляризуются в переменном электрическом поле. Вероятно, именно они определяют и значительную дисперсию электрических свойств системы после МИВ на низких частотах.

Электрические свойства и структурная организация обезвоженных углей (серия 2). Высокие значения ϵ' невозможно объяснить только содержанием влаги, так как использование формулы для гетерогенных систем [9] вида

$$\epsilon' = w\epsilon'_w + (1-w)\epsilon'_c \quad (4)$$

не позволяет объяснить значения $\epsilon' > 10$. В выражении (4) w – влажность образца, ϵ'_w, ϵ'_c – диэлектрическая проницаемость воды и сухого угля соответственно.

С целью выявить объект, определяющий электрические свойства системы в условиях воздействия МИВ, была проведена серия экспериментов с обезвоженными образцами (серия 2). В этом случае, согласно сделанному выше предположению о структуре и агрегатном состоянии основных фаз материала исследуемых объектов, объём пор занят исключительно газовой фазой.

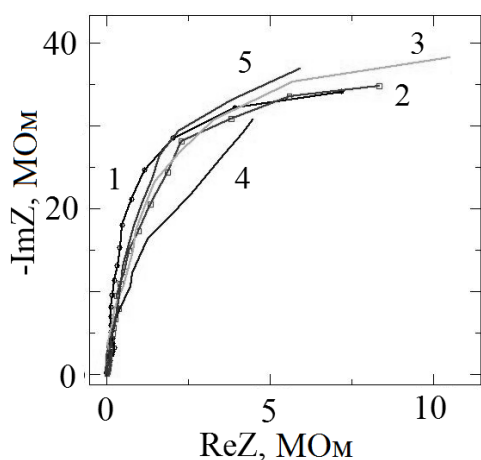


Рис. 4. Годограф обезвоженного образца угля ДГ: 1 – до, 2 – непосредственно после МИВ, 3 – через 1 ч, 4 – через 5 ч, 5 – через 24 ч.

На рис.4 приведено семейство годографов до и в различные моменты времени после МИВ. Видно, что характер спектров существенно отличен от спектров образцов в состоянии поставки (серия 1). Не разрешается высокочастотный полукруг, что, вероятно, обусловлено снижением проводимости объекта после сушки, то есть сигнал затухает вблизи поверхности электродов. Вероятно, квазиions воды в образцах первой серии обеспечивали так же и гальваническую связь поверхности диэлектрических структурных элементов материала угля с электродами.

Из рис. 4 видно также, что МИВ приводит к еще большему, по сравнению с прокалкой, повышению полного сопротивления образца. Следует отметить, что годограф, полученный через 5 ч после МИВ, нарушает общую тенденцию возрастания площади подграфика со временем. Этот эффект указывает на немонотонный характер релаксации электрофизических свойств двойных электрических слоев, возбужденных импульсным магнитным полем.

Влияние МИВ на величину диэлектрической проницаемости материала обезвоженных образцов. Рассмотрим изменения электрофизических параметров образца после МИВ. На рис. 5 представлена зависимость от частоты электропроводности $\sigma'(f)$ (рис.5,а) и тангенса угла потерь (рис.5,б) обезвоженного образца угля в различные моменты времени после МИВ. Тангенс угла потерь $\text{tg}\delta$ и электропроводность $\sigma'(f)$ испытывают изменения в большей степени в высокочастотной области ($f > 10^4$ Гц). После МИВ $\text{tg}\delta$ увеличивается. При этом резонансная частота f_m , соответствующая максимуму потерь (рис.5,б), смещается в направлении более низких частот, но со временем её значение восстанавливается. Если в исходном образце $f_m > 1$ МГц, то после МИВ $f_m \approx 0.35$ МГц. Через 24 ч она увеличивается до 0.5 МГц, а через 48 ч достигает $f_m = 1$ МГц. В сравнении с об-

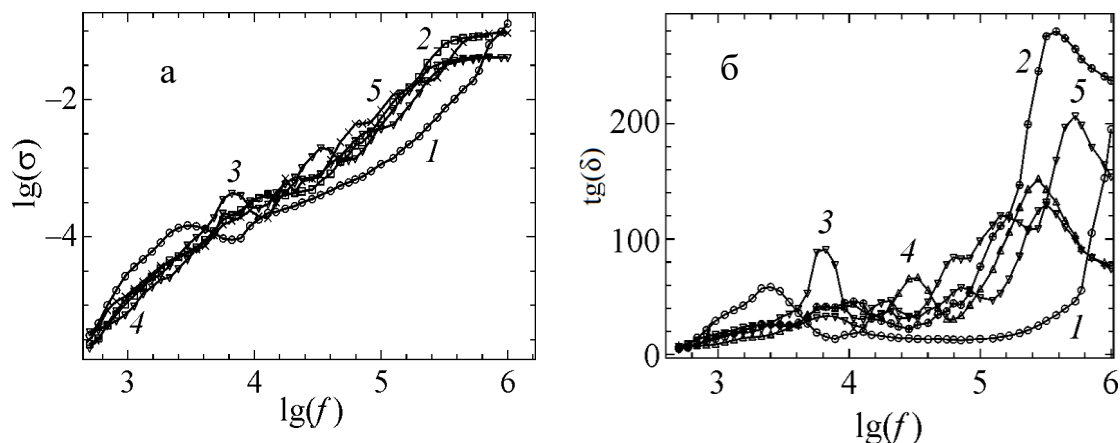


Рис. 5. Зависимость электропроводности (а) и тангенса потерь (б) обезвоженного образца угля от частоты: до (1), сразу после (2), через 60 мин (3), через 5 часов (4) и через 24 часа (5) после МИВ

разцами в состоянии поставки, нижняя частота диапазона изменения частот у обезвоженных образцов существенно ниже, а амплитуда её изменения существенно выше. Следовательно, в электрических процессах в материале углей, кроме водной составляющей, участвует широкий спектр полярных структурных элементов с различной энергией активации поляризации.

Пространственная организация обезвоженной системы. В интервале частот $f \in (10^4 - 10^5)$ Гц (рис.5, а) возможна аппроксимация зависимости $\lg(\sigma)$ с коэффициентом $\alpha = 0.81$. Этому значению соответствует фрактальная размерность $D_f = 2.62$. Для более высоких частот $\alpha = 0.86$. Максимальное значение $\alpha = 1.86$, зафиксировано непосредственно после МИВ. Последующая релаксация структуры приводила в уменьшению α до вели-

чины в 1.5 раза меньшей максимального значения. Следовательно, как и в случае с образцами в состоянии поставки, МИВ приводило к изменению фрактальной размерности системы. В частности, после МИВ наблюдается резкое повышение размерности и её последующее снижение, что может быть интерпретировано всплеском и последующим затуханием химической активности поверхности пор. Фрактальная размерность системы в данном случае изменяется как результат изменения энергии взаимодействия химически сорбированных ионных атмосфер с поверхностью наночастиц. В рамках данного предположения, энергия связи адсорбатов с поверхностью в первые моменты после МИВ резко снижается, а затем медленно релаксирует к исходному состоянию.

Выводы

Установлено, что МИВ приводит к снижению электропроводности образца и смещению величины тангенса угла потерь в область низких частот. Наибольшие изменения удельной электропроводности происходят на частотах $f > 10^4$ Гц, соответствующих собственным частотам отклика гетерофазных границ образца.

Установлено, что МИВ приводит к изменению фрактальной геометрии системы. В частности, после МИВ наблюдается повышение в 1.5 раза фрактальной размерности и её последующее снижение до исходного состояния, что может быть интерпретировано всплеском и последующим затуханием химической активности поверхности пор.

Показано, что МИВ вызывает десорбцию газовой фазы из объёма пор угольного материала и может быть использовано для осуществления дегазации угольных пластов в шахтах.

Показано, что присутствующая в составе угля вода не является основным объектом локализации энергии импульсного магнитного поля. В электрических процессах в исследуемых углях участвует широкий спектр полярных структурных элементов с различной энергией активации поляризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А.Д., Гриньов В.Г. и др. – Патент на корисну модель № 48639, Украина, МПК E21F 7/00.
2. Константинова Т.Е., Дорошкевич А.С. и др. – Матер. XLIII междунар. конф. «Актуальные проблемы прочности», 27 сентября-1 октября 2004 г., Витебск, Беларусь, часть 1, с. 191–196.
3. Агамалов Ю.З., Бобылев Д.Ф., Кнеллер В.Ю. – Датчики и системы, 2004, № 5, с.14-18.
4. Интернет-ресурс: <http://www.abc.chemistry.bsu.by/vi/analyser/> – Программа для анализа и моделирования спектров импеданса.
5. Wong P.Z. – Phys. and Chem. of Porous Media, v.2, eds. Bahavar J.P., Koplik J. & Winkler K.W., 1987, Am. Inst. Phys., v.154, pp. 304-318.
6. Агроскин А.А. – Физические свойства углей, Москва: ГНТИ Литература по черной и цветной металлургии, 1961, 308 с.
7. Miyasita I., Higasi K. – J. Chem. Soc. Japan, 1957, v.30, pp. 513-517.
8. Podder J., Majumder S. –/ Thermochemica Acta, 2001, v.372, pp.113-118.
9. Арш Э.И., Красин Л.А., Носов Г.Р. – ФТПРПИ, 1969, № 1, с.83-88.

10. Chelidze T.L., Gueguen Y. and Ruffet C. – Geophys. J. Int., 1999, v.137, pp.16-34.
 11. Popova A., Sokolova E. et al. – Corrosion science, 2003, v.45, pp. 3-58.

Т.А.ВАСИЛЕНКО, А.К.КИРИЛЛОВ, А.С.ДОРОШКЕВИЧ*, А.В.ШИЛО*
ЭФФЕКТИ ТАЪСИРИ ИМПУЛСҲОИ КАММАВЧИ МАЙДОНИ
МАГНИТӢ БА ҲОЛАТИ ЭЛЕКТРОФИЗИКИИ АНГИШТСАНГ

Институти физикаи равандҳои кӯҳии АИМ Украина,

**Институти физикаю техникаи Донецк ба номи. А.А.Галкини АИМ Украина*

Бо усули импеданси электрохимиявӣ, ангишти зинаи бармаҳали метаморфизмӣ тадқиқ гардид. Вобастагӣ аз мавҷи таносуби нуфузпазирии диэлектрикӣ, электргузаронии мутлақ ва тангенсӣ талафот барои намунаҳои аввала, намдор ва хушконидашуда нишон оварда шудааст. Нишон дода шудааст, ки таъсири импульси майдони магнитӣ (ТИМ) бо интенсивнокии $H=10^5-10^6$ А/м ва мавҷи импульси паҳамии $\nu=1$ Гц ба тағйирёбии назарраси ин базургиҳо оварда мерасонад. Намунаҳо вобаста аз намнокӣ нишондиҳандаҳои гуногунро ба ТИМ доро мебошанд. Бо ёрии схемаҳои электрикӣ эквиваленти вақтҳои релаксационии поляризатсияи магниту индуксионии молекулаҳои флюид ва матрисаи саҳти ангишт муайян шуданд. Ҳатнгоми релаксатсияи раванди давомдор баргашти ҳамаи ҳолатҳои электрофизикӣ ба ҳолати аввала мушоҳида намешавад ва тағйирот дар раванди релаксационӣ хусусияти тағйироти нишонахоро дорад. Озмоиш шароити маҳсулноктари беҳавоқунии пластҳои ангиштро бо ёрии ТИМ нишон медиҳад.

Калимиҳои калидӣ: ангиштсанг – хосияти электрикӣ – майдони магнитии импульсаш суст – эффекти магниту индуксионӣ – беҳавоқунии пластҳои ангиштсанг.

T.A.VASILENKO, A.K.KIRILLOV, A.S.DOROSHKEVYCH*, A.V.SHYLO*
EFFECTS OF LOW FREQUENCY PULSED MAGNETIC FIELD
ON THE ELECTRICAL CHARACTERISTICS OF COAL

Institute for Physics of Mining Processes National Academy of Sciences of Ukraine,

**O.O.Galkin Donetsk Institute of Physics and Engineering*

By the electrochemical impedance method a coal with early stage of metamorphism was investigated. The dependencies from the frequency of relative permittivity, conductivity and loss tangent for the starting, wetted, and dried sample was presented. It is shown that the effects of pulsed magnetic (PMF) field with intensity $H = 10^5-10^6$ A/m and a frequency pulse repetition $\nu = 1$ Hz is results to significant changes of these variables. The samples had different responses to the PMF with depending from the humidity. Using the equivalent electrical circuit, the characteristic relaxation times of the magnetically induced polarization of fluid molecules and the solid matrix of coal was determinates. The largest changes was occurs at the interfaces

of the sample. At long relaxation processes the return of all electrical characteristics to the original state is not observed and their changes in the relaxation process have an alternating pattern. The work shows the potential for effective degassing of coal seams using PMF.

Key words: anthracite coal – electric properties – weak pulsed magnetic fields – magnetic fields induced effects – degassing of coal layers.

УДК 544.31.32:546.65

С.К.НАСРИДДИНОВ, Д.Ш.ШАРИПОВ, М.С.ИСЛОМОВА, А.БАДАЛОВ

**ПОЛУЧЕНИЕ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕТРА-
ГИДРАТА ФТОРИДА И ГИДРОКСОКАРБОНАТА КОБАЛЬТА (II)**

Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими

Поступила в редакцию 18.04.2013 г.

Тетрагидрат фторида кобальта (II) получен при взаимодействии гидроксикарбоната кобальта (II) с растворами плавиковой кислоты разной концентрации. Методом калориметрии определено значение энтальпии этой и побочных реакций. По термохимическому циклу определены величины энтальпии образования тетрагидрата фторида кобальта (II) и гидрокси-карбоната кобальта (II).

Ключевые слова: кристаллогидрат – гидрофторид - гидроксикарбонат-кобальт- калориметрия-растворение – энтальпия образования.

Развитие современной цивилизации и технологии тесно связано с достижениями химии фтора и его соединений. Фторсодержащие соединения широко применяются в современных областях техники и технологии. В частности, неорганические фториды, которых насчитывается порядка нескольких тысяч, используются в атомной энергетике как ядерное топливо, при выплавке стали и в цветной металлургии как флюсоующие добавки, в волоконной светотехнике, в электронике и лазерной технике как твёрдые электролиты и катодные материалы, стеклообразные и кристаллические фторидные матрицы; в стекольной и керамической промышленности; в сельском хозяйстве и химической технологии [1-4].

Нынешняя ступень развития химии фторидов связана с всесторонним исследованием строения, свойств и реакционной способности атомарного и ионизированного фтора, гидрофторид-анионов, колебательно–возбужденных эксимерных фторидов, соедине-

Адрес для корреспонденции: Бадалов Абдулхайр. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Раджабовых, 10, Таджикский технический университет. E-mail: badalovab@mail.ru

ний фтора с бором, фторсодержащих высокотемпературных органических соединений [1-5].

При этом следует придавать особое значение проблеме экологии и защиты окружающей среды от влияния фтора и фторсодержащих соединений. В многочисленных работах, посвящённых изучению диаграмм состояния двойных (MF_n-HF) и тройных (MF_n-HF-H_2O) систем, установлено, что в зависимости от химической активности металла (М), от природы химической связи взаимодействующего фторида и концентрации фтористого водорода в этих системах могут протекать такие процессы, как: сольватация, гидролиз, комплексообразование. В результате может образоваться ряд соединений безводных, гидратированных фторидов, гидрофторидов, оксофторидов, оксофторкислот и фторкислот [2,4].

В системах, с участием фторидов щелочных металлов (ЩМ) и щёлочноземельных металлов (ЩЗМ) [2-7], при преобладающей доле ионной связи во фторидах, доминирует сольватирующая способность фтористого водорода. В этих системах образуется ряд гидрофторидов состава $MF - nHF$, где $n=(1...6)$. Имеющиеся сведения о строении, термических и термодинамических свойствах гидрофторидов ЩМ и ЩЗМ обобщены в работах [4-7].

Данная работа является продолжением наших исследований [4,7]. Она посвящена получению и определению термодинамических характеристик соединений кобальта (II) - тетрагидрата фторида и гидрокарбоната.

В ранних работах [8,9] описаны методы получения тетрагидрата фторида кобальта(II)- $CoF_2 \cdot 4H_2O$. В [8] приведено, что $CoF_2 \cdot 4H_2O$ при нагревании на воздухе подвергается гидролизу с образованием гидрофторида. Авторы [10] утверждают, что при нагревании кристаллогидрата до температуры 400 К в инертной атмосфере происходит его дегидратация с незначительным гидролизом. Процесс завершается при 450 К и при более высоких температурах протекает с образованием оксофторидов кобальта [11].

Исследованием тройных систем $HF-H_2O-Co^{+2}(aq)$ показано, что при низких концентрациях плавиковой кислоты наблюдается образование $CoF_2 \cdot 4H_2O$, а при высоких - образуются смешанные соединения разных составов [8-12]. Термодинамические характеристики $CoF_2 \cdot 4H_2O$ изучены недостаточно. Лишь в работе [13] приведено единичное оценочное значение величины энтальпии образования этого соединения.

В данной работе соединение $CoF_2 \cdot 4H_2O$ получено взаимодействием определённой массы гидрокарбоната кобальта (II)- $(CoOH)_2CO_3$ (марки х.ч.) с растворами плавиковой кислоты различной концентрации.

Измерение энтальпии процесса проведено в модифицированной нами калориметрической установке с изотермической оболочкой (табл.1). Перед каждым экспериментом произведена градуировка калориметра электрическим током. Из рисунка наглядно видно, что величины энтальпии процесса заметно отличаются между собой в зависимости от концентрации раствора плавиковой кислоты. Этот факт показывает об отличающихся ха-

ракторах происходящих процессов и образованию разных продуктов реакции в зависимости от концентрации раствора плавиковой кислоты. Подтверждаются результаты других авторов [8-12] об образовании $\text{CoF}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ в этих системах при низких концентрациях раствора плавиковой кислоты.

Таблица 1

Условия и энтальпия реакции взаимодействия $(\text{CoOH})_2\text{CO}_3$
с растворами плавиковой кислоты

C, % масс.	Масса образца(м), г	ΔR , Ом	Q, Дж	ΔH_{298}° реакции, кДж/моль		
				опыт	среднее по опытам	среднее по ступеням
10	0,2553	21,986	171,46	142,38	149.3± 1.0	
	0,2948	27,697	216,02	155,35		
	0,2890	25,839	201,54	147,86		
	0,2961	27,393	213,67	152,96		
	0,2845	24,510	191,16	142,46		
	0,2731	23,916	186,43	144,80		
	0,3045	28,524	222,46	154,89		
	0,2958	29,091	226,46	160,45		
	0,2983	25,929	202,21	143,72		
20	0,3027	27,928	202,58	141,88	143.9±0.5	147.6±3.7
	0,2936	27,492	200,14	144,51		
	0,3222	29,000	211,12	138,91		
	0,2365	22,890	166,64	149,36		
	0,3373	31,714	230,87	145,10		
	0,2814	26,619	193,74	145,93		
	0,3050	27,960	203,55	141,46		
	0,3097	28,934	210,64	144,18		
35	0,1159	12,278	82,67	151,62	149.7±0.5	
	0,1155	12,363	82,92	152,75		
	0,1144	11,985	80,66	149,53		
	0,1210	12,440	83,80	146,85		
	0,1352	14,400	96,98	152,04		
	0,1197	12,189	82,09	145,39		
40	0,7575	17,84	132,80	178,78	178.7±0.9	182.3±3.6
	0,1708	19,58	145,37	180,91		
	0,1422	16,39	122,00	181,87		
	0,1441	15,82	120,58	173,26		
45	0,1167	14,08	105,27	191,25	186.0±0.9	
	0,1282	15,01	112,25	185,64		
	0,1556	17,98	134,47	183,21		
	0,2075	24,06	179,91	183,80		

Химический анализ фторида кобальта, высушенного в вакууме при 300 К до постоянной массы, проведён методом изотермической растворимости с анализом фаз по Скрейкнемакерсу. Содержание плавиковой кислоты в твёрдой и жидкой фазах системы определено титрованием щёлочью, также количественным тензиметрическим методом (табл.2).

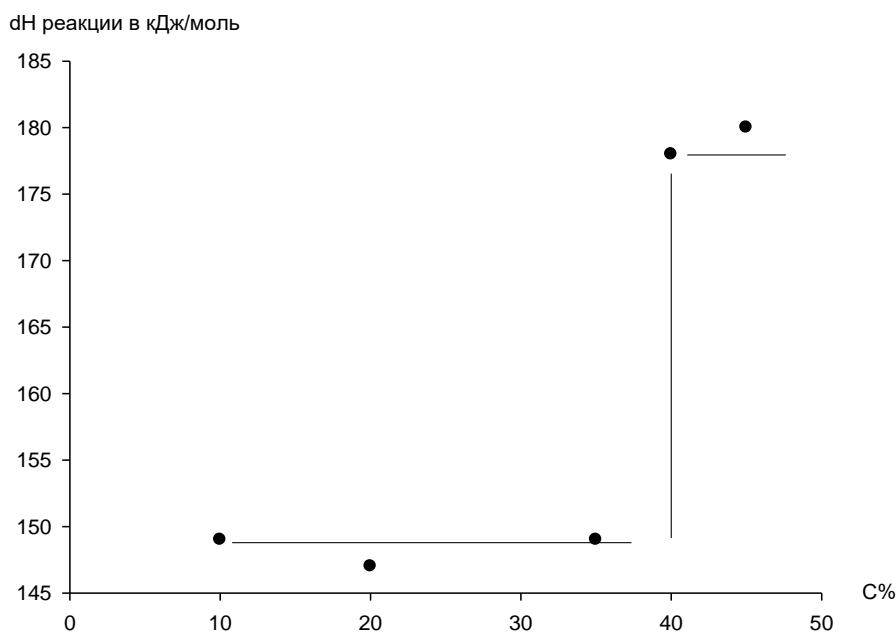


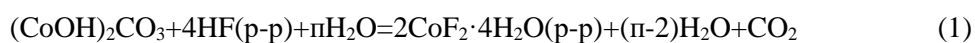
Рис. Величина энтальпии процесса взаимодействия $(\text{CoOH})_2\text{CO}_3$ в зависимости от концентрации раствора плавиковой кислоты.

Таблица 2

Результаты химического анализа тетрагидрата фторида кобальта

Соединение	Содержание, масс%					
	Co		F		H ₂ O	
	найдено	вычисл.	найдено	вычисл.	найдено	вычисл.
$\text{CoF}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$	34.86	34.91	23.06	23.07	42.62	42.60

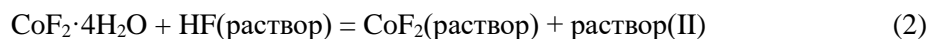
На основании экспериментальных термохимических эффектов изученных процессов, результатов химического анализа и литературных сведений можно утверждать, что реакция взаимодействия $(\text{CoOH})_2\text{CO}_3$ с растворами плавиковой кислоты низкой концентрации (10,20 и 35% масс.) протекает с образованием тетрагидратофторида кобальта по уравнению:



Раствор окрашивается в характерный для $\text{CoF}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ розовый цвет. Взаимодействие $(\text{CoOH})_2\text{CO}_3$ с растворами плавиковой кислоты более высоких концентраций (40 и 45% масс) протекает с образованием смешанных соединений [8-12].

Для проведения термохимических расчётов по определению величины энтальпии образования $\text{CoF}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ необходимо было определить тепловые эффекты следующих побочных процессов:

- взаимодействие $\text{CoF}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ с растворами плавиковой кислоты 10,20 и 35% масс. концентраций, которое выражается уравнением



Процесс сводится к эндотермическому растворению фторида кобальта (II) (табл.3) и экзотермическому взаимодействию кристаллизационной воды с плавиковой кислотой [4,7];

Таблица 3

Взаимодействия $\text{CoF}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ с 35%-ым раствором плавиковой кислоты

С, %	m, г	$\Delta R, \text{Om}$	$Q_1, \text{Дж}$	$M_{\text{H}_2\text{O}}, \text{г}$	$Q_2, \text{Дж}$	$(Q_1 - Q_2), \text{Дж}$	$\Delta H_{298}^0 \text{реакции, кДж/моль}$	
							опыт	среднее
35	0.7949	17.729	119.36	0.3386	26.44	145.81	31.00	31.1±0.6
	0.6260	13.810	93.01	0.2667	20.83	113.84	30.75	
	0.7298	16.520	111.25	0.3109	24.62	135.51	31.38	
	0.7451	15.735	105.93	0.3174	24.81	130.75	32.05	
	0.8054	16.922	113.93	0.8431	26.81	140.74	30.53	

- с целью определения неизвестной величины энтальпии образования $(\text{CoOH})_2\text{CO}_3$ проведено калориметрическое измерение энтальпий процессов взаимодействия 0.1н раствора азотной кислоты с $(\text{CoOH})_2\text{CO}_3$ (табл.4), выражающегося уравнением



и с $\text{Co}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ (табл.4).

Таблица 4

Условия и энтальпия реакции взаимодействия соединений с 0.1н раствора азотной кислотой

Массы вещества, г	$\Delta R, \text{Om}$	Q, Дж	$\Delta H_{298}^0 \text{реакции, кДж/моль}$	
			опыт	среднее
а) $(\text{CoOH})_2\text{CO}_3$				
0.0930	8.490	61.92	142.88	143.48±0.35
0.1262	11.534	85.14	142.94	
0.1289	12.00	88.57	145.68	
0.1022	9.303	68.61	142.42	
б) $\text{Co}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$				
0.9102	9.737	71.88	30.54	31.23±0.24
0.9588	10.449	77.11	31.12	
0.5858	6.284	46.40	30.62	
0.5688	6.506	49.53	32.67	

Проведена градуировка калориметра с раствором азотной кислоты.

Полученные таким образом значения энтальпии реакций (1)-(3), приведённые в табл.1, 3 и 4, а также справочные значения термодинамических характеристик компонентов исследуемых систем [14,15] позволили определить экспериментально значение энтальпии образования $\text{CoF}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, равное $\Delta_f H_{298}^0 = -1881.2 \pm 53$ кДж/моль, которое хорошо совпадает с литературным (табл.7). В табл.5 приведено также определенное нами значение энтальпии образования $(\text{CoOH})_2\text{CO}_3$

Таблица 5

Значение энтальпии образования компонентов исследованных систем

С. %масс.	Энтальпия образования соединения, $\Delta_f H^\circ_{298}$. кДж / моль								
	Опыт	Литература [14.15]				Экспериментальные данные			
		ΔH° реак.	HF	Co(NO ₃) ₂ * 6H ₂ O	HNO ₃	H ₂ O	CoF ₂ (раств-р)	(CoOH) ₂ CO ₃	CoF ₂ ·4H ₂ O
								опыт	[13]
C ≤ 35	147.6 ± 0.5	314.3 ± 0.7	2209 ± 83	207.6 ± 3	285.8 ± 3	876 ± 5	1428 ± 51	1881 ± 53	1903.72

ЛИТЕРАТУРА

1. Раков Э.Г. Химия и технология неорганических фторидов.- М.: МХИТ,1990, 162 с.
2. Исикава Н. Новое в технологии соединений фтора.- М.:Мир, 1984, 591 с.
3. Опаловский А.А., Федотова Т.Д. Гидрофториды. – Новосибирск, СО АН СССР: Наука, 1973,148 с.
4. Хакимова Д.К., Шарипов Д.Ш., Бадалов А.Б. - Вестник СПбГУ. Физика. Химия, сер.4, 2010, вып.4, с.75-82.
5. Jache A.W., Cady G.N. - J.Phys., 1952, v.55, №5, p.136.
6. Pawtenko V.P. - Gnozg. Allg. Chem., 1962, v.315, p.116.
7. Бадалов А.Б., Шарипов Д.Ш., Рузматова Г.К., Насриддинов С.К. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2010, №1(138), с.60-66.
8. Kurtenacher G., Finzer J.- Z. Anorg. Chem., 1933, v.211, 82, pp.281-285.
9. Икрами Д.Д., Охунов Р., Каримов В.- Докл. АН ТаджССР, 1975, т.18, №1, с.34-37.
10. Schmidt Von. H.- Z. Anorg. Chem., 1965, v.334, № 5-6, pp.297-303.
11. Островская Т.В., Амирова С.А.- Журн. неорган. химии, 1969, т.14, №6, с.1443-1448.
12. Vanerjee V., Bisuras P.K., Roy Ch.N.- Thermochim acta, 1981, v.47, №2, pp.179-188.
13. Карапетьянц М.Х., Карапетьянц М.Л. - Труды МХТИ им. Д.И.Менделеева, 1955, вып.20, с.10-14.
14. Термические константы веществ. Справочник в десяти выпусках. (под общей ред. акад. В.П.Глушко). – М. : АН СССР. ВИНТИ. ИВТ, 1975, вып.6, 268 с.
15. Волков А.И., Жарский И.М. Большой химический справочник. – Минск: Современная школа, 2005, 608 с.

С.К.НАСРИДДИНОВ, Д.Ш.ШАРИПОВ, М.С.ИСЛОМОВА, А.БАДАЛОВ

**ҲОСИЛ НАМУДАН ВА ТАВСИРОТИ ТЕРМОДИНАМИКИИ
ТЕТРАҲИДРАТ ФТОРИД ВА ҲИДРОКСОКАРБОНАТИ КОБАЛТИ (II)**

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи М.Осимӣ

Тетраҳидрат фториди кобалти (II), дар натиҷаи таъсири мутақобилии гидроксикарбонати кобалти (II) бо маҳлули тезоби фтороҳидроген, ҳосил карда шудааст. Бо усули калориметрӣ гармии ин таомул ва дигар протсессҳои лозими чен

карда шудаанд. Бо воситаи сикли термохимиявӣ бузургии энталпияи ҳосилшавии пайвастагиҳои кобалти (II)- гидроксикарбонат ва тетрагидрат фториди кобалти (II) муайян карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: кристаллохидрат – гидрофторид – кобалт – калориметрия – ҳалшавандагӣ – энталпияи ҳосилшавӣ.

S.K.NASRIDDINOV, D.SH.SHARIPOV, M.S.ISLOMOVA, A.BADALOV

SYNTHESIS AND THERMODYNAMIC CHARACTERISTICS OF FLUORIDE TETRAHYDRATE COBALT (II) AND HIDROKSOKARBONATE

M.Osimi Tajik Technical University

Fluoride tetrahydrate cobalt (II) was obtained by the reaction of cobalt hidroksokarbonat (II) with hydrofluoric acid solutions of different concentrations. The enthalpy of this and adverse reactions was defined by calorimetry method. By thermochemical cycles was determined the enthalpy of formation of fluoride tetrahydrate cobalt (II) and gidroksokarbonata cobalt (II).

Key words: crystalline – hydrofluoride – cobalt – calorimetry – dissolution – the enthalpy of formation.

УДК 546.662:87 : 669.017.1.

Х.А.РАХИМОВ, В.Д.АБУЛХАЕВ, И.Н.ГАНИЕВ, С.О.УБАЙДОВ

ДИАГРАММА СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ $Gd_5Bi_3-Lu_5Bi_3$

Институт химии им. В.И.Никитина АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 20.09.2013 г.

В статье приведены результаты исследования диаграммы состояния системы $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$. Установлено, что концентрационная зависимость удельного электросопротивления и термо-э.д.с. твёрдых растворов $Gd_{5-x}Lu_xBi_3$ ($x= 0.5-4.5$) коррелирует с диаграммой состояния системы $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$. Кристаллохимические исследования показали, что твёрдые растворы $Gd_{5-x}Lu_xBi_3$ ($x= 0.5-4.5$), как и исходные компоненты – Gd_5Bi_3 и Lu_5Bi_3 , кристаллизуются в ромбической структуре типа Y_5Bi_3 .

Ключевые слова: диаграмма состояния – синтез – сплавы – твердые растворы – удельное электросопротивление – термо-э.д.с. – микротвёрдость.

Среди известных соединений, образующихся в системах, наиболее интересные физические свойства, в частности магнитные, проявляют висмутиды тяжелых РЗЭ состава Ln_5Bi_3 ($Ln= Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Lu$). По данным [1], указанные висмутиды при комнатной температуре являются парамагнетиками, а при низких температурах испытывают как ферромагнитное, так и ферримагнитное упорядочение.

В связи с этим исследования, связанные с изучением взаимодействия в системах $Ln_5Bi_3-Ln_5Bi_3$ ($Ln = Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Lu$), представляются актуальной задачей. На основе указанных висмутидов возможно создание новых магнитных материалов.

Следует отметить, что ранее в [2,3] в полном диапазоне концентраций были исследованы диаграммы состояния систем $Ln-Bi$ ($Ln = Gd, Lu$). В системе $Gd - Bi$ установлено образование соединений Gd_5Bi_3 , Gd_4Bi_3 , $GdBi$ и $GdBi_2$, а в системе $Lu - Bi$ образование двух соединений - Lu_5Bi_3 и $LuBi$. Соединения Gd_5Bi_3 , Gd_4Bi_3 , $GdBi_2$ и Lu_5Bi_3 при 1753, 1853, 1183 1723 К, соответственно, плавятся инконгруэнтно. Соединения $GdBi$ и $LuBi$ при 2043 и 2093 К, соответственно, плавятся конгруэнтно.

Адрес для корреспонденции: Абулхаев Владимир Джалолович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: abulkhaev-48@mail.ru

Целью настоящей работы явилось исследование диаграммы состояния системы $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$ во всём диапазоне концентраций.

Диаграмму состояния системы $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$ исследовали дифференциальным термическим (ДТА), рентгенофазовым (РФА) и металлографическим методами анализов. Кроме того, для уточнения строения диаграммы состояния системы $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$ были привлечены дополнительные исследования – концентрационные зависимости удельного электросопротивления, термо-э.д.с. и микротвердости при комнатной температуре.

Было приготовлено более 20 сплавов, через каждые 10 мол.% Lu_5Bi_3 .

Сплавы системы $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$ получали следующим образом. Рассчитанные количества предварительно синтезированных висмутидов – Gd_5Bi_3 и Lu_5Bi_3 смешивали, спрессовывали в цилиндрический штабик и помещали в герметичный молибденовый тигель. Затем тигель с образцом подвергали нагреванию (со скоростью 5-10 К/мин) в среде гелия марки ВЧ. Оптимальная температура синтеза составляла 1523 ± 50 К. При этой температуре образцы выдерживали 2-3 часа.

ДТА, РФА и металлографический анализ сплавов системы $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$ проводили по методикам, приведённым в [1].

Удельное электросопротивление и термо-э.д.с. сплавов определяли четырёхконтактным методом с относительной погрешностью 2.5 и 2% соответственно.

Диаграмма состояния системы $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$, построенная по совокупности экспериментальных данных, приведена на рис. 1.

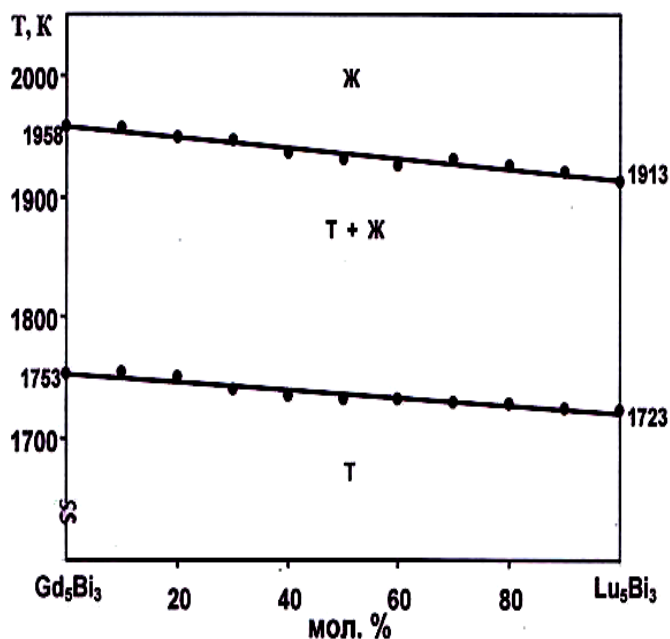


Рис.1. Диаграмма состояния системы $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$.

Из рисунка видно, что данная диаграмма свидетельствует о неограниченной взаимной растворимости компонентов – Gd_5Bi_3 и Lu_5Bi_3 как в жидком, так и в твёрдом состоянии. При этом РФА и металлографический анализ сплавов указывают на образование во всем исследованном диапазоне концентраций твёрдых растворов $Gd_5-xLu_xBi_3$ ($x = 0.5-4.5$). Образованию в системе $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$ твёрдых растворов, с нашей точки зрения, благоприятствуют два фактора: размерный – близость значений атомных радиусов Gd и Lu, которые составляют 0.1801 и 0.1735 нм

[4], соответственно; структурный – изоструктурность висмутидов Gd_5Bi_3 и Lu_5Bi_3 , кристаллизующихся в ромбической структуре типа Y_5Bi_3 .

По данным РФА твёрдые растворы $Gd_{5-x}Lu_xBi_3$ ($x = 0.5-4.5$), как и исходные компоненты - Gd_5Bi_3 и Lu_5Bi_3 , также кристаллизуются в ромбической структуре Y_5Bi_3 . (см. табл). Установлено, что концентрационная зависимость параметра элементарной ячейки твёрдых растворов во всем исследованном диапазоне концентраций изменяется аддитивно.

Концентрационные зависимости удельного электросопротивления и термо-э.д.с. твёрдых растворов (рис. 2, а, б) хорошо коррелируют с диаграммой $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$. Как видно из рисунка, кривые концентрационных зависимостей удельного электросопротивления и термо-э.д.с. во всем диапазоне концентраций не испытывают аномалий. По значениям удельного электросопротивления и термо-э.д.с. можно судить о металлической природе твёрдых растворов системы $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$.

Таблица

Кристаллохимические характеристики висмутидов и твердых растворов на их основе

Соединения и твёрдые растворы	Параметр элементарной ячейки, ± 0.0005 нм			Плотность, $кг/м^3$	
	а	в	с	расчёт.	экспер.
Gd_5Bi_3	0.8245	0.9630	1.2086	9782	9776
$Gd_{4.5}Lu_{0.5}Bi_3$	0.8216	0.9642	1.2642	9432	9428
Gd_4LuBi_3	0.8198	0.9654	1.2498	9609	9588
$Gd_{3.5}Lu_{1.5}Bi_3$	0.8172	0.9672	1.2386	9768	9748
$Gd_3Lu_2Bi_3$	0.8152	0.9676	1.2288	9928	9912
$Gd_{2.5}Lu_{2.5}Bi_3$	0.8138	0.9692	1.2196	10063	10060
$Gd_2Lu_3Bi_3$	0.8116	0.9705	1.1976	10325	10316
$Gd_{1.5}Lu_{3.5}Bi_3$	0.8096	0.9716	1.2022	10380	10372
$GdLu_4Bi_3$	0.8075	0.9736	1.1776	10647	10642
$Gd_{0.5}Lu_{4.5}Bi_3$	0.8062	0.9742	1.1648	10839	10834
Lu_5Bi_3	0.8040	0.9750	1.1712	10865	10856

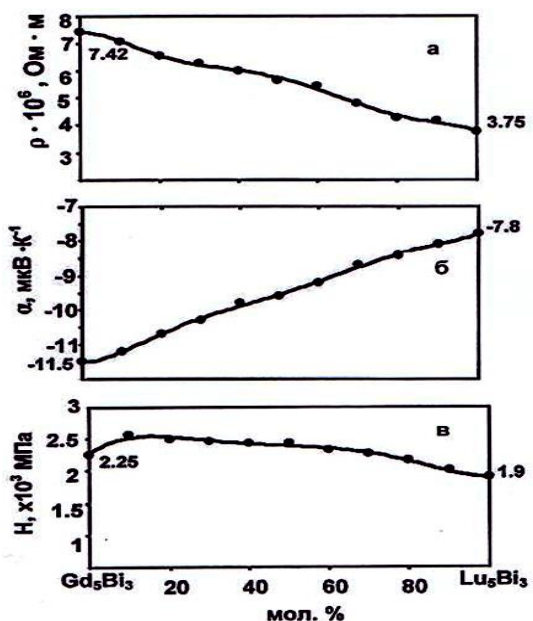


Рис. 2. Концентрационные зависимости удельного электросопротивления (а), термо-э.д.с. (б) и микротвердости (в) твердых растворов $Gd_{5-x}Lu_xBi_3$ ($x=0.5-4.5$) при 298 К.

Концентрационная зависимость микротвердости твёрдых растворов системы $Gd_5Bi_3-Lu_5Bi_3$ (рис. 2, в) описывается с максимумом, который приходится на твёрдый раствор, содержащий 10 мол.% Lu_5Bi_3 . Следует отметить, что аналогичный характер изменения концентрационной зависимости микротвердости, являющейся функцией состава, обычно типичен металлическим системам, где имеет место образование непрерывного ряда твёрдых растворов [5].

Таким образом, по совокупности данных физико-химических исследований впервые построена диаграмма состояния системы $Gd_5Bi_3-Lu_5Bi_3$. Установлено образование в системе непрерывного ряда твердых растворов. Определены кристаллохимические параметры и исследована концентрационная зависимость удельного электросопротивления, сопротивления, термо-э.д.с. и микротвёрдости твёрдых растворов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абулхаев В.Д. Синтез и физико-химические свойства сплавов и соединений редкоземельных элементов сурьмой и висмутом: Автореф. дисс. д.х.н. – Душанбе, 1996, 48 с.
2. Абулхаев В.Д. Диаграмма состояния $Gd - Bi$ // Изв. РАН. Металлы, 1993, №1, с. 187-190.
3. Абулхаев В.Д., Ганиев И.Н. Диаграмма состояния $Lu - Bi$ // Изв. РАН. Металлы. 1995, № 2, с. 157-160.
4. Савицкий Е.М., Терехова В.Ф. Металловедение редкоземельных металлов. – М., 1975, 259 с.
5. Глазов В.М., Вигдорович В.Н. Микротвердость металлов и полупроводников. – М.: Металлургия. 1969. 248 с.

Х.А.РАҶИМОВ, В.Д.АБУЛХАЕВ, И.Н.ФАНИЕВ, С.О.УБАЙДОВ

ДИАГРАММАИ ҲОЛАТИ СИСТЕМАИ $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$

Институти химияи ба номи В.И.Никитини Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Бо воситаи таҳлили дифференциально-термикӣ, рентгенофазӣ ва металлографӣ диаграммаи ҳолати системаи $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$ сохта шудааст. Натиҷаи таҳқиқоти муқовимати ҳоси электрикӣ ва қувваи гармоэлектрорақатдихандаи маҳлулҳои саҳт сохти диаграммаи ҳолати системаи $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$ тасдиқ мекунад. Таҳлили кристаллохимиявӣ нишон дод, ки маҳлулҳои саҳти $Gd_{5-x}Lu_xBi_y$ ($x= 0.5-4.5$) системаи $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$ дар панҷараи ромбии намуди Y_5Bi_3 кристаллизатсия мешаванд.

Калимаҳои калидӣ: диаграммаи ҳолат – синтез – ҳулаҳо – маҳлулҳои саҳт – муқовимати ҳоси электрикӣ – қувваи гармоэлектрорақатдиханда – микросаҳтӣ.

KH.A.RAKHIMOV, V.D.ABULKHAEV, I.N.GANIEV, S.O.UBAYDOV

STATE DIAGRAM OF THE $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$ SYSTEM

VI.Nikitin Institute of Chemistry, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

DTA, XRD and metallography data were used to map out the $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$ phase diagram. The results of resistivity and thermoelectric power measurements are consistent with phase diagram data. Crystallochemical investigations have shown, that solid solutions $Gd_{5-x}Lu_xBi_3$ ($x= 0.5-4.5$) of the $Gd_5Bi_3 - Lu_5Bi_3$ system crystallizes in rhombic Y_5Bi_3 structural type.

Key words: state diagram – synthesis – alloys – solid solutions – resistivity – thermoelectric power – microhardnes.

УДК 544. 032

М.БОБОНАЗАРОВ, М.М.РАХИМОВА, Б.МИРЗОЕВ*

**СЕДИМЕНТАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ФОСФОРИТНОЙ МУКИ
МЕСТОРОЖДЕНИЯ КАРАТАГ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН**

*Научно-исследовательский институт Таджикского национального университета,
*ГНУ «Научно-исследовательский институт промышленности» Министерства
промышленности и новых технологий Республики Таджикистан*

Поступила в редакцию 02.08.2013 г.

В работе методом ситово-весового и седиментационного анализов определены дисперсные характеристики предварительно измельчённого (до крупности 2 мм) зернистого фосфорита месторождения Каратаг. Определены размеры твёрдых частиц по фракциям и их масса. С использованием аналитического метода Цюрупы вычислены минимальные и максимальные размеры осажждённых частиц, изучена кинетика процесса осаждения, рассчитан параметр полидисперсности. Вычислены скорость и время осаждения твёрдых частиц фосфорита в вертикальном реакторе с жидкостью.

Ключевые слова: фосфорит-ситовый анализ – седиментационный анализ – аналитический метод Цюрупы – свободное и стеснённое осаждение.

Каратагское месторождение фосфоритов Таджикистана в настоящее время является в геологическом отношении одним из наиболее детально изученных. Несмотря на малое содержание P_2O_5 , положительной особенностью зернистых фосфоритов этого месторождения является содержание в его составе K_2O и ряда микроэлементов (В, Мп, Мо, Со, Zn, Ag и др.), жизненно важных для растений. На лёгкую обогатимость фосфоритов этого месторождения (путём измельчения и промывки) для промышленного использования было указано ещё в 30-е годы прошлого столетия бригадой АН СССР [1], а позже специалистами Главного управления геологии при Правительстве Республики Таджикистан [2].

Адрес для корреспонденции: Бобоназаров Махмади. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, НИИ Таджикского национального университета. E-mail: mr.muhamadi@mail.ru

Целью данной работы явилось изучение дисперсных характеристик фосфоритной муки, в том числе седиментационных, необходимых для разработки способов обогащения фосфоритов [3] и получения минеральных фосфорсодержащих удобрений.

Гранулометрический состав исходного зернистого фосфоритного сырья после измельчения находился в классе крупности до 2 мм. Ситовый весовой анализ показал, что исходное сырьё по размерам частиц имеет следующие весовые соотношения (табл. 1).

Таблица 1

Ситово-весовой анализ исходного сырья

№, п/п	Размеры частиц, мм	Содержание масс, %
1	< 0.063	12 - 14
2	≥ 0.063; < 0.100	22 - 25
3	< 0.100	34 - 39
4	≥ 0.100; < 0.18	22 - 24
5	≥ 0.18; < 0.25	10 - 14
6	≥ 0.25; < 1	12 - 16
7	≥ 1; < 2	6 - 9

Как видно из таблицы, доля фракции размеров твёрдых частиц фосфорита < 0.18 мм составляет 56-63%. При отделении фракции размеров частиц до 0.25 мм доля дисперсных частиц < 0.18 мм в них составляла около 80%.

Для определения размеров частиц в системах от 1 до 100 мкм широко используется седиментационный метод анализа [4,5]. Поэтому для испытаний взята фракция твёрдых частиц фосфорита размером до 100 мкм.

Если плотность вещества дисперсной фазы больше плотности дисперсионной среды (жидкости), то частицы оседают и система расслаивается на два слоя – осадок и жидкость. Радиус частицы суспензии определяется по формуле:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta \cdot U}{2(\rho - \rho_o)g}} = k\sqrt{U}, \quad (1)$$

откуда постоянный коэффициент k:

$$k = \sqrt{\frac{9\eta}{2(\rho - \rho_o)g}} = const. \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) приняты следующие обозначения: r – радиус частицы; U – скорость оседания частиц; η – коэффициент вязкости (для воды $1.14 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$); ρ – плотность частиц вещества (для фосфоритной муки, $2800 \cdot \text{кг}/\text{м}^3$); ρ_o – плотность вещества жидкости (для воды $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$); g – ускорение свободного падения, $\text{м}/\text{с}^2$. Если пройденный частицей путь за время τ (с) обозначить через H (м), то с учётом уравнений (1) и (2) скорость оседания частицы

$$U = \frac{H}{\tau}, \quad (3)$$

тогда:

$$r = k \cdot \sqrt{\frac{H}{\tau}}. \quad (4)$$

Уравнение (4) лежит в основе седиментационного анализа размеров частиц грубодисперсных систем [5]. Этот метод, будучи одним из видов дисперсионного анализа, имеет огромное практическое значение, поскольку позволяет определить производственные показатели многих промышленных и природных материалов.

Для измерения массы и скорости оседания дисперсных частиц в жидкой среде пользуются седиментометрами.

Из фосфоритной муки, пропущенной через сито размером 0.1 мм, отбирали пробы по 4 г и добавляли в стакан с 800 мл воды. Таким образом готовили суспензию фосфоритной муки. Затем взвешивали массу пустой чашечки в воде. Расстояние от поверхности жидкости до дна чашечки $H=0.1$ м. Перемешивали суспензию и измеряли изменение веса чашечки с суспензией во времени. По уравнениям (1) - (4) рассчитывали константу k , скорости осаждения и радиусы осаждающихся частиц r .

Для более точного построения кинетической кривой распределения частиц суспензии по размерам был использован аналитический метод, предложенный Н.Н.Цюрупой [5]. Независимо от используемой экспериментальной техники седиментационного анализа, кривая накопления осадка полидисперсной суспензии описывается уравнением:

$$Q = Q_m \frac{t}{t + t_0}, \quad (5)$$

где Q – количество осадка, выпавшего к моменту времени t (% по массе); Q_m – постоянная, значения которой лежат в пределах от 100 до 145%; t_0 – время осаждения половины осадка.

При $t = t_0$ из уравнения (5) следует, что $Q = Q_m / 2$. Максимальный радиус r_{max} находят после определения времени полного выпадения первой фракции t_m . Расчёт проводят по уравнению Стокса.

Общая масса дисперсной фазы, осевшей к любому моменту времени t_x :

$$Q = Q_0 + q, \quad (6)$$

где Q_0 , q – доли (% по массе) полностью выпавшей фракции и которая выпала частично ко времени t_x только из нижних слоев суспензии. Скорость оседания этой фракции можно

выразить как dQ/dt при t_x , поэтому доля частично выпавших частиц q к моменту времени t_x будет $\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{t_x}$. Для полного количества осадка можно записать:

$$Q = Q_0 + \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{t_x} \cdot t_x \quad (7)$$

Каждая точка на кинетической кривой соответствует доле (%) той фракции, частицы которой имеют радиус r_1 и больше полностью осевшей к заданному времени:

$$Q = 100P / P_k \quad (8)$$

где P_k и P – масса дисперсной фазы, соответственно осевшей полностью и за время t . Результаты экспериментальных наблюдений получают в единицах массы. Q обычно выражают в процентах.

Массу половины осажённых частиц Q_m и время их осаждения t_0 находят по линейному уравнению:

$$\frac{t}{Q} = \frac{t_0}{Q_m} + \frac{t}{Q_m} \quad (9)$$

В табл. 2 приведены данные по массе, радиусу и другим параметрам, рассчитанным по формулам (4) - (9), по которым построены кинетическая кривая седиментации (рис. 1), интегральная (рис. 2), дифференциальная (рис.3) кривые распределения частиц суспензии фосфорита по размерам, а также линейная кинетическая кривая (рис. 4).

Тангенс угла наклона прямой линии тренда на линейной кинетической кривой (рис.4) в соответствии с уравнением (8) равен: $1/Q_m = 0.008$, откуда масса половины осажённых частиц – $Q_m = 125\%$, что входит в пределы его значений, указанных выше.

По рис. 4 определяется значение t_0 / Q_m : $t_0 / Q_m = 0.433$ и время осаждения половины осадка t_0 равно 54 с. Отсюда размер частиц, полностью осевших ко времени половины осаждения, $r_0 = 23 \cdot 10^{-6}$ м.

Минимальный радиус частиц определялся по формуле: $r_{min} = r_0 \sqrt{0.1 \sqrt{Q_m} - 1}$ и оказался равным $8 \cdot 10^{-6}$ м, а максимальный - $r_{max} = 3r_0$, то есть $69 \cdot 10^{-6}$ м.

Таблица 2

Массовая доля осадка и радиусы частиц фосфорита

t, с	Q, %	r · 10 ⁻⁶ , м	t/Q	Q/r · 10 ⁻⁶	Δr · 10 ⁻⁶ , м	ΔQ, г	ΔQ/Δr
12	27.78	49.23	0.4	0.6	14.42	12.50	0.87
24	40.28	34.81	0.6	1.2	8.50	11.22	1.32
42	50.00	26.31	0.8	2.0	3.11	6.00	1.93
54	55.56	23.21	0.9	2.5	2.05	4.81	2.34
65	61.11	21.15	1.0	2.9	3.75	9.92	2.65

t, c	Q, %	r · 10 ⁻⁶ , м	t/Q	Q/r · 10 ⁻⁶	Δr · 10 ⁻⁶ , м	ΔQ, г	ΔQ/Δr
96	70.83	17.40	1.3	4.1	2.15	6.27	2.91
125	77.78	15.25	1.6	5.1	1.56	5.50	3.54
155	84.72	13.70	1.8	6.1	2.33	9.14	3.92
215	94.44	11.37	2.4	8.2	1.09	5.47	5.04
275	98.61	10.28	2.8	9.6	0.97	1.39	1.44
335	100.00	9.32	3.4	10.7	0.74		
395	100.00	8.58	4.0	11.7			

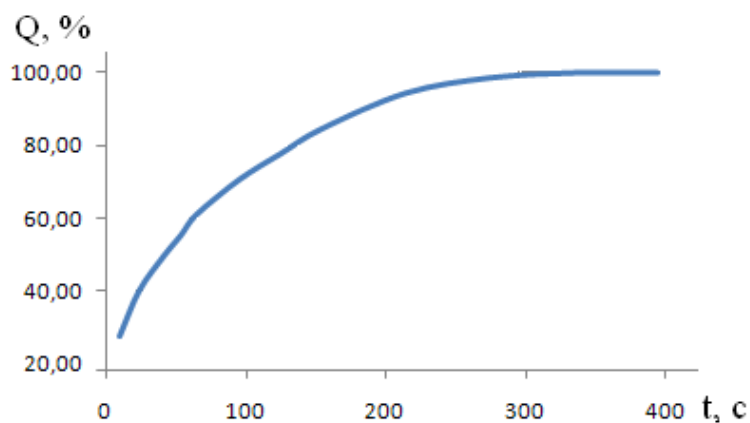


Рис. 1. Кинетическая кривая седиментации фосфорита.

Наиболее вероятный радиус частиц r_n , соответствует максимальному значению дифференциальной функции распределения $r_n = r_0/2,24 = 10 \cdot 10^{-6}$ м. Степень полидисперсности суспензии σ , вычисленная по следующей зависимости:

$$\sigma = \frac{r_{max}}{r_{min}} = \frac{3}{\sqrt{0.1\sqrt{Q_m} - 1}}, \text{ оказалась равной } 8.6.$$

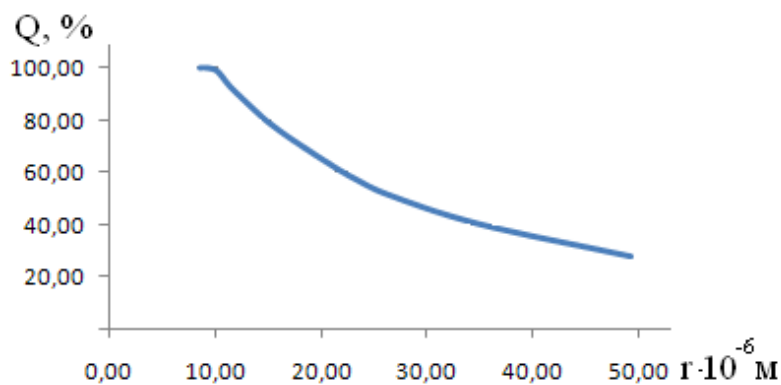


Рис.2. Интегральная кривая распределения частиц в суспензии фосфорита по размерам.

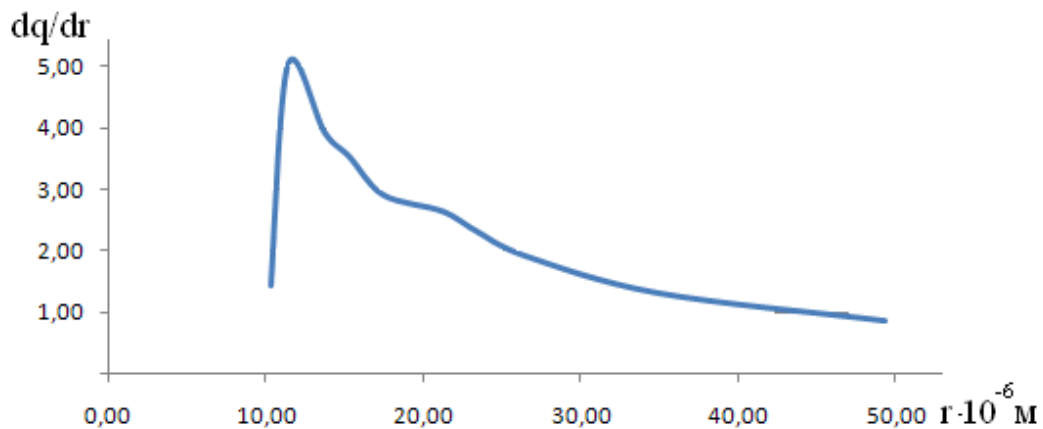


Рис.3. Дифференциальная кривая распределения частиц в суспензии фосфорита по размерам.

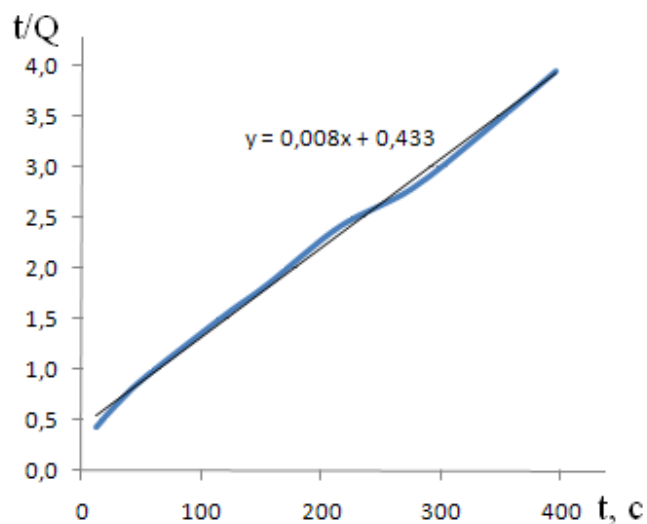


Рис.4. Линейная кинетическая кривая седиментации фосфорита.

Для вычисления скорости свободного осаждения W_{oc} (м/с) шарообразной частицы при так называемом ламинарном режиме осаждения, когда критерии имеют значения Ar (критерий Архимеда) < 3.6 ; $Lu < 2 \cdot 10^{-3}$ (критерий Лущенко); Re (критерий Рейнольдса) < 0.2 , Стоксом [6] теоретически получена формула:

$$w_{oc} = \frac{d^2(\rho - \rho_o)g}{18\mu}, \quad (10)$$

где d – диаметр частиц, м; ρ – плотность частиц, кг/м³; ρ_o – плотность жидкости, кг/м³; g – ускорение свободного падения, м/с²; μ – динамическая вязкость жидкости, Па·с.

Максимальный размер частиц, осаждение которых происходит по закону Стокса, с учётом критерия Рейнольдса $W_{oc} = \frac{\mu Re}{d\rho}$ при $Re = 2$ (предельное значение для ламинарной области) определяется по формуле:

$$d_{max} = 1,56 \cdot \sqrt[3]{\frac{\mu^2}{\rho_o(\rho - \rho_o)}} \quad (11)$$

Диаметры твёрдых частиц фосфорита после измельчения в дробилке и просеивания через сито имели значения в пределах до 250 мкм. Минимальный размер частиц фосфорита, свободно осаждающихся по закону Стокса, определён по вышеприведенным формулам и равен 16 мкм, а максимальный - по формуле (11) и равен 140 мкм, что почти совпадает со значением r_{max} , полученным седиментационным анализом. Вычисленные скорости свободного и стесненного осаждения в вертикальной емкости для характерных значений диаметров фосфоритной муки составляли: для частиц размеров, м/с: 16 мкм – 0.0002, 0.0001; 100 мкм – 0.0086, 0.0042; 140 мкм – 0.0168, 0.0084, соответственно.

Изучение процесса осаждения твердых частиц фосфорита в жидкости методами седиментационного анализа и применения критериальных уравнений позволяет определить основные параметры дисперсной системы, необходимые для расчета гидродинамических параметров для перемешивания фосфоритной суспензии в вертикальном реакторе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрушевский Б.А., Зайцев Н.С., Ларин Л.И. Каратагские фосфориты. - М.: АН СССР, 1936, 164 с.
2. Абдурахманов Ф. ТЭО кондиций для подсчёта фосфоритов месторождений Каратаг (уч. Камбар, Б. Яхдон, и Ходжачильдиёр). ГУ геологии при Хукумате РТ. – Душанбе, 2008, 258 с.
3. Юсупов З.Н., Мирзоев Б., Иброгим А., Назаров Дж., Бобоназаров М., Бозорова М. Способ промывания бедных фосфоритовых руд. Патент ТД 281 Республики Таджикистан. МПК С 01 В 25/01. - № 0800261. Заявл.10.12.08. опубл.11.12.09. Бюл.56 (4), 2009, 8 с.
4. Фридрихсберг Д.А. Курс коллоидной химии. Учеб. для вузов. 2-е изд. перераб. и доп. – Л.: Химия, 1984, 386 с.
5. Цыренова С.Б., Чебунина Е.И., Балдынова Ф.П. Руководство к решению примеров и задач по коллоидной химии: Уч. пособие. - Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2000, 210 с.
6. Кизевальтер Б.В. Теоретические основы гравитационных процессов обогащения. - М.: Недра, 1979, 295 с.

М.БОБОНАЗАРОВ, М.М.РАҲИМОВА, Б.МИРЗОЕВ*

**ТАҲЛИЛИ СЕДИМЕНТАТСИОНИИ ХОКАИ ФОСФОРИТИ
КОНИ ҚАРАТОҒИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН**

Институти илмӣ-таҳқиқотии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,

**МДИ «Пажӯҳишгоҳи илмӣ-тадқиқотии саноат»-и Вазорати саноат ва технологияҳои нави Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Бо усулҳои ғалбериву вазнгирӣ ва седиментатсионӣ тавсифномаи дисперсионии фосфорити майдакардашудаи (то андозаи 2 мм) кони Қаратоғ муайян карда шудааст. Андозаҳои заррачаҳои саҳти фосфорит аз рӯи фраксияҳо, муайян карда шудааст. Бо истифодабарии усули аналитикии Сюрупа андозаҳои минималӣ ва максималии заррачаҳои такшоншуда, параметри полидисперсионӣ муҳосиба шудаанд ва кинетикаи раванди такшоншавӣ омӯхта шудааст. Суръат ва вақти такшоншавии заррачаҳои саҳти фосфорит дар реактори вертикалӣ бо моеъ муҳосиба шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: фосфорит – таҳлили ғалберӣ ва седиментатсионии заррачаҳои дисперсионӣ – усули аналитикии Сюрупа – такшоншавии озод ва тангнокии заррачаҳо

M.BOBONAZAROV, M.M.RAKHIMOVA, B.MIRZOEV*

**SEDIMENTATION ANALYSIS OF PHOSPHORITE
OF THE KARATAG DEPOSIT OF THE REPUBLIC OF TAJIKISTAN**

Research Institute of the Tajik National University,

**State Scientific Institution «Research Institute of Industry»,*

Ministry of Industry and New Technologies of the Republic of Tajikistan

We use the method of Sieve weight and sedimentation analysis identified pre-ground particulate characteristics (size up to 2 mm) granular phosphorite of the Karatag deposits. The sizes of particulate fractions and their weight identified. Using analytical methods Cjurupy calculated minimum and maximum sizes of deposited particles , the kinetics of the deposition process , calculated polydispersity parameter . Calculated speed and the deposition of particulate matter of phosphorite in the vertical reactor.

Key words: phosphorite – sieve and sedimentation analyzes – analytical method Cjurupy – free and crowded precipitation particles.

УДК 541.12:666.293.35

А.ШАРИФОВ, А.А.АКРАМОВ, Я.Г.НАЗИРОВ, А.К.МУМИНОВ

**ПРОЧНОСТЬ И ДЕФОРМАТИВНОСТЬ БЕТОНОВ С ДОБАВКОЙ
ЩЕЛОЧНОГО ЭКСТРАКТА СТЕБЛЕЙ ХЛОПЧАТНИКА**

Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими

Поступила в редакцию 18.09.2013 г.

В статье обобщены результаты действия химической добавки из щелочного экстракта стеблей хлопчатника на свойства бетонной смеси и бетона и охарактеризованы механизмы их влияния на процессы гидратации и твердения цемента.

Ключевые слова: щелочной экстракт – гидратация – цемент – бетон – прочность – подвижность – жесткость.

Щелочной экстракт стеблей хлопчатника является добавкой, упрочняющей структуру цементного камня путём увеличения водоудерживающей способности бетонной смеси, ускоряя тем самым скорости гидратации цемента в начальные сроки твердения. Эффективность добавки испытана при твердении бетона в нормальных и естественных условиях. После суточного твердения в формах образцы бетона расформировали, часть из них твердела в нормальных условиях, другая часть была помещена на крыше здания, где дальнейшее твердение бетона происходило в естественных условиях. В табл.1 приведены результаты испытания добавки в составе бетона, изготовленном на обычном среднеалюминатном цементе М400 Душанбинского завода, гранитном песке фракции 0.14-5 мм и щебне 5-20 мм при соотношении компонентов Ц : П : Щ = 1 : 1.7 : 3.45 и В/Ц=0.45. Добавку вводили в бетонную смесь с водой затворения в количестве 0.05-0.5% массы цемента (1).

Предложенный способ приготовления щелочного экстракта стеблей хлопчатника обеспечивает полученную добавку стабильного состава для бетонной смеси. Об этом свидетельствует сравнительное постоянство значений прочности бетона при использова-

Адрес для корреспонденции: Акрамов Аваз Абдуллаевич. 734042, Республика Таджикистан г.Душанбе, пр. акад.Раджабовых, 10а, Таджикский технический университет. E-mail: akramov.avaz@mail.ru.

нии добавок, полученных при разных соотношениях стеблей хлопчатника и едкого натрия и времени обработки смеси.

Данные табл.1 показывают, что возрастание прочности бетона с добавкой экстракта стеблей хлопчатника при нормальном твердении составляет 31.3-54.7%, а при естественном твердении 41.8-59.9%, причём если прочность бетона естественного твердения без добавки составляет 83.9% значения прочности бетона нормального твердения, то такой показатель для бетона с добавкой составляет 86.7-90.6%. В исследованных составах прочность бетона с добавкой значительно больше прочности бетона без добавки, однако при повышенных дозировках добавки (0.5%) её значение имеет тенденцию к снижению.

Таблица 1

Условия приготовления добавки и свойства бетона

Условия приготовления добавки			Расход добавки, % от массы цемента	Подвижность бетонной смеси, см	Прочность бетона на сжатие, МПа, после 28 сут	
Массовое соотношение стеблей хлопчатника и окиси натрия	Концентрация едкого натрия, %	Продолжительность обработки			нормального твердения	естественного твердения
-	-	-	-	1	34.2	28.7
1:0.2	0.5	60	0.05	1	49.2	42.7
1:0.25	0.5	60	0.20	1	47.5	41.3
1:0.35	1	50	0.275	2	46.5	41.2
1:0.4	1	45	0.10	1	52.9	45.9
1:0.5	1	40	0.50	1	44.9	40.7

На рис.1 приведена зависимость прочности бетона состава 1:1.79:3.3 при В/Ц=0.5 и Ц=368 кг/м³ от содержания щелочного экстракта стеблей хлопчатника в среднеалюминатном цементе в разные сроки нормального твердения. Темп роста прочности бетона со щелочным экстрактом стеблей хлопчатника в начальные сроки твердения высокий, наибольшие значения прочности бетона отмечены в 28 сут возрасте. Значительное повышение прочности бетона достигается при оптимальных расходах щелочного экстракта 0.05-0.3%, когда прочность образцов с добавками во всех сроках испытания превосходит показатели прочности бетона без добавки.

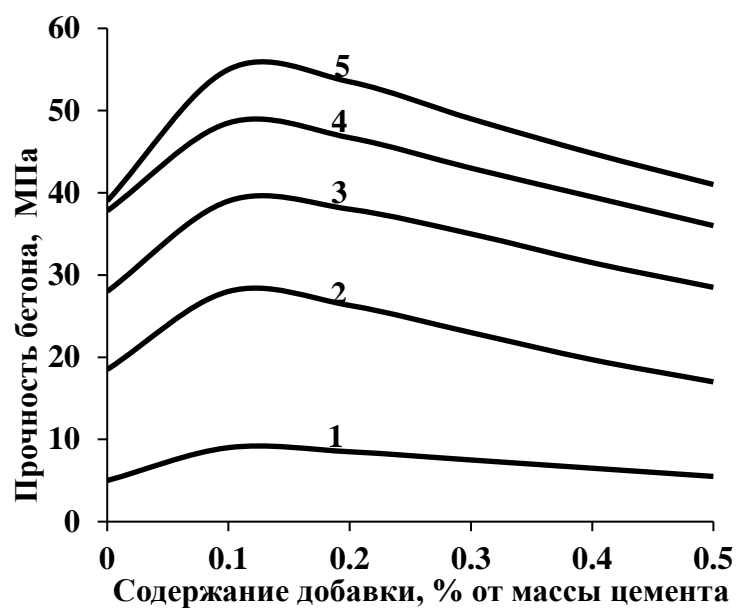


Рис.1. Зависимость прочности бетона состава 1:1.79:3.3 при В/Ц=0.45 и Ц=368 кг/м³ от содержания щелочного экстракта древесины стеблей хлопчатника в цементе через 1 – 1; 2 – 3; 3 – 7; 4 – 24 и 5 – 28 сут нормального твердения.

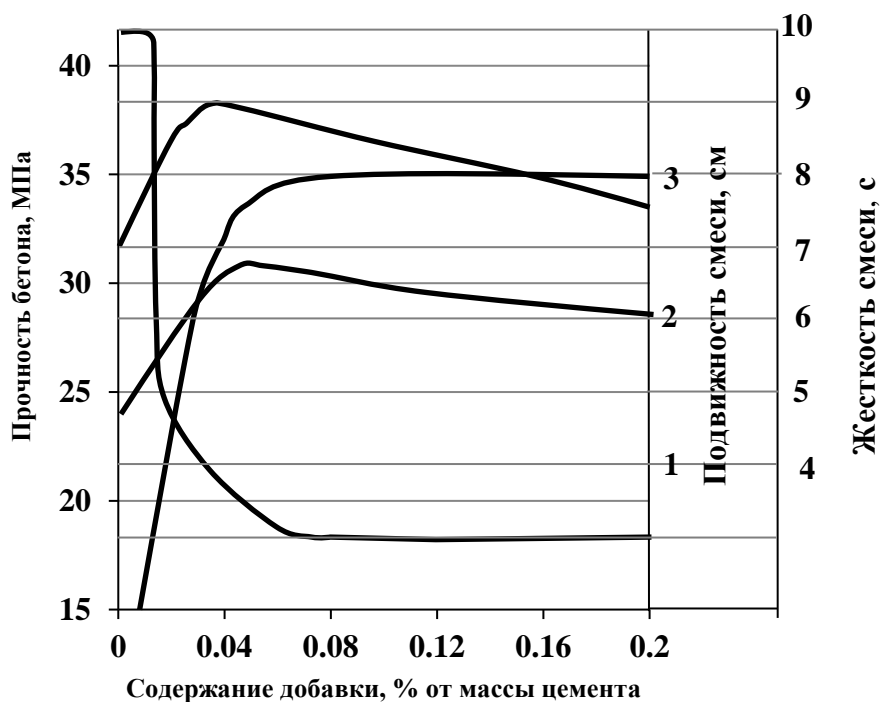


Рис.2. Зависимость параметров свойств бетонной смеси и бетона состава 1:1.78:3.33 при В/Ц=0.5 от содержания щелочного экстракта стеблей хлопчатника в среднеалюминатном цементе с добавкой 13-18% шлака: 1 – прочность бетона через 28 сут нормального твердения; 2 – то же при естественном твердении образцов; 3 – подвижность и 4 – жёсткость бетонной смеси.

Эффективность низких дозировок добавки для повышения прочности бетона подтверждена также результатами исследования бетона состава 1:1.78:3.33 при В/Ц=0.5, изготовленном на среднеалюминатном цементе, содержанием шлака в количестве 13-18%. Образцы бетона твердели как в нормальных условиях, так и после формовки в естественных условиях на крыше здания. Опыты были осуществлены в апреле месяце, поэтому условия твердения образцов бетона на крыше здания соответствовали природным параметрам этого времени года. Результаты экспериментальных исследований представлены на рис.2.

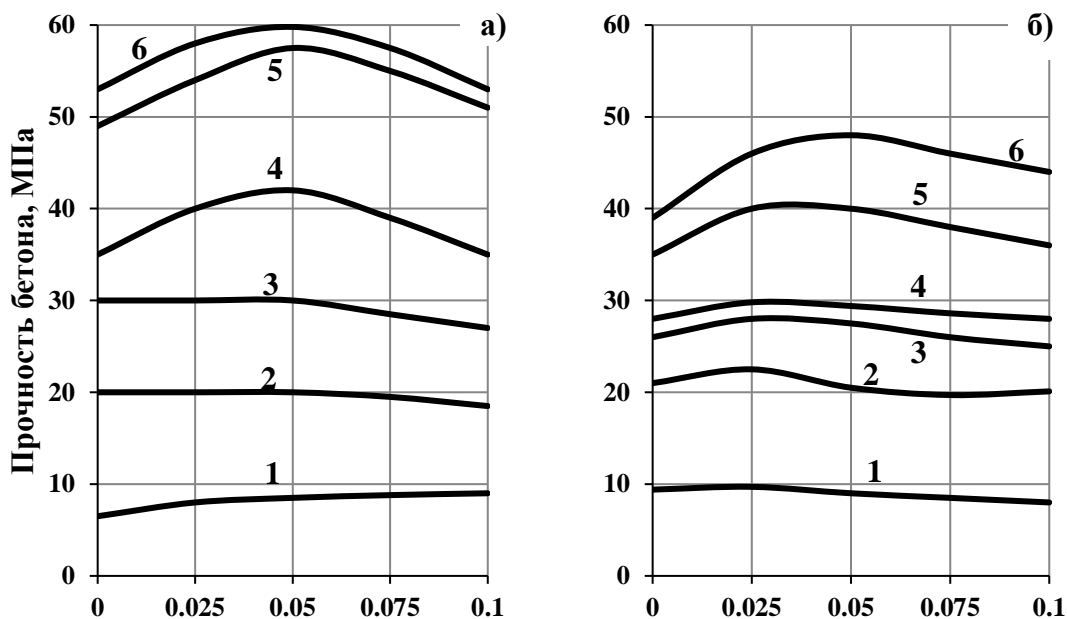
Щелочной экстракт стеблей хлопчатника, незначительно увеличивая подвижность, в два-три раза снижает жёсткость бетонной смеси. Это благоприятно влияет на формируемость последней и снижает время и затраты на изготовление железобетонных изделий. Малые дозировки щелочного экстракта оказывают высокое упрочняющее влияние на твердение бетона, чем его большие расходы. Надо отметить, что для бетона с добавкой при его твердении в естественных условиях возрастание прочности значительное, что подтверждает водоудерживающую способность щелочного экстракта стеблей хлопчатника в структуре цементного камня.

Ведь замедление скорости твердения бетона в естественных условиях по сравнению с нормальными показателями его прочности обычно вызвано не только изменениями температуры воздуха в течении суток, но и испарением значительного количества воды затворения из структуры бетона в первые сутки его нахождения на открытом воздухе.

При твердении образцов на крыше здания возрастание прочности бетона с добавкой при оптимальных количествах щелочного экстракта составляет до 28.8% по сравнению с прочностью образца без добавки. Кроме того возрастает прочность образцов естественного твердения по сравнению образцов нормального твердения эквивалентного состава. Так если прочность бетона без добавки для образцов естественного твердения составляет 71.8%, то значение прочности бетона нормального твердения составляет 78.1 – 88% от значения прочности образцов нормального твердения.

На рис.3 показана кинетика твердения бетона 360 сут возрасте в зависимости от содержания щелочного экстракта стеблей хлопчатника в составе сульфатостойкого цемента. Кубические образцы размерами 10x10x10 см, изготовленные из бетона состава 1:1.78:3.33 при В/Ц=0.5 твердели в нормальных и естественных условиях. Как видно, в раннем возрасте бетона влияние добавки на упрочнение сульфатостойкого цемента проявляется мало, затем с увеличением срока твердения прочность бетона с добавкой значительно возрастает. Сравнение этих результатов с данными полученными использованием других цементов показывает, что щелочной экстракт стеблей хлопчатника в системе цемент-вода более интенсивно катализирует реакции гидратации и зародышеобразования кристаллического сростка из алюминатных и алюмоферритных фаз цементного клинкера, чем силикатных. Увеличение скорости гидратации минералов C_3A и C_4AF ускоряет схватывание цементного теста, это проявляется больше для обычных цементов, чем для сульф-

фатостойкого, что было отмечено выше. Ускорение гидратации алюминат-содержащих фаз цемента инициирует реакции гидратации и твердения других минералов.



Содержание щелочного экстракта стеблей хлопчатника, % массы цемента

Рис.3. Кинетика твердения бетона состава 1:1.78:3.33 при В/Ц=0.5 в зависимости от содержания щелочного экстракта в составе сульфатостойкого цемента в нормальных (а) и естественных (б) условиях через (сут): 1 – 1; 2 – 3; 3 – 7; 4 – 28; 5 – 180; 6 – 360.

Ввиду большего содержания алюминат-содержащих минералов в составе обычных цементов, чем в сульфатостойком цементе, их твердение в присутствии щелочного экстракта стеблей хлопчатника в ранние сроки возрастает, поэтому прочность бетона на обычных цементах с добавкой в эти сроки существенно увеличивается по сравнению со значением прочности бетона без добавки.

Деформативные параметры бетона с добавкой щелочного экстракта стеблей хлопчатника при расходах добавки 0.03-0.25% на 5-8% превосходят значения аналогичных параметров бетона без добавки в соответствующие возрасты. При расходах добавки 0.3-0.5% эти бетоны практически имеют такие же параметры деформативных качеств, что и бетон без добавки. При испытании призмических образцов бетона состава 1:1.51:2.57 при В/Ц=0.4 и Ц=475 кг/м³, изготовленных из среднеалюминатного цемента без добавки, через 7 сут нормального твердения они имели модуль упругости $E=3.25 \cdot 10^5$ МПа и коэффициент призмической прочности $K_n=0.79$, через 360 сут значения этих параметров стабилизируются на уровне $E=4 \cdot 10^5$ МПа и $K_n=0.83$. Для образцов бетона с добавкой щелочного экстракта в количествах 0.03-0.25% в возрасте 7 сут модуль упругости изменяется в пределах от $3.4 \cdot 10^5$ МПа до $3.55 \cdot 10^5$ МПа, а коэффициент прочности возрастает до 0.77-0.79. В возрасте 360 сут параметры деформативных качеств бетона с добавкой возрастают до $4.25 \cdot 10^5$ МПа – $4.4 \cdot 10^5$ МПа и $K_n=0.87-0.9$.

Значения параметров деформативных качеств бетона с добавками стабилизируются в течении 90-120 сут твердения, то есть значительно быстрее, чем для бетона без добавки.

Улучшение деформативных параметров бетона с добавками щелочного экстракта стеблей хлопчатника происходит благодаря упрочняющему действию добавки на твердения цементного камня. Щелочной экстракт стеблей хлопчатника снижает водопотребность цемента и значительно ускоряет скорость процессов структурообразования и гидратации, и тем самым повышает прочность бетона. Водоудерживающая способность добавки способствует возрастанию полноты гидратации и зрелая структура цементного камня, содержащего щелочной экстракт, сформируется в более раннем возрасте, чем для бетона без добавки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев М.Н., Дусмуродов Т., Шарифов А. А.с.СССР №1144997, С 04 В 24/10. Вяжущее для бетонной смеси и строительного раствора, 1983.
2. Шарифов А., Голубев М.Н. А.с.СССР №1564139, С04В24/18. Способ приготовления пластифицирующей добавки для бетонной смеси, 1982.
3. Шарифов А. А.с.СССР №1590464, С 04 В 28/02, 24/10. Способ приготовления добавки для бетонной смеси, 1984.
4. Шарифов А. А.с.СССР №1664763, С 04 В 24/18.Комплексная добавка для бетонной смеси, 1984.
5. Шарифов А. А.с. СССР №1735225, С 04 В 24/38. Комплексная добавка для бетонной смеси, 1985.
6. Рамачандран В., Фельдман Р., Бодуен Дж. Наука о бетоне (пер. с англ.) -М.:Стройиздат, 1986, 286 с.
7. Дусмуродов Т., Шарифов А., Голубев М.Н. - Бетон и железобетон, 1989, №3, с.3-4.

А.ШАРИФОВ, А.А.АКРАМОВ, Я.Г.НАЗИРОВ, А.К.МУМИНОВ

БОҚУВВАТӢ ВА БА ДЕФОРМАТСИЯ ТАБОВАРИИ БЕТОНҲО БО ИЛОВАИ ЭКСТРАКТИ ИШҚОРИИ ҒӢЗАПОЯ

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осими

Дар мақола натиҷаҳои тадқиқоти таъсири иловаи химиявӣ аз экстракти ишқорӣ ғӯзапоя ба хосиятҳои маҳлули бетонӣ оварда механизми таъсири онҳо ба равандҳои бо об реаксияравӣ ва саҳтшавии семент маънидод шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: экстракти ишқорӣ – бо об реаксияравӣ – семент – бетон – боқувватӣ – харакатнокӣ – дуруштӣ.

A.SHARIFOV, A.A.AKRAMOV, Y.G.NAZIROV, A.K.MUMINOV

**STRENGTH AND DEFORMABILITY OF CONCRETE WITH THE ADDITION
ALKALINE EXTRACT OF COTTON STALKS**

M.Osimi Tajik Technical University

The paper summarizes the results of the chemical additive of alkaline extract of cotton stalks on the properties of concrete and concrete and characterized the mechanisms of their influence on the process of hydration and hardening of cement.

Key words: alkaline extract – hydration – cement – concrete – strength – mobility – rigidity.

УДК 563.12:551.734(575.3)

А.А.САБИРОВ

**ФОРАМИНИФЕРОВАЯ ШКАЛА ДЕВОНСКОЙ СИСТЕМЫ
ТАДЖИКИСТАНА**

Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии

Поступила в редакцию 23.11.2013 г.

Впервые разработана зональная фораминиферовая шкала для всего девонского интервала разреза Таджикистана, включающая 17 фораминиферовых зон. Проведено их сопоставление с конодонтовыми и брахиоподовыми зонами, а также с фораминиферовыми зонами Урала.

Ключевые слова: фораминиферы – девон – стратиграфия.

Изучение известковых фораминифер девонских и пограничных нижнетурнейских отложений начато впервые в СССР в 40-х годах прошлого столетия на территории Восточно-Европейской платформы. С тех пор более 50-ти исследователей продолжали эти работы в Западной и Восточной Европе, Азии, Северной Америке и Африке. Изучение девонских фораминифер в Средней Азии началось в 50-х годах 20-го века работами А.Д.Миклухо-Маклая (1958-1965) и Б.В.Пояркова (1957-1979), позднее продолжалось С.Б.Гузиным (1986-1989), а в Таджикистане с 1971г. эти исследования проводит автор.

Все эти многочисленные работы заложили основы расчленения девонской системы по фораминиферам. Однако детального расчленения с построением зональной фораминиферовой шкалы всего девонского интервала для отдельных регионов, а тем более международной фораминиферовой шкалы, до сих пор не существует. До последнего времени всеобщим признанием пользовалась лишь фораминиферовая шкала для расчленения верхнефаменского подъяруса, основанная на эволюционном развитии многокамерных фораминифер – квазиэндопир. Для остальной части девона обычно выделяли комплексы фораминифер, характеризующие различные стратиграфические подразделения. Например, по [1] во франском ярусе Урала выделялись комплексы фораминифер, соответству-

Адрес для корреспонденции: Сабиров Абдувахид Абдухамидович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии АН РТ. E-mail: svakhid@mail.ru

ющие тому или иному региональному горизонту, а в нижнефаменском подъярусе – горизонт с паратурамминами, умбеллами и дазикладациевыми водорослями. И только в верхнефаменском подъярусе снизу вверх выделялись локально развитые слои с *Septaglomospiranella*, горизонт с *Quasiendothyra communis* и горизонт с *Q. konensis*, которые, фактически, соответствовали фораминиферовым зонам. В работе [2] впервые проведена корреляция фораминиферовых и конодонтовых зон пограничных девонско-каменноугольных отложений Восточно-Европейской платформы и Урала. В литвинском горизонте Урала установлены фораминиферовые слои с редкой *Quasiendothyra kobeitusana* и слои с частой *Q. konensis*, объединенные в региональную зону *Q. kobeitusana*, которой отвечает конодонтовая зона *B. costatus*, верхняя часть которой выделена в слои с *S. praesulcata*. В заволжском горизонте восточных районов Урало-Поволжья установлены верхняя часть зоны *Septatournayella rauserae* и зона *Q. kobeitusana*; в западных районах – региональная зона *Q. communis*, включающая верхнюю часть зоны *S. rauserae* с редкой *Q. communis* и зону частой *Q. communis*. Заволжскому горизонту также отвечает конодонтовая зона *B. costatus*.

Для киргизской части Тянь-Шаня Б.В.Поярковым [3] в среднем и верхнем девоне установлены 6 комплексов фораминифер, каждая из которых соответствовала, по его мнению, региональной зоне. Нижнедевонский интервал фораминиферами не охарактеризован и комплексы в нем не выделялись. В вышележащей части разреза каждому из международных ярусов соответствует лишь один комплекс фораминифер. Только комплексы VI и VII, выделенные в его схеме для верхнефаменского и нижнетурнейского подъярусов, соответствовали зонам, выделявшимся в это время в других регионах, так как прослеживаются на больших площадях и характерны для более узких интервалов разреза. В [4] впервые сопоставлены фораминиферовые зоны верхнего девона Южного Тянь-Шаня с конодонтовыми.

Позднее [5] сделана попытка выделения зональных подразделений в девоне Западно-Сибирской плиты и её складчатого обрамления (окраины Кузнецкого бассейна и восточный склон Урала). Однако установленные там фораминиферовые зоны в каждом из районов различны, часто выделены по результатам изучения 1-2 близко расположенных скважин, а виды-индексы в смежных регионах характерны для отложений разного возраста. К тому же шкала для ряда районов неполная, с пробелами. В 2007 г. [6] в фаменском ярусе казахстанской части Прикаспийской впадины выделены 4 интервал-зоны фораминифер с использованием принципа первого появления вида-индекса в единой филогенетической линии родов *Eoquasiendotyra-Eoendothyra-Quasiendothyra* и короткоживущего вида *Parathuramina dagmarae* Sul. Снизу вверх это зоны *P. dagmarae*, *E. bella*, *E. communis* и *Q. kobeitusana*.

Следует отметить, что зональное расчленение фаменского яруса по фораминиферам встречается в некоторых региональных схемах различных регионов мира. Для более древних девонских отложений таких зональных шкал практически нет.

Наиболее стратиграфически полной и дробной в настоящее время является фораминиферовая шкала, разработанная для территории Урала [7]. Но и она начинается с эмского яруса.

Ниже в таблицах 1 и 2 приводится фораминиферовая шкала девонской системы Таджикистана, основанная, главным образом, на изучении фораминифер из разрезов Центрального и Северного Таджикистана и, частично, прилегающих пограничных районов Кыргызстана, а также Памира.

Нижняя граница зон определяется по первому появлению рода или вида-индекса или видов-индексов, верхняя – по появлению родов или видов-индексов следующей фораминиферовой зоны. В таблицах приведены принятые в настоящее время региональные горизонты, а фораминиферовые зоны сопоставлены с конодонтовыми и брахиоподовыми [8]. Анализ таблиц однозначно свидетельствует о том, что с течением геологического времени стратиграфическая ценность девонских фораминифер неуклонно возрастает, что позволяет все более дробно расчленять вмещающие отложения. Если в нижнем девоне можно выделить одну зону в пределах двух ярусов, то в верхнем девоне в пределах франского яруса выделяется 6, а в фаменском – 7 фораминиферовых зон.

Рассмотрим характеристику зон и возможность их сопоставления с наиболее полной и дробной зональной шкалой Урала. Наиболее древняя фораминиферовая зона *E. brevis* приурочена к отложениям пржидольского яруса верхнего силура и лохковского яруса нижнего девона. Несмотря на общность вида-индекса для обоих ярусов, сопутствующие характерные виды в обоих стратонах различны. Если для пржидола, где найдено 18 видов, характерны *Parathuramina khavsakiensis* Sabir. и *Eocaligella isensis* Pron., то для лохкова – *Parathuramina argensis* Sabir. и *Earlandia levata* Pron.

Всего в лохковских отложениях Таджикистана найдено 11 видов примитивных фораминифер. В уральской шкале данных по этому стратиграфическому уровню нет.

Следующая зона *Tubeporina-Tubeporella-Uralinella antiqua* выделяется в пределах пражского и большей части эмского ярусов. Из этого интервала известно 48 видов фораминифер. Если для нижней части зоны характерны сопутствующие виды *Parathuramina eoarguta* Sabir. и *Eotuberitina humile* Sabir., то для верхней – *Parathuramina aperturata* Pron., *P. oblisa* Petr. и *P. bardashevi* Sabir. Роды-индексы зоны представлены видами *Tubeporina gloriosa* Pron., *T. juferevi* Sabir., *T. tenue* Sabir., *Tubeporella microsphaera* Sabir. и *T. sp.* В уральской шкале верхней – эмской части разреза соответствует зона *Tubeporina gloriosa-Tubeporella biloculata-Ivdelina elongata*.

Следующая сверху фораминиферовая зона – *Ivdelina elongata*. Вид-индекс в Таджикистане появляется в верхней части эмса, характерен для всего эйфельского яруса, но встречается и в вышележащих отложениях. Характерный сопутствующий вид – *Parastegnammina cylindrica* Sabir. В эйфельских отложениях Таджикистана найдено 26 видов фораминифер. В уральской шкале в интервале эйфельского яруса фораминиферо-

вые зоны не установлены, а вид *Ivdelina elongata* Mal. считается характерным также для верхнего эмса, начиная с конодонтовой зоны *inversus*.

Таблица 1

Зональная шкала нижнего и среднего девона Таджикистана

МСШ		Региональные стратиграфические подразделения												
система	отдел	ярус	подъярус	горизонт	Фораминиферовые зоны и характерные виды	Конодонтовые зоны	Брахиоподовые зоны							
девонская	средний	живетский	верх.	согдийский	<i>Auroria- D. isphairamensis</i>	<i>n. falsiovalis</i> <i>disparilis</i> <i>cristatus</i> <i>hermanni</i> <i>varcus</i> <i>hemiansatus</i>	<i>S. burtini</i> <i>U. gryphus</i>							
			ср.											
			ниж.											
		эйфельский	верх.											
			нижний											
			нижний											
	нижний	эмсский	верхний	китабский	<i>Ivdelina elongata</i>	<i>I. elongata</i> <i>P. cylindrica</i>	<i>ensensis</i> <i>kockelianus</i> <i>australis</i> <i>costatus</i> <i>partitus</i>	<i>E. subumbona</i>						
			нижний											
			нижний											
		праж	в.						кык-ский	<i>Tubeoporina-Tubeporella-U. antiqua</i>	<i>P. aperturata</i> <i>P. oblisa</i> <i>P. bardashevi</i>	<i>patulus</i> <i>serotinus</i> <i>inversus-laticostatus</i> <i>notoperbonus</i> <i>gronbergi</i> <i>dehiscens (excavatus)</i> <i>pireneae (kitabicus)</i> <i>zeravshanicus</i>	<i>Z. pseudobaschkiricus</i> <i>M. uralensis</i>	
														н
														н
лохков	в.	кунжак-ский	<i>E. brevis</i>	<i>P. eoarguta</i> <i>E. humile</i>	<i>optimus (pesavis)</i> <i>repetitor</i> <i>remsheidensis</i>	<i>C. parallelepipedae</i> <i>C. arataeformis</i> <i>L. atripoidea</i>								
							н							
							н							
верхний	исфарин-ский						в.	<i>E. brevis</i>	<i>P. argensis</i> <i>E. levata</i>	<i>optimus (pesavis)</i> <i>repetitor</i> <i>remsheidensis</i>	<i>L. borealiformis</i>			
												н		
силур	верхний						верхний	верхний	<i>E. brevis</i>	<i>P. khavsakiensis</i> <i>E. isensis</i>	<i>eosteinhornensis</i>	<i>G. zinakensis</i>		

Таблица 2

Зональная шкала верхнего девона Таджикистана

МСШ					Региональные стратиграфические подразделения		
Система	Отдел	Ярус	П/ярус	Горизонт	Фораминиферовые зоны	Конодонтовые зоны	Брахиоподовые зоны
карбон	нижний	турнейск.	нижний	уречский	<i>B. malevkensis-E. minima</i>	<i>sulcata</i>	<i>A. temirensis</i>
Девонская	верхний	фаменский	верхний	зеравшанский	<i>Q. konensis-E. nigra</i>	<i>praesulcata</i>	<i>L. basckiricus- C. romanovskii</i>
					<i>Q. kobeitusana-E. imminuta</i>	<i>expansa</i>	
					<i>E. regularis</i>		
			<i>E. communis</i>		<i>postera</i>		
			<i>E. bella</i>		<i>trachytera</i>		
			<i>S. primaeva</i>		<i>marginifera</i>		
		средний	нижний	баульский	<i>P. dagmarae- S. scitula- Neoarchaesphaera</i>	<i>rhomboidea</i>	<i>C. archiaci</i>
						<i>crepida</i>	
						<i>triangularis</i>	
		франский	верхний	игаролдинский	<i>Multiseptida corallina- Frondilina</i>	<i>linguiformis</i>	<i>Th. anosofi H. cuboides</i>
					<i>Eonodosaria- Eogeinitzina devonica</i>	<i>rhenana</i>	
						<i>nasuta</i>	
			средний		<i>N. porrecta-T. media</i>	<i>jamieae</i>	<i>Th. schulkei- C. murchisonianus</i>
						<i>hassi</i>	
<i>N. suljomica-P. cannula</i>	<i>punctata</i>						
нижний	<i>N. tchernyshevae- T. multiformis</i>	<i>transitans</i>	<i>C. verneuili</i>				
	<i>P. subquadrata - U. bicamerata</i>	<i>n-в falsiovalis</i>					

Выше, в пределах живетского яруса, выделяется зона *Auroria-Diplosphaerina isphairamensis*. Кроме вида-индекса, характерны *Paraturamma bykovaе* Pojark., *P. macilenta* Pron., а род-индекс представлен видами *Auroria gissarica* Sabir., *A. sphaerica* Sabir. и *A. aperta* Sabir. Всего из живетских отложений Таджикистана известно 49 видов примитивных однокамерных фораминифер. Виды *Diplosphaerina isphairamensis* Pojark. и *Paraturamma bykovaе* Pojark. характерны также для живетских отложений Кыргызстана [3], а *P. macilenta* Pron. – для живетских отложений восточного склона Урала [9]. В уральской шкале [7] на этом уровне выделяется зона *Moravammina segmentata*. Сопоставить с нашей шкалой в данном случае невозможно, так как в Тянь-Шане и Памире моравамминиды и семитекстуляриды, также характерные для этой уральской зоны, не известны.

В [7] указывается на появление в этой зоне и рода *Nanicella*, найденного в разрезе на р. Сулем, притоке р. Чусовой, якобы во второй половине живетского яруса. Однако до сих пор наницеллы считались характерным руководящим родом только для франского яруса, описывались из многочисленных местонахождений на Евроазиатском и Североамериканском континентах, в том числе из франских отложений Тянь-Шаня. Поэтому к этому сообщению необходимо отнестись с большой осторожностью. Авторы утверждают, «что данный факт не является столь неожиданным», учитывая, что наницеллы, по данным [10] установлены даже в нижнем девоне Африки. Следует отметить, что нижнедевонский возраст в данном случае установлен по конодонтам и хитинозоям, которые, как известно, химически устойчивы, при разрушении пород хорошо сохраняются и в отпрепарированном виде могут быть переотложены в более молодые осадки. Подобный случай описан автором [11] при характеристике верхнедевонских отложений разреза Бель-Кудук (северный склон Туркестанского хребта), где во франских карбонатно-обломочных отложениях, вместе с франскими наницеллами, зогейнитзинами, тихинеллами и другими руководящими для данного интервала разреза фораминиферами, находящимися в цементе пород, найдены переотложенные конодонты и макрофауна нижнего девона. Не следует забывать, что франский век является временем первого появления, расцвета и вымирания в конце века целого ряда родов многокамерных известковых фораминифер, как одноосно-однорядных, так и спирально плоскостных, в числе которых, кроме наницелл, выделяются тихинеллы, зогейнитзины, эонодозарии, мултисептиды, фрондилины. В более древних отложениях эти многокамерные известковые секреторные фораминиферы никогда и нигде не отмечались, так же как и в перекрывающих нижефаменских.

В пределах франского яруса снизу вверх выделяются 6 фораминиферовых зон (см. табл. 2). В нижней зоне *Paraturamma sudquadrata-Uralinella bicamerata* многокамерные фораминиферы еще отсутствуют. В уральской шкале зона на этом уровне не выделена. Выше выделяется зона *Nanicella tchernyshevae-Tikhinella multiformis*, которая соответствует зоне *Hypporina hastila-Nanicella tchernyshevae* кыновского горизонта Урала. Гиппорины в Тянь-Шане не найдены. Вышележащая зона *Nanicella suljomica-Paratikhinella*

cannula соответствует, видимо, зоне *Evlania prava-Nanicella uralica* саргаевского горизонта Урала. Евлании в Тянь-Шане также не известны.

Четвертая снизу зона франского яруса – *Nanicella porrecta-Tournayella media* соответствует, по-видимому, зонам *Nanicella bella* и *Paratikhinella-Tikhinella measpis-Nanicella porrecta* доманиковского и мендымского горизонтов Урала.

Пятая и шестая зоны франского яруса (см. табл. 2) соответствуют трём фораминиферовым зонам аскынского горизонта Урала, однако, в отличие от последнего, вид-индекс *Multiseptida corallina* в Таджикистане характеризует не среднюю, а самую верхнюю зону. Кроме того, в этой зоне виду-индексу сопутствует род-индекс *Frondilina*. Всего из франских отложений Таджикистана известно 103 вида и подвида фораминифер из 28 родов. Из них 39 видов встречаются только во фране.

Фаменский ярус в Таджикистане характеризуется более детальным расчленением, по сравнению с Уралом. В его пределах выделяется 7 фораминиферовых зон (см. табл. 2), в то время как на Урале (а также в Казахстане [6]) – 4. В нижней зоне, соответствующей нижнефаменскому подъярису, как и на Урале, еще нет многокамерных форм и повсеместно широко распространен общий для обоих районов вид-индекс *Parathuramina dagmarae*. Кроме того, в Таджикистане характерен сопутствующий вид-индекс зоны – *Saltovskajina scitula* Sabir., а род-индекс *Neoarchaesphaera* представлен видами *N. polipora* (Antr.) и *N. parvispinosa* Sabir. Всего из нижнего фамена Таджикистана известен 91 вид и подвид фораминифер из 29 родов, причём только для этого стратона характерными являются 14 видов и один род – *Saltovskajina*.

Вторая зона фаменского яруса характеризуется появлением и широким развитием вида-индекса *Septaglomospiranella primaeva* (Raus.) из семейства турнейеллид и соответствует верхней части баульского горизонта или конодонтовой зоне *marginifera*. На Урале этой зоне соответствует зона *Septaglomospiranella primaeva-Tournayella rauserae*.

Вышележащие 5 фораминиферовых зон фаменского яруса выделяются на основе эволюционного развития фораминифер семейства квазиэндотирид. Все они в сумме соответствуют зеравшанскому горизонту региональной стратиграфической шкалы или конодонтовым зонам от *trachytera* до *praesulcata* включительно. Верхние две зоны, кроме квазиэндотирид, характеризуются широким развитием эндогломоспиранелл, два вида которых – *Endoglomospiranella imminuta* (Conil et Lys) и *E. nigra* (Conil et Lys) являются сопутствующими видами-индексами соответственно нижней и верхней из них (см. табл. 2). Зоны *Eoquasiendothyra bella*, *Eoendothyra communis* и *E. regularis* соответствуют зоне *Q. communis* Урала, а зоны *Quasiendothyra kobeitusana* и *Q. konensis* – зоне *Q. kobeitusana* Урала. Всего в средне- и верхнефаменских отложениях Таджикистана найдено 189 видов и подвидов фораминифер из 39 родов и подро́дов, из которых 109 видов и подвидов встречаются только в этих отложениях. 95% из них – многокамерные формы, принадлежащие представителям различных турнейеллид, эндогломоспиранелл, эоквазиэндотир, эоэндотир, квазиэндотир и эндотир.

Вышележащая зона *Bisphaera malevkensis-Earlandia minima* выделяется уже в нижней части турнейского яруса и характеризуется полным отсутствием как квазиендотирид, которые резко вымирают в конце девона, так и других многокамерных форм – турнейеллид и эндотирид. В конодонтовой шкале этому интервалу соответствует зона *sulcata*.

Приведенная зональная фораминиферовая шкала Таджикистана отражает современное состояние изученности фораминифер, требует дополнительного проведения более детальных работ на всей территории страны и прилегающих регионов, а сопоставление зональных границ по фораминиферам, конодонтам, брахиоподам и другим группам организмов нуждается в дальнейшем уточнении. Только после создания подобных детальных региональных шкал для различных регионов Земного шара можно приступить к созданию международной фораминиферовой шкалы девонской системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чувашов Б.И. Фораминиферы и водоросли из верхнедевонских отложений западного склона Среднего и Южного Урала // Фораминиферы девона и перми Урала. – Свердловск: УФАН СССР, 1965. Вып.74, 154 с.
2. Губарева В.С., Кононова Л.И. и др. Корреляция конодонтовых и фораминиферозных зон пограничных девонско-каменноугольных отложений Восточно-Европейской платформы // Бюлл. МОИП. Отд. геол., 1979, № 5 (54), с. 125-126.
3. Поярков Б.В. Стратиграфия и фораминиферы девонских отложений Тянь-Шаня. – Фрунзе: Илим, 1969, 185 с.
4. Гушин С.Б., Чернышук В.П. Биостратиграфия верхнего девона Южного Тянь-Шаня по конодонтам, водорослям и фораминиферам // Бюлл. МОИП. Отд. геол., 1989, 64, №5, с. 53-61.
5. Задорожный В.М. Фораминиферы и биостратиграфия девона Западно-Сибирской плиты и ее складчатого обрамления. – Новосибирск: Наука, 1987, 117 с.
6. Ахметшина Л.З., Гибшман Н.Б. и др. Атлас палеонтологических остатков, микрофаций и обстановок осадконакопления фаменско-каменноугольных отложений Прикаспийской впадины (казахстанская часть). – Алматы, 2007, 476 с.
7. Чувашов Б.И., Анфимов А.Л. Фораминиферовая шкала девонской системы Урала – состояние изученности и корреляционный потенциал // Глобальная корреляция нижнедевонских карбонатных и кластических разрезов (Проект 499/ Международная подкомиссия по стратиграфии девона). Kitabский Гос. Геол. Заповедник, Узбекистан. Ташкент, 2008, с. 119-123.
8. Bardashev I.A. Devonian bio and lithostratigraphy of Tajikistan. In.: Devonian Correlation Table (Karsten Weddige [Ed.]) // Senckenbergiana lethaea, № 86 (1), 2006, p. 117-120, 125-131, 135-141, 145-150.
9. Пронина Т.В. Некоторые силурийские и девонские фораминиферы Урала // Материалы по палеонтологии Урала. Свердловск: УФАН, 1970, с. 106-115.
10. Vachard D., Massa D. Apparition precoce du genre *Nanicella* (Foraminifera) dans le Devonien Inferieur du Sud-Tunisien // Bulletin de la Societe Belge de Geologie, Bruxelles, 1989, № 3-4 (98), p. 287-293.
11. Сабиров А.А. К стратиграфии и микропалеонтологической характеристике девонских отложений северного склона Туркестанского хребта // Труды Института геологии. Нов. сер. Вып. 4. Душанбе: Дониш, 2005, с. 54-62.

А.А.СОБИРОВ

ЧАДВАЛИ ФОРАМИНИФЕРИИ СИСТЕМАИ ДЕВОНИ ТОЧИКИСТОН

Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Бори аввал чадвали фораминиферии давраи геологии девони Тоҷикистон, ки 17 зонаҳои фораминиферӣро дар бар мегирад, коркард шудааст. Онҳо бо зонаҳои конодонтӣ ва брахиоподӣ муқоиса карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: фораминифераҳо – девон – стратиграфия.

A.A.SABIROV

THE FORAMINIFERAL SCALE OF DEVONIAN SYSTEM OF TAJIKISTAN

Institute of geology, and seismology, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

For the first time design foraminiferal scale of Devonian system of Tajikistan, including 17 foraminiferal zones. They compare with conodontal and brachiopodal zones.

Key words: foraminifers – Devonian – stratigraphy.

УДК 549.0 (575.3)

А.Р.ФАЙЗИЕВ, Н.Ф.НАБИЕВ*, А.В.БУРЯК**

**СУЛЬФИДЫ ПАКРУТСКОГО ЗОЛОТОРУДНОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ
(ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ТАДЖИКИСТАН)**

*Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии
АН Республики Таджикистан,*

**Таджикский национальный университет,*

***Главное управление геологии при Правительстве Республики Таджикистан*

Поступила в редакцию

В статье приводится описание сульфидов месторождения Пакрут, некоторые из которых (пирит, арсенопирит) являются важными концентраторами золотого оруденения.

Ключевые слова: месторождение – сульфиды – минералы – элементы – метасоматиты.

Месторождение Пакрут относится к кварц-золото-малосульфидной формации по классификации Н.В.Петровской [1]. Представлено оно линейно-вытянутыми линзовидными телами и минерализованными зонами метасоматитов, локализованных в гидротермально измененных хлорит-серицит-кварцевых сланцах верхнего ордовика.

Раньше было дано описание сульфосолей месторождения Пакрут [2]. Теперь приведём характеристику сульфидов этого месторождения, являющихся важными концентраторами золотого оруденения на объекте. Наиболее часто встречающимися из них являются пирит и арсенопирит. Менее распространены сфалерит, галенит, халькопирит и антимонит. К числу редких сульфидов относятся алтаит, гессит и каттьерит.

Пирит является основным сульфидом рудных тел месторождения. В них содержание этого минерала, вместе с арсенопиритом, колеблется от 0.7 до 8.4%, достигая иногда 10% их объёма. Он встречается не только на поверхности и в горных выработках, но обнаружен совместно и с включениями самородного золота, пирротина и блеклой руды, в керне на глубине 306 м среди сильно окварцованных, с небольшим количеством альбита, сланцев.

Встречается пирит в виде вкрапленностей изометрической и неправильной форм, отдельных кристаллов и тонких прожилков и просечек, как в метасоматически изменённых вмещающих сланцах, так и в жилах и прожилках кварца. Толщина отдельных прожилков минерала достигает 0.3-0.5 см, при длине 5-6 см. Кристаллы пирита в основном

кубического габитусного типа, реже встречаются пентагондодекаэдрические и октаэдрические формы.

В монофракциях пирита количественным спектральным и спектрохимическим анализами в спектральной лаборатории ИГЕМ РАН определён большой набор элементов-примесей (А.В.Буряк и др., 1988). Количественным спектральным анализом в пирите были установлены (г/т, среднее из 4 анализов): As – 2500, Pb – 148, Zn – 145, Ni – 142, Cu – 112, Co – 70, Sb – 68 и Mn – 33. Повышенные содержания в минерале мышьяка, сурьмы, свинца и серебра, по-видимому, связаны с микровключениями сульфосольных минералов, а кобальта – с наличием редкого минерала катъерита. Последний установлен в протолочках руд рентгенометрически. Спектрохимическим методом в пирите определены также Au – 44, Ag – 6.3 и Pd – 0.035. Наблюдается зависимость между содержаниями сурьмы, свинца, кобальта и серебра, с одной стороны, и золота, с другой: повышенным содержаниям первых соответствует высокая концентрация золота. Возможно, это связано с микровключениями сульфосолей, которые характерны для продуктивной золоторудной ассоциации.

Повышенные содержания кобальта связаны, по-видимому, с наличием редкого минерала катъерита, установленного в протолочках руд рентгенометрически.

Пирит находится в тесной парагенетической ассоциации с арсенопиритом (рис. 1). Границы развития пирита, арсенопирита и других минералов в этом рисунке можно увидеть по картам распределения элементов (рис. 2). Пирит и арсенопирит, по-видимому, образовались близко одновременно. Об этом же свидетельствует и рис. 3, где показан кристалл пирита с вростками арсенопирита. На рис. 4 приводятся карты распределения элементов в этом участке шлифа.

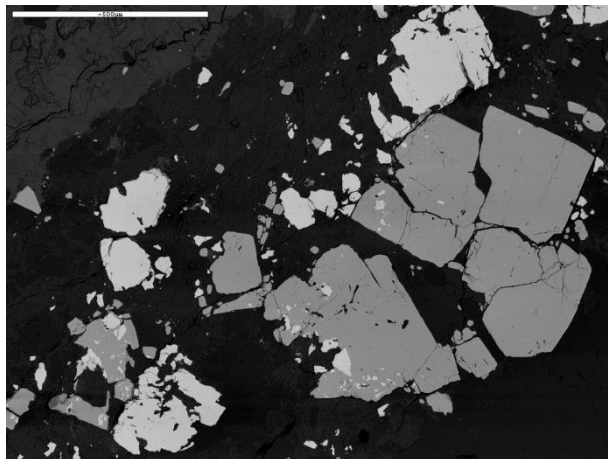


Рис. 1. Вид участка шлифа 64п в режиме BSE. Белое – арсенопирит, серое – пирит, тёмно-серое – агрегат кварца с альбитом и мусковитом. Границы зёрен мусковита, альбита и кварца можно определить по рис. 2. Длина масштабной линейки – 1mm. Фотография получена на сканирующем электронном микроскопе CamScan 4D с энергодисперсионным спектрометром Link ISIS.

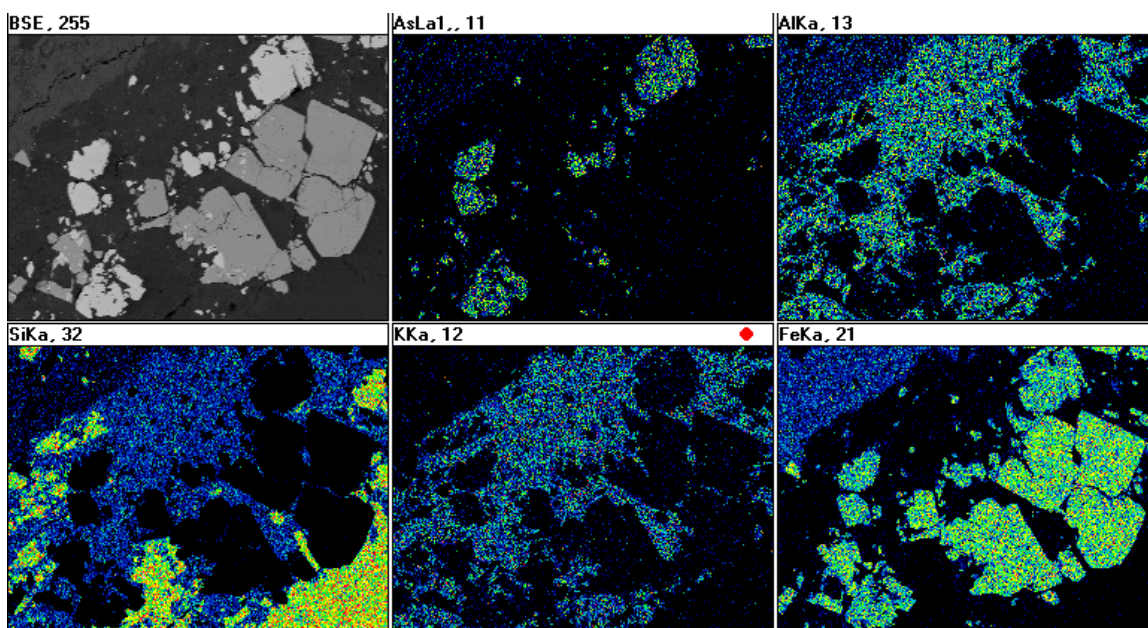


Рис. 2. Карты распределения элементов на участке шлифа 64 п (изображения получены в рентгеновском характеристическом излучении - элементы и рентгеновские линии приведены над картинкой в верхнем левом углу).

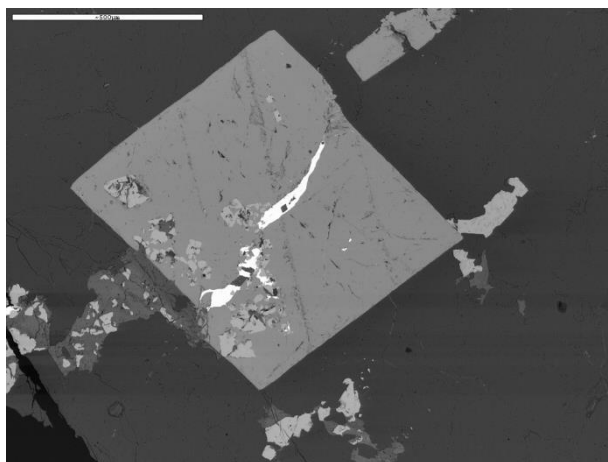


Рис. 3. Вид участка шлифа 33п в режиме BSE.

Кристалл пирита (серое) с выростками арсенопирита (светло-серое) и прожилком галенита (белое). Светло-серое зерно у правого угла кристалла пирита – сфалерит. Темно-серое поле – кварц.
Длина масштабной линейки – 500 мкм.

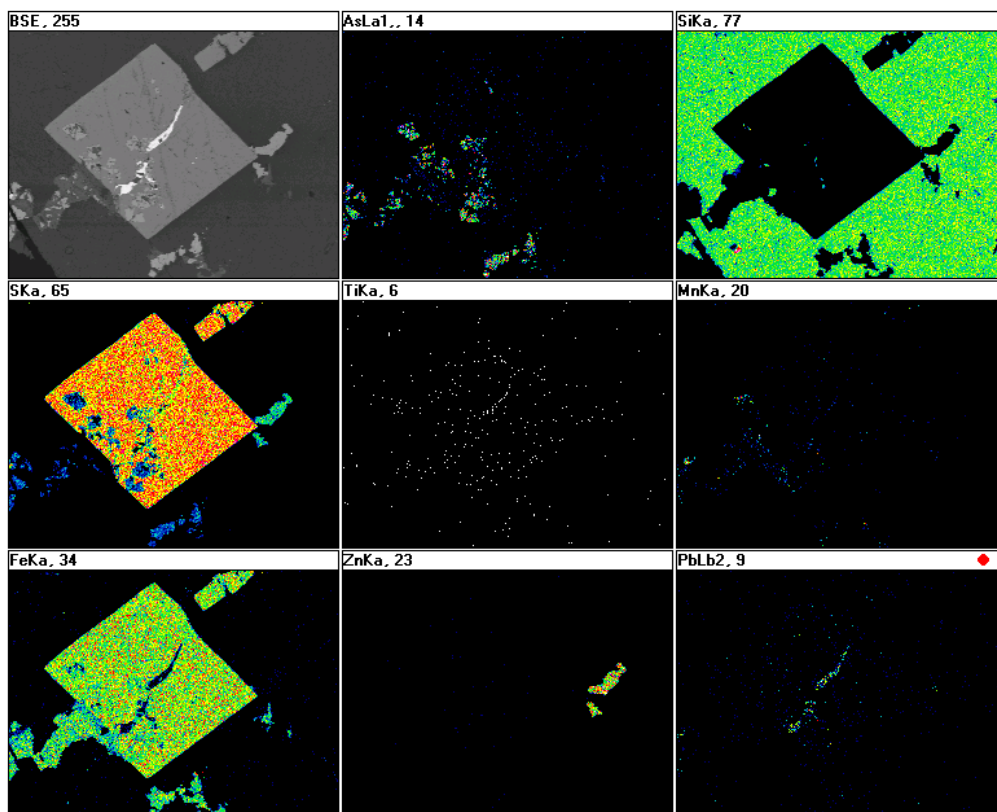


Рис. 4. Карты распределения элементов на участке шлифа 33п.

Нередко выделения пирита раздроблены, обломки которого сцементированы агрегатом нерудных минералов (рис. 5, 6), иногда и золотом. В серицитизированных метасоматитах пирит, вместе с арсенопиритом, раздроблен и растёрт до пыли, с размерами обломков менее 0.01мм.

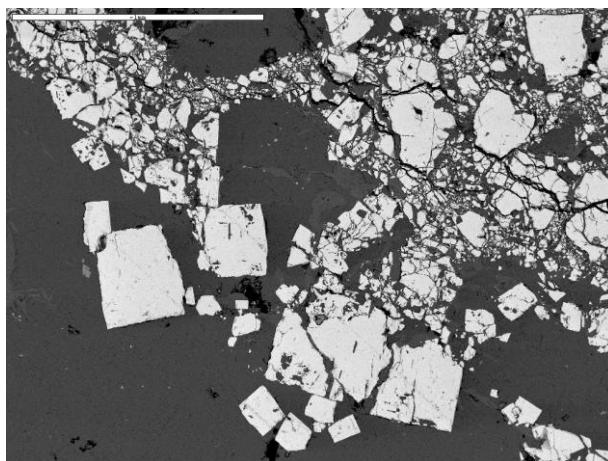


Рис. 5. Вид участка шлифа 27п в режиме BSE. Белое - пирит, серое - агрегат кварца с альбитом и мусковитом. Границы зерен мусковита, альбита и кварца можно определить по рис. 6. Длина масштабной линейки – 1мм

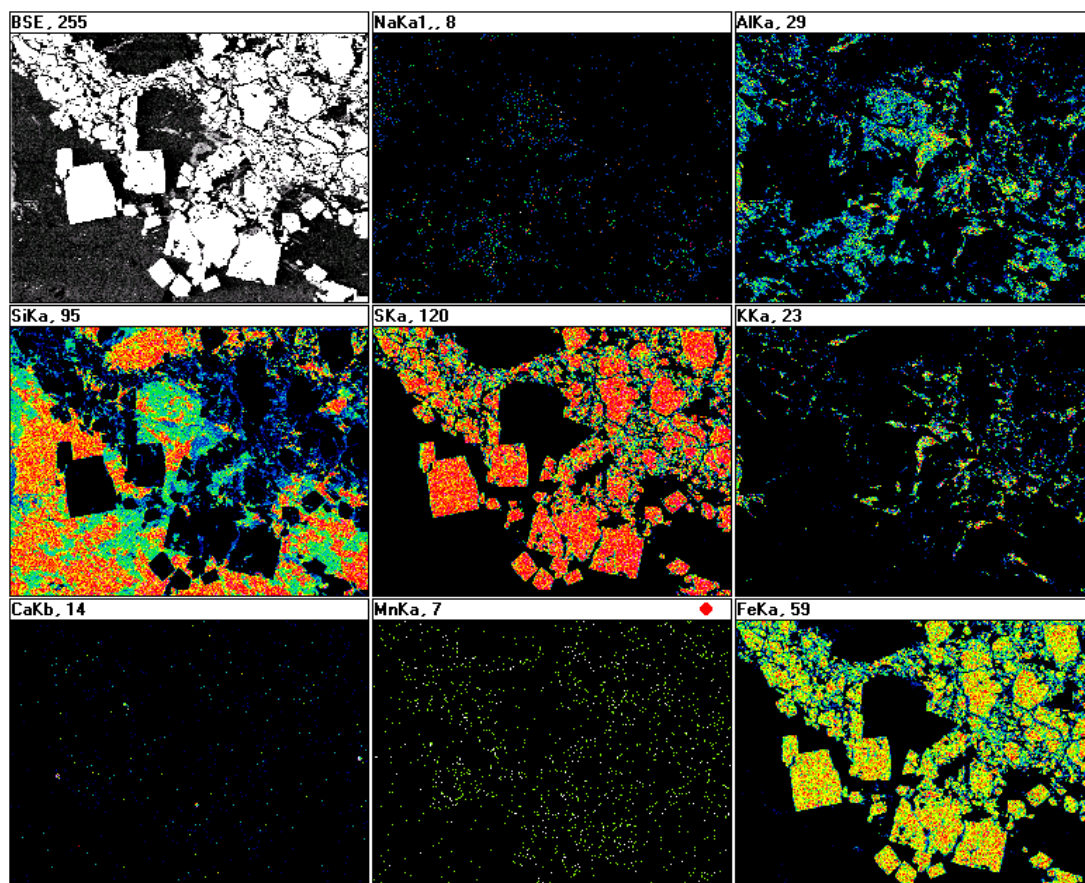


Рис. 6. Карты распределения элементов на участке шлифа 27п.

На месторождении выделяется четыре генерации пирита. Наиболее ранней генерацией является пирит, образованный в результате метасоматического изменения вмещающих пород. Вторая генерация пирита связана с первой продуктивной стадией минералообразования на месторождении. Он ассоциирует с гематитом, арсенопиритом и халькопиритом ранних генераций. Пирит III встречается совместно с продуктами полиметаллической стадии минерализации, в первую очередь галенитом, сфалеритом, сульфосолями и др., а пирит IV – с поздней парагенетической ассоциацией, например с антимонитом.

Арсенопирит также считается важным рудным минералом месторождения и одним из концентраторов золота. Образует он вкрапленность, преимущественно в кварцевых жилах, размер отдельных выделений которой достигает 4x5 мм. При этом основное количество арсенопиритовой минерализации локализовано в приконтактовых участках кварцевых жил с вмещающими сланцами. Кристаллы арсенопирита уплощённые призматического облика и игольчатые.

С целью изучения элементов-примесей в арсенопирите также были проведены количественный спектральный и спектрохимический анализы монофракций минерала. По данным количественного спектрального анализа, в арсенопирите были установлены (г/т, среднее из 5 анализов) Ni – 200, Cu – 128, Pb – 110, Co – 108, Sb – 106, Zn - 100, Mn – 20 и

Sn – 2. Спектрохимически в минерале установлены также Au – 14, Ag – 4.6, Pt – 0.4, Pd – 0.02 и Rh – 0.02.

Сравнения средних содержаний элементов – примесей в арсенопирите и пирите показывают, что их концентрация в них находится примерно на одном уровне, за исключением кобальта и никеля. В арсенопирите содержание этих элементов заметно выше, чем в пирите: 200 г/т Ni и 108 г/т Co в арсенопирите, против 142 и 70 г/т в пирите, соответственно. Установлена также некоторая зависимость между содержаниями сурьмы, свинца, кобальта и серебра в пробах арсенопирита и пирита, с одной стороны и, золота – с другой: повышенным содержаниям первых соответствует высокая концентрация последнего. Возможно, это связано так же, как и в пирите, с микровключениями сульфосолей в них.

Как было выше отмечено, арсенопирит тесно ассоциирует с пиритом и сростается с ним. На рис. 7 показан ещё один сросток кристаллов пирита с арсенопиритом, подтверждающий тезис о почти одновременной кристаллизации этих минералов. Карты распределения элементов этого участка шлифа приводятся на рис. 8.

Арсенопирит на месторождении Пакрут, по крайней мере, двух генераций. Первая связана с процессами метасоматического изменения вмещающих пород, а вторая – с первой продуктивной стадией минералообразования.

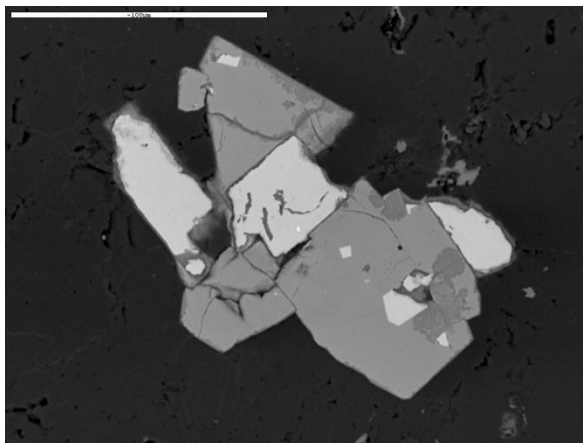


Рис. 7. Вид участка шлифа 77п в режиме BSE. Сросток кристаллов арсенопирита (светло-серое) с пиритом (серое). Более темные участки в пирите – гётит. Темно-серое – агрегат кварца и альбита.

Длина масштабной линейки – 100 мкм.

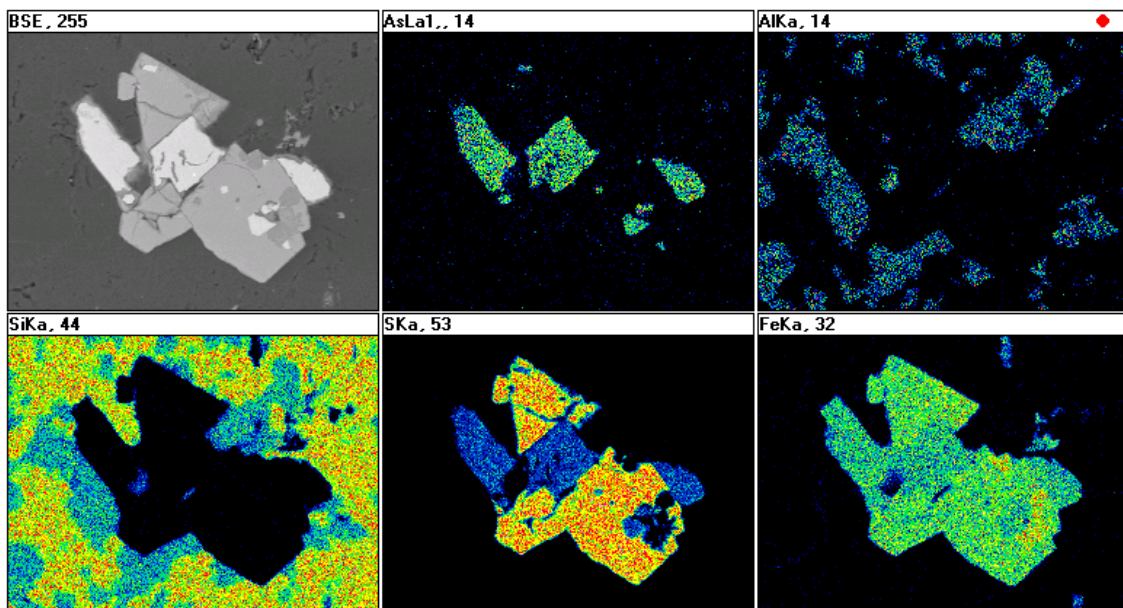


Рис. 8. Карты распределения элементов на участке шлифа 77п.

Сфалерит на месторождении Пакрут больших скоплений не образует. Встречается он в виде мелкой (0.1-0.8 мм и мельче) вкрапленности, гнёзд (2-3 мм), линзочек (до 6 мм в длину) и тонких просечек. Находится сфалерит обычно в кварцевых жилах в ассоциации с галенитом (см. рис. 3) и буланжеритом (рис. 9). Цвет минерала меняется от тёмно-коричневого до медово-жёлтого.

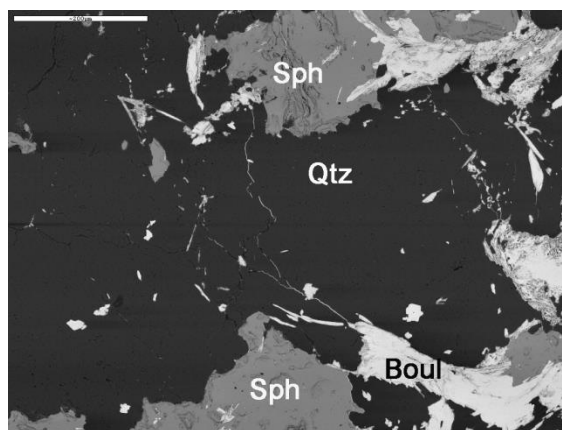


Рис.9. Вид участка шлифа 35п в режиме BSE: Qtz – кварц, Boul – буланжерит, Sph – сфалерит.
Длина масштабной линейки – 200 мкм.

На рис. 10 приводится энергодисперсионный спектр сфалерита. Как видно из этого рисунка, наряду с пиками серы и цинка в спектре присутствуют невысокие пики железа, а также марганец. В сфалерите лазерным спектральным анализом определены следующие примеси (% , среднее из 10 анализов): Fe - 1.162, Cu - 0.013, Cd - 0.010, Sn – 0.006,

Mn - 0.005, Pb - 0.001. В некоторых пробах присутствуют молибден и кобальт в количестве 0.001%.

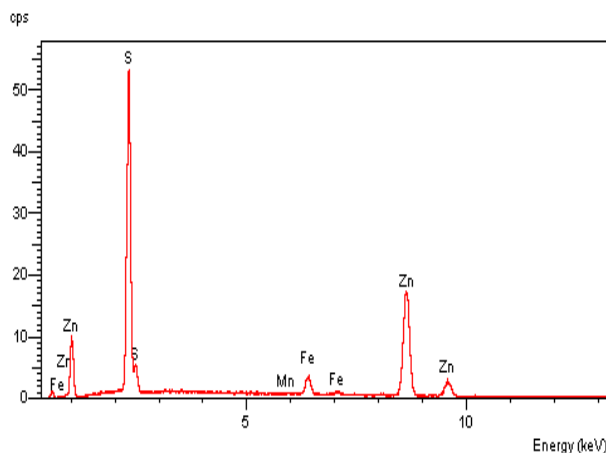


Рис.10. Энергодисперсионный спектр сфалерита.

Галенит и халькопирит относятся к числу сравнительно редких сульфидов месторождения. Эти минералы встречаются обычно совместно и образуют пылевидную сыпь, тонкую (0.1 мм и менее) рассеянную вкрапленность, а также изометрические сгустки, размером 1.0-1.5 мм. Размещаются они в межзерновых пространствах, пустотах и микротрещинах в кварце, альбите и карбонате. На рис. 3 наблюдается прожилок галенита в пирите. Ассоциируют с галенитом также халькопирит, арсенопирит, сфалерит и самородное золото. Для галенита характерны примеси (% , среднее из 6 анализов) Bi (0.106) и Ag (0.008). Кроме того, в его составе присутствуют Fe (0.05), Cu (0.004), Sn (0.001), V (0.001) и Mo (0.001).

В халькопирите установлены примеси (%) Zn (5.0), As (1.0), Sb (0.05), Ag (0.005) и Mn (0.005). Значительная примесь цинка и заметные количества мышьяка, серебра и сурьмы в халькопирите могут быть объяснены тонким срастанием минерала со сфалеритом и блеклыми рудами.

Антимонит является минералом поздней парагенетической ассоциации. В пределах месторождения развит слабо, образуя кварц – карбонат – барит – антимонитовые или мономинеральные прожилки, сложенные средне- крупнозернистым агрегатом минерала (А.В.Буряк и др., 1978). Реже антимонит встречается в виде вкраплений удлиненных кристаллов в халцедоновидном или шестоватом кварце. Размеры выделений минерала 3-12 мм. Ассоциирует антимонит иногда со сфалеритом, причём последний кристаллизуется раньше антимонита; в рассечке №62 штольни №1 прожилок сфалерита пересекается прожилком антимонита. Там же наблюдается замещение сфалерита антимонитом.

Количественным спектральным и спектрохимическим анализами в антимоните установлены (г/т): As – 300, Cu – 200, Pb – 100, Hg – 10, Ag – 0.6, Rh – 0.06 и Pd – 0.03. Повышенные содержания мышьяка, свинца и меди в минерале можно объяснить присутствием микровключений сульфидов этих элементов.

Алтаит (PbTe) и гессит (Ag₂Te) обнаружены работниками ИГЕМ РАН. Они образуют микровкрапленность в кварц-карбонатном прожилке в полосчатых метасоматитах рудной зоны б. На месторождении в протолочках руд рентгенометрически установлен также катгьерит (CoS₂).

Из вышеприведённого материала явствует, что среди сульфидов основными концентраторами золота являются пирит и арсенопирит. Содержание этого элемента колеблется от 13 до 74 (среднее 44 г/т) для пирита и от 10.2 до 22 (14 г/т) для арсенопирита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровская Н.В. Самородное золото. – М.: Наука, 1973, 348 с.
2. Файзиев А.Р., Набиев Н.Ф. – ДАН РТ, 2013, т., № 10, с.812-816.

А.Р.ФАЙЗИЕВ, Н.Ф.НАБИЕВ*, А.В.БУРЯК**

СУЛФИДҲОИ КОНИ ТИЛЛОИ ПОКРУД (ТОЧИКИСТОНИ МАРКАЗӢ)

*Институти геология, сохтмони ба заминҷунбӣ тобовар ва сейсмологияи
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,
Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,

***Саридораи геологияи назди Ҳукумати Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мақола тавсифи сулфидҳои кони тиллои Покруд оварда шудаанд, ки баъзе аз онҳо (пирит, арсенопирит) ғунқунандаи муҳими маъдани тилло мебошанд.

Калимаҳои калидӣ: кон – сулфидҳо – минералҳо – элементҳо – метасоматитҳо.

A.R.FAYZIEV, N.F.NABIEV*, A.V.BURYAK**

SULFIDES PAKRUT GOLD DEPOSIT (CENTRAL TAJIKISTAN)

*Institute of geology, earthquake engineering and seismology,
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,
Tajik national University,

**General Directorate of Geology under the Government of the Republic of Tajikistan*

The article describes the sulphides deposits Pakrut. Some of them (pyrite, arsenopyrite) gold concentrates are important.

Key words: deposit – sulfide – mineral – element – metasomatic.

УДК 632

Х.М.АХМЕДОВ, Х.С.КАРИМОВ, Н.М.САФРАЛИЕВ, А.Г.МАРКАЕВ*, Ф.У.ОБИДОВ*,
Р.А.ИСМОЙЛОВ*, Ф.АХМЕДОВ*, З.КАБУТОВ**

**ДВУХКОНТУРНАЯ СОЛНЕЧНАЯ ВОДОНАГРЕВАТЕЛЬНАЯ
УСТАНОВКА НА ОСНОВЕ ПЕРВИЧНОГО АЛЮМИНИЯ**

Центр инновационного развития науки и новых технологий

АН Республики Таджикистан,

**Государственное научно-экспериментальное и производственное учреждение*

АН Республики Таджикистан,

***Физико-технический институт им. С.У. Умарова АН Республики Таджикистан*

Поступила в редакцию 15.12.2013 г.

В работе описана конструкция двухконтурной солнечной водонагревательной установки с плоским коллектором, разработанной и изготовленной на основе первичного алюминия в Государственном научно-экспериментальном учреждении АН РТ. Объём резервуара для аккумуляции тепловой воды равен 50 л. Использование воды с 20% добавкой антифриза в качестве теплоносителя позволяет применять солнечный водонагреватель и зимой. Подключение к солнечному водонагревателю водонапорного резервуара позволяет использовать его при пониженных давлениях воды в водопроводной сети даже при отсутствии воды в водопроводной сети, что очень важно для Таджикистана, 70% населения которого проживает в сельской местности и горных территориях, где отсутствует централизованная водопроводная сеть. Среднегодовая максимальная температура воды составляла 56.8°C. Эффективность водонагревателя в среднем равна: зимой – 32%, весной и осенью – 41%, летом – 53%.

Ключевые слова: солнечный водонагреватель – коллектор – резервуар – энергоэффективность – температура воды и окружающей среды.

Как известно, солнечная энергия может быть использована для прямого её преобразования в электрическую или тепловую энергию [1,2], а также для специальных целей, например в медицине [3]. Одним из наиболее эффективной и масштабной является ис-

Адрес для корреспонденции: Ахмедов Хаким Мунавварович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Рудаки, 33, Президиум АН РТ. E-mail: khakim48@mail.ru.

пользование солнечной энергии для нагревания воды [4,5]. При этом эффективность (η) водонагревателя может достигать 50-60% [4].

Для изготовления водонагревателей и, в частности, коллекторов обычно используют сталь, алюминий и медь [6,7], в некоторых случаях термостойкие полимеры [8,9]. Наиболее дорогим материалом считается медь [7]. Если средняя цена 1 тонны листового алюминия равна 5000 дол. США, то стоимость меди, как правило, в два раза выше. В то же время в отдельных случаях как трубки, так и поглотитель солнечной энергии коллектора изготавливают из меди [10]. На практике часто используют в трубках коллекторов медь, а поглотитель и корпус делают из стали и алюминия [7]. Стоимость коллекторов с чёрной, неселективной, поверхностью с одним и двумя слоями стеклянного покрытия составляет в пределах 50-200 и 300 дол. США за кв.м. [7].

Целью данной работы была разработка и изготовление сравнительно дешёвой и надёжной солнечной водонагревательной установки на основе алюминия, позволяющего получать достаточное количество тёплой воды для нужд средней семьи в условиях Таджикистана. Учитывая, что Таджикистан производит и экспортирует алюминий, было бы целесообразным изготавливать солнечные водонагреватели из алюминия. Алюминий сравнительно дешёвый и доступный материал, его не нужно импортировать.

В данной работе приведены конструкция и результаты длительных испытаний двухконтурного солнечного водонагревателя, который был изготовлен из первичного алюминия производства Таджикского алюминиевого завода в Государственном научно-экспериментальном и производственном учреждении АН РТ.

Для разработки солнечного водонагревателя были использованы данные, приведённые в литературе и хорошо известные специалистам [5-7]. На рис.1 (а и б) приведены схематические конструкции водонагревателя (вид сбоку) и коллектора (вид сверху), изготовленных из первичного алюминия.

На опоре 1 (рис.1 а) установлен коллектор 2, соединённый с помощью трубопроводов с цилиндрическим резервуаром 3. Внутри резервуара 3 установлен теплообменник. Кран 5 предназначен для предотвращения циркуляции воды в контуре, образованном коллектором, резервуаром и трубами, при отсутствии солнечного излучения. Кран 6 используется для регулировки потока воды, поступающего в водонагреватель и соответственно потребителю. В резервуаре 3 установлен термометр для контроля температуры. Резервуар 4 служит для хранения воды, которая может быть использована при отсутствии воды или недостаточности её напора в системе водоснабжения. В воду, которая циркулирует в первом контуре, включающем коллектор 2, трубопроводы и цилиндрический резервуар 3, добавляется антифриз для предотвращения замерзания воды в холодное время года.

Коллектор (рис. 1 б) содержит корпус 1, покрытый с солнечной стороны однослойным стеклянным покрытием, приёмник 2 солнечного излучения (поглотитель) с встроенными трубками 3, впуск 4 и выпуск 5 воды. На дне коллектора установлен теплоизолятор из стекловаты, покрытый алюминиевой фольгой. Коллектор имел следующие

параметры: площадь корпуса 2 м^2 , площадь поглотителя 1.8 м^2 , количество трубок - 8 штук, диаметр трубок 15 мм. Параметры резервуара следующие: длина - 1445 мм, диаметр 500 мм, объём 0.52 м^3 (рис.2.).

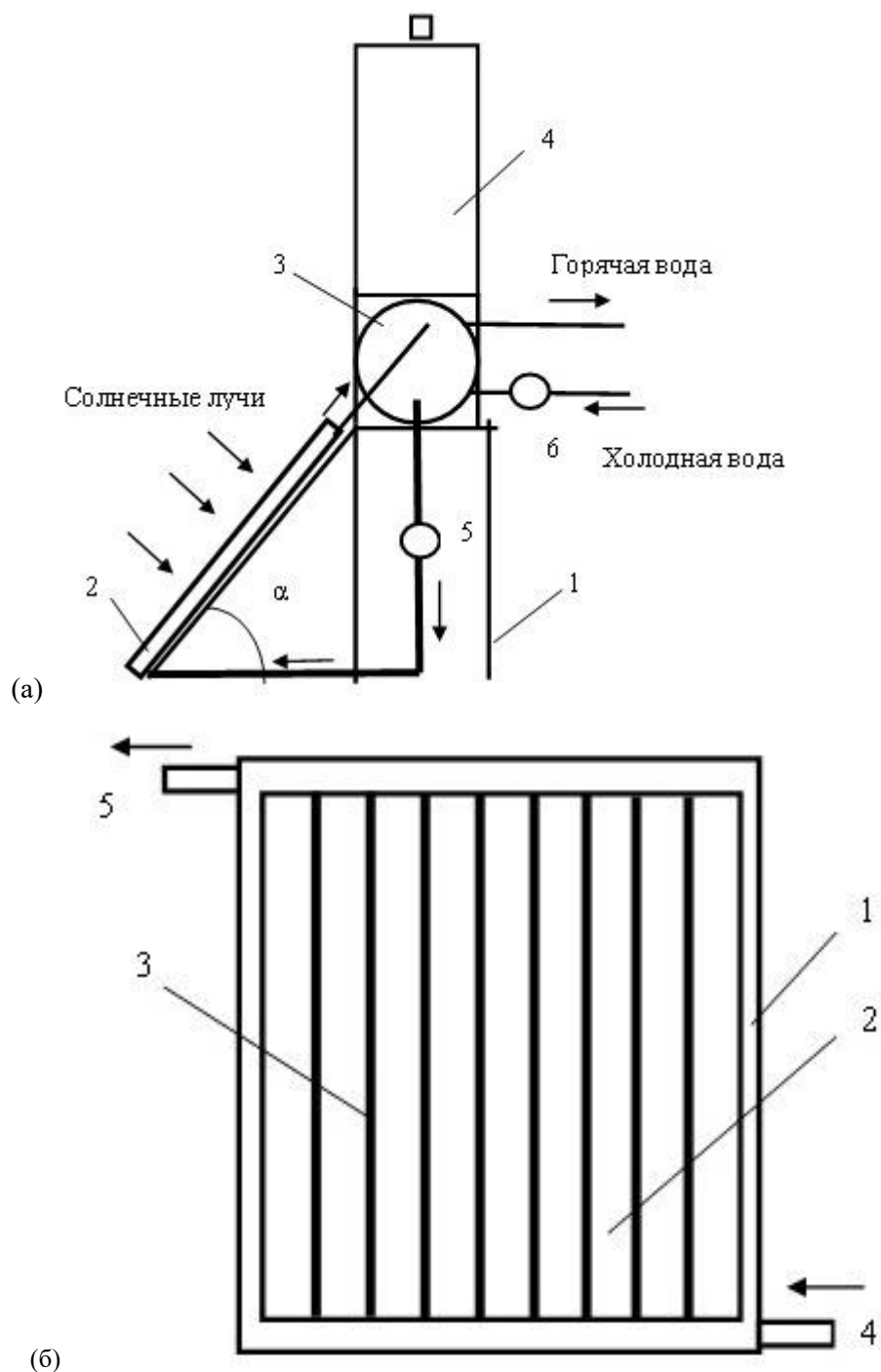


Рис.1. Схематическая конструкция водонагревателя. Вид сбоку (а): опора – 1, коллектор – 2, цилиндрический резервуар – 3 и 4, краны – 5 и 6, α – угол наклона коллектора 45° . Коллектор (б): корпус – 1, приемник солнечного излучения – 2, трубки – 3, впуск и выпуск воды – 4 и 5.



Рис.2. Общий вид солнечного водонагревателя, установленного на гелио-полигоне АН РТ.

На рис.3 приведены зависимости температуры (T) воды в резервуаре от времени дня (t) в середине каждого сезона. В данном случае использовались результаты, полученные в ясные безоблачные дни. На рис.4 приведены зависимости интенсивности солнечного излучения от времени.

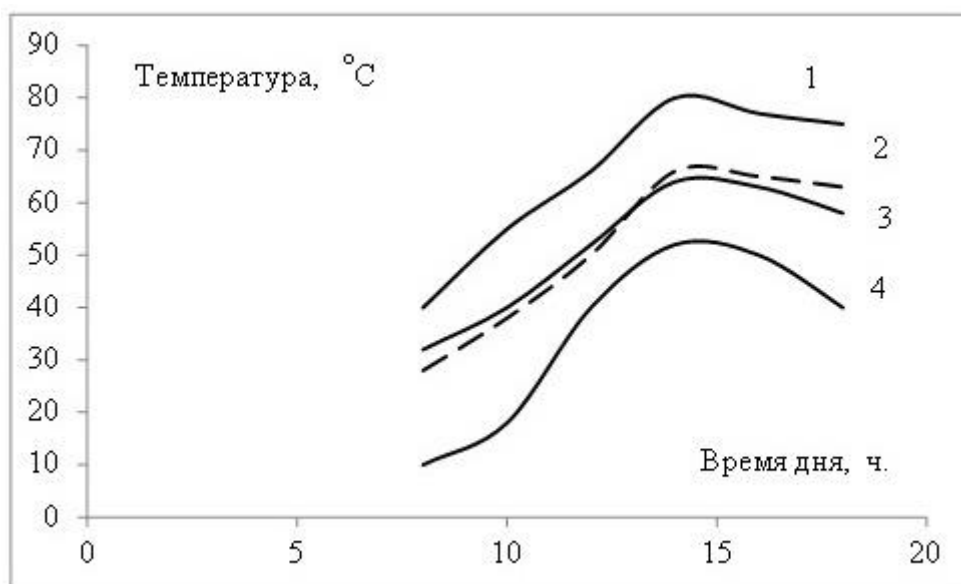


Рис.3. Зависимость температуры воды в резервуаре от времени: летом (1), осенью (2), весной (3), зимой (4).



Рис.4. Зависимости интенсивности солнечного излучения от времени летом (1), осенью (2), весной (3), зимой (4).

Эффективность η преобразования солнечной энергии в тепло определяется следующим выражением [5-7]:

$$\eta = P/AG, (1)$$

где P , A и G – поток тепла, переданного приёмником солнечного излучения жидкости (воде), площадь прозрачной поверхности коллектора, G – средняя интенсивность солнечного излучения на поверхности коллектора в течение дня. В свою очередь P вычисляется по следующей формуле [5,6]:

$$P = mc (dT/dt), (2)$$

где m – масса, c – удельная теплоёмкость, T – температура воды и t – время. Масса и удельная теплоемкость воды были приняты равными 50 л и 4.182 кДж/кг^oC (при $T=20^o$ C).

Используя данные выражения, можно вычислить, что эффективность водонагревателя равна зимой – 32%, весной и осенью – 41%, летом – 53%. Эти данные показывают значительную зависимость эффективности водонагревателя от сезона года, по-видимому, связанную с естественным изменением интенсивности солнечного излучения и погодных условий, в частности температуры окружающей среды. Среднегодовая максимальная температура воды составляла 56.8^oC.

По нашим оценкам, начальная стоимость данного солнечного водонагревателя, которая включает стоимости использованных материалов и затраты на изготовление, составляет 500 долл. США. Примерный срок службы водонагревателя 10 лет. Как показывает мировой опыт, при расширении масштаба производства водонагревателей на коммерческой основе, стоимость одного водонагревателя существенно понижается. Это видно из

стоимости солнечных водонагревателей, произведенных в Турции (1200 дол. США) и Китае (1000 дол. США), которые имеются в продаже в Таджикистане.

Таким образом, разработан и изготовлен на основе первичного алюминия двухконтурный солнечный водонагреватель с естественной циркуляцией. Горизонтальное расположение резервуара с горячей водой, в отличие от вертикального, позволяет обеспечить высокую скорость перемешивания воды. Использование воды с 20% добавкой антифриза в качестве теплоносителя позволяет использовать солнечный водонагреватель и зимой. Подключение к солнечному водонагревателю водонапорного резервуара позволяет использовать его при пониженных давлениях воды в водопроводной сети и даже при отсутствии воды в водопроводной сети, что очень важно для Таджикистана, 70% населения которого проживает в сельской местности и горных территориях, где отсутствует централизованная водопроводная сеть. Солнечный водонагреватель может быть изготовлен в обычной мастерской, для его изготовления не требуется дорогостоящего специального оборудования. Солнечный водонагреватель может использоваться в быту и на производстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еременков В., Кузнецов Г.В., Кильчичская С.С., Литвиненко С.В., Скрышевская В.А., Стриха В.И. - Гелиотехника, 1989, №4, с. 20-25.
2. Шаймарданов В.П., - Гелиотехника, 1996, №2, с. 77-78.
3. Шоназаров Н.П. - Гелиотехника, 1996, №2, с. 79-80.
4. Ахмедов Х.М., Каримов Х.С. Возобновляемые источники энергии в Таджикистане и возможности их использования. - Душанбе: Дониш, 2005, 34 с.
5. Каримов Х.С., Ахмедов Х.М. Солнечная теплоэнергетика: - Душанбе, Дониш, 2008, 138 с.
6. Twidell W., Weir A.D. Renewable Energy resources, F.N. Spon», London, 1986, 486 p.
7. Tiwari G.N. Solar Energy. Fundamentals, Design, Modeling and Application, Raj Kamal Electric Press; New Delhi, India, 2004, 581 p.
8. Zondag H.A., de Vries D.W., van Helden W.G.J., van Zolingen R.J.C., van Steenholen A.A. - Solar Energy, 2003, v.74, pp.253-269.
9. Tripanagnostopoulos Y., Nousia T., Yianoulis P. - Solar Energy, 2002, v.72 (3), pp.217-234.
10. Karimov Kh.S., Muhammad Abid, Combined uncovered sheet-and-tube PVT-collector system with built-in storage water heater. IJUM Engineering Journal, Special Issue in Science and Ethics, 2011, v.12, №6, pp.1-7.

Х.М.АХМЕДОВ, Х.С.КАРИМОВ, Н.М.САФАРАЛИЕВ, А.Г.МАРКАЕВ*,
Ф.У.ОБИДОВ*, Р.А.ИСМОИЛОВ*, Ф.АХМЕДОВ*, З.К.КАБУТОВ**

ОБГАРМКУНАКИ ОФТОБИИ ДУКОНТУРА ДАР АСОСИ АЛЮМИНИИ АВВАЛИЯ

Маркази рушди иновационии илм ва технологияи нави назди

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,

**Корхонаи давлатии илмӣ-истеҳсолӣ ва таҷрибавии*

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,

***Институтуи физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови*

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақола сохтори обгармкунаки офтобии содда бо коллектори ҳамворӣ дар асоси алюминии аввалия, ки дар Академияи илмҳои ҶТ коркард шудааст, омӯхта шудааст. Қори обгармкунак дар муҳити табиӣ дар муддати як сол таҳқиқ шудааст. Дар натиҷаи таҳқиқ нишон дода шудааст, ки ҳарорати миёнаи максималии об – 56.8°C, самаранокии дастгоҳ зимистон – 32%, тобистон – 53%, баҳору тирамоҳ – 41%. Ҳаҷми зарфи об 50 л.

Калимаҳои калидӣ: обгармкунаки офтобӣ – коллектор – зарф (резервуар) – самарои энергетикӣ – ҳарорати об ва муҳити атроф.

KH.M.AKHMEDOV, KH.S.KARIMOV, N.M.SAFARALIEV, A.G.MARKAEV*,
F.U.OBIDOV*, R.A.ISMOILOV*, F.AKHMEDOV*, Z.Q.KABUTOV**

DOUBLE CONTOUR SOLAR WATER HEATER ON THE BASE OF PRIMARY ALUMINUM

Centre of Innovative development of a science and new technologies,

Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,

**State scientific-experimental and industrial institution,*

Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,

***S.U.Umarov Physical-Technical Institute, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

It is described double contour solar water heater on the base of primary aluminum fabricated in Academy of Sciences. The results of investigation of the properties of the heater in natural conditions during a year are presented. It was found that the average maximum temperature of water was equal to 56.8°C. Efficiency of the water heater was equal to: at winter – 32%, spring and autumn – 41%, summer – 53%. The volume of reservoir of the water heater was equal to 50 liters.

Key words: solar water heater – collector – basin – energy efficiency – water temperature and environment.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ОТДЕЛЕНИЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

№4 (153), 2013 г.

ХРОНИКА



В президиуме Национальной академии наук (НАН) Украины 2-3 декабря 2013 г. состоялось торжественное заседание Совета Международной ассоциации академий наук (МААН), посвященное 20-летию её создания.* В заседании участвовали делегации 10 академий наук, 3-х ассоциированных членов, другие приглашенные гости, в том числе: от Национальных академий наук: Азербайджана - президент **А.А.Ализаде**; Республики Армения – вице-президент **Ю.Г.Шукурян**; Республики Беларусь – председатель Президиума **В.Г.Гусаков**; Грузии – академик-секретарь **И.П.Гамкрелидзе**; Республики Казахстан – президент **М.Ж.Журинов**; Академии наук Молдовы – вице-президент **Г.Е.Руснак**; Российской академии наук – член Президиума **Г.А.Месяц**; Академия наук Республики Таджикистан – вице-президент **С.Одинаев**; Национальной академии наук Украины - президент **Б.Е.Патон**.

От ассоциированных членов: Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований - председатель Совета Фонда **В.А.Орлович**; Объединенного института ядерных исследований – научный руководитель **В.Г.Кадышевский**; Российского гуманитарного научного фонда – начальник Управления гуманитарных наук **В.П.Гребенюк**.

Гости: **Ю.М.Батурин** - директор Института истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова РАН; **Э.П.Власова** - заведующая экспериментальной лабораторией «РАН-Видео» ВИНТИ РАН; **В.С.Губарев** - писатель; **Э.Я.Мадатли** – Чрезвычайный и

**При подготовке статьи были использованы материалы юбилейного заседания Совета Международной ассоциации академий наук.*

Полномочный Посол Азербайджанской Республики в Украине; **Медвид Артур** – представитель Латвийской академии наук, профессор; **А.Н.Покровский** – старший специальный советник президента МААН; **Е.А.Понарина** – первый заместитель главного редактора газеты «Поиск», всего 28 участников.

В повестке дня заседания Совета МААН были представлены следующие вопросы:
Вступительное слово президента МААН академика НАН Украины Б.Е.Патона.

Выступления руководителей делегаций.

Принятие решений.

Затем Совет МААН принял ряд постановлений (№№236-241), посвященных следующим вопросам: № 236 – Об основных итогах деятельности МААН в 1993-2013 гг.; №237 – О создании Научного совета по проблемам функциональных материалов электронной техники; №238 – О создании Совета ботанических садов стран СНГ при МААН; №239 – О создании Научного совета по проблемам биомедицины и биотехнологий при МААН; №240 – О вручении памятной медали МААН «За содействие развитию науки» членам официальных делегаций академий наук и организаций – ассоциированных членов МААН, почетных гостей, принимающих участие в юбилейном заседании Совета МААН, а также представителей НАН Украины и других академий наук и организаций за их активное участие в подготовке мероприятий в связи с 20-летием Ассоциации; №241 – О подготовке проекта плана мероприятий МААН на 2014 г., с учётом прилагаемых предложений научных советов МААН, для формирования Плана мероприятий МААН в течение месяца и его утверждения Ассоциацией.

Ниже приводим основные достижения деятельности МААН за 20 лет.

Учитывая выступление президента Международной ассоциации академий наук, посвященное основным итогам деятельности МААН в 1993-2013 гг., выступления в дискуссии руководителей делегаций академий наук и организаций - ассоциированных членов МААН, результаты деятельности Ассоциации, изложенные в книге «Международной ассоциации академий наук - 20 лет», которая была роздана участникам юбилейного заседания Совета МААН, демонстрацию фильма «Летопись МААН», подготовленного студией «Наука-Видео» РАН к 20-летию создания Ассоциации, и оценки её работы, прозвучавшие в этом фильме, Совет Международной ассоциации академий наук отмечает следующее.

С момента образования МААН в центре её внимания постоянно находятся вопросы восстановления и углубления связей между учёными, сохранения и развития научного потенциала и, прежде всего, фундаментальной науки в странах СНГ, предоставления ей эффективной поддержки и помощи, интеграции науки и образования, подготовки научных кадров, создания условий для использования научных достижений и увеличения вклада науки в социально-экономическое развитие государств - участников Содружества.

Дважды, в 1995 г. (г. Алматы) и в 2007 г. (г. Душанбе), инициативы МААН по развитию научного сотрудничества в СНГ рассматривались на заседании Совета глав государств-участников СНГ и по ним принимались решения, в реализации которых Ассоциация принимала активное участие.

По решению Совета МААН был организован безвалютный обмен научными периодикой и книжной продукцией между участниками Ассоциации, об объёмах которого можно судить из следующего примера. Национальная библиотека Украины им. В.И.Вернадского в период с 1996 по 2012 гг. передала по линии МААН своим партнерам около 53 тыс. экземпляров журналов и почти 8.5 тыс. книг и, в свою очередь, получила от них около 19 тыс. экземпляров журналов и свыше 7.6 тыс. экземпляров книг.

При МААН или под её эгидой осуществляют свою деятельность 12 научных советов, комитетов и иных общественных структур. Среди них Научный совет по новым материалам (председатель - академик НАН Украины Б.Е.Патон), Объединенный научный совет по фундаментальным географическим проблемам (председатель - академик РАН В.М.Котляков), Союз физиологических обществ стран СНГ (президент - Р.И.Сепиашвили), Международная ассоциация институтов истории стран СНГ (президент - академик РАН А.О.Чубарьян), Совет по книгоизданию (председатель - член-корреспондент РАН В.И.Васильев). Плодотворно функционирует под эгидой Ассоциации международный научный и общественно-политический журнал «Общество и экономика» (главный редактор - член-корреспондент РАН К.И.Микульский).

В центре внимания МААН находятся также формирование и реализация международных программ научных исследований. Так, в настоящее время выполняются следующие программы: «Астрономия в Приэльбрусье. 2010-2014 гг.», «Современные проблемы радиобиологии: наука и практика». Совместно с Евразийской ассоциацией университетов (президент - академик РАН В.А.Садовничий) подготовлена и утверждена Научно-исследовательская программа «Черное, Азовское и Каспийское моря как имитационная модель океана».

Чрезвычайно плодотворным для достижения уставных целей Ассоциации стало решение её Совета в 1996 г. о введении в МААН института ассоциированных членов, которых на сегодня насчитывается уже 7, а именно: Объединенный институт ядерных исследований (ОИЯИ) (с 1997 г.), Российский гуманитарный научный фонд (РГНФ) и Российский фонд фундаментальных исследований (РФФИ) (с 1999 г.), Московский физико-технический институт (государственный университет) и Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований (БРФФИ) (с 2000 г.), Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова (с 2002 г.), Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» (с 2009 г.). МААН активно содействует установлению и углублению взаимодействия между академиями наук и ассоциатами. Об этом, в частности, свидетельствуют договора о сотрудничестве, заключенные РФФИ, РГНФ, БРФФИ с рядом академий наук - членов Ассоциации, проведение в их рамках совместных конкурсов проектов НИР.

МААН принимала участие в организации и проведении многих крупных международных форумов. В частности, только при финансовой поддержке ЮНЕСКО за последние 10 лет Ассоциация провела 8 международных конференций и симпозиумов.

Важным событием стало подписание в 2009 г. Меморандума о взаимопонимании между Международной ассоциацией академий наук и Межгосударственным фондом гуманитарного сотрудничества государств-участников СНГ. В его рамках уже реализован ряд актуальных проектов в области науки, образования и работы с молодежью. На дальнейшее углубление взаимодействия науки и образования направлено подписанное в 2010 г. Соглашение о сотрудничестве между Евразийской ассоциацией университетов и Международной ассоциацией академий наук. В 2010, 2011 и 2012 гг. во время проведения форумов творческой и научной интеллигенции государств-участников СНГ в их рамках состоялись совместные заседания советов обеих упомянутых ассоциаций, на которых были обсуждены актуальные вопросы взаимодействия науки и образования в обеспечении модернизации экономики стран СНГ.

Поддержка молодых ученых - важное направление деятельности МААН. В связи с этим заслуживает особого внимания программа «Мобильность молодых ученых», осуществляемая РФФИ с конца 2007 г. МААН также поддержала ежегодно проводимые с 2008 г. на базе НИЦ «Курчатовский институт», ОИЯИ, Института кристаллографии имени А.В.Шубникова РАН Высшие курсы стран СНГ для молодых ученых, аспирантов и студентов старших курсов по современным методам исследований наносистем и материалов (СИН-нано).

МААН неоднократно оказывала разноплановую поддержку многим академиям наук и научным организациям в их, зачастую непростых, взаимоотношениях с властными структурами, в решении неординарных проблем, с которыми они сталкиваются. Соответствующие обращения Ассоциации направлялись в адрес руководителей Болгарии, Грузии, Казахстана, Молдовы, России и Украины.

МААН всегда придерживалась той точки зрения, что реформирование академий наук должны и в состоянии осуществлять сами ученые, хорошо знающие имеющиеся проблемы. В этой связи вызывают чувство глубокого сожаления та поспешность, с которой была проведена реорганизация Российской академии наук, игнорирование предложений научной общественности, которые были направлены на сохранение базовых принципов деятельности РАН. Широкомасштабные эксперименты и революции в организации науки, как правило, чреватые тяжёлыми последствиями не только для науки и образования, но и для экономики в целом.

За 20 лет деятельности МААН было проведено 25 заседаний её Совета, из которых 11 состоялись в Киеве, 4 - в Москве, 2 - в Минске, по одному - в Алматы, Алуште, Ашхабаде, Бишкеке, Дубне, Душанбе, Кишинёве и Тбилиси. Эти заседания Совета МААН проводились на базе академий наук Беларуси, Грузии, Казахстана, Кыргызстана, Молдовы, России, Таджикистана, Туркменистана и Украины; Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, Национального исследовательского центра «Курчатовский институт» и Объединенного института ядерных исследований.

МААН получила заслуженное признание в СНГ и за его пределами. Об этом свидетельствуют: плодотворные с 2003 г. партнерские отношения Ассоциации с ЮНЕСКО,

которая предоставила МААН консультативный статус; рассмотрение инициатив МААН на саммитах СНГ; предоставление Ассоциации в 2007 г. статуса наблюдателя при Межпарламентской ассамблее государств-участников СНГ (МПА); поступившие в МААН в связи с её 20-летием приветствия от Генерального директора ЮНЕСКО, Председателя Совета МПА, Председателя Исполнительного комитета - Исполнительного секретаря СНГ, президентов ряда стран СНГ, выпуск знаков почтовой оплаты.

Совет Международной ассоциации академий наук постановляет:

1. Принять к сведению выступления президента МААН академика НАН Украины Б.Е.Патона, участников юбилейного заседания Совета МААН о итогах деятельности Ассоциации в 1993-2013 гг.

2. Одобрить итоги работы МААН за прошедшие два десятилетия.

Отметить, что Ассоциации удалось: в определённой степени восстановить и наладить информационные потоки между академиями наук; сформировать научные советы по ряду важнейших направлений фундаментальных исследований, сформировать регулярную плодотворную их деятельность; наладить взаимное информирование о законодательной деятельности в области науки и высшего образования; организовать совместное использование отдельных уникальных научных объектов; объединить усилия заинтересованных академий наук и организаций, входящих в МААН, в формировании и выполнении ряда международных программ научных исследований; содействовать проведению многих двусторонних и многосторонних конкурсов проектов НИР; реализовать ряд важных мероприятий по углублению взаимодействия науки и образования, поддержке научной молодежи; на постоянной основе продуктивно взаимодействовать с ЮНЕСКО.

3. Считать необходимым:

- продолжать привлекать внимание властных структур к проблемам сферы науки и учёных, предлагать конструктивные пути их решения, в частности, относительно создания в странах СНГ механизмов и условий, способствующих соединению интересов отечественного крупного бизнеса и науки, востребованности научных результатов экономикой и обществом, продолжать показывать и доказывать органам государственной власти, что для фундаментальной науки губительно быть в административном подчинении министерств, ведомств и агентств, проводить непрерывный поиск новых форм организации научных исследований и передачи завершённых разработок в практику;
- всячески содействовать установлению и развитию взаимовыгодной кооперации академий наук с организациями - ассоциированными членами МААН;
- уделять особое внимание развитию сотрудничества с Евразийской ассоциацией университетов;
- способствовать организации и разработке в СНГ концепций и совместных программ исследований, в частности, в области ядерной медицины, по созданию новых материалов для твердотельных приборов следующих поколений электронной техники и др.;
- принимать и в дальнейшем совместно с Евразийской ассоциацией университетов активное участие в проведении Форумов творческой и научной интеллигенции государств-участников СНГ, развивать в этих целях конструктивное взаимодействие с

Межгосударственным фондом гуманитарного сотрудничества государств-участников СНГ;

- более полно использовать возможности ЮНЕСКО для решения уставных задач МААН в связи с новым статусом, который Ассоциация имеет в ЮНЕСКО;
- активизировать работу по развитию института ассоциированных членов МААН, созданию при Ассоциации новых научных советов;
- осуществлять меры по повышению авторитета науки и ученых, в этих целях содействовать существенному расширению на постоянной основе связей со средствами массовой информации, привлечению к формированию позитивного общественного мнения талантливых журналистов, неравнодушных к науке, и поддерживать их деятельность.

4. Считать целесообразным направить в адрес глав государств-участников СНГ, Вьетнама и Грузии книгу «Международной ассоциации академий наук - 20 лет», изданную в НАН Украины к юбилейной дате.

5. Просить руководителей академий наук и организаций, входящих в МААН, направить в месячный срок в штаб-квартиру Ассоциации (Украина, 01601, г. Киев 30, ул. Владимирская, 54) предложения по перспективным направлениям деятельности МААН и ее совершенствованию.

6. В связи с реорганизацией Российской академии наук отметить конструктивность предложения Президента Российской Федерации В.В.Путина, высказанное на встрече с президентом РАН В.Е.Фортовым и руководителем Федерального агентства научных организаций М.М.Котюковым (31 октября 2013 г., Московская область, Ново-Огарево), о введении годичного моратория на использование имущества институтов реорганизованной РАН и при решении кадровых вопросов. Выразить надежду, что это предложение будет подкреплено необходимыми нормативно-правовыми актами.

7. Считать целесообразным опубликовать в средствах массовой информации стран, академий наук которых входят в МААН, информации о юбилейном заседании Совета МААН, настоящее постановление (либо его основные положения).

На заседании особо говорилось о таких знаменательных для всей академической общественности событиях, как 95-летие образования Национальной академии наук Украины и 95-летие со дня рождения Бориса Евгеньевича Патона - президента Национальной академии наук Украины, президента Международной ассоциации академий наук, внесшего огромный вклад в развитие фундаментальных и прикладных наук. Он снискал себе славу и уважение и на поприще восстановления и углубления связей между учеными, интеграции науки и образования, подготовки научных кадров, сохранения и развития научного потенциала и, прежде всего, фундаментальной науки в странах СНГ. Вклад МААН и Б.Е.Патона в развитие мировой науки неоценим.

С.Одинаев

УСПЕХИ ТАДЖИКСКОГО НАУЧНОГО КНИГОИЗДАНИЯ

С 6 по 8 ноября 2013 года в г. Москве прошла Международная научная конференция «Научное и культурное взаимодействие на пространстве СНГ в контексте развития книгоиздания, книгообмена и науки о книге. К 285-летию академического книгоиздательства в России», проводившейся в рамках VII Сессии Совета по книгоизданию Международной ассоциации академий наук.

Конференция была организована Академиздатцентром «Наука» Российской академии наук, который имеет статус научно-исследовательского института данной академии. Он является координационным центром по исследованию книжной культуры не только в Российской Федерации, но в странах СНГ и ряде зарубежных стран мира. Центр наряду с научно-исследовательскими работами систематически проводит различные тематические выставки книг, научные конференции, совещания, сессии по актуальным проблемам книгоиздания и книгообмена.

Сессия и международная конференция являлись плановыми мероприятиями центра, приуроченными к 285-летию первого издания научной книги в России. В работе конференции приняли участие представители 7 стран, в том числе России, Украины, Беларуси, Болгарии, Казахстана, Киргизии, Таджикистана.

Пленарное заседание конференции с вступительным словом открыл председатель Совета по книгоизданию при Международной ассоциации академий наук (МААН), Генеральный директор Академиздатцентра «Наука», директор научного и издательского центра «Наука» Российской академии наук, член-корреспондент РАН В.И.Васильев. Он подробно рассказал об успехах академического книгоиздания не только в России, но и в других странах СНГ. В частности, он отметил тесные связи и сотрудничество Академиздатцентра с Академией наук Республики Таджикистан.

На пленарном заседании были заслушаны научные доклады В.П.Леонова, Е.Д.Дьяченко «К истории библиотечной работы в национальных академиях наук СССР (1930-1990 гг.)», В.А.Шахнова «Роль Российского фонда фундаментальных исследований в поддержке научного книгоиздания», Е.Г.Вакаренко «Научный журнал как элемент книжной культуры», Л.А.Авгуль «О тенденциях в книгоиздании и чтении молодежи Беларуси», Е.Ю.Павловской «Серая литература» в Интернете», Х.М.Ахмедова, М.Муллоахмедова «Рудаки в трудах русских востоковедов (Проблемы исследования и издания)», Б.В.Ленского «Научное книгоиздание в процессе эволюции издательской си-

стемы России (1912-2012 гг.)», В.Н.Фридлянова, Р.А.Казаковой «Издательская программа Российского гуманитарного научного фонда», Ш.Д.Ибраимовой «Кыргызская виртуальная научная библиотека и новые возможности ЦНБ НАН Кыргызской Республики».

В докладе «Рудаки в трудах русских востоковедов (Проблемы исследования и издания)» были отмечены заслуги выдающихся ученых, таких как А.Е.Крымский, В.В.Бартольд, А.А.Семенов, Е.Э.Бертельс, И.С.Брагинский, А.Н.Болдырев, М.Дьяконов, А.Ю.Якубовский, В.Вяткин, М.Стеблин-Каменский, М.Занд, М.Н.Османов, А.Тагирджанов, М.А.Рейснер, Л.И. Брагинская и др. в исследовании эпохи, жизни и творчества основоположника таджикско-персидской литературы, «Адама поэтов» Абу Абдуллах Рудаки, а также было предложено с целью развития и укрепления научных связей при Академиздатцентре «Наука» РАН создать новое подразделение по переводу и изданию лучших научных работ ученых стран СНГ.

Советом по книгоизданию при МААН были подведены итоги конкурса лучших научных изданий стран СНГ и проведено награждение победителей и лауреатов конкурса «Научная книга-2013». Отрадно, что жюри конкурса высоко оценило работы, изданные в издательстве «Дониш» Академии наук Республики Таджикистан. По номинации «Общественные науки» победителем конкурса стала книга «История таджикской философии» в трёх томах, а по номинации «Естественные науки» получила диплом книга академика Д.Халикова «Синтез, физико-химические и биологические свойства полимеров, производных этинилпиперида». Это свидетельствует о том, что, несмотря на трудности, наука и научное книгоиздание в нашей республике развиваются и дают хорошие результаты, а книги, вышедшие в издательстве «Дониш», привлекают внимание не только отечественных, но и зарубежных ученых.

Член-корреспондент АН РТ М.Муллоахмедов

Редакция и корректура – Н.Г.Сапожников

Сдано в набор 15.01.2014 г. Подписано в печать 29.01.2014 г.
Печать офсетная. Формат 70×100 1/16. Гарнитура Times. Усл. печ. л.8. Заказ № ____.
Тираж 300 экз.

*Адрес редколлегии: 734025, Душанбе, пр.Рудаки, 33, каб. 11.
Тел.:2-21-62-64. E-mail: danrt@mail.ru
Издательство «Дониш»: 734029, Душанбе, ул.Айни, 121, корп.2.*
