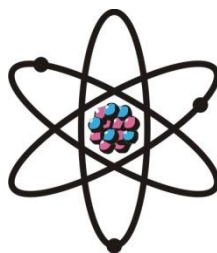


ОТДЕЛЕНИЕ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,  
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Журнал основан  
в январе 1952 г.



№ 4 (157)  
2014 г.

---

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**С.О.Одинаев** – главный редактор, академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Кохирова Г.И.** – зам.главного редактора, доктор физико-математических наук; **Н.Г.Сапожников** – ответственный секретарь; **Х.М.Ахмедов** – академик, доктор химических наук; **П.Б.Бабаджанов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Р.М.Марупов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **Х.Х.Муминов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Ф.Рахими** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Д.Усманов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<b>З.Х.Рахмонов, Б.М.Замонов.</b> Короткие кубические двойные тригонометрические суммы, с «длинным» сплошным суммированием .....	7
<b>М.С.Саидусайнов.</b> Неравенства типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана для аналитических функций одной переменной .....	24
<b>Ф.М.Шамсудинов.</b> Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами.....	32

<b>О.Х.Каримов.</b> О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами .....	<b>42</b>
<b>С.С.Мирзоев.</b> Видоизменённые задачи Коши для общих вырождающихся неклассических уравнений 4-го порядка .....	<b>51</b>

#### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

<b>М.М.Кабилов, Б.Дж.Гулбоевю</b> Влияние теплотерь и диффузии компонентов газовой смеси на распространение волны горения в инертной пористой среде.....	<b>59</b>
--	-----------

#### **АВТОМАТИКА**

<b>С.А.Нарзуллоев.</b> Концептуальная модель процесса управления отдельными подразделениями органов внутренних дел Республики Таджикистан .....	<b>68</b>
---	-----------

#### **НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ**

<b>А.С.Курбонов, А.М.Баротов, З.Т.Якубов, Ф.А.Назаров, У.М.Мирсаидов.</b> Кинетика уксуснокислотного разложения обожжённого данбуритового концентрата .....	<b>73</b>
---	-----------

#### **ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ**

<b>М.Д.Исобаев, М.Д.Давлатназарова, Э.Х.Пулатов, Т.Х.Абдуллаев, М.З.Турдиалиев, И.У.Файзилов.</b> Ионогенные адсорбенты на основе угля месторождений «Зидды», «Фан-Ягноб» и экологические аспекты их применения....	<b>76</b>
---	-----------

#### **ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ**

<b>Б.С.Азизов, Х.А.Мирпочаев, Х.Сафиев.</b> Термодинамический анализ процесса газификации угля.....	<b>83</b>
---	-----------

#### **ТЕКТОНИКА**

<b>А.Р.Файзиев, Ф.А.Такранов, А.Б.Дзайнуков, А.Т.Мутавалиев.</b> Тектонические условия формирования даек и скарново-рудных тел на месторождении Алтынтопкан (Северный Таджикистан) .....	<b>90</b>
--	-----------

#### **БИОЭНЕРГЕТИКА**

<b>Х.М.Ахмедов, К.Партоев, Г.А.Ташбаев.</b> Топинамбур ( <i>Heliantus tuberosus</i> L.) – перспективная культура для производства биотоплива в Таджикистане.....	<b>105</b>
--	------------

#### **КЛИНИЧЕСКАЯ МЕДИЦИНА**

<b>Д.Т.Бобокалонов, З.К.Мухидинов, Г.И.Комилова, Р.С.Киматов, Э.Р.Рахманов.</b> Определение ципрофлоксацина в биологических жидкостях капиллярным зонным электрофорезом .....	<b>113</b>
---	------------

<b>ХРОНИКА.....</b>	<b>119</b>
---------------------	------------

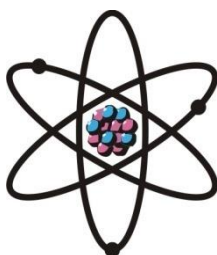
#### **ПАМЯТИ УЧЁНОГО**

<b>Валерий Максумович Салимов (к 70-летию со дня рождения).....</b>	<b>130</b>
---	------------

<b>НОВЫЕ КНИГИ .....</b>	<b>133</b>
--------------------------	------------

**ШҮЪБАИ  
ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,  
ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА**

Мачалла аз мохи  
январ соли 1952  
нашр мешавад



№ 4 (157)  
с. 2014

**ҲАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:**

**С.О.Одинаев** – сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Кохирова Г.И.** – муовини сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Г.Сапожников** – котиби масъул; **Ҳ.М.Аҳмедов** – академик, доктори илми химия; **Р.Б.Бобочонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **И.Н.Ғаниев** – академик, доктори илми химия, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Р.М.Маърупов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор; **Ҳ.Ҳ.Муминов** – узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **С.Х.Неъматуллоев** – академик, доктори илмҳои техника; **Ф.Раҳимӣ** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҳ.Раҳмонов** – узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Рачабов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҷ.Усмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **А.Р.Файзиев** – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва минералогия, профессор; **Ҷ.Х.Холиқов** – академик, доктори илми химия, профессор.

**МУНДАРИҶА**

**МАТЕМАТИКА**

<b>З.Ҳ.Раҳмонов, Б.М.Замонов.</b> Суммаи дукаратаи тригонометрии кӯтоҳи кубии дорои суммаи «дарози» яклухт .....	7
<b>М.С.Саидусайнов.</b> Нобаробариҳои намуди Колмогоров дар фазои вазндори Бергман барои функсияҳои аналитикии яктаъғирёбанда .....	24
<b>Ф.М.Шамсудинов.</b> Тасвирҳои интегралҳои ҳал барои як системаи барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуум бо коэффисиентҳои сингулярӣ .....	32
<b>О.Х.Каримов.</b> Оиди ҷудошавандагии операторҳои дифференсиалии ғайрихаттии тартиби дуум бо коэффисиентҳои матритсавӣ .....	42
<b>С.С.Мирзоев.</b> Масъалаи дигаргункардашудаи Коши барои муодилаҳои умумии ғайриклассикии тартиби чоруми масхшаванда (вырождающиеся) .....	51

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

**М.М.Қобилов, Б.Ҷ.Гулбоев.** Таъсири гармидихӣ ва диффузияи компонентҳои омехтаи газҳо ба паҳншавии мавҷи сӯзиш дар муҳити ковоки инертӣ..... **59**

## **АВТОМАТИКА**

**С.А.Нарзуллоев.** Қолиби концептуалии ҷараёни идоракунии бахшҳои алоҳидаи мақомоти корҳои дохилии Ҷумҳурии Тоҷикистон ..... **68**

## **ХИМИЯИ ҒАЙРИОРГАНИКӢ**

**А.С.Қурбонов, А.М.Баротов, З.Т.Якубов, Ф.А.Назаров, У.М.Мирсаидов.** Кинетикаи тақсимшавии кислотаи сиркои концентрати данбурити сӯхташуда ..... **73**

## **ХИМИЯИ ОРГАНИКӢ**

**М.Д.Исобаев, М.Д.Давлатназарова, Э.Х.Пулатов, Т.Х.Абдуллаев, М.З.Турдиалиев, И.У.Файзилов.** Адсорбентҳои ионогенӣ дар асоси ангишти кони “Зиддӣ”, “Фон Яғноб” ва чихатҳои экологии истифодабарии онҳо ..... **76**

## **ХИМИЯИ ФИЗИКАВӢ**

**Б.С.Азизов, Х.А.Мирпочаев, Ҳ.Сафиев.** Таҳлили термодинамикии раванди газификатсияи ангишт ..... **83**

## **ТЕКТОНИКА**

**А.Р.Файзиев, Р.Л.Такранов, А.Б.Дзайнуков, А.Т.Мутавалиев.** Шароитҳои ташаккул ёфтани дайқаҳо ва чисмҳои маъданӣ - скарнӣ дар кони Олтинтопкан (Тоҷикистони Шимолӣ) ..... **90**

## **БИОЭНЕРГЕТИКА**

**Ҳ.М.Ахмедов, Қ.Партоев, Ғ.А.Тошбоев.** Топинамбур (*Heliantus tuberosus* L.) – гиёҳи ояндадор барои истеҳсоли биосӯзишворӣ дар Тоҷикистон ..... **105**

## **ТИББИ КЛИНИКАВӢ**

**Ҷ.Т.Бобокалонов, З.Қ.Муҳидинов, Г.И.Комилова, Р.С.Қиматов, Э.Р.Раҳмонов.** Ташҳиси сипрофлоксатсин дар моеъҳои биологӣ бо усули электрофорези капиллярӣ ..... **113**

**ХРОНИКА**..... **119**

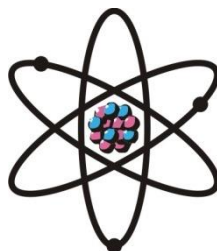
## **ЁДБУДИ ОЛИМ**

**Валерий Максумович Салимов (бахшида ба 70-солагии рӯзи таваллуд)** ..... **130**

**КИТОБҲОИ НАВ**..... **133**

**DEPARTMENT OF  
PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,  
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES**

The journal was established  
in January 1952



*№ 4 (157)*  
2014

---

**EDITORIAL BOARD**

Prof. **Saidmukhammad Odinaev**, Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; **Gulchekhra Kokhirova**, Doctor of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **Nikolay Sapozhnikov**, Secretary; **Khakim Akhmedov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Pulat Babadzhanov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Abdulkhak Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **Mamadsho Ilolov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Izatullo Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **Dzhuraboy Khalikov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Rakhim Marupov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Ulmas Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Khikmat Muminov**, Doctor of Physical and Mathematical; **Sabit Negmatullaev**, Doctor of Engineering; Prof. **Nusrat Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Farhod Rakhimi**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Zarullo Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Zafar Usmanov**, Doctor of Physical and Mathematical.

**CONTENTS**

**MATHEMATICS**

<b>Z.Kh.Rakhmonov, B.M.Zamonov.</b> Short cubic double exponential sums, with a long continuous summation .....	7
<b>M.S.Saidusaynov.</b> The Kolmogorov's type of inequalities in the weighted Bergman space for analytic functions with one variable.....	24
<b>F.M.Shamsudinov.</b> Integral representations solutions for one over determined system differential equations with singularity coefficients .....	32
<b>O.Kh.Karimov.</b> On separability of the second order nonlinear differential operators with matrix coefficients.....	42
<b>S.S.Mirzoev.</b> The Cauchy's modified problems for the general degenerating nonclassical equations of the 4th order .....	51

## **MATHEMATICAL PHYSICS**

**M.M.Kabilov, B.J.Gulboev.** Influence heat losses and diffusions component gas mixture on spreading the wave of the combustion in inert porous ambience..... **59**

## **AUTOMATICS**

**S.A.Narzulloev.** Conceptual model of management process in separate departments of agencies of internal affairs of the Republic of Tajikistan ..... **68**

## **INORGANIC CHEMISTRY**

**A.S.Kurbonov, A.M.Barotov, Z.T.Yakubov, F.A.Nazarov, U.M.Mirsaidov.** Acetic acid decomposition kinetics of burnt danburite concentrate ..... **73**

## **ORGANIC CHEMISTRY**

**M.D.Isobaev, M.D.Davlatnazarova, E.Kh.Pulatov, T.Kh.Abdullaev, M.Z.Turdialiev, I.U.Fayzilov.** Ionogenic adsorbents from coal mine "Ziddi", «Fon-Yagnob» and environmental aspects of their usage..... **76**

## **PHYSICAL CHEMISTRY**

**B.S.Azizov, Kh.A.Mirpochaev, H.Safiev.** Thermodynamic analysis of coal gasification process..... **83**

## **TECTONICS**

**A.R.Fayziev, R.L.Takranov, A.B.Dzaynukov, A.T.Mutavaliev.** Conditions of tectonic dikes and skarn ore bodies on Altintopkan field (Northern Tajikistan) ..... **90**

## **BIOENERGETICS**

**Kh.M.Akhmedov, K.Partoev, G.A.Tashbaev.** Jerusalem artichoke (*Heliantus tuberosus* L.) – promising crops for biofuel production in Tajikistan ..... **105**

## **CLINICAL MEDICINE**

**J.T.Bobokalonov, Z.K.Muhidinov, G.I.Komilova, R.S.Kimatov, E.R.Rahmonov.** Determination of ciprofloxacin in biological fluids by capillary electrophoresis ..... **113**

**CHRONICLE** ..... **119**

## **MEMORY OF SCIENTIST**

**Valeriy Maksumovich Salimov (devoted to 70<sup>th</sup> anniversary)** ..... **130**

**NEW BOOKS** ..... **133**

УДК 511.325

З.Х.РАХМОНОВ, Б.М.ЗАМОНОВ

**КОРОТКИЕ КУБИЧЕСКИЕ ДВОЙНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ  
СУММЫ, С «ДЛИННЫМ» СПЛОШНЫМ СУММИРОВАНИЕМ**

*Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан*

*Поступила в редакцию 27.11.2014*

*Работа посвящена выводу нетривиальных оценок коротких кубических двойных тригонометрических сумм вида*

$$W = \sum_{M < m \leq 2M} a(m) \sum_{\substack{U < nu \leq 2N \\ x-y < nu \leq x}} e(\alpha(mi)^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

с «длинным» сплошным суммированием.

**Ключевые слова:** короткая двойная тригонометрическая сумма — метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами — нетривиальная оценка.

И.М.Виноградов [1] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^k), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq \tau.$$

при  $k=1$ , используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал нетривиальную оценку при

$$\exp(c(\ln \ln x)^2) \ll q \ll x^{1/3}, \quad y > x^{2/3+\varepsilon},$$

основу которой наряду с «решетом Виноградова», при  $k=1$  составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

---

**Адрес для корреспонденции:** Рахмонов Зарулло, Замонов Бехруз. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики АН РТ. E-mail: zarullo\_r@mail.ru; zamonov@mail.ru

$$J_k(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M < m \leq 2M} a(m) \sum_{\substack{U < n \leq 2N \\ x-y < mn \leq x}} b(n) e(\alpha(mn)^k),$$

где  $a(m)$  и  $b(n)$  – произвольные комплекснозначные функции,  $M, N$  – натуральные,  $N \leq U < 2N$ ,  $x > x_0$ ,  $y$  – вещественные числа.

Затем Хейзелгроув [2], В. Статулявичус [3], Пан Чен-дон и Пан Чен-бяо [4], Zhan Tao [5] получили нетривиальную оценку суммы  $S_1(\alpha; x, y)$ ,  $y \geq x^\theta$ ,  $q$  — произвольное, и доказали асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями  $|p_i - N/3| \leq H$ ,  $H = N^\theta$ , соответственно при

$$\theta = 63/64 + \varepsilon, \quad 279/308 + \varepsilon, \quad 2/3 + \varepsilon, \quad 5/8 + \varepsilon.$$

Сумму  $J_2(\alpha; x, y, M, N)$  изучили Jianya Liu и Zhan Tao [2] и получили нетривиальную оценку суммы  $S_2(\alpha; x, y)$  при  $y \geq x^{\frac{11}{16} + \varepsilon}$ .

Работа посвящена выводу нетривиальных оценок сумм  $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ , в которых имеется «длинная» сплошная сумма, то есть сумм вида

$$W = \sum_{M < m \leq 2M} a(m) \sum_{\substack{U < n \leq 2N \\ x-y < mn \leq x}} e(\alpha(mi)^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

и её доказательство проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова в сочетании с методами работ [3-5].

**Лемма 1.** [6] Пусть  $H$  и  $y$  произвольные целые числа,  $H \geq 1$ . Тогда справедливо соотношение

$$\sum_{x=y+1}^{y+H} e(\alpha x) \leq \min\left(H, \frac{1}{2\|\alpha\|}\right), \quad \|\alpha\| = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\}).$$

**Лемма 2.** [6] При вещественном  $\alpha$ , подчинённом условиям

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq N, \quad |\theta| \leq 1,$$

а) для суммы

$$V_g = \sum_{z=g}^{g+q'} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha z\|}\right), \quad q' < q, \quad U > 0$$

имеем неравенство

$$V_g \ll U + q \ln q,$$

б) а для суммы



$$V = \sum_{0 < z \leq 0,5q} \frac{1}{\|\alpha z\|}$$

имеем неравенство

$$V \ll q \ln q.$$

**Лемма 3.** [7]. При  $x \geq 2$  имеем

$$\sum_{n \leq x} \tau_r^k(n) \ll x(\ln x)^{k-1}, \quad k = 1, 2.$$

**Теорема.** Пусть  $|a(m)| \leq \tau(m)$ ,  $\mathcal{L} = \ln xq$ ,  $\sqrt{x} < y < x\mathcal{L}^{-1}$ , тогда при выполнении условий

$$\mathcal{L}^{2^{14}+8A+8} < q < y^3 \mathcal{L}^{-2^{14}-8A-8}, \quad \mathcal{L}^{2A+12,5} < M \leq y^{\frac{1}{4}} \mathcal{L}^{-2^{12}-2A-2}, \quad (1)$$

где  $A$  — абсолютная постоянная, справедлива оценка

$$W \ll \frac{y}{\mathcal{L}^A}.$$

**Доказательство. 1.** Возводя  $W$  в квадрат, найдем

$$|W|^2 = \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{M < \mu \leq 2M} a_\mu \sum_{\substack{U < u \leq 2N \\ x-y < mu \leq x}} \sum_{\substack{U < u_1 \leq 2N \\ x-y < \mu u_1 \leq x}} e(\alpha((\mu u_1)^3 - (mu)^3)).$$

Разбивая сумму на три части, для которых соответственно выполняются условия  $mu < \mu u_1$ ,  $mu = \mu u_1$  и  $mu > \mu u_1$  и имея в виду, что

$$\sum_{M < m, \mu \leq 2M} a_m a_\mu \sum_{\substack{U < u, u_1 \leq 2N \\ x-y < mu = \mu u_1 \leq x}} 1 = \sum_{x-y < r \leq x} \left( \sum_{\substack{m|r, M < m \leq 2M, \\ U < r/m \leq 2N}} a_m \right)^2 \leq \sum_{x-y < r \leq x} \tau^2(r) \ll y \mathcal{L}^3,$$

получим

$$W^2 = W_1 + W_2 + O(y \mathcal{L}^3), \quad (2)$$

$$W_1 = \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{M < \mu \leq 2M} a_\mu \sum_{\substack{U < u \leq 2N \\ x-y < mu \leq x}} \sum_{\substack{U < u_1 \leq 2N \\ mu < \mu u_1 \leq x}} e(\alpha((\mu u_1)^3 - (mu)^3)),$$

$$W_2 = \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{M < \mu \leq 2M} a_\mu \sum_{\substack{U < u \leq 2N \\ x-y < mu \leq x}} \sum_{\substack{U < u_1 \leq 2N \\ x-y < \mu u_1 < mu}} e(\alpha((\mu u_1)^3 - (mu)^3)).$$

Имея в виду, что  $|W_1| = |W_2|$ , оценим только  $W_1$ . В сумме по  $u_1$ , делая замену переменных, вместо  $u_1$  вводим переменную  $r = \mu u_1 - tu$ , для которой выполняются условия

$$tu + r \equiv 0 \pmod{\mu}, \quad U\mu < tu + r \leq 2N\mu, \quad 0 < r \leq x - tu. \quad (3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\mu u_1)^3 - (tu)^3 &= (\mu u_1 - tu)((tu)^2 + tu\mu u_1 + (\mu u_1)^2) = \\ &= r \left( (tu)^2 + tu\mu \cdot \frac{tu+r}{\mu} + \left( \mu \cdot \frac{tu+r}{\mu} \right)^2 \right) = r(3(tu)^2 + 3mur + r^2), \end{aligned}$$

и сумма  $W_1$  принимает следующий вид

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{M < \mu \leq 2M} a_\mu \sum_{\substack{U < u \leq 2N \\ x-y < mu \leq x}} \sum_{\substack{U\mu < tu+r \leq 2N\mu \\ 0 < r \leq x-tu \\ tu+r \equiv 0 \pmod{\mu}}} e(\alpha r(3(mu)^2 + 3mur + r^2)) = \\ &= \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{M < \mu \leq 2M} a_\mu \sum_{\substack{0 < r < y \\ F < u \leq G \\ mu \equiv -r \pmod{\mu}}} e(\alpha r(3(mu)^2 + 3mur + r^2)), \end{aligned}$$

где

$$F = \max\left(U, \frac{U\mu - r}{m}, \frac{x-y}{m}\right), \quad G = \min\left(2N, \frac{2N\mu - r}{m}, \frac{x}{m}\right). \quad (4)$$

Разбивая сумму  $W_1$  на слагаемые с условием  $(m, \mu) = d$ ,  $d \leq 2M$ , имеем

$$W_1 = \sum_{d \leq 2M} \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{\substack{M < \mu \leq 2M \\ (m, \mu) = d}} a_\mu \sum_{0 < r < y} \sum_{\substack{F < u \leq G \\ mu \equiv -r \pmod{\mu}}} e(\alpha r(3(mu)^2 + 3mur + r^2)).$$

Условия  $(m, \mu) = d$  в сумме  $W$  равносильны условиям

$$m = \hat{m}d, \quad \mu = \hat{\mu}d, \quad (\hat{m}, \hat{\mu}) = 1.$$

Следовательно, сравнение  $tu \equiv -r \pmod{\mu}$  разрешимо только в случае, если  $r$  имеет вид  $r = \hat{r}d$ . Поэтому, заменив его на сравнение  $\hat{m}u \equiv -\hat{r} \pmod{\hat{\mu}}$ , а переменные суммирования  $m, \mu, r$  соответственно на  $\hat{m}d, \hat{\mu}d, r = \hat{r}d$ , найдем

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{d \leq 2M} \sum_{M < \hat{m}d \leq 2M} a_{\hat{m}d} \sum_{\substack{M < \hat{\mu}d \leq 2M \\ (\hat{m}, \hat{\mu}) = 1}} a_{\hat{\mu}d} \sum_{0 < \hat{r}d < y} \sum_{\substack{F_{\hat{m}\hat{\mu}} < u \leq G_{\hat{m}\hat{\mu}} \\ \hat{m}u \equiv -\hat{r} \pmod{\hat{\mu}}}} e(\alpha \hat{r}d^3(3(\hat{m}u)^2 + 3\hat{m}u\hat{r} + \hat{r}^2)), \\ F_{\hat{m}\hat{\mu}} &= \max\left(U, \frac{U\hat{\mu} - \hat{r}}{\hat{m}}, \frac{x-y}{\hat{m}d}\right), \quad G_{\hat{m}\hat{\mu}} = \min\left(2N, \frac{2N\hat{\mu} - \hat{r}}{\hat{m}}, \frac{x}{\hat{m}d}\right). \end{aligned}$$

Сравнение  $\hat{m}u \equiv -\hat{r}(\text{mod } \hat{\mu})$  равносильно сравнению  $u \equiv -\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}(\text{mod } \hat{\mu})$ , где  $\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}$  определяется из сравнения  $\hat{m}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1} \equiv 1(\text{mod } \hat{\mu})$ . Поэтому, представляя  $u$  в виде  $u = -\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1} + \hat{\mu}\hat{u}$ , получим

$$W_1 = \sum_{d \leq 2M} \sum_{M < \hat{m}d \leq 2M} a_{\hat{m}d} \sum_{\substack{M < \hat{\mu}d \leq 2M \\ (\hat{m}, \hat{\mu})=1}} a_{\hat{\mu}d} \sum_{0 < \hat{r}d < y} \sum_{\mathcal{F}_{\hat{m}\hat{\mu}} < u \leq \mathcal{G}_{\hat{m}\hat{\mu}}} e(\alpha \hat{r} d^3 (\hat{r}^2 + g(\hat{u}, \hat{m}, \hat{\mu}))),$$

$$\mathcal{F}_{\hat{m}\hat{\mu}} = \frac{F_{\hat{m}\hat{\mu}}}{\hat{\mu}} + \frac{\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}}{\hat{\mu}}, \quad \mathcal{G}_{\hat{m}\hat{\mu}} = \frac{G_{\hat{m}\hat{\mu}}}{\hat{\mu}} + \frac{\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}}{\hat{\mu}},$$

$$3(\hat{m}u)^2 + 3\hat{m}u\hat{r} + \hat{r}^2 = 3(\hat{m}(\hat{\mu}\hat{u} - \hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}))^2 + 3\hat{m}(\hat{\mu}\hat{u} - \hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1})\hat{r} + \hat{r}^2 =$$

$$= 3(\hat{m}\hat{\mu}\hat{u} - \hat{r}\hat{m}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1})^2 + 3(\hat{m}\hat{\mu}\hat{u} - \hat{r}\hat{m}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1})\hat{r} + \hat{r}^2 = g(\hat{u}, \hat{m}, \hat{\mu}) + \hat{r}^2.$$

В сумме  $W_1$ , ради удобства, обозначая переменные суммирования  $\hat{m}$ ,  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{r}$  и  $\hat{u}$  через  $m$ ,  $\mu$ ,  $r$  и  $u$ , получим

$$W_1 = \sum_{d \leq 2M} \sum_{0 < rd < y} e(\alpha d^3 r^3) W(r, d),$$

$$W(r, d) = \sum_{M < md \leq 2M} a_{md} \sum_{\substack{M < \mu d \leq 2M \\ (m, \mu)=1}} a_{\mu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu} < u \leq \mathcal{G}_{m\mu}} e(3\alpha r d^3 g(u, m, \mu)),$$

$$\mathcal{F}_{m\mu} = \frac{F_{m\mu} + rm_{\mu}^{-1}}{\mu}, \quad \mathcal{F}_{m\mu} = \max\left(U, \frac{U\mu - r}{m}, \frac{x - y}{md}\right),$$

$$\mathcal{G}_{m\mu} = \frac{G_{m\mu} + rm_{\mu}^{-1}}{\mu}, \quad \mathcal{G}_{m\mu} = \min\left(2N, \frac{2N\mu - r}{m}, \frac{x}{md}\right),$$

$$g(u, m, \mu) = (m\mu u - rmm_{\mu}^{-1})^2 + (m\mu u - rmm_{\mu}^{-1})r.$$

Разобьем в  $W_1$  отрезок суммирования по  $d$  на не более чем  $\mathcal{L}$  интервалов вида  $D < d \leq 2D$ ,  $D \leq M$ . Получим не более  $\mathcal{L}$  сумм  $W(D)$  вида

$$W(D) \leq \sum_{D < d \leq 2D} \sum_{0 < rd < y} |W(r, d)|. \quad (6)$$

**2. Оценка  $W(D)$ ,**  $D > \mathcal{L}^{2A+6}$ . Воспользовавшись условием  $M \leq y^{\frac{1}{4}} \mathcal{L}^{-2^{12}-2A-2}$ , оценим сверху длину интервала суммирования по  $u$ . Имеем

$$\mathcal{G}_{m\mu} - \mathcal{F}_{m\mu} + 1 = \frac{G_{m\mu} - F_{m\mu}}{\mu} + 1 \leq \frac{y}{m\mu d} + 1 < \frac{yd}{M^2} + 1 =$$

$$= \frac{yd + M^2}{M^2} \leq \frac{yd + y^{\frac{1}{2}}}{M^2} = \frac{yd}{M^2} \left(1 + \frac{1}{dy^{\frac{1}{2}}}\right) \leq \frac{2yd}{M^2}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (6), воспользовавшись соотношением  $|a_m| \leq \tau(m)$  и леммой 3, найдем

$$\begin{aligned}
W(D) &\ll \sum_{D < d \leq 2D} \sum_{0 < rd < y} \sum_{M < md \leq 2M} |a_{md}| \sum_{\substack{M < \mu d \leq 2M \\ (m, \mu) = 1}} |a_{\mu d}| (\mathcal{G}_{m\mu} - \mathcal{F}_{m\mu} + 1) \ll \\
&\ll \sum_{D < d \leq 2D} \frac{y}{d} \sum_{M < md \leq 2M} \tau(md) \sum_{\substack{M < \mu d \leq 2M \\ (m, \mu) = 1}} \tau(\mu d) \frac{yd}{M^2} \ll \\
&\ll \frac{y^2}{M^2} \sum_{D < d \leq 2D} \tau^2(d) \sum_{M < md \leq 2M} \tau(m) \sum_{M < \mu d \leq 2M} \tau(\mu) \ll \\
&\ll \frac{y^2}{M^2} \sum_{D < d \leq 2D} \tau^2(d) \frac{M^2 \mathcal{L}^2}{d^2} \ll \frac{y^2 \mathcal{L}^2}{D^2} \sum_{D < d \leq 2D} \tau^2(d) \ll \frac{y^2 \mathcal{L}^5}{D} \ll \frac{y^2}{\mathcal{L}^{2A+1}}.
\end{aligned}$$

3. Далее всюду будем считать, что  $D < d \leq 2D$  и  $D \leq \mathcal{L}^{2A+6}$ . Возводя неравенство (6) в квадрат и применяя неравенство Коши, получим

$$W^2(D) \leq y \sum_{D < d \leq 2D} \sum_{0 < rd < y} |W(r, d)|^2, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
|W(r, d)|^2 &= \\
&= \sum_{\substack{M < md, \mu d \leq 2M \\ (m, \mu) = 1}} a_{md} a_{\mu d} \sum_{\substack{M < nd, \nu d \leq 2M \\ (n, \nu) = 1}} a_{nd} a_{\nu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu} < u \leq \mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\mathcal{F}_{n\nu} < u_1 \leq \mathcal{G}_{n\nu}} e(3\alpha r d^3 (g(u_1, n, \nu) - g(u, m, \mu))), \\
\mathcal{F}_{n\nu} &= \frac{F_{n\nu}}{\nu} + \frac{rn\nu^{-1}}{\nu}, \quad F_{n\nu} = \max\left(U, \frac{U\nu - r}{n}, \frac{x - y}{nd}\right), \\
\mathcal{G}_{n\nu} &= \frac{G_{n\nu}}{\nu} + \frac{rn\nu^{-1}}{\nu}, \quad G_{n\nu} = \min\left(2N, \frac{2N\nu - r}{n}, \frac{x}{nd}\right).
\end{aligned} \quad (8)$$

Воспользовавшись явным видом  $g(u_1, n, \nu) - g(u, m, \mu)$  в  $|W(r, d)|^2$ , то есть соотношением

$$\begin{aligned}
g(u_1, n, \nu) - g(u, m, \mu) &= \\
&= (n\nu u_1 - r n n\nu^{-1})^2 + (n\nu u_1 - r n n\nu^{-1})r - (m\mu u - r m m\mu^{-1})^2 - (m\mu u - r m m\mu^{-1})r = \quad (9) \\
&= (n\nu u_1 - r n n\nu^{-1} - m\mu u + r m m\mu^{-1})(n\nu u_1 + m\mu u - r m m\mu^{-1} - r n n\nu^{-1} + r),
\end{aligned}$$

разбивая сумму  $|W(r, d)|^2$  на три суммы  $W_{rd}$ ,  $W'_{rd}$  и  $W''_{rd}$ , для которых соответственно выполняются условия  $g(u_1, n, \nu) > g(u, m, \mu)$ ,  $g(u_1, n, \nu) < g(u, m, \mu)$  и  $g(u_1, n, \nu) = g(u, m, \mu)$ , найдем

$$|W(r, d)|^2 = W_{rd} + W'_{rd} + W''_{rd}, \quad (10)$$

$$W_{rd} = \sum_{\substack{M < md, \mu d \leq 2M \\ (m, \mu) = 1}} a_{md} a_{\mu d} \sum_{\substack{M < nd, vd \leq 2M \\ (n, v) = 1}} a_{nd} a_{vd} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu} < u \leq \mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\substack{\mathcal{F}_{nv} < u_1 \leq \mathcal{G}_{nv} \\ nvu_1 - rnv^{-1} > m\mu - rmm_{\mu}^{-1}}} e(3ard^3(g(u_1, n, v) - g(u, m, \mu))),$$

$$W'_{rd} = \sum_{\substack{M < md, \mu d \leq 2M \\ (m, \mu) = 1}} a_{md} a_{\mu d} \sum_{\substack{M < nd, vd \leq 2M \\ (n, v) = 1}} a_{nd} a_{vd} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu} < u \leq \mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\substack{\mathcal{F}_{nv} < u_1 \leq \mathcal{G}_{nv} \\ nvu_1 - rnv^{-1} < m\mu - rmm_{\mu}^{-1}}} e(3ard^3(g(u_1, n, v) - g(u, m, \mu))),$$

$$W''_{rd} = \sum_{\substack{M < md, \mu d \leq 2M \\ (m, \mu) = 1}} a_{md} a_{\mu d} \sum_{\substack{M < nd, vd \leq 2M \\ (n, v) = 1}} a_{nd} a_{vd} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu} < u \leq \mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\substack{\mathcal{F}_{nv} < u_1 \leq \mathcal{G}_{nv} \\ nvu_1 - rnv^{-1} = m\mu - rmm_{\mu}^{-1}}} 1.$$

4. Оценка  $W''_{rd}$ . Пользуясь определениями параметров  $\mathcal{F}_{m\mu}$ ,  $\mathcal{G}_{m\mu}$ ,  $\mathcal{F}_{nv}$  и  $\mathcal{G}_{nv}$ , то есть соотношениями (5) и (8), легко показать, что условия  $\mathcal{F}_{m\mu} < u \leq \mathcal{G}_{m\mu}$  и  $\mathcal{F}_{nv} < u_1 \leq \mathcal{G}_{nv}$  соответственно равносильны условиям

$$\begin{aligned} \max\left(Um, U\mu - r, \frac{x-y}{d}\right) < m\mu - rmm_{\mu}^{-1} &\leq \min\left(2Nm, 2N\mu - r, \frac{x}{d}\right), \\ \max\left(Un, Uv - r, \frac{x-y}{d}\right) < nvu_1 - rnv^{-1} &\leq \min\left(2Nn, 2Nv - r, \frac{x}{d}\right). \end{aligned}$$

Поэтому, вводя обозначение  $d = m\mu - rmm_{\mu}^{-1} = nvu_1 - rnv^{-1}$ , найдем

$$W''_{rd} = \sum_{x-y < hd \leq x} \omega^2(h), \quad \omega(h) = \sum_{\substack{h = m\mu - rmm_{\mu}^{-1} \\ M < md, \mu d \leq 2M, (m, \mu) = 1 \\ \mathcal{F}_{m\mu} < u \leq \mathcal{G}_{m\mu}}} a_{md} a_{\mu d}.$$

Из условий  $h = m\mu - rmm_{\mu}^{-1}$  и  $mm_{\mu}^{-1} = 1 + \mu t$ ,  $t$  — целое следует, что

$$h + r = m\mu - r(mm_{\mu}^{-1} - 1) = \mu(mt - rt),$$

то есть  $\mu$  является делителем числа  $h + r$ , следовательно

$$\begin{aligned} \omega(h) &\leq \sum_{\substack{m|h \\ M < md \leq 2M}} |a_{md}| \sum_{\substack{\mu|h+r \\ M < \mu d \leq 2M, (m, \mu) = 1 \\ \mathcal{F}_{m\mu} < \frac{h}{m} + \frac{r}{\mu} \leq \mathcal{G}_{m\mu}}} |a_{\mu d}| \leq \sum_{m|h} |a_{md}| \sum_{\mu|h+r} |a_{\mu d}| = \\ &= \sum_{m|h} \tau(md) \sum_{\mu|h+r} \tau(\mu d) \leq \tau^2(d) \sum_{m|h} \tau(m) \sum_{\mu|h+r} \tau(\mu) = \tau^2(d) \tau_3(h) \tau_3(h+r). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
|W_{rd}''| &\ll \tau^2(d) \sum_{x-y < hd \leq x} \tau_3(h) \tau_3(h+r) \ll \tau^2(d) \left( \sum_{x-y < hd \leq x} \tau_3^2(h) \sum_{x-y < hd \leq x} \tau_3^2(h+r) \right)^{\frac{1}{2}} \ll \\
&\ll \tau^2(d) \left( \frac{y^2}{d^2} \mathcal{L}^{16} \right)^{\frac{1}{2}} = y \mathcal{L}^8 \cdot \frac{\tau^2(d)}{d}.
\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (10) и (7), имея в виду, что  $|W_{rd}| = |W_{rd}'|$ , получим

$$W^2(D) \ll y \sum_{D < d \leq 2D} \sum_{0 < rd < y} \left( |W_{rd}| + y \mathcal{L}^8 \cdot \frac{\tau^2(d)}{d} \right) \ll y \sum_{D < d \leq 2D} \sum_{0 < rd < y} |W_{rd}| + y^3 \mathcal{L}^8. \quad (11)$$

**5. Преобразуем  $W_{rd}$  так, чтобы сумма по  $u$  стала линейной.** Для этого, делая замену переменного, вместо  $u_1$  вводим переменную  $\sigma = nvu_1 - m\mu u$ , область изменения которой имеет вид

$$\Omega = \left\{ \sigma : m\mu u + \sigma \equiv 0 \pmod{nv}, \quad \mathcal{F}_{nv} < \frac{m\mu u + \sigma}{nv} \leq \mathcal{G}_{nv}, \quad \sigma > rnn_v^{-1} - rmm_\mu^{-1} \right\}. \quad (12)$$

При этом воспользовавшись соотношением (9), представим разность  $g(u_1, n, \nu) - g(u, m, \mu)$  как функцию  $\sigma$ , то есть

$$\begin{aligned}
g(u_1, n, \nu) - g(u, m, \mu) &= \\
&= (nvu_1 - m\mu u + rmm_\mu^{-1} - rnn_v^{-1})(nvu_1 + m\mu u - rmm_\mu^{-1} - rnn_v^{-1} + r) = \\
&= (\sigma + rmm_\mu^{-1} - rnn_v^{-1})(\sigma + 2m\mu u - rmm_\mu^{-1} - rnn_v^{-1} + r) = g_1(u, \sigma, m, \mu, n, \nu),
\end{aligned}$$

и сумма  $W_{rd}$  принимает вид

$$W_{rd} = \sum_{\substack{M < nd, \mu d \leq 2M \\ (m, \mu)=1}} a_{md} a_{\mu d} \sum_{\substack{M < nd, \nu d \leq 2M \\ (n, \nu)=1}} a_{nd} a_{\nu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu} < u \leq \mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\sigma \in \Omega} e(3\alpha rd^3 g_1(u, \sigma, m, \mu, n, \nu)).$$

Воспользовавшись условием (12) и определениями параметров  $\mathcal{F}_{m\mu}$   $\mathcal{G}_{nv}$ , найдём возможную допустимую верхнюю границу изменения переменной суммирования  $\sigma$ . Имеем

$$\begin{aligned}
\sigma &\leq nv \cdot \mathcal{G}_{nv} - m\mu u \leq nv \cdot \mathcal{G}_{nv} - m\mu \cdot \mathcal{F}_{m\mu} = nv \cdot \frac{\mathcal{G}_{nv} + rnn_v^{-1}}{\nu} - m\mu \cdot \frac{\mathcal{F}_{m\mu} + rmm_\mu^{-1}}{\mu} = \\
&= n\mathcal{G}_{nv} - m\mathcal{F}_{m\mu} + rnn_v^{-1} - rmm_\mu^{-1} = n \cdot \min\left(2N, \frac{2N\nu - r}{n}, \frac{x}{nd}\right) - \\
&- m \cdot \max\left(U, \frac{U\mu - r}{m}, \frac{x - y}{md}\right) + rnn_v^{-1} - rmm_\mu^{-1} \leq \frac{y}{d} - rmm_\mu^{-1} + rnn_v^{-1}.
\end{aligned}$$

С учётом найденной границы в  $W_{rd}$ , сделав сумму по  $u$  внутренней, найдём

$$W_{rd} = \sum_{\substack{M < md, \mu d \leq 2M \\ (m, \mu) = 1}} a_{md} a_{\mu d} \sum_{\substack{M < nd, \nu d \leq 2M \\ (n, \nu) = 1}} a_{nd} a_{\nu d} \sum_{0 < \sigma + m m_{\mu}^{-1} - n n_{\nu}^{-1} \leq y/d} \sum_{u \in U} e(3\alpha r d^3 g_1(u, \sigma, m, \mu, n, \nu)),$$

где суммирование ведётся по тем  $u$ , для которых выполняется условия

$$U = \left\{ u : m\mu + \sigma \equiv 0 \pmod{nv}, \frac{\mathcal{F}_{nv} nv - \sigma}{m\mu} < u \leq \frac{\mathcal{G}_{nv} nv - \sigma}{m\mu}, \mathcal{F}_{m\mu} < u \leq \mathcal{G}_{m\mu} \right\}, \quad (13)$$

то есть в  $W_{rd}$  внутренняя сумма стала линейной и переменная суммирования  $u$  пробегает те значения из своего сплошного интервала изменения, которые являются решением линейного сравнения.

6. Разбивая сумму  $W_{rd}$  на слагаемые с условием  $(m\mu, nv) = \delta$ ,  $\delta \leq 4M^2 d^{-2}$ , имеем

$$W_{rd} = \sum_{\delta \leq 4M^2 d^{-2}} \sum_{\substack{M < md, \mu d \leq 2M \\ (m, \mu) = 1}} a_{md} a_{\mu d} \sum_{\substack{M < nd, \nu d \leq 2M \\ (n, \nu) = 1, (m\mu, nv) = \delta}} a_{nd} a_{\nu d} \sum_{0 < \sigma + m m_{\mu}^{-1} - n n_{\nu}^{-1} \leq y/d} \sum_{u \in U} e(3\alpha r d^3 g_1(u, \sigma, m, \mu, n, \nu)).$$

Условия  $(m\mu, nv) = \delta$  с учётом условий  $(m, \mu) = 1$  и  $(n, \nu) = 1$  в сумме  $W_{rd}$  равносильны условиям

$$m\mu = \hat{m}\hat{\mu}\delta, \quad (\hat{m}, \hat{\mu}) = 1, \quad nv = \hat{n}\hat{\nu}\delta, \quad (\hat{n}, \hat{\nu}) = 1, \quad (\hat{m}\hat{\mu}, \hat{n}\hat{\nu}) = 1, \quad m = \hat{m}\eta, \quad \eta \mid \delta, \\ \mu = \hat{\mu}\delta / \eta, \quad (\eta, \delta / \eta) = 1, \quad n = \hat{n}\lambda, \quad \lambda \mid \delta, \quad \nu = \hat{\nu}\delta / \lambda, \quad (\lambda, \delta / \lambda) = 1.$$

Следовательно, в (13) сравнение

$$m\mu + \sigma \equiv 0 \pmod{nv}$$

разрешимо только в случае, если  $\sigma$  имеет вид  $\sigma = \hat{\sigma}\delta$ . Поэтому заменим её на сравнение

$$\hat{m}\hat{\mu} \equiv -\hat{\sigma} \pmod{\hat{n}\hat{\nu}},$$

а переменные суммирования  $m$ ,  $\mu$ ,  $n$ ,  $\nu$ ,  $\sigma$  соответственно на  $\hat{m}\eta$ ,  $\hat{\mu}\delta / \eta$ ,  $\hat{n}\lambda$ ,  $\hat{\nu}\delta / \lambda$ ,  $\hat{\sigma}\delta$ , в результате чего параметры  $\mathcal{F}_{m\mu}$ ,  $F_{m\mu}$ ,  $\mathcal{G}_{m\mu}$ ,  $G_{m\mu}$ ,  $\mathcal{F}_{nv}$ ,  $F_{nv}$ ,  $\mathcal{G}_{nv}$ ,  $G_{nv}$  и функция  $g_1(u, \sigma, m, \mu, n, \nu)$  соответственно превращаются в  $\mathcal{F}_{\hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta}$ ,  $F_{\hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta}$ ,  $\mathcal{G}_{\hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta}$ ,  $G_{\hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta}$ ,  $\mathcal{F}_{\hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda}$ ,  $F_{\hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda}$ ,  $\mathcal{G}_{\hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda}$ ,  $G_{\hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda}$ ,  $g_1(u, \hat{\sigma}\delta, \hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta / \eta, \hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta / \lambda)$ , которые имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta} &= \frac{F_{\hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta}}{\hat{\mu}\delta/\eta} + \frac{r(\hat{m}\eta)^{-1}}{\hat{\mu}\delta/\eta}, & F_{\hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta} &= \max\left(U, \frac{U\hat{\mu}\delta/\eta - r}{\hat{m}\eta}, \frac{x-y}{\hat{m}\eta d}\right), \\
\mathcal{G}_{\hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta} &= \frac{G_{\hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta}}{\hat{\mu}\delta/\eta} + \frac{r(\hat{m}\eta)^{-1}}{\hat{\mu}\delta/\eta}, & G_{\hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta} &= \min\left(2N, \frac{2N\hat{\mu}\delta/\eta - r}{\hat{m}\eta}, \frac{x}{\hat{m}\eta d}\right), \\
\mathcal{F}_{\hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda} &= \frac{F_{\hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda}}{\hat{\nu}\delta/\lambda} + \frac{r(\hat{n}\lambda)^{-1}}{\hat{\nu}\delta/\lambda}, & F_{\hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda} &= \max t\left(U, \frac{U\hat{\nu}\delta/\lambda - r}{\hat{n}\lambda}, \frac{x-y}{\hat{n}\lambda d}\right), \\
\mathcal{G}_{\hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda} &= \frac{G_{\hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda}}{\hat{\nu}\delta/\lambda} + \frac{r(\hat{n}\lambda)^{-1}}{\hat{\nu}\delta/\lambda}, & G_{\hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda} &= \min\left(2N, \frac{2N\hat{\nu}\delta/\lambda - r}{\hat{n}\lambda}, \frac{x-y}{\hat{n}\lambda d}\right), \\
g_1(u, \hat{\sigma}\delta, \hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta, \hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda) &= (\hat{\sigma}\delta + r\hat{m}\eta(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta} - r\hat{n}\lambda(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda})(\hat{\sigma}\delta + 2\hat{m}\hat{\mu}\delta u - \\
&\quad - r\hat{m}\eta(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta} - r\hat{n}\lambda(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda} + r),
\end{aligned}$$

и сумма  $W_{rd}$  представится в виде

$$W_{rd} = \sum_{\delta \leq 4M^2 d^{-2}} \sum_{\substack{\eta \delta \\ (\eta, \delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda \delta \\ (\lambda, \delta/\lambda)=1}} W_{rd}(\delta, \eta, \lambda), \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
W_{rd}(\delta, \eta, \lambda) &= \\
&= \sum_{\substack{M < d\hat{m}\eta, d\hat{\mu}\delta/\eta \leq 2M \\ (\hat{m}, \hat{\mu})=1}} a_{d\hat{m}\eta} a_{d\hat{\mu}\delta/\eta} \sum_{\substack{M < d\hat{n}\lambda, d\hat{\nu}\delta/\lambda \leq 2M \\ (\hat{n}, \hat{\nu})=1, (\hat{m}\hat{\mu}, \hat{n}\hat{\nu})=1}} a_{d\hat{n}\lambda} a_{d\hat{\nu}\delta/\lambda} \sum_{\hat{\sigma}} \sum_u e\left(3\alpha r d^3 g_1(u, \hat{\sigma}\delta, \hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta, \hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda)\right),
\end{aligned}$$

где суммирование ведётся по тем  $\hat{\sigma}$  и  $u$ , для которых соответственно выполняются условия

- $0 < \hat{\sigma}\delta + r\hat{m}\eta(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta} - r\hat{n}\lambda(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda} \leq y/d$ ;
- $\hat{m}\hat{\mu}u + \hat{\sigma} \equiv 0 \pmod{\hat{n}\hat{\nu}}$ ,  $\frac{\mathcal{F}_{\hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda} \hat{n}\hat{\nu} - \hat{\sigma}}{\hat{m}\hat{\mu}} < u \leq \frac{\mathcal{G}_{\hat{n}\lambda, \hat{\nu}\delta/\lambda} \hat{n}\hat{\nu} - \hat{\sigma}}{m\hat{\mu}}$ ,  $\mathcal{F}_{\hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta} < u \leq \mathcal{G}_{\hat{m}\eta, \hat{\mu}\delta/\eta}$ .

Подставляя правую часть (14) в соотношение (11), получим

$$W^2(D) \ll y \sum_{D < d \leq 2D} \sum_{0 < rd < y} \sum_{\delta \leq 4M^2 d^{-2}} \sum_{\substack{\eta \delta \\ (\eta, \delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda \delta \\ (\lambda, \delta/\lambda)=1}} |W_{rd}(\delta, \eta, \lambda)| + y^3 \mathcal{L}^8.$$

Разбивая отрезок суммирования по  $\delta$  на не более чем  $\mathcal{L}$  интервалов вида  $B < \delta \leq 2B$ ,  $B \leq 2M^2 d^{-2}$ , получим не более  $\mathcal{L}$  сумм  $W_B^2(D)$  вида

$$W_B^2(D) \ll y \sum_{D < d \leq 2D} \sum_{0 < rd < y} \sum_{B < \delta \leq 2B} \sum_{\substack{\eta \delta \\ (\eta, \delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda \delta \\ (\lambda, \delta/\lambda)=1}} |W_{rd}(\delta, \eta, \lambda)| + y^3 \mathcal{L}^8. \quad (15)$$

В сумме  $W_{rd}(\delta, \eta, \lambda)$ , ради удобства, обозначая переменные суммирования  $\hat{m}$ ,  $\hat{n}$ ,  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\nu}$  и  $\hat{\sigma}$  соответственно через  $m$ ,  $n$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  и  $\sigma$ , получим



$$\begin{aligned}
W_{rd}(\delta, \eta, \lambda) &= \\
&= \sum_{\substack{M < dm\eta, d\mu\delta/\eta \leq 2M \\ (m, \mu)=1}} a_{dm\eta} a_{d\mu\delta/\eta} \sum_{\substack{M < dn\lambda, dv\delta/\lambda \leq 2M \\ (n, v)=1, (m\mu, nv)=1}} ce^{-28pta_{dn\lambda} a_{dv\delta/\lambda}} \sum_{\sigma} \sum_u e(3\alpha rd^3 g_1(u, \sigma\delta, m\eta, \mu\delta/\eta, n\lambda, v\delta/\lambda)),
\end{aligned}$$

где суммирование ведётся по тем  $\sigma$  и  $u$ , для которых соответственно выполняются условия

$$0 < \sigma\delta + rm\eta(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda(n\lambda)_{v\delta/\lambda}^{-1} \leq \frac{y}{d}; \quad m\mu u + \sigma \equiv 0 \pmod{nv},$$

$$\frac{\mathcal{F}_{n\lambda, v\delta/\lambda} nv - \sigma}{m\mu} < u \leq \frac{\mathcal{G}_{n\lambda, v\delta/\lambda} nv - \sigma}{m\mu}, \quad \mathcal{F}_{m\eta, \mu\delta/\eta} < u \leq \mathcal{G}_{m\eta, \mu\delta/\eta}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{m\eta, \mu\delta/\eta} &= \frac{F_{m\eta, \mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta} + \frac{r(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1}}{\mu\delta/\eta}, \quad F_{m\eta, \mu\delta/\eta} = \max\left(U, \frac{U\mu\delta/\eta - r}{m\eta}, \frac{x-y}{m\eta d}\right), \\
\mathcal{G}_{m\eta, \mu\delta/\eta} &= \frac{G_{m\eta, \mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta} + \frac{r(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1}}{\mu\delta/\eta}, \quad G_{m\eta, \mu\delta/\eta} = \min\left(2N, \frac{2N\mu\delta/\eta - r}{m\eta}, \frac{x}{m\eta d}\right), \\
\mathcal{F}_{n\lambda, v\delta/\lambda} &= \frac{F_{n\lambda, v\delta/\lambda}}{v\delta/\lambda} + \frac{r(n\lambda)_{v\delta/\lambda}^{-1}}{v\delta/\lambda}, \quad F_{n\lambda, v\delta/\lambda} = \max\left(U, \frac{Uv\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x-y}{n\lambda d}\right), \\
\mathcal{G}_{n\lambda, v\delta/\lambda} &= \frac{G_{n\lambda, v\delta/\lambda}}{v\delta/\lambda} + \frac{r(n\lambda)_{v\delta/\lambda}^{-1}}{v\delta/\lambda}, \quad G_{n\lambda, v\delta/\lambda} = \min\left(2N, \frac{2Nv\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x}{n\lambda d}\right), \\
g_1(u, \sigma\delta, m\eta, \mu\delta/\eta, n\lambda, v\delta/\lambda) &= (\sigma\delta + rm\eta(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda(n\lambda)_{v\delta/\lambda}^{-1})(\sigma\delta + \\
&\quad + 2m\mu\delta u - rm\eta(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda(n\lambda)_{v\delta/\lambda}^{-1} + r).
\end{aligned} \quad (17)$$

Сравнение  $m\mu u + \sigma \equiv 0 \pmod{nv}$  равносильно сравнению

$$u \equiv -\sigma m_{nv}^{-1} \mu_{nv}^{-1} \pmod{nv},$$

где числа  $m_{nv}^{-1}$  и  $\mu_{nv}^{-1}$  соответственно определяются из сравнений

$$mm_{nv}^{-1} \equiv 1 \pmod{nv}, \quad \mu\mu_{nv}^{-1} \equiv 1 \pmod{nv}.$$

Поэтому, представляя  $u$  в виде  $u = nv\hat{u} - \sigma m_{nv}^{-1} \mu_{nv}^{-1}$ , получим

$$\begin{aligned}
W_{rd}(\delta, \eta, \lambda) &= \\
&= \sum_{\substack{M < dm\eta, d\mu\delta/\eta \leq 2M \\ (m, \mu)=1}} a_{dm\eta} a_{d\mu\delta/\eta} \sum_{\substack{M < dn\lambda, dv\delta/\lambda \leq 2M \\ (n, v)=1, (m\mu, nv)=1}} ce^{-28pta_{dn\lambda} a_{dv\delta/\lambda}} \sum_{\sigma} \sum_{\hat{u}} e(3\alpha rd^3 g_2(\hat{u}, \sigma, m, \mu, n, v, \delta, \eta, \lambda)),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
g_2(\hat{u}, \sigma, m, \mu, n, \nu, \delta, \eta, \lambda) &= g_1(n\nu\hat{u} - \sigma m_{nv}^{-1} \mu_{nv}^{-1}, \sigma\delta, m\eta, \mu\delta / \eta, n\lambda, \nu\delta / \lambda) = \\
&= \left( \sigma\delta + rm\eta(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1} \right) \left( \sigma\delta + 2m\mu\delta(n\nu\hat{u} - \sigma m_{nv}^{-1} \mu_{nv}^{-1}) - rm\eta(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - \right. \\
&\quad \left. - rn\lambda(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1} + r \right) = 2m\mu\nu\delta\hat{u} \left( \sigma\delta + rm\eta(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1} \right) + g_3,
\end{aligned}$$

$g_3$  часть  $g_2(\hat{u}, \sigma, m, \mu, n, \nu, \delta, \eta, \lambda)$ , независящая от  $\hat{u}$  и имеющая вид

$$g_3 = \left( \sigma\delta + rm\eta(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1} \right) \left( \sigma\delta - 2\sigma\delta m m_{nv}^{-1} \mu \mu_{nv}^{-1} - rm\eta(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1} + r \right),$$

область суммирования по  $\hat{u}$  определяется неравенствами, которые получаются из (16) и имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{F}_{n\lambda, \nu\delta/\lambda}}{m\mu} - \frac{\sigma}{m\mu\nu} + \frac{\sigma m_{nv}^{-1} \mu_{nv}^{-1}}{n\nu} < \hat{u} \leq \frac{\mathcal{G}_{n\lambda, \nu\delta/\lambda}}{m\mu} - \frac{\sigma}{m\mu\nu} + \frac{\sigma m_{nv}^{-1} \mu_{nv}^{-1}}{n\nu}, \\
\frac{\mathcal{F}_{m\eta, \mu\delta/\eta} + \sigma m_{nv}^{-1} \mu_{nv}^{-1}}{n\nu} < \hat{u} \leq \frac{\mathcal{G}_{m\eta, \mu\delta/\eta} + \sigma m_{nv}^{-1} \mu_{nv}^{-1}}{n\nu}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Переходя к оценкам, получим

$$\begin{aligned}
W_{rd}(\delta, \eta, \lambda) \leq \sum_{\substack{M < dm\eta, d\mu\delta/\eta \leq 2M \\ (m, \mu)=1}} |a_{dm\eta} a_{d\mu\delta/\eta}| \sum_{\substack{M < dn\lambda, d\nu\delta/\lambda \leq 2M \\ (n, \nu)=1, (m\mu, n\nu)=1}} |a_{dn\lambda} a_{d\nu\delta/\lambda}| \sum_{\substack{\sigma \leq y/d \\ \sigma = \kappa \pmod{\delta}}} \left| \sum_{\hat{u}} e(6\alpha r d^3 m \mu \nu \delta \sigma \hat{u}) \right|, \\
\kappa = rm\eta(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1}.
\end{aligned}$$

Оценим сверху величину  $\mathcal{Z}$  — длину интервала суммирования по  $\hat{u}$  в  $W_{rd}(\delta, \eta, \lambda)$ .

Воспользовавшись отдельно каждым неравенством (18) и определениями параметров

$\mathcal{F}_{m\mu}$ ,  $\mathcal{G}_{m\mu}$ ,  $\mathcal{F}_{n\nu}$  и  $\mathcal{G}_{n\nu}$  из (17), имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &\leq \frac{\mathcal{G}_{n\lambda, \nu\delta/\lambda} - \mathcal{F}_{n\lambda, \nu\delta/\lambda}}{m\mu} = \frac{1}{m\mu} \left( \frac{\mathcal{G}_{n\lambda, \nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda} + \frac{r(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1}}{\nu\delta/\lambda} - \frac{\mathcal{F}_{n\lambda, \nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda} - \frac{r(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1}}{\nu\delta/\lambda} \right) = \\
&= \frac{\mathcal{G}_{n\lambda, \nu\delta/\lambda} - \mathcal{F}_{n\lambda, \nu\delta/\lambda}}{m\mu \cdot \nu\delta/\lambda} = \frac{1}{m\mu\nu\delta/\lambda} \left( \min \left( 2N, \frac{2N\nu\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x}{n\lambda d} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \max \left( U, \frac{U\nu\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x - y}{n\lambda d} \right) \right) \leq \frac{1}{m\mu\nu\delta/\lambda} \cdot \frac{y}{n\lambda d} = \frac{y}{m\mu\nu d \delta} \leq \frac{y\delta d^3}{M^4}. \\
\mathcal{Z} &\leq \frac{\mathcal{G}_{m\eta, \mu\delta/\eta} - \mathcal{F}_{m\eta, \mu\delta/\eta}}{n\nu} = \frac{\mathcal{G}_{m\eta, \mu\delta/\eta} - \mathcal{F}_{m\eta, \mu\delta/\eta}}{n\nu \cdot \mu\delta/\eta} \leq \frac{1}{\mu\nu\delta/\eta} \cdot \frac{y}{m\eta d} = \frac{y}{m\mu\nu d \delta} \leq \frac{y\delta d^3}{M^4}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из условия  $M \leq y^{\frac{1}{4}} \mathcal{L}^{-\frac{c}{4}}$  следует, что количество слагаемых в сумме по  $\hat{u}$  в

$W_{rd}(\delta, \eta, \lambda)$  не превосходит величину

$$\mathscr{Z} + 1 \leq \frac{y\delta d^3}{M^4} + 1 \ll \frac{y\delta d^3}{M^4}.$$

С учётом последнего неравенства, применяя к сумме по  $\hat{u}$  лемму 1, затем воспользовавшись условием  $a_m \ll \tau(m)$  и известным неравенством  $\tau(kl) \leq \tau(k)\tau(l)$ , найдём

$$\begin{aligned} & W_{rd}(\delta, \eta, \lambda) \leq \\ & \leq \sum_{\substack{M < dm\eta, d\mu\delta/\eta \leq 2M \\ (m, \mu)=1}} |a_{dm\eta} a_{d\mu\delta/\eta}| \sum_{\substack{M < dn\lambda, d\nu\delta/\lambda \leq 2M \\ (n, \nu)=1, (m\mu, n\nu)=1}} |a_{dn\lambda} a_{d\nu\delta/\lambda}| \sum_{\substack{\sigma \leq y/d \\ \sigma \equiv \kappa \pmod{\delta}}} \min\left(\frac{y\delta d^3}{M^4}, \frac{1}{\|6\alpha r d^3 m\mu n\nu\delta\sigma\|}\right) \ll \\ & \leq \tau^2(\delta)\tau^4(d) \sum_{\substack{M < dm\eta, d\mu\delta/\eta \leq 2M \\ (m, \mu)=1}} \tau(m\mu) \sum_{\substack{M < dn\lambda, d\nu\delta/\lambda \leq 2M \\ (n, \nu)=1, (m\mu, n\nu)=1}} \tau(n\nu) \sum_{\substack{\sigma \leq y/d \\ \sigma \equiv \kappa \pmod{\delta}}} \min\left(\frac{y\delta d^3}{M^4}, \frac{1}{\|6\alpha r d^3 m\mu n\nu\delta\sigma\|}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим отдельно два случая:  $B > \mathscr{L}^{4A+10}$  и  $B \leq \mathscr{L}^{4A+10}$ .

**7. Оценка  $W_B(D)$  при  $B > \mathscr{L}^{4A+10}$ .** Оценивая в (19) сумму по  $\sigma$  тривиально числом слагаемых, найдём

$$\begin{aligned} W_{rd}(\delta, \eta, \lambda) & \ll \tau^2(\delta)\tau^4(d) \sum_{\substack{M < dm\eta, d\mu\delta/\eta \leq 2M \\ (m, \mu)=1}} \tau(m\mu) \sum_{\substack{M < dn\lambda, d\nu\delta/\lambda \leq 2M \\ (n, \nu)=1, (m\mu, n\nu)=1}} \tau(n\nu) \left(\frac{y}{\delta d} + 1\right) \frac{y\delta d^3}{M^4} \ll \\ & \ll y^2 \left(\frac{d^2}{M^4} + \frac{\delta d^3}{yM^4}\right) \tau^4(d)\tau^2(\delta) \left(\sum_{M^2 < \delta d^2 m \leq 4M^2} \tau^2(m)\right)^2 \ll \\ & \ll y^2 \mathscr{L}^6 \left(\frac{d^2}{M^4} + \frac{\delta d^3}{yM^4}\right) \left(\frac{M^4}{\delta^2 d^4} + 1\right) \tau^4(d)\tau^2(\delta) = \\ & = y^2 \mathscr{L}^6 \left(\frac{1}{\delta^2 d^2} + \frac{d^2}{M^4} + \frac{1}{y\delta d} + \frac{\delta d^3}{yM^4}\right) \tau^4(d)\tau^2(\delta). \end{aligned}$$

Подставляя найденную оценку в (15), затем пользуясь неравенством  $BD^2 \leq M^2$ , получим

$$\begin{aligned}
W_B^2(D) &\ll y \sum_{D < d \leq 2D} \sum_{0 < rd < y} \sum_{B < \delta \leq 2B} \sum_{\substack{\eta \delta \\ (\eta, \delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda \delta \\ (\lambda, \delta/\lambda)=1}} |W_{rd}(\delta, \eta, \lambda)| + y^3 \mathcal{L}^8 \ll \\
&\ll y^3 \mathcal{L}^6 \sum_{D < d \leq 2D} \tau^4(d) \sum_{0 < rd < y} \sum_{B < \delta \leq 2B} \tau^2(\delta) \sum_{\substack{\eta \delta \\ (\eta, \delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda \delta \\ (d\lambda, \delta/\lambda)=1}} \left( \frac{1}{\delta^2 d^2} + \frac{d^2}{M^4} + \frac{1}{y\delta d} + \frac{\delta d^3}{yM^4} \right) + y^3 \mathcal{L}^8 \ll \\
&\ll y^4 \mathcal{L}^6 \sum_{B < \delta \leq 2B} \tau^4(\delta) \sum_{D < d \leq 2D} \tau^4(d) \left( \frac{1}{\delta^2 d^3} + \frac{d}{M^4} + \frac{1}{y\delta d^2} + \frac{\delta d^2}{yM^4} \right) + y^3 \mathcal{L}^8 \ll \\
&\ll y^4 \mathcal{L}^6 (\ln D)^{15} \sum_{B < \delta \leq 2B} \tau^4(\delta) \left( \frac{1}{\delta^2 D^2} + \frac{D^2}{M^4} + \frac{1}{y\delta D} + \frac{\delta D^3}{yM^4} \right) + y^3 \mathcal{L}^8 \ll \\
&\ll y^4 \mathcal{L}^6 (\ln D)^{15} (\ln B)^{15} \left( \frac{1}{BD^2} + \frac{BD^2}{M^4} + \frac{1}{yD} + \frac{B^2 D^3}{yM^4} \right) + y^3 \mathcal{L}^8 \ll \\
&\ll y^4 \mathcal{L}^6 (\ln D)^{15} (\ln B)^{15} \left( \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{M^2} + \frac{1}{yD} \right) + y^3 \mathcal{L}^8.
\end{aligned}$$

Далее, пользуясь последовательно условиями  $D < \mathcal{L}^{2A+6}$ ,  $B \leq M^2 D^{-2} \leq M^2 \leq \sqrt{y}$ , имеем

$$\begin{aligned}
W_B^2(D) &\ll y^4 \mathcal{L}^6 \left( \frac{(\ln B)^{15}}{BD^2 (\ln D)^{-15}} + \frac{(\ln B)^{15} (\ln D)^{15}}{M^2} + \frac{(\ln B)^{15}}{yD (\ln D)^{-15}} \right) + y^3 \mathcal{L}^8 \ll \\
&\ll y^4 \mathcal{L}^6 \left( \frac{1}{B (\ln B)^{-15}} + \frac{(\ln B)^{15} \mathcal{L}}{M^2} + \frac{(\ln B)^{15}}{y} \right) + y^3 \mathcal{L}^8 \ll \\
&\ll y^4 \mathcal{L}^6 \left( \frac{1}{B (\ln B)^{-15}} + \frac{\mathcal{L}^{16}}{M^2} + \frac{\mathcal{L}^{15}}{y} \right).
\end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись условиями  $B \geq \mathcal{L}^{4A+10}$ ,  $M \geq \mathcal{L}^{2A+12,5}$  и  $y \geq \mathcal{L}^{4A+24}$ , находим

$$\begin{aligned}
W_B^2(D) &\ll \frac{y^4}{\mathcal{L}^{4A+3}} \left( \frac{\mathcal{L}^{4A+9}}{B (\ln B)^{-15}} + \frac{\mathcal{L}^{4A+25}}{M^2} + \frac{\mathcal{L}^{4A+24}}{y} \right) \ll \\
&\ll \frac{y^4}{\mathcal{L}^{4A+3}} \left( \frac{\mathcal{L}^{4A+9}}{\mathcal{L}^{4A+10} (\ln \mathcal{L}^{4A+10})^{-15}} + 1 \right) \ll \\
&\ll \frac{y^4}{\mathcal{L}^{4A+3}} \left( \frac{\mathcal{L}^{4A+9} (\ln \mathcal{L})^{15}}{\mathcal{L}^{4A+10}} + 1 \right) \ll \frac{y^4}{\mathcal{L}^{4A+3}}.
\end{aligned}$$

**8. Оценка  $W_B(D)$  при  $B \leq \mathcal{L}^{4A+10}$ .** Представляя оценку (19) в виде

$$\begin{aligned}
W_{rd}(\delta, \eta, \lambda) &\leq \\
&\leq \tau^2(\delta)\tau^4(d) \sum_{\substack{M^2 < m\mu d^2 \delta, n\nu d^2 \delta \leq 4M^2 \\ (m\mu, n\nu)=1}} \tau(m\mu n\nu) \sum_{\substack{\sigma \leq y/d \\ \sigma \equiv \kappa \pmod{\delta}}} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|6hard^3 m\mu n\nu \delta \sigma\|}\right) \leq \\
&\leq \tau^2(\delta)\tau^4(d) \sum_{M^4 < td^4 \delta^2 \leq 16M^4} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{\sigma \leq y/d} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|6\alpha d^3 \delta r t \sigma\|}\right),
\end{aligned}$$

затем подставляя её в (15), получим

$$\begin{aligned}
W_B^2(D) &\ll y \sum_{D < d \leq 2D} \sum_{0 < rd < y} \sum_{B < \delta \leq 2B} \sum_{\substack{\eta \delta \\ (\eta, \delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda \delta \\ (\lambda, \delta/\lambda)=1}} |W_{rd}(\delta, \eta, \lambda)| \ll \\
&\ll y \sum_{D < d \leq 2D} \tau^4(d) \sum_{0 < rd < y} \sum_{B < \delta \leq 2B} \tau^4(\delta) \sum_{M^4 < td^4 \delta^2 \leq 16M^4} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{\sigma \leq y/d} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|6\alpha d^3 \delta r t \sigma\|}\right) = \\
&= y \sum_{\frac{M^4}{64BD} \leq h \leq \frac{96y^2 M^4}{BD^3}} \mathfrak{a}(h) \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right), \quad \mathfrak{a}(h) = \sum_{h=6d^3 \delta r t \sigma} \tau^4(d)\tau^4(\delta)\tau(t)\tau_4(t),
\end{aligned}$$

где " — означает, что  $D < d \leq 2D$ ,  $B < \delta \leq 2B$ ,  $r \leq yD^{-1}$ ,  $2^{-6}M^4 D^4 B^2 < t \leq 2^4 M^4 D^4 B^2$  и  $\sigma \leq yD^{-1}$ . Далее, пользуясь условиями  $D < \mathscr{L}^{2A+6}$ ,  $B < \mathscr{L}^{4A+10}$ ,  $h/tr\sigma = d^3 \delta \asymp D^3 B$  и соотношением  $\tau(r) \ll r^\epsilon$ , находим

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}(h) &= \sum_{t/h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{\substack{h \\ t=d^3 \delta r \sigma}} \tau^4(d)\tau^4(\delta) \ll \mathscr{L}^{\frac{1}{2}} \sum_{t/h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{\substack{h \\ t=d^3 \delta r \sigma}} 1 = \mathscr{L}^{\frac{1}{2}} \sum_{t/h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{r \frac{h}{t}} \sum_{\substack{h \\ tr=d^3 \delta \sigma}} 1 = \\
&= \mathscr{L}^{\frac{1}{2}} \sum_{t/h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{r \frac{h}{t}} \sum_{\substack{\sigma \frac{h}{tr} \\ \sigma \frac{h}{tr} = d^3 \delta}} \sum 1 \leq \mathscr{L}^{\frac{1}{2}} \sum_{t/h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{r \frac{h}{t}} \sum_{\sigma \frac{h}{tr}} \tau\left(\frac{h}{tr}\right) \ll \\
&\ll \mathscr{L} \sum_{t/h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{r \frac{h}{t}} \sum_{\sigma \frac{h}{tr}} 1 \leq \mathscr{L} \sum_{t/h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{r \frac{h}{t}} \tau\left(\frac{h}{tr}\right) \leq \mathscr{L} \sum_{t/h} \tau(t)\tau_4(t) \tau^2\left(\frac{h}{t}\right) \leq \\
&\leq \mathscr{L} \tau^2(h) \sum_{t/h} \tau(t)\tau_4(t) \leq \mathscr{L} \tau^2(h) \sum_{t/h} \tau^4(t) \leq \mathscr{L} \tau^7(h).
\end{aligned}$$

$$W_B^2(D) \ll y \mathscr{L} \sum_{\frac{M^4}{64BD} \leq h \leq \frac{96y^2 M^4}{BD^3}} \tau^7(h) \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right).$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 3, найдём

$$\begin{aligned}
W_B^4(D) &\ll y^2 \mathcal{L}^2 \cdot \frac{y^2 M^4}{BD^3} \mathcal{L}^{2^{14}-1} \cdot \frac{yBD^3}{M^4} \sum_{\frac{M^4}{64BD} \leq h \leq \frac{96y^2 M^4}{BD^3}} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right) \ll \\
&\ll y^5 \mathcal{L}^{2^{14}+1} \sum_{\frac{M^4}{64BD} \leq h \leq \frac{96y^2 M^4}{BD^3}} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно случаи  $\frac{y^2 M^4}{BD^3} > 0.5q$  и  $\frac{y^2 M^4}{BD^3} \leq 0.5q$ .

При  $\frac{y^2 M^4}{BD^3} > 0.5q$ , разбивая интервал изменения  $h$  на не более  $\ll \frac{y^2 M^4}{qBD^3}$  интервалов вида  $g \leq h \leq g + q'$ ,  $q' < q$ , применяя утверждение а) леммы 2, найдем

$$\begin{aligned}
W_B^4(D) &\ll y^5 \mathcal{L}^{2^{14}+1} \cdot \frac{y^2 M^4}{qBD^3} \sum_{h=g}^{g+q'} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right) \ll \frac{y^7 M^4}{qBD^3} \left(\frac{yBD^3}{M^4} + q \ln q\right) \mathcal{L}^{2^{14}+1} \ll \\
&\ll \left(\frac{y^8}{q} + \frac{y^7 M^4}{BD^3}\right) \mathcal{L}^{2^{14}+2} \ll y^8 \left(\frac{1}{q} + \frac{M^4}{y}\right) \mathcal{L}^{2^{14}+2} = \\
&= \frac{y^8}{\mathcal{L}^{8A+6}} \left(\frac{\mathcal{L}^{2^{14}+8A+8}}{q} + \frac{M^4}{y \mathcal{L}^{-2^{14}-8A-8}}\right) \ll \frac{y^8}{\mathcal{L}^{8A+6}}.
\end{aligned}$$

При  $\frac{y^2 M^4}{BD^3} \leq 0.5q$ , воспользовавшись утверждением б) леммы 2, получим

$$W_B^4(D) \ll y^5 \mathcal{L}^{2^{14}+1} \sum_{h \leq 0.5q} \frac{1}{\|\alpha h\|} \ll y^5 q \mathcal{L}^{2^{14}+2} = \frac{y^8}{\mathcal{L}^{8A+6}} \cdot \frac{q}{y^3 \mathcal{L}^{-2^{14}-8A-8}} \ll \frac{y^8}{\mathcal{L}^{8A+6}}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов И.М., Карацуба А.А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — Труды МИАН СССР, 1984, т. 168, с. 4–30.
2. Haselgrove C.B. Some theorems in the analytic theory of number. — J.London Math. Soc., 1951, v. 26, pp. 273–277.
3. Стагулявичус В. О представлении нечетных чисел суммой трех почти равных простых чисел. — Вильнюс, Ученые труды университета. сер. мат., физ. и хим. н., 1955, №2, 5–23.
4. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) — Chinese Ann. of Math., 1990, v.2, pp. 138–147.
5. Zhan Tao, On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes — Acta Math Sinica, new ser., 1991, v. 7, №3, pp.135–170.
6. Liu J.Y., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I. — Mh Math, 1999, v. 127, pp. 27–41.
7. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами. — ДАН России, 2014, т. 459, №2, с. 156–157.

8. Rakhmonov Z.Kh., Rakhmonov F.Z. Sum of Short Exponential Sums over Prime Numbers. — Doklady Mathematics, 2014, v. 90, №3, pp. 1–2.
9. Rakhmonov Z.Kh., Rakhmonov F.Z. Сумма коротких двойных тригонометрических сумм. — ДАН РТ, 2013, т. 56, №11, с. 853–860.
10. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1976, 120 с.
11. Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы. — ДАН СССР, 1939, т. 22, №7, с. 391–393.

З.Ҳ.РАҲМОНОВ, Б.М.ЗАМОНОВ

## СУММАИ ДУКАРАТАИ ТРИГОНОМЕТРИИ КЎТОҶИ КУБИИ ДОРОИ СУММАИ «ДАРОЗИ» ЯКЛУХТ

*Институти математикаи ба номи А.Чӯраевӣ*

*Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Қор ба баҳои суммаи дукаратаи тригонометрии кӯтоҳи кубии намуди

$$W = \sum_{M < m \leq 2M} a(m) \sum_{\substack{U < u \leq 2N \\ x - y < mu \leq x}} e(\alpha(mu)^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

дурои суммаи яклухти «дароз», баҳшида шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** суммаи дукаратаи тригонометрии кӯтоҳ — методи баҳодиҳии суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои содда — баҳои ғайритривиалӣ.

Z.KH.RAKHMONOV, B.M.ZAMONOV

## SHORT CUBIC DOUBLE EXPONENTIAL SUMS, WITH A LONG CONTINUOUS SUMMATION

*A.Dzhuraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

The work is dedicated to the conclusion of non-trivial estimates of short cubic double exponential sums, with a long continuous summation, the type of

$$W = \sum_{M < m \leq 2M} a(m) \sum_{\substack{U < u \leq 2N \\ x - y < mu \leq x}} e(\alpha(mu)^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

**Key words:** shorts double exponential sum — method for estimating exponential sums with prime numbers — nontrivial estimate.

УДК 517.5

М.С.САИДУСАЙНОВ

**НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГороВА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ  
БЕРГМАНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

*Таджикский национальный университет*

*Поступила в редакцию 14.09.2014 г.*

*В работе получены точные неравенства типа Колмогорова для аналитических в круге функций в весовом пространстве Бергмана  $B_{q,\gamma}$ .*

**Ключевые слова:** неравенство типа Колмогорова – весовое пространство Бергмана – наилучшее приближение – весовая функция.

В экстремальных задачах теории функций важное место занимают неравенства между нормами последовательных производных или так называемых неравенств типа Колмогорова [1-4], имеющих вид

$$\|f^{(k)}\|_p \leq M \|f\|_q^\alpha \cdot \|f^{(r)}\|_s^\beta, \quad (1)$$

где  $(\alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0, k < r, k, r \in \mathbb{N})$  и, ради краткости, положено  $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p[a,b]}$ ,  $[a, b]$  – произвольный промежуток действительной оси.

Представляет определенный интерес получение аналогов неравенств (1) в банаховых пространствах аналитических в круге функций. В пространствах Харди  $H_q$  ( $1 \leq q \leq \infty$ ) с нормой

$$\|f\|_p := \lim_{\rho \rightarrow 1-0} M_q(f; \rho) < \infty,$$

где

---

*Адрес для корреспонденции:* Саидусайнов Муқим Саидусайнович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: stuiqim@gmail.ru



$$M_q^q(\rho, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt, \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

точные неравенства типа (1) в случае  $q=2$  для производной по аргументу  $f_a^{(r)}(z) = \partial^r f(\rho e^{it}) / \partial t^r$ , ( $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi$ ) доказаны Вакарчуком [4]. Эти результаты в работе [5] были обобщены для весового пространства Бергмана  $B_{q,\gamma}$  ( $1 \leq q \leq \infty$ ) с нормой

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left( \int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_q^q(\rho; f) d\rho \right)^{1/q} < \infty,$$

где  $\gamma(\rho)$  – неотрицательная измеримая весовая функция.

Данная работа является продолжением и развитием работы [5]. Предварительно введем некоторые определения и обозначения. Множество аналитических в единичном круге функций  $f(z)$  обозначим через  $U := A(U) = \{z \in C : |z| < 1\}$ ; для произвольной функции  $f \in A(U)$   $0 < \rho < 1$  полагаем

$$M_q(f; \rho) := \begin{cases} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty, \\ \max\{|f(\rho e^{it})| : t \in [0, 2\pi]\}, & \text{если } q = \infty, \end{cases} \quad (1)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Символом  $B_{q,\gamma}$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  обозначим весовое пространство Бергмана с конечной нормой

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \begin{cases} \left( \int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_q^q(f; \rho) d\rho \right)^{1/q} < \infty, & 1 \leq q < \infty \\ \max\{|f(\rho e^{it})| : t \in [0, 2\pi]\}, & q = \infty. \end{cases}$$

Через  $\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$  будем рассматривать класс функций  $f \in A(U)$ , у которых  $z^r f^{(r)} \in B_{q,\gamma}$ . Очевидно, что  $\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)} \subset B_{q,\gamma}$  при любом  $q \in [1, \infty)$ . и при любом  $q \geq 2$  имеем место включение  $\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)} \subset B_{q,\gamma} \subset B_{2,\gamma}$ . Для произвольной  $f \in A(U)$  имеем

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad f^{(r)}(z) := \frac{d^r f}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k z^{k-r},$$

откуда

$$z^r f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k z^k,$$

где  $\alpha_{kr} = k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)$ ,  $k \geq r$ ,  $k, r \in \mathbb{N}$ ,  $c_k$  – коэффициенты Тейлора.

Применяя равенство Парсеваля, получаем следующие равенства

$$M_2^2(f; \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \rho^{2k},$$

$$M_2^2(z^r f^{(r)}; \rho) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} |c_k|^2 \rho^{2k}.$$

Для получения последующих результатов нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма.** Для произвольной функции  $z^r f^{(r)} \in \mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$ , у которой коэффициенты Тейлора  $c_k = 0, k = \overline{r-\nu, r-1}$  и  $r \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq \nu \leq r$ , справедливо неравенство

$$M_2(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho) \leq \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \left( M_2(z^r f^{(r)}; \rho) \right)^{1-\nu/r} \left( M_2(f; \rho) \right)^{\nu/r}. \quad (2)$$

**Доказательство.** Воспользуясь определением (1) и условием леммы на коэффициенты Тейлора, имеем

$$M_2^2(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r-\nu}^2 |c_k|^2 \rho^{2k}. \quad (3)$$

Записав равенство (3) в виде

$$M_2^2(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^{2(1-\nu/r)} (|c_k| \rho^k)^{2(1-\nu/r)} \left\{ \frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}} \right\}^2 (|c_k| \rho^k)^{2\nu/r}$$

и используя схему рассуждения [7], получаем

$$M_2^2(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho) \leq \left\{ \sup_{k \geq r} \frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}} \right\}^2 \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^{2(1-\nu/r)} (|c_k| \rho^k)^{2(1-\nu/r)} (|c_k| \rho^k)^{2\nu/r}. \quad (4)$$

Применив неравенство Гельдера для рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^q \right)^{1/q}, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \quad p \geq 1$$

к правой части неравенства (4), полагая  $p = r / (r - \nu)$ ,  $q = r / \nu$ , будем иметь

$$M_2^2(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho) \leq \left\{ \sup_{k \geq r} \frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}} \right\}^2 \left\{ \sum_{k=r}^{\infty} |c_k|^2 \rho^{2k} \right\}^{\nu/r} \cdot \left\{ \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k|^2 \rho^{2k} \right\}^{1-\nu/r}. \quad (5)$$

В статьях [6,7] установлено, что

$$\sup_{k \geq r} \frac{\alpha_{k,r-\nu}}{\alpha_{k,r}^{1-\nu/r}} = \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}}. \quad (6)$$

Учитывая равенства (1), (5) и (6), получаем требуемое неравенство (2), чем и завершаем доказательство леммы

$$M_2(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho) \leq \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \left( M_2(z^r f^{(r)}; \rho) \right)^{1-\nu/r} \cdot \left( M_2(f; \rho) \right)^{\nu/r}.$$

Согласно определению пространства  $B_{q,\gamma}$ , а также конечности нормы

$$\|z^r f^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}} = \left( \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k|^2 \int_0^2 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2} < \infty,$$

легко заметить, что промежуточные нормы  $\|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}} < \infty$ ,  $1 \leq \nu \leq r$ , а значит, в силу включения  $B_{q,\gamma}^{(r)} \subset B_{q,\gamma} \subset B_{2,\gamma}$ ,  $1 \leq q \leq 2$ , конечны также нормы  $\|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{q,\gamma}} < \infty$ ,  $1 \leq q \leq 2$ ,  $1 \leq \nu \leq r$ . Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $r, \nu \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq \nu \leq r$ . Тогда для любой функции  $z^r f^{(r)} \in \mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$ , у которой коэффициенты Тейлора  $c_k(f) = 0$ ,  $k = \overline{r-\nu, r-1}$ , имеет место точное неравенство

$$\|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}} \leq \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \|f\|_{B_{2,\gamma}}^{\nu/r} \cdot \|z^r f^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}}^{1-\nu/r}. \quad (7)$$

**Доказательство.** При  $\nu = r$  неравенство (7) очевидно. Пусть функция  $z^r f^{(r)} \in \mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$  и выполняются условия теоремы относительно коэффициентов Тейлора  $c_k(f)$ . Тогда в силу равенства Парсеваля имеем:

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{2,\gamma}}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho, \\ \|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}}^2 &= \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r-\nu}^2 |c_k|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, что равенство (8) можно записать в следующем удобном для дальнейшего виде

$$\|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}}^2 = \int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_2^2(z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}; \rho) d\rho.$$

Из полученного равенства, учитывая неравенство (2), получаем

$$\begin{aligned} & \|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}}^2 \leq \\ & \leq \int_0^1 \rho \gamma(\rho) \left\{ \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \right\}^2 \left( M_2(z^r f^{(r)}; \rho) \right)^{2(1-\nu/r)} \left( M_2(f; \rho) \right)^{2\nu/r} d\rho = \\ & = \left\{ \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \right\}^2 \int_0^1 \left[ \rho \gamma(\rho) M_2^2(z^r f^{(r)}; \rho) \right]^{1-\nu/r} \cdot \left[ \rho \gamma(\rho) M_2^2(f; \rho) \right]^{\nu/r} d\rho. \end{aligned} \quad (9)$$

Полагая в правой части неравенства (9)  $p' = r / (r - \nu)$ ,  $p = r / \nu$  и применяя неравенство Гельдера для интегралов

$$\int_0^1 f(\rho) g(\rho) d\rho \leq \left( \int_0^1 |f(\rho)|^{p'} d\rho \right)^{1/p'} \cdot \left( \int_0^1 |g(\rho)|^p d\rho \right)^{1/p}$$

$$(1/p + 1/p' = 1, p \geq 1, 1 \leq p' \leq \infty),$$

с учётом определения нормы в пространстве  $B_{2,\gamma}$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} & \|z^{r-\nu} f^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}} \leq \left\{ \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \right\} \times \\ & \times \left( \int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_2^2(z^r f^{(r)}; \rho) d\rho \right)^{\frac{1}{2}(1-\nu/r)} \cdot \left( \int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_2^2(f; \rho) d\rho \right)^{\frac{\nu}{2r}} = \\ & = \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \|z^r f^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}}^{1-\nu/r} \cdot \|f\|_{B_{2,\gamma}}^{\nu/r}, \quad 1 \leq \nu \leq r, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение теоремы 1.

Покажем неулучшаемость неравенства (7). Введем в рассмотрение функцию  $f_0(z) = z^r$ , очевидно принадлежащую пространству  $B_{q,\gamma}$ . Имеем:

$$\|f_0\|_{B_{2,\gamma}} = \left( \int_0^1 \rho^{2r+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2}, \quad \|z^r f_0^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}} = \alpha_{r,r} \left( \int_0^1 \rho^{2r+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2},$$

$$\left\| z^{r-\nu} f_0^{(r-\nu)} \right\|_{B_{2,\gamma}} = \alpha_{r,r-\nu} \left( \int_0^1 \rho^{2r+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2}.$$

Полученные равенства, поставляя в левую часть неравенства (7), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \|f\|_2^{v/r} \cdot \left\| z^r f^{(r)} \right\|_2^{1-\nu/r} = \\ & = \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \left( \int_0^1 \rho^{2r+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{v/2r} \cdot \alpha_{r,r}^{1-\nu/r} \left( \int_0^1 \rho^{2r+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2-\nu/2r} = \\ & = \alpha_{r,r-\nu} \left( \int_0^1 \rho^{2r+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2} = \left\| z^{r-\nu} f_0^{(r-\nu)} \right\|_{B_{2,\gamma}}, \end{aligned}$$

откуда и следует неулучшаемость неравенства (7).

В случае  $\gamma(\rho) \equiv 1$ , то есть когда  $B_{q,\gamma} := B_q$ , можно доказать более общее неравенство в виде следующего утверждения

**Теорема 2.** Пусть  $r, \nu \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq \nu \leq r$ ,  $1 \leq p \leq 2 \leq s$ ,  $\mu \leq q$ . Тогда для любой функции  $f \in \mathcal{B}_q^{(r)}$ , у которой коэффициенты Тейлора  $c_k(f) = 0$ ,  $k = \overline{r-\nu, r-1}$ , имеет место точное неравенство

$$\left\| z^{r-\nu} f^{(r-\nu)} \right\|_{B_p} \leq \frac{\alpha_{r,r-\nu}}{\alpha_{r,r}^{1-\nu/r}} \|f\|_{B_s}^{v/r} \cdot \left\| z^r f^{(r)} \right\|_{B_\mu}^{1-\nu/r}$$

в том смысле, что существует функция  $f_0 \in B_q^{(r)}$ , для которой оно обращается в равенство.

В силу того, что доказательство теоремы 2 буквально повторяет схему рассуждений [4], то мы ее опускаем.

Совокупность алгебраических комплексных полиномов степени  $n$  обозначим

$$\mathcal{P}_n = \{p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, a_k \in \mathbb{C}\}.$$

Величину

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \right\}$$

назовем наилучшим приближением функции  $f(z) \in B_{q,\gamma}$  множеством полиномов  $\mathcal{P}_{n-1}$ . В работе [8] доказано, что

$$E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}} = \|f - T_{n-1}(f)\|_{B_{2,\gamma}} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \cdot \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right\}^{1/2},$$

где  $T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k \in \mathcal{P}_{n-1}$  – частная сумма Тейлора разложения функции в степенной ряд  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k$ . В принятых обозначениях справедлива следующая

**Теорема 3.** Пусть  $r, v \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq v \leq r$ . Тогда для любого натурального числа  $n > r$  и функций  $f \in \mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$ , у которых коэффициенты Тейлора  $c_k(f) = 0$ ,  $k = \overline{r-v, r-1}$ , имеет место точное неравенство

$$E_{n-r+v-1}(z^{r-v} f^{(r-v)})_2 \leq \frac{\alpha_{n,r-v}}{\alpha_{n,r}^{1-v/r}} (E_{n-1}(f)_2)^{v/r} \cdot (E_{n-r-1}(z^r f^{(r)})_2)^{1-v/r}.$$

Теорема 3 в случае  $\gamma(\rho) \equiv 1$  допускает следующие обобщения

**Теорема 4.** Пусть  $r, v \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq v \leq r$ ,  $1 \leq p \leq 2 \leq s$ ,  $\mu \leq q$ . Тогда для любой функции  $f \in \mathcal{B}_q^{(r)}$ , у которой коэффициенты Тейлора  $c_k(f) = 0$ ,  $k = \overline{r-v, r-1}$ , имеет место точное неравенство

$$E_{n-r+v-1}(z^{r-v} f^{(r-v)})_{B_p} \leq \frac{\alpha_{n,r-v}}{\alpha_{n,r}^{1-v/r}} (E_{n-1}(f)_{B_s})^{v/r} \cdot (E_{n-r-1}(z^r f^{(r)})_{B_\mu})^{1-v/r}$$

в том смысле, что существует функция  $f_0 \in \mathcal{B}_q^{(r)}$ , для которой оно обращается в равенство.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976, 320 с.
2. Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наукова думка, 1982, 252с.
3. Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А. Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наукова думка, 2003, 590 с.
4. Вакарчук С.Б. О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций. – Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии. В сб. науч. работ Ин-та математики АН УССР – Киев, 1988, с.4-7.
5. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана – ДАН РТ, 2007, т.50, №1, с.14-19.
6. Бердникова И.В., Рафальсон С.З. Некоторые неравенства между нормами функции и ее производных в интегральных метриках – Изв. вузов. Математика, 1985, №12, с.3-6.
7. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации – Укр.мат.журн., 2011, т.63, №12, с.1579-1601.
8. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана. – ДАН России, 2007, т.412, №4, с.466-469.

М.С.САИДУСАЙНОВ

**НОБАРОБАРИҶОИ НАМУДИ КОЛМОГОРОВ ДАР ФАЗОИ ВАЗНДОРИ  
БЕРГМАН БАРОИ ФУНКСИЯҶОИ АНАЛИТИКИИ ЯКТАЪФИРӢБАН-  
ДА**

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола нобаробариҳои намуди Колмогоров барои функсияҳои аналитикии дар давраи воҳидӣ барои фазои вазндори Бергман  $B_{q,\gamma}$  ёфта шудаанд.

**Калимаҳои калидӣ:** нобаробарии намуди Колмогоров – фазои вазндори Бергман – наздиккунии беҳтарин – функсияи вазнӣ.

M.S.SAIDUSAYNOV

**THE KOLMOGOROV'S TYPE OF INEQUALITIES IN THE WEIGHTED  
BERGMAN SPACE FOR ANALYTIC FUNCTIONS WITH ONE VARIABLE**

*Tajik National University*

In this paper a new inequalities of Kolomorov's type for analytic functions in a unit circle were obtained in the weighted Bergman space  $B_{q,\gamma}$ .

**Key words:** Kolmogorov's type inequalities – weighted Bergman space – the best approximation – weight function.

УДК 517.9

Ф.М.ШАМСУДИНОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ  
ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ

*Курган-Тюбинский государственный университет им. Носира Хусрава*

*Поступила в редакцию 26.06.2014 г.*

*В работе для одной переопределённой системы уравнений второго порядка с сингулярной точкой найдены представления многообразия решений и изучены свойства полученных решений, а также рассмотрены задачи  $A_1$  и  $A_2$ .*

**Ключевые слова:** переопределённая система – сингулярная точка – многообразие решений – прямоугольник.

Пусть  $D$  прямоугольник

$$D = \{(x, y) : 0 < x < \delta_1, 0 < y < \delta_2\}.$$

Далее обозначим

$$\Gamma_1 = \{y = 0, 0 < x < \delta_1\}, \Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < \delta_2\}.$$

В области  $D$  рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{r^a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{r^\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x, y)}{r^{a+\beta}} u = \frac{f_1(x, y)}{r^{a+\beta}}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_2(x, y)}{r^\gamma} u = \frac{f_2(x, y)}{r^\gamma}, \end{cases} \quad (1)$$

---

*Адрес для корреспонденции:* Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич. 735140, Республика Таджикистан, г. Курган-Тюбе, ул. Айни, 67, Курган-Тюбинский государственный университет, Республика Таджикистан. E-mail: faizullo100@yahoo.com



где  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $a_1(x, y)$ ,  $b_j(x, y)$ ,  $c_1(x, y)$ ,  $f_j(x, y)$ ,  $j = 1, 2$  – заданные функции в области  $D$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ .

Дифференциальные уравнения и переопределенные системы с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами исследовались в работах [1-7].

В настоящей работе на основе способа, разработанного в [3] и [5], получено представление многообразия решений системы уравнений (1) при помощи произвольных постоянных.

В дальнейшем обозначим через  $C_2(D)$  класс функций, которые имеют непрерывные производные первого порядка в  $D$  и такие, что  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in C(D)$ .

**Случай 1.** Пусть первое уравнение системы (1) является главным и

$$b_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}),$$

$$a_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D}).$$

В этом случае получим следующие утверждения

**Теорема 1.** Пусть в системе уравнений (1)  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям:

$$1) \quad b_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \quad b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \quad f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}),$$

$$a_1(x, y), \quad c_1(x, y), \quad f_1(x, y), \quad f_2(o, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) \quad c_1(x, y) = r^2 \left( \frac{b_1(x, y)}{r} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y);$$

$$3) \quad |a_1(x, y) - a_1(o, o)| \leq H_1 r^{\alpha_1}, \quad H_1 = \text{const}, \quad o < \alpha_1 < 1,$$

$$|b_1(x, y) - b_1(o, o)| \leq H_2 r^{\beta_1}, \quad H_2 = \text{const}, \quad o < \beta_1 < 1,$$

$$|b_2(o, y) - b_2(o, o)| \leq H_3 y^{\gamma_1}, \quad H_3 = \text{const}, \quad o < \gamma_1 < 1;$$

$$4) \quad b_1(o, o) < 0, a_1(o, o) > o, b_2(o, o) > o;$$

$$5) \quad a) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{b_1(x, y)}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{b_2(x, y)}{r} \right) \in D;$$

$$\begin{aligned}
& b) \quad r(b_2(x, y) - a_1(x, y)) \exp[-w_{a_1}^1(x, y)] \left( \frac{x}{y+r} \right)^{a_1(o,o)} \\
& \left( \varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_1(x, s)}{x^2 + s^2} \exp[w_{a_1}^1(x, s)] \left( \frac{s + \sqrt{x^2 + s^2}}{x} \right)^{a_1(o,o)} ds \right) \\
& + f_1(x, y) = r^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f_2(x, y)}{r} \right) + b_1(x, y) f_2(x, y);
\end{aligned}$$

$$6) \quad f_2(x, y) = o \left( \left( \frac{y+r}{x} \right)^{-a_1(0,0)} r^{\gamma_1} \right), \gamma_1 > 1.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса  $C_2(D)$  представимо в виде

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \exp[-w_{b_1}^1(x, y)] \left( \frac{y}{x+r} \right)^{b_1(o,o)} \\
& \left\{ \psi_1(y) + \int_0^x \exp[w_{b_1}^1(t, y) - w_{a_1}^1(t, y)] \left( \frac{t + \sqrt{t^2 + y^2}}{y} \right)^{b_1(o,o)} \right. \\
& \left. \left( \frac{t}{y + \sqrt{t^2 + y^2}} \right)^{a_1(o,o)} \left( \varphi_1(t) + \int_0^y \frac{f_1(t, s)}{t^2 + s^2} \exp[w_{a_1}^1(t, s)] \right. \right. \\
& \left. \left. \left( \frac{s + \sqrt{t^2 + s^2}}{t} \right)^{a_1(o,o)} ds \right) dt \right\} \equiv \chi_1(\Psi_1(y), \varphi_1(x), f_1(x, y)), \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1(y) &= y^{-b_2(o,o)} \exp[-w_{b_2}^1(0, y)] \left( c_1 + \int_0^y \frac{f_2(0, s)}{s^{1-b_2(o,o)}} \exp[w_{b_2}^1(0, s)] ds \right) \equiv \\
& \equiv N_1(c_1, f_2(o, y)), \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi_1(x) = \\
& = \frac{1}{x(b_2(x, 0) - a_1(x, 0))} \left[ -f_1(x, 0) + b_1(x, 0) f_2(x, 0) + x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f_2(x, y)}{r} \right) \Big|_{y=0} \right] \\
& (a_1(x, 0) \neq b_2(x, 0)), \quad (4)
\end{aligned}$$

$$w_{b_1}^1(x, y) = \int_0^x \frac{b_1(t, y) - b_1(o, o)}{\sqrt{t^2 + y^2}} dt, \quad w_{a_1}^1(x, y) = \int_0^x \frac{a_1(x, s) - a_1(o, o)}{\sqrt{x^2 + s^2}} ds,$$

$$w_{b_2}^1(o, y) = \int_0^y \frac{b_2(o, s) - b_2(o, o)}{s} ds,$$

$c_1$  – произвольная постоянная.

При этом полученное решение имеет свойства:

1<sup>0</sup>. Если  $x \rightarrow o$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) = \psi_1(y).$$

2<sup>0</sup>. Если  $x \rightarrow o$  и  $y \rightarrow o$ , то

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O\left(y^{-b_2(o, o)}\right).$$

3<sup>0</sup>.  $\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ y^{b_2(o, o)} \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_1$ .

4<sup>0</sup>. Если  $y \rightarrow o$  и  $x \neq o$ , то

$$u(x, y) = O\left(\left(\frac{y}{x+r}\right)^{b_1(o, o)}\right).$$

**Замечание 1.** Утверждение теоремы 1 остаётся в силе при выполнении условий

1)  $b_1(o, o) > o, \quad a_1(o, o) > o, \quad b_2(o, o) < o;$

2)  $f_2(o, y) = o(y^{\mu_1}), \quad \mu_1 > |b_2(o, o)|,$

$$F_1(x, y) = o\left(\left(\frac{x+r}{y}\right)^{-b_1(o, o)} r^{\mu_2}\right), \quad \mu_2 > -1,$$

$$F_1(x, y) = \varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_1(x, s)}{x^2 + s^2} \exp[w_{a_1}^1(x, s)] \left(\frac{s + \sqrt{x^2 + s^2}}{x}\right)^{a_1(o, o)} ds.$$

**Замечание 2.** Решение вида (2), (3), (4) при выполнении условий замечания 1 имеет поведение

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = o$$

и

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} u(x, y) = 0.$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1, за исключением условий 2) и б). Кроме того, пусть выполнены условия

$$1) \quad c_2(x, y) = -c_1(x, y) + r^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{b_1(x, y)}{r} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y);$$

$$2) \quad r^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f_2(x, y)}{r} \right) + b_1(x, y)f_2(x, y) =$$

$$= r(b_2(x, y) - a_1(x, y)) \exp[-w_{a_1}^1(x, y)] \left( \frac{x}{y+r} \right)^{a_1(o,o)}$$

$$\left( \varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_2(x, s) + c_2(x, s)u(x, s)}{x^2 + s^2} \right.$$

$$\left. \exp[w_{a_1}^1(x, s)] \left( \frac{s + \sqrt{x^2 + s^2}}{x} \right)^{a_1(o,o)} ds \right) + f_1(x, y) + c_2(x, y)u(x, y);$$

$$3) \quad c_2(x, y) = o \left( \left( \frac{y+r}{x} \right)^{-a_1(o,o)} r^{\gamma_2} \right), \gamma_2 > 1.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса  $C_2(D)$  представимо в виде

$$u(x, y) = \exp[-w_{b_1}^1(x, y)] \left( \frac{y}{x+r} \right)^{b_1(o,o)} \times$$

$$\times \left\{ \Omega_1(\Psi_1(y), \varphi_1(x), f_1(x, y)) + \int_0^x \int_0^y \Gamma_1(x, y; t, s) \Omega_1(\Psi_1(s), \varphi_1(t), f_1(t, s)) ds \right\} =, \quad (5)$$

$$= \chi_2(\Psi_1(y), \varphi_1(x), \Gamma_1(x, y; t, s), f_1(x, y)),$$

$$\Omega_1(\Psi_1(y), \varphi_1(x), f_1(x, y)) = \Psi_1(y) + \int_0^x \exp[w_{b_1}^1(t, y) - w_{a_1}^1(t, y)]$$

$$\left( \frac{t + \sqrt{t^2 + y^2}}{y} \right)^{b_1(o,o)} \left( \frac{t}{y + \sqrt{t^2 + y^2}} \right)^{a_1(o,o)} (\varphi_1(t) +$$

$$+ \int_0^y \frac{f_1(t,s)}{t^2+s^2} \exp[w_{a_1}^1(t,s)] \left( \frac{s+\sqrt{t^2+s^2}}{t} \right)^{a_1(o,o)} ds \Big) dt,$$

$\varphi_1(y)$  определяется равенством (3),

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{x(b_2(x,o) - a_1(x,o))} \times \\ &\times \left[ x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f_2(x,y)}{r} \right) \Big|_{y=o} + b_1(x,o) f_2(x,o) - f_1(x,o) - c_2(x,o) u(x,o) \right] \quad (6) \\ &\quad (b_2(x,o) \neq a_1(x,o)), \end{aligned}$$

$\Gamma_1(x,y;t,s)$  – резольвента явно выписанного интегрального уравнения Вольтерра второго рода,  $u(x,o)$  – произвольная функция одной независимой переменной  $x$ ,  $c_1$  – произвольная постоянная.

Для решения (3),(5), (6) имеет место свойства решения вида (2), (3), (4).

**Случай 2.** Пусть второе уравнение системы (1) является главным. В этом случае получим следующее утверждение

**Теорема 3.** Пусть в системе уравнений (1)  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям

$$1) \quad b_1(x,y) \in C_y^1(\bar{D}), \quad b_2(x,y) \in C_x^1(\bar{D}), \quad f_2(x,y) \in C_y^1(\bar{D}),$$

$$a_1(x,y), \quad c_1(x,y), \quad f_1(x,y) \in C(\bar{D});$$

$$2) \quad c_2(x,y) = -c_1(x,y) + r^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{b_1(x,y)}{r} \right) + a_1(x,y) b_1(x,y);$$

$$3) \quad |b_2(x,y) - b_2(o,o)| \leq H_4 r^{\gamma_2}, \quad H_4 = const, o < \gamma_2 < 1,$$

$$|B_1(x) - B_1(o)| \leq H_5 y^{\nu_2}, \quad H_5 = const, o < \nu_2 < 1,$$

$$4) \quad b_2(o,o) < 0, B_1(o) > o, (b_1(o,o) b_2(o,o) - a_1(o,o)) - c_2(o,o) > 0;$$

$$5) \quad a) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{b_2(x,y)}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{b_1(x,y)}{r} \right) \text{ в } D;$$

$$b) \quad r(b_2(x,y) - a_1(x,y)) \exp[-w_{a_1}^1(x,y)] \left( \frac{x}{y+r} \right)^{a_1(o,o)}$$

$$\begin{aligned}
& (\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_1(x,s) + c_2(x,s)u(x,s)}{x^2 + s^2} \\
& \exp[\mathbf{w}_{a_1}^1(x,s)] \left( \frac{s + \sqrt{x^2 + s^2}}{x} \right)^{a_1(o,o)} ds) + \\
& + f_1(x,y) + c_2(x,y)u(x,y) = r^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{f_2(x,y)}{r} \right) + b_1(x,y)f_2(x,y);
\end{aligned}$$

$$6) \quad f_2(x,y) = o(r^{\gamma_3}), \gamma_3 > 0.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса  $C_2(D)$  представимо в виде

$$\begin{aligned}
u(x,y) = \exp[-\mathbf{w}_{b_2}^1(x,y)] \left( \frac{x}{y+r} \right)^{b_2(o,o)} & \left\{ \varphi_2(x) + \int_0^y \frac{f_2(x,s)}{\sqrt{x^2 + s^2}} \right. \\
\exp[\mathbf{w}_{b_2}^1(x,s)] \left( \frac{s + \sqrt{x^2 + s^2}}{x} \right)^{b_2(o,o)} ds & \left. \right\} \equiv \chi_3(\varphi_2(x), f_2(x,y)), \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) = x^{-B_1(o)} \exp[-\mathbf{w}_{B_1}^1(x)] & \left( c_2 + \int_0^x \frac{F_1(t)}{t^{1-B_1(o)}} \exp[\mathbf{w}_{B_1}^1(t)] dt \right) \equiv \\
& \equiv N_2(c_2, f_1(x,o), f_2(x,o)), \quad (8)
\end{aligned}$$

$$B_1(x) = b_1(x,o) - \frac{c_2(x,o)}{b_2(x,o) - a_1(x,o)},$$

$$\begin{aligned}
F_1(x) = \frac{1}{b_2(x,o) - a_1(x,o)} & \left[ x^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{f_2(x,y)}{r} \right) \right]_{x=o} + b_1(x,o)f_2(x,o) - f_1(x,o) \\
& (b_2(x,o) \neq a_1(x,o)),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{w}_{b_2}^1(x,y) = \int_0^y \frac{b_2(x,s) - b_2(o,o)}{\sqrt{x^2 + s^2}} ds, \quad \mathbf{w}_{B_1}^1(x) = \int_0^x \frac{B_1(t) - B_1(o)}{t} dt,$$

$c_2$  - произвольная постоянная.

Полученное решение имеет следующие свойства:

1<sup>0</sup>. Если  $y \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = \varphi_2(x).$$

2<sup>0</sup>. Если  $y \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(x^{-B_1(o)}).$$

$$3^0. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ x^{B_1(o)} \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_2.$$

4<sup>0</sup>. Если  $x \rightarrow 0$  и  $y \neq 0$ , то

$$u(x, y) = O\left(\left(\frac{x}{y+r}\right)^{b_2(o,o)}\right).$$

**Замечание 3.** Утверждение теоремы 3 остаётся в силе при выполнении условий

$$1) \quad b_2(o, o) > 0, \quad B_1(o) < 0;$$

$$2) \quad f_2(x, y) = o\left(\left(\frac{y+r}{x}\right)^{-b_2(o,o)} r^{\gamma_4}\right), \gamma_4 > 0,$$

$$F_1(x) = o(x^{\mu_2}), \mu_2 > |B_1(o)|.$$

**Замечание 4.** Решение вида (7), (8) при выполнении условий замечания 3 имеет поведение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = 0$$

и

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} u(x, y) = 0.$$

Для полученных решений системы уравнений (1) поставлены и решены следующие задачи с начальными данными.

**Задача А<sub>1</sub>.** Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса  $C_2(D)$  по начальному условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ y^{b_2(o,o)} \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = m_1,$$

где  $m_1$  - известная постоянная.

**Задача А<sub>2</sub>.** Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса  $C_2(D)$  по следующему начальному условию

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ x^{B_1(o)} \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = m_2 ,$$

где  $m_2$  - известная постоянная.

О разрешимости задачи  $A_1$  и  $A_2$  получены следующие утверждения

**Теорема 4.** Пусть выполняются все условия теоремы 1. Тогда единственное решение задачи  $A_1$  даётся формулами (2), (3), (4) при  $c_1 = m_1$ .

**Теорема 5.** Пусть выполнены все условия теоремы 3. Тогда единственное решение задачи  $A_2$  выражается формулами (7), (8) при  $c_2 = m_2$ .

Автор выражает глубокую благодарность академику АН Республики Таджикистан Н.Р.Раджабову за обсуждение настоящей работы и ценные советы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981, 448 с.
2. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. – Душанбе: Дониш, 1986, 115 с.
3. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. – Душанбе: ТГУ, 1992, 236 с.
4. Усмонов З.Д. Обобщённые системы Коши-Римана с сингулярной точкой. – Душанбе: ТГУ, 1992, 244 с.
5. Раджабов Н., Мохаммед Эльсаед Абдель Аал. Переопределённая линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями. – LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany, 2011, 234 с.
6. Раджабов Н. Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе: Из-во Деваштич 2007, 221 с.
7. Шамсудинов Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы с сильной особенностью /В сб. Математический и прикладной анализ, вып.2 – Тюмень: Изд-во Тюменского государственного университета, 2005, с. 281-290.

Ф.М.ШАМСУДИНОВ

### ТАСВИРҲОИ ИНТЕГРАЛИИ ҲАЛ БАРОИ ЯК СИСТЕМАИ БАРЗИЁДМУАЙЯНШУДАИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ТАРТИБИ ДУОМ БО КОЭФФИЦИЕНТҲОИ СИНГУЛЯРӢ

*Донишгоҳи давлатии Қӯрғонтеппа ба номи Носири Хусрав*

Дар кори мазкур барои як системаи барзиёдмуайяншудаи тартиби дуом бо нуқтаи сингулярӣ тасвирҳои интегралӣ ҳал омӯхта шуда, барои онҳо масъалаҳои  $A_1$  ва  $A_2$  гузошта шуда ҳал карда шудаанд.

**Калимаҳои калидӣ:** системаи барзиёдмуайяншуда – нуқтаи сингулярӣ – бисёршаклии ҳал – росткунча.



F.M.SHAMSUDINOV

**INTEGRAL REPRESENTATIONS SOLUTIONS FOR ONE OVER  
DETERMINED SYSTEM DIFFERENTIAL EQUATIONS  
WITH SINGULARITY COEFFICIENTS**

*N.Khusrav Qurgantyube State University*

In this work for one over determined system of second order differential equations with singularity point are obtained representation the manifold solution and study the properties of solutions, also problem  $A_1$  and  $A_2$  .

**Key words:** over determined system – singular point – manifold solution – rectangle.

УДК 517.948

О.Х.КАРИМОВ

**О РАЗДЕЛИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАТРИЧНЫМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

*Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан  
Поступила в редакцию 17.07.2014 г.*

*Доказана разделимость одного класса нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с переменными матричными коэффициентами во всём  $n$ -мерном евклидовом пространстве, которые в общем случае не являются слабыми возмущениями линейных операторов.*

**Ключевые слова:** нелинейный дифференциальный оператор – разделимость – коэрцитивное неравенство – матричный коэффициент.

Проблема разделимости дифференциальных операторов привлекала внимание многих математиков после публикации серии работ В.Н.Эверитта и М.Гирца [1-4], в которых авторы исследовали разделимость оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. В настоящее время по этой проблеме опубликовано большое число работ и результаты, полученные по разделимости дифференциальных операторов, нашли свои приложения в теории функций, спектральной теории дифференциальных операторов и теории краевых задач для дифференциальных уравнений (см., например, [5-8] и имеющиеся там ссылки).

Настоящая работа посвящена исследованию разделимости нелинейных дифференциальных операторов с переменными матричными коэффициентами, и её основной результат обобщает соответствующие результаты работ [9-11].

Пусть  $W_{2,loc}^2(R^n)$  –  $n$ -мерное евклидово пространство точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $W_2^2(R^n)$  – пространство функций  $u(x)$ ,  $x \in R^n$ , имеющих обобщённые производные второго порядка, с конечной нормой

---

*Адрес для корреспонденции:* Каримов Олимджон Худойбердиевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Институт математики АН РТ. E-mail: karimov\_olim@mail.ru

$$\|u; W_2^2(R^n)\| = \left\{ \sum_{i,j=1}^n \int \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dx + \int |u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь и далее в интегралах по всему пространству опускаем символ  $R^n$ . Символом  $W_{2,loc}^2(R^n)$  обозначим пространство функций, локально принадлежащих пространству  $W_2^2(R^n)$ .

Пусть  $\ell$  – некоторое натуральное число. Символом  $B^\ell$ , где  $B$  – некоторое линейное пространство, обозначим пространство векторов  $y = (y_1, y_2, \dots, y_\ell)$  с компонентами  $y_j$  из  $B$ . На вектор-функциях  $u \in W_{2,loc}^2(R^n)^\ell \cap L_2(R^n)^\ell$  рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$L[u] = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + V(x, u(x))u(x). \quad (1)$$

Предполагается, что коэффициенты  $a_{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $V(x, \omega)$  при всех  $x \in R^n$ ,  $\omega \in C^\ell$  являются квадратными матрица-функциями порядка  $\ell$ .

**Определение 1.** Оператор  $L[u]$  называется *разделимым в пространстве*  $L_2(R^n)^\ell$ , для всех вектор-функций  $u(x) \in W_{2,loc}^2(R^n)^\ell \cap L_2(R^n)^\ell$  таких, что  $L[u] \in L_2(R^n)^\ell$  выполняются включения

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \in L_2(R^n)^\ell, \quad V(x, u(x))u(x) \in L_2(R^n)^\ell.$$

Для  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\ell) \in C^\ell$  положим  $\xi_j = \operatorname{Re} \omega_j, \eta_j = \operatorname{Im} \omega_j, j = 1, 2, \dots, \ell$ .

Вводим некоторые обозначения

$$F(x, \omega) = F(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_\ell, \eta_1, \dots, \eta_\ell) = V^{\frac{1}{2}}(x, \omega).$$

$$Q(x, \omega) = Q(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_\ell, \eta_1, \dots, \eta_\ell) = F^2(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_\ell, \eta_1, \dots, \eta_\ell),$$

в которых квадратные корни от эрмитовых положительных матриц определены как положительно-определенные эрмитовы матрицы.

**Определение 2.** Будем говорить, что матрица-функция  $V(x, \omega)$ , ( $x \in R^n$ ,  $\omega \in C^\ell$ ) принадлежит классу  $T_{\chi, \sigma, \delta, \gamma}^{n, \ell}$ , если выполняются следующие условия:

$$1) \quad \sum_{j=1}^n \left\| F^{-\frac{1}{2}}(x, \omega) \frac{\partial}{\partial x_j} (F(x, \omega)) F^{-\frac{3}{2}}(x, \omega) \right\|^2 \leq \chi$$

для всех  $x \in R^n$ ,  $\omega \in C^\ell$ ;

$$2) \quad \left\| \sum_{k=1}^{\ell} (\mu_k \cdot F^{-\frac{1}{2}}(x, \omega) \frac{\partial}{\partial \xi_k} (F(x, \omega)) \omega + \eta_k \cdot F^{-\frac{1}{2}}(x, \omega) \frac{\partial}{\partial \eta_k} (F(x, \omega)) \omega); C^\ell \right\| \leq \\ \leq \sigma \left\| F^{\frac{1}{2}}(\Omega); C^\ell \right\|$$

для всех  $x \in R^n$ ,  $\omega \in C^\ell$  и всех  $\Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \mu_2 + i\nu_2, \dots, \mu_\ell + i\nu_\ell) \in C^\ell$ ;

$$3) \quad \left\| \sum_{k=1}^{\ell} (\mu_k \cdot F^{-1}(x, \omega) \frac{\partial}{\partial \xi_k} (Q(x, \omega)) \omega + \eta_k \cdot F^{-1}(x, \omega) \frac{\partial}{\partial \eta_k} (Q(x, \omega)) \omega); C^\ell \right\| \leq \\ \leq \delta \left\| F(\Omega); C^\ell \right\|$$

для всех  $x \in R^n$ ,  $\omega \in C^\ell$  и всех  $\Omega = (\mu_1 + i\nu_1, \mu_2 + i\nu_2, \dots, \mu_\ell + i\nu_\ell) \in C^\ell$ ;

$$4) \quad \sum_{j=1}^n \left\| Q^{-\frac{1}{2}}(x, \omega) \frac{\partial}{\partial x_j} (Q(x, \omega)) Q^{-1}(x, \omega) \right\|^2 \leq \gamma \text{ для всех } x \in R^n, \omega \in C^\ell.$$

Далее предположим, что элементы матрица-функций  $a_{ij}(x)$  принадлежат классу  $C^1(R^n)$  и удовлетворяют следующим условиям:

$$I. a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x), \operatorname{Im} a_{ij}(x) \equiv 0;$$

$$II. |a_{ij}(x)| \leq \sigma_1, \nabla a_{ij}(x) \leq \sigma_2, (\forall x \in R^n, i, j = 1, 2, \dots, n);$$

$$III. \sum_{i=1}^n |s_i; C^\ell|^2 \leq \chi_1 \cdot \sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}(x) s_i, s_j; C^\ell \rangle (\forall x \in R^n, \forall s = \{s_i\}_{i=1}^n, s_i \in C^\ell).$$

Константы  $\sigma_1, \sigma_2, \chi_1$  в этих условиях не зависят от  $x$  и  $s$ .

Теперь сформулируем основной результат работы

**Теорема.** Пусть матрица-функция  $V(x, \omega)$ , ( $x \in R^n$ ,  $\omega \in C^\ell$ ) принадлежит классу  $T_{\chi, \sigma, \delta, \gamma}^{n, \ell}$  и матрица-функции  $a_{ij}(x)$  коммутируются с  $V(x, \omega)$  и удовлетворяют условиям I, II, III. Тогда при выполнении условий:

$$0 < \chi < \frac{4}{\chi_1 n^2 \sigma_1}, 0 < \sigma < \frac{1}{\chi_1 n \sigma_1} - \frac{\chi n}{4}, 0 < \gamma < \frac{4}{\chi_1 n^2 \sigma_1}, 0 < \delta < \frac{1}{\chi_1 n \sigma_1} - \frac{\gamma n}{4},$$

где  $\sigma_1, \chi_1$  - константы из условий II, III, дифференциальный оператор (1) разделяется в пространстве  $L_2(R^n)^\ell$  и для всех решений  $u(x) \in L_2(R^n)^\ell \cap W_{2,loc}^2(R^n)^\ell$  уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + V(x, u(x))u(x) = f(x) \quad (2)$$

с правой частью  $f(x) \in L_2(R^n)^\ell$  выполняется следующее коэрцитивное неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| V(x, u(x))u(x); L_2(R^n)^\ell \right\| + \sum_{j=1}^n \left\| V^{\frac{1}{2}}(x, u(x)) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}; L_2(R^n)^\ell \right\| + \\ & + \left\| \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right); L_2(R^n)^\ell \right\| \leq M \|f(x); L_2(R^n)^\ell\|, \end{aligned} \quad (3)$$

где положительное число  $M$  не зависит от  $u(x), f(x)$ .

Результат, сформулированный в этой теореме, ранее был анонсирован только в случае оператора Шрёдингера [9].

Далее мы остановимся на основных моментах доказательства основной теоремы. Сначала без доказательства сформулируем две вспомогательные леммы.

**Лемма 1.** Пусть выполнены условия I-III. Пусть в уравнении (2) правая часть принадлежит пространству  $L_2(R^n)^\ell$ , и пусть решение  $u(x)$  уравнения (2) принадлежит классу  $W_{2,loc}^2(R^n)^\ell \cap L_2(R^n)^\ell$ . Тогда вектор-функции  $V^{\frac{1}{2}}(x, u(x))u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) принадлежат пространству  $L_2(R^n)^\ell$ .

**Лемма 2.** Пусть коэффициенты  $a_{ij}(x)$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) дифференциального оператора (1) удовлетворяют условиям I-III и пусть вектор-функция  $u(x)$  принадлежит классу  $W_{2,loc}^2(R^n)^\ell \cap L_2(R^n)^\ell$  и удовлетворяет уравнению (2) с правой частью  $f(x) \in L_2(R^n)^\ell$ , тогда вектор-функции  $F^{\frac{3}{2}}(x, u(x))u(x), F^{\frac{1}{2}}(x, u(x)) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$  также принадлежат пространству  $L_2(R^n)^\ell$ .

Теперь переходим к непосредственному доказательству теоремы. Пусть  $\varphi(x)$  – фиксированная неотрицательная функция из класса  $C_0^\infty(R^n)$ , обращающаяся в единицу при  $|x| < 1$ . Для любого положительного числа  $\varepsilon$  положим  $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$ . Используя равенство

$$\begin{aligned}
(f, \varphi_\varepsilon V(x, u)u) &= \left( - \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \varphi_\varepsilon V(x, u)u \right) + \\
&+ (V(x, u)u, \varphi_\varepsilon V(x, u)u),
\end{aligned} \tag{4}$$

где  $(\cdot, \cdot)$  - скалярное произведение в пространстве  $L_2(R^n)^\ell$ , после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned}
(f, \varphi_\varepsilon V(x, u)u) &= \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon V(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \\
&+ P_1^{(\varepsilon)}(u) + P_2^{(\varepsilon)}(u) + P_3^{(\varepsilon)}(u) + (V(x, u(x))u(x), \varphi_\varepsilon V(x, u)u),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
P_1^{(\varepsilon)}(u) &= \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j} Q(x, u)u \right), \\
P_2^{(\varepsilon)}(u) &= \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon \left( \sum_{k=1}^\ell \operatorname{Re} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial Q}{\partial \xi_k} + \sum_{k=1}^\ell \left( \operatorname{Im} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial Q}{\partial \eta_k} \right) u \\
P_3^{(\varepsilon)}(u) &= \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial x_i} u \right).
\end{aligned}$$

Здесь и далее значения матрица-функций  $Q, \frac{\partial Q}{\partial x_j}, \frac{\partial Q}{\partial \xi_k}, \frac{\partial Q}{\partial \eta_k}$  взяты в точке  $(x_1, \dots, x_n,$

$\operatorname{Re} u_1(x), \dots, \operatorname{Re} u_\ell(x), \operatorname{Im} u_1(x), \dots, \operatorname{Im} u_\ell(x)$ ). Так как  $\left| \frac{\partial \varphi_\varepsilon(x)}{\partial x_j} \right| \leq M_1 \cdot \varepsilon$ , то, применяя

неравенство Коши-Буняковского, можно получить оценку:

$$|P_1^{(\varepsilon)}(u)| \leq \varepsilon M \left\| F^{\frac{3}{2}}(x, u(x))u(x); L_2(R^n)^\ell \right\| \cdot \sum_{i=1}^n \left\| F^{\frac{1}{2}}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^\ell \right\|.$$

В силу леммы 2 отсюда следует, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_1^{(\varepsilon)}(u) = 0$ .

Теперь переходим к оценке функционала  $P_2^{(\varepsilon)}(u)$ . Из условия 4 при  $\omega = u(x)$ ,

$\Omega = \sqrt{\varphi_\varepsilon(x)} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}$ , применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|P_2^{(\varepsilon)}(u)| \leq \sum_{i,j=1}^n \left\| a_{ij} \sqrt{\varphi_\varepsilon} F(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^\ell \right\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{\ell} \left\{ \left( \sqrt{\varphi_\varepsilon} Re \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times F^{-1}(x,u) \frac{\partial Q}{\partial \xi_k} u + \left( \sqrt{\varphi_\varepsilon} Im \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) F^{-1}(x,u) \frac{\partial Q}{\partial \eta_k} u \right\}; L_2(R^n)^\ell \right\|.$$

Далее, применяя условие II, имеем

$$|P_2^{(\varepsilon)}(u)| \leq \sigma_1 \delta \sum_{i,j=1}^n \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} F(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^\ell \right\| \cdot \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} F(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_2(R^n)^\ell \right\| \leq \\ \leq \sigma_1 \delta n \sum_{i,j=1}^n \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} F(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^\ell \right\|^2.$$

Из последнего неравенства имеем

$$|P_2^{(\varepsilon)}(u)| \leq \sigma_1 \delta n \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon V(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

где  $\delta$ ,  $\sigma_1$  - константы из условия II, 3.

Переходим к оценке функционала  $P_3^{(\varepsilon)}(u)$ . Учитывая эрмитово-сопряжённые значения матрица-функции  $Q(x, \omega)$ , получим следующее представление для  $P_3^{(\varepsilon)}(u)$

$$P_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^n \left( \sqrt{\varphi_\varepsilon} a_{ij} Q^{\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\varphi_\varepsilon} Q^{-\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial Q}{\partial x_j} u \right).$$

Так как  $Q^{\frac{1}{2}}(x, \omega) = F(x, \omega)$  и, согласно лемме 2, вектор-функции  $F(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$

( $i = \overline{1, n}$ ) принадлежат пространству  $L_2(R^n)^\ell$ , то, применяя неравенство Коши-Буняковского и условие II, имеем

$$|P_3^{(\varepsilon)}(u)| \leq \sum_{i,j=1}^n \left\| a_{ij} \sqrt{\varphi_\varepsilon} F(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^\ell \right\| \cdot \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} Q^{-\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial Q}{\partial x_j} u; L_2(R^n)^\ell \right\| \leq \\ \leq \frac{\sigma_1 n \alpha}{2} \sum_{i=1}^n \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} F(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^\ell \right\|^2 + \frac{n}{2\alpha} \sum_{j=1}^n \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} Q^{-\frac{1}{2}}(x,u) \frac{\partial Q}{\partial x_j} u; L_2(R^n)^\ell \right\|^2.$$

Здесь  $\alpha$  – произвольное положительное число. В силу условий 4 получим

$$|P_3^{(\varepsilon)}(u)| \leq \frac{\sigma_1 n \alpha}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon V(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \frac{n \nu}{2\alpha} (V(x, u) u, \varphi_\varepsilon V(x, u) u),$$

где  $\sigma_1, \gamma$  - константы из условия II, 4.

Так как матрица-функции  $a_{ij}(x)$  коммутируются с  $V(x, u(x))$ , то, применяя условие эллиптичности III, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon V(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) &= \sum_{i=1}^n \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} F(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^\ell \right\|^2 \leq \\ &\leq \chi_1 \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij} \sqrt{\varphi_\varepsilon} F(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \sqrt{\varphi_\varepsilon} F(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \leq \\ &\leq \chi_1 \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij} \sqrt{\varphi_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \sqrt{\varphi_\varepsilon} V(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

На основе полученных выше оценок равенство (4) примет вид

$$\begin{aligned} (f, \varphi_\varepsilon V(x, u) u) &\geq \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi_\varepsilon V(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \\ &+ (V(x, u) u, \varphi_\varepsilon V(x, u) u) - |P_1^{(\varepsilon)}(u)| - |P_2^{(\varepsilon)}(u)| - |P_3^{(\varepsilon)}(u)|. \end{aligned}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \theta_1 \sum_{i=1}^n \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} F(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n)^\ell \right\|^2 + \theta_2 \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} V(x, u) u; L_2(R^n)^\ell \right\|^2 - \\ - |P_1^{(\varepsilon)}(u)| \leq \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} f; L_2(R^n)^\ell \right\| \cdot \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon} V(x, u) u; L_2(R^n)^\ell \right\|, \quad (5) \end{aligned}$$

где  $\theta_1 = \sigma_1 n \left( \frac{1}{\chi_1 \sigma_1 n} - \delta - \frac{\alpha}{2} \right)$ ,  $\theta_2 = \left( 1 - \frac{n\gamma}{2\alpha} \right)$ . Пусть  $\beta$  - положительное число,

удовлетворяющее неравенству  $\beta < \frac{1}{\chi_1 \sigma_1 n} - \frac{n\gamma}{4} - \delta$ . Положим  $\alpha = \frac{n\gamma}{2} + \beta$ . Тогда

$$\theta_1 = \sigma_1 n \left( \frac{1}{\chi_1 \sigma_1 n} - \delta - \frac{n\gamma}{4} - \frac{\beta}{2} \right) > \frac{\sigma_1 n \beta}{2} > 0, \quad \theta_2 = \left( 1 - \frac{n^2 \gamma}{n^2 \gamma + 2\beta} \right) > 0.$$

Теперь, переходя в неравенстве (5) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , после несложных преобразования получим коэрцитивное неравенство (3). Разделимость нелинейного оператора (1) следует из коэрцитивного неравенства (3).

Теорема доказана.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Everitt W.N., Gierz M. An example concerning the separation property for differential operators. – Proc.Roy.Soc.Edinburg A., 1973, v.71, pp.159-165.
2. Everitt W.N., Gierz M. A Dirichlet type result for ordinary differential operators. – Math. Ann., 1973, v.203, 2, pp.119-128.
3. Everitt W.N., Gierz M. Inequalities and Separation for certain ordinary differential operators. – Proc. London Math.Soc.(3), 1974, v.28, pp.352-372.
4. Everitt W.N., Gierz M. Inequalities and Separation for Schrodinger type operators in  $L_2(\mathbb{R}^n)^l$ . – Proc. Roy. Soc. Edinburg A., 1977, v.79, pp. 257-265.
5. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения. – Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР, 1984, т.170, с.37-76.
6. Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка. – Математические заметки, 1989, т.46, №6, с.110-112.
7. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в  $\mathbb{R}^n$  – Труды Математического института им.В.А. Стеклова АН СССР, 1983, т.161, с.195-217.
8. Мохамед А.С. О разделимости нелинейного оператора Шредингера с матричным потенциалом. – В сб.: Тез. Республ. научной конф. "Теория приближения и вложения функциональных пространств" – Караганда, 1991, с.88.
9. Каримов О., Усмонов Н.У. Коэрцитивные неравенства и разделимость для нелинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка. – ДАН РТ, 1997, т.40, №9-10, с.32-40.
10. Каримов О. О разделимости нелинейного оператора Шредингера с матричным потенциалом в весовом пространстве. – ДАН РТ, 2005, т. XLVIII, №3-4, с.38-43.
11. Биргебаев А. Разделимость одного дифференциального оператора в  $L_p$ - Изв.АН КазССР. Серия физ-мат., 1981, №5, с.1-5.

О.Х.КАРИМОВ

## ОИДИ ЧУДОШАВАНДАГИИ ОПЕРАТОРҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ҒАЙРИХАТТИИ ТАРТИБИ ДУЮМ БО КОЭФФИЦИЕНТҲОИ МАТ- РИТСАВӢ

*Институтуи математикаи ба номи А. Ҷӯраеви  
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мақолаи чудошавандагии як синфи операторҳои дифференсиалии ғайрихаттӣ бо коэффитсиентҳои матритсавӣ исбот карда шудааст, ки дар тамоми фазои  $n$ -ченакаи евклидӣ дода шудаанд ва дар ҳолати умуми ошӯби сусти операторҳои хаттӣ намебошанд.

**Калимаҳои калидӣ:** оператори дифференсиалии ғайрихаттӣ – чудошавандагӣ – нобаробарии коэрситивӣ – коэффитсиенти матритсавӣ.

O.KH.KARIMOV

**ON SEPARABILITY OF THE SECOND ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS WITH MATRIX COEFFICIENTS**

*A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

The separability is proved in the paper for a class of the second order nonlinear differential operators with matrix coefficients which are not weak perturbation of a linear operator and given in a hole  $n$ -dimensional Euclidian space.

**Key words:** nonlinear differential operator – separability – coercive inequality – matrix coefficient.

УДК 517.946

С.С.МИРЗОЕВ

**ВИДОИЗМЕНЁННЫЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЩИХ  
ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 4-ГО ПОРЯДКА**

*Таджикский национальный университет*

*Поступила в редакцию 19.11.2014 г.*

*В данной работе рассматриваются общие вырождающиеся уравнения 4-го порядка составного типа и исследуется однозначная разрешимость задачи типа задачи Коши с видоизменёнными начальными условиями.*

**Ключевые слова:** уравнение неклассического (составного) типа – формула Пуассона – функция Грина – видоизменённая задача Коши – функция Бесселя – уравнение типа Гельмгольца.

Во второй половине XX века с развитием техники и физики в бывшем Советском Союзе и за рубежом многие крупные математики начали исследовать так называемые вырождающиеся уравнения. Ярким примером являются исследования М.В.Келдыша, С.Л.Соболева, О.А.Олейника, В.И.Кондрашова, М.И.Вишика, Л.Д.Кудрявцева и др. Ныне теория вырождающихся уравнений с частными производными классического типа (эллиптического и гиперболического) хорошо разработана (см. например, работы Смирнова М.М., Усманова З.Д., Михайлова Л.Г., Раджабова Н.Р., Бойматова К.Х. и др.). Однако вырождающиеся неклассические уравнения очень мало исследованы. В этой связи исследование вырождающихся неклассических уравнений является актуальным.

Модельным неклассическим уравнениям (см. [1,2] и представленную там литературу) посвящено много работ как отечественных, так и зарубежных авторов. Данная работа посвящена исследованию вырождающихся неклассических уравнений 4-го порядка обобщающих уравнений, рассмотренных в работе [3].

В работе [3] исследованы различные вырождающиеся уравнения 4-го порядка, состоящие из композиции двух операторов, один из которых вырождающийся эллиптический или гиперболический, а другой – модельный оператор второго порядка.

---

*Адрес для корреспонденции:* Мирзоев Собирчон Содикович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: Sobirjonm@mail.ru.

В отличие от уравнений, рассмотренных в работе [3] в данной работе рассматриваются уравнения 4-го порядка, состоящие из композиции двух вырождающихся операторов второго порядка и для них исследуется однозначная разрешимость задачи Коши с видоизмененными начальными условиями.

1°. Рассмотрим более общее вырождающееся уравнение 4-го порядка составного типа

$$\left( y^p \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{p}{2} y^{p-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( y^q \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{q}{2} y^{q-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) u = 0, \quad (1)$$

где  $0 < p, q < 1$  – вещественные числа.

В полупространстве  $R_+^{n+1} = \{(x, y) : x \in R^n, y > 0\}$  будем рассматривать задачу Коши с видоизмененными начальными данными.

**Задача I.** Найти в полупространстве  $R_+^{n+1}$  решение  $u(x, y)$  уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= \alpha_0(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0} y^{\frac{p}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_1(x), \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left( y^q \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{q}{2} y^{q-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \alpha_2(x), \\ \lim_{y \rightarrow 0} y^{\frac{p}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^q \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{q}{2} y^{q-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \alpha_3(x), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)$  – заданные достаточно гладкие и ограниченные в  $R^n$  функции.

Уравнение (1) преобразуем в систему уравнений [4]

$$y^q \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{q}{2} y^{q-1} \frac{\partial u}{\partial y} = V(x, y),$$

$$y^p \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + \frac{p}{2} y^{p-1} \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Тогда задача (1)-(2) распадается на задачу типа задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения

$$y^q \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{q}{2} y^{q-1} \frac{\partial u}{\partial y} = V(x, y) \quad (3)$$

с граничным условием

$$u|_{y=0} = \alpha_0(x) \quad (4)$$

и на задачу типа задачи Коши с видоизмененными начальным условиями для вырождающегося гиперболического уравнения

$$y^p \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + \frac{p}{2} y^{p-1} \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

с начальными условиями

$$V|_{y=0} = \alpha_4(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0} y^{\frac{p}{2}} \frac{\partial V}{\partial y} = \alpha_5(x), \quad (6)$$

где

$$\alpha_4 = \alpha_2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial x_i^2},$$

$$\alpha_5 = \alpha_3 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_i^2}.$$

Далее с помощью подстановок

$$t_1 = (1 + a_1) y^{\frac{1}{1+a_1}} \quad \text{и} \quad t_2 = (1 + a_2) y^{\frac{1}{1+a_2}},$$

где

$$a_1 = \frac{q}{2-q}, \quad a_2 = \frac{p}{2-p},$$

уравнения (3) и (5) преобразуются соответственно в уравнение Пуассона и волновое уравнение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = V(x, t_1), \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial t_2^2} = 0, \quad (8)$$

а условия (4) и (6) – к условиям

$$u|_{t_1=0} = \alpha_0(x), \quad (9)$$

$$V|_{t_2=0} = \alpha_4(x), \quad V_{t_2}|_{t_2=0} = \alpha_5(x). \quad (10)$$

Следовательно, для волнового уравнения (8) имеем задачу Коши с начальными данными (10), а для уравнения Пуассона (7) – задачу Дирихле с граничными условиями (9).

Функция  $V(x, y)$  определяется как решение задачи (8),(10) в виде (см. [5], стр.57)

$$V(x, y) = \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \int_0^y (y^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r T_r(\alpha_4) dr + \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}} \int_0^y (y^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} T_r(\alpha_5) dr, \quad (11)$$

где  $T_r(f)$  – обозначает среднее значение функции  $f$  на сфере радиуса  $r$  с центром в точке  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ :

$$T_r[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2 = r^2} f(x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n) d\xi,$$

$\sigma_n$  - площадь единичной сферы в  $R^n$ .

Теперь представим решение задачи (7),(9) по известной формуле (см. [6], стр.269)

$$u(x, y) = \frac{2t_1}{\omega_n} \int_{R^n} \frac{\alpha_0(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1, d\xi_2, \dots, d\xi_n}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2 + t_1^2 \right]^{n/2}} + \int_{R_+^{n+1}} G(M, M_0) V(M) dM, \quad (12)$$

где  $\omega_n$  – площадь поверхность единичной сферы в  $n$ -мерном пространстве,  $G(M, M_0)$  – функция Грин,  $M = (x, y), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Имеет место следующий результат.

**Теорема 1.** Если  $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)$  достаточно гладкие в  $R^n$  функции, то задача I однозначно разрешима и ее решение представимо через решение задачи (5)-(6) в виде (12).

2°. Теперь рассмотрим неклассическое уравнение (1) с младшими членами

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y^p \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{p}{y} \frac{\partial}{\partial y} + \lambda y^p \right) \left( y^q \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{q}{2} y^{q-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) v = 0, \quad (13)$$

где  $p, q, \lambda$  – вещественные числа, такие, что  $\lambda < 0, 0 < p, q < 1$ .

**Задача II.** Найти в полупространстве  $R_+^{n+1}$  решение  $v(x, y)$  уравнения (13), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}
v|_{y=0} &= \beta_0(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0} y^{\frac{p}{2}} \frac{\partial v}{\partial y} = \beta_1(x), \\
\lim_{y \rightarrow 0} \left( y^q \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{q}{2} y^{q-1} \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \beta_2(x), \\
\lim_{y \rightarrow 0} y^{\frac{p}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^q \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{q}{2} y^{q-1} \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \beta_3(x),
\end{aligned} \tag{14}$$

где  $\beta_0(x), \beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x)$  - заданные достаточно гладкие и ограниченные в  $R^n$  функции

Подобно, как в предыдущей задаче, уравнение (13) преобразуем к системе уравнений

$$\begin{aligned}
y^q \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{q}{2} y^{q-1} \frac{\partial v}{\partial y} &= G(x, y), \\
\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + y^p \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} + \frac{p}{y} \frac{\partial G}{\partial y} + y^p \lambda G &= 0.
\end{aligned}$$

Тогда задача (13)-(14) сводится к задаче нахождения решение уравнения

$$y^q \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{q}{2} y^{q-1} \frac{\partial v}{\partial y} = G(x, y) \tag{15}$$

с начальными условиями

$$v|_{y=0} = \beta_0(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0} y^{\frac{p}{2}} \frac{\partial v}{\partial y} = \beta_1(x) \tag{16}$$

и задаче нахождения решение уравнения

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + y^p \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} + \frac{p}{2} \frac{\partial G}{\partial y} + \lambda y^p G = 0 \tag{17}$$

с граничными условиями

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ y^{\frac{p}{2}} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{1-p}{2} G \right] = \beta_4(x), \tag{18}$$

где

$$\beta_4 = \beta_3 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x_i^2} - \frac{1-p}{2} \left( \beta_2 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial x_i^2} \right).$$

С помощью подстановок

$$t_1 = (1 + b_1)y^{\frac{1}{1+b_1}} \quad \text{и} \quad t_2 = (1 - b_2)y^{\frac{1}{1-b_2}},$$

где

$$b_1 = \frac{q}{2 - q}, \quad b_2 = \frac{p}{2 + p},$$

уравнения (15) и (17) преобразуются соответственно в неоднородное волновое уравнение и эллиптическое уравнение типа Гельмгольца

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} = G(x, t_1), \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial t_2^2} + \frac{b_2}{t_2} \frac{\partial G}{\partial t_2} + \lambda G = 0, \quad (20)$$

а условия (16) и (18) – к условиям

$$v|_{t_1=0} = \beta_0(x), \quad v_{t_1}|_{t_1=0} = \beta_1(x), \quad (21)$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{t_2}{1 - b_2} \right)^{2b_2} G_{t_2} - \frac{1 - p}{2} G \right] = \beta_4(x). \quad (22)$$

Следовательно, для уравнения типа Гельмгольца (17) имеем смешанную задачу (18), а для неоднородного волнового уравнения (19) задачу Коши (21).

Решение уравнения (20) представляется в виде (см. [7], стр. 113)

$$G(x, t_2) = G_0(x, t_2) - \frac{\lambda^2 t_2^2}{2} \int_0^1 \tau^{b_2} \omega_1 \left( t_2 \sqrt{\lambda(1 - \tau^2)} \right) G_0(x, t_2 \tau) d\tau \equiv N_{b_2}^\lambda(G_0), \quad (23)$$

где  $G_0(x, t_2)$  – решение уравнения (20) при  $\lambda = 0$ ,  $\omega_1(X) = X^{-1} J_1(X)$ ,  $J_1(X)$  – функция Бесселя,  $X = t_2 \sqrt{\lambda(1 - \tau^2)}$ .

Единственность решения смешанной задачи доказывается аналогично как в работе [5].

Теперь удовлетворяя начальным условиям (22), из равенства (23) получим:

$$\lim_{t_2 \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{t_2}{1 - b_2} \right)^{2b_2} G_{t_2} - \frac{1 - p}{2} G \right] = \frac{p - 1}{2} G_0(x) = \beta_4(x),$$

$$G_0(x) = \frac{2}{p - 1} \beta_4(x).$$



Следовательно, получим решение задачи (20),(22) в виде

$$G(x, t_2) = \frac{2}{p-1} \left[ \beta_4(x) - \frac{\lambda^2 t_2^2}{2} \int_0^1 \tau^{b_2} \omega_1 \left( t_2 \sqrt{\lambda(1-\tau^2)} \right) \beta_4(x) d\tau \right] \equiv$$

$$\equiv \frac{2}{p-1} N_{b_2}^\lambda(\beta_4). \quad (24)$$

По известной правой части, теперь можно найти решение уравнения (19), удовлетворяющее условиям (21) в виде (см. формулу (11))

$$v(x, y) = \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \int_0^y (y^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r T_r(\beta_0) dr +$$

$$+ \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}} \int_0^y (y^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} T_r(\beta_1) dr + \quad (25)$$

$$+ \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}} \int_0^y d\zeta \int_0^\zeta (\zeta^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r T_r[G(x, y - \zeta)] dr,$$

Имеет место следующий результат.

**Теорема 2.** Если  $\beta_0(x), \beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x)$  достаточно гладкие в  $R^n$  функции, то задача II, при  $\lambda < 0$  имеет единственное решение и ее решение представимо через решение задачи (17)-(18) в виде (25).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1987, 415 с.
2. Сафаров Д.Х. Неклассические системы уравнений. – Душанбе: Дониш, 2008, 431 с.
3. Мирзоев С.С., Файзиев М.Г. Постановка классических для неклассических уравнений 4-го порядка. – ДАН РТ, 2014, т. 57, №4, с. 272-279
4. Раджабов Н.Р., Мухамед Аль-Саид. К теории линейной переопределенной системы трех уравнений, содержащей гиперболическое уравнение второго порядка с двумя вырождающимися линиями. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат.,хим.,геол. и техн.н., 2010, №1(138), с.7-18
5. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. Линейные уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964, 367 с.
6. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1965.
7. Раджабов Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. – Душанбе: Изд-во ТГНУ им. В.И.Ленина, 1980, ч. 1-3, 170 с.

С.С.МИРЗОЕВ

**МАСЪАЛАИ ДИГАРГУНКАРДАШУДАИ КОШИ БАРОИ МУОДИ-  
ЛАҲОИ УМУМИИ ҒАЙРИКЛАССИКӢИ ТАРТИБИ ЧОРУМИ МАСХ-  
ШАВАНДА (ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ)**

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола муодилаҳои умумии тартиби чоруми типии таркибӣ дида барома-  
да шуда, яққимата ҳалшавандагии масъалаи намуди масъалаи Коши бо шартҳои ди-  
гаргункардашуда мавриди тадқиқ қарор меёбанд.

**Калимаҳои калидӣ:** муодилаи намуди ғайрикласикӣ (таркибӣ) – формулаи Пуассон –  
функсияи Грин – масъалаи дигаргункардашудаи Коши – функсияи Бессел – муодилаи намуди  
Гелмголс.

S.S.MIRZOEV

**THE CAUCHY'S MODIFIED PROBLEMS FOR THE GENERAL  
DEGENERATING NONCLASSICAL EQUATIONS OF THE 4TH ORDER**

*Tajik National University*

In this work the general degenerating equation of the 4th order of compound type are  
considered and unambiguous resolvability of a task like Cauchy's task with modified entry con-  
ditions is investigated.

**Key words:** the equations of nonclassical (composite) type – Poisson's formula – Green's function –  
Cauchy's modified problem – Bessel function – Helmholtz type equation.

**ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОПОТЕРЬ И ДИФФУЗИИ КОМПОНЕНТОВ ГАЗОВОЙ  
СМЕСИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ГОРЕНИЯ В ИНЕРТНОЙ  
ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

*Российско-Таджикский (Славянский) университет,*

*\*Таджикский национальный университет*

*Поступила в редакцию 25.06.2014 г.*

*В работе для скорости распространения волны горения газа в инертной пористой среде получено соотношение, содержащее коэффициенты теплопотерь и диффузии компонентов газовой смеси. На основе этого соотношения исследовано влияние коэффициента теплопотерь на скорость волны горения. При этом предполагается симметричность профилей температуры пористой среды и концентрации компонентов газовой смеси.*

**Ключевые слова:** волна горения – скорость вдува – теплоотдача стенки – радиус трубки – теплопотери – коэффициент диффузии – смесь газов.

Исследования горения горючих газов, таких как водород, метан и пропан, способствовали развитию промышленных горелочных устройств и технологических процессов. Водород считается одним из наиболее перспективных видов топлива как эффективный, так и экологически чистый энергоноситель. Метан и пропан являются часто используемыми горючими газами в горелочных устройствах. В данной работе рассматривается горение водородо- и метановоздушных смесей в инертной пористой среде и в неадиабатическом режиме, то есть в не теплоизоляционной системе. Обычно все системы не теплоизолированы за исключением специальных случаев, поэтому необходимо учитывать теплопотери в рассматриваемых уравнениях баланса тепла. При фильтрационном горении газа (ФГГ) теплопотери из очага горения во внешнее пространство происходят в два эта-

---

*Адрес для корреспонденции: Кабилов Маруф Махмудович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М.Турсун-заде, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: maruf1960@mail.ru ; Гулбоев Бахтиёр Джуракулович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: bakhtiyor-2012@mail.ru*

па. На первом этапе происходит межфазный теплообмен, то есть выделившиеся тепло в газе переходит в пористую среду. На втором этапе тепло передаётся вперёд в холодные слои пористой средой, поскольку её коэффициент теплопроводности на несколько порядков больше, чем коэффициент теплопроводности смеси газов. Далее происходит теплообмен с окружающей средой. Влияние теплопотерь на распространение стационарной волны горения изучено во многих работах [1-10]. Однако в научной литературе по горению газов отсутствуют соотношения, содержащие коэффициенты теплопотерь и диффузии компонентов смеси газов вместе, позволяющие изучать их влияние на распространение волны горения. Отметим общепризнанность эффектов числа Льюиса, представляющего собой отношение коэффициента диффузии компонента газовой смеси к коэффициенту температуропроводности смеси, которые могут менять характеристики горения газов [7]. В [10] получено соотношение, характеризующее взаимозависимость параметров волны горения, которое содержит коэффициенты диффузии компонентов смеси газов в виде чисел Льюиса. В настоящей работе приводится аналогичное соотношение, дополнительно содержащее коэффициент теплопотерь в окружающее пространство. Анализируется влияние этого коэффициента на скорость волны горения при симметричности профилей температуры пористой среды и концентрации компонентов газовой смеси.

Однотемпературная математическая модель стационарного распространения волны ФГГ состоит из системы уравнений баланса тепла в пористой среде и массы компонентов газовой смеси, записанные в системе координат движущиеся с постоянной скоростью  $U$  [10]

$$\begin{aligned} (\rho_{10}c_p(\nu_{10}-U)-\rho_2c_2U)\frac{d(T-T_0)}{dx} &= (\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2)\frac{d^2(T-T_0)}{dx^2}+QJ+\alpha_0(T_0-T), \\ \rho_{10}(\nu_{10}-U)\frac{d\eta_{1(i)}}{dx} &= \rho_1D_{1(i)}\frac{d^2\eta_{1(i)}}{dx^2}+J_{1(i)}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$J_{1(i)} = \rho_1\zeta_{1(i)}\eta_{1(k_*)}k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right),$$

$$\rho_1T_1 = \rho_{10}T_0, \quad \zeta_{1(i)} = -\frac{g_{1(i)}(v''_{1(i)}-v'_{1(i)})}{g_{1(k_*)}(v''_{1(k_*)}-v'_{1(k_*)})}, \quad (i=1,2,3,\dots,k).$$

Здесь  $T$  – температура пористой среды;  $T_0$  – температура пористой среды в холодных границах;  $\eta_{1(i)}$  – массовая концентрация компонентов газовой смеси;  $\eta_{1(k_*)}$  – концентрация недостающего компонента газовой смеси;  $\nu_{10}$  – скорость потока газа в порах;  $\rho_{10}, c_p$  – приведённая плотность и теплоёмкость смеси газов соответственно;  $\rho_2, c_2$  – те же величины для пористой среды;  $\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности газа и пори-

стой среды;  $\alpha_1, \alpha_2$  - объёмные содержания газа и пористой среды;  $Q$  - тепловой эффект реакции;  $J_{1(i)}$  - интенсивность массаобразования  $i$ -го компонента смеси;  $E$  - энергия активации;  $R$  - универсальная газовая постоянная;  $k_0$  - предэкспонент;  $\nu'_{1(i)}, \nu''_{1(i)}$  - стехиометрические коэффициенты исходных и конечных веществ соответственно;  $g_{1(i)}$  - молекулярные веса компонентов газовой смеси;  $D_{1(i)}$  - коэффициент диффузии  $i$ -го компонента смеси;  $\alpha_0$  - коэффициент теплопотерь в окружающее пространство.

Граничными условиями задачи являются условия на бесконечности

$$x = -\infty: T = T_0, \quad \eta = \eta_0, \quad x = \infty: \frac{dT}{dx} = 0, \quad \frac{d\eta}{dx} = 0.$$

В предполагаемом в теории горения отсутствии химической реакции (в зонах подгрева и охлаждения) система (1) допускает следующие решения

$$T = \begin{cases} T_0 + (T_e - T_0)e^{k_2 x}, & x < 0 \\ T_0 + (T_e - T_0)e^{k_1 x}, & x > 0 \end{cases},$$

$$\eta_{1(i)} = \begin{cases} \eta_{1(i)0} + (\eta_{1(i)e} - \eta_{1(i)0})e^{a_2(i)x}, & x < 0 \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

где

$$k_1 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_3}}{2}, \quad k_2 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_3}}{2},$$

$$a_1 = \frac{\rho_{10}c_p(\nu_{10} - U) - \rho_2c_2U}{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2}, \quad a_3 = \frac{\alpha_0}{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2}, \quad a_{2(i)} = \frac{\rho_{10}(\nu_{10} - U)}{\rho_{1e}D_{1(i)e}}.$$

Из первого уравнения системы (1) следует, что интеграл от источника тепловыделения равен полному притоку тепла в систему. При этом если использовать предположение, согласно которому вся тепловая энергия выделяется в узкой температурной и пространственной зоне, что подразумевает следующие приближения

$$T - T_0 = (T_e - T_0)e^{kx} \approx (T_e - T_0)(1 + kx) \quad \text{для } x \ll 1,$$

$$\exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \approx \exp\left(-\frac{1}{\beta}\right) \cdot \exp\left(\frac{E(T - T_e)}{RT_e^2}\right) \quad \text{где } \beta = \frac{RT_e}{E},$$

и приумножать на источник тепловыделения  $\rho_1 Q J$ , сумму концентрации компонентов,

которая тождественно равна единице  $\left( \sum_{i=1}^k \eta_{1(i)} \equiv 1 \right)$ , то имеем

$$\begin{aligned}
 (\nu_{10} - U)^2 = & \frac{k_0 \exp\left(-\frac{1}{\beta}\right) \lambda_1 \gamma \Lambda \sqrt{1 + \frac{4\Delta}{\left(1 - \frac{u_0}{1+\varphi}\right)^2}}}{\rho_{10}^0 c_p u_\varphi a_4 \eta_{1(k_*)}} \cdot \frac{T_0}{T_e} \cdot \\
 & \cdot \left[ \eta_{1(k_*)0} + \frac{\eta_{1(k_*)e} - \eta_{1(k_*)0}}{\frac{\gamma}{Le_{eff(2)} u_\varphi a_4} + 1} + \eta_{1(k_*)0} \sum_{i=1}^k \frac{\eta_{1(i)e} - \eta_{1(i)0}}{\frac{\gamma}{Le_{eff(i)} u_\varphi a_4} + 1} + \right. \\
 & \left. + \left( \eta_{1(k_*)e} - \eta_{1(k_*)0} \right) \sum_{i=1}^k \frac{\eta_{1(i)e} - \eta_{1(i)0}}{\frac{\gamma}{Le_{eff(2)} u_\varphi a_4} + \frac{\gamma}{Le_{eff(i)} u_\varphi a_4} + 1} \right] - \frac{\alpha_0 (\nu_{10} - U) (k_1 - k_2)}{c_p u_\varphi \rho_{10} k_1 k_2}.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\gamma = \frac{RT_e^2}{E(T_e - T_0)}, \quad \Lambda = 1 + \frac{\alpha_1 \lambda_1}{\alpha_2 \lambda_2}, \quad \Delta = \frac{\alpha_0 (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2)}{U^2 (\rho_{10} c_p + \rho_2 c_2)^2}, \quad u_0 = \frac{\nu_{10}}{U},$$

$$T_e - T_0 = \frac{Q \eta_{1(k_*)}}{c_p u_\varphi \sqrt{1 + \frac{4\Delta}{\left(1 - \frac{u_0}{1+\varphi}\right)^2}}}, \quad u_\varphi = 1 - \frac{\varphi}{u_0 - 1}, \quad \varphi = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_{10} c_p},$$

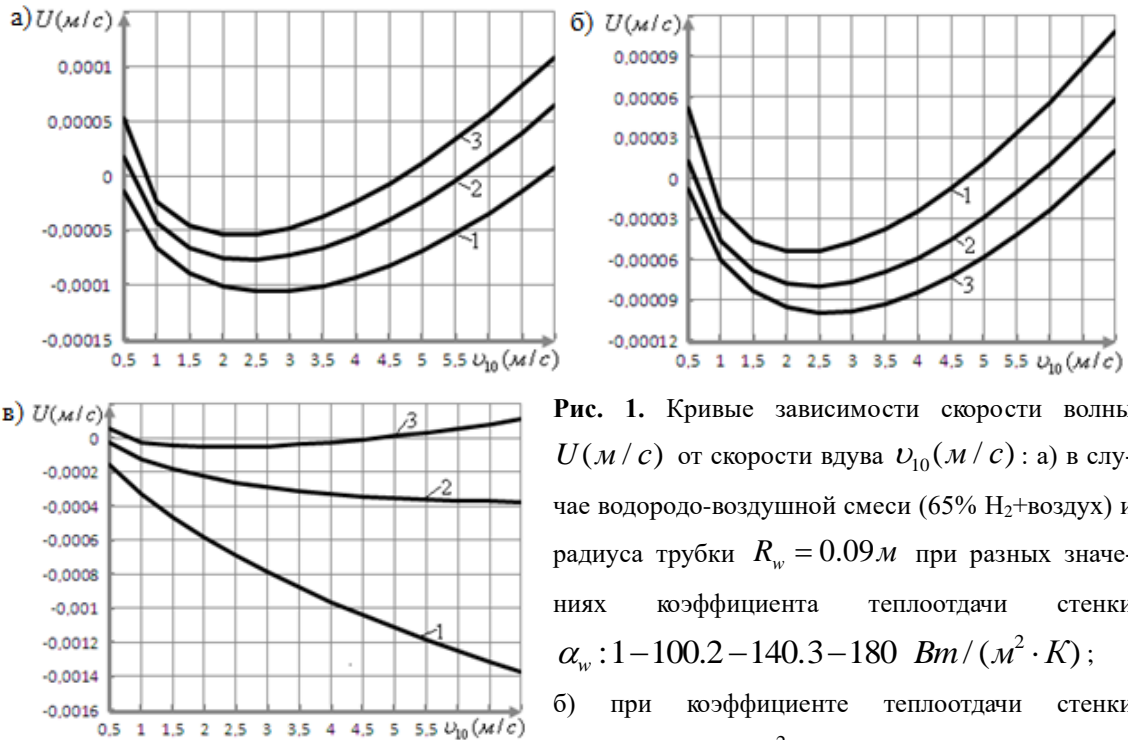
$$a_4 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha_0 (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2)}{\rho_{10} c_p (\nu_{10} - U) - \rho_2 c_2 U}} \right], \quad Le_{eff(i)} = \frac{Le_{(i)}}{\Lambda},$$

$$Le_{(i)} = \frac{D_{1(i)} \rho_{10}^0 c_p}{\lambda_1}.$$

В случае симметричности профилей температуры и концентрации компонентов, что имеет место при условии  $Le_{eff(i)} u_\varphi = 1$ , из этого соотношения получаем

$$\begin{aligned}
 (v_{10} - U)^2 = & \frac{k_0 \exp(-1/\beta) \lambda_1 \gamma \Lambda \sqrt{1 + 4\Delta / (1 - u_0 / (1 + \varphi))^2}}{\rho_{10}^0 c_p u_\varphi a_4} \cdot \frac{T_0}{T_e} \cdot \\
 & \cdot \left( 1 - \frac{a_4}{\gamma + a_4} \right) - \frac{\alpha_0 (v_{10} - U) (k_1 - k_2)}{c_p u_\varphi \rho_{10} k_1 k_2}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Соотношение (2) позволяет определить зависимость скорости волны ФГТ от основных параметров, включая коэффициент теплообмена с внешней средой  $\alpha_0$ . На основе этого соотношения (2) нами проведены расчёты скорости волны в зависимости от скорости вдува при различных значениях коэффициента теплоотдачи стенки  $\alpha_w$ , радиуса трубки  $R_w$  и исходной концентрации горючего газа  $\eta_0$  в разных смесях. Расчёты проводились программой «Подбор параметра» для водородо- и метановоздушных смесей, результаты которых приводятся ниже.



**Рис. 1.** Кривые зависимости скорости волны  $U$  (м/с) от скорости вдува  $v_{10}$  (м/с): а) в случае водородо-воздушной смеси (65%  $H_2$ +воздух) и радиуса трубки  $R_w = 0.09$  м при разных значениях коэффициента теплоотдачи стенки  $\alpha_w$ : 1–100.2–140.3–180  $Вт/(м^2 \cdot К)$ ; б) при коэффициенте теплоотдачи стенки  $\alpha_w = 180$   $Вт/(м^2 \cdot К)$  в водородовоздушной смеси (65%  $H_2$ + воздух) и разных значениях радиуса трубки  $R_w$ : 1–0.09; 2–0.12; 3–0.15 м, в) в случае коэффициента теплоотдачи стенки  $\alpha_w = 180$   $Вт/(м^2 \cdot К)$  и радиуса трубки  $R_w = 0.09$  м при разных концентрациях водорода в смеси: 1–33; 2–55; 3–65%  $H_2$ .

На рис. 1.а) приведены кривые зависимости скорости волны горения от скорости вдува в случае 65% водорода в смеси при разных значениях коэффициента теплоотдачи

стенки  $\alpha_w$  (100, 140, 180  $Bm / (m^2 \cdot K)$ ) и фиксированном значении радиуса трубки  $R_w = 0.09 \text{ м}$  ( $\alpha_0 = 2\alpha_w / R_w$ ). На рисунке видно, что при увеличении коэффициента теплоотдачи стенки  $-\alpha_w$ , кривые зависимости скорости волны от скорости вдува перемещаются вверх в указанных пределах изменения скорости вдува. Тенденция изменения кривых показывают смену направления распространения волны горения от встречного к спутному. Также заметим, что наблюдается максимальное значение скорости волны навстречу потока  $U$  ( $-1.1 \cdot 10^{-4}$ ,  $-0.77 \cdot 10^{-4}$ ,  $-0.54 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$ ) при каждом значении коэффициента теплоотдачи стенки  $\alpha_w$  (100, 140, 180  $Bm / (m^2 \cdot K)$ ). Этим значениям скорости волны соответствуют скорости вдува 3, 2.5, 2  $\text{м/с}$ , то есть максимум скорости волны по мере увеличения коэффициента теплоотдачи стенки смещается в сторону малых значений скорости вдува.

Кривые зависимости скорости волны от скорости вдува при разных значениях радиуса трубки  $R_w$ : 0.09, 0.12, 0.15  $\text{м}$  приведены на рис.1.б) (65%  $H_2$  + воздух,  $\alpha_w = 180 Bm / (m^2 \cdot K)$ ). Из этого рисунка видно, что увеличения радиуса трубки  $R_w$  приводит к увеличению скорости волны и сдвигу максимума в сторону больших значений скорости вдува. Максимальные значения скорости волны  $U$  ( $-0.54 \cdot 10^{-4}$ ,  $-0.8 \cdot 10^{-4}$ ,  $-0.99 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$ ) соответствуют следующим значениям скорости вдува 2, 2.5, 2.6  $\text{м/с}$ .

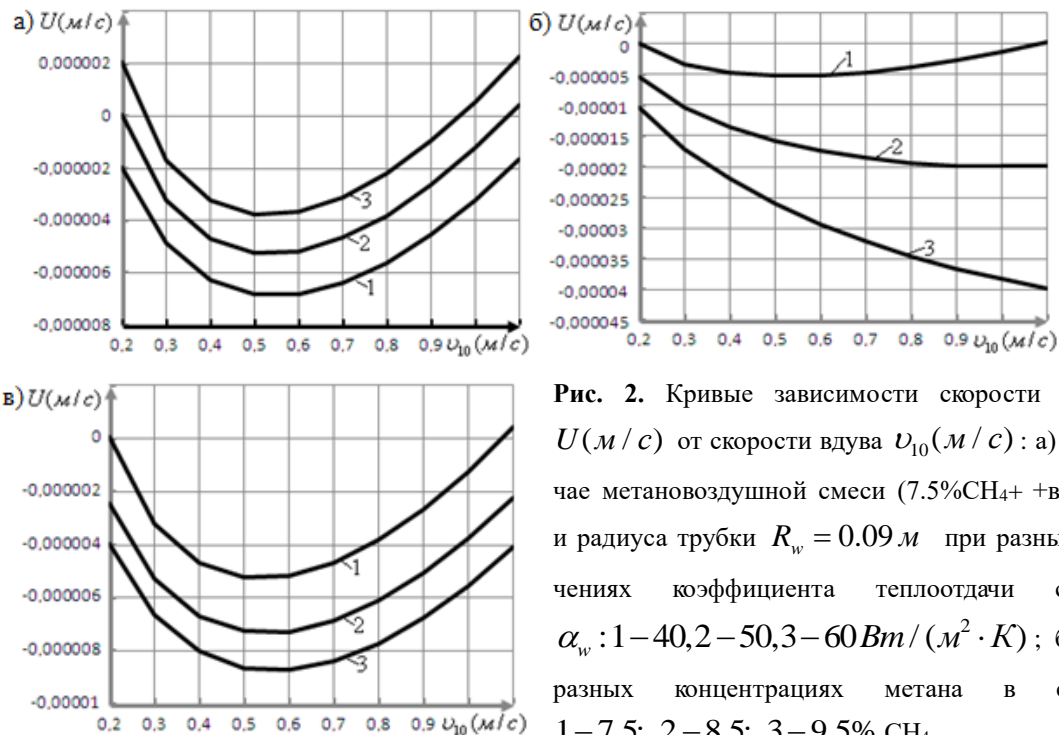
Также было установлено, что при уменьшении доли водорода в смеси скорость волны увеличивается, двигаясь навстречу потока. Для наглядного представления этой зависимости на рис. 1.в) приведены зависимости скорости волны от скорости вдува при разных концентрациях водорода в смеси ( $\alpha_w = 180 Bm / (m^2 \cdot K)$ ,  $R_w = 0.09 \text{ м}$ ).

В работе [4] были получены расчётные кривые зависимости скорости волны горения от скорости вдува при разных коэффициентах теплообмена с окружающей средой. В сравнении с ними наши расчётные кривые, приведённые на рис. 1.а), б) имеют подобную тенденцию изменения.

Для метановоздушной смеси также были получены и анализированы кривые зависимости скорости волны от скорости вдува. Например, на рис. 2.а) эти кривые приводятся для случая 7.5% метана в воздухе и разных значениях коэффициента теплоотдачи стенки  $\alpha_w$  ( $40, 50, 60 \frac{Bm}{m^2 \cdot K}$ ). Из этого рисунка видно, что увеличение коэффициента теплоотдачи стенки приводит к уменьшению скорости волны горения. В этом случае скорость волны изменяется от  $-0.68 \cdot 10^{-5}$  до  $2.27 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$  при варьировании скорости вдува в пределах  $0.2 \div 1.1 \text{ м/с}$ . Также наблюдаются максимальные значения скорости



волны  $-0.68 \cdot 10^{-5}$ ,  $0.52 \cdot 10^{-5}$ ,  $0.38 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$  при соответствующих значениях коэффициента теплоотдачи стенки  $\alpha_w$  (40, 50, 60  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ).



**Рис. 2.** Кривые зависимости скорости волны  $U(\text{м/с})$  от скорости вдува  $u_{10}(\text{м/с})$ : а) в случае метановоздушной смеси (7.5%  $\text{CH}_4 + \text{воздух}$ ) и радиуса трубки  $R_w = 0.09 \text{ м}$  при разных значениях коэффициента теплоотдачи стенки  $\alpha_w$ : 1–40, 2–50, 3–60  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ; б) при разных концентрациях метана в смеси: 1–7.5; 2–8.5; 3–9.5%  $\text{CH}_4$  и

$\alpha_w = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ,  $R_w = 0.09 \text{ м}$ ; в) при коэффициенте теплоотдачи стенки  $\alpha_w = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  в метановоздушной смеси (7.5%  $\text{CH}_4 + \text{воздух}$ ) и разных значениях радиуса трубки:  $R_w$ : 1–0.09; 2–0.12; 3–0.15 м.

Влияние концентрации метана (7.5, 8.5, 9.5%) в смеси на скорость волны при варьировании скорости вдува для случая  $\alpha_w = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ,  $R_w = 0.09 \text{ м}$  показано на рис.2.б). Из рисунка видно, что увеличение концентрации метана в воздухе приводит к увеличению скорости волны навстречу потоку. Скорость волны изменяется в промежутке от  $-0.4 \cdot 10^{-4}$  до  $0.38 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$ .

Для случая 7.5% метана в воздухе и коэффициенте теплоотдачи стенки  $\alpha_w = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  и разных значениях радиуса трубки  $R_w$  (0.09, 0.12, 0.15 м) на рис. 2.в) приводятся кривые зависимости скорости волны от скорости вдува. В этом случае так же, как и в водородо-воздушной смеси, при увеличении радиуса трубки скорость волны увеличивается навстречу потока и изменяется в промежутке от  $-0.87 \cdot 10^{-5}$  до  $0.417 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$ . Максимальные значения скорости волны  $U \left( -0.52 \cdot 10^{-5}, -0.72 \cdot 10^{-5}, -0.87 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$ , соответствующие радиусам трубки 0.09, 0.12, 0.15 м, реализуются при скорости вдува  $0.6 \text{ м/с}$ .

Отметим, что полученные кривые зависимости, приведённые на рис. 2.а) и рис.2.б), имеют аналогичную тенденцию изменения скорости волны, как в работе [8].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я.Б. – ЖЭТФ, 1941, т.11, №1, с. 11-18.
2. Сполдинг Д.Б. Основы теории горения. – Госэнергоиздат, 1959, 320 с.
3. Махвиладзе Г.М., Новожилов Б.В. – ПМТФ, 1971, №5, с. 51-59.
4. Потытняков С.И., Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. Влияние теплопотерь на распространение стационарных волн при фильтрационном горении газов – Физика горения и взрыва, 1984, т.20, №1, с. 19-26.
5. Потытняков С.И., Бабкин В.С. Лаевский Ю.М., Дробышев В.И. Исследование тепловой структуры волны фильтрационного горения газов – Физика горения и взрыва, 1985, т.21, №2, с. 19-25.
6. Доброго К.В., Жданок С.А. Физика фильтрационного горения газов. – Минск: Ин-т тепло- и массообмена им. А.В.Лыкова НАНБ, 2002, 203 с.
7. Коржавин А.А., Бунев В.А., Бабкин В.С., Клименко А.С. Эффекты селективной диффузии при распространении и гашении пламени в пористой среде – Физика горения и взрыва, 2005, т.41, №4, с. 50-59.
8. Какуткина Н.А., Коржавин А.А., Намятов И.Г., Рычков Д.А. Закономерности распространения пламени через насадку коммуникационных огнепреградителей – Физика горения и взрыва, 2007, т.43, №4, с. 23-37.
9. Кабилов М.М. О неустойчивости фронта фильтрационного горения газов в неадиабатическом режиме – Физика горения и взрыва, 2012, т.48, №2, с. 15-23.
10. Кабилов М.М., Гулбоев Б.Дж. Фильтрационное горение газов при симметричности профилей температуры пористой среды и концентрации компонентов газовой смеси – ДАН РТ, т.56, №1, 2013, с. 35-43.

М.М.ҚОБИЛОВ, Б.Ҷ.ГУЛБОЕВ\*

### ТАЪСИРИ ГАРМИДИҲӢ ВА ДИФФУЗИЯИ КОМПОНЕНТҲОИ ОМЕХТАИ ГАЗҲО БА ПАҲНШАВИИ МАВҶИ СӢЗИШ ДАР МУҲИТИ КОВОКИ ИНЕРТӢ

*Донишгоҳи (Славянии) Россияю Тоҷикистон,*

*\*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола барои суръати паҳншавии мавҷи сӯзиш дар муҳити ковоки инертӣ ифодае ҳосил карда шудааст, ки дар худ коэффисиентҳои гармидиҳӣ ва диффузияи компонентҳои омехтаи газҳоро дар бар мегирад. Дар асоси ин ифода, таъсири коэффисиенти гармидиҳӣ ба суръати паҳншавии мавҷи сӯзиш, ҳангоми симметрӣ будани профилҳои ҳарорати муҳити ковок ва консентратсияи компонентҳои омехтаи газ, таҳқиқ карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** мавҷи сӯзиш – суръати ҳаводиҳӣ – гармидиҳии девор – радиуси кубурча – гармигумкунӣ – коэффисиенти диффузия – омехтаи газҳо.

M.M.KABILOV, B.J.GULBOEV\*

INFLUENCE HEAT LOSSES AND DIFFUSIONS COMPONENT GAS MIXTURE ON  
SPREADING THE WAVE OF THE COMBUSTION IN INERT POROUS AMBIENCE

*Russian-Tajik (Slavonic) University,*

*\*Tajik National University*

In this paper, for the wave propagation velocity of combustion gas in an inert porous medium obtained by the ratio, the coefficients of diffusion and heat loss components of the gas mixture. On the basis of this correlation coefficient to study the effect of heat loss on the speed of the combustion wave. This assumes symmetry of temperature profiles of the porous medium and the concentration of gas mixture components.

**Key words:** the wave of the combustion – a velocity blow – heat return walls – a radius of the tube – heat losses – a factor to diffusions – a mixture gas.

УДК 681.511 (075.8)

С.А.НАРЗУЛЛОЕВ

**КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ  
ОТДЕЛЬНЫМИ ПОДРАЗДЕЛЕНИЯМИ ОРГАНОВ ВНУТРЕННИХ ДЕЛ  
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН**

*Академия Министерства внутренних дел Республики Таджикистан*

*Поступила в редакцию 10.12.2014 г.*

*Предложена концептуальная модель процесса управления, главным вопросом которой является необходимость принятия решения во всех ситуациях, даже при неопределенности или отсутствии информации о возможных последствиях предпринимаемых действий.*

**Ключевые слова:** управление – модель – критерий эффективности.

*Модель процесса управления включает следующие основные этапы:*

- *выявление проблемы и формулировка задачи в области управления на основе существующего опыта и имеющихся данных;*
- *принятие оптимального решения и его реализация;*
- *анализ результатов принятия решения с точки зрения возможных способов его модификации и добавление этих результатов к накопленному опыту, который может быть использован для принятия последующих решений.*

Данный процесс включает принятие решения, выполнение действий и обучение способам более эффективной деятельности в будущем на основе полученного опыта. При этом управление рассматривается как некоторый динамический процесс. Модель управления позволяет рассматривать её как механизм, посредством которого происходит обучение организованным действиям. В соответствии с этой моделью, управление деятельностью подразделениями органов внутренних дел на любом уровне служебной иерархии можно рассматривать как адаптивный механизм, посредством которого постоянно проис-

---

*Адрес для корреспонденции:* Нарзуллоев Саидахмад Абдусаидович. 734024, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Восе, 123, Академия МВД РТ. E-mail: n.said-65@mail.ru

ходит перенастраивание с целью отыскания наиболее эффективных способов взаимодействия и связей как внутри системы, так и с окружающей средой.

При поступлении сведений о совершении преступления и по данным оперативной сводки руководитель соответствующего подразделения на основе субъективного опыта и явных сведений формирует концепцию будущего решения, которая может быть неясной из-за недостаточности информации и характеризоваться высокой степенью неопределенности. В последующем неуверенность в правильности принимаемых решений приведет руководителя к поиску дополнительных альтернатив.

В данной работе предлагается формализованная схема принятия решения в отдельном подразделении органа внутренних дел, на основе оптимизации целевой функции (критерия эффективности управления). Процесс управления  $U$  можно описать некоторым алгоритмом, зависящим от цели управления ( $\Psi$ ) и наличия определенной информации ( $j$ ):  $U = A(\Psi, j)$

Обобщенная схема управления в отдельном подразделении органов внутренних дел Республики Таджикистан показана на рисунке, где прямой контур управления образуют блоки 1, 2, 3, 4 (сбор информации, выбор цели и критериев управления, принятие решения и реализация решения). Для более эффективного управления необходима организация ещё трёх обратных контуров: через блок 5 (контроль выполнения решений), через блоки 6, 7 (оценка эффективности решения и корректировка решения) и через блоки 6, 8 (оценка эффективности решения и учет опыта).

Первый блок – сбор информации осуществляется от всех источников, которые могут предоставить нужную для реализации цели управления информацию. На этом этапе производится предварительная обработка информации, которая заключается в её систематизации по определенным признакам (новизне, достоверности, полноте и др.), обобщении и предоставлении на одном носителе.

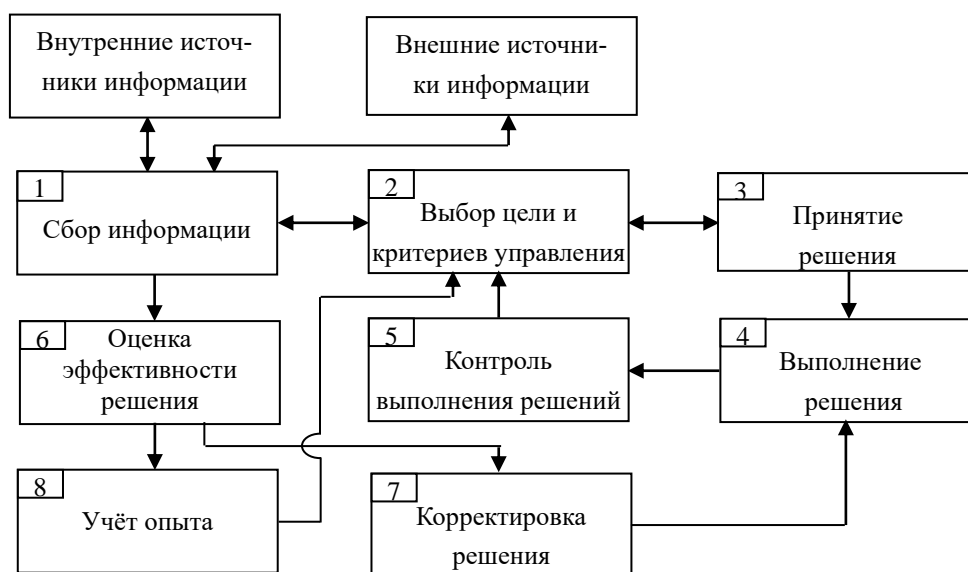


Рис. Концептуальная модель процесса управления в отдельном подразделении.

Второй блок – выбор цели и критериев эффективности управления. Любой процесс управления преследует определенную цель или несколько целей. Цели управления и критерии эффективности могут быть качественными или количественными. В первом случае отражается факт достижения или недостижения цели, во втором - отражается минимизация, максимизация или достижения некоторого показателя.

На основе целей управления выбирается критерий эффективности, который будет описываться выражением:

$$\Psi = F(X, Y, R, S, V, T),$$

где  $X = x_1, x_2, \dots, x_n$  – множество управляемых параметров, фактически, ими определяются стратегии (пути) управления;

$Y = y_1, y_2, \dots, y_m$  – множество неуправляемых параметров, они могут быть определенными, неопределенными, случайными и не зависят от воли лица, осуществляющего управление;

$R = r_1, r_2, \dots, r_k$  – динамические факторы управления;

$S = s_1, s_2, \dots, s_n$  – детерминированные факторы управления;

$V = v_1, v_2, \dots, v_v$  – неопределенные факторы управления;

$T$  – время.

Третий блок – принятие решения является ответственным этапом в процессе управления. Этот этап сочетает интеллектуальные возможности и технико-методические возможности представления информации лицу, принимающему решения.

Четвертый блок – выполнение решения. На этом этапе можно выделить следующие действия:

- доведение решения до исполнителей;
- выполнение решения исполнителями;
- процедура отчётности.

Пятый блок – контроль выполнения решений необходим для оценки функционирования средств доведения решения до исполнителей и соблюдения процедуры отчётности.

Шестой блок – оценка эффективности решения делается путём вычисления критериев эффективности управления. В случае неудовлетворенной оценки пересматриваются основные этапы управления.

Седьмой блок – корректировка решения осуществляется при неудовлетворительном первоначальном решении.

Восьмой блок – учёт опыта решения задач управления необходим для его использования в дальнейшей работе и обучения.

*Для более формального описания модели управления обозначим множество всех альтернативных вариантов решений, допускаемых руководителем через  $E$  :*

$$E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}, \quad (1)$$

причём каждым вариантом  $E_i$  однозначно определяется некоторый результат  $e_i, i=1,2,\dots,n$ .

Обычно эти результаты оцениваются количественно. Каждое решение может быть реализовано при различных условиях и наоборот, то есть каждое условие может быть применено для реализации различных вариантов решения. Результат реализации решения может зависеть также и от влияния параметров внешней среды и внутреннего механизма функционирования системы, которые могут наложить определённые ограничения на использование условия реализации. Обозначим через  $F$  множество всех таких условий:

$$F = \{ F_1, F_2, \dots, F_m \} \quad (2)$$

и через  $f_j$  обозначим следующие ограничения:

$$f_j = \{ F_j \mid W(F_j) \leq F_i^* \}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

где  $W(F_j)$  – некоторый функционал применяемого условия  $F_j$ ,  $F_i^*$  – ограничения, накладываемые на условие  $F_j$  при реализации варианта  $E_i$ . Они формируются на основе опыта руководителя и в результате изучения функционирования системы в реальной среде. Обозначим их через  $U = \{ u_1, u_2, \dots, u_k \}$  и через  $e_{ij}$  обозначим результат реализации  $i$ -го варианта решения (1) при  $j$ -ом условии (2), с учётом ограничения (3). Результат  $e_{ij}$  называется полезностью решения  $E_i$ . Семейство всех таких решений образует некоторую матрицу, называемую матрицей решений

$$\begin{matrix} f_1 & f_2 & \dots & f_m \\ E_1 & \left( \begin{matrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \end{matrix} \right) \\ E_2 & \left( \begin{matrix} e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \end{matrix} \right) \\ \vdots & \left( \begin{matrix} \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right) \\ E_n & \left( \begin{matrix} e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{matrix} \right) \end{matrix} \quad (4)$$

Выяснение системы ценностей производится на этапе анализа критериев путём построения оценочных функций. Формирование и анализ оценочных функций (критериев) осуществляется на основе матрицы решений (4).

Рассмотрим пример, иллюстрирующий это положение. Требуется дислоцировать силы и средства для проведения некоторого мероприятия. Имеются следующие варианты решений:

$E_1$  – дислокацию осуществить из соображения максимальной безопасности;

$E_2$  – выбрать некоторое промежуточное значение безопасности;

$E_3$  – дислокацию осуществить из соображения минимальной безопасности.

Для выражения количественных значений результатов решений, можно задать субъективную шкалу безопасности. Вообще говоря, шкалу можно определить произвольным образом, однако, обычно, в зависимости от формулировки задачи выбирается наиболее удобный для вычисления, обозрения и анализа способ определения шкалы. Условия реализации этих решений следующие:

$F_1$  – необходимо задействовать также и другие службы, не связанные с проведением этого мероприятия;

F<sub>2</sub> – обходиться одной службой, ответственной за проведение данного мероприятия, но при этом использовать все имеющиеся силы и средства этой службы;

F<sub>3</sub> – обходиться одной службой и использовать достаточное количество силы и средств для предотвращения неординарных ситуаций;

F<sub>4</sub> – выделить минимальное количество силы и средств и опираться на поддержку гражданских лиц.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Умаров М.А., Нарзуллоев С.А., Гафуров М.Х. Информационные технологии в деятельности правоохранительных органов Республики Таджикистан. Учебное пособие. – Душанбе. Академия МВД Республики Таджикистан, 2011, 152 с.
2. Алиулов Р.Р., Минасов С.Г. О некоторых аспектах применения управленческих норм в механизме социального управления (вопросы теории и методологии). – Тр. Академии управления МВД России. – М., 2006, с.42.
3. Яськов Е.Ф. Становление, формирование и проблемы дальнейшего развития науки управления органами внутренних дел. – М.: Академия МВД России, 1996, с. 35.

С.А.НАРЗУЛЛОЕВ

### ҚОЛИБИ КОНСЕПТУАЛИИ ЧАРАЁНИ ИДОРАКУНИИ БАХШҶОИ АЛОҶИДАИ МАҚМОТИ КОРҶОИ ДОХИЛИИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН

*Академияи Вазорати корҳои дохилии Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мақолаи мазкур қолиби концептуалии чараёни идоракунӣ пешниҳод мегардад, ки масъалаи асосии он қабули қарор дар дилхоҳ ҳолат, ҳатто дар шароити номуайяни ё набудани иттилооти пурра оид ба натиҷаҳои амалиёти интихобшуда мебошад.

**Калимаҳои калидӣ:** идоракунӣ – қолиб – меъёри самаранокӣ.

S.A.NARZULLOEV

### CONCEPTUAL MODEL OF MANAGEMENT PROCESS IN SEPARATE DEPARTMENTS OF AGENCIES OF INTERNAL AFFAIRS OF THE REPUBLIC OF TAJIKISTAN

*Academy of Ministry of Internal Affairs of Republic of Tajikistan*

In this article conceptual model of management in administrative activity which main issue is the need for decision-making in all situations, even when uncertainty or lack of information about the possible consequences of actions taken, is suggested.

**Key words:** management – model – norm of fruitful.



УДК 521.633

А.С.КУРБОНОВ, А.М.БАРОТОВ\*, З.Т.ЯКУБОВ, Ф.А.НАЗАРОВ, У.М.МИРСАИДОВ\*

**КИНЕТИКА УКСУСНОКИСЛОТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ОБОЖЖЁННОГО  
ДАНБУРИТОВОГО КОНЦЕНТРАТА**

*Институт химии им. В.И.Никитина АН Республики Таджикистан,*

*\* Агентство по ядерной и радиационной безопасности АН Республики Таджикистан*

*Поступила в редакцию 15.12.2014 г.*

*В статье приведены результаты изучения кинетики уксуснокислотного разложения борного концентрата и рассчитана энергия активации процесса.*

**Ключевые слова:** концентрат данбурита – переработка – уксусная кислота – разложение – извлечение – кинетика.

Большинство боратов легко растворяется в кислотах (трудно растворяется только ашарит), а многие и в воде, поэтому их химическая переработка осуществляется сравнительно легко [1-3].

Ранее нами изучено уксуснокислотное разложение обожжённого боросиликатного концентрата [4]. Найдены оптимальные параметры проведения процесса.

В настоящей работе изучена кинетика уксуснокислотного разложения боросиликатного концентрата, исходя из данных работы [4].

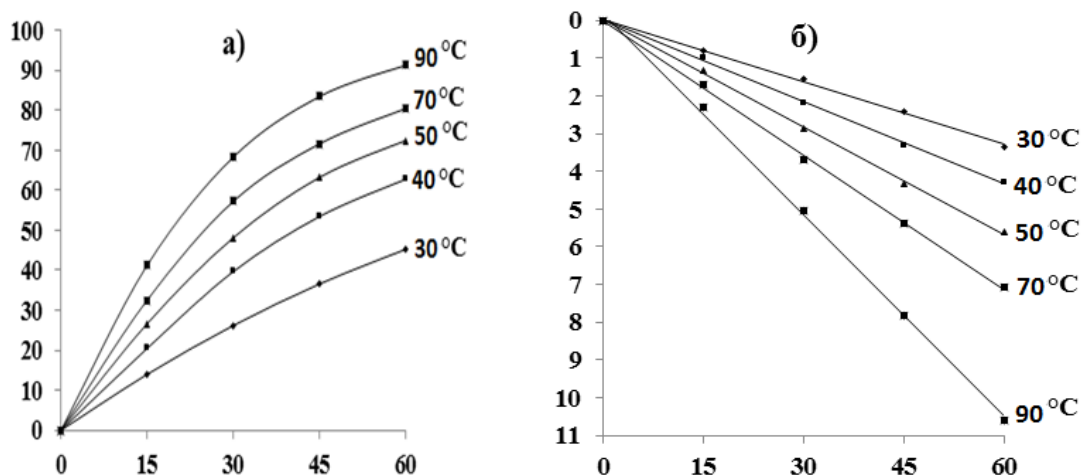
Экспериментальные данные кинетики извлечения оксида бора из состава обожжённого данбуритового концентрата при уксуснокислотном разложении получены в интервале температур 30-90°C и продолжительности процесса от 15 до 60 минут (рис.1).

Из рис.1а видно, что при повышении температуры извлечение оксида бора из состава обожжённого концентрата данбурита значительно возрастает.

Характер кинетических кривых (рис.1а) разложения указывает на то, что в течение 60 мин при температуре 90°C степень извлечения  $B_2O_3$  достигает 90.1%.

---

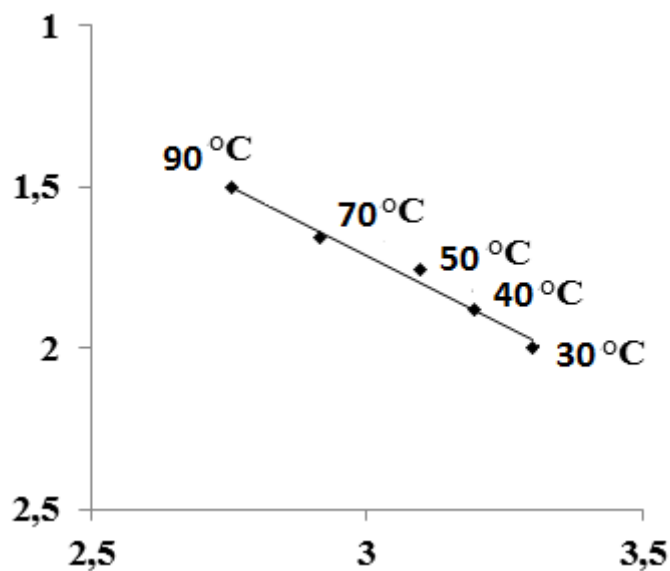
*Адрес для корреспонденции:* Курбанов Амиршо Сохибназарович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: amirsho\_77@mail.ru.



**Рис.1.** Зависимость степени разложения ( $\alpha$ ) оксида бора от времени (а) и  $\lg \frac{1}{1-\alpha}$  от времени (б) при уксуснокислотном разложении данбуритового концентрата.

Константы скорости разложения обожжённого концентрата данбурита рассчитывали, используя кинетическое уравнение первого порядка. При построении графика зависимости  $\lg 1/(1-\alpha)$  от времени (рис.1б) экспериментальные точки при различных температурах удовлетворительно укладываются на прямую линию и имеют отрицательный наклон.

Для определения энергии активации строили график зависимости  $\lg k$  от  $(1/T \cdot 10^{-3})$ , при этом получена прямая линия (рис.2).



**Рис.2.** Зависимость  $\lg k$  от обратной абсолютной температуры при азотнокислотном разложении данбуритового концентрата.

Как видно из рис.2, точки удовлетворительно укладываются на прямую линию Аррениуса, по наклону которой вычислена величина кажущейся энергии активации, равная 16.89 кДж/моль. Численное значение энергии активации и зависимость скорости реакции от размера частиц и продолжительности процесса при уксуснокислотном разложении обожжённого концентрата данбурита свидетельствуют о его протекании в диффузионной области.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Маматов Э.Д., Ашуров Н.А., Курбонов А.С., Ятимов П., Мирсаидов У.М. - ДАН РТ, 2008, т.51, №4, с.271-273.
2. Ашуров Н.А., Маматов Э.Д., Курбонов А.С., Ятимов П., Мирсаидов У.М. - ДАН РТ, 2008, т.51, №6, с.432-435.
3. Усманова У.Х., Маматов Э.Д., Мирсаидов У.М. – ДАН РТ, 2012, т.55, №5, с.378-381.
4. Курбонов А.С., Баротов А.М., Якубов З.Т., Маматов Э.Д., Мирсаидов У.М. Уксуснокислотное разложение обожжённого данбуритового концентрата. – ДАН РТ, 2015, т.58, №\_\_, с.\_\_\_\_\_.

**А.С.КУРБОНОВ, А.М.БАРОТОВ\*, З.Т.ЯКУБОВ, Ф.А.НАЗАРОВ,  
У.М.МИРСАИДОВ\***

#### КИНЕТИКА И ТАКСИМШАВИИ КИСЛОТАИ СИРКОИ КОНСЕНТРАТИ ДАНБУРИТИ СЌХТАШУДА

*Институту химияи ба номи В.И.Никитини АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон,  
\*Агентии амнияти ядрой ва радиационии АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаҳои омӯзиши кинетикаи тақсимшавии кислотаи сиркои концентрати бор ва раванди ҳисоб кардаи энергияи активатсионӣ оварда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** концентрати данбурит – коркард – кислотаи сирко – тақсимшавӣ – ҳосил кардан – кинетика.

A.S.KURBONOV, A.M.BAROTOV\*, Z.T.YAKUBOV, F.A.NAZAROV, U.M.MIRSAIDOV\*

#### ACETIC ACID DECOMPOSITION KINETICS OF BURNED DANBURITE CONCENTRATE

*V.I. Nikitin Institute of Chemistry Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,  
\*Nuclear and Radiation Safety Agency Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

The results of study of acetic acid decomposition kinetics of boric concentrate are presented in the article along with activation energy of the process that was calculated.

**Key words:** danburite concentrate – reprocessing – acetic acid – decomposition – extraction – kinetics.

УДК 553.96; 544.723

М.Д.ИСОБАЕВ, М.Д.ДАВЛАТНАЗАРОВА, Э.Х.ПУЛАТОВ, Т.Х.АБДУЛЛАЕВ,  
М.З.ТУРДИАЛИЕВ, И.У.ФАЙЗИЛОВ

**ИОНОГЕННЫЕ АДСОРБЕНТЫ НА ОСНОВЕ УГЛЯ МЕСТОРОЖДЕНИЙ  
«ЗИДДЫ», «ФАН-ЯГНОБ» И ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ  
ИХ ПРИМЕНЕНИЯ**

*Институт химии им. В.И.Никитина АН Республики Таджикистан*

*Поступила в редакцию 11.08.2014 г.*

*Получены ионогенные адсорбенты на основе угля месторождений "Зидды" и "Фан-Ягноб". Ионогенные свойства адсорбентов обусловлены высокой зольностью угля (свыше 20%) отдельных угольных пластов. Адсорбционная активность по йоду достигает уровня, соответствующего требованиям ГОСТ. Показана возможность использования полученных адсорбентов для решения экологических проблем, в частности, по аккумулярованию на своей поверхности ионов свинца. При сравнении активности адсорбентов месторождений "Зидды" и "Фан-Ягноб" по отношению к ионам свинца обнаружена корреляция адсорбционной активности с зольностью угля.*

**Ключевые слова:** адсорбенты из углей высокой зольности – адсорбция ионов тяжелых металлов – ионогенные свойства.

В настоящее время исследования по химии твёрдого топлива направлены на его глубокую переработку. Десятки наименований новых материалов, химических реактивов и нового вида топлива, могут быть получены при комплексной переработке угля. Одним из важнейших продуктов промежуточной обработки угля является полукокс, который в зависимости от химического состава угля может использоваться для получения угольных электродов, кокса, адсорбентов и других, важных в практическом плане материалов[1].

В процессе работы с различными типами углей месторождений Таджикистана в Институте химии АН РТ получены и охарактеризованы жидкие и летучие продукты, а также проведено жидкофазное гидрирование и окисление угля. Представленные исследо-

---

*Адрес для корреспонденции: Исобаев Музафар Джумаевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: coordin@yandex.ru*

вания показали, что в смысле экономической целесообразности и в практическом плане глубокая переработка угля является наиболее перспективным направлением использования угля [2]. Настоящая работа имеет целью показать еще одно важное направление получения ценных продуктов с высокой добавленной стоимостью на основе угля Таджикской депрессии, а именно угольных адсорбентов. Данное направление исследований осталось вне поля зрения наших предшественников [2,3], однако это не снимает актуальности работ такого плана. Потребность в отечественных адсорбентах велика, так как круг экологических проблем, которые решаются с применением адсорбентов, довольно широк. Адсорбционными свойствами обладают два продукта термической обработки угля в анаэробных условиях - кокс и полукокс, условия получения которых отличаются температурным режимом. Для полукокса это обработка до 600<sup>0</sup>С, для кокса свыше 1000<sup>0</sup>С. Данное исследование посвящено получению одного из продуктов термической обработки угля – полукокса, и изучению его адсорбционной активности по отношению к известным стандартам и тяжёлым металлам. В качестве исходного материала для исследований взят уголь месторождения «Зидды», который подвергнут термическому воздействию до температуры 600<sup>0</sup> в реакторе без доступа кислорода [4]. В процессе разложения органических примесей угля выделяется ряд веществ, перечень которых и количественное содержание в процентах по отношению к исходной массе угля, подвергнутого термолитизу, представлено в табл. 1.

Таблица 1

Содержание основных компонентов в составе угля в процентах от исходной массы

Влага	Смолистые вещества	Летучие кислоты	Летучие основания	Сопутствующие газы	Полукокс	Зола
8	2.6	3.5	1.5	19	44.4	21

Из полученных нами [5,6] данных по химическому составу угли месторождения «Зидды» содержат 8% влаги, более 20% золы, 44.4% полукокса, 19% горючего газа. Летучие вещества, выделяющихся в виде свободных кислот и оснований, присутствуют в угле до 5%. Эта часть продуктов разложения представляет особый интерес для получения на их основе химических реактивов и препаратов.

Из данных табл. 1 следует, что более половины от исходной массы угля выделяется в виде летучих компонентов и влаги, что ведёт к образованию высокой развитой, активной поверхности образующегося полукокса. При рассмотрении под микроскопом можно отметить высокую пористость внутренней структуры полукокса, ровно как и его наружной части. Так как для термолитиза использован порошок угля, а конечный продукт представляет собой спекшуюся массу, можно полагать, что параллельно с деструкцией угля протекают процесс полимеризации образующихся мономеров и как следствие наблюдающееся структурирование угольной массы. Естественно, данный факт не является положительным в смысле влияния на адсорбционные свойства полукокса, тем не менее, данные свойства остаются высокими. Эти выводы следуют из экспериментальных

данных по определению адсорбционной емкости образцов полукокса по остаточному количеству ионов йода в растворе KI, обработанного определённым количеством активированного угля (в данном случае полукоксом). Количественно расчёт адсорбционной ёмкости проводился в процентах по формуле:

$$X(\%)=(V_1-V_2) \times 0,0127 \times 100 \times 100\%/10 \times m,$$

где:  $V_1$  – объём раствора тиосульфата натрия ( $C=0.1$  моль/л), затраченный на титрование по определению содержания ионов йода в образце сравнения, то есть раствора образца, который не был подвергнут обработке полукоксом;  $V_2$  – объём раствора тиосульфата натрия ( $C=0.1$  моль/л), затраченного на титрование остаточного количества ионов йода в растворе образца, который подвергнут обработке полукоксом; 0.0127 – масса йода, соответствующая его содержанию в  $1\text{см}^3$  раствора KI концентрации 0.1 моль/л; 100 мл – объём раствора KI, используемый в экспериментах;  $m$  - масса навески полукокса, г.

Данные по адсорбционной ёмкости полукокса, полученного из угля месторождения «Зидды», представлены в табл.2.

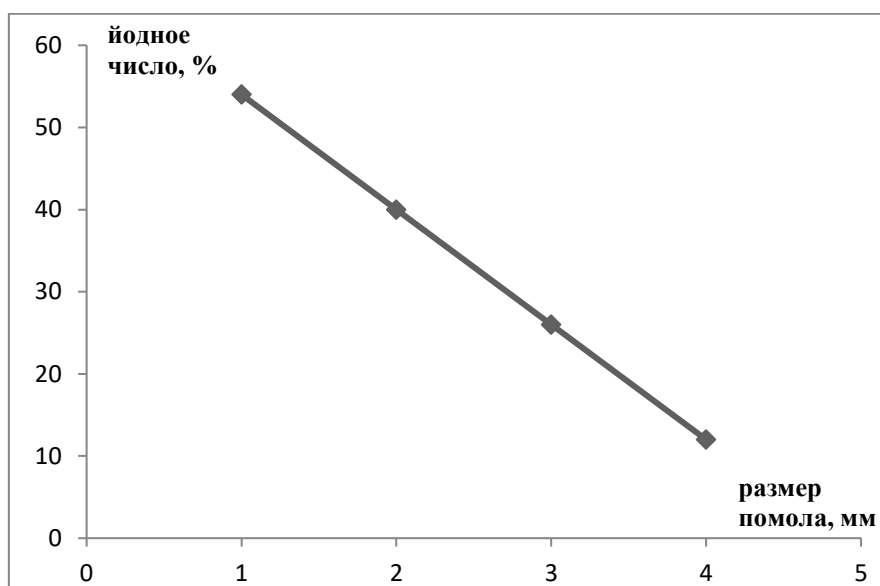
Эксперименты проводились в направлении выявления зависимости адсорбционной активности полукокса от степени измельчения образцов угольных порошков, из которых данный полукокс был получен. Степень измельчения угольного порошка контролировалась посредством использования сит различных размеров. Оказалось, что полукокс, полученный из исходного порошка угля с размеров частиц угля 0.063 мм, обладает наивысшей адсорбционной ёмкостью, соответствующей требованиям ГОСТ 6217-74 для активированных углей.

Таблица 2

Зависимость адсорбционной ёмкости полукокса от степени измельчения исходного материала в (%).

Размер помола, мм	1.00	0.56	0.25	0.063
Йодное число, %	15-17	24	30	54

Как следует из представленных в табл.2 данных, адсорбционная активность, отраженная в йодном числе для различных образцов полукокса, отличающихся размером частиц угля в исходном материале, следует такой зависимости: с уменьшением размера частиц угля в большей мере проявляется его адсорбционная активность. Практически прямая зависимость йодного числа от размера сит, с помощью которых получен исходный угольный порошок, имеет место. На рис.1 представлена зависимость йодного числа в процентах от размера частиц угольного порошка, взятого для приготовления полукокса. Данная зависимость показывает, что одним из путей повышения качества угольного адсорбента, содержащего довольно большой процент минеральной составляющей, является предварительная подготовка исходного угольного порошка, используемого для его производства.



**Рис.** Зависимость йодного числа от размера частиц порошка (помола) полукокса в процентах.

Следующим этапом нашей работы явилось выявление возможной связи между адсорбционной способностью полученного полукокса по отношению к ионам тяжёлых металлов и количеством минеральных примесей в его составе. Предпосылкой для проведения данного цикла исследований являются полученные нами данные по высокому содержанию золы в угле месторождения «Зидды», представленные в табл.1. Количество минеральных и легколетучих веществ в угле месторождения «Зидды» составляет по этим данным несколько большую величину, чем общая масса полукокса. Исходя из этого, можно предположить, что данный тип полукокса способен в какой-то мере адсорбировать тяжёлые металлы на своей поверхности. Эта особенность исследуемого полукокса связана в первую очередь с наличием свыше 20% в его составе минеральной составляющей, в частности сераорганических соединений. Ранее [7] были получены данные о том, что в составе золы угля ряда месторождений Таджикистана имеется довольно высокое содержание редких и рассеянных элементов, что является прямым подтверждением способности угля аккумулировать тяжёлые металлы. В данном разделе приведены результаты исследования по селективной адсорбции полукоksom ионов свинца из 0.05% раствора уксуснокислого свинца. В этих экспериментах использовался полукокc с зольностью, превышающей 20%. Для выяснения роли минеральной составляющей полукокса к адсорбции тяжёлых металлов проведён сравнительный анализ активности полукокса, полученного в аналогичных условиях из угля месторождения «Фан-Ягноб». Данные угли являются высококачественными, коксующимися с содержанием золы до 10%. Оказалось, что активность полукокса из угля месторождения «Зидды» в этом плане довольно высока по отношению к ионам свинца. Расчёт показывает, что 1 г полукокса удерживает на своей поверхности до 0.019 г ионов свинца из 0.05% раствора ацетата свинца. Для выяснения степени влияния мине-

ральной составляющей на адсорбционные свойства полукокса проведён дополнительный эксперимент с получением в аналогичных условиях полукокса из угля месторождения «Фан-Ягноб» и изучена его активность по отношению к адсорбции на своей поверхности ионов свинца. Угли месторождения «Фан-Ягноб» являются низкозолистыми. Содержание золы не превышает 10%. Таким образом, используя в качестве образца сравнения полукокс, полученный из угля месторождения «Фан-Ягноб», можно получить данные о влиянии минеральных примесей на адсорбционную активность полукокса. Проведенный эксперимент показал, что адсорбционная активность низкозолистого полукокса заметно ниже ранее рассмотренного случая и составляет 0,005 г ионов свинца на 1 г адсорбента. В пересчёте это составляет 26% от активности полукокса, полученного из угля месторождения «Зидды». Так как в Таджикистане собственная производственная база по производству технических адсорбентов до настоящего времени не создана, данная разработка может быть основой для решения проблемы производства отечественных адсорбентов.

### **Экспериментальная часть**

#### **Определения адсорбционной ёмкости полукокса по йоду**

1 полукокса, предварительно измельчённого в ступке и выдержанного в сушильном шкафу при температуре 120°C в течение 3 ч, помещают в коническую колбу ёмкостью 250мл. К указанному количеству полукокса приливают 100мл раствора йодистого калия, содержащего определённый процент растворённого молекулярного йода. Полученную суспензию перемешивают в течение 30мин. По окончании перемешивания реакцию смесь переносят на фильтр, а из фильтрата отбирают 10 мл для проведения количественного анализа на содержание остаточного йода. Анализируемый раствор помещают в коническую колбу ёмкостью 50мл и титруют раствором тиосульфата натрия. В качестве индикатора использовали 1мл водного раствора крахмала. Параллельно проводят контрольное испытание 10мл раствора йодистого калия, содержащего растворённый молекулярный йод, но не подвергнутого обработки полукоксом. По разности объёмов раствора тиосульфата натрия, ушедшего на титрование контрольного и испытываемого раствора, подвергнутого обработке полукоксом, определяется йодное число.

#### **Количественное определение адсорбции ионов свинца полукоксом**

Определение остаточного количества ионов свинца после поглощения его части полукоксом основано на расчёте разницы в содержании ионов свинца в исходном растворе и после обработки раствора порошком полукокса. Расчёт производится путём осаждения остаточного количества ионов свинца в виде труднорастворимой соли иодида свинца. В сосуд ёмкостью 50 мл помещают 10 мл 0.05% раствора уксуснокислого свинца и вносят 0.2 г полукокса, предварительно измельчённого в ступке и выдержанного в сушильном шкафу при температуре 120°C в течение 3 ч. Полученную суспензию перемешивают на магнитной мешалке в течение 60 мин. Суспензию переносят и отделяют на фильтре от твёрдых остатков полукокса. Полученный фильтрат обрабатывают йодистым калием. Образовавшийся осадок йодистого свинца отфильтровывают, высушивают и взвешивают.



Аналогичной процедуре подвергают контрольный образец, не обработанный порошком полукокса. По разности в содержании ионов свинца в исходном растворе ацетата свинца и в растворе, обработанном полукоксом, сделаны выводы об адсорбционной активности полукокса по отношению к ионам свинца. Расчёты показывают, что 1 г полукокса, полученного из угля месторождения «Зидды», способен удерживать на своей поверхности 0.019г (9.5%) ионов свинца из 0.05% раствора ацетата свинца. Адсорбционная активность для полукокса, полученного из низкозольнистого угля месторождения «Фан-Ягноб», составляет 0.005 г ионов свинца на 1г адсорбента. Если принять величину адсорбционной активности полукокса, полученного из угля месторождения «Зидды», за 100%, то в пересчёте адсорбционная активность для полукокса, полученного из низкозольнистого угля месторождения «Фан-Ягноб», составляет 26% от активности полукокса, полученного из угля месторождения «Зидды».

### ЛИТЕРАТУРА

1. Охунов.Р.В. Абдурахимов.Б.А. Угольная промышленностьТаджикистана: сырьевая база, состояние и развитие перспективы. – Душанбе: Недра. 2011, с. 153-156.
2. КараваевН.М., Румянцева З.А., Певзнер З.И., Фейгин С.А. Бондарь В.П. Пути промышленного использования ископаемых углей Зеравшанской долины и их технико-экономическая оценка. – Душанбе: Издательство. АН ТаджССР., 1963, с.68-98.
3. Сторобинец А.С. Угли Средней Азии и пути их использования. – Ташкент: ФАН, 1968, с.102-109.
4. Исобаев М.Д., Давлатназарова М.Д., Пулатов Э.Х., Халиков Б.Д., Турдиалиев М.З., Сохибов Н.Б., Юнусов М. – Тезисы докл. Межд. конф. – Душанбе, 2013, с.112.
5. Турдиалиев М.З., Исобаев М.Д., Пулатов Э.Х. – Тезисы докл. Респ. научно-практ. конф. – Душанбе, 2011, с.150.
6. Исобаев М.Д., Пулатов Э.Х., Абдуллаев Т.Х., Турдиалиев М.З., Давлатназарова М.Д., Мингбоев Ш.А. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим. геол. и техн. н., 2013, №3 (152), с.52-58.
7. Пачаджанов.Д.Н. Геохимия красноцветных меловых отложений Таджикской депрессии. – М.: Наука, 1981,с. 101-112.

М.Д.ИСОБАЕВ, М.Д.ДАВЛАТНАЗАРОВА, Э.Х.ПУЛАТОВ, Т.Х.АБДУЛЛАЕВ,  
М.З.ТУРДИАЛИЕВ, И.У.ФАЙЗИЛОВ

### АДСОРБЕНТҲОИ ИОНОГЕНӢ ДАР АСОСИ АНГИШТИ КОНИ “ЗИДДӢ”, “ФОН ЯГНОБ” ВА ЧИҲАТҲОИ ЭКОЛОГИИ ИСТИФОДАБАРИИ ОНҲО

*Институтуи химияи ба номи В.И.Никитини Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Адсорбентҳои ионогенӣ дар асоси ангишти кони “Зиддӣ” ва “Фон Ягноб” гирифта шуд. Хосияти ионогении адсорбенҳо ба хокистарнокии баланди ангишт (баланд аз 20%) вобастагӣ дорад. Фаъолнокии адсорбсионӣ нисбат ба йод то дараҷаи мувофиқаткунии ГОСТ расид. Қобилияти истифодабарии адсорбентҳои гирифташуда барои ҳалли проблемаи экологӣ, хусусан чамъкунии ионҳои сурб дар

сатҳи онҳо нишон дода шуд. Муқоисакунии фаъолнокии адсорбентҳои кони “Зиддӣ” ва “Фон Яғноб” дар муносибат бо ионҳои сурб мувофиқаткунии фаъолнокии адсорбсиониро бо ҳокистарнокии ангишт зохир мекунад.

**Калимаҳои калидӣ:** адсорбентҳо аз ангишти ҳокистарнокиаш баланд – адсорбсияи ионҳои металлҳои вазнин – ҳосияти ионогени.

M.D.ISOBAEV, M.D.DAVLATNAZAROVA, E.KH.PULATOV, T.KH.ABDULLAEV,  
M.Z.TURDIALIEV, I.U.FAYZILOV

**IONOGENIC ADSORBENTS FROM COAL MINE "ZIDDI", «FON-YAGNOB»  
AND ENVIRONMENTAL ASPECTS OF THEIR USAGE**

*VI Nikitin Institute of Chemistry, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

In paper presents results of preparation of the ionogenic adsorbents based on coal deposits "Ziddi" and "Fon Yagnob." The ionogenic properties related to high ash content (over 20%) of the individual coal beds. The adsorption activity of iodine related to the regulation of the GOST. It was shown the possibility of adsorbents for solving environmental problems, in particular, on the accumulation on the surface of lead ions. When comparing the activity of adsorbents produced from the deposit "Ziddi" and "Fon Yagnob" in relation to lead ions observed a correlation of adsorption activity with ash coals

**Key words:** adsorbents from coals of high ash content – the adsorption of heavy metal ions – ionogenic properties.

УДК 662.66:338.45

Б.С.АЗИЗОВ, Х.А.МИРПОЧАЕВ, Х.САФИЕВ

**ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ГАЗИФИКАЦИИ УГЛЯ**

*Государственное учреждение «Научно-исследовательский институт металлургии»  
ГУП «ТалКо»*

*Поступила в редакцию 26.11.2014 г.*

*Проведен термодинамический анализ возможности протекания ряда реакций при газификации угля в двухстадийном газогенераторе. Рассчитаны константы равновесия этих реакций и равновесные концентрации компонентов синтез-газа при фактических условиях.*

**Ключевые слова:** термодинамический анализ – газификация угля – синтез-газ – константа равновесия – равновесная концентрация.

Газификация – высокотемпературный процесс взаимодействия углерода топлива с окислителем, проводимый с целью получения горючих газов ( $H_2$ ,  $CO$ ,  $CH_4$ ). В качестве окислителей используются кислород (или обогащенный им воздух), водяной пар, диоксид углерода либо смеси этих веществ. В зависимости от соотношения исходных реагентов, температуры, продолжительности процесса и других факторов могут быть получены газовые смеси различных составов.

Учитывая отсутствие собственных источников углеводородного топлива и наличие значительных запасов высококачественных углей в Республике Таджикистан в 2011 г. на Государственном унитарном предприятии «Таджикская Алюминиевая Компания» (ГУП «ТалКо») были начаты работы по внедрению современных технологий синтеза газообразного топлива (синтез-газа) из местного углеродсодержащего сырья и улучшению параметров процесса [1].

В настоящее время на предприятии функционируют 5 газогенераторных установок, которые, используя коксующиеся каменные угли месторождения «Фон-Ягноб» и паровоздушное дутье, производят синтез-газ, заменивший импортируемый природный газ и полностью обеспечивающий потребности ГУП «ТалКо» в газообразном топливе.

---

**Адрес для корреспонденции:** Сафиев Хайдар. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Х.Хакимзаде, 17, ГУ «Научно-исследовательский институт металлургии» ГУП «ТалКо». E-mail: [inmet.talco@mail.ru](mailto:inmet.talco@mail.ru), [h.safiev@mail.ru](mailto:h.safiev@mail.ru)

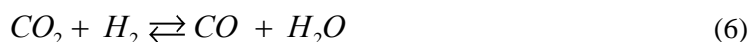
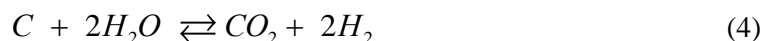
В табл. 1 приведены нормативное содержание компонентов в синтез-газе и средний фактический состав газа, получаемого на газогенераторной станции предприятия.

Таблица 1

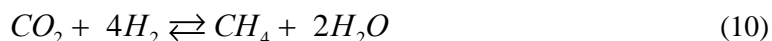
Содержание компонентов в синтез-газе

Показатели	Содержание компонентов, об.%						Теплотворная способность, кДж/м <sup>3</sup>
	CO <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	CO	CH <sub>4</sub>	H <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	
Нормативные	<7	<0.08	20-32	3	10-16	45-50	4621-6757
Средние на ГУП «ТАЛКО»	4.7	0.3	24.5	4.9	14.7	50.8	6352

В общем случае образование этих компонентов синтез-газа возможно вследствие протекания нижеследующих реакций:



Содержащийся в синтез-газе CH<sub>4</sub> может образоваться не только за счёт термической диссоциации угля, но и вследствие протекания следующих реакций:



Рассматривая газогенератор как замкнутую систему и используя значения стандартных термодинамических величин (табл. 2), на основе нижеприведенных уравнений оценим возможность протекания этих реакций в интервале температур 298-1500 К:

$$\Delta H_p = \sum \Delta H_{кон.} - \sum \Delta H_{нач.}$$

$$\Delta S_p = \sum \Delta S_{кон.} - \sum \Delta S_{нач.}$$

$$T_{нач.} = \frac{\Delta H_p}{\Delta S_p}$$

$$\Delta G_p = \Delta H_p - T\Delta S_p.$$

Таблица 2

Значения стандартных энтальпий образования и энтропий веществ [2,3]

Термодинамическая функция	<i>C</i> <i>уголь</i>	<i>O</i> <sub>2</sub> <i>газ</i>	<i>H</i> <sub>2</sub> <i>газ</i>	<i>H</i> <sub>2</sub> <i>O</i> <i>газ</i>	<i>CO</i> <i>газ</i>	<i>CO</i> <sub>2</sub> <i>газ</i>	<i>CH</i> <sub>4</sub> <i>газ</i>
$\Delta H_{298}^\circ$ , кДж/моль	10.35	0	0	-241.82	-110.50	-393.50	-74.85
$S_{298}^\circ$ , Дж/(моль·град)	5.9	205.0	130.6	188.7	147.5	213.7	186.2

Для упрощения в расчётах изменения теплоёмкости веществ от температуры и тепловые эффекты фазовых переходов не учитывались.

На основе полученных значений  $\Delta G_p$  по формуле:

$$\ln K = \frac{-\Delta G_p}{RT}$$

были рассчитаны константы равновесий вышеуказанных реакций.

Как видно из табл. 3 и 4, во всем интервале исследуемых температур для реакции 1 и 2  $\Delta G < 0$ , а  $K \gg 1$ , то есть в данной области температур эти реакции могут быть осуществлены с преимущественным протеканием прямой реакции. Для реакций 3-6 в начале  $\Delta G > 0$ , а  $K < 1$ . Далее при температурах свыше 1000К  $\Delta G < 0$ , а  $K > 0$ , что свидетельствует о возможности протекания этих реакций только при температурах свыше 906, 984, 924 и 983 К соответственно. В то время как для реакций 7-10 в начале 800-1000К  $\Delta G < 0$ , а  $K > 0$ , а затем  $\Delta G > 0$ , а  $K < 0$ , то есть эти реакции могут протекать только при температурах ниже 797, 962, 965 и 960 К соответственно.

Таким образом, согласно принципу Ле Шателье, повышение температуры смещает равновесие эндотермических реакций 3-6 вправо, а экзотермических реакций 1,2 и 7-10 – влево.

В двухстадийных газогенераторах, действующих на ГУП «ТАЛКО», состав синтез-газа, в основном, определяется протеканием двух независимых реакций 6 и 9, константы равновесий которых могут быть записаны следующим образом:

$$K_6 = \frac{n_{CO} \cdot n_{H_2O}}{n_{CO_2} \cdot n_{H_2}} \quad (11)$$

$$K_9 = \frac{n_{CH_4} \cdot n_{CO_2} \cdot n_{газа}^2}{n_{CO}^2 \cdot n_{H_2}^2 \cdot p^2} \quad (12)$$

Таблица 3

## Термодинамические величины реакций при различных температурах

№ реакции	Tнач., К	$\Delta H_p$ , кДж/моль	$\Delta S_p$ , Дж/(моль·град)	$\Delta G_{298}$ , кДж/моль	$\Delta G_{500}$ , кДж/моль	$\Delta G_{700}$ , кДж/моль	$\Delta G_{900}$ , кДж/моль	$\Delta G_{1100}$ , кДж/моль	$\Delta G_{1300}$ , кДж/моль	$\Delta G_{1500}$ , кДж/моль
1	-	-406.85	13.4	-410.87	-413.55	-416.18	-418.86	-421.54	-424.22	-425.95
2	-	-241.7	178.2	-295.16	-330.8	-366.44	-402.08	-437.72	-473.33	-509.00
3	906.10	120.97	133.5	80.92	54.22	27.52	0.82	-25.88	-52.55	-79.28
4	984.00	90.14	91.06	62.66	44.34	26.02	7.70	-10.62	-28.94	-47.26
5	924.00	162.15	175.4	109.53	74.45	39.37	4.29	-30.79	-65.87	-100.95
6	982.80	41.18	41.90	28.61	20.23	11.85	3.47	-4.91	-13.29	-21.67
7	797.30	-64.50	-80.90	-40.23	-24.05	-7.87	8.31	24.49	40.67	56.85
8	961.60	-206.17	-214.40	-141.85	-98.97	-56.09	-13.20	29.67	72.55	115.43
9	965.50	-247.35	-256.30	-170.46	-119.20	-67.94	-16.68	34.58	85.84	137.10
10	959.50	-165.04	-172.00	-113.44	-79.40	-44.64	-10.24	24.16	58.56	92.96

Таблица 4

Значения констант равновесий реакций при различных температурах

№ реакций	K <sub>298</sub>	K <sub>500</sub>	K <sub>700</sub>	K <sub>900</sub>	K <sub>1100</sub>	K <sub>1300</sub>	K <sub>1500</sub>
1	>>1	>>1	>>1	>>1	>>1	>>1	>>1
2	>>1	>>1	>>1	>>1	>>1	>>1	>>1
3	<<1	<<1	0.0089	0.897	16.98	128.82	>>1
4	<<1	<<1	0.0114	0.363	3.16	14.45	44.668
5	<<1	<<1	0.0011	0.562	28.84	436.51	>>1
6	<<1	0.008	0.131	0.630	1.69	3.38	5.888
7	>>1	323.59	3.80	0.331	0.069	0.023	0.0104
8	>>1	>>1	>>1	5.750	0.039	0.0012	<<1
9	>>1	>>1	>>1	9.120	0.022	0.0004	<<1
10	>>1	>>1	>>1	3.890	0.072	0.0044	0.0006

В табл. 5 приведён средний состав пробы газа, взятый на выходе из газогенератора. Однако равновесный состав газа в зонах окисления и восстановления газогенератора при T=1300, 1500 К и P=1.2 атм не соответствует его составу в анализируемой пробе.

На основе метода, приведённого в [4], были рассчитаны равновесные концентрации компонентов газа при фактических условиях.

Считая, что в газе объёмные проценты компонентов пропорциональны числам их молей, а координаты реакций 6 и 9 равны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , соответственно, для одного моля смеси можно написать:

$$n_{CO} = 0.245 + \lambda_1 - 2\lambda_2 \quad (13)$$

$$n_{CO_2} = 0.047 - \lambda_1 + \lambda_2 \quad (14)$$

$$n_{CH_4} = 0.049 + \lambda_2 \quad (15)$$

$$n_{H_2} = 0.147 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \quad (16)$$

$$n_{H_2O} = 0.08 + \lambda_1 \quad (17)$$

$$n_{N_2} = 0.432 \quad (18)$$

$$n_{газа} = 1 - 2\lambda_2 \quad (19)$$

Подставляя 13-19 в уравнения 11, 12, можно написать уравнения констант равновесий этих реакций в следующем виде:

$$K_6 = \frac{(0.245 + \lambda_1 - 2\lambda_2)(0.08 + \lambda_1)}{(0.047 - \lambda_1 + \lambda_2)(0.147 - \lambda_1 - 2\lambda_2)} \quad (20)$$

$$K_9 = \frac{(0.049 + \lambda_2)(0.047 - \lambda_1 + \lambda_2)(1 - \lambda_2)^2}{(0.245 + \lambda_1 - 2\lambda_2)^2(0.147 - \lambda_1 - 2\lambda_2)^2 \cdot p^2} \quad (21)$$

Так как при температурах 1300 и 1500 К равновесие реакции 6 смещено вправо, а реакции 9 влево, то  $\lambda_1 > 0$ , а  $\lambda_2 < 0$ .

Используя итерационный метод для решения уравнений 20 и 21, были найдены значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  при фактических условиях, то есть при T=1300 К  $\lambda_1 = 0.003$ ;  $\lambda_2 = -0.007$ , при T=1500 К  $\lambda_1 = 0.004$ ;  $\lambda_2 = -0.02$ .

Подставив значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в уравнения 13-19, были рассчитаны равновесные концентрации компонентов газа при различных температурах и давлениях (табл. 5).

Таблица 5

Значения равновесных концентраций в пробе и в зоне окисления и восстановления газогенератора

№	Компонент	В пробе	Фактич. при 1300 К и 1.0 атм.	Фактич. при 1300 К и 1.2 атм.	Фактич. при 1500 К и 1.0 атм.	Фактич. при 1500 К и 1.2 атм.
1	CO	24.5	26.2	31.44	28.9	34.7
2	CO <sub>2</sub>	4.7	3.7	4.44	2.3	2.8
3	CH <sub>4</sub>	4.9	4.2	5.04	2.9	3.5
4	H <sub>2</sub>	14.7	15.8	18.96	18.3	22.0
5	H <sub>2</sub> O	8.0	8.3	10.00	8.4	10.1
6	N <sub>2</sub>	43.2	41.8	50.16	39.2	47.0

Как видно из вышеприведенной таблицы, при повышении температуры содержание основных горючих компонентов CO и H<sub>2</sub>, а также H<sub>2</sub>O в составе синтез-газа возрастает, а содержание CH<sub>4</sub> и негорючих компонентов CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> – снижается, что согласуется с выводами, сделанными на основе значений изменений энергии Гиббса и констант равновесий реакций, а также с результатами исследований изменений равновесных концентраций этих газов в работе [5].

Результаты проведенных термодинамических расчётов могут быть использованы при выборе оптимального режима работы газогенератора, с целью повышения содержания горючих компонентов в составе производимого синтез-газа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сафиев Х., Усманов Р., Азизов Б.С. и др. – ДАН РТ, 2012, т. 55, №7, с.577-581.
2. Краткий справочник физико-химических величин. /Под ред. К.П. Мищенко. – Химия, 1974, 200 с.
3. Шулепов С.В. Физика углеродистых материалов. – М.: Металлургия, 1972, 256 с.
4. Люис К. Химическая термодинамика материалов. – М.: Металлургия, 1989, 502 с.
5. Атрощенко В.И. и др. Курс технологии связанного азота. Изд. 2-е. – М.: Химия, 1969, 384 с.



Б.С.АЗИЗОВ, Х.А.МИРПОЧАЕВ, Ҳ.САФИЕВ

## ТАҲЛИЛИ ТЕРМОДИНАМИКИИ РАВАНДИ ГАЗИФИКАТСИЯИ АНГИШТ

*Муассисаи давлатии «Пажӯҳишгоҳи илмию таҳқиқотии металлургия»-и  
КВД «Ширкати Алуминийи Тоҷик»*

Таҳлили термодинамикии эҳтимолияти гузариши як қатор реаксияҳо ҳангоми газификатсияи ангишт дар газогенератори дузинагӣ гузаронида шуд. Константаҳои мувозинатии ин реаксияҳо консентратсияҳои мувозинатии ҷузъҳои таркибии синтез-газ дар шароити воқеӣ ҳисоб карда шуданд.

**Калимаҳои калидӣ:** таҳлили термодинамикӣ – газификатсияи ангишт – синтез-газ – константаи мувозинат – консентратсияҳои мувозинатӣ.

B.S.AZIZOV, KH.A.MIRPOCHAEV, H.SAFIEV

## THERMODYNAMIC ANALYSIS OF COAL GASIFICATION PROCESS

*State Enterprise «Research institute of metallurgy» SUE “TALCO”*

A thermodynamic analysis of the possibility of occurrence of some reactions in coal gasification in a two-stage gasifier. The equilibrium constants of these reactions and equilibrium concentrations of the components of the synthesis gas under actual conditions were calculated.

**Key words:** thermodynamic analysis – coal gasification – synthesis gas – equilibrium constant – the equilibrium concentration.

УДК 551.24 (575.3)

А.Р.ФАЙЗИЕВ, Ф.А.ТАКРАНОВ\*, А.Б.ДЗАЙНУКОВ\*, А.Т.МУТАВАЛИЕВ\*\*

**ТЕКТОНИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ДАЕК И  
СКАРНОВО-РУДНЫХ ТЕЛ НА МЕСТОРОЖДЕНИИ АЛТЫНТОПКАН  
(СЕВЕРНЫЙ ТАДЖИКИСТАН)**

*Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии  
АН Республики Таджикистан,*

*\*Институт геологии рудных месторождений, петрографии, минералогии и геохимии  
(ИГЕМ) РАН,*

*\*\*Горно-металлургический институт Таджикистана*

*Поступила в редакцию 22.10.2014 г.*

*В статье, на примере месторождения Алтынтопкан (Зарнисор), рассматриваются тектонические условия формирования даек и скарново-рудных тел.*

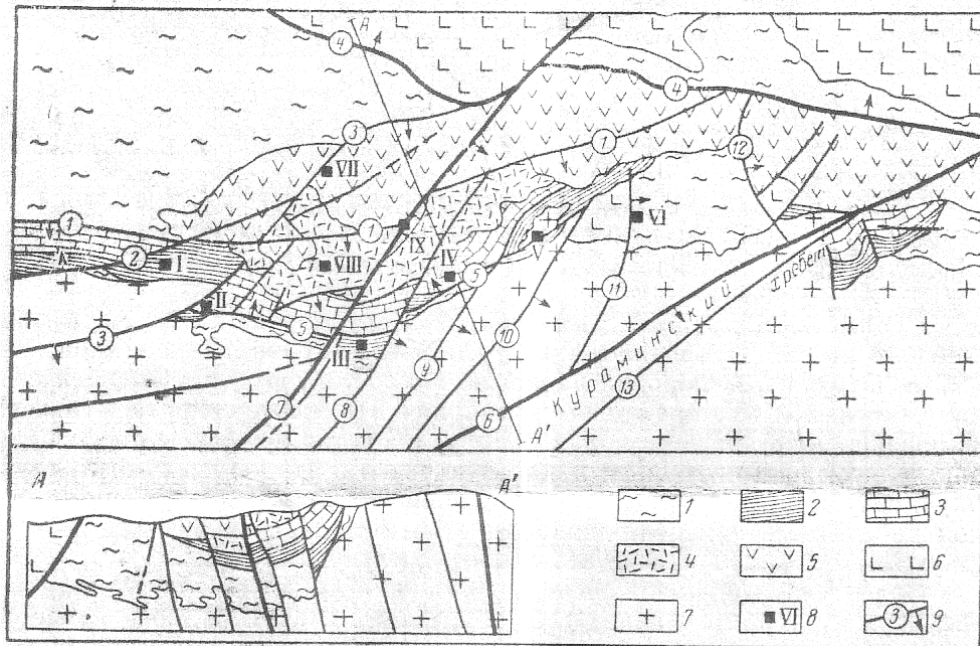
**Ключевые слова:** тектонические условия – дайка – скарн – оруденение – Алтынтопкан – месторождение – структура.

В решении проблем образования эндогенных залежей различных типов руд важное значение имеют тектонические условия формирования, а также связи оруденения с интрузивными и другими разновозрастными типами магматических горных пород. Характер проявления тектонических напряжений периода рудообразования является одним из главных факторов, определяющих особенности пространственного распределения оруденения.

Выявления этих факторов необходимы при выборе наиболее оптимальных методов и средств при разведке и освоении месторождений полезных ископаемых. Эти вопросы рассмотрим на примере скарново-полиметаллических месторождений Алтынтопканского рудного узла (рис. 1), по которым существуют две точки зрения.

---

*Адрес для корреспонденции: Файзиев Абдулхак Раджабович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии АН РТ. E-mail: faiziev38@mail.ru*



**Рис.1.** Схема геологического строения Алтынтопканского рудного узла: 1 – сланцы (O-S); 2 – слоистые известняки и доломиты ( $D_2+D_3$ ); 3 – массивные и грубослоистые известняки ( $C_1$ ); 4 – вулканогенные образования ( $C_1-C_2$ ); 5 – вулканиты; 6 – граниты ( $C_2$ ); 7 – гранодиориты ( $C_2$ ); 8 – месторождения; 9 – разломы. Месторождения: I – Ташбулак; II – Аткулак; III – Чалата; IV – Алтынтопкан; V – Ташгезе; VI – Сардоб; VII – Перевальное; VIII – Мышикол; IX – Пайбулак. Разломы: 1 – Касканасайский; 2 – Ташбулакский; 3 – Курбанкульский; 4 – Баштавакский; 5 – Приконтактный; 6 – Железный; 7 – Чалатинский; 8 – Алтынтопканский; 9 – Андабайский; 10 – Ташгезский; 11 – Сардобский; 12 – Арабулакский; 13 – Джангалыкский.

Одни исследователи считают, что рудообразование происходило в обстановке сжимающих тектонических напряжений после внедрения всех видов магматических пород, включая наиболее молодые диабазовые и другие базитовые дайки. По мнению Ф.И.Вольфсона [1], для эндогенного рудообразования в Кармазаре характерны тектонические напряжения сжатия, которые реализовались в виде взбросовых и сдвиговых тектонических нарушений. К другим выводам пришел Г.М.Вировлянский [2], который указывает на проявление растягивающих тектонических усилий при рудообразовании.

Некоторые исследователи региона [3] указывают на многообразие тектонических условий постмагматических процессов. Характерно, что высоко- и среднетемпературное рудообразование контролируется зонами сколовых трещин, а низкотемпературная минерализация - трещинами отрыва при унаследованности плана деформации в предыдущие периоды становления интрузий. При этом на примере некоторых месторождений Кармазара констатируется значение структур, образующихся в условиях стресса и локальной ее разрядки. Например, трещинные рудные тела Шевчуковского месторождения локализова-

ны в отрывных трещинах. На Учочакском месторождении рудные жилы локализованы в сколах северо-восточного, субширотного и субмеридионального направлений.

Среднеазиатские геологи [2,4-9] считают, что процессы рудообразования и магматизма носят взаимно связанный импульсивный характер, когда каждому этапу внедрения интрузий отвечает своя ассоциация скарново-рудных и др. минералов. В то же время самые молодые дайки (диабазовые порфириты и др.) основного состава могут быть до-, внутри- и пострудными. Например, на рис. 2 в дайке диабазовых порфиритов содержатся ксенолиты скарнов, свидетельствующих о додайковом их характере.



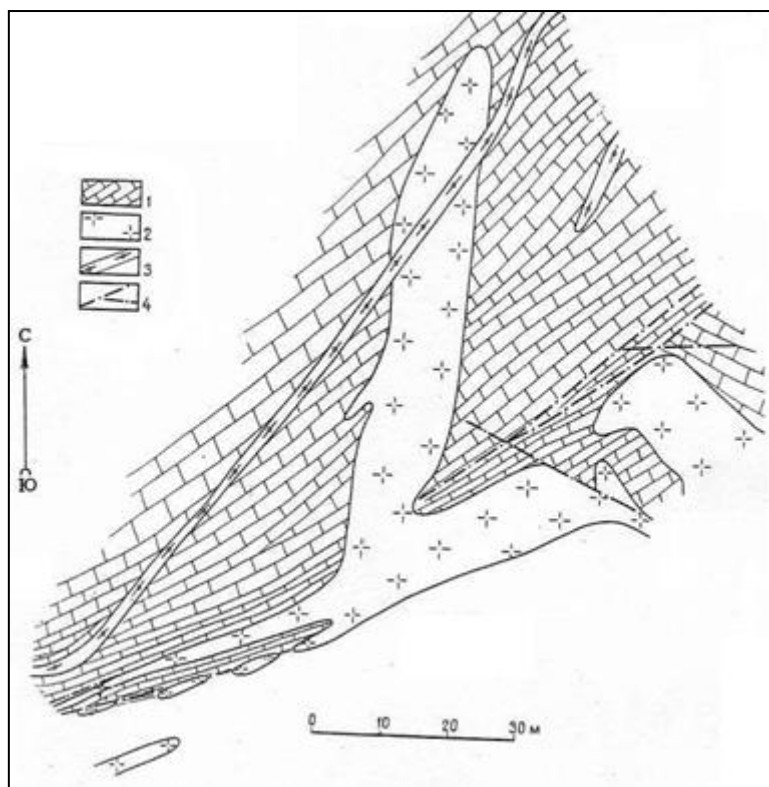
**Рис. 2.** Ксенолиты полосчатых скарнов (слева от молотка) в дайке диабазовых порфиритов, выполняющей трещину отрыва.

На характер процессов тектоно-магматизма и гидротермального минералообразования в Алтынтопканском рудном узле указывают данные о наличии здесь нескольких скарново-рудных (серебро-полиметаллической, золото-серебряной, кварцево-флюоритовой, баритовой, сурьмяно-ртутной и других) минеральных ассоциаций, разделённых дайками основного состава. Взаимная связь даек и скарново-рудных и других типов полезных ископаемых и тектонические условия их формирования на Алтынтопканском месторождении изучались А.В.Королевым, В.А.Королевым, З.А.Мельниченко, Н.Н.Королевой, М.Р.Еникеевым, А.И.Серебрицким, Р.А.Такрановым, В.А.Терентьевым и многими другими. Это наиболее характерный объект, хорошо вскрытый скважинами, карьером и подземными горными выработками по густой сети (30-60м) на глубину более 500 м.

Месторождение Алтынтопкан находится в призмковой части северного крыла Кармазарской антиклинали, сложенного относительно слабо метаморфизованными осадочно-эффузивными породами нижнего палеозоя (O-S), перекрытыми осадочно-вулканогенными отложениями (C<sub>1</sub>-C<sub>2</sub>), которые, в свою очередь, прорваны интрузиями гранитоидов (C<sub>2</sub>) и основных даек. В ядре складки разместился массив гранодиоритов, который тектонически контактирует с горизонтами вулканогенно- и терригенно-осадочных пород Д<sub>2</sub>-С<sub>1</sub>. Этот контакт представляет собой вытянутую зону многочисленных крутопадающих даек, расчленяющих и пересекающих тектонические пакеты и блоки вулканогенно-осадочных пород Д<sub>1</sub>, участками рассланцованных и интенсивно трещиноватых и с множеством крупных сколовых нарушений. Мощность этой зоны, называемой Приконтактовым разломом, 60-200 м, падение его крутое, чаще на северо-запад. Скарно-

во-рудные тела обычно чаще локализуются на контакте даек и карбонатных пород (известняки, доломиты, мергели, мраморы и др.) в виде невыдержанных и расщепляющихся линзо- и пластообразных залежей («Главная рудная зона»). Севернее этой зоны среди карбонатного массива Д<sub>2</sub>-С<sub>1</sub> расположены Центральная и Северная группы рудных тел, месторождение Северный Алтынтопкан, структурно контролируемых субсогласными и секущими разно ориентированными каркасными разрывными нарушениями.

Глубокое заложение Приконтактового разлома, вмещающего на Кичикае трубки взрыва базальтоидов, достаточная его проницаемость и насыщенность разновозрастными гранитоидными и основными дайками, а также наличием здесь интенсивно деформированных карбонатных пород, создают благоприятные условия для метасоматического минералообразования и формирования в зоне его влияния мощных промышленных скарново-рудных тел. На месторождении ярко проявляется закономерная приуроченность скарново-рудных тел к разрывным элементам структуры и насыщенность дайками гранитоидов (рис. 3).



**Рис. 3.** Взаимоотношения даек гранит-порфира и диабазового порфирита в карбонатной толще:  
1 – известняки, 2 – гранит-порфиры, 3 – диабазовые порфириты, 4 – разрывы.

Одним из авторов (Р.А.Такрановым) и А.И.Серебрицким на объекте проводились крупномасштабные геолого-структурные (1:10-1:500) съёмки горных выработок и скважин. Более тщательная документация проводилась на участках контактов различных пород, жил, даек и зон тектонических нарушений. Детальность и высокая достоверность

полевых наблюдений в значительной мере были обеспечены применением разработанного авторами метода геологической фотодокументации. Кроме того, при исследованиях разрывных нарушений (системы трещин) Р.А.Таркановым [10, 11] широко использовалась разработанная им методика палеокинетической реставрации структуры приконтактной зоны разломов. В результате применения этой методики подтвердилась ранее установленная в зоне последовательность внедрения малых интрузий (даек): гранодиорит-порфиры, гранит-порфиры, кварцевые порфиры, диабазовые порфириты, реже лампрофиры и плагиопорфириты. Часто дайки гранит-порфиров и кварцевых порфиров имеют сложное строение, с переходом одних разностей пород в другие. С помощью изучения взаимоотношений даек со скарнами удалось разделить последние на два типа. Ранние скарны отличаются разнообразием скарновых минералов и роговиковым строением. Более поздние скарны, преимущественно гранат-пироксеновые, крупнозернистые, часто развиваются по ранним скарнам и обладают зональным строением [12].

На скарны обычно наложено среднетемпературное полиметаллическое оруденение и ассоциирующие с ним кварц, эпидот, флюорит, кальцит и т.п. Минералы последующих низкотемпературных гидротермальных процессов слагают кварц-кальцитовые, кварц-флюоритовые и сульфидные прожилки и жилы. Полиметаллические рудные тела преимущественно вкрапленные и прожилковые и не имеют четких геологических границ. Схожесть структурных условий формирования и локализации скарнов и руды, а также идентичность химического состава основных минералов обоих типов скарнов затрудняют четкое выделение залежей различных скарново-рудных и других минеральных ассоциаций.

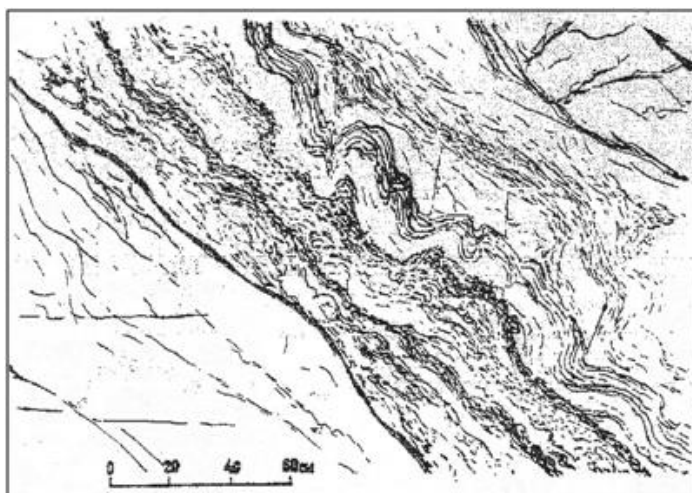
Тектонический анализ скарново-рудных тел соответственно проводился для доскарнового, дорудного (внутрискарнового) и дожилкового стадий процессов минералообразования, разделенных дайками основного состава. Закономерности развития структуры и локализации оруденения объясняются посредством использования схемы эллипсоида деформации и установления на участках тектонических условий растяжения и сжатия. На внедрение в доскарновый период развития структуры месторождения даек основного состава указывают наличие в скарнах ксенолита измененного диабазового порфирита (штольня 7, +1584) и развитие на контактах даек со всех сторон контактовых зоннок мелкозернистых гранат-пироксеновых скарнов.

В лежащем боку Главной рудной зоны (в полевом штреке, в камере скв. 95, орте 2.4, +1370 м и др. участках) вмещающие породы на контактах даек гранитоидов находятся в виде оторочек разной мощности (орт 24, +1640 м и +1584 м), а некоторые из этих даек пересечены более молодыми дайками порфиритов. Во внутрискарновых дайках наблюдаются галенит-сфалеритовая минерализация (орт 22, 30, +1584 м, рас. 9 шт. 6) и богатые скопления руд на их контактах с вмещающими породами (орт 26, 30, +1584 м, орт 4, +1440 м и др.). В дайках (орт 1, +1370 м, орт 30, +1584 м), секущих роговиковые скарны, часто встречаются ксенолиты вмещаемых пород. Вдоль контакта дайки (орт 1) и ксеноли-

тов в секущих трещинах наблюдаются скопления сульфидов и геденбергита, свидетельствующие о том, что внедрение дайки произошло после формирования ранних скарнов и до образования молодых (геденбергитовых) скарнов и наложенных на них сульфидных руд. Этой же дайкой (в орте 0) экранируется более молодая дайка основного состава, претерпевшая эпидотизации. Этот пример свидетельствует о внутрискарновом возрасте даек, делящих процесс на два периода (центральный карьер). Кроме того, жилы кальцита, кварца, флюорита с пиритом и эпидотом секут нередко дайки или располагаются вдоль их контактов, причём жилы образованы при простом заполнении ими трещинного пространства (орты 10, 28, 30, штрек +1584 м и др.).

Установленные на месторождении Алтынтопкан закономерности развития тектоно-магматических и скарновых процессов использованы для изучения тектонических условий образования даек и оруденения и способствуют решению проблемы пространственной связи полиметаллического оруденения с малыми интрузиями. Выполненными исследованиями установлено, что наиболее интенсивное проявление каледонского, варисского и альпийского этапов тектогенеза происходило при субмеридиональной ориентировке сжимающих усилий, а тектонический план деформации в крупных блоках определялся подвижками по разломам, ограничивающим эти блоки. Соответственно, тектонические планы деформаций на месторождении Алтынтопкан определились характером перемещений по сколам в зоне Приконтактового разлома, а также Андабайскому и Алтынтопканскому поперечным разломам.

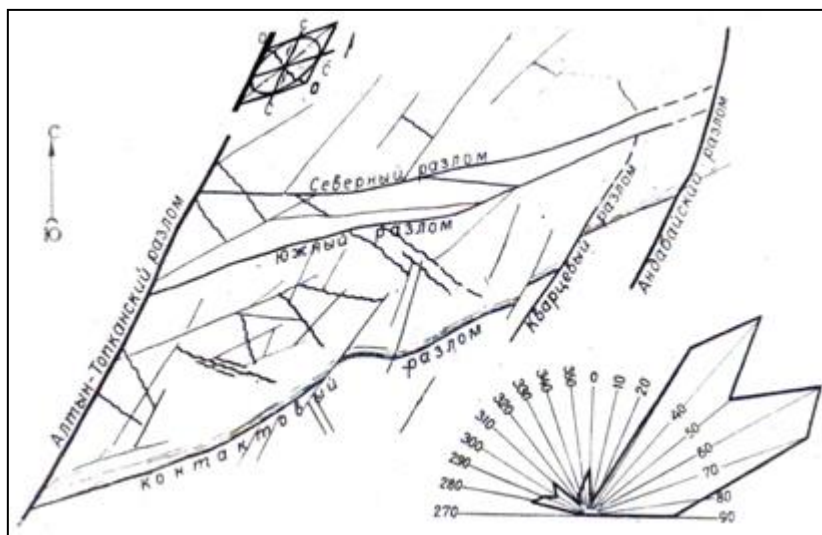
На взбросовый характер смещений в период внедрения даек указывают наблюдаемые в горных выработках рудника, в зоне Приконтактового разлома, асимметричные складки волочения и межпластовые срывы (рис. 4). Они пересекаются самыми древними дайками гранодиорит-порфиров. Перед внедрением даек Алтынтопканская карбонатная гряда и Приконтактовый разлом были смещены отмеченными поперечными разломами по схеме субмеридионального сжатия.



**Рис.4.** Асимметричные складки волочения в милонитизированных известняках. Зарисовка с фотографии (западная стенка расс. 11, гор. 1640 м)

Пространственное и взаимное положение элементов додайковмещающих разрывов Алтынтопкана изображено на схематической карте реставрации разломов того периода (рис. 5). На карте видно, что деформации особенно интенсивны на участках, прилегающих к Алтынтопканскому разлому, что иллюстрируется эллипсоидом деформации,

причём максимум розы-диаграммы (30-40°) отвечает поперечным и параллельным разломам (60-70 (90°), оперяющим сколам (С-С на эллипсоиде – 280-300°), и оперяющим трещинам отрыва (0-0 на эллипсоиде).



**Рис. 5.** Схема развития разрывной тектоники Алтынтопканского месторождения в додайковый период развития элементов структуры.

В додайковый период образовались разломы 4 порядка (Северный, Кварцевый и др.), которые оперяют разломы 3 порядка. Такие разломы чётко прослеживаются на поверхности и детально изучены в выработках эксплуатационных горизонтов рудника.

При анализе тектонических условий формирования даек целесообразно различать тектонику периода непосредственного внедрения даек и «междайковые» периоды до очередной инъекции. Внедрение даек происходит в режиме растяжения и значительного уменьшения сжимающих усилий. Такие деформационные условия приоткрывания разрывов способствовали внедрению интрузий и подосу гидротермальных растворов. В междайковый период преобладают сжимающие напряжения. Общей закономерностью формирования даек и скарно-рудообразования является их внедрение в трещины отрыва в зоне крупных разломов (рис. 6-8).

На розе-диаграмме (рис. 6) выделяются 2 взаимно перпендикулярных максимума (300-320° и 30-60°), отражающих закономерности пространственного положения наиболее ранних гранодиорит-порфировых даек 1 этапа. Преобладание северо-западного максимума указывает на отмеченную закономерность внедрения даек в наиболее раскрытые отрывные трещины северо-западного простирания.



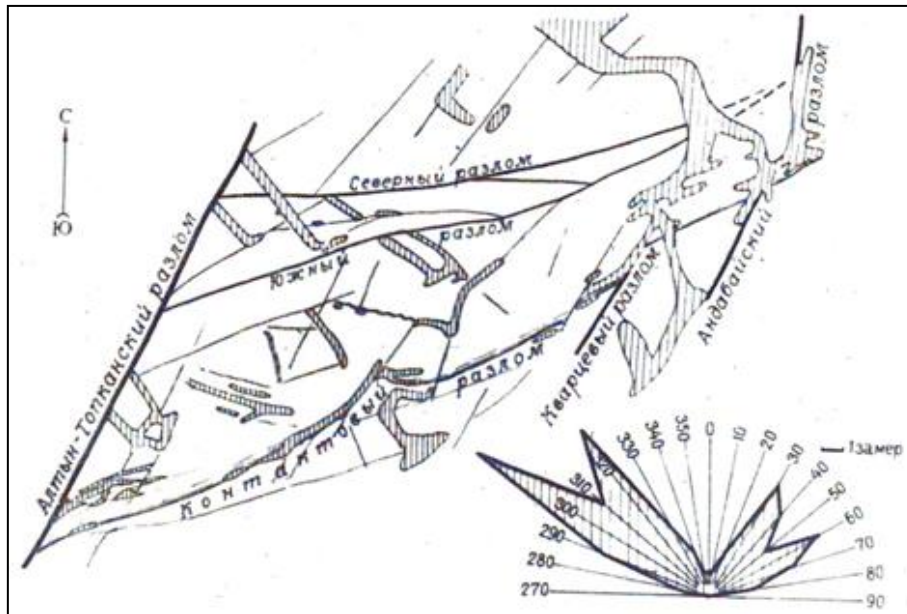


Рис. 6. Схема развития разрывной тектоники Алтынтюпканского месторождения при образовании даек гранодиорит-порфиров.

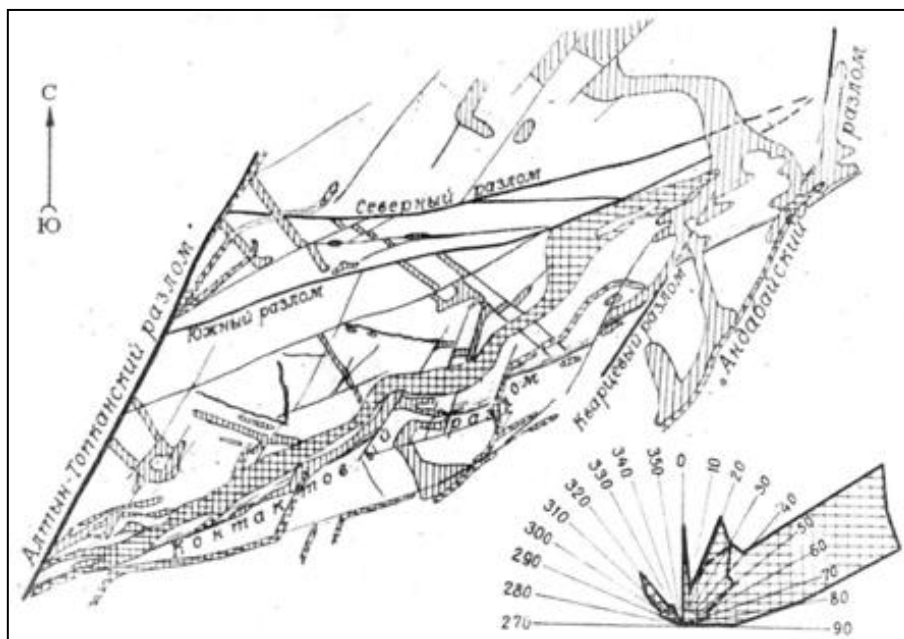
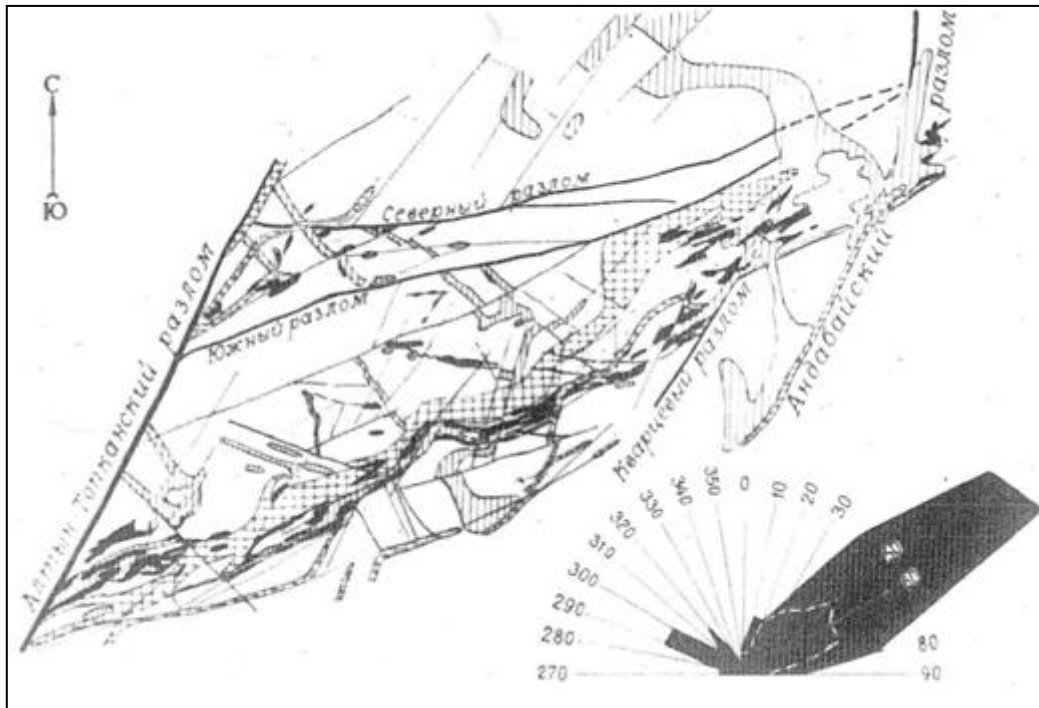


Рис. 7. Схема развития разрывной тектоники Алтынтюпканского месторождения в период внедрения даек гранит-порфиров и кварцевых порфиров.

Из северо-восточных разрывов относительно более благоприятными для внедрения интрузий были зоны крупных разломов Приконтактового, Андабайского, Кварцевого и т.п. Суммарное значение мощностей даек выделенных двух направлений отличается лишь на 10%.

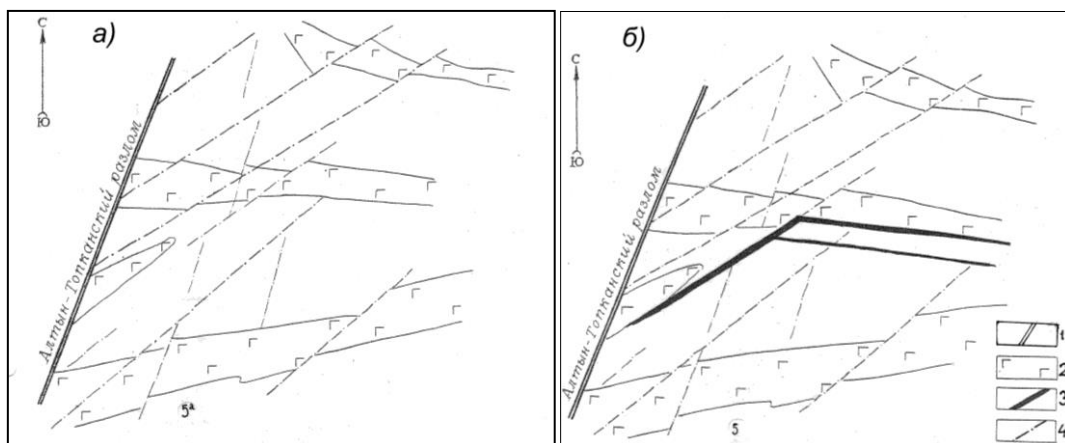


**Рис. 8.** Схема развития разрывной тектоники Алтынтюпканского месторождения в период развития скарно- и рудообразования.

В местах пересечения и сочленения дайковмещающих разрывов гранодиорит-порфиры имеют разноориентированные апофизы, коленообразную и более сложную форму, в целом соответствующую угловому соотношению вмещающих элементов структур. Многочисленные примеры таких даек установлены горными работами на Северном Алтынтюпкане на сочленении зоны Приконтактового разлома с секущими разломами 4 порядка (орты 8-10, 30). Даже в условиях однонаправленности зоны Приконтактового разлома дайки имеют сложную и коленообразную форму. Например, протяженная дайка гранодиорит-порфиров коленообразно меняет свое простирание от  $0-10^{\circ}$  (орты 9-11) до  $45^{\circ}$  и  $90-100^{\circ}$ . В расс.9 штольни 6 наблюдается ступенчатый контакт дайки со скарнами.

Рассмотренные морфогенетические и пространственные закономерности размещения даек указывают на растягивающий характер тектонических напряжений периода внедрения малых интрузий. Напряжения периода внедрения даек гранодиорит-порфиров сменяются в более позднее междайковое время на сжатие, которое проявилось в виде сдвигов по основным поперечным и оперяющим разломам. При обновлении ранее сформированных сколов оперения с простиранием  $30-60^{\circ}$  юго-восточные блоки перемещались к северо-востоку на Северном Алтынтюпкане (штольня 9 и др.) и в Главной рудной зоне вблизи Алтынтюпканского разлома (орты 25-29, +1512м). По вновь сформированным трещинам дайки смещены в обратном направлении. Смещения даек в центре месторождения обусловлены подвижками по поперечным разломам. Сдвиговые смещения гранодиорит-порфиров отвечают общему субмеридиональному плану деформации в центре

Алтынтопканского блока. Некоторые дайки гранодиорит-порфиров, в северо-западных разломах, подверглись дроблению в Главной рудной зоне (орты 14-24). В этот период происходит дальнейшее развитие и обновление поперечных разломов 4 порядка, секущих гранодиорит-порфиры в зоне Приконтактового разлома и на Северном Алтынтопкане. В результате подвижек по Алтынтопканскому разлому по схеме сколового оперения обновилась примыкающая к нему западная часть Приконтактового разлома. Обновление произошло со стороны висячего бока, ибо лежащий бок был «залечен» дайками гранодиорит-порфиров (рис. 9, а). В дальнейшем в большинстве отмеченных разрывов внедрились более молодые дайки гранит-порфиров и кварцевых порфиров. Поздние отрывы и сколы выполнены дайками диабазовых порфиритов двух направлений простирания (рис. 9, б). При формировании даек 2 этапа вновь проявляются растягивающие деформации и условия разгрузки напряжений сжатия, что способствовало инъекции магмы в трещины разной ориентировки. На это указывают два взаимно перпендикулярных максимума на роза-диаграмме. Преобладание северо-восточного максимума указывает на исключительно благоприятные условия для локализации даек в зоне Приконтактового разлома и «залеченность» северо-западных трещин более ранними дайками. Роза-диаграмма характеризует сопоставимые структурно-тектонические условия на всех участках месторождения. В этих условиях многие северо-восточные сколовые трещины, сместившие гранодиорит-порфиры (орты 29-21, штол.9, 9<sup>а</sup>), были дайками 2 этапа. Для даек 2 этапа также характерны коленообразная форма и ступенчатость контакта, которые указывают на растягивающие условия при их образовании. Наиболее ярким примером служит дайка гранит (микрогранит)-порфира, прямоугольные изгибы которой прослеживаются (рудоспуск № 2) на глубину более 500 м.



**Рис. 9.** а – оперяющие отрывные и сколовые нарушения в висячем боку Алтынтопканского разлома (1) выполнены дайками гранит-порфиров (2). При образовании сколов эти дайки подвержены левым сдвигам (4); б – поздние отрывы и сколы выполнены дайками диабазовых порфиритов (3).

Следует отметить, что большинство гранитоидных даек в вертикальном разрезе имеют увеличенную мощность на участках с более крутым углом падения, что также ука-

зывает на действие растягивающих и сбросовых движений по контролирующим нарушениям в период становления интрузий. После внедрения даек 2 этапа, при очередном тектоническом импульсе, происходит сжатие. Сохранение предыдущего последайкового плана деформации даек этого этапа на восточном фланге месторождения объясняется, как и в центре месторождения, общим планом деформации Алтынтопканского блока и незначительным влиянием подвижек по близрасположенным поперечным разломам 3 и 4 порядков (Андабайскому и др.), залеченным к тому времени дайками 1 и 2 этапов внедрения. В зоне некоторых северо-восточных разломов, по которым смещены дайки 2 этапа и отрывных северо-западных нарушений, часто заполненных дайками более ранних этапов внедрения, разместились дайки диабазовых порфириров 3 этапа, взаимно располагающихся под углами 60-90° (орты 29-21).

На растягивающие деформационные условия формирования диабазовых порфириров указывают: 1) постоянная мощность протяжённых (сотни метров) даек, выполняющих сколовые трещины; 2) коленообразные изгибы и постоянная мощность нередко на взаимно перпендикулярных гранях контролирующих нарушений (орт 1, +1370м, штол.7 и др.); 3) ступенчатые и угловатые формы контактовых поверхностей взаимно подобных на противоположных стенках (орт 24, +1640м, орт 0, +1370м и др.); 4) прямое раздвижение стенок дайковмещающих структур; 5) наличие в дайках отторгнутых и отщеплённых ксенолитов, по форме подобных морфологии поверхностей контактов пород; 6) одинаковая ориентировка полосчатости ксенолитов и боковых пород.

Рассмотренные морфологические особенности малых интрузий и их пространственные соотношения свидетельствуют о действии режима растяжения и соответственно о значительном ослаблении сжимающих усилий при формировании даек и оруденения. На преобладание растягивающих результирующих тектонических напряжений при скарново-рудном процессе указывает также почти взаимное перпендикулярное пространственное положение крутопадающих скарново-рудных тел. Тектоно-деформационные условия скарново-рудного процесса характеризуются унаследованностью планов деформации предыдущих периодов дайкообразования, о чём свидетельствуют локализация скарново-рудных тел и даек в одних и тех же тектонических элементах структур. Ортоклаз-эпидотовые жилы замещения, наблюдаемые в лежащем боку Главной рудной зоны Алтынтопкана, растянуты по серии сбросовых смесителей, метасоматически залеченных той же минерализацией. В полосчатых скарнах встречаются ксенолиты слоистых известняков, форма и положение которых относительно прилегающих карбонатных пород указывают на сбросовое их отторжение (орт 22, +1584 м). Деформационные условия внутри рудного периода иллюстрируют сбросовые нарушения жилообразных тел, представленных ранним кварцем с сульфидами (орт 20, +1584), галенитом и сфалеритом (орт 29, +1512 м) и др. Все смесители залечены той же минерализацией, амплитуда смещения не более 0.5-1.0 м. На месторождении часто встречаются мелкие (до 0.1-0.2 м) внутрирудные сбросы.

В целом на сбросовой характер тектонических подвижек скарново-рудного периода, наряду с другими факторами, указывает увеличение мощностей рудных тел на 80% и более на крутопадающих участках Главной рудной зоны. Участки пересечения отдельных зон мелкой трещиноватости, трещин напластования и других нарушений более крупными рудораспределяющими поперечными разломами, обычно характеризуются интенсивной рудоносностью. В главной рудной зоне такая закономерность прослеживается на участках ортов 3-9, 6-8, 16 и 20 на всех горизонтах рудника. Тектонические условия скарново-рудного процесса можно характеризовать по пространственному положению трещинных жил метасоматического замещения. На круговых диаграммах ориентировки жил замещения, построенных для многих сотен замеров, выделяются два сопряжённых почти взаимно перпендикулярных направления с максимумами, отвечающими крутопадающим рудным телам и жилам северо-восточного (основная система) и северо-западного простирания. Значительное развитие имеют наклонные жилы северо-восточного простирания, которые почти перпендикулярны общему напластованию осадочных пород. На верхних горизонтах широко проявлены очень пологие разноориентированные и горизонтальные жилы.

Наши данные о структурных условиях локализации скарново-рудных тел в зоне Приконтактового разлома, а также незначительная интенсивность здесь внутрирудной тектоники противоречат представлениям некоторых исследователей о крупных сдвигах в период рудообразования. Они якобы привели к приоткрыванию искривленных участков Приконтактового разлома и способствовали образованию приоткрытых полостей, вмещающих мощные и обогащенные рудные тела. Ко времени рудообразования Приконтактовой разлом не был единой зоной, а был разбит на блоки, смещенные поперечными разрывными нарушениями, часто залеченных дайками.

После образования среднетемпературных галенит-сфалеритовых рудных тел проявляются сжимающие деформации. При этом по северо-восточным и (35-45°, угол 70° и 225°, угол 78°) и северо-западным (115°, угол 70° и 315°, угол 80°) нарушениям наблюдаются небольшие смещения руды и четкие борозды сдвигов, отвечающих субмеридиональному плану деформаций. В ортах 15 и 21 некоторые из смещений пересекаются кварц-кальцитовыми жилами. Следовательно, при образовании низкотемпературных гидротермальных кварц-кальцитовых жил преобладали растягивающие тектонические напряжения и происходила локальная разгрузка сжатия, приоткрывание и заполнение трещин материалом жил, что подтверждает: 1) наличие дожилых сбросов, в смесителях которых наблюдаются одинаковая с жилами минерализация, а также сбросов со смесителями, выполненными кальцитом и другими низкотемпературными минералами (барит, флюорит и др.) в оперяющих трещинах (расс. 16, штол. 7; орт 10); 2) подобием противоположных контактов жил (орт 2, +1370м, штол. 7 и др.); 3) пересечением жил разного состава под разными углами (полев. штрек +1584м); 4) наличием двух взаимно перпендикулярных максимумов - 320-330° (140-160°) и 40-60° (210-230°). Жилы заполнения часто

локализуются, унаследовав полости размещения более ранних жил замещения, образовавшихся в условиях растяжения (полевой штр., орт 4, +1640 м и др.).

Уменьшение интенсивности тектонических напряжений в периоды растяжений по мере развития магматических и гидротермальных процессов, можно подтвердить изменением мощности магматических и гидротермальных жил заполнения, а для периода сжатия - изменением амплитуд смещения этих тел. Закономерное уменьшение интенсивности тектонических напряжений, по мере формирования месторождения, проявляется и в послерудный период (смещения рудных тел более 1 м не установлены). Иногда наблюдается (орт 25, +1370 м) дробление сульфидных тел, а секущие кварцевые жилы сохраняют свою целостность. Условия проявления послерудных тектонических деформаций характеризуются действием простых и унаследованных планов напряжений. Об этом свидетельствует простая двухсистемная сеть трещиноватости (орт 24, +1640 м). На диаграмме выделяются два чётких взаимно перпендикулярных максимума крутопадающих трещин  $300-335^\circ$  ( $120-145^\circ$ ) и  $35-70^\circ$  ( $205-240^\circ$ ), свидетельствующих о субмеридиональной ориентировке главных тектонических напряжений. Данный план деформации сохранился при альпийском тектогенезисе, выраженном в трещиноватости пологих палеогеновых ракушечников ( $0-6^\circ$ ) севернее месторождения. Две одинаково проявленные системы вертикальных трещин ориентированы по азимуту  $37$  и  $125^\circ$  (среднее максимумов розы-диаграммы). По данным Ю.Л.Лихачева [13], рудообразование в районе завершается до мелового времени.

Рассмотренные закономерности тектонических условий рудообразования имели место и на других месторождениях Алтынтапканского рудного узла. В этом можно убедиться, если проанализировать морфогенетические характеристики рудных тел, приведенные В.А.Королевым [14]. Метасоматические рудные тела, контролируемые сколовыми элементами структур, образовались, в большинстве случаев, в условиях общего или местного растяжения, после локальной разгрузки напряжений. Проявление действия растягивающих и сжимающих деформаций в связи с неодинаковыми тектонофизическими и геологическими условиями происходит на разных участках и направлениях по-разному, что является одной из причин неравномерного пространственного распределения даек и интенсивности оруденения.

Длительные периоды формирования интрузивных и рудных залежей характеризуются преобладанием растягивающей тектонической обстановки или разгрузкой напряжений сжатия. В эти периоды происходит смена мелких импульсов напряжений разного знака. Поэтому, видимо, можно говорить только о преобладании того или иного знака напряжений, а границы (ареолы) и периоды проявления напряжений разного знака следует считать условными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вольфсон Ф.И. Структура и генезис свинцово-цинковых месторождений Юго-Западного Карамазара. – М.: Изд. АН СССР, 1951, 110 с.
2. Вировлянский Г.М. – Советская геология, 1956, №50, с. 67-89.

3. Шихин Ю.С. и др. В сб.: Вопросы методики составления металлогенических и прогнозных карт. – Киев: Изд. АН УССР, 1960, с.110-116.
4. Наследов Б.В. Карамазар. – Л.: Изд. Тадж.-Памир.эксп., 1935, 410с.
5. Карпова Е.Д. – Советская геология, 1948, №34, с. 14-27.
6. Вольфсон Ф.И. и др. – Зап. Узбекист. отд-ния ВМО, 1958, вып.12, с. 115-120.
7. Нечелюстов Н.В., Шехтман П.А., Шихин Ю.С. – Сб. матер. по геол. цвет., редких. и благородн. металлов, вып.№3, 1958, с. 3-42.
8. Арапов В.А., Базиль В.Ф. – Узбек. геолог. журнал, №5, 1959, с.3-5.
9. Королев А.В. – Тр. Среднеазиатского политехнического института. Новая серия, вып. 6, 1959, с. 5-46.
10. Такранов Р.А. – Геотектоника, вып. №5, 1971, с. 52-66.
11. Такранов Р.А., Шустерман А.С. – Геологическая фотодокументация горных выработок. – М.: Недра, 1984, 158 с.
12. Серебрицкий А.И. В сб.: Вопросы геологии и генезиса полезных ископаемых. – Л.: Изд. ЛГУ, вып. 1, 1966, с.125-133.
13. Лихачев Ю.А. – Изв. отд. естест. наук АН ТаджССР, 1950, вып. 1 (28), с. 71-78.
14. Королев В.А. – Труды САИГИМС, вып. №4, 1964.

А.Р.ФАЙЗИЕВ, Р.Л.ТАКРАНОВ\*, А.Б.ДЗАЙНУКОВ\*, А.Т.МУТАВАЛИЕВ\*\*

**ШАРОИТҲОИ ТАШАККУЛ ЁФТАНИ ДАЙКАҲО ВА ЧИСМҲОИ  
МАЪДАНИ - СКАРНИ ДАР КОНИ ОЛТИНТОПКАН  
(ТОҶИКИСТОНИ ШИМОЛӢ)**

*Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи  
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,*

*\*Институти геологияи конҳои маъдан, петрография, минералогия ва геохимияи АИР,*

*\*\*Институти кӯҳӣ-металлургии Тоҷикистон*

Дар мақола, дар мисоли кони Олтинтопкан (Зарнисор), шароитҳои ташаккул ёфтани дайкаҳо ва ҷисмҳои маъданӣ-скарнӣ дида баромада шудаанд.

**Калимаҳои калидӣ:** шароитҳои тектоникӣ – дайка – скарн – маъдан – Олтинтопкан – кон – сохтор.

A.R.FAYZIEV, R.L.TAKRANOV \*, A.B. DZAYNUKOV\*, A.T.MUTAVALIEV\*\*

**CONDITIONS OF TECTONIC DIKES AND SKARN ORE BODIES ON ALTINTOPKAN FIELD (NORTHERN TAJIKISTAN)**

*Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology,  
Academy of Sciences Republic of Tajikistan,*

*\*Institute of Geology of Ore Deposits, Petrography, Mineralogy and Geochemistry  
(IGEM) RAS,*

*\*\*Mining and Metallurgical Institute of Tajikistan*

In an article for an example of deposit Altintopkan (Zarnisor) discussed the tectonic conditions of formation of dikes and skarn ore bodies.

**Key words:** tectonic conditions – dike – skarn – mineralization – Altintopkan – field – structur.



УДК 606.620.95

Х.М.АХМЕДОВ, К.ПАРТОЕВ\*, Г.А.ТАШБАЕВ

**ТОПИНАМБУР (*HELIANTUS TUBEROSUS* L.) – ПЕРСПЕКТИВНАЯ  
КУЛЬТУРА ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВА БИОТОПЛИВА В ТАДЖИКИСТАНЕ**

*Центр инновационного развития науки и новых технологий*

*АН Республики Таджикистан,*

*\*Институт ботаники, физиологии и генетики растений*

*АН Республики Таджикистан*

*Поступила в редакцию 30.04.2014 г.*

*В работе на основе анализа данных литературы и результатов опыта учёных Таджикистана показана народнохозяйственная, энергетическая значимость и перспективность использования нетрадиционной многоцелевой сельскохозяйственной культуры – топинамбура. В статье приводятся общие сведения о традиционных и нетрадиционных видах культур, которые могут быть использованы в качестве сырья для получения биотоплива.*

**Ключевые слова:** биотехнология – растительное сырьё – биоэнергетика – биотопливо – топинамбур – урожайность – биоэтанол – нетрадиционные виды сырья – спиртовая промышленность – углеводы.

Современные биотехнологии, высокопродуктивные методы переработки и утилизации растительного сырья играют важную роль в решении ряда продовольственных, фармацевтических, экологических и других проблем [1,2].

Мировой опыт показывает, что ни одно государство не может динамично развивать свою экономику без развития энергетической отрасли и достижения энергетической независимости. Развитие биоэнергетики является одной из актуальнейших проблем современного человечества. В этом отношении для Таджикистана наряду с развитием гидроэнергетики актуальным является и развитие биоэнергетики. Для производства энергии мир вступает в эру экономики, использующей возобновляемое сырьё для производства энергии [3,4].

---

*Адрес для корреспонденции:* Ахмедов Хаким Мунавварович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/3а, Центр инновационного развития науки и новых технологий АН РТ.  
*E-mail:* khakim48@mail.ru

Основными причинами, побудивших интерес в мировом сообществе к использованию возобновляемых источников энергии, являются:

- истощение природных ресурсов, в том числе углеводородных ресурсов (нефти, газа) в будущем;
- устойчивая тенденция роста потребления углеводородного сырья;
- трудности добычи и доставки углеводородного сырья его потребителям;
- повышение уровня парниковых газов в атмосфере и изменение климата, которые являются причиной техногенных катастроф;
- рост населения и увеличение потребления продуктов питания.

В связи с этим в ряде промышленно развитых странах разработаны и реализуются программы развития биоэнергетики и стратегия развития этого рынка [1].

Развитие биоэнергетики предполагает использование в качестве сырья биомассы растений как биологически возобновляемый ресурс. В последние годы в мире активно ведутся работы по созданию новых и совершенствованию ранее разработанных промышленных технологий переработки растительной массы в моторное топливо, альтернативное топливу углеводородного происхождения [5-7].

Сегодня в мире существенно увеличивается спрос на биотопливо для двигателей внутреннего сгорания. Потребление биоэтанола в мире ещё в 2006 г. достигло около 40 млрд. литров. Крупнейшими производителями биотоплива в Европе являются Германия, Испания, Франция, Италия, Бразилия и США. Европейское сообщество ставит задачу о существенном увеличении производства биотоплива к 2020 г. [1].

И здесь Таджикистан, не обладая природными запасами ископаемых источников углеводородного сырья, не должен оставаться в стороне от производства возобновляемых источников сырья для развития альтернативной энергетики, которые принципиально отличаются от традиционного углеводородного сырья (нефти) своей неисчерпаемостью и экологической чистотой.

Относительно получения биотоплива, то с технологической точки зрения сырьем для производства спирта биохимическим способом может служить любой материал, содержащий сбраживаемые сахара или углеводы, которые могут быть превращены в сбраживаемые сахара [8].

Необходимо отметить, что в производстве спирта используется сырьё, которое должно получаться в больших количествах. Существуют много разнообразных растений, растущих в диком виде и содержащих сахар (различные ягоды, плоды, травы, сок берёзы, клёна и др.) или крахмал (желуди, конские каштаны, водоросли и др.) или инулин (корни подсолнечника, одуванчика и др.). Но все эти растения не образуют больших массивов и сбор их в количествах, достаточных для организации производства спирта, затруднен.

Некоторые материалы имеются в больших количествах (картофельная ботва, речные водоросли, стебли сорго и др.), но содержание в них сахара или крахмала настолько низко, что их переработка на спирт экономически не оправдана. В интересах народного хозяйства из возможных видов сырья исключают многие продукты, служащие традици-

онным источником питания. Использование в качестве сырья для получения биоэтанола зерна, пшеницы и кукурузы и других сельскохозяйственных культур уже привели к повышению мировых цен на зерно и продукты питания. По совокупности всех признаков в настоящее время основными видами сырья для производства спирта могут быть:

- крахмалосодержащее сырьё (картофель, зерновые культуры);
- сахаросодержащее сырьё (кормовая патока, сахарная свекла, тростниковый сахар);
- нетрадиционные виды сырья (цикорий, топинамбур, сорго, вика, зерновые смеси, тростник, амарант).

Для Таджикистана использование картофеля и зерновых культур для получения биоспирта нецелесообразно, поскольку они относятся к основным пищевым продуктам, используемым населением и применяемым в качестве корма для скота и птиц. В нынешних экономических условиях страны, кормовая патока в качестве сырья для получения биотоплива также не подходит, поскольку кормовая патока это отход свеклосахарного производства, а его, как известно у нас пока нет.

Спиртовая отрасль - материалоемкая, в структуре себестоимости спирта сырьё занимает более 60% от общих затрат, поэтому замена его на нетрадиционное более дешевое сырьё позволит повысить рентабельность производства и одновременно сэкономить ценные пищевые ресурсы - зерно [9].

В качестве нетрадиционного альтернативного возобновляемого сырья для производства спирта могут подойти материалы, содержащие сахар или полисахариды, которые в результате гидролиза превращаются в сбраживающие вещества [10]. Этим требованиям удовлетворяют ряд растительных материалов и некоторые виды сахаросодержащих вторичных продуктов производства.

В работе [9] приведены результаты применения сахарного сорго для спиртового производства. Из 1 т биомассы сорго получено 80 л спирта, а отходы после выработки спирта использованы в качестве топлива.

В работе [11] приводятся данные об использовании в качестве сырья для получения спирта метельчатого зернового амаранта и получении пищевого крепостью 60% об. Описана технологическая схема безотходной переработки амаранта: зерно - для получения спирта, а надземная часть растения – в виде вкусовых микродобавок при изготовлении ликероводочной, слабоалкогольной и безалкогольной продукции.

В качестве альтернативного сырья для производства спирта в работах [12, 13] исследованы ягоды тутового дерева. Отмечено, что применение ягод тутовника при производстве спирта значительно упрощает технологический процесс получения этилового спирта.

Для производства спирта можно использовать нетрадиционные инулинсодержащие виды сырья, в частности цикорий и топинамбур [8].

Среди нетрадиционных видов сырья представитель семейства бобовых вика - малодобное сырьё для производства спирта, а цикорий, хотя и содержит достаточное коли-

чество углеводов, однако он низкопродуктивен и его очень трудно хранить. Сахарную свеклу в качестве сырья лучше использовать для производства сахара, а кормовую патоку от сахарного производства для получения спирта.

Таким образом, для Таджикистана, имеющего горную территорию, высокий прирост населения, ограниченные посевные площади для выращивания сельскохозяйственных культур и не обладающего нефтяными ресурсами, среди нетрадиционных сельскохозяйственных культур сырьём для получения биотоплива и дополнительного корма к ныне существующим может служить высокоурожайное растение с большим содержанием углеводов, которое можно выращивать на заброшенных и малопродуктивных не освоенных землях, не пригодных для культивирования зерновых, масличных, овощных культур, картофеля и др.

К наиболее перспективным нетрадиционным культурам, с позиции производства, использования и переработки сырья представляющим большой практический интерес в решении ряда продовольственных, фармацевтических, экономических, энергетических проблем и вопросов кормопроизводства, относится топинамбур (земляная груша) [1-4].

Топинамбур (*Helianthus tuberosus* L.) -это сладкий и высокопитательный корнеплод, относящийся так же, как и подсолнечник, к семейству сложноцветных. Топинамбур отличается от подсолнечника тем, что он в своей подземной части, подобно картофелю, образует клубни различной величины, формы и цвета. Топинамбур в России называют «земляной грушей», «диким подсолнухом», «солнечным корнем», в Европе - «иерусалимским артишоком», в Казахстане - «китайской картошкой». Научное название земляной груши - «подсолнечник клубненосный».

Родиной топинамбура считается Северная Америка, где он растёт в диком виде и был введён в культуру индейцами до появления там европейцев. В Европу эта культура попала через Францию, где она и получила название «топинамбур» (от названия племени бразильских индейцев – топинамба). В Россию топинамбур попал в начале XVIII века [14].

Нельзя сказать, что эта культура для Таджикистана совсем новая. Земляная груша в Таджикистан была завезена в 20-х годах прошлого столетия переселенцами и использовалась как декоративное растение [15].

Насаждения земляной груши можно было встретить у жилых домов, в палисадниках, садах и реже в огородах.

В 1950 г. А.П.Саверкин, проводя испытание различных сортов кормовых культур в условиях высокогорья Гиссарского хребта, сообщил о хорошем развитии земляной груши на высоте около 3000 м над уровнем моря.

С целью получения кормовой массы в 1953-1955 гг. в Таджикистане на специальных опытных участках проведено размножение посадочного материала земляной груши и для посева колхозам и совхозам республики передано 500 ц клубней.

В 1956-1958 гг. земляная груша возделывалась в природно-климатических условиях Гиссарской и Вахшской долин, в Гармской группе районов, в Ленинабадской области и на Западном Памире. В производственных посевах колхозов также, как и на опытных участках, земляная груша в среднем давала урожай зелёной массы 500 ц, а клубней - 250 ц с одного гектара.

В условиях высокогорья в колхозах Ишкашимского, Рошткалинского и Шугнанского районов установлено, что земляная груша является ценной кормовой культурой, способной давать 500-600 ц зелёной массы и 150-200 ц клубней с каждого гектара [16].

Учитывая питательную ценность земляной груши как кормовой культуры со стороны колхозов, совхозов и животноводческих ферм республики, на имя учёных и специалистов поступило много запросов о выделении посадочного материала для посева земляной груши, особенно при свиноводческих фермах. Однако массовое внедрение посевов тормозилось в связи с отсутствием в республике достаточного количества посадочного материала, а Министерство сельского хозяйства Таджикской ССР не смогло своевременно организовать специализированное семенное хозяйство для обеспечения колхозов и совхозов, имеющих животноводческие фермы, посадочным материалом земляной груши. Но впоследствии, в силу субъективных и объективных причин, его посевы сократились, и он начал исчезать с полей нашей республики.

В мировой практике интерес к топинамбуру в разные периоды то возрастал, то затухал, что определялось активностью изучения и пропаганды потенциальных возможностей этой культуры и высокой продуктивностью надземной массы и клубней. В первой половине XX-го века топинамбур исследовался с целью использования его в качестве кормовой культуры. Однако широкие биохимические исследования последних десятилетий, начиная с 80-х годов XX-го столетия, показали, что наряду с кормовыми достоинствами топинамбур имеет высокую перспективность использования в качестве пищевой, лекарственной и технической (биоэнергетической) культуры [17].

Топинамбур – неприхотливое, многолетнее высокопродуктивное растение, устойчивое к неблагоприятным условиям, эффективно использующее солнечную энергию для роста и развития. Одновременно топинамбур обладает высокой холодоустойчивостью. Клубни выдерживают замораживание до  $-20^{\circ}\text{C}$ , не теряя при этом жизнеспособности [18- 20]. Стебель прямостоячий, хорошо облиственный, высотой до 2-4 м.

Соцветие – многоцветковая корзинка с яркими желтыми цветками. Корневая система мочковатая, проникает на глубину до 2 м. Стебель ветвится, под землей образует многочисленные подземные побеги – столоны. На концах столонов образуются клубни. Одно растение формирует до 20-30 и более клубней. Масса клубней в зависимости от сорта и условий выращивания составляет от 10 до 140 г, но в большинстве случаев масса клубня составляет 30-60 г [15].

По жизненному циклу земляная груша напоминает картофель – весной из клубней вырастает растение, которое к осени формирует новые клубни и отмирает на зиму. Только

в отличие от теплолюбивого картофеля клубни земляной груши стойки к зиме и переносят в почве длительные морозы. Это растение относится к влаголюбивым, но по сравнению с другими культурами (кормовая свекла, картофель, кукуруза) оно более засухоустойчиво благодаря глубокой корневой системе а также, стеблям и листьям покрытых волосками.

Клубни топинамбура обладают очень низким коэффициентом накопления токсических веществ (нитратов, тяжёлых металлов, радионуклидов) по сравнению с другими сельскохозяйственными культурами [9,21].

Кроме того, топинамбур не накапливает в земле себя токсины, переносит повышенное содержание окислов серы, азота, сероводорода, аммиака и других газов [22].

В условиях Таджикистана земляную грушу можно высаживать во всех долинно-предгорных, горных и высокогорных районах в местах с пересеченным рельефом на склонах оврагов, в балках, в поймах рек, то есть в местах, где другие культуры произрастать не могут [16].

Земляная груша способна давать очень высокие урожаи составляющие более 1000 ц/га зелёной массы и 500 ц/га клубней. Средняя урожайность земляной груши обычно составляет – порядка 400-500 ц/га зелёной массы и 250 ц/га клубней [15].

В Таджикистане урожай зелёной массы земляной груши в условиях полива достигает 1000 ц/га, а клубней – 400-450 ц/га, на богарных землях 300 ц/га – зелёной массы и 120 ц/га клубней [16].

В долинных районах Таджикистана к концу июля рост растений достигает высоты более 2.5 м. Урожай зелёной массы в это время составляет не менее 550 ц/га. Если в это время ботву скосить, то земляная груша вновь даст к осени повторно такой же урожай ботвы [16].

Эта биологическая особенность земляной груши позволяет производить закладку силоса из ее зелёной массы в два срока летом и осенью. Здесь важно то, что сроки силосования ботвы земляной груши совпадают со сроками массового летнего и осеннего силосования других силосных культур, что позволяет готовить их смеси [16].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ярошевич М.И., Веъер Н.Н. Топинамбур – перспективная культура многоцелевого использования. – Труды БГУ, 2010, т. 4, вып. 2, с. 1-12.
2. Пасько Н.М. Топинамбур – биотехнический потенциал для пищевых, лечебных, технических, кормовых и экологических целей / Сб. трудов «Инновационные технологии и продукты». – Новосибирск, 1999, с. 9-16.
3. Кочнев Н.К., Колиничева М.В. Топинамбур – биоэнергетическая культура XXI века. – М.: Типография «Арес», 2002, 76 с.
4. Зеленков В.Н., Шоин С. Многоликий топинамбур в прошлом и настоящем. – Новгород: НТФ «Арис», 2000, 241 с.

5. Третьяков В.Ф. «Биоэтанол – состояние и перспективы в энергетике и нефтехимии». – Мат-лы II межд. научн-техн. конф. «Альтернативные источники сырья и топлива». – Минск, 2009, с. 16-17.
6. Рейнгарт Э.С., Кочнев Н.К., Понамарев А.Г., Звягинцев П.С. Перспективы использования топинамбура для производства биоэтанола. – Достижения науки и техники РПК, 2008, №1, с. 38-40.
7. Яковлев В.А., Хромова С.А., Шерстюк О.В. и др. Каталитические способы переработки биомассы для получения моторных топлив». – Мат-лы II межд. научн.-техн. конф. «Альтернативные источники сырья и топлива». – Минск, 2009, с.19.
8. Климовский Д.Н., Стабников В.Н. Технология спиртового производства. – М: Пищепромиздат, 1950, 448 с.
9. Пономарева М.С. Разработка комплексной технологии этанола из топинамбура на основе дифференцированных способов переработки сырья: Дисс... к.т.н. – М.: 2009, 178 с.
10. Вагабов М-З.В., Керимова З. М-З, Мальдыцева Г.В., Корнева О.С. Применение ферментных препаратов с целью ускорения гидролиза тинулина при производстве этилового спирта. – Биотехнология, 2005, №1, с.34-36.
11. Казумов Н.Б., Казумян К.Н., Казумян Н.К., Казумян А.Н., Казумян Г.А. Безотходное производство спирта из амаранта. – Производство спирта и ликёроводочных изделий, 2007, №1, с. 30-31.
12. Джаруллаев Д.С. Новое сырьё для производства спирта. – Производство спирта и ликёроводочных изделий. 2002, №1, с. 38-39.
13. Джаруллаев Д.С. Универсальное и экономическое сырьё – тутовник. – Пищевая промышленность. 2000, №5, с. 36.
14. Эйхе Э.П. Топинамбур или земляная груша. – М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1957, 193 с.
15. Литвинов В.Н. Земляная груша в Гиссарской долине Таджикской ССР. Дисс... к.с.-х.н. – Сталинабад, 1958, 201с.
16. Литвинов В.Н. Кормовые культуры Таджикистана. – Душанбе: Ирфон, 1965, 295 с.
17. Ярошевич М.И. Топинамбур – перспективная культура многоцелевого использования. – Минск, 2010, 125 с.
18. Голубев В.Н., Мамонова Г.В. Сохранение качества клубней топинамбура. – Хранение и переработка сельхозсырья. - 1997, №22, с. 20-23.
19. Лазаньи Я., Капочи И., Фазекаш М., Храппан Д. Интенсивное возделывание топинамбура и использование его в спиртовой промышленности. – Междунар. агропромышленный журнал, 1983, №6, с. 105-106.
20. Устименко-Бакумовский Г.В. Биологические основы культуры топинамбура в европейской части СССР: Автореф. дисс... д.т.н. – М., 1972, 48 с.
21. Мурзагулов К.М., Зурабов Д., Мухамбетов А., Аканов А. Изучение токсичности вытешек из клубней топинамбура. – Главный зоотехник, 2004, №2, с. 13-15.
22. Прокопенко Л.С., Юрченко Х.Ф. Химический состав и питательная ценность клубней топинамбура. – Топинамбур и тописолнечник – проблемы возделывания и использования: Тез. докл. III Всес. научн.-произв. конф. – Одесса, 1991, с. 59.

Ҳ.М.АХМЕДОВ, Қ.ПАРТОЕВ\*, Ғ.А. ТОШБОЕВ

**ТОПИНАМБУР (*HELIANTUS TUBEROSUS* L.) – ГИЁҲИ ОЯНДАДОР  
БАРОИ ИСТЕҲСОЛИ БИОСЌЗИШВОРӢ ДАР ТОҶИКИСТОН**

*Маркази рушди инноватсионии илм ва технологияҳои нави  
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,  
\*Институтуи ботаника, физиология ва генетикаи растанин  
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мақола дар асоси таҳлили осори муҳаққиқон ва таҷрибаи олимони Тоҷикистон аҳамият ва зарурияти истифодаи гуногунмақсади гиёҳи ғайрианъанавии кишоварзӣ-топинамбур, бахусус дар соҳаи энергетика нишон дода шудааст.

Дар мақола маълумоти умумӣ дар бораи навъҳои анъанавӣ ва ғайрианъанавии зироатҳое, ки ба сифати ашъеи хом барои ҳосил кардани сўзишвориҳои биологӣ истифода бурдан мумкин аст, оварда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** биотехнология – ашъеи растанинӣ – биоэнергетика – биосўзишворӣ – топинамбур – ҳосилнокӣ – биоэтанол – намудҳои ашъеи ғайри – муқаррарӣ – саноати спиртӣ – карбогидратҳо.

Ҳ.М.АХМЕДОВ, Қ.ПАРТОЕВ\*, Ғ.А.ТАШБАЕВ

**JERUSALEM ARTICHOKE (*HELIANTUS TUBEROSUS* L.) – PROMISING  
CROPS FOR BIOFUEL PRODUCTION IN TAJIKISTAN**

*Center for innovative development of science and new technologies  
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,  
\*Institute of botany, plant physiology and genetics  
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

In this article on the basis of published data and experience Tajikistan scientists attempt to show national economic, in particular energetic significance and prospects for introduction multipurpose use nontraditional crop - Jerusalem artichoke.

In this article conducted an overview of traditional and nontraditional crops, which can be used as raw material for biodiesel.

**Key words:** biotechnology – plantmaterial – bioenergy – biofuels – Jerusalem artichoke – productivity – bioethanol – unconventional materials – alcohol industry – carbohydrates.



УДК 543.545.2 : 616.9

Д.Т.БОБОКАЛОНОВ\*, З.К.МУХИДИНОВ, Г.И.КОМИЛОВА\*, Р.С.КИМАТОВ\*,  
Э.Р.РАХМАНОВ\*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦИПРОФЛОКСАЦИНА В БИОЛОГИЧЕСКИХ  
ЖИДКОСТЯХ КАПИЛЛЯРНЫМ ЗОННЫМ ЭЛЕКТРОФОРЕЗОМ**

*Институт химии им. В.И.Никитина АН Республики Таджикистан,  
\*Таджикский государственный медицинский университет им. Абуали ибн Сино*

*Поступила в редакцию 19.11.2014 г.*

*Разработана методика определения ципрофлоксацина (ЦФ) в сыворотке крови и кале у больных, принимавших ЦФ в комбинации с пектином высокоэффективным капиллярным электрофорезом (ВЭКЭ). Клинические исследования фармакокинетики ЦФ требуют точного измерения концентрации препарата в биологических жидкостях организма. Описывается быстрый, селективный и чувствительный метод ВЭКЭ с ультрафиолетовым детектором для определения ЦФ в биологических жидкостях организма человека.*

**Ключевые слова:** капиллярный электрофорез – ципрофлоксацин – дизентерия – биологические жидкости.

Острые кишечные инфекции (ОКИ) в Таджикистане являются распространёнными заболеваниями. ЦФ относится к фторхинолоновым антибиотикам, доступен в обычных лекарственных формах для перорального применения и является антибиотиком широкого спектра действия для лечения множества бактериальных инфекций, в том числе инфекции мочевыводящих путей, органов дыхания, инфекций желудочно-кишечного тракта (ЖКТ), а также инфекций кожного покрова и костей [1]. Растворимость ЦФ в воде сильно зависит от рН среды и в основном всасывается в проксимальном отделе ЖКТ. При клинических исследованиях ЦФ необходимо учитывать фармакокинетические процессы (абсорбция, распределения, метаболизм и выведения), которые могут меняться в связи с патологическими изменениями организма, требующими рациональной коррекции дозы антибиотиков. В связи с высокой востребованностью ЦФ определение его концен-

---

*Адрес для корреспонденции:* Мухидинов Зайниддин Камарович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: zainy@mail.ru

трации в плазме *in vivo*, является ценным фармакологическим инструментом в оптимизации лекарственной схемы.

В литературе описаны методы определения ЦФ методами спектрофотометрии [2], высокоэффективной жидкостной хроматографии (ВЭЖХ) в сочетании с ультрафиолетовым [3] и флуориметрическим [4] детектором. В последнее время для определения ЦФ в плазме крови человека были опубликованы методы жидкостной хроматографии в сочетании с масс-спектрометрии (ЖХ-МС) [5].

Тем не менее большинство из этих методов имеют различные недостатки. Хотя ЖХ-МС имеет большую селективность и чувствительность, чем другие методы, данный метод требует относительно дорогой аппаратуры, высококвалифицированного технического опыта и недоступен для большинства лабораторий. Более того, эти методы требуют длительной, трудоёмкой и кропотливой пробоподготовки, процедур очистки пробы, в том числе с использованием дорогостоящих картриджей твердофазной экстракции [6]. Достоинством ВЭКЭ являются: простая пробоподготовка (центрифугирования, фильтрация и дегазирование); возможность определения малых количеств вещества за короткий промежуток времени; малый расход реактивов (микролитры); малый объём пробы, надежная работа капилляра с экономичными водными буферами. Кроме того, ВЭКЭ не требует насосов высокого давления, необходимых для жидкостной хроматографии, несравнимо минимум расходов высокочистых растворителей. Отсутствие твёрдого сорбента в капилляре исключает возможность его «старения», химической и физической деструкции и любого неспецифического связывания с ним компонентов пробы [7].

Целью данной работы явилась разработка оптимальной методики определения ЦФ в биологических жидкостях методом ВЭКЭ.

### **Экспериментальная часть**

Материалом для исследования служили кровь и кал 16 больных с острой дизентерией, находившихся на обследовании и лечении в Городской клинической инфекционной больнице г. Душанбе, а также сравнительной группы из 4 здоровых людей, принимавших таблетки без ЦФ (плацебо).

Экстракцию ЦФ из плазмы проводили следующим образом: к 1 мл плазмы добавили 2мл ацетонитрила и 0.1М HCl (1:1), встряхнули 10 мин и центрифугировали при 10000 об/мин в течение 10 мин. Надосадочную жидкость разбавили ультрачистой водой и в конце пропустили через фильтр с диаметром пор 0.45 мкм (Millipore). Экстракцию ЦФ из кала осуществляли в среде 0.1М HCl с последующей очисткой на ультрафильтрационных мембранах.

Электрофоретические исследования проводили на системе ВЭКЭ Agilent G1600AX (Германия). Разделение проводили в кварцевом капилляре с  $d=75$  мкм, общей длиной 60 см, эффективной длиной 50 см, при длине волны 260 нм, напряжении +30 кВ и ведущем электролите 50 мМ боратный буфер pH=9.3 (Agilent part # 5062-8573). Капилляр готовили к работе последовательными 2-минутными промывками 0.1 М раствором NaOH,

деионизированной водой и ведущим электролитом. Между измерениями капилляр промывали 0.1 М раствором NaOH 2 мин, деионизированной водой 1 мин и ведущим электролитом 3 мин. Температура капилляра поддерживалась при 25°C, ввод пробы осуществляли гидродинамически 35 мбар в течение 4 с. Электрофореграммы записывали и обрабатывали с помощью программного обеспечения Agilent ChemStation Software.

### Результаты и их обсуждение

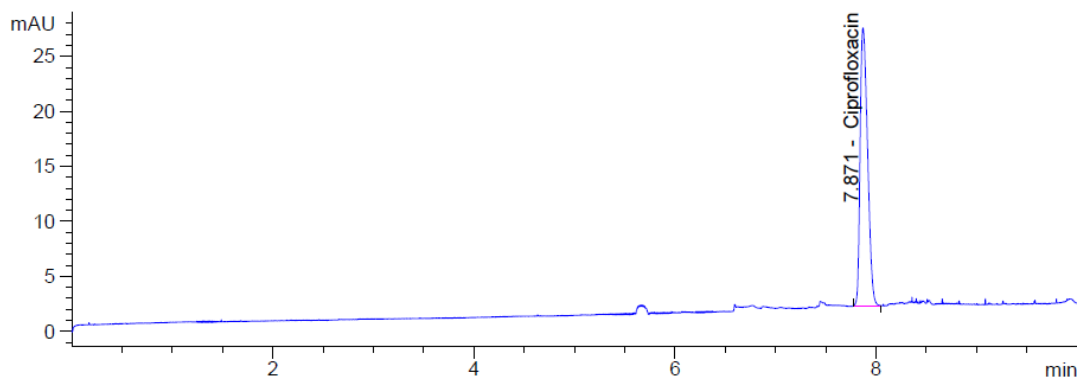


Рис. Электрофореграмма стандартного раствора ЦФ.

Для определения предела обнаружения препарата и погрешности метода был проведен концентрационный анализ электрофореграмм (подвижности образца) при использовании минимальной (10-12 мкг/мл), средней (130 мкг/мл) и максимальной концентрации (800 мкг/мл) препарата. Как видно из рис., время удерживания ЦФ с концентрацией 130.00 мкг/мл в боратном буфере (рН 9.3) составляет 7.87 мин. Количественное определение ЦФ в плазме крови проводили методом абсолютной калибровки. Также исследование проводилось симптоматическим наблюдением у больных с ОКИ, после сравнительного лечения ЦФ и ЦФ+ пектин.

Концентрация ЦФ в сыворотке крови на 3 и 6 дни после перорального приёма таблетки ЦФ в первой группе, во второй группе плацебо и третьей группе ЦФ+пектин показана в табл. 1-3. Средняя концентрация ЦФ в плазме крови на 3 сутки лечения в первой, второй и третьей группах была – 199.216±14.24 мкг/мл, 0 мкг/мл и 154.07±11.79 мкг/мл соответственно. На 6-е сутки эксперимента показатель в первой группе уменьшился, составив 150.1±15.37 мкг/мл, а в третьей группе – 157.45±19.04 мкг/мл.

Таблица 1

Анализ крови больных, принявших ЦФ в виде таблеток

ФИО	3 день, мкг/мл	6 день, мкг/мл
Нуримов Ш	205.518	150.108
Шеров Н.	178.674	145.765
Рахматов С.	213.456	176.500

Таблица 2

## Концентрация ЦФ в крови больных, принявших плацебо

ФИО	3 день, мкг/мл	6 день, мкг/мл
Бобоназаров П.	0	0
Нахимов А.	0	0
Хайдарова С.	0	0
Сафарова И.	0	0

Таблица 3

## Концентрация ЦФ в крови больных, принявших пектин+ЦФ перорально

ФИО	3 день, мкг/мл	6 день, мкг/мл
Саъдулоева Х.	165.86	154.67
Калонова Н.	142.28	148.76

Таблица 4

## Концентрация ЦФ в кале больных, принявших пектин+ЦФ

ФИО	1 день, мкг/мл	3 день, мкг/мл	6 день, мкг/мл
Саъдулоева Х.	0	42.35	54.74
Калонова Н.	0	25.54	0
Иброхимзода Х.	56.46	58.93	0
Каримов А.	18.14	51.92	0
Саломов Ч.	67.28	61.24	0

Как видно из полученных данных, пектин замедляет процесс всасывания ЦФ из ЖКТ, способствует уменьшению пика его концентрации в крови, токсичности и более длительному действию ЦФ за счёт замедления его всасывания из ЖКТ в кровь. Наличие антибиотика также было обнаружено в кале больных, принявшие пектин в комплексе с ЦФ. Как видно из табл. 4, его концентрация в 1-6 дни лечения была наименьшей. Полученные данные не коррелируются в период лечения больных, вероятно, из-за сложных процессов высвобождения и диффузии антибиотика в кишечнике разных индивидуумов.

Использование метода ВЭКЭ позволило нам определить концентрацию антибиотика в сыворотке крови групп больных, где принимали ЦФ различными способами и формами в комбинации с пектином. Были получены линейные калибровочные кривые концентрационных зависимостей ЦФ из электрофореграмм в области от 3-до 800 мкг/мл с высоким коэффициентом корреляции 0.9930 в среде боратного буфера. Найденный предел обнаружения и количественного определения исследуемого вещества составил 3 мкг/мл и 10 мкг/мл соответственно.

Таким образом, было разработано простой, быстрый, селективный, чувствительный и воспроизводимый метод для определения концентрации ЦФ в биологических жидкостях организма человека. Метод имеет ряд преимуществ: простота, низкая стоимость анализа, высокая чувствительность и селективность. Кроме того, метод требует небольшого объёма (всего 100 мкл) биологической жидкости, что делает его пригодным для изу-

чения фармакокинетики у больных, а также для клинических фармакокинетических исследований ЦФ и рутинного терапевтического лекарственного мониторинга.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Martindale W.H. The Extra Pharmacopoeia, UK, London Royal Pharmaceutical Society, 2005, 34th ed., v.11, pp. 989-991.
2. Mostafa S., El-Sadek M., Awad Alla E. – Journal of Pharmaceutical and Biomedical Analysis, 2002, v. 27, 1-2, pp. 133-142.
3. Krol J., Beck G.W., Benham T. – Journal of Pharmaceutical and Biomedical Analysis, 1995, v. 14, 1-2, pp. 181-190.
4. Zotou A., Miltiadou N. – Journal of Pharmaceutical and Biomedical Analysis, 2002, v. 28, 3-4, pp. 559-568.
5. Grondin C., Zhao W., Fakhoury M., Jacqz-Aigrain E. – Biomed Chromatogr. 2011, v. 25, 7, pp.827-832.
6. Pascual-Reguera I., Pérez Parras G., Molina A. – Microchemical Journal, 2004, v.77, 1, pp. 79-84.
7. Комарова Н.В., Каменцев Я.С. – СПб.: ООО «Веда», 2006, 212 с.

Ч.Т.БОБОКАЛОНОВ\*, З.Қ.МУҲИДИНОВ, Г.И.КОМИЛОВА\*, Р.С.ҚИМАТОВ\*,  
Э.Р.РАҲМОНОВ\*

#### ТАШХИСИ СИПРОФЛОКСАТСИН ДАР МОЕЪҲОИ БИОЛОҒИ БО УСУЛИ ЭЛЕКТРОФОРЕЗИ КАПИЛЛЯРӢ

*Институти химияи ба номи В.И. Никитини*

*Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,*

*\*Донишгоҳи давлатии тиббии Тоҷикистон ба номи Абӯалӣ ибни Сино*

Мақолаи мазкур татбиқи усули электрофорези капилляро (ЭК) барои муайян намудани миқдори антибиотики гурӯҳи фторхилонҳо- сипрфлоксатсинро дар таркиби хун ва ахлоти беморони исҳоли хунин татбиқ менамояд. Усули ЭК хангоми муайян намудани миқдори сипрфлоксатсин дар маҳлулҳои биологӣ бартарихи зиёдро нишон дод: дақиқии хос ва баланд; истифодабарии миқдори ниҳоят ками маводи ташхисшаванда ва мӯҳлати кӯтоҳи ташхис.

**Калимаҳои калидӣ:** электрофорези капиллярӣ – сипрфлоксатсин – исҳоли хуни.

J.T.BOBOKALONOV\*, Z.K.MUHIDINOV, G.I.KOMILOVA\*, R.S.KIMATOV\*,  
E.R.RAHMONOV\*

## **DETERMINATION OF CIPROFLOXACIN IN BIOLOGICAL FLUIDS BY CAPILLARY ELECTROPHORESIS**

*V.I. Nikitin Institute of Chemistry, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,  
\*Avicenna Tajik State Medical University*

The article deals with the application of Electrophoresis method (CE) for determination of antibiotics from fluoroquinolones families in blood and faeces in patient administered with antibiotics in different forms. The CE method has shown a number of advantageous applications in the studied field: high sensitive, available to work with small samples, high selectivity, fast performance and versatile.

**Key words:** capillary electrophoresis – ciprofloxacin – dysentery – biological fluids.

### XXVII МЕЖДУНАРОДНЫЙ КОНГРЕСС МАТЕМАТИКОВ

В августе 2014 г. в Сеуле (Республика Корея) состоялся XXVII Международный конгресс математиков – крупнейший научный форум четырёхлетия. Это уже третий математический Конгресс в XXI веке, который проходит в Азии (Пекин, 2002), Хайдарабад, 2010), Сеул, 2014)). Для сравнения напомним, что в XX веке только один раз Конгресс состоялся в Азии (Киото, 1990). Выбор азиатских стран в качестве хозяина конгресса соответствует основной цели Международного Математического Союза – поддержке математических исследований и поиску молодых талантливых математиков во всем мире.

По традиции на церемонии открытия Конгресса были оглашены имена лауреатов Золотой медали Филдса. Впервые за всю историю премии медаль Филдса была вручена женщине. Лауреатом стала Мариам Мирзахани – профессор Стэнфордского университета (США). Она выпускница Тегеранского университета, победительница международных олимпиад среди школьников по математике 1994 и 1995 гг. М.Мирзахани награждена за выдающийся вклад в динамику и геометрию римановых поверхностей и их пространств модулей. Другим лауреатом премии Филдса стал Артур Авила из Национального института чистой и прикладной математики в Рио де Жанейро (Бразилия). А.Авила с соавторами внесли существенный вклад в развитие динамики одномерных действительных и комплексных отображений, спектральной теории одночастотных операторов Шрёдингера и теории бильярдов. Профессор Принстонского университета (США) Манджул Бхаргава получил медаль Филдса за разработку новых эффективных методов подсчёта колец малого и среднего ранга эллиптических кривых. Медали Филдса удостоен также Мартин Хайрер – профессор Варвикского университета (Великобритания) за выдающийся вклад в теорию стохастических дифференциальных уравнений, в частности за разработку признаков регулярности решений таких уравнений.

Медали Филдса были вручены Президентом Республики Корея, госпожой Геун Хи Парк.

На церемонии открытия Конгресса были вручены также другие математические премии. Так, премия Ральфа Неванлинна была вручена профессору Субхаш Кхот. Молодой индийский математик, ныне профессор Института Куранта при Нью-Йоркском университете удостоен этой премии за решение гипотезы уникальных игр. Данная гипотеза лежит в основе современной математической теории сложности и булевой алгебры.

Профессор Филипп Гриффитс (Принстонский институт перспективных исследований) получил премию Черна, основанную Международным Математическим Союзом в честь великого китайского математика Шин Шен Черна.

Ф.Гриффитс удостоен премии за новаторское развитие трансцендентных методов в комплексной геометрии, в частности за основополагающую работу по теории Ходжа и периодов алгебраических многообразий.

Профессору Стэнли Ошер (Калифорнийский университет в Лос-Анджелесе) вручена премия имени Карла Фридриха Гаусса за вклад в решение широкого круга прикладных задач. Это, прежде всего, высокое разрешение метода ударных волн для гиперболических уравнений и метод множеств уровней в задачах оптимизации.

По традиции были организованы специальные лекции, посвящённые великим математикам прошлого.

Так, профессор Джорджия Бенкарт (Университет Висконсин, США) прочитала лекцию по теории операторов в честь Эммы Нётер, а профессор Джон Милнор (Университет Стони Брук, США) прочитал лекцию по топологии в честь Хендрика Абеля.

В работе конгресса приняли участия около 5000 математиков из более чем 120 стран мира. В течение 9 дней было прочитано более 1500 лекций, кратких сообщений и постерных презентаций по 19 основным направлениям современной математики.

Республика Таджикистан была представлена выступлениями автора этих строк, а также доктора физико-математических наук Лутфии Раджабовой и доктора физико-математических наук Умеда Каримова.

В дни работы Конгресса состоялась Генеральная Ассамблея Международного Математического Союза (ММС). Завершила свою деятельность на посту Президента ММС Ингрид Добеши. Новым президентом ММС избран профессор математики Киотского университета (Япония) Сигэфуми Мори.

Академик АН РТ Мамадшо Илолов



**МЕЖДУНАРОДНЫЙ СИМПОЗИУМ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМУ  
МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЮ И БИОЛОГИЧЕСКИМ НАУКАМ**

С 23-28 сентября 2014 г. в Душанбе состоялся 1-й Международный симпозиум по вычислительному материаловедению и биологическим наукам (DSCMBS-2014), организованный Физико-техническим институтом им. С.У.Умарова Академии наук Республики Таджикистан и Объединённым институтом ядерных исследований (ОИЯИ), г.Дубна, Московская область, Россия. В рамках российско-японско-таджикского сотрудничества проведённый в Душанбе Симпозиум является продолжением Совещания MSSMBS, состоявшегося в этом же 2014 г. в Москве, по моделированию в науках о веществе и биологии в Институте биоорганической химии им. академиков М.М. Шемякина и Ю.А. Овчинникова Российской академии наук.

В работе Симпозиума приняли участие учёные из Японии, Франции, России, Армении и Таджикистана, всего 70, из которых 21 участник из стран дальнего зарубежья.

Учёные из Института бионауки и технологии в Нагахаме, Университетов Нагойя, Киото, Кейо и Васеда (Япония), Университета Париж-Дидро (Франция), ОИЯИ, г.Дубна, МГУ им. М.В.Ломоносова, Объединенного института высоких температур РАН, Пущинского научного центра РАН, Института биоорганической химии РАН, Национальной Академии наук Армении, Института биохимической физики РАН, Московского физико-технического института, Венского университета, Института математических проблем биологии РАН, Института химической физики, Объединенный суперкомпьютерный центр РАН, Университета им. Бен-Гуриона (Израиль), Университета Бехшар (Иран) и Физико-технического института им. С.У.Умарова АН РТ выступили с пленарными и секционными докладами, всего заслушано 33 доклада, в целом охватывающих такие аспекты современных исследований в области точных и биологических наук, как:

- методы молекулярно-динамического моделирования и моделирование методом Монте-Карло;
- физические и биохимические системы (газы, кристаллы, жидкости, полимеры);
- компьютерные методы и подходы к молекулярным исследованиям;
- дизайн новых материалов и структур (ионные легированные структуры, клатраты с высоким давлением, углеродные нанотрубки);
- компьютеринг и вычислительная физика, химия и биомедицина моделирование биологических молекул (РНК, ДНК, белков, ферментов, эффекты мутационных переходов);

- дизайн новых лекарств в медицине (ингибирующая активность ферментов);
- методы ускорения молекулярно-динамических вычислений в процессорах.

Научные доклады по различным аспектам разработки высокопроизводительных компьютеров и вычислительных методов в области моделирования новых материалов, изучения биологических структур и наносистем, замечательные по своему тематическому разнообразию и высокому уровню, вызвали интерес аудитории и были предметом их научного обсуждения.

В рамках программы симпозиума 25-го сентября 2014 года состоялась встреча участников Симпозиума и зарубежных ученых со студентами физического факультета Таджикского национального университета и Душанбинского Филиала МГУ им. М.В.Ломоносова. В ходе встречи зарубежные участники Симпозиума представили информацию о тематике своих научных исследований, а также о возможностях продолжения образования в магистратуре и аспирантуре в ведущих университетах и научных центрах России, Японии, Франции и Южной Кореи.

Такое совместное сотрудничество учёных Японии, Франции, России, Южной Кореи, Армении и Таджикистана, несомненно, придаст положительный импульс дальнейшим изысканиям таджикских ученых в области вычислительных материалов и биологических наук, а также в деле подготовки высококвалифицированных кадров через магистратуру и аспирантуру в ведущих научных центрах России и стран дальнего зарубежья.

Международный Симпозиум завершился принятием ряда рекомендаций и задач в перспективе, решение которых улучшит и укрепит контакты между учеными, работающими в смежных направлениях по вычислительным материалам и биологическим наукам, удачное сочетание результатов совместных исследований которых обещает большое будущее.

Холмирзо ХОЛМУРОДОВ, ОИЯИ,  
Томоюки ЯМАМОТО, Университет Васеда, Япония,  
Хикмат МУМИНОВ, Физико-технический институт, Таджикистан

**ЗАСЕДАНИЕ  
СОВЕТА ПО СОТРУДНИЧЕСТВУ В ОБЛАСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ  
АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ В МИРНЫХ ЦЕЛЯХ ПРИ ИНТЕГРАЦИОННОМ  
КОМИТЕТЕ ЕВРАЗЭС**

В Душанбе 29-30 сентября 2014 г. состоялось 13 заседание Совета по сотрудничеству в области использования атомной энергии в мирных целях при Интеграционном комитете ЕврАзЭС. В данном заседании приняли участие члены ряда Рабочих групп и представители всех государств – членов ЕврАзЭС.

В повестку дня заседания были включены вопросы, касающиеся хода реализации Межгосударственной целевой программы (МЦП) по рекультивации хвостохранилищ, о сотрудничестве по вопросам повышения безопасности приповерхностных пунктов хранения радиоактивных отходов типа «РАДОН», о подготовке кадров в области мирного использования атомной энергии для стран - членов ЕврАзЭС, о развитии ядерной медицины и другие важные вопросы. Наша страна придает особое значение реализации Межгосударственной целевой программы по рекультивации хвостохранилищ, учитывая серьезность проблемы рекультивации хвостохранилищ Северного Таджикистана.

На заседании Совета информацию о ходе реализации Межгосударственной целевой программы «Рекультивация территорий государств – членов ЕврАзЭС, подвергшихся воздействию уранодобывающих производств» представила руководитель проекта от ОАО «Федеральный центр ядерной и радиационной безопасности» Т.Ф.Макарчук. Она доложила о целях МЦП ЕврАзЭС, представила радиоэкологические данные по хвостохранилищам г.Истиклола, оценке доз облучения населения, а также представила некоторые технические решения по хвостохранилищам г.Истиклола.

В ходе обсуждения был высказан ряд замечаний (Жантикин Т.М. – Казахстан, Мирсаидов У. – Таджикистан).

Таджикская сторона благодарна Российской Федерации (Росатому) и Казахстану за финансирование МЦП, доля которого для РФ составляет 75%, а Казахстана – 15% (доли Таджикистана и Кыргызстана – по 5%).

Межгосударственная целевая программа – одна из программ, которая должна частично решить проблемы рекультивации г.Истиклола.

В Программе много разделов исследования оценки доз облучения населения, оценки радиационной ситуации, анализа пищевых продуктов и др. Возможно, необходимые стандарты требуют этого.

Однако опыт таджикских специалистов по рекультивации Гафуровского хвостохранилища показывает, что затраты можно уменьшить, если направить средства непосредственно на процесс рекультивации. Рекультивационные работы были завершены для Гафуровского хвостохранилища в 1991 г.

Исходя из этого, таджикская сторона предложила пересмотреть возможность изменения некоторые разделы Программы. Необходимо ускорить работы по технико-экономическому обоснованию (ТЭО) и непосредственно работы по рекультивации.

О сотрудничестве по вопросам повышения безопасности приповерхностных пунктов хранения радиоактивных отходов типа «РАДОН» информацию представил заместитель Генерального директора по развитию ОАО «Федеральный центр ядерной и радиационной безопасности» А.И.Голиней. В Таджикистане также имеется пункт хранения отходов типа «РАДОН». Усилиями МАГАТЭ и ряда доноров (США, Британия) проведена реконструкция данного пункта хранения отходов.

По вопросам перевозок радиоактивных материалов информацию представил председатель Рабочей группы экспертов по гармонизации законодательства государств-членов ЕврАзЭС по учёту, контролю и хранению радиоактивных источников, заместитель Генерального директора ФГУП «АТЦ Росатома» (Санкт-Петербург) В.Н.Ершов. Представленные материалы составлены на базе основополагающих принципов безопасности, рекомендованных МАГАТЭ.

О подготовке кадров в области мирного использования атомной энергии для государств-членов ЕврАзЭС информацию дала член Рабочей группы экспертов по подготовке кадров в области использования атомной энергии для государств-членов ЕврАзЭС, заместитель декана факультета Института атомной энергетики НИЯУ «МИФИ» П.А.Белоусова. В настоящее время в Таджикистане остро не хватает кадров в области мирного использования атомной энергии, а также остро стоит вопрос сохранения знаний по ядерной и радиационной безопасности.

Информацию о развитии ядерной медицины в государствах-членах ЕврАзЭС представила председатель Рабочей группы экспертов по развитию ядерной медицины для государств-членов ЕврАзЭС, заместитель начальника Управления организации медицинской помощи ФМБА России Е.П.Канева. Развитию ядерной медицины в Таджикистане придается особое значение. Национальным проектом МАГАТЭ Онкологический центр г.Душанбе оснащен новыми приборами на сумму 1.7 миллионов долларов США. В Институте гастроэнтерологии МЗ РТ создан медицинский ядерный центр. Начиная с 2014 г., в г.Худжанде начнёт внедряться проект МАГАТЭ по созданию Онкологического центра.

Председатель Рабочей группы экспертов по вопросам нормативного, правового и нормативно-технического регулирования в области мирного использования атомной энер-

гии, советник Генерального директора ОАО «Атомэнергомаш» В.В.Козлова представила информацию о проекте Соглашения о сближении подходов в области использования атомной энергии по нормативному, правовому и нормативно-техническому регулированию.

По всем этим вопросам были приняты соответствующие постановления и определены пути реализации этих задач.

Член Совета по сотрудничеству в области  
использования атомной энергии в мирных целях  
при Интеграционном комитете ЕврАзЭС У.Мирсаидов

**II МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЁНЫХ**  
**ГОСУДАРСТВ-УЧАСТНИКОВ СНГ «СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ И**  
**АСТРОФИЗИКИ ЧАСТИЦ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ»**

6-14 октября 2014 года в г. Душанбе и г. Хорог (Республика Таджикистан) при поддержке Межгосударственного фонда гуманитарного сотрудничества государств-участников СНГ состоялась II Международная школа молодых учёных «Смежные проблемы физики и астрофизики частиц сверхвысоких энергий».

В работе Школы приняли участие молодые специалисты и аспиранты из научных и образовательных учреждений из России, Таджикистана, Армении, Азербайджана, Молдовы, Украины, Белоруссии, Казахстана и Кыргызстана, которые занимаются различными аспектами ядерной физики, физики высоких энергий, астрономии и астрофизики, электроники и информационно-коммуникационных технологий, малой альтернативной энергетики на возобновляемых источниках. Основной целью этой уникальной научно-практической программы было обучение и подготовка молодых квалифицированных кадров для реализации крупных астрофизических проектов и укрепление связей научной молодежи Содружества. В рамках работы Школы молодые ученые посетили научный полигоны Ак-Архар и Колуч-куль Международного научно-исследовательского центра «Памир-Чакалтая», расположенные, соответственно, на высотах 4370 м и 4260 м над уровнем моря. Уникальное оборудование научного центра и благоприятный астроклимат Восточного Памира, характеризующийся большим количеством безоблачных ночей, высокой прозрачностью и сухостью воздуха, позволяют исследователям вести детальное изучение принципиально новых явлений и процессов в космических лучах при сверхвысоких энергиях. Речь идет о таких энергиях, которые в лабораторных условиях недоступны даже с вводом в эксплуатацию Большого адронного коллайдера в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРНе).

В качестве преподавателей и лекторов Школы организаторами были привлечены ведущие ученые и специалисты из ведущих научных центров России и Таджикистана – ФИАН им. П.Н.Лебедева, НИИЯФ им Д.В.Скобельцина МГУ, Института ядерных исследований РАН, Физико-технического института им С.У.Умарова АН Республики Таджикистан, которые прочли лекции и провели семинары, посвященные последним достижениям и актуальным проблемам науки и техники по тематике Школы.

Программа Школы включала следующие темы:

- энергетический спектр и состав первичных космических лучей, особенности спектра первичных космических лучей, их анизотропия;
- происхождение космических лучей сверхвысоких энергий, космофизические механизмы ускорения космических лучей, генерация космических лучей при взрывах сверхновых и активными ядрами галактик (механизм джетов при коллапсе сверхмассивных звезд);
- космические лучи как источник частиц высоких энергий; методы изучения ядерных взаимодействий частиц космических лучей;
- широкие атмосферные ливни и методы их изучения; проблемы моделирования ядерно-электромагнитных каскадов;
- радио-, рентгеновская и гамма-астрономия, гамма-всплески; нейтринная астрофизика; гравитационные волны;
- тёмная материя и тёмная энергия, актуальные вопросы космологии; современные экспериментальные методы в астрофизике частиц; черенковские детекторы и телескопы;
- техника современных астрофизических экспериментов;
- непертурбативные модели теории поля и элементарных частиц.

Молодые учёные из стран СНГ благодаря проведенной Школе молодых ученых получили уникальную возможность соприкоснуться с передним краем науки, ведь имеющиеся в мире аналогичные установки значительно уступают по масштабам и по ряду существенных параметров установкам «Памир-Чакалтая». Участники Школы имели возможность прослушать лекции выдающихся учёных в области физики космических лучей, астрофизики, физики высоких энергий, выступить сами с презентациями своих исследований, а самое главное, установить личные контакты.

Проведение подобных школ будет стимулировать развитие совместных проектов в области фундаментальных и прикладных исследований, а также послужат сближению стран и народов СНГ.

Фарход Рахими,  
Хикмат Муминов

### КРАТКАЯ ИНФОРМАЦИЯ О СЕМИНАРЕ CADEX

С 6 по 10 октября 2014 г. в Физико-техническом институте им. С.У.Умарова Академии наук Республики Таджикистан проходил семинар с участием учёных из Германии - сотрудников Института тропосферных исследований им. Лейбница, г.Лейпциг (TROPOS). Семинар проходил в рамках проекта Центрально-азиатского пылевого эксперимента (Central Asian Dust Experiment (CADEX)), финансируемого Министерством образования Германии и Агентством по космическим исследованиям Германии. Проект выполняется в рамках подписанного между институтами Меморандума о взаимопонимании и согласии с правительствами стран. Целью проекта было проведение исследований по изучению вертикального распределения аэрозоля над атмосферой г. Душанбе с использованием лидарного комплекса (PollyXT), исследование оптических характеристик аэрозоля с использованием солнечного фотометра SE-318В сети АЭРОНЕТ с синхронным измерением радиационных характеристик атмосферы и метеорологических параметров атмосферы. Проект рассчитан на 2 года. В рамках проекта планируется подготовка PhD как с таджикской, так и с германской стороны. Место проведения проекта - полигон атмосферного мониторинга Физико-технического института им. С.У.Умарова АН Республики Таджикистан.

В работе семинара участвовали директор Института тропосферных исследований им. Лейбница, профессор Андреас Мак, а также сотрудники TROPOS: д-р. Дитрих Альхаузен – ответственный по проекту с германской стороны, д-р. Бернд Хейнолд – ответственный за задачи моделирования, Юлиан Хофер – аспирант TROPOS, д-р. Герог Шеттлер – Германский исследовательский Центр по геонаукам (GFZ).

В работе семинара также приняли участие сотрудники ФТИ им.С.У.Умарова, Таджикского национального университета, Института астрофизики АН РТ и Государственного учреждения (ГУ) по гидрометеорологии Республики Таджикистан.

Подписан двухсторонний договор для реализации проекта. Дополнительно к проекту CADEX стороны намерены укреплять сотрудничество путём создания многостороннего консорциума в рамках Европейской Рамочной программы HORIZON 2020.

Состоялась встреча гостей с президентом Академии наук академиком АН РТ Фарходом Рахими, директором Инновационного центра и новых технологий АН РТ, академиком М.И.Илоловым, директором ГУ по гидрометеорологии Республики Таджикистан Х.Расуловым.



Гости посетили высокогорную базу Физико-технического института им. С.У.Умарова Академии наук Республики Таджикистан в поселке Зидды, Гиссарскую крепость и достопримечательные места г. Душанбе.

Подробная информация о проекте доступна на сайтах:

<http://www.tropos.de/en/current-issues/press-releases/>

<http://www.tropos.de/en/research/projects-infrastructures-technology/research-projects/cadex-home/>

[http://polly.rsd.tropos.de/lidar/lidarzeit.php?Ort=Dushanbe&Anzeigjahr=2015&lambda=532&lidar=PollyXT\\_TROPOS](http://polly.rsd.tropos.de/lidar/lidarzeit.php?Ort=Dushanbe&Anzeigjahr=2015&lambda=532&lidar=PollyXT_TROPOS)

[http://polly.rsd.tropos.de/lidar/bilder.php?lidar=PollyXT\\_TROPOS&lambda=532&Jahr=2015&Monat=4&Tag=3&Ort=Dushanbe#bildanker](http://polly.rsd.tropos.de/lidar/bilder.php?lidar=PollyXT_TROPOS&lambda=532&Jahr=2015&Monat=4&Tag=3&Ort=Dushanbe#bildanker)

Б.И.Назаров, С.Ф.Абдуллаев

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

**ВАЛЕРИЙ МАКСУМОВИЧ САЛИМОВ**

(к 70-летию со дня рождения)



12 октября 2014 г. исполнилось бы 70 лет заведующему лабораторией физики лазеров Валерию Максумовичу Салимову. Он родился 12 октября 1944 г в г.Сталинабаде и умер 10 декабря 1988г. В 1951 г. поступил в среднюю школу № 1, по окончании пятого класса в 1956 г. В.М.Салимов поступает в Ташкентское Суворовское военное училище, в 1960 г. в связи с расформированием училища возвращается в г. Душанбе и в 1961 г. заканчивает среднюю школу № 20. В этом же году он поступил в МГУ им. М.В.Ломоносова, который окончил в январе 1967 г. В Физико-техническом институте им. С.У.Умарова (ФТИ) АН РТ В.М.Салимов начал работать с мая 1967 г. в должности

старшего лаборанта лаборатории оптики и спектроскопии, затем – стажера-исследователя. В период с 1968 по 1971 гг. он проходит целевую аспирантуру в МГУ (физический факультет, кафедра оптики и спектроскопии) и после её окончания вновь возвращается на работу в ФТИ на должность младшего научного сотрудника лаборатории физической электроники. В октябре 1972 г. В.М.Салимов в должности младшего научного сотрудника переводится в лабораторию физики ультразвука, с 1974 г. он исполняет обязанности старшего научного сотрудника этой же лаборатории.

В сентябре 1974 г. В.М.Салимов назначается руководителем организованной группы «ГРАНАТ» при лаборатории физики ультразвука.

Основным научным направлением группы «ГРАНАТ» являлось выполнение заданий по хоздоговорам с целью создания экспериментальной базы для лазерных исследований. С июля 1986 г. В.М.Салимов назначается исполняющим обязанности заведующего вновь организованной лабораторией лазерной физики, в этой должности он проработал до 10 декабря 1988 г.

Научные интересы В.М.Салимова были сосредоточены на исследованиях по лазерной тематике, связанной с выполнением хозяйственных работ по заказам ведущих научно-исследовательских институтов (НИИ), Минэлектронпрома и Минпромсвязи СССР. Он успешно справлялся с обязанностями руководителя группы. Под его руководством одновременно проводились исследования по договорам о сотрудничестве с рядом центральных учреждений СССР.

В 1981 г. была завершена работа по внедрению лазерной хирургической установки «Скальпель-1» и инструкций к ней в Клинической больнице скорой медицинской помощи г. Душанбе.

По инициативе В.М.Салимова в 1981 г. началось развитие филиала СКТБ АН Таджикской ССР при ФТИ. Филиал тогда занимался наладкой и изготовлением элементов, узлов и устройств для выполнения лазерных исследований и создания макетов приборов.

В.М.Салимов был высококвалифицированным специалистом в области лазерной физики. По его инициативе и при непосредственном руководстве впервые: разработан и осуществлён метод получения субнаносекундных световых импульсов аргонового лазера при использовании многозеркальных резонаторов; исследованы плазменные колебания в газовом разряде аргоновых лазеров при различных режимах горения дуги и влияние на шумовые характеристики генерируемого излучения; развита модель расчёта дисперсии активной среды газовых лазеров применительно к анализу условий фазовой синхронизации мод, получению предельных значений эффективности генерации сверхкоротких световых импульсов. Эта модель расчёта распространена также на случай учёта зеемановского расщепления контура усиления активной среды в продольном магнитном поле: в результате установлено наличие оптимального значения магнитного поля для увеличения эффективности режима синхронизации мод аргоновых лазеров; выполнен теоретический анализ использования многозеркальных резонаторов для компенсации нелинейности затягивания мод с целью получения режима генерации сверхкоротких световых импульсов при больших уровнях относительного возбуждения активной среды; исследовано условие возбуждения линий генерации в ионном аргоновом лазере; исследованы флуктуации частотного состава излучения аргонового лазера; экспериментально определено время жизни нижних рабочих уровней аргонового лазера; разработаны генераторы световых импульсов нано- и субнаносекундного диапазона на основе газовых лазеров непрерывного действия; изучены энергетические и спектральные характеристики лазеров непрерывного действия с целью создания эффективных источников накачки перестраиваемых лазеров и получения сверхкоротких световых импульсов; изучена возможность создания генераторов сверхкоротких световых импульсов с использованием растворов органических красителей как в качестве активных сред, так и в качестве насыщающих поглотителей; разработан и изготовлен лазер пикосекундных импульсов.

Работы В.М.Салимова докладывались на Всесоюзных конференциях, на Семинарах кафедр физического факультета МГУ, публиковались в центральных научных журна-

лах и отражены в ряде отчетов научно-исследовательских работ Физико-технического института. За короткую, но плодотворную жизнь В.М.Салимовым опубликовано более 30 научных работ в центральных научных журналах, таких как «Радиотехника и электроника», «Оптика и спектроскопия», «Журнал технической физики», «Квантовая электроника», «Журнал экспериментальной и теоретической физики», Доклады АН СССР, Известия АН СССР, Тезисы Ломоносовских чтений (МГУ), Материалы Всесоюзных конференций (г.Москва, г.Тбилиси, г.Киев, г.Минск, г.Душанбе) и в Отчетах ВИНТИ.

В период работы Салимов В.М. постоянно уделял большое внимание подготовке научных кадров. Его учениками были Бахрон Назаров, Умархон Мадвалиев, Абдурахад Ашуров, Сабур Абдуллаев, Валерий Попов, Александр Малков, Марик Ландман, Владимир Карасёв, Абдумалик Салиев, Халимджон Гафуров, Мухамаджан Атаджанов, Евгений Слепченко, Андрей Захаров, Зафар Искандаров, Ринат Бичурин, Абдугани Джураев, Джумахон Шарипов, которые успешно работают и сейчас в Таджикистане, России и в странах дальнего зарубежья. С его непосредственным участием защищены 3 докторских и 10 кандидатских диссертаций. Под его руководством 10 студентов ТГУ в те годы выполнили свои дипломные работы.

Сегодня его нет с нами. Но светлая память о таком учителе, учёном-физике, талантливом и ярком, замечательном Человеке и друге навсегда останется в сердцах всех коллег, учеников, друзей, имевших счастье работать в одном коллективе с таким Человеком, каким был Валерий Максумович Салимов.

Б.И.Назаров, У.Мадвалиев,  
Р.А.Кариева, М.А.Салиев, С.Ф.Абдуллаев

У.Мирсаидов, Б.А.Гафуров, А.Бадалов

**Термическая устойчивость и термодинамические характеристики борогидридов металлов. – Душанбе: Дониш, 2014. – 109 с.**

В монографии систематизированы материалы, опубликованные по термической стабильности и термодинамическим характеристикам борогидридов металлов.

Особое внимание уделено исследованиям авторов по изучению термической устойчивости борогидридов металлов тензиметрическим методом с мембранным нуль-манометром.

Рассмотрены основные стадии распада борогидридов металлов и вычислены термодинамические функции борогидридов s-, p- и f-элементов.

Дана сравнительная оценка термодинамических свойств борогидридов металлов с некоторыми алюмогидридами металлов.

Книга предназначена для научных работников и инженеров-химиков, а также для аспирантов и студентов вузов.

Агентство по ядерной и радиационной безопасности АН РТ

У.Мирсаидов, Б.А.Гафуров, А.Бадалов

**Термическая устойчивость и термодинамические характеристики простых и комплексных гидридов редкоземельных металлов. – Душанбе: Дониш, 2014. – 85 с.**

В монографии систематизированы материалы, опубликованные по термической стабильности и термодинамическим характеристикам простых и комплексных гидридов редкоземельных металлов (РЗМ).

Особое внимание уделено исследованиям авторов по изучению термической устойчивости борогидридов РЗМ тензиметрическим методом с мембранным нуль-манометром.

Рассмотрены основные стадии распада простых и комплексных гидридов РЗМ и вычислены их термодинамические функции.

Дана сравнительная оценка термодинамических свойств гидридов с хлоридами, фторидами и оксидами РЗМ.

Книга предназначена для научных работников и инженеров-химиков, а также для аспирантов и студентов вузов.

Агентство по ядерной и радиационной безопасности АН РТ

Редакция и корректура – Н.Г.Сапожников

---

---

Сдано в набор 14.01.2015 г. Подписано в печать 28.01.2015 г.  
Печать офсетная. Формат 70×100 1/16. Гарнитура Times. Усл. печ. л.8. Заказ № \_\_\_\_.  
Тираж 300 экз.

---

---

*Адрес редколлегии: 734025, Душанбе, пр.Рудаки, 33, каб. 11.  
Тел.:2-21-62-64. E-mail: danrt@mail.ru  
Издательство «Дониш»: 734029, Душанбе, ул.Айни, 121, корп.2.*

---

---