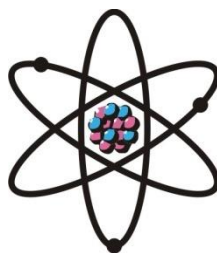


ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Журнал основан
в январе 1952 г.



№ 1 (158)
2015 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С.О.Одинаев – главный редактор, академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Кохирова Г.И.** – зам.главного редактора, доктор физико-математических наук; **Н.Г.Сапожников** – ответственный секретарь; **Х.М.Ахмедов** – академик, доктор химических наук; **П.Б.Бабаджанов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Р.М.Марупов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **Х.Х.Муминов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Ф.Рахими** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Д.Усманов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор.

СОДЕРЖАНИЕ

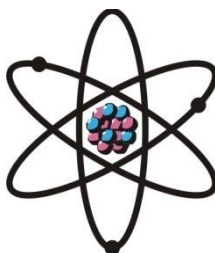
МАТЕМАТИКА

К.Тухлиев. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых классов функций	7
Дж.Х.Бекназаров. Верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм рядов Фурье–Чебышёва в пространстве L_2	20
Р.Пиров. К теории нелинейных переопределенных систем, состоящих из трёх или четырёх дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией в пространстве	32

М.К.Арабов. Анализ устойчивости особой точки квазилинейного уравнения второго порядка	42
И.А.Шакиров, Ю.Х.Хасанов. Об оценках точных значений констант Лебега для интерполяционных полиномов Лагранжа	50
ИНФОРМАТИКА	
З.Д.Усманов, Г.М.Довудов. Позиционное кодирование таджикских словоформ	58
АСТРОФИЗИКА	
С.Х.Абдуллоев, Н.Х.Миникулов. Фотометрия астероида (00533) Sara	67
ФИЗИКА	
С.Одинаев, Р.С.Махмадбегов. Расчет частотного спектра и диаграмма Коула-Коула водного раствора хлорида натрия в зависимости от параметров состояния ..	72
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА	
Д.Н.Низомов, И.Каландарбеков. Сравнительный анализ методов сосредоточенных деформаций и конечных элементов	84
НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ	
У.Р.Раджабов, С.Г.Ёрмамадова, А.У.Козихонов, Р.Н.Рахимова. Термодинамические функции реакций образования координационных соединений железа (III) и железа (II) с дибазолом при ионной силе 0.25 моль/л	93
Х.Г.Мудинов, С.М.Сафармамадов, А.Д.Хусайнов. Комплексообразование серебра (I) с 1,2,4-триазолом при 288-318 К	99
ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ	
И.У.Файзилов, М.Д.Исобаев, М.И.Сабуров. Синтез Z,E-изомеров простых моноэфиров дитретичных ениновых диоксиальдегидов	106
ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ	
О.Г.Бобиев, А.Н.Шахматов, В.Д.Абулхаев. Технологические характеристики некоторых активных красителей	113
Б.С.Джамолзода, А.Муродиён, Т.Шукуров, А.Г.Сафаров, Х.С.Сафиев. ИК-спектры антрацита месторождения Назарайлок до и после термической обработки	121
ХРОНИКА	127

ШҮЪБАИ
ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,
ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА

Маҷалла аз моҳи
январӣ соли 1952
нашр мешавад



№ 1 (158)
с. 2015

ҲАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:

С.О.Одинаев – сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;
Кохирова Г.И. – муовини сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;
Н.Г.Сапожников – котиби масъул; **Ҳ.М.Ахмедов** – академик, доктори илми химия;
Р.Б.Бобочонов – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;
И.Н.Ғаниев – академик, доктори илми химия, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Р.М.Маърупов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор;
Ҳ.Ҳ.Муминов – узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;
С.Х.Неъматуллоев – академик, доктори илмҳои техника; **Ф.Раҳимӣ** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Х.Раҳмонов** – узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Рачабов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҷ.Усмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;
А.Р.Ғайзиев – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва минералогия, профессор;
Ҷ.Х.Холиқов – академик, доктори илми химия, профессор.

МУНДАРИҶА

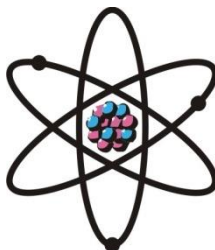
МАТЕМАТИКА

Қ.Тухлиев. Хarakterистикаи структуравии функсияҳо аз L_2 ва қимати аниқи кутрҳои баъзе синфи функсияҳо	7
Ҷ.Х.Бекназаров. Сарҳади болоии тамоили баъзе синфи функсияҳо аз суммаи хусусии қаторҳои Фурйе–Чебишёви онҳо дар фазои L_2	20
Р.Пиров. Оид ба назарияи системаи муодилаҳои ғайрихаттии барзиёдмуайяншудаи аз се ва чор муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуими яқномалумдор дар фазо	32
М.Қ.Арабов. Таҳлили устувории нуқтаҳои махсуси муодилаи қисман хаттии тартиби дуум.....	42

И.А.Шакиров, Ю.Х.Хасанов. Оиди баҳои қиматҳои аниқи доимии Лебег барои полиномҳои интерполясионии Лагранж	50
ИНФОРМАТИКА	
З.Ч.Усмонов, Г.М.Довудов. Кодиронии позитсионии калимаҳои забони тоҷикӣ	58
АСТРОФИЗИКА	
С.Х.Абдуллоев, Н.Х.Миникулов. Фотометрияи астероиди (00533) Sara.....	67
ФИЗИКА	
С.Одинаев, Р.С.Махмадбегов. Ҳисобкунии спектри басомадӣ ва диаграммаи Коула-Коула барои маҳлули обии хлориди натрий вобаста аз параметрҳои ҳолат.....	72
МЕХАНИКАИ БИНОКОРӢ	
Ч.Н.Низомов, И.Қаландарбеков. Таҳлили муқоисавии методҳои мутамаказкунии деформатсияҳо ва элементҳои охиринок	84
ХИМИЯИ ҒАЙРИОРГАНИКӢ	
У.Р.Раҷабов, С.Г.Ёрмамадова, А.У.Қозихонов, Р.Н.Раҳимова. Тавсифи термодинамикии реаксияи ҳосилшавии пайвастаҳои координатсионии оҳани (II) ва оҳани (III) бо дибазол дар қувваи ионии 0.25 моль/л	93
Х.Ғ.Мудинов, С.М.Сафармамадов, А.Д.Ҳусайнов. Комплексҳосилкунии нукра (I) бо 1,2,4-триазол дар ҳароратҳои 288-318 К.....	99
ХИМИЯИ ОРГАНИКӢ	
И.У.Ғайзилов, М.Д.Исобеаев, М.И.Сабуров. Синтези Z,E-изомерҳои моноэфирҳои соддаи дисеюминаи диоксиальдегидҳои енинӣ.....	106
ХИМИЯИ ФИЗИКАВӢ	
О.Ғ.Бобиев, А.Н.Шахматов, В.Д.Абулхаев. Тавсифоти технологияи баъзе рангқунандаҳои ғабол	113
Б.С.Чамолзода, А.Муродиён, Т.Шуқуров, А.Ғ.Сафаров, Ҳ.С.Сафиев. ИК-спектрҳои сохтори молекулавии антрацити маъдани Назарайлоқ то ва баъди коркарди гармӣ	121
Хроника	127

**DEPARTMENT OF
PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES**

The journal was established
in January 1952



№ 1 (158)
2015

EDITORIAL BOARD

Prof. **Saidmukhamad Odinaev**, Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; **Gulchekhra Kokhirova**, Doctor of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **Nikolay Sapozhnikov**, Secretary; **Khakim Akhmedov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Pulat Babadzhonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Abdulkhak Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **Mamadsho Ilolov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Izatullo Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **Dzhuraboy Khalikov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Rakhim Marupov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Ulmas Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Khikmat Muminov**, Doctor of Physical and Mathematical; **Sabit Negmatullaev**, Doctor of Engineering; Prof. **Nusrat Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Farhod Rakhimi**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Zarullo Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Zafar Usmanov**, Doctor of Physical and Mathematical.

CONTENTS

MATHEMATICS

K.Tukhliev. Structural characteristics of functions L_2 and the precise widths of some classes function.....	7
J.Kh.Beknazarov. The upper face of the deviations of certain class of functions of their partial sums of Fourier-Chebyshev space L_2	20
R.Pirov. On the theory of non-linear over determined systems of three and four differential equations (p.d.e) in the second-order partial one unknown function in space.....	32
M.K.Arabov. Analysis of stability of special point for non-smooth second order equation	42
I.A.Shakirov, Yu.Kh.Khasanov. About estimations of Lébesque's constants to Lagrange interpolation polynomials	50

INFORMATICS

Z.D.Usmanov, G.M.Dovudov. Positional coding of tajik wordforms **58**

ASTROPHYSICS

S.Kh.Abdulloev, N.Kh.Minikulov. Photometry of asteroid (00533) Sara..... **67**

PHYSICS

S.Odinaev, R.S.Makhmadbegov. Calculation of the frequency spectrum and Cole-Cole's diagrams of aqueous solution of NaCl depending on state parameters **72**

STRUCTURAL MECHANICS

J.N.Nizomov, I.Kalandarbekov. Comparative analysis method of the concentrated deformation and finite elements..... **84**

INORGANIC CHEMISTRY

U.R.Rajabov, S.G.Ermamadova, A.U.Kozichonov, R.N.Rachimova. Thermodynamic functions of reaction formation of coordination compounds of iron (III) and iron (II) with dibazolom and 0.25 mol/l..... **93**

H.G.Mudinov, S.M.Safarmamadov, A.D.Husaynov. Complex formation silver (I) with 1,2,4-triazolom at 288-318 K **99**

ORGANIC CHEMISTRY

I.U.Fayzilov, M.J.Isobaev, M.I.Saburov. Preparation of Z,E-isomeric monoethers of di-tretic enin dioxyaldehydes **106**

PHYSICAL CHEMISTRY

O.G.Bobiev, A.N.Shakhmatov, V.D.Abulkhaev. Technological characteristics of some active dyes **113**

B.S.Jamolzoda, A.Murodiyov, T.Shukurov, A.G.Safarov, H.S.Safiyev. Study IR-spectroscopic properties of anthracite of deposit "Nazarailek" before and after heat treatment **121**

CHRONICLE..... **127**

УДК 517.5

К.ТУХЛИЕВ

**СТРУКТУРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИЙ ИЗ L_2 И ТОЧНЫЕ
ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ**

Худжандский государственный университет им. Б.Гафурова

Поступила в редакцию 16.01.2015

В работе найдены точные неравенства между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций тригонометрическими многочленами и усредненным с весом специальным модулем непрерывности порядка t в метрике пространства L_2 и даны некоторые их приложения. Вычислены точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 .

Ключевые слова: функция Стеклова – модуль непрерывности m -го порядка – неравенства типа Джексона-Стечкина – наилучшие приближения – тригонометрический полином – производная в смысле Вейля – n -поперечники.

В последнее время при решении экстремальных задач теории аппроксимации в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – суммируемых с квадратом 2π -периодических функций f с нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty$$

часто используют различные модификации классического модуля непрерывности (см., например, [1-5]). Указанные модификации, в большинстве случаев, естественно возникают из специфических условий рассматриваемых задач и позволяют получать результаты, раскрывающие содержательную сущность рассматриваемых задач. При этом часто вместо

Адрес для корреспонденции: Тухлиев Камаридин. 735700, Республика Таджикистан, г.Худжанд, мкр. 20, Худжандский государственный университет. E-mail: kataridin.t54@mail.ru

оператора сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ используют различные усредняющие операторы (см., например, [4,5]).

Следуя работам [6,7] для произвольного $f \in L_2$, запишем функцию Стеклова

$$S_h(f, x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t) dt, \quad h > 0,$$

полагая при этом $S_{h,k}(f) \stackrel{\text{def}}{=} S_h(S_{h,k-1}(f))$, где $k \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) \equiv f$. Обозначим через E – единичный оператор в пространстве L_2 и введем конечные разности первого и высших порядков функций $f \in L_2$ соотношениями

$$\Delta_h^1(f; x) \stackrel{\text{def}}{=} S_h(f, x) - f(x) = (S_h - E)(f; x),$$

$$\Delta_h^m(f; x) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f; \cdot); x) = (S_h - E)^m(f; x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} S_{h,k}(f; x),$$

где $m = 2, 3, \dots$. Используя указанные обозначения, рассмотрим введенный в [6] специальный модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$

$$\Omega_m(f; t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \|\Delta_h^m(f; \cdot)\| : 0 < h \leq t \}.$$

Для произвольной функции $f \in L_2$ с рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

получим производную в смысле Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2$, ($\alpha \geq 0$; $f^{(0)} = f$) определенную равенством

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right). \quad (1)$$

Через $L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha \geq 0$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых существует производная Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2$. Если $S_{n-1}(f^{(\alpha)}, x)$ ($\alpha \geq 0$) – частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье (1) функции $f^{(\alpha)}$, то легко доказать, что наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)} \in L_2$ тригонометрическими полиномами степени $n-1$ имеет вид

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \|f^{(\alpha)} - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathfrak{T}_{2n-1} \right\} =$$

$$= \|f^{(\alpha)} - S_{n-1}(f^{(\alpha)})\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha} \rho_k^2(f) \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$, $k, n \in \mathbb{N}$.

Введём в рассмотрение следующую аппроксимационную характеристику

$$\chi_{n,m,\alpha,p}(\varphi; h) = \sup_{f \in L_2^{(\alpha)}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}; t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}}, \quad (3)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 0$, $0 < p \leq 2$, $\varphi(t) \geq 0$ – произвольная суммируемая, не эквивалентная нулю на полусегменте $(0, h]$ ($0 < h < \pi$) весовая функция, причем в (3) условно полагаем $0/0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Теорема 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 0$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(t)$ – неотрицательная измеримая и суммируемая на отрезке $[0, h]$ функция, не эквивалентная нулю. Тогда справедливо неравенство

$$\{A_{n,m,\alpha,p}(\varphi, h)\}^{-1} \leq \chi_{n,m,\alpha,p}(\varphi; h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} A_{k,m,\alpha,p}(\varphi, h) \right\}^{-1}, \quad (4)$$

где

$$A_{k,m,\alpha,p}(\varphi, h) = \left(k^{\alpha p} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin kt}{kt} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}, \quad k \geq n.$$

Доказательство. Непосредственным вычислением легко доказать, что для произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}$ имеет место соотношение

$$\Omega^2(f^{(\alpha)}; t) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha} \rho_k^2(f) \left(1 - \frac{\sin ku}{ku} \right)^{2m} : |u| \leq t \right\}. \quad (5)$$

Из (5) очевидным образом следует неравенство

$$\Omega(f^{(\alpha)}; t) \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha} \rho_k^2(f) \left(1 - \frac{\sin kt}{kt} \right)^{2m} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Воспользуемся далее одним упрощенным вариантом неравенства Минковского, приведенного в монографии [8, с.104]

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p dt \right)^{2/p} \right)^{1/2}, \quad (7)$$

где $0 < p \leq 2$. Заменяя в неравенстве (7) функции f_k на $f_k \cdot \varphi^{\frac{1}{p}}$, получаем

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{p/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p \varphi(t) dt \right)^{2/p} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Используя соотношение (6), из (8) с учетом (2) получаем

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}; t) \varphi(t) dt \right)^{1/p} \geq \\ & \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \left(k^{\alpha p} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin kt}{kt} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{2/p} \right)^{1/2} \geq \\ & \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \{A_{k,m,\alpha,p}(\varphi, h)\}^2 \right)^{1/2} \geq \inf_{n \leq k < \infty} A_{k,m,\alpha,p}(\varphi, h) \cdot E_{n-1}(f), \end{aligned}$$

откуда для произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}$ следует оценка сверху

$$\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}; t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \leq \frac{1}{\inf_{n \leq k < \infty} A_{k,m,\alpha,p}(\varphi, h)}. \quad (9)$$

Для получения оценки снизу величины (3) рассмотрим функцию $f_0(x) = \sin nx \in L_2^{(\alpha)}$, для которой

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f_0) &= 1, \quad \Omega_m(f_0^{(\alpha)}; t) = n^\alpha \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^m, \\ \int_0^h \Omega_m^p(f_0^{(\alpha)}; t) \varphi(t) dt &= n^{\alpha p} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\chi_{n,m,\alpha,p}(\varphi; h) \geq \frac{E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f_0^{(\alpha)}; t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(n^{\alpha p} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \{A_{n,m,\alpha,p}(\varphi, h)\}^{-1}. \quad (10)$$

Требуемое доказательство двойного неравенства (4) вытекает из сопоставления оценки сверху (9) и оценки снизу (10).

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq 3\pi / (4n)$, $\varphi(t) \geq 0$ – суммируемая на отрезке $[0, h]$ весовая функция. Тогда имеет место соотношение

$$\inf_{n \leq k < \infty} A_{k,m,\alpha,p}(\varphi, h) = A_{n,m,\alpha,p}(\varphi, h) \quad (11)$$

и, следовательно, справедливо равенство

$$X_{n,m,\alpha,p}(\varphi; h) = \left(n^{\alpha p} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (12)$$

Доказательство. При сделанных предположениях относительно всех параметров в утверждении теоремы для справедливости равенства (11) достаточно показать, что при любых $k \geq n$ ($k, n \in \mathbb{N}$) имеет место неравенство

$$k^{\alpha p} \left(1 - \frac{\sin kt}{kt} \right)^{mp} \geq n^{\alpha p} \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp} \quad (13)$$

или, что то же,

$$\left(\frac{k}{n} \right)^{\alpha/m} \left(1 - \frac{\sin kt}{kt} \right) \geq \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right).$$

Последнее неравенство всегда выполняется, если при любых $k \geq n$ имеет место неравенство

$$1 - \frac{\sin kt}{kt} \geq 1 - \frac{\sin nt}{nt}. \quad (14)$$

Но (14) эквивалентно неравенству

$$\frac{\sin nt}{nt} \geq \frac{\sin kt}{kt}, \quad k \geq n. \quad (15)$$

Докажем неравенство (15). В самом деле, если $nt \leq kt \leq 3\pi / 4$, то имеем

$$\frac{\sin nt}{nt} \geq \frac{\sin kt}{kt} \geq \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} > \frac{1}{2\pi}, \quad (16)$$

а если же $nt \leq kt \leq \pi$, то неравенство (14) вытекает из убывания $\frac{\sin x}{x}$ на $[0, \pi]$. Пусть

$kt > \pi$. Так как локальные максимумы $\frac{\sin x}{x}$ при $x > \pi$ убывают и первый локальный максимум достигается в точке $\gamma \in (2\pi, 3\pi)$, то согласно (16) имеем

$$\frac{\sin kt}{kt} \leq \frac{\sin \gamma}{\gamma} \leq \frac{\sin \gamma}{2\pi} \leq \frac{1}{2\pi} < \frac{\sin nt}{nt}.$$

Этим неравенство (15) и вместе с ним неравенство (13) доказаны. Но из (13) вытекает равенство (11) и, следовательно, имеет место соотношение (12), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Прежде чем сформулировать остальные результаты, напомним необходимые определения и понятия. Пусть $\mathbb{B} = \{g : \|g\| \leq 1\}$ – единичный шар в L_2 ; \mathfrak{M} – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 ; $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n ; $J : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор; $J^\perp : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon \mathbb{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \|f - g\| : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \sup \{ \|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - Jf\| : f \in \mathfrak{M} \} : J\Lambda_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - J^\perp f\| : f \in \mathfrak{M} \} : J^\perp \Lambda_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским, линейным, проекционным n -поперечниками.

Весьма важным является нахождение соответствующих подпространств, реализующих внешнюю верхнюю грань в поперечнике Бернштейна $b_n(\cdot)$ и внешние нижние грани во всех остальных поперечниках. Такие подпространства называются оптимальными

ми подпространствами. Между перечисленными величинами в гильбертовом пространстве L_2 выполняются соотношения (см. например [8,9]):

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}; L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}; L_2). \quad (17)$$

Пусть $\varphi \geq 0$ – произвольная суммируемая на отрезке $[0, h]$ функция. Через $W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi$ обозначим среднее в p -ой степени значение модуля непрерывности $\Omega_m(f^{(\alpha)}; t)$ порядка m от функции $f^{(\alpha)}$ с весом φ :

$$W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p = \left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}; t) \varphi(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^h \varphi(t) dt \right)^{-1/p}, \quad (18)$$

а через $L_2^{(\alpha)}(m, p, h, \varphi)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(\alpha)}$, для которых $W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p \leq 1$. Очевидно, что в силу свойства монотонности модуля непрерывности $\Omega_m(f^{(\alpha)}; t)$ для произвольной суммируемой весовой функции $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$ из (18) вытекает неравенство

$$W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p \leq \Omega_m(f^{(\alpha)}; h), \quad 0 < h \leq \pi / n.$$

Полученное неравенство указывает на то, что в задачах теории аппроксимации функций $f \in L_2^{(\alpha)}$ усредненное значение модуля непрерывности (18) предпочтительнее, чем функционал Джексона-Стечкина $\Omega_m(f^{(\alpha)}; h)$.

Заметим, что отыскание наименьшей константы в неравенстве Джексона-Стечкина равносильно вычислению точной верхней грани

$$\chi_{m, \alpha, p, h}(L_2^{(\alpha)}, L_2, \mathfrak{F}_N) = \sup \left\{ \frac{E(f, \mathfrak{F}_N)}{W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p} : f \in L_2^{(\alpha)} \right\}. \quad (19)$$

Приведём решение задачи о минимизации величины (19) по всем подпространствам размерности N , то есть вычислим значения инфимума величины (19) относительно всего множества приближающихся подпространств $\mathfrak{F}_N \subset L_2$ размерности N :

$$\begin{aligned} \chi_{N, m, \alpha, p, h}(L_2^{(\alpha)}, L_2) &= \inf \left\{ \chi_{m, \alpha, p, h}(L_2^{(\alpha)}, L_2, \mathfrak{F}_N) : \mathfrak{F}_N \subset L_2 \right\} = \\ &= \inf \left\{ \sup \left\{ \frac{E(f, \mathfrak{F}_N)}{W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p} : f \in L_2^{(\alpha)} \right\} : \mathfrak{F}_N \subset L_2 \right\}. \end{aligned}$$

Положим также

$$E_{n-1}\left(L_2^{(\alpha)}(m, p, h, \varphi)\right)_{L_2} = \sup\left\{\|f - S_{n-1}(f)\| : f \in L_2^{(\alpha)}(m, p, h, \varphi)\right\}.$$

Теорема 3. Пусть $\alpha \geq 0$, $0 < p \leq 2$, $m, N \in \mathbb{N}$, $0 < h \leq \pi$. Тогда имеет место равенство

$$\chi_{N,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}; L_2\right) = d_N\left(L_2^{(\alpha)}(m, p, h, \varphi); L_2\right).$$

Доказательство. Следуя схеме рассуждений из монографии Н.П.Корнейчука [10, с.385], полагаем, что $f \in L_2^{(\alpha)}$, $\varphi(t) \geq 0$ – суммируемая на $[0, h]$ функция, $W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p = u > 0$. Положив $f_1(x) = u^{-1}f(x)$, получим $W_m(f_1^{(\alpha)}; \varphi, h)_p = 1$, то есть $f_1 \in L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi)$. Учитывая положительную однородность функционалов $E(f, \mathfrak{T}_N)_2$ и $W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p$, при любом $0 < p \leq 2$ и фиксированном $h > 0$ имеем

$$\sup_{f \in L_2^{(\alpha)}} \frac{E(f, \mathfrak{T}_N)_2}{W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p} \leq \sup_{f \in L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi)} E(f, \mathfrak{T}_N)_2. \quad (20)$$

Переходя в неравенстве (20) к нижним граням по всем подпространствам $\mathfrak{T}_N \subset L_2$ размерности N , получаем

$$\chi_{N,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}; L_2\right) \leq d_N\left(L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi); L_2\right).$$

С другой стороны, для произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi)$ в силу определения класса $L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi)$ справедливо неравенство

$$E(f, \mathfrak{T}_N)_2 \leq \frac{E(f, \mathfrak{T}_N)_2}{W_m(f^{(\alpha)}; \varphi)_{p,h}}$$

и, так как оно верно для каждого подпространства $\mathfrak{T}_N \subset L_2$, то

$$d_N\left(L_2^{(\alpha)}(m, p, h; \varphi); L_2\right) \leq \chi_{N,m,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}; L_2\right).$$

Сравнивая неравенства (19) и (20), получаем утверждение теоремы.

Обозначим через $W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega$ – класс дифференцируемых в смысле Вейля функций $f \in L_2^{(\alpha)}$ таких, чтобы для произвольной неотрицательной весовой функции $\varphi(t)$ ($0 \leq t \leq h$, $0 < h \leq \pi/n$) выполнялось условие

$$W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p = \left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}; t) \varphi(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^h \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \leq \Omega(h),$$

где $\Omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, то есть неотрицательная неубывающая полуаддитивная на $[0, h]$ ($0 \leq h \leq \pi$) функция такая, что $\Omega(0) = 0$.

Теорема 4. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $0 < h \leq 3\pi / (4n)$ и выполнено равенство (11). Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n-1}(W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega; L_2) &= \lambda_{2n}(W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega; L_2) = \\ &= E_{n-1}(W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega) = \frac{1}{n^\alpha} \left(\frac{\int_0^h \varphi(t) dt}{\int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp} \varphi(t) dt} \right)^{1/p} \Omega(h), \end{aligned}$$

где $\lambda_k(\cdot)$ – любой из k -поперечников Бернштейна $b_k(\cdot)$, Гельфанда $d^k(\cdot)$, Колмогорова $d_k(\cdot)$, линейного $\delta_k(\cdot)$, проекционного $\pi_k(\cdot)$. Все приведенные выше n -поперечники реализуются частичными суммами Фурье $S_{n-1}(f; t)$ порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2^{(\alpha)}$.

Доказательство. Для получения оценки сверху, воспользуясь равенством (12), для произвольной $f \in L_2^{(\alpha)}$ запишем

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{n^\alpha} \left(\frac{\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}; t) \varphi(t) dt}{\int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp} \varphi(t) dt} \right)^{1/p}.$$

Отсюда, учитывая определение класса $W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega$ для произвольной функции $f \in W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega$, приходим к неравенству

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{W_m(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p}{n^\alpha} \left(\frac{\int_0^h \varphi(t) dt}{\int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp} \varphi(t) dt} \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^\alpha} \left(\frac{\int_0^h \varphi(t) dt}{\int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp} \varphi(t) dt} \right)^{1/p} \Omega(h). \quad (21)$$

Переходя к верхним границам по всем функциям $f \in W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega$ в неравенстве (21), имеем

$$E_{n-1}(W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega)_2 \leq \frac{1}{n^\alpha} \left(\frac{\int_0^h \varphi(t) dt}{\int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp} \varphi(t) dt} \right)^{1/p} \Omega(h),$$

откуда сразу получаем оценку сверху для проекционного n -поперечника

$$\begin{aligned} \pi_{2n}(W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega; L_2) &\leq \pi_{2n-1}(W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega; L_2) \leq E_{n-1}(W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega)_2 \leq \\ &\leq n^{-\alpha} \left\{ \int_0^h \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \left\{ \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p} \Omega(h). \end{aligned} \quad (22)$$

С целью получения оценки снизу бернштейновского n -поперечника класса $W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega$ введём в рассмотрение шар

$$\mathbb{S}_{2n+1} = \{T_n \in \mathfrak{T}_{2n+1} : \}$$

$$\|T_n\| \leq n^{-\alpha} \left(\int_0^h \varphi(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \Omega(h) \}$$

в $(2n+1)$ -мерном подпространстве \mathfrak{T}_{2n+1} тригонометрических полиномов.

Покажем, что $T_n \in W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega$. Воспользовавшись рассуждениями работы [11], легко доказать, что для любого полинома $T_n \in \mathbb{S}_{2n+1} \cap \mathfrak{T}_{2n+1}$ имеет место неравенство

$$\Omega_m(T_n^{(\alpha)}, t) \leq n^\alpha \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^m \|T_n\|, \quad 0 < nt \leq \pi. \quad (23)$$

Используя определение класса $W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega$ и неравенство (23), получаем

$$\begin{aligned}
W_m(T_n^{(\alpha)}; \varphi, h)_p &= \left(\frac{\int_0^h \Omega_m^p(T_n^{(\alpha)}; t) \varphi(t) dt}{\int_0^h \varphi(t) dt} \right)^{1/p} \leq \\
&\leq n^\alpha \left(\frac{\int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp} \varphi(t) dt}{\int_0^h \varphi(t) dt} \right)^{1/p} \cdot \|T_n\| \leq \Omega(h),
\end{aligned}$$

а потому $S_{2n+1} \in W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega$. Теперь, воспользуясь определением бернштейновского n -поперечника, запишем оценку снизу

$$\begin{aligned}
b_{2n-1}(W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega; L_2) &\geq b_{2n}(W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega; L_2) \geq b_{2n}(S_{2n+1}; L_2) = \\
&= n^{-\alpha} \left\{ \int_0^h \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \left\{ \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p} \Omega(h). \tag{24}
\end{aligned}$$

Сопоставляя оценку сверху (22) и оценку снизу (24), с учетом соотношения (17) завершаем доказательство теоремы 4.

Следствие 1. При всех $\alpha \geq 0$, $0 < h \leq 3\pi / (4n)$, $n \in \mathbb{N}$, $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, $\varphi(t) := 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\lambda_{2n-1}(W_{1/m,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega; L_2) &= \lambda_{2n}(W_{1/m,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega; L_2) = \\
&= E_{n-1}(W_{1/m,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega) = \frac{1}{n^\alpha} \left(\frac{nh}{nh - Si(nh)} \right)^m \Omega(h).
\end{aligned}$$

Следствие 2. При всех $\alpha \geq 0$, $0 < h \leq 3\pi / (4n)$, $n \in \mathbb{N}$, $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, $\varphi(t) := t$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\lambda_{2n-1}(W_{1/m,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega; L_2) &= \lambda_{2n}(W_{1/m,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega; L_2) = \\
&= E_{n-1}(W_{1/m,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega) = n^{-\alpha} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m} \Omega(h).
\end{aligned}$$

В завершение этого параграфа заметим, что схема рассуждений, примененная к доказательству теоремы 3, позволяет также доказать следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq 3\pi / (4n)$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \chi_{2n,m,\alpha,p,h}(L_2^{(\alpha)}; L_2) &= \chi_{2n-1,m,\alpha,p,h}(L_2^{(\alpha)}; L_2) = \\ &= \lambda_{2n-1}(W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega; L_2) = \lambda_{2n}(W_{p,h}^{(\alpha)} H_m^\Omega; L_2), \end{aligned}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n -поперечников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ditzian Z., Totik V. Moduli of Smoothness. – Springer Ser. Comput. Math., 1987. v. 9, Springer-Verlag, New York.
2. Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости. – М.: Мир, 1988, 328 с.
3. Kokilashvili. V., Yildirim Y.E. On the approximation in weighted Lebesgue spaces. – Proc. Razmadze A. Math. Inst., 2007, v. 143, pp.103-113.
4. Потапов М.К. О применении одного оператора обобщенного сдвига в теории приближений. – Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1998, №3, с. 38-48.
5. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 . – Матем. заметки, 2005, т.78, №5, с.792-796.
6. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π -периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$. – Матем. заметки, 2004, т.76, №6, с. 803-811.
7. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 . – Матем. заметки, 2013, т.94, №6, с. 905-914.
8. Pinkus A. On n -Widths Periodic Functions. – Journ. Analyse Math., 1979, v.35, pp. 209-235.
9. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976, 325 с.
10. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987, 424 с.
11. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 . – Матем. заметки, 1979, т.25, №2, с. 217-223.

Қ.ТУХЛИЕВ

ХАРАКТЕРИСТИКА И СТРУКТУРА ВИИ ФУНКЦИЯҲО АЗ L_2 ВА ҚИМАТИ АНИҚИ ҚУТРҲОИ БАЪЗЕ СИНФИ ФУНКЦИЯҲО

Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи Б.Ғафуров

Дар мақола нобаробарҳои аниқ байни наздикшави бехтарини даврӣ дифференсиронидашаванда бо мазмуни Вейл барои функцияҳои бисёрраъзогиҳои тригонометрӣ ва модули бефосилаи махсус бо вазнҳои нисбати миёна гирифташудаи тартиби m дар метрикаи L_2 ёфта шуда, баъзи тадқиқи онҳо оварда шудаанд. Қиматҳои аниқи қутрҳои баъзи синфҳои функцияҳо дар L_2 ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: функцияи Стеклов – модули бефосилагии тартиби m -ум – нобаробарҳои намуди Чексон-Стечкин – наздикшави бехтарин – бисёрраъзогиҳои тригонометрикӣ – дифференсиронии бо мазмуни Вейл – n -қутрҳо.

K.TUKHLIEV

**STRUCTURAL CHARACTERISTICS OF FUNCTIONS L_2 AND THE PRECISE
WIDTHS OF SOME CLASSES FUNCTION**

B.G.Gafurov Khugand State University

Several exact inequalities are found between the best approximations of differentiable periodic functions in the sense of Weil trigonometric polynomials and averaged with the weight of the moduli of continuity of arbitrary fractional order in the metric of L_2 and their applications are given. To calculate the exact value the widths of certain classes of functions in L_2 .

Key words: Steklov function – module continuity of m -th order – inequalities of Jackson-Stechkin – best approach – trigonometric polynomial – derivative in the sense of Weyl – n -widths

УДК 517.5

ДЖ.Х.БЕКНАЗАРОВ

**ВЕРХНИЕ ГРАНИ ОТКЛОНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ
ОТ ИХ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДОВ ФУРЬЕ–ЧЕБЫШЁВА
В ПРОСТРАНСТВЕ L_2**

Худжандский государственный университет им. Б.Г.Гафурова.

Поступила в редакцию 14.11.2014 г.

Рассматривается задача вычисления точной верхней грани наилучшего полиномиального приближения некоторых классов дифференцируемых функций, принадлежащих гильбертовому пространству $L_{2,\mu}[-1,1]$ с весом Чебышева $\mu(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$. Получены неравенства типа Джексона–Стечкина, связывающие наилучшее полиномиальное приближение $E_{n-1}(f)_{2,\mu}$ с усредненным положительным весом специальным модулем непрерывности m -го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}f; t)_{2,\mu}$, где \mathcal{D} – некоторый дифференциальный оператор второго порядка. Вычислены точные значения n -поперечников некоторых классов функций из $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение – верхние грани – обобщенный модуль непрерывности – константа Джексона–Стечкина – коэффициенты Фурье–Чебышева – n -поперечники.

1. В работе найдены точные значения верхних граней отклонения некоторых классов функций от их частных сумм рядов Фурье–Чебышёва в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1,1] := L_2(\mu(x); [-1,1])$ с весом Чебышева $\mu(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, суммируемых с квадратом функций $f : [-1;1] \rightarrow \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ и конечной нормой

Адрес для корреспонденции: Бекназаров Джурабек Холмаматович. 735700, Республика Таджикистан, г.Худжанд, мкр. 20, Худжандский государственный университет.
E-mail: beknazarov-jurabek@mail.ru

$$\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \left(\int_{-1}^1 \mu(x) f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Введем обозначения: \mathbb{N} – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$ – множество всех положительных чисел. Следуя работе А.В.Абилова и Ф.В.Абиловой [1], в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ рассмотрим оператор

$$F_h f(x) = \frac{1}{2} \left[f \left(x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h \right) + f \left(x \cos h - \sqrt{1-x^2} \sin h \right) \right], \quad (1)$$

который будем называть *оператором обобщённого сдвига*, и введем в рассмотрение конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h^1(f; x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - \mathbb{I})f(x),$$

$$\Delta_h^m(f; x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1}(f; \cdot); x) = (F_h - \mathbb{I})^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где $F_h^0 f(x) \equiv f(x)$, $F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x))$, $k = 1, 2, \dots, m$; $m \in \mathbb{N}$ и \mathbb{I} – единичный оператор в пространстве L_2 .

Определим обобщенный модуль непрерывности m -го порядка равенством

$$\Omega_m(f; t)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \sup \left\{ \left\| \Delta_h^m(f; \cdot) \right\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} : |h| \leq t \right\}. \quad (2)$$

Пусть далее

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k \arccos x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

– ортонормированная система многочленов Чебышева первого рода в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$. Тогда, как хорошо известно [2],

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x) \quad (4)$$

есть ряд Фурье-Чебышёва функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, а

$$c_k(f) = \int_{-1}^1 \mu(x) f(x) T_k(x) dx \quad (5)$$

– коэффициенты Фурье-Чебышёва. Равенство в (4) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Пусть теперь $\mathcal{D} = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка. Операторы высших порядков определим последовательно, полагая $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, ($r = 2, 3, \dots$). Известно [3, с.54], что многочлены (3) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)T''_k(x) - xT'_k(x) + k^2T_k(x) = 0, \quad (6)$$

а потому из (6) следуют равенства

$$\mathcal{D}T_k(x) = -k^2T_k(x), \dots, \mathcal{D}^r T_k(x) = (-1)^r k^{2r}T_k(x). \quad (7)$$

В [1] доказано, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, имеющей обобщенные производные в смысле Леви [4], коэффициенты Фурье-Чебышёва (5) ряда (4) удовлетворяют соотношениям

$$c_k(f) = (-1)^r k^{-2r} c_k(\mathcal{D}^r f), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$c_k(F_h f) = \cos kh \cdot c_k(f), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где функция $F_h f$ – определена равенством (1).

Обозначим через $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_{2,\mu}^{(0)}[-1,1] = L_{2,\mu}[-1,1]$) – множество функций $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, у которых производная $\mathcal{D}^r f$ принадлежит пространству $L_{2,\mu}[-1,1]$. Всюду далее вместо $L_{2,\mu}[-1,1]$, $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$, $\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]}$, соответственно, будем писать $L_{2,\mu}$, $L_{2,\mu}^{(2r)}$, $\|f\|_{2,\mu}$.

Пользуясь соотношениями (7) – (9) и равенством Парсеваля, из (4) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ легко получить равенство [1]

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r f)\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f). \quad (10)$$

Учитывая соотношение (10), модуль непрерывности (2) запишем в виде

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{4r} c_k^2(f) (1 - \cos kh)^{2m} : |h| \leq t \right\}. \quad (11)$$

Из равенства (11) вытекает, что при любом $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \geq \sum_{k=n}^{\infty} (1 - \cos kt)^{2m} k^{4r} c_k^2(f). \quad (12)$$

Пусть

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} = \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\mu} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} \quad (13)$$

– наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}$ элементами подпространства \mathcal{P}_{n-1} .

В [3, с.26] доказано, что среди всех элементов $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ частичная сумма

$S_{n-1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$ ряда (4) доставляет минимум величине (13). При этом

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right)^{1/2}. \quad (14)$$

Из (14), учитывая равенство (8), для произвольной $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq n^{-2r} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}. \quad (15)$$

Неравенство (15) обращается в равенство для функции $f_0(x) = T_n(x)$, принадлежащей множеству $L_{2,\mu}^{(2r)}$, поскольку $\mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu} = 1$, $\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f_0)_{2,\mu} = n^{2r}$. Пусть

$\chi_{n,m,r}(\Omega_m; \pi/n)_{L_{2,\mu}} = \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r} \mathcal{E}_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f; \pi/n)_{L_{2,\mu}}}$ – точная константа в неравенстве типа Джексона–Стечкина

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}} \leq \chi \cdot n^{-2r} \Omega_m(\mathcal{D}^r f; \pi/n)_{L_{2,\mu}}.$$

Всюду далее введём обозначение

$$\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) := \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh. \quad (16)$$

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_2^{(2r)}$ и $0 < t \leq \pi/n$. Тогда справедливы равенства

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right)^m} = \left(1 - \frac{\text{Si}(nh)}{nh} \right)^{-m}, \quad (17)$$

где $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du$ – интегральный синус. Существует функция $f_0 \in L_2^{(2r)}$, реализующая в (17) верхнюю грань.

Доказательство. Применяя неравенства Гёльдера для рядов, при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$, для произвольной $f \in L_2^{(2r)}$ с учетом равенства (10) и определения модуля непрерывности Ω_m , имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \cos kh &= \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \cos kh = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} (1 - \cos kh) c_k^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^{2-1/m} |c_k(f)|^{1/m} (1 - \cos kh) \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right)^{1-1/(2m)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} c_k^2(f) \right)^{1/(2m)} \leq \\ &\leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f) \right)^{1/(2m)} = \\ &= (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r f)\|^{1/m} \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h). \end{aligned}$$

Полученное неравенство перепишем в следующем виде

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f) \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \cos kh. \quad (18)$$

Интегрируя неравенство (18) по аргументу h в промежутке $[0, \tau]$, где $0 < \tau \leq \pi/n$, получаем

$$\tau \mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu})^{2-1/m} n^{-2r/m} \int_0^{\tau} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \frac{\sin k\tau}{k}. \quad (19)$$

Поделив обе части полученного неравенства на число τ и снова интегрируя по τ в пределах от 0 до t , будем иметь

$$t \mathcal{E}_{n-1}^2(f) \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \int_0^t \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right) d\tau + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \int_0^t \frac{\sin k\tau}{k\tau} d\tau.$$

Отсюда, пользуясь обозначением (17) и определением интегрального синуса

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du, \text{ получаем неравенство}$$

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f) \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau \right) + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \frac{Si(kt)}{kt}. \quad (20)$$

Далее учитывая, что функция $\frac{Si(kt)}{kt}$ для значений $k \geq n$ является монотонно убывающей, имеем $\max \left\{ \frac{Si(kt)}{kt} : k \geq n \right\} = \frac{Si(nt)}{nt}$, используя которую, из (20) получаем

$$\left(1 - \frac{Si(nt)}{nt} \right) \mathcal{E}_{n-1}^2(f) \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f))^{2-1/m} n^{-2r/m} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau.$$

Отсюда сразу вытекает неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(f) \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(1 - \frac{Si(nt)}{nt} \right)^{-m} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau \right)^m,$$

из которого для произвольной $f \in L_2^{(2r)}$ получаем оценку сверху

$$\frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau \right)^m} \leq \left(1 - \frac{Si(nt)}{nt} \right)^{-m}. \quad (21)$$

Для получения оценки снизу, равной правой части (22) вводим в рассмотрение функцию $f_0(x) := \sqrt{2/\pi} \cos(n \arccos x) = T_n(x) \in L_2^{(2r)}$, для которой простым подсчетом получаем $\|f_0(x) - S_{n-1}(f_0; x)\| = \|f_0(x)\| = 1$;

$$\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; h) = n^{2r/m} (1 - \cos nh), \quad 0 < h \leq \pi/n;$$

$$\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; \tau) := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; h) dh = n^{2r/m} \left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau} \right);$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; \tau) d\tau = n^{2r/m} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau} \right) d\tau =$$

$$= n^{2r/m} \left(1 - \frac{1}{nt} \int_0^{nt} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right) = n^{2r/m} \left(1 - \frac{Si(nt)}{nt} \right).$$

Учитывая полученное соотношение, запишем оценку снизу

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{f \in L_2^{(2r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{2r} \|f - S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh \right)^m} \geq \frac{n^{2r} \|f_0 - S_{n-1}(f_0)\|}{\left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; \tau) d\tau \right)^m} = \\
& = \frac{n^{2r}}{n^{2r} \left(1 - \frac{Si(nt)}{nt} \right)^m} = \left(1 - \frac{Si(nt)}{nt} \right)^{-m}, \quad 0 < t \leq \pi / n. \tag{22}
\end{aligned}$$

Сопоставляя неравенства (21) и (22), получаем требуемое равенство (17), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Отметим, что доказанное равенство (17) в некотором смысле является обобщением и распространением известных результатов Л.В.Тайкова [5] (случай $m=1$) и С.Б.Вакарчука [6] (случай $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$) о наилучшем полиномиальном приближении периодических дифференцируемых функций $f \in L_2^{(r)}$ на случай приближения функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ частными суммами Фурье-Чебышёва.

Теорема 2. Для произвольной $t \in (0, \pi / n]$ справедливо неравенство

$$\frac{2^m}{n^{2r} (nt)^{2m}} \leq \sup_{f \in L_2^{(2r)}} \frac{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}} \leq \frac{2^m}{n^{2r}} \left(\frac{1}{(nt)^2} + \frac{1}{2} \right)^m. \tag{23}$$

Из (23), в частности, для константы Джексона–Стечкина имеет место двусторонняя оценка

$$\left(\frac{2}{\pi^2} \right)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \leq \chi_{n,m,r}(\Omega_m; \pi / n)_{2,\mu} \leq \frac{2^m}{n^{2r}} \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2} \right)^m. \tag{24}$$

Доказательство. В самом деле, интегрируя неравенство (19) по переменному τ в пределах от $\tau = 0$ до $\tau = t$, будем иметь

$$\begin{aligned}
& \frac{t^2}{2} \mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \leq \\
& \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu})^{2-1/m} n^{-2r/m} \int_0^t \int_0^\tau \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h) dh d\tau + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \frac{1 - \cos kt}{k^2}. \tag{25}
\end{aligned}$$

Выполнив интегрирование по частям в повторном интеграле и оценив числовой ряд, запишем

$$\frac{t^2}{2} \mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \leq (\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu})^{2-1/m} n^{-2r/m} \int_0^t (t - \tau) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{n^2} \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) (1 - \cos kt). \quad (26)$$

Применив неравенство Гельдера к числовому ряду в (26), получим

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{2} \mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} &\leq (\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu})^{2-1/m} n^{-2r/m} \int_0^t (t-\tau) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^{2-1/m} |c_k(f)|^{1/m} (1 - \cos kt) \right\} \leq \\ &\leq (\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu})^{2-1/m} n^{-2r/m} \int_0^t (t-\tau) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{n^2} \left\{ (\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu})^{2-1/m} n^{-2r/m} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \right\} = \\ &= \frac{1}{n^{2+2r/m}} (\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu})^{2-1/m} \left\{ \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} + n^2 \int_0^t (t-\tau) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует, что

$$\frac{t^{2m}}{2^m} \mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{n^{2(m+r)}} \cdot \Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \left(1 + \frac{(nt)^2}{2} \right)^m.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}} \leq \frac{2^m}{n^{2r}} \left(\frac{1}{(nt)^2} + \frac{1}{2} \right)^m. \quad (27)$$

Оценку в (23) получим для функции $f_0(x) = T_n(x)$, для которой $\mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu} = 1$.

Простой подсчет показывает, что

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0; t)_{2,\mu} = n^{2r} \left(2 \sin^2 \frac{nt}{2} \right)^m \leq n^{2r} \cdot \frac{(nt)^{2m}}{2^m}.$$

Имеем

$$\sup_{f \in B_2^{(2r)}} \frac{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}} \geq \frac{\mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0; t)_{2,\mu}} \geq \frac{2^m}{n^{2r} (nt)^{2m}}. \quad (28)$$

Требуемое двойное неравенство (23) получим из сопоставления неравенств (27) и (28), а неравенство (24) следует из (23) при $t = \pi/n$, чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Замечание. Доказанная теорема 2 является обобщением одного результата С.Б.Вакарчука [6] о наилучшем полиномиальном приближении периодической дифференцируемой функции $f \in L_2[0, 2\pi]$, для обычных модулей непрерывности m -го порядка $\omega_m(f^{(r)}; t)_2$ на случай наилучшего полиномиального приближения функции $f \in L_{2,\mu}[-1, 1]$, гладкостные структурные характеристики которой выражаются через обобщенный модуль непрерывности m -го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}$.

2. Пусть $\Phi(t)$ – непрерывная неубывающая положительная в области $[0, +\infty)$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$.

Через $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi), m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 < h \leq \pi/n$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(2r)}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{h} \int_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau) d\tau \leq \Phi(h).$$

Для этих обозначение справедлива следующая

Теорема 3. Пусть $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < h \leq \pi/n$. Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)) = \frac{1}{n^{2r}} \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m} \Phi^m(h). \quad (29)$$

Доказательство. Учитывая определение класса $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$, из неравенства (21) получаем оценку сверху

$$\sup \left\{ \|f - S_{n-1}(f)\| : f \in W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi) \right\} \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m} \Phi^m(h). \quad (30)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{n^{2r}} \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m} \Phi^m(h) T_n(x).$$

Легко проверить, что функция $f_1 \in W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$, кроме того

$$\|f_1\| = \frac{1}{n^{2r}} \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m} \Phi^m(h),$$

а потому имеем

$$\sup \left\{ \|f - S_{n-1}(f)\| : f \in W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi) \right\} \geq$$

$$\geq \|f_1 - S_{n-1}(f_1)\| = \|f_1\| = \frac{1}{n^{2r}} \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m} \Phi^m(h). \quad (31)$$

Сравнивая неравенства (30) и (31), получаем равенство (29). Этим завершается доказательство теоремы 3.

В качестве приложения теоремы 3 рассмотрим задачу о точном вычислении верхних граней модулей коэффициентов Фурье на рассмотренном классе функций. Экстремальная задача вычисления верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах дифференцируемых функций рассматривалась в работах многих математиков (см., например [7] и приведенную там литературу). Аналогичная задача представляет определенный интерес для коэффициентов Фурье–Чебышёва $c_n(f)$, которая в общем случае формулируется следующим образом: если \mathfrak{M} – некоторый класс функций, принадлежащий пространству $L_{2,\mu}$, то требуется найти величину $\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}) = \sup\{|c_n(f)| : f \in \mathfrak{M}\}$. Из доказанной теоремы 3 в качестве следствия получаем

Теорема 4. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq \pi/n$ имеет место равенство

$$\mathcal{L}_n(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)) = \frac{1}{n^{2r}} \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m} \Phi^m(h) \quad (32)$$

и, в частности, при $h = \pi/n$ имеем

$$L_n(W_{m,\pi/n}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)) = \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{\pi}{\pi - Si(\pi)}\right)^m \Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Доказательство. В силу ортогональности частной суммы Фурье–Чебышёва $S_{n-1}(f; x)$ и полинома $T_n(x)$, коэффициенты Фурье–Чебышёва $c_n(f)$ представляются в следующем виде

$$c_n(f) = \int_{-1}^1 \mu(x) [f(x) - S_{n-1}(f; x)] T_n(x) dx. \quad (33)$$

К интегралу в правой части (33), применив интегральное неравенство Коши–Буняковского и используя соотношения (10) и (29), получаем нужную оценку сверху

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)\} \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m} \Phi^m(h). \quad (34)$$

С целью получения оценки снизу, равной величине в правой части неравенства (34), рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{n^{2r}} \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh} \right)^{-m} \Phi^m(h) T_n(x),$$

которая, как мы показали при доказательстве теоремы 3, принадлежит рассматриваемому классу $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$ и для которой

$$\sup \{ |c_n(f)| : f \in W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi) \} \leq |c_n(f_1)| = \frac{1}{n^{2r}} \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh} \right)^{-m} \Phi^m(h) \quad (35)$$

Требуемое равенство (32) следует из сопоставления оценки сверху (34) и снизу (35), чем и завершаем доказательство.

В завершение этой статьи отметим, что аналогичные экстремальные задачи в пространстве $L_{2,\mu}$ рассмотрены в статье [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Об одной квадратурной формуле. – Журнал вычислительной математики и математической физики, 2002, т.42, №4, с.451-458.
2. Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962, 500 с.
3. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979, 416 с.
4. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969, 480 с.
5. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 . – Матем. заметки, 1976, т.20, №3, с.433-438.
6. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 . – Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.
7. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наукова думка, 1981, 340 с.
8. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. \mathcal{K} -функционалы и точные значения n -поперечников некоторых классов из $L_2((1-x^2)^{-1/2}; [-1,1])$ – Изв. ТулГУ. Естест. науки, 2014, вып.1, ч.1, с.83-97.

Ў.Х.БЕКНАЗАРОВ

САРҲАДИ БОЛОИИ ТАМОИЛИ БАЪЗЕ СИНФИ ФУНКСИЯҲО АЗ СУММАИ ХУСУСИИ ҚАТОРҲОИ ФУРЬЕ–ЧЕБИШЁВИ ОНҲО ДАР ФАЗОИ L_2

Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи Б.Ғафуров

Масъалаи ёфтани сарҳади аниқи болоии наздикунии бисёраъзогии баъзе синфи функсияҳои дифференциалпазири ба фазои Гилберти $L_{2,\mu}[-1,1]$ бо вазни Чебишёв $\mu(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ таллуқдошта дида баромада мешавад. Нобаробарии намуди Чексон–Стечкин ҳосил карда мешавад, ки наздикунии бисёраъзогии бехтарини $E_{n-1}(f)_{2,\mu}$ бо вазни миёнаи мусбат, ки дорои модули бифосилаи махсуси тар-

тиби

m -и $\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}$, ки дар инҷо \mathcal{D} - оператори дифференсиалии тартиби дуум аст, алоқаманд менамояд. қимати аниқи n -қутрҳои барои баъзе синфи функцияҳо аз $L_{2,\mu}[-1,1]$ ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздикунии бисёраъзогии бехтарин – ҳадди болои модули бефосилаи умумикардасуда – доимии Чексон–Стечкин – коэффисиенти Фурйе–Чебишёв – n -қутрҳо.

J.KH.BEKNAZAROV

**THE UPPER FACE OF THE DEVIATIONS OF CERTAIN CLASS
OF FUNCTIONS OF THEIR PARTIAL SUMS OF FOURIER-Chebyshev
SPACE L_2**

B.Gafurov Khugand State University

We consider the problem of computing the exact upper bound of the best polynomial approximation of certain classes of differentiable functions belonging to the Hilbert space $L_{2,\mu}[-1,1]$ with Chebyshev weight $\mu(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$. The inequalities of Jackson-Stechkin type linking best polynomial approximation $E_{n-1}(f)_{2,\mu}$ with mean positive weight special modulus of continuity of m -th order $\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}$, where \mathcal{D} - a differential operator of second order. Calculated accurately value of n -widths of some classes of functions from $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Key words: best polynomial approximation – upper bounds – a generalized modulus of continuity – the Jackson–Stechkin constant – the Fourier–Chebyshev – n -widths.

УДК 517.956

Р.ПИРОВ

**К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ,
СОСТОЯЩИХ ИЗ ТРЁХ ИЛИ ЧЕТЫРЁХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА
С ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ**

Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни

Поступила в редакцию 10.12.2014 г.

Рассматривается класс нелинейных систем с одной неизвестной функцией. Получены явные условия совместности, обеспечивающие однозначную разрешимость задач с начальными данными.

Ключевые слова: условия совместности – переопределённые системы.

Появление гидродинамики, теории упругости и электромагнитной теории поля ещё в позапрошлом веке стало приводить к переопределённым системам уравнений в частных производных. В известной монографии Э.Гурса [1] (1921 г.) изучались в основном переопределённые системы первого порядка с одной неизвестной функцией. Начиная с 1970 г., классы систем с одной либо с двумя и более неизвестными функциями стали изучаться в работах Л.Г.Михайлова и его учеников [2, см. §5], [3-6]. В этих же работах изучались квазилинейные и нелинейные системы, двух и трёх уравнений с одной неизвестной функцией на плоскости. В настоящей работе, состоящей из двух основных частей, рассматриваются системы указанных в заглавии типов.

I. Системы с тремя уравнениями. Здесь исследуются системы вида

$$U_{xx}, U_{yy}, U_{zz} = f^i(x, y, z; U, U_x, U_y, U_z, U_{xy}, U_{yz}, U_{zx}), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

$$U_{xy}, U_{yz}, U_{zx} = f^j(x, y, z; U, U_x, U_y, U_z, U_{xx}, U_{yy}, U_{zz}), \quad j = \overline{1, 3}, \quad (2)$$

Адрес для корреспонденции: Пиров Рахмон. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет. E-mail: pirov_60@mail.ru

$$U_{xx}, U_{yy}, U_{xy} = f^k(x, y, z; U, U_x, U_y, U_z, U_{xz}, U_{yz}, U_{zz}), \quad k = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

где правые части известные, а $U = U(x, y, z)$ неизвестная функции класса $C^4(\Pi)$. Оговоримся сразу, что в исследуемых ниже системах правые части – заданные функции, а U – неизвестная функция, которые ищутся в классе $C^4(\Pi)$, где Π – некоторая односвязная ограниченная область пространства R^3 , содержащая внутри себя начало координат. За такую область можем взять

$$\Pi: |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq a, \quad |z - z_0| \leq a, \quad |u - u_0| \leq b,$$

а индексом «нолик» будем обозначать значения тех или иных функций в точке x_0, y_0, z_0 . Основной метод исследования указанных систем состоит в замене производных первого и второго порядка правых частей на новые неизвестные функции, переходе к системам с бóльшим числом неизвестных функций и в установлении связей с достаточно изученными – системами в полных дифференциалах (п.д.-система) [7].

1. Пусть дана система (1). В силу замен $U_x = p(x, y, z)$, $U_y = q(x, y, z)$, $U_z = R(x, y, z)$, $U_{xy} = p_y = Q(x, y, z)$, $U_{yz} = q_z = \tau(x, y, z)$, $U_{zx} = R_x = t(x, y, z)$ и обязательного тождественного выполнения равенств $p_y = q_x, q_z = R_y, R_x = p_z$, приходим к квазилинейной системе

$$\begin{cases} U_x = p(x, y, z), \quad U_y = q(x, y, z), \quad U_z = R(x, y, z), \\ p_x = f^1(x, y, z; U, p, q, R, Q, t, \tau), \quad p_y = Q(x, y, z), \quad p_z = t(x, y, z) \\ q_x = Q(x, y, z), \quad q_y = f^2(x, y, z; U, p, q, R, Q, t, \tau), \\ q_z = \tau(x, y, z), \quad R_x = t(x, y, z), \\ R_y = t(x, y, z), \quad R_z = f^3(x, y, z; U, p, q, R, Q, t, \tau). \end{cases} \quad (4)$$

С целью пополнения (4) до систем в полных дифференциалах относительно функций U, p, q, R, Q, t, τ проделаем операции перекрестного дифференцирования (о.п.д.) $U_{xy} = U_{yx}, \quad U_{yz} = U_{zy}, \quad U_{xz} = U_{zx}, \quad p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{xz} = p_{zx}, \quad p_{yz} = p_{zy}, \quad q_{xy} = q_{yx}, \quad q_{yz} = q_{zy}, \quad q_{xz} = q_{zx}, \quad R_{xy} = R_{yx}, \quad R_{yz} = R_{zy}, \quad R_{zx} = R_{xz}$. Первые три выполняются автоматически, а остальные девять условий приводят к девяти неразрешённым уравнениям вида

$$\begin{cases}
Q_x - f_Q^2 \cdot Q_y - f_\tau^2 \cdot \tau_y - f_t^2 \cdot t_y = \dots, \\
Q_z - t_y = 0, f_Q^1 \cdot Q_z + f_\tau^1 \tau_z + f_t^1 \cdot t_z - t_x = \dots, \\
-f_Q^2 \cdot Q_x + Q_y - f_\tau^2 \cdot \tau_x - f_t^2 \cdot t_x = \dots, \\
f_Q^2 \cdot Q_x - \tau_y + f_\tau^2 \cdot \tau_z + f_t^2 \cdot t_z = \dots, Q_z - \tau_x = 0, \\
t_y - \tau_x = 0, -f_Q^3 \cdot Q_y - f_\tau^3 \cdot \tau_y + \tau_z - f_t^3 \cdot t_y = \dots, \\
-f_Q^3 \cdot Q_x - f_\tau^3 \cdot \tau_x - f_t^3 \cdot t_x + t_z = \dots
\end{cases} \quad (5)$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что квадратная матрица 9×9 , составленная из коэффициентов при производных $Q_x, Q_y, Q_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z, t_x, t_y, t_z$, из уравнений (5) в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0; U_0, Q_0, q_0, R_0, \tau_0, t_0)$ имеет ранг, равный 9. В силу этого алгебраическими разрешениями систему (5) можно выразить через

$$Q_x, Q_y, Q_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z, t_x, t_y, t_z = f^i(x, y, z; U, p, q, R, Q, \tau, t), \quad i = \overline{4, 12}, \quad (6)$$

где правые части $f^4 - f^{12}$ явно выражаются через f^i , $i = \overline{1, 3}$ и их производные с первого по третий порядок. Уравнения (4), (6) составляют п.д.-систему относительно семи неизвестных функций U, p, q, R, Q, τ, t и девяти тождественно выполненным условиям полной интегрируемости (у.п.и.):

$$H^i(x, y, z; U, p, q, R, Q, \tau, t) = 0, \quad i = \overline{1, 9}. \quad (7)$$

Отметим, что H^i , $i = \overline{1, 9}$ явно выражаются через правые части (4), (6) и их частные производные с первого по четвертый порядок. При их тождественном выполнении относительно входящих в них аргументов, для исходной системы будет корректна следующая задача с начальными данными:

$$\begin{aligned}
[U]_0 = c_1, [U_x]_0 = c_2, [U_y]_0 = c_3, [U_z]_0 = c_4, \\
[U_{xx}]_0 = c_5, [U_{yy}]_0 = c_6, [U_{zz}]_0 = c_7,
\end{aligned} \quad (8)$$

для которой можно считать доказанной следующую теорему.

Теорема 1. Пусть в системе (1) f^i , $i = \overline{1, 3}$, $U \in C^4(\Pi_1)$, $f_t^2 \neq 0$ и $\alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = |f^i|$, $i = \overline{1, 3}$. Если соотношения (7) в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0; U_0, U_x^0, U_y^0, U_z^0, U_{xx}^0, U_{yy}^0, U_{zz}^0)$ выполняются тождественно, то на $\Pi(\alpha, b)$ задача (1) (8) разрешима единственным образом.

Замечание. Если хотя бы одно из условий $H^i = 0$, $i = \overline{1,9}$ не выполняется тождественно, а разрешено в виде $t = \varphi(x, y, z; U, p, q, R, Q, \tau)$, $\varphi \in C^1$, то приходим к п.д. относительно шести неизвестных функций и шести явных условий совместности. Ясно, что здесь будем иметь многообразие, содержащее шесть произвольных постоянных.

2. Теперь рассмотрим систему (2). Здесь осуществлённые замены $U_x = p$, $U_y = q$, $U_z = R$, $q_x = Q$, $R_z = \tau$, $p_z = t$ с учётом тождественного выполнения равенств $p_y = q_x$, $q_z = R_y$, $p_z = R_x$ приводят к квазилинейной системе

$$\begin{cases} U_x = p(x, y, z), U_y = q(x, y, z), U_z = R(x, y, z), \\ p_x, p_y = f^k(x, y, z; U, p, q, R, Q, \tau, t), k = 1, 2, p_z = t(x, y, z), \\ q_x, q_y = f^k(x, y, z; U, p, q, R, Q, \tau, t), k = 1, 2, q_z = Q(x, y, z), \\ R_x = t(x, y, z), R_y = f^3(x, y, z; U, p, q, R, Q, \tau, t), R_z = \tau(x, y, z). \end{cases} \quad (9)$$

Имея систему (9), приходим к ситуации, сходной с той, что наблюдалась в пункте 1, то есть для неё можем утверждать, что многообразие решений содержит соответственно семь или шесть произвольных постоянных.

3. В отличие от систем (1) и (2), в левых частях системы (3) нет частных производных по $z(U_{xx}, U_{yy}, U_{xy})$. Осуществляя замены $U_x = p$, $U_y = q$, $U_z = R$, $U_{yz} = q_z = Q$, $U_{xz} = p_z = \tau$, $U_{zz} = R_z = t$, придём к системе

$$\begin{cases} U_x = p, U_y = q, U_z = R, p_x = f^1, p_y = f^3, p_z = \tau, \\ q_x = f^3, q_y = f^2, q_z = Q, R_x = \tau, R_y = Q, R_z = t. \end{cases}$$

Повторяя процедуру, аналогичную пунктам 1 и 2, получим ещё девять неразрешённых относительно $\tau_x, \tau_y, \tau_z, Q_x, Q_y, Q_z, t_x, t_y, t_z$ уравнений. Разрешая их, опять-таки приходим к п.д.-системе относительно семи неизвестных функций, для которой имеет место аналогичная как п. 1 и 2 теорема с девятью явными условиями совместности, совершенно отличающимися от (7).

II. Системы с четырьмя уравнениями. В этой части работы рассматриваются нелинейные системы четырёх д.у. второго порядка, где неизвестная функция зависит от трёх независимых переменных, а правые части содержат нелинейным образом одну или две (20 типов систем) из производных $U_{xx}, U_{yy}, U_{zz}, U_{xy}, U_{yz}, U_{xz}$.

Все указанные системы исследуются по одной и той же схеме и приводят к качественно одинаковым результатам. Поэтому ограничимся рассмотрением одной системы из каждой группы, а именно:

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} = f^i(x, y, z; U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}), \quad i = \overline{1,4} \quad (10)$$

и

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} = f^i(x, y, z; U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}, U_{zz}), \quad i = \overline{1,4} \quad (11)$$

4. Пусть в области Π дана система (10), удовлетворяющая вышеуказанным условиям. Осуществляем замену таким образом, чтобы выполнялись тождества $p_y = q_x$, $q_z = W_y$ и $p_z \equiv W_x$. В силу этих замен система (10) примет вид:

$$\begin{cases} U_x \equiv p(x, y, z), U_y \equiv q(x, y, z), U_z \equiv W(x, y, z), \\ p_x, p_y, p_z = f^i(x, y, z; U, p, q, W, \tau), \quad i = \overline{1,3}, \\ q_x = f^2(x, y, z; U, p, q, W, \tau), q_y = \tau, q_z = f^4(x, y, z; U, p, q, W, \tau), \\ W_x = f^3(x, y, z; U, p, q, W, \tau), W_y = f^4(x, y, z; U, p, q, W, \tau). \end{cases} \quad (12)$$

Равенства смешанных производных $p_{yz} = p_{zy}$, $q_{yz} = q_{zy}$, $q_{xy} = q_{yx}$ и $q_{xz} = q_{zx}$, после несложных преобразований, приводят к уравнениям:

$$f_W^2 \cdot W_z + f_\tau^2 \cdot \tau_z - f_\tau^3 \cdot \tau_y = f_y^3 - f_z^2 + f_U^3 \cdot q - f_U^2 \cdot W + f_p^3 \cdot f^2 - f_p^2 \cdot f^3 + f_q^3 \cdot \tau - f_q^2 \cdot f^4 + f_w^3 \cdot f^4 \quad (\equiv L^1), \quad (13)$$

$$-f_\tau^4 \cdot \tau_y + \tau_z = f_y^4 + f_U^4 \cdot q + f_p^4 \cdot f^2 + f_q^4 \cdot \tau + f_W^4 \cdot f^4 \quad (\equiv L^2), \quad (14)$$

$$\tau_x - f_\tau^2 \cdot \tau_y = f_y^2 + f_U^2 \cdot q + f_p^2 \cdot f^2 + f_q^2 \cdot \tau + f_W^2 \cdot f^4 \quad (\equiv L^3), \quad (15)$$

$$f_W^2 \cdot W_z + f_\tau^2 \cdot \tau_z - f_\tau^4 \cdot \tau_x = f_x^4 - f_z^2 + f_U^4 \cdot p - f_U^2 \cdot W + f_p^4 \cdot f^1 - f_p^2 \cdot f^3 + f_q^4 \cdot f^2 - f_q^2 \cdot f^4 + f_W^4 \cdot f^3 \quad (\equiv L^4), \quad (16)$$

При $f_W^2 \neq 0$ и $f_\tau^2 \cdot f_\tau^4 - f_\tau^3 \neq 0$ из (13)-(16) алгебраическим разрешением находим W_z, τ_y, τ_x и τ_z в виде

$$W_z, \tau_y, \tau_x, \tau_z = f^j(x, y, z, U, p, q, W, \tau), \quad j = \overline{5,8}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} f_W^2 \cdot f^5 &= L^4 - f_\tau^2 \cdot L^2 + f_\tau^2 \cdot f^3, \\ (f_\tau^2 \cdot f_\tau^4 - f_\tau^3) \cdot f^6 &= L^1 - L^4 - f_\tau^4 \cdot f^3, \\ f^7 &= L^3 + f_\tau^2 \cdot f^2, \quad f^8 = f_\tau^4 \cdot f^6 + L^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Присоединяя (17) к (12), приходим к п.д.-системе относительно пяти неизвестных функций. Заметим, что проверка равенств вторых смешанных производных $U_{xy} = U_{yx}$, $U_{yz} = U_{zy}$, $U_{xz} = U_{zx}$, $P_{yz} = P_{zy}$, $q_{xy} = q_{yx}$, $q_{yz} = q_{zy}$ в системах (12), (17) выполняются автоматически, кстати они однажды использовались при пополнении системы. Остальные девять равенств $q_{xz} = q_{zx}$, $P_{xy} = P_{yx}$, $P_{xz} = P_{zx}$, $W_{xy} = W_{yx}$, $W_{yz} = W_{zy}$, $W_{xz} = W_{zx}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ и $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ в конечном итоге преобразуются в следующие функциональные соотношения:

$$\begin{aligned}
H^1(x, y, z; U, p, q, W, \tau) &\equiv f_z^2 + f_U^2 \cdot W + f_p^2 \cdot f^3 + f_q^2 \cdot f^4 + f_W^2 \cdot f^5 + f_\tau^2 \cdot f^8 - \\
&\quad - f_x^4 - f_U^4 \cdot p - f_p^4 \cdot f^1 - f_q^4 \cdot f^2 - f_W^4 \cdot f^3 - f_\tau^4 \cdot f^7 = 0, \\
H^2(x, y, z; U, p, q, W, \tau) &= f_y^1 + f_U^1 \cdot q + f_p^1 \cdot f^2 + f_q^1 \cdot \tau + f_W^1 \cdot f^4 + f_\tau^1 \cdot f^6 - \\
&\quad - f_x^2 - f_U^2 \cdot p - f_p^2 \cdot f^1 - f_q^2 \cdot f^2 - f_\tau^2 \cdot f^7 = 0, \\
H^3(x, y, z; U, p, q, W, \tau) &\equiv f_z^1 + f_U^1 \cdot W + f_p^1 \cdot f^3 + f_q^1 \cdot f^4 + f_W^1 \cdot f^5 + f_\tau^1 \cdot f^8 - \\
&\quad - f_x^3 - f_U^3 \cdot p - f_p^3 \cdot f^1 - f_q^3 \cdot f^2 - f_W^3 \cdot f^3 - f_\tau^3 \cdot f^7 = 0, \\
H^4(x, y, z; U, p, q, W, \tau) &\equiv f_y^3 + f_U^3 \cdot q + f_p^3 \cdot f^2 + f_q^3 \cdot \tau + f_W^3 \cdot f^4 + f_\tau^3 \cdot f^6 - \\
&\quad - f_x^4 - f_U^4 \cdot p - f_p^4 \cdot f^1 - f_q^4 \cdot f^2 - f_W^4 \cdot f^3 - f_\tau^4 \cdot f^7 = 0, \\
H^5(x, y, z; U, p, q, W, \tau) &\equiv f_z^4 + f_U^4 \cdot W + f_p^4 \cdot f^3 + f_q^4 \cdot f^4 + f_W^4 \cdot f^5 - \\
&\quad - f_y^5 - f_U^5 \cdot f^2 - f_p^5 \cdot f^2 - f_q^5 \cdot \tau - f_W^5 \cdot f^4 - f_\tau^5 \cdot f^6 = 0, \\
H^6(x, y, z; U, p, q, W, \tau) &\equiv f_z^3 + f_U^3 \cdot W + f_p^3 \cdot f^3 + f_q^3 \cdot f^4 + f_W^3 \cdot f^5 - \\
&\quad - f_x^5 - f_U^5 \cdot f^1 - f_p^5 \cdot f^1 - f_q^5 \cdot f^2 - f_W^5 \cdot f^3 - f_\tau^5 \cdot f^7 = 0, \\
H^7(x, y, z; U, p, q, W, \tau) &\equiv f_y^7 + f_U^7 \cdot q + f_p^7 \cdot f^2 + f_q^7 \cdot \tau + f_W^7 \cdot f^4 + f_\tau^7 \cdot f^6 - \\
&\quad - f_x^6 - f_U^6 \cdot p - f_p^6 \cdot f^1 - f_q^6 \cdot f^2 - f_W^6 \cdot f^3 - f_\tau^6 \cdot f^7 = 0, \\
H^8(x, y, z; U, p, q, W, \tau) &\equiv f_z^6 + f_U^6 \cdot W + f_p^6 \cdot f^3 + f_q^6 \cdot f^4 + f_W^6 \cdot f^5 + f_\tau^6 \cdot f^8 - \\
&\quad - f_y^8 - f_U^8 \cdot q - f_p^8 \cdot f^2 - f_q^8 \cdot \tau - f_W^8 \cdot f^4 - f_\tau^8 \cdot f^6 = 0, \\
H^9(x, y, z; U, p, q, W, \tau) &\equiv f_z^7 + f_U^7 \cdot W + f_p^7 \cdot f^3 + f_q^7 \cdot f^4 + f_W^7 \cdot f^5 + f_\tau^7 \cdot f^8 - \\
&\quad - f_x^8 - f_U^8 \cdot f^1 - f_p^8 \cdot f^1 - f_q^8 \cdot f^2 - f_W^8 \cdot f^3 - f_\tau^8 \cdot f^7 = 0, \tag{19}
\end{aligned}$$

Поскольку (12) и (17) получены эквивалентными преобразованиями из (10), то начальные условия для этой системы задаются формулами

$$[U]_0 = c_1, [U_x]_0 = c_2, [U_y]_0 = c_3, [U_z]_0 = c_4, [U_{yy}]_0 = c_5. \tag{20}$$

Теорема 2. Пусть в системе (10) $f^i \in C^2(\Pi)$, $U \in C^4(\Pi)$, $f_W^2 \neq 0$ и $f_\tau^2 \cdot f_\tau^4 - f_\tau^3 \neq 0$. Если тождественно относительно U, U_x, U_y, U_z, U_{yy} выполняются

все девять условий (19) (то есть $H^i(x, y, z; U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}) \equiv 0, i = \overline{1,9}$) и $\alpha \prec \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \max|f^i|$, то на $\Pi(\alpha, b)$ задача (10) (20) разрешима единственным образом.

5. Теперь рассмотрим нелинейную систему (11), где $f^i \in C^2(\Pi)$ и $U \in C^4(\Pi)$. В силу замены $U_x = p(x, y, z), U_y = q(x, y, z), U_z = W(x, y, z), U_{yy} = q_y = \tau(x, y, z)$ и $U_{zz} = W_z = \theta(x, y, z)$ система (11) преобразуется в следующую квазилинейную систему первого порядка

$$\begin{cases} U_x = p, U_y = q, U_z = W, & p_x = f^1, p_y, p_z = f^3, \\ q_x = f^2, q_y = \tau, q_z = f^4, & W_x = f^3, W_y = f^4, W_z = \theta. \end{cases} \quad (21)$$

Заметим, что осуществлённая замена обеспечивает тождественное выполнение равенств $p_y = q_x, q_z = W_y, p_z = W_x$. Равенства $p_{xy} = p_{yx}, q_{xy} = q_{yx}, W_{xy} = W_{yx}, p_{xz} = p_{zx}, q_{xz} = q_{zx}, W_{xz} = W_{zx}, p_{yz} = p_{zy}, q_{yz} = q_{zy}, W_{yz} = W_{zy}$ приводят к девяти следующим уравнениям

$$\begin{aligned} -f_\tau^2 \cdot \tau_x + f_\tau^1 \cdot \tau_y - f_\theta^2 \cdot \theta_x + f_\theta^1 \cdot \theta_y &= f_x^2 + f_U^2 \cdot p + f_p^2 \cdot f^1 + f_q^2 \cdot f^2 + f_W^2 \cdot f^3 - \\ &\quad - f_y^1 - f_U^1 \cdot q - f_p^1 \cdot f^2 - f_q^1 \cdot \tau - f_W^1 \cdot f^4, \\ \tau_x - f_\tau^2 \cdot \tau_y - f_\theta^2 \cdot \theta_y &= f_y^2 + f_U^2 \cdot q + f_p^2 \cdot f^2 + f_q^2 \cdot \tau + f_W^2 \cdot f^4, \\ -f_\tau^4 \cdot \tau_x + f_\tau^3 \cdot \tau_y - f_\theta^4 \cdot \theta_x + f_\theta^3 \cdot \theta_y &= f_x^4 + f_U^4 \cdot p + f_p^4 \cdot f^1 + f_q^4 \cdot f^2 + f_W^4 \cdot f^3 - \\ &\quad - f_y^3 - f_U^3 \cdot q - f_p^3 \cdot f^2 - f_W^3 \cdot f^4, \\ -f_\tau^3 \cdot \tau_x + f_\tau^1 \cdot \tau_z - f_\theta^3 \cdot \theta_x + f_\theta^1 \cdot \theta_z &= f_x^3 + f_U^3 \cdot p + f_p^3 \cdot f^1 + f_q^3 \cdot f^2 + f_W^3 \cdot f^3 - \\ &\quad - f_z^1 - f_U^1 \cdot W - f_p^1 \cdot f^3 - f_q^1 \cdot f^4 - f_W^1 \cdot \theta, \\ -f_\tau^4 \cdot \tau_x + f_\tau^2 \cdot \tau_z - f_\theta^4 \cdot \theta_x + f_\theta^2 \cdot \theta_z &= f_x^4 + f_U^4 \cdot p + f_p^4 \cdot f^1 + f_q^4 \cdot f^2 + f_W^4 \cdot f^3 - \\ &\quad - f_z^2 - f_U^2 \cdot W - f_p^2 \cdot f^3 - f_q^2 \cdot f^4 - f_W^2 \cdot \theta, \\ -f_\tau^3 \cdot \tau_z + \theta_x - f_\theta^3 \cdot \theta_z &= f_z^3 + f_U^3 \cdot W + f_p^3 \cdot f^3 + f_q^3 \cdot f^4 + f_W^3 \cdot \theta, \\ -f_\tau^3 \cdot \tau_y + f_\tau^2 \cdot \tau_z - f_\theta^3 \cdot \theta_y + f_\theta^2 \cdot \theta_z &= f_y^3 + f_U^3 \cdot q + f_p^3 \cdot f^2 + f_W^3 \cdot f^4 - f_z^2 - \\ &\quad - f_U^2 \cdot W - f_p^2 \cdot f^3 - f_q^2 \cdot f^4 - f_W^2 \cdot \theta, \\ -f_\tau^4 \cdot \tau_y + \tau_z - f_\theta^4 \cdot \theta_y &= f_y^4 + f_U^4 \cdot q + f_p^4 \cdot f^2 + f_q^4 \cdot \tau + f_W^4 \cdot f^4, \\ -f_\tau^4 \cdot \tau_z + \theta_y - f_\theta^4 \cdot \theta_z &= f_z^4 + f_U^4 \cdot W + f_p^4 \cdot f^3 + f_q^4 \cdot f^4 + f_W^4 \cdot \theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Поскольку в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0; U^0, U_x^0, U_y^0, U_z^0, U_{yy}^0, U_{zz}^0)$ ранг матрицы 6×9 , составленной из коэффициентов при производных $\tau_x, \tau_y, \tau_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$, равен 6, то из (22) можно найти

$$\tau_x, \tau_y, \tau_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z = f^k(x, y, z; U, p, q, W, \tau, \theta), \quad k = \overline{5, 10}. \quad (23)$$

Отметим, что $f^k, k = \overline{5, 10}$ явно выражаются через $f^1 - f^4$ и их частных производных первого порядка.

Присоединяя (23) к (21), приходим к п.д.-системе относительно шести неизвестных функций U, p, q, W, τ, θ :

$$\begin{cases} U_x = p, U_y = q, U_z = W, & p_x = f^1, p_y = f^2, p_z = f^3, \\ q_x = f^2, q_y = \tau, q_z = f^4, & W_x = f^3, W_y = f^4, W_z = \theta, \\ \tau_x = f^5, \tau_y = f^6, \tau_z = f^7, & \theta_x = f^8, \theta_y = f^9, \theta_z = f^{10}. \end{cases} \quad (24)$$

В системе (24), эквивалентной (11), первые 12 равенств смешанных производных выполняются автоматически, а остальные шесть $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \theta_{xy} = \theta_{yx}, \theta_{yz} = \theta_{zy}, \theta_{xz} = \theta_{zx}$, после несложных преобразований приводят к шести функциональным уравнениям вида

$$\begin{aligned} \tilde{H}^1(x, y, z; U, p, q, W, \tau, \theta) &\equiv f_y^5 - f_x^6 + f_u^5 \cdot q - f_u^6 \cdot p + f_p^5 \cdot f^2 - f_p^6 \cdot f^1 + f_q^5 \cdot \tau - \\ &- f_q^6 \cdot f^2 + f_w^5 \cdot f^4 - f_w^6 \cdot f^3 + f_\theta^5 \cdot q - f_\theta^6 \cdot f^8 + f_\tau^5 \cdot f^6 - f_\tau^6 \cdot f^5 = 0, \\ \tilde{H}^2(x, y, z; U, p, q, W, \tau, \theta) &= f_z^6 - f_y^7 + f_U^6 \cdot W - f_U^7 \cdot f^4 + f_p^6 \cdot f^3 - f_p^7 \cdot f^2 + \\ &+ f_q^6 \cdot f^4 - f_q^7 \cdot \tau + f_W^6 \cdot \theta - f_W^7 \cdot f^4 + f_\tau^6 \cdot f^7 - f_\tau^7 \cdot f^6 + f_\theta^6 \cdot f^{10} - f_\theta^7 \cdot f^9 = 0, \\ \tilde{H}^3(x, y, z; U, p, q, W, \tau, \theta) &\equiv f_z^5 - f_x^7 + f_U^5 \cdot W - f_U^7 \cdot p + f_p^5 \cdot f^3 - f_p^7 \cdot f^1 + f_q^5 \cdot f^4 - \\ &- f_q^7 \cdot f^2 + f_w^5 \cdot \theta - f_w^7 \cdot f^3 + f_\tau^5 \cdot f^7 - f_\tau^7 \cdot f^5 + f_\theta^5 \cdot f^{10} - f_\theta^7 \cdot f^8 = 0, \\ \tilde{H}^4(x, y, z; U, p, q, W, \tau, \theta) &\equiv f_y^8 - f_x^9 + f_U^8 \cdot q - f_U^9 \cdot p + f_p^8 \cdot f^2 - f_p^9 \cdot f^1 + f_q^8 \cdot \tau - \\ &- f_q^9 \cdot f^2 + f_w^8 \cdot f^4 - f_w^9 \cdot f^3 + f_\tau^8 \cdot f^6 - f_\tau^9 \cdot f^5 + f_\theta^8 \cdot f^9 - f_\theta^9 \cdot f^8 = 0, \\ \tilde{H}^5(x, y, z; U, p, q, W, \tau, \theta) &\equiv f_z^9 - f_y^{10} + f_U^9 \cdot W - f_U^{10} \cdot q + f_p^9 \cdot f^3 - f_p^{10} \cdot f^2 + f_q^9 \cdot f^4 - \\ &- f_q^{10} \cdot \tau + f_w^9 \cdot \theta - f_w^{10} \cdot f^4 + f_\tau^9 \cdot f^7 - f_\tau^{10} \cdot f^6 + f_\theta^9 \cdot f^{10} - f_\theta^{10} \cdot f^9 = 0, \\ \tilde{H}^6(x, y, z; U, p, q, W, \tau, \theta) &\equiv f_z^8 - f_x^{10} + f_U^8 \cdot W - f_U^{10} \cdot p + f_p^8 \cdot f^3 - f_p^{10} \cdot f^1 + f_q^8 \cdot f^4 - \\ &- f_q^{10} \cdot f^2 + f_w^8 \cdot \theta - f_w^{10} \cdot f^3 + f_\tau^8 \cdot f^7 - f_\tau^{10} \cdot f^5 + f_\theta^8 \cdot f^{10} - f_\theta^{10} \cdot f^8 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Ясно, что если в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0, U_0, p_0, q_0, \tau_0, \theta_0)$, $\tilde{H}^i(x, y, z; U, p, q, W, \tau, \theta) \equiv 0, i = \overline{1, 6}$, то система (24) вполне интегрируема и по отношению к ней можно применить п.д.-теорию со следующей задачей с начальными данными [7]:

$$[U]_0 = C_1, [p]_0 = C_2, [q]_0 = C_3, [W]_0 = C_4, [\tau]_0 = C_5, [\theta]_0 = C_6,$$

которая по отношению к исходной системе (11) преобразуется в задачу

$$[U]_0 = C_1, [U_x]_0 = C_2, [U_y]_0 = C_3, [U_z]_0 = C_4, [U_{xx}]_0 = C_5, [U_{zz}]_0 = C_6 \quad (26)$$

Теорема 3. Пусть дана система (11) где $f^i \in C^2(\Pi), i = \overline{1, 4}, U \in C^4(\Pi)$ и в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0; U^0, U_x^0, U_y^0, U_z^0, U_{xx}^0, U_{zz}^0) \tilde{H}^i \equiv 0, i = \overline{1, 6}$ (они явно даются формулами (25)), и $\alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right), M = \max|f^i|$, то на $\Pi(\alpha, b)$ задача (11)(26) разрешима единственным образом.

Замечание. Другими словами, при выполнении условий теоремы 3 многообразия решения системы (11) содержат шесть произвольных постоянных $c_1 - c_6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goursat E. Lecons sur l'integration des equations aux derivees partielles du premier ordre. – Paris, 1921, 454 p.
2. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. – Душанбе: Дониш, 1986, 116 с.
3. Пиров Р. Исследование некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией на плоскости. – Крайові задачі для диференціальних рівнянь, вып. 14, Чернівці: Прут, 2006, с.313-320.
4. Пиров Р. К теории нелинейных переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в пространстве. – Известия ТО МАН ВШ, 2010, №1, Душанбе, с. 85-90.
5. Пиров Р. О существовании гармонических решений одной переопределенной системы четырёх д.у. в частных производных второго порядка в пространстве. – Вестник Педуниверситета, 2011, №2 (38), Душанбе, с. 3-6.
6. Пиров Р. О совместности некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных второго порядка с двумя неизвестными функциями на плоскости. – ДАН РТ, 2011, т.54, №5, с. 359-366.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970, 719 с.

Р.ПИРОВ

**ОИД БА НАЗАРИЯИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАҶОИ ҒАЙРИХАТТИИ
БАРЗИЁДМУАЙЯНШУДАИ АЗ СЕ ВА ЧОР МУОДИЛАҶОИ
ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО ҲОСИЛАҶОИ ХУСУСИИ ТАРТИБИ ДУИУМИ
ЯКНОМАЛУМДОР ДАР ФАЗО**

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Як синфи системаҳои барзиёдмуайяншудаи ғайрихаттии муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуиуми якномаълумдор дар фазо тадқиқ карда шуда, барояшон масъала бо шартҳои ибтидоӣ ҳал гардидаанд.

Калимаҳои калидӣ: шартҳои ҳамчоягӣ – системаҳои барзиёдмуайяншуда.

R.PIROV

**ON THE THEORY OF NON-LINEAR OVER DETERMINED SYSTEMS OF
THREE AND FOUR DIFFERENTIAL EQUATIONS (P.D.E) IN THE
SECOND-ORDER PARTIAL ONE UNKNOWN FUNCTION IN SPACE**

S.Ainy Tajik State Pedagogical University

In the robot explores some nonlinear systems indicated in the title types. Explicit conditions for joint ensuring the unique solvability of the initial data.

Key words: conditions compatibility – over determined systems.

УДК 519.63

М.К.АРАБОВ

**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ КВАЗИЛИНЕЙНОГО
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

*Институт математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан
Поступила в редакцию 26.01.2015 г.*

Изучается кусочно-линейное уравнение второго порядка, зависящее от параметров. Проведён качественный анализ исследуемого уравнения. Найдены условия устойчивости состояния равновесия.

Ключевые слова: негладкие динамические системы – фазовые портреты – устойчивость – особая точка – ограниченность.

Функционирование большинства электрических и механических систем описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями [1]. Одной из наиболее интересных и в то же время важной с теоретической и практической точки зрения задачей является анализ устойчивости этих систем.

Следует отметить, что многие динамические системы [2] характеризуются тем, что свойства гладкости (непрерывной дифференцируемости) входящих в математическую модель функций могут нарушаться на некоторых многообразиях фазового пространства [3] системы.

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости особой точки [4] (состояния равновесия) негладкой динамической системы. Проведён качественный анализ, а также использованы элементы компьютерного моделирования устойчивости состояний равновесия системы вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -ax_2 - bx_1 - c|x_1 - \lambda|, \end{cases} \quad (1)$$

Адрес для корреспонденции: Арабов Муллошараф Курбонович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики АН РТ. E-mail: cool.araby@mail.ru

где a, b, c - вещественные числа, а λ - скалярный параметр.

На первом этапе предполагаем, что $\lambda = 0$. Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - bx_1 - c|x_1|, \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) "склеивается" из двух линейных систем вида:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - (b+c)x_1, \quad x_1 > 0. \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - (b-c)x_1, \quad x_1 < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим через μ_1^\pm и μ_2^\pm корни характеристических уравнений

$$\mu^2 + a\mu + (b \pm c) = 0, \quad (5)$$

соответствующего системам (3) и (4):

$$\mu_1^\pm = -\frac{1}{2}\{a - \sqrt{a^2 - 4(b \pm c)}\}, \quad \mu_2^\pm = -\frac{1}{2}\{a + \sqrt{a^2 - 4(b \pm c)}\}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $(b \pm c) \neq 0$. Рассмотрим всевозможные случаи поведения траекторий системы (2) на фазовой плоскости. Нижеприведённые случаи геометрически представляются на рис.1 в виде секторов.

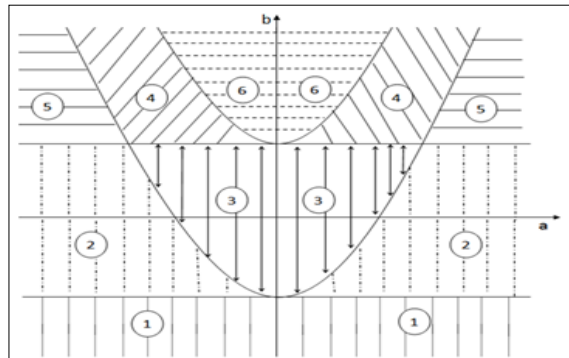

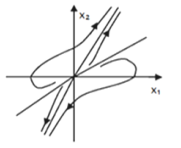
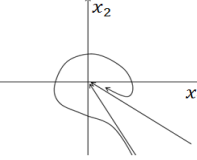
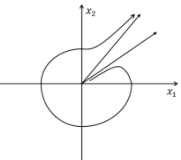
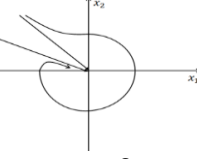
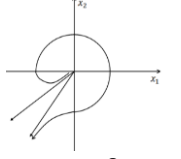
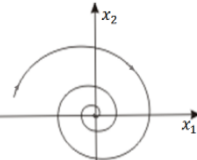
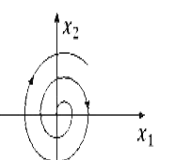


Рис.1. Секторы

В следующей таблице приведена классификация всевозможных случаев поведения траекторий системы (2) на фазовой плоскости.

Таблица

№	Область в пространстве параметров	Корни характеристического уравнения	Название положения равновесия	Качественная картина фазовых траекторий	
1	$b + c < 0$	Эти условия в терминах корней характеристических уравнений (5) означают, что числа $\mu_{1,2}^{\pm}$ вещественны и разного знака.	В этом случае особую точку кусочно-линейной системы (2) назовём <i>седлом</i> .		
2	$ b < c $ и $4(b + c) \leq a^2$	Эти условия в терминах корней характеристических уравнений (5) означают, что либо числа $\mu_{1,2}^+$ вещественны и разного знака и $\mu_{1,2}^-$ вещественны и одного знака, либо числа $\mu_{1,2}^-$ вещественны и разного знака и $\mu_{1,2}^+$ вещественны и одного знака.	В этом случае особую точку (0,0) кусочно-линейной системы (2) назовём <i>седло-узлом</i> .		
3	$ b < c $ и $4(b + c) > a^2$	В терминах корней характеристических уравнений (5) эти условия эквивалентны тому, что либо μ_1^-, μ_2^- вещественны и разного знака и $\mu_{1,2}^+ = \alpha \pm i\beta$ – комплексно сопряжённые, либо μ_1^+, μ_2^+ вещественны и разного знака и $\mu_{1,2}^- = \alpha \pm i\beta$ – комплексно сопряжённые.	В этом случае особую точку (0,0) назовём <i>седло-фокусом</i> .		

4	$ c < b$ и $4(b + c) \leq a^2$	<p>В терминах корней характеристических уравнений (5) эти условия эквивалентны тому, что все корни μ_1^\pm, μ_2^\pm вещественны и одного знака, противоположного знаку коэффициента a.</p>	<p>В этом случае особую точку $(0,0)$ назовём <i>узлом</i>; устойчивым узлом при $a > 0$ и неустойчивым узлом, если $a < 0$.</p>	 <p style="text-align: center;">$a > 0$</p>	 <p style="text-align: center;">$a < 0$</p>
5	$ c < b$ и $4(b - c) < a^2 \leq 4(b + c)$	<p>Это означает, что либо $\mu_{1,2}^-$ вещественны, одного знака, а $\mu_{1,2}^+ = \alpha \pm i\beta$ – комплексно сопряжённые, либо $\mu_{1,2}^- = \alpha \pm i\beta$ – комплексны, а $\mu_{1,2}^+$ вещественны и одного знака.</p>	<p>В этом случае особую точку $(0,0)$ кусочно-линейной системы (2) назовём <i>седло-фокусом</i>.</p>	 <p style="text-align: center;">$a > 0$</p>	 <p style="text-align: center;">$a < 0$</p>
				 <p style="text-align: center;">$a > 0$</p>	 <p style="text-align: center;">$a < 0$</p>
6	$4(b - c) > a^2$	<p>Это означает, что корни $\mu_{1,2}^+$ и $\mu_{1,2}^-$ характеристических уравнений (5) комплексные.</p>	<p>В этом случае особую точку $(0,0)$ назовём устойчивым <i>фокусом</i>, если $a > 0$ и неустойчивым <i>фокусом</i>, если $a < 0$.</p>	 <p style="text-align: center;">$a > 0$</p>	 <p style="text-align: center;">$a < 0$</p>

Лемма 1. Пусть числа μ_1^\pm, μ_2^\pm – комплексные. Тогда ненулевые траектории системы (2) совершают бесконечно много оборотов вокруг особой точки $(0,0)$; при $t \rightarrow +\infty$ приближаются к ней, если $a > 0$; удаляются от неё, если $a < 0$; являются замкнутыми траекториями, если $a = 0$.

Доказательство этой леммы проводится по схеме, приведённой в [4].

Из леммы следует, что если выполнено условие

$$a^2 < 4 \min\{(b+c), (b-c)\},$$

то особая точка $(0,0)$ системы (2) является фокусом при $a \neq 0$ и центром при $a = 0$, причём фокус устойчивый, если $a > 0$, и неустойчивый, если $a < 0$.

Теперь приступим к исследованию системы (1).

Стационарные решения (особые точки) системы (1) лежат на прямой $(x_1, 0), x_1 \in R$ и определяются как решение уравнения

$$bx_1 + c|x_1 - \lambda| = 0 \quad (6)$$

Структура множества особых точек системы (1) в случае $b \cdot c \cdot (b^2 - c^2) \neq 0$ определяется следующим утверждением.

Лемма 2. Пусть $b \cdot c \cdot (b^2 - c^2) \neq 0$. Тогда

- a) если $\lambda = 0$, то система (1) имеет единственную особую точку $(0,0)$;
- b) если $\lambda > 0$, то система (1) имеет единственную особую точку $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0)$ при $|c| < |b|$, две особые точки $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0), (\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ при $|b| < |c|, b \cdot c < 0$ и не имеет особую точку при $|b| < |c|, b \cdot c > 0$;
- c) если $\lambda < 0$, то система (1) имеет единственную особую точку $(\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ при $|c| < |b|$, две особые точки $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0), (\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ при $|b| < |c|, b \cdot c > 0$ и не имеет особых точек при $|b| < |c|, b \cdot c < 0$.

Доказательство. Если $\lambda = 0$, то, очевидно, уравнение (6) имеет нулевое решение $x_1 = 0$. Единственность нулевого решения следует из условия $|b| \neq |c|$. Утверждение а) доказано.

Докажем утверждение b). Разбивая числовую прямую на подмножества $(-\infty, \lambda), [\lambda, +\infty)$, где $x_1 - \lambda$ сохраняет знак, и освобождаясь от знака модуля, уравнение (6) перепишем в виде систем

$$\begin{cases} (b-c)x_1 + c\lambda = 0, \\ x_1 < \lambda, \end{cases} \quad (7)$$

или

$$\begin{cases} (b+c)x_1 - c\lambda = 0, \\ x_1 \geq \lambda. \end{cases} \quad (8)$$

Пусть $|c| < |b|$. Так как $(1-t)^{-1} < 1$ при $|t| > 1$, то $\frac{c}{c-b} = \frac{1}{1-b/c} < 1$. Поэтому решение первого уравнения системы (7) $x_1 = \frac{c\lambda}{c-b}$ удовлетворяет неравенству $x_1 < \lambda$, то есть является решением системы (8). Следовательно, $x_1 = \frac{c\lambda}{c-b}$ является решением уравнения (6). Единственность решения следует из того, что, в силу неравенства $(1+t)^{-1} < 1$ при $|t| > 1$, система (8) не имеет решения.

Если $|c| > |b|$ и $bc > 0$, то, в силу неравенства $(1+t)^{-1} > 1$, $(1-t)^{-1} < 1$ при $-1 < t < 0$ для чисел $\frac{c\lambda}{c-b}$, $\frac{c\lambda}{c+b}$, имеем

$$\frac{c\lambda}{c-b} = \frac{\lambda}{1-b/c} < \lambda, \quad \frac{c\lambda}{c+b} = \frac{\lambda}{1+b/c} > \lambda.$$

Это означает, что число $\frac{c\lambda}{c-b}$ является единственным решением системы (7), а $x_1 = \frac{c\lambda}{c+b}$ является единственным решением системы (8), то есть уравнение (6) имеет два решения.

Если $|c| > |b|$ и $bc < 0$, то справедливы неравенства

$$\frac{c\lambda}{c-b} = \frac{\lambda}{1-\frac{b}{c}} > \lambda, \quad \frac{c\lambda}{c+b} = \frac{\lambda}{1+\frac{b}{c}} < \lambda.$$

Это означает, что системы (7), (8) не имеют решения. Следовательно, уравнение (6) не имеет решения. Утверждение *b*) доказано.

Аналогично доказывается утверждение *c*). Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть коэффициенты b и c системы (1) удовлетворяют условию $|c| < |b|$. Тогда для любого λ каждое решение системы (1) ограничено при $t > 0$, если $a > 0$, и при $t < 0$, если $a < 0$.

Доказательство. Следует напомнить, что решение $(x_1(t), x_2(t))$ системы (1) назовём ограниченным при $t \geq 0$, если для этого решения существует такое $M > 0$, что

$$|x_1(t)|^2 + |x_2(t)|^2 \leq M, \forall t \geq 0.$$

Приступим к доказательству теоремы. Пусть $a > 0$. Если некоторое решение $z(t) = (x_1(t), x_2(t))$ системы (1) неограничено при $t > 0$, то существует последовательность $t_k, 0 < t_k < t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$ такая, что $t_k \rightarrow \infty$ и $|z(t_k)| = \sqrt{|x_1(t_k)|^2 + |x_2(t_k)|^2} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Выберем числа $\tau_k \in [0, t_k]$ такие, что

$$|z(\tau_k)| = \max_{0 \leq t \leq t_k} |z(t)|.$$

Из неравенства $|z(\tau_k)| \geq |z(t_k)|$ следует $d_k \equiv |z(\tau_k)| \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\tau_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Вектор-функции

$$u_k(t) = \frac{1}{d_k} z(\tau_k + t), \quad -\tau_k \leq t \leq 0$$

удовлетворяют условиям $|u_k(0)| = 1, |u_k(t)| \leq 1, -\tau_k \leq t \leq 0$ и являются решением системы

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = -au_2 - bu_1 - c|u_1 - \lambda/d_k|. \end{cases}$$

Пусть u^* предельная точка последовательности $u_k(0)$. Тогда решение системы (2), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = u^*$, является ненулевым и ограниченным при $t \leq 0$. Но, согласно разобранным случаям 5 и 6, ненулевые решения системы (2) неограниченны при $t \leq 0$. Это доказывает утверждение теоремы в случае $a > 0$.

Когда $a < 0$, доказательство теоремы проводится аналогично. Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть коэффициенты b и c системы (1) удовлетворяют условию $|c| < b, a > 0$. Тогда для любого λ стационарное решение системы (1) устойчиво в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: УРСС, 2004, 239 с.
2. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем. – М.: МЦНМО, 2005, 454 с.

3. Синай Я.Г. Теория фазовых переходов. – М.: Наука, 1980, 207 с.
4. Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д., Халилова М.Ш. Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка. – Уфимский математический журнал, 2014, т. 6, №1, с. 84-93.

М.Қ.АРАБОВ

ТАҲЛИЛИ УСТУВОРИИ НУҚТАҲОИ МАҲСУСИ МУОДИЛАИ ҚИСМАН ХАТТИИ ТАРТИБИ ДУЮМ

Институти математикаи ба номи А.Чураеви

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Муодилаҳои қисман хаттии тартиби дуюм, ки аз параметрҳо вобаста мебошанд, омӯхта мешавад. Муодилаҳои татқиқшаванда, сифатан таҳлил низ карда шудааст. Шарти устувории ҳолати оромӣ ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: системаҳои динамикии ғайрисуфта – тасвирҳои фазавӣ – устуворӣ – нуқтаи маҳсус – маҳдудият.

M.K.ARABOV

ANALYSIS OF STABILITY OF SPECIAL POINT FOR NON-SMOOTH SECOND ORDER EQUATION

Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

This paper takes into consideration to the non-linear second order equation depending on parameters. Used advanced mathematical analysis for investigated equation. Here's been found conditions to stability of the critical point.

Key words: A non-smooth dynamic systems – phase portraits – stability – critical point – limitation.

УДК 591.65

И.А.ШАКИРОВ, Ю.Х.ХАСАНОВ*

ОБ ОЦЕНКАХ ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА
ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ЛАГРАНЖА

*Набережночелнинский институт социально-педагогических технологий и ресурсов,
*Российско-Таджикский (Славянский) университет
Поступила в редакцию 28.10.2014 г.*

Решается задача оценивания роста констант Лебега через определяющие их параметры, когда при фиксированном значении одного из них другой параметр неограниченно возрастает. В двух этих основных случаях для них получены простые асимптотические равенства.

Ключевые слова: интерполяционные полиномы Лагранжа – функции и константы Лебега – оценка порядка роста и асимптотика констант Лебега.

1. Введение. Семейство тригонометрических интерполяционных полиномов Лагранжа [1]

$$\Phi_n(x, t; \alpha) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} x(t_k) D_n^*(t_k - t) + \alpha \sin nt$$
$$(D_n^*(u) = \frac{1}{2} \sin nu \operatorname{ctg} \frac{u}{2}; \quad \alpha \in R, \quad n \in N),$$

в работе [2] представлено в моноядерном виде

$$\Phi_n^c(x, t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} x(t_k) D_n^c(t_k - t)$$
$$(D_n^c(u) = \frac{1}{2} \sin nu (\operatorname{ctg} \frac{u}{2} - c), \quad c \in R; \quad t_k = \pi k / n).$$
(1)

При исследовании вопросов их сходимости к интерполируемой функции

Адрес для корреспонденции: Хасанов Юсуфали Хасанович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Мирзо Турсунзода, 30, Российско-Таджикский (славянский) университет.
E-mail: yukhas60@mail.ru

$$x = x(t) \in C_{2\pi} \quad (C_{2\pi} = \{x \in C[0, 2\pi] \mid x(0) = x(2\pi)\})$$

фундаментальное значение имеют соответствующие полиномам (1) константы Лебега [3]

$$\lambda_n^c = \max_{t \in T} \lambda_n^c(t) \quad (\lambda_n^c(t) = \lambda_n^*(t) + b_n^c(t) \sin nt, \quad t \in T), \quad (2)$$

где n - степень полиномов (1), $T = [0, \pi/n]$ - наименьший их период,

$$\begin{aligned} \lambda_n^*(t) &= \frac{\sin nt}{2n} \sum_{k=1}^n \left(\operatorname{ctg} \frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t_k - t}{2} \right), \\ b_n^c(t) &= \frac{1}{n} \sum_{k=n^*+1}^n \left(c - \operatorname{ctg} \frac{t_k - t}{2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

вполне определенные функции и выполнено дополнительное условие согласования параметров n, c вида

$$n^* \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{2n}{\pi} \operatorname{arccctg} c \right] = \frac{2n}{\pi} \operatorname{arccctg} c \quad ([z] - \text{целая часть числа } z). \quad (4)$$

Для определенности в работе всюду положим $c \geq 0$.

Заметим, что указанные выше явные выражения функций Лебега $\lambda_n^*(t)$ ($c = 0$) и $\lambda_n^c(t)$ ($c > 0$) впервые были определены в работе [2]. В случае $c = 0$ соответствующее функции $\lambda_n^*(t)$ точное значение константы Лебега

$$\lambda_n^* = \max_{t \in T} \lambda_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi \quad (n=1 \Rightarrow \lambda_1^* = 1) \quad (5)$$

было декларировано в [4], а строгое доказательство формулы (5) проведено в работе [5]. В связи с отсутствием в то время явно определенной формулы (3) для функции $\lambda_n^*(t)$, в ходе своих исследований авторы использовали лишь модульное представление функции Лебега вида

$$\lambda_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} |D_n^*(t_k - t)| \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} |D_n^0(t_k - t)| \quad (t \in T).$$

В работе [2] приведено другое доказательство формулы (5), основанное на полном исследовании безмодульного вида (3) функции $\lambda_n^*(t)$ с использованием производной до второго порядка включительно; получены более простые, чем (5), формулы, зависящие от чётности либо нечётности параметра n .

В математической литературе для констант Лебега (2) в общем случае ($c > 0$) не существует аналога формулы (5). По этому поводу в работах [2] и [3] (см. соответственно теоремы 3.1 и 2.2) отмечено, что вычисление точных значений λ_n^c ($c > 0$) сопряжено с

большими техническими трудностями. Следовательно, актуальной является задача оценивания роста λ_n^c через параметры n и c , когда последние неограниченно возрастают. В этом направлении в указанных работах получены различные по своей строгости верхние оценки вида

$$\lambda_n^c \leq \lambda_n^* + c, \quad \lambda_n^c \leq \lambda_n^* + c(1 - n^*/n) \quad (c \geq 0, n \geq 2), \quad (6)$$

в которых равенство имеет место лишь при $c = 0$ ($\lambda_n^0 = \lambda_n^*$). Для константы Лебега (5) данная постановка задачи имеет давнюю историю. Первоначально она оценивалась сверху как $\lambda_n^* \leq O(\ln n)$ либо $\lambda_n^* \leq A + B \ln n$, например, $\lambda_n^* \leq 4 + \lg n$ [6], $\lambda_n^* \leq 8 + (4/\pi) \ln n$ [7]. Затем коэффициенты A, B многократно уточнялись. Было установлено асимптотическое равенство

$$\lambda_n^* \cong \frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \quad (B = 2/\pi, n \rightarrow \infty) \quad (7)$$

с неопределённой (но ограниченной) величиной $O(1)$. Используя явный вид константы Лебега (5), в работе [8, с.106] были улучшены известные оценки и получено неравенство вида $\lambda_n^* \leq 4/\pi + (2/\pi) \ln(4n/\pi)$ ($n \in \mathbb{N}$). В [9, с.215] для неопределённой константы приведено соотношение $O(1) = 2(1 - 1/\pi)\theta_n$ ($\theta_n \in (0, 1)$), согласно которому $O(1)$ принадлежит интервалу $(0.2 - 2/\pi) \subset (0, 1.37)$. В случае интерполирования по узлам Чебышева в работе [10] для неопределённой константы $O(1)$ получено асимптотически точное выражение вида $O(1) = \alpha_0 + o(1) = (2/\pi)[\gamma + \ln(8/\pi)] + o(1)$, где $\gamma = 0.577215\dots$ - константа Эйлера, $\alpha_0 = 0.9625\dots$.

Возникает естественный вопрос: можно ли для констант Лебега λ_n^c установить аналоги вышеприведенных оценок и асимптотических равенств в общем случае ($c > 0$)? В работе дан положительный ответ на этот вопрос и получены нижеследующие новые результаты: установлена простая по структуре и более точная, чем в неравенствах (6), верхняя оценка для констант Лебега (2); на этой основе определён порядок роста констант λ_n^c ($c > 0$) в двух принципиально важных случаях, то есть при $n \rightarrow +\infty$ ($c - const$) и $c \rightarrow +\infty$ ($n - const$).

Здесь и далее запись $k \rightarrow +\infty$ ($m - const$) означает, что m - фиксированное в области своего определения число при неограниченном возрастании параметра k ; при этом соответствующие утверждения справедливы как для произвольно взятых конечных значений k , так и в предельном случае ($k \rightarrow +\infty$).

2. Вспомогательные результаты. Приведём часть формулировки теоремы 2.2 [3], связанную с верхней оценкой констант Лебега (2), которая будет существенно использована в следующем пункте в ходе доказательства основной теоремы данной работы.

Теорема 1 [3]. Для констант Лебега (2) при выполнении условия (4) имеет место следующее неравенство:

$$\lambda_n^c < \lambda_n^* + \frac{1}{n} \sum_{k=n^*+1}^n (c - ctg \frac{k}{2n} \pi) \quad (c > 0, n \geq 2). \quad (8)$$

Напомним, что выполнение условия (4) равносильно тому, что выбранное значение параметра c достигается функцией $y = ctg(t/2)$ ($t \in (0, \pi]$) в одном из внутренних узлов интерполяции $t_k = \pi k/n$ ($k = \overline{1, n-1}$, $n \geq 2$) из рассматриваемого промежутка. В этом и заключается суть согласованности параметров n и c .

Замечание 1. В данной теореме и далее всюду простейшие случаи 1) $c = 0 \wedge n \in \mathbb{N}$ (сюда входит пропущенный в теореме 1 случай $c = 0 \wedge n = 1$) и 2) $c > 0 \wedge n = 1$ исключены из рассмотрения в связи с тем, что исследуемые в данной работе константы (2) превращаются:

- в первом случае – в достаточно полно изученную константу (5),

- во втором – в простейшее неравенство $\lambda_1^c < 1+c$ (см. (6)), так как в неравенстве

(8) при значении параметра $n = 1$ имеем:

$$\lambda_1^* = 1, \quad n^* = 0, \quad b_1^c(t) = c - ctg \frac{\pi - t}{2}, \quad b_1^c(0) = c,$$

где $b_n^c(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=n^*+1}^n (c - ctg \frac{\pi k/n - t}{2})$ (см. (3)).

Лемма 1. При выполнении условия (4) для величины $b_n^c(0)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n^*+1}^n (c - ctg \frac{k}{2n} \pi) < c(1 + \frac{1}{2n} - \frac{2}{\pi} \text{arcctg} c) - \frac{1}{\pi} \ln(1 + c^2) \quad (c > 0, n \geq 2). \quad (9)$$

Доказательство. Оценим левую часть (9), максимально строго используя при этом геометрические свойства самой суммы, котангенса и определённого интеграла от него, а также дополнительное условие (4):

$$\begin{aligned}
b_n^c(0) &= \frac{1}{n} \sum_{k=n^*+1}^n (c - \operatorname{ctg} \frac{k}{2n} \pi) < \frac{1}{\pi} \sum_{k=n^*+1}^n (c - \operatorname{ctg} \frac{t_k}{2}) \frac{\pi}{n} < \\
&< \frac{1}{\pi} \left[\sum_{k=n^*+1}^n \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \cdot (\operatorname{ctg} \frac{t_{k-1}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{t_k}{2}) + \int_{t_{n^*}}^{\pi} (c - \operatorname{ctg} \frac{t}{2}) dt \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2n} c + c(\pi - t_{n^*}) + 2 \ln \sin \frac{t_{n^*}}{2} \right].
\end{aligned}$$

Теперь для упрощения последнего выражения применим к нему тригонометрическое равенство $\sin^2 \frac{t_{n^*}}{2} = 1 / (1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t_{n^*}}{2})$ и равносильные варианты условия (4) вида $t_{n^*} = 2 \operatorname{arccctg} c$, $\operatorname{ctg} \frac{t_{n^*}}{2} = c$; в итоге получим справедливость оценки (9):

$$\begin{aligned}
b_n^c(0) &< \frac{c}{2n} + \frac{c}{\pi} (\pi - 2 \operatorname{arccctg} c) + \frac{2}{\pi} \ln(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t_{n^*}}{2})^{-1/2} = \\
&= \frac{c}{2n} + c - \frac{2c}{\pi} \operatorname{arccctg} c - \frac{1}{\pi} \ln(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t_{n^*}}{2}) = c \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arccctg} c \right) - \frac{1}{\pi} \ln(1 + c^2).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

3. Основные результаты. Как отмечено во введении, скорость сходимости полиномов (1) к интерполируемой функции определяется порядком роста констант Лебега λ_n^c ($c > 0$, $n \geq 2$) при неограниченном увеличении параметров. Следовательно, изучение поведения этих констант является актуальной задачей теории интерполирования функции, и она в математической литературе до сих пор не рассмотрена. Ясно, что константы (2) представляют собой функцию двух переменных специфического вида $\lambda_n^c = \lambda(n, c)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$; $c \in (0, +\infty)$), геометрическая и дифференциальная теории которой позволяют ответить и на некоторые другие вопросы, не рассматриваемые в данной работе.

Теорема 2. Для двухпараметрической последовательности констант Лебега (2) справедливо неравенство

$$\lambda_n^c < \lambda_n^* + c \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arccctg} c \right) - \frac{1}{\pi} \ln(1 + c^2) \quad (c > 0, n \geq 2), \quad (10)$$

а порядки их роста по переменным n и c оцениваются сверху как

$$\lambda_n^c < \frac{2}{\pi} \ln n + 0.5 \frac{c}{n} + O_1(1) \quad (n \rightarrow +\infty, c - \text{const}), \quad (11)$$

$$\lambda_n^c < \left(1 + \frac{1}{2n} \right) c - \frac{2}{\pi} \ln(1 + c^2) + O_2(1) \quad (c \rightarrow +\infty, n - \text{const}), \quad (12)$$

где $O_1(1)$ и $O_2(1)$ ограниченные величины, зависящие соответственно от переменных c и n .

Доказательство. Последовательно используя неравенства (8) и (9), без особого труда получаем справедливость оценки (10)

$$\lambda_n^c < \lambda_n^* + \frac{1}{n} \sum_{k=n^*+1}^n (c - \text{ctg} \frac{k}{2n} \pi) < \lambda_n^* + c(1 + \frac{1}{2n} - \frac{2}{\pi} \text{arccctg} c) - \frac{1}{\pi} \ln(1+c^2) \quad (c > 0, n \geq 2).$$

Для доказательства неравенства (11) в правой части (10) предварительно используем известное неравенство [10]

$$\lambda_n^* \leq 1 + \frac{2}{\pi} \ln n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n=1 \Rightarrow \lambda_1^* = 1), \quad (13)$$

затем зафиксируем c , а другой параметр неограниченно увеличим. В итоге получим:

$$\begin{aligned} \lambda_n^c &< 1 + \frac{2}{\pi} \ln n + c(1 + \frac{1}{2n} - \frac{2}{\pi} \text{arccctg} c) - \frac{1}{\pi} \ln(1+c^2) = \\ &= \frac{2}{\pi} \ln n + 0.5 \frac{c}{n} + 1 + c - \frac{2c}{\pi} \text{arccctg} c - \frac{1}{\pi} \ln(1+c^2) = \frac{2}{\pi} \ln n + 0.5 \frac{c}{n} + O_1(1) \quad (n=2,3,4, \dots), \end{aligned}$$

где $O_1(1) = O_1(1, c) = 1 + c - \frac{2c}{\pi} \text{arccctg} c - \frac{1}{\pi} \ln(1+c^2)$ ($c = \text{const}$).

Теперь фиксируя в соотношении (10) переменную n и неограниченно увеличивая параметр c , имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_n^c &< (1 + \frac{1}{2n})c - \frac{1}{\pi} \ln(1+c^2) - \frac{2c}{\pi} \text{arccctg} c + 1 + \frac{2}{\pi} \ln n < \\ &< (1 + \frac{1}{2n})c - \frac{1}{\pi} \ln(1+c^2) + O_2(1) \quad (c \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

где $\frac{2c}{\pi} \text{arccctg} c \in (0, 2/\pi) \quad \forall c > 0$; $O_2(1) = O_2(1, n) = 1 + \frac{2}{\pi} \ln n \quad (n \geq 2)$.

Теорема 2 доказана.

Известно (см. [3], замечание 2.3), что константа Лебега λ_n^* имеет минимальное значение среди констант λ_n^c ($\lambda_n^* \leq \lambda_n^c \quad \forall c \geq 0 \wedge n \in \mathbb{N}$) и её асимптотическое поведение определяется формулой (7). Эти факты и неравенства (10)-(12) позволяют сформулировать следующее

Следствие. Для констант λ_n^c ($c > 0, n \geq 2$) справедливы асимптотические равенства вида:

$$\lambda_n^c \cong \frac{2}{\pi} \ln n + 0.5c \cdot \frac{1}{n} + O_1(1), \quad n \rightarrow +\infty \quad (c - const);$$

$$\lambda_n^c \cong (1 + \frac{1}{2n})c - \frac{2}{\pi} \ln c + \bar{O}_2(1), \quad c \rightarrow +\infty \quad (n - const).$$

Замечание 2. На основании известного равенства $\lambda_n^{-c} = \lambda_n^c \quad \forall c \geq 0$ (см. [3], теорема 3.1) можем констатировать, что результаты теоремы 1 справедливы для всех $c \in R$.

Замечание 3. При значении параметра $c = 0$ основное неравенство (10) преобразуется в равенство ($\lambda_n^0 = \lambda_n^*$), а (11) и (12) превращаются в нестрогое неравенство (13) (см. замечание 1). Следовательно, прослеживается полная согласованность полученных выше верхних оценок для констант λ_n^c ($c \geq 0$) с оценкой (13) для константы λ_n^* ($c = 0$) (см. [11], теорема 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 2. – М.: Наука, 1965.
2. Шакиров И.А. – Известия вузов. Математика, 2010, № 10, с. 60-68.
3. Шакиров И.А. – Известия вузов. Математика. 2013, № 7, с. 77-89.
4. Ehlich H., Zeller K. – Math., Ann, 1966, v.164, pp. 105-112.
5. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наукова. думка, 1988.
6. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. – М-Л.: ГТТИ, 1934.
7. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М-Л.: Гостехиздат, 1949.
8. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980.
9. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
10. Brutman L. – Ann. Numer. Math., 1997, №4, pp. 111-127.
11. Шакиров И.А., Хасанов Ю.Х. – ДАН РТ, 2014, т.57, №1, с. 25-31.

И.А.ШАКИРОВ, Ю.Х.ХАСАНОВ

ОИДИ БАҲОИ ҚИМАТҲОИ АНИҚИ ДОИМИИ ЛЕБЕГ БАРОИ ПОЛИНОМҲОИ ИНТЕРПОЛЯТСИОНИИ ЛАГРАНЖ

Масъалаи баҳодихии афзоиши доимии Лебег тавассути муайянкунии параметрҳояш дар ҳолате дида мешавад, ки хангоми ба қайд гирифтани яке аз қиматҳои қимати дигари он меафзояд. Барои ин ду ҳолати дидашуда баробариҳои асимптотикӣ оддӣ ёфта шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: полиномҳои интерполясионии Лагранж – функцияҳо ва доимиҳои Лагранж – баҳои тартиби афзоиш ва асимптотикаи доимии Лебег.

I.A.SHAKIROV, YU.KH.KHASANOV

**ABOUT ESTIMATIONS OF LÉBESQUE'S CONSTANTS TO LAGRANGE
INTERPOLATION POLYNOMIALS**

In this work the task of evaluation of growth of considered Lébesque's constants through defining them parameters is solved when at the fixed value of one of them the other parameter increases without restriction. In these two basic cases simple asymptotic equalities are got for them.

Key words: Lagrange interpolation polynomials – Lébesque's functions and constants – estimation of the growth order and the asymptotic behavior of the Lébesque's constants.

УДК 81'322::811.222.8::519.25

З.Д.УСМАНОВ, Г.М.ДОВУДОВ*

ПОЗИЦИОННОЕ КОДИРОВАНИЕ ТАДЖИКСКИХ СЛОВОФОРМ

Институт математики АН Республики Таджикистан,

**Худжандский политехнический институт*

Таджикского технического университета им. академика М.С.Осими

Поступила в редакцию ...

Предлагается позиционная система кодирования произвольной таджикской словоформы, позволяющая однозначно распознавать все её признаки, необходимые для автоматизации обработки текстовой информации.

Ключевые слова: таджикский язык – словоформа – граммема – код.

Одним из ключевых этапов в построении автоматизированных систем обработки текстов на таджикском языке является разработка процедур морфологического анализа и синтеза [1, 2]. Реализация указанных этапов подразумевает наличие формальных моделей морфологии, прикладных описаний частей речи и системы грамматических категорий таджикского языка. Анализ публикаций показывает, что имеющиеся теоретические исследования не удовлетворяют практическим нуждам автоматизации [3-6]. Вместе с тем необходимо отметить, что в работах [5-7] уже получили освещение те или иные вопросы рассматриваемой проблемы.

Объективные потребности морфоанализа обусловили необходимость использования вместо десяти общепринятых частей речи [6] **девять самостоятельных частей речи** таких, как *исм* (имя существительное), *сифат* (имя прилагательное), *шумора* (имя числительное), *ҷонишин* (местоимение), *феъл* (глагол), *масдар* (инфинитив), *сифати феъли* (причастие), *феъли ҳол* (деепричастие), *зарф* (наречие), и **семь служебных частей речи** таких, как *пешоянд* (предлог), *пасоянд* (послелог), *пайвандак* (союз), *ҳиссаҷа* (частица), *нидо* (междометие), *калимаи тақлиди овозӣ* (звукоподражательное слово), *нумератив*.

Адрес для корреспонденции: Усманов Зафар Джураевич, 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, Айни, д. 299/1, Институт математики АН РТ. e-mail: zafar-usmanov@rambler.ru.

Девять из них (имя существительное, имя прилагательное, имя числительное, местоимение, глагол, инфинитив, причастие, деепричастие, наречие) имеют развитую систему грамматических категорий. Каждая категория представляется совокупностью её граммем, то есть словоизменительных значений. Граммемы выражаются посредством словоизменительных морфем, которые, будучи присоединенными к корню (основе) слова, образуют словоформы. Применяемое нами понятие “словоизменительный” означает, что и корень (основа) слова и построенные из него словоформы принадлежат одной и той же части речи. Иными словами, часть речи инвариантна относительно присоединения к корню словоизменительного аффикса.

Семь других частей речи (предлог, послелог, союз, частица, междометие, звукоподражательное слово и нумератив) – служебные. Среди них последние две мы также относим к словоизменительным частям речи. Остальные пять частей речи не имеют словоизменительных категорий¹. В словаре (словнике) и текстах (в словоупотреблениях) отдельные слова, принадлежащие к таким частям речи, встречаются в неизменном виде за редким исключением. По этой причине их анализ оказывается тривиальным и сводится к идентификации с соответственными элементами в базе данных. В связи со сказанным мы рассматриваем словоизменительные категории только одиннадцати отмеченных частей речи.

При описании грамматических категорий частей речи, мы, по существу, излагаем порядок присоединения к *нормальной форме слова* словоизменительных аффиксов, что приводит к построению *словоизменительных* словоформ. При этом в силу специфики таджикского языка в качестве нормальной формы слова выступают либо его корень, либо его основа.

При позиционном кодировании первые две позиции кода словоформы отводятся для распознавания части речи, так что для существительного – 01, прилагательного – 02, числительного – 03, местоимения – 04, глагола – 05, инфинитива – 06, причастия – 07, деепричастия – 08, наречия – 09, предлога – 10, послелога – 11, союза – 12, частицы – 13, междометия – 14, звукоподражательного слова – 15 и нумератива – 16. Таким образом, по коду словоформы, который содержит также и цифровые значения, соответствующие тем или иным словоизменительным признакам, независимо от длины кода по первым двум цифрам распознаётся часть речи словоформы. Последующие цифры – это коды соответствующих значений грамматических признаков.

В таблице представлена система кодирования словоформ самостоятельных частей речи. В 1-й колонке приводятся коды частей речи; во 2-й колонке даётся список словоизменительных категорий данной части речи; в 3-й – значения, принимаемые

¹ Исключение составляет предлог «барои», который может встречаться в тексте в виде «бароям», «бароят» и т.д.

грамматическими категориями (в скобках сообщается дополнительная информация); в 4-й указывается цифровой код, приписываемый соответствующей граммеме.

В 3-й колонке широко используются символы, смысл которых заключается в следующем: \emptyset - пустой аффикс, \oplus - символ конкатенации (присоединения), *VE* (verb ending) - личное окончание глагола (+ам, +ям, +й, +ад, +яд, +ем, +ед, +анд, +янд) и *PE* (predicative ending) - предикативное окончание (+ам, +ям, +й, +аст, +яст, +ст, +ем, +ед, +анд, +янд).

Таблица

Система кодирования самостоятельных частей речи

Часть речи	Грамматическая категория	Граммемы	Код
01	Число	Единственное число (\emptyset)	0
		Множественное число (вон, гон, он, ён, хо, хот, вот)	1
	Определённость	Определённость (\emptyset)	0
		Неопределённость (е)	1
	Изафет	Нет изафета (\emptyset)	0
		Есть изафет (и)	1
	Послелог	Нет послелого (\emptyset)	0
		Есть послелог (ро)	1
02	Степень сравнения	Положительная степень (\emptyset)	0
		Сравнительная степень (тар)	1
		Превосходная степень (тарин)	2
	Недостаток /излишество	Нейтральная форма (\emptyset)	0
		Недостаток/излишество (ак, ча, як)	1
	Определённость	Определённость (\emptyset)	0
		Неопределённость (е)	1
	Изафет	Нет изафета (\emptyset)	0
		Есть изафет (и)	1
	Послелог	Нет послелого (\emptyset)	0
		Есть послелог (ро)	1
	03	Разряд	Количественные числительные (\emptyset или то)
Порядковые числительные (ум, умй, умин)			1
Изафет		Нет изафета (\emptyset)	0
		Есть изафет (и)	1
Послелог		Нет послелого (\emptyset)	0
		Есть послелог (ро)	1
04	Изафет	Нет изафета (\emptyset)	0
		Есть изафет (и)	1
	Послелог	Нет послелого (\emptyset)	0
		Есть послелог (ро)	1
05	Основа глагола	Основа настоящего времени	0
		Основа прошедшего времени	1
	Форма глагола	Утвердительная форма (пустой префикс \emptyset)	0
		Отрицательная форма (префиксы на-, но-)	1
	Времена глагола	Настоящее определенное время (пустой аффикс \emptyset)	0
		Аорист (VE)	1
		Настояще-будущее время (ме-VE)	2
		Прошедшее простое время (VE)	3
	Перфект (а \oplus PE, а \oplus ст \oplus PE)	4	

		Предположительное прошедшее время (агй ⊕ PE, агй ⊕ ст ⊕ PE)	5
		Прошедшее длительное время (ме-а ⊕ VE)	6
		Перфект длительный (ме-а ⊕ PE)	7
		Будущее время сослагательного наклонения (ме-агй ⊕ PE, ме-агй ⊕ ст ⊕ VE)	8
	Число-лицо глагола	Единственное число, первое лицо (ам,ям)	0
		Единственное число, второе лицо (й, ∅)	1
		Единственное число, третье лицо (ад,яд, ∅)	2
		Множественное число, первое лицо (ем)	3
		Множественное число, второе лицо (ед)	4
		Множественное число, третье лицо (анд,янд)	5
06	Форма инфинитива	Утвердительная форма (пустой префикс ∅)	0
		Отрицательная форма (префиксы на-, но-)	1
	Изафет	Нет изафета (∅)	0
		Есть изафет (и)	1
	Послелог	Нет послелого (∅)	0
		Есть послелог (ро)	1
07	Времена причастия	Основа причастия прошедшего времени	0
		Основа причастия настоящего времени	1
		Основа причастия настояще-будущего времени	2
		Основа причастия будущего времени	3
	Форма причастия	Утвердительная форма (пустой префикс ∅)	0
		Отрицательная форма (префиксы на-, но-)	1
	Изафет	Нет изафета (∅)	0
		Есть изафет (и)	1
	Послелог	Нет послелого (∅)	0
		Есть послелог (ро)	1
08	Времена деепричастия	Основа деепричастия прошедшего времени	0
		Основа деепричастия настоящего времени	1
		Основа деепричастия настояще-будущего времени	2
		Основа деепричастия будущего времени	3
	Форма деепричастия	Утвердительная форма (пустой префикс ∅)	0
		Отрицательная форма (префиксы на-, но-)	1
	Изафет	Нет изафета (∅)	0
		Есть изафет (и)	1
	Послелог	Нет послелого (∅)	0
		Есть послелог (ро)	1
09	Степень сравнения	Простая степень (∅)	0
		Сравнительная степень (тар)	1
	Недостаток/излишество	Нейтральная форма (∅)	0
		Недостаток/излишество (ак,ча)	1
	Изафет	Нет изафета (∅)	0
		Есть изафет (и)	1
	Послелог	Нет послелого (∅)	0
		Есть послелог (ро)	1
15	Изафет	Нет изафета (∅)	0
		Есть изафет (и)	1
	Послелог	Нет послелого (∅)	0
		Есть послелог (ро)	1

16	Изафет	Нет изафета (\emptyset)	0
		Есть изафет (и)	1
	Послелог	Нет послелога (\emptyset)	0
		Есть послелог (po)	1

Далее на примерах словоформ указанных частей речи дополнительно поясняется содержание таблицы и принципы пользования ею.

Имя существительное. Для кодирования словоформ-существительных предлагается следующий шаблон:

01	α_1	α_2	α_3	α_4
----	------------	------------	------------	------------

Первая позиция отводится для двузначного кода словоформ-существительных, четыре последующих позиции в зависимости от того, какой из двух признаков соответствует значению граммы конкретной словоформы, заполняются нулями и единицами, см. таблицу 1.

Примеры кодирования словоформ-существительных.

Пример 1. китобхоеро = китоб \oplus хо \oplus е \oplus \emptyset \oplus ро = 011101.

Пример 2. китобхои = китоб \oplus хо \oplus \emptyset \oplus и \oplus \emptyset = 011010.

Пример 3. китоб = китоб \oplus \emptyset \oplus \emptyset \oplus \emptyset \oplus \emptyset = 010000.

Имя прилагательное. Для кодирования словоформ-прилагательных используется следующий шаблон:

02	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
----	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

Первая позиция отводится для двузначного кода, присваиваемого словоформам-прилагательным, пять последующих позиций заполняются либо 0, либо 1, а для β_2 ещё и 2, в зависимости от того, какой из признаков соответствует грамматическому значению категории конкретной словоформы.

Далее приводятся примеры кодирования словоформ-прилагательных.

Пример 1. сурх = сурх \oplus \emptyset \oplus \emptyset \oplus \emptyset \oplus \emptyset \oplus \emptyset = 0200000.

Пример 2. хурдтаракеро = хурд \oplus тар \oplus ак \oplus е \oplus \emptyset \oplus ро = 0211101.

Пример 3. сурхтарини = сурх \oplus тарин \oplus \emptyset \oplus \emptyset \oplus и \oplus \emptyset = 0220010.

Имя числительное. Для кодирования используется следующий шаблон:

03	χ_1	χ_2	χ_3
----	----------	----------	----------

Первая позиция отводится двузначному коду, присваиваемому словоформам-числительным, три последующих заполняются цифровыми значениями граммы.

Примеры кодирования словоформ-числительных:

Пример 1. чор = чор \oplus \emptyset \oplus \emptyset \oplus \emptyset = 03000

Пример 2. чоруминро = чор \oplus умин \oplus \emptyset \oplus ро = 03101

Пример 3. чоруми = чор \oplus ум \oplus и \oplus \emptyset \oplus \emptyset = 03110

Местоимение. Для кодирования предлагается следующий шаблон:

04	δ_1	δ_2
----	------------	------------

Первая позиция отводится двузначному коду, присваиваемому словоформам-местоимениям, две последующие заполняются цифровыми значениями граммем, соответствующими грамматическим значениям категорий конкретной словоформы.

Примеры кодирования местоимённых словоформ:

Пример 1. ман = ман \oplus \emptyset \oplus \emptyset = 0400.

Пример 2. манро = ман \oplus \emptyset \oplus ро = 0401.

Пример 3. зерини = зерин \oplus и \oplus \emptyset = 0410.

Глагол (с основой настоящего времени). Для кодирования используется следующий шаблон:

050	ε_1	ε_2	ε_3
-----	-----------------	-----------------	-----------------

Первая позиция отводится для трёхзначного кода - глагола с основой настоящего времени, три последующих позиции заполняются теми или иными цифрами в зависимости от того, какой из признаков соответствует грамматическому значению категории конкретной словоформы.

Примеры кодирования:

Пример 1. рав = \emptyset \oplus \emptyset \oplus рав \oplus \emptyset \oplus \emptyset = 050001

Пример 2. наравем = на \oplus \emptyset \oplus рав \oplus \emptyset \oplus ем = 050113

Пример 3. меравад = \emptyset \oplus ме \oplus рав \oplus \emptyset \oplus ад = 050022

Глагол (с основой прошедшего времени). Для кодирования используется следующий шаблон:

051	ε_1	ε_2	ε_3
-----	-----------------	-----------------	-----------------

Первая позиция отводится для трёхзначного кода - глагола с основой настоящего времени, три последующих позиции заполняются теми или иными цифрами в зависимости от того, какой из признаков соответствует грамматическому значению категории конкретной словоформы.

Примеры кодирования:

Пример 1. рафтам = \emptyset \oplus \emptyset \oplus рафт \oplus \emptyset \oplus ам = 051030

Приме 2. нарафтай = на \oplus \emptyset \oplus рафт \oplus а \oplus й = 051141

Пример 3. рафтамием = \emptyset \oplus \emptyset \oplus рафт \oplus агй \oplus ем = 051053

Пример 4. намерафт = на \oplus ме \oplus рафт \oplus \emptyset \oplus \emptyset = 051162

Пример 5. мерафтаед = \emptyset \oplus ме \oplus рафт \oplus а \oplus ед = 051074

Пример 6. намерафтагиянд = на \oplus ме \oplus рафт \oplus агй \oplus янд = 051185

Инфинитив. Для кодирования используется следующий шаблон:

06	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
----	----------	----------	----------

Первая позиция отводится для двузначного кода словоформ-инфинитивов, три последующих позиции заполняются либо 0, либо 1 в зависимости от того, какой из двух признаков соответствует грамматическому значению категории конкретной словоформы.

Примеры кодирования трёх словоформ – инфинитивов:

Пример 1. кардан = $\emptyset \oplus$ кардан $\oplus \emptyset \oplus \emptyset = 06000$.

Пример 2. нагуфтанро = на \oplus гуфтан $\oplus \emptyset \oplus$ ро = 06101

Пример 3. гуфтани = $\emptyset \oplus$ гуфтан \oplus и $\oplus \emptyset = 06010$

Причастие. Для кодирования используются следующие шаблоны:

070	φ_1	φ_2	φ_3
071	φ_1	φ_2	φ_3
072	φ_1	φ_2	φ_3
073	φ_1	φ_2	φ_3

Первая позиция отводится для трёхзначного кода словоформ-причастий, три последующих позиции заполняются теми или иными цифрами в зависимости от того, какой из признаков соответствует грамматическому значению категории конкретной словоформы.

Примеры кодирования словоформ-причастий:

Пример 1. кардагй = $\emptyset \oplus$ кардагй $\oplus \emptyset \oplus \emptyset = 070000$

Пример 2. накардагй = на \oplus кардагй $\oplus \emptyset \oplus \emptyset = 070100$

Пример 3. кардании = $\emptyset \oplus$ карданй \oplus и $\oplus \emptyset = 073010$

Деепричастие. Для кодирования используются следующие шаблоны:

080	γ_1	γ_2	γ_3
081	γ_1	γ_2	γ_3
082	γ_1	γ_2	γ_3
083	γ_1	γ_2	γ_3

Первая позиция отводится для трёхзначного кода словоформ-деепричастий, три последующих позиции заполняются теми или иными цифрами в зависимости от того, какой из признаков соответствует грамматическому значению той или иной категории конкретной словоформы.

Примеры кодирования словоформ-деепричастий:

Пример 1. карда = $\emptyset \oplus$ карда $\oplus \emptyset \oplus \emptyset = 080000$

Пример 2. накарда = на \oplus карда $\oplus \emptyset \oplus \emptyset = 080100$

Пример 3. тозон = $\emptyset \oplus$ тозон $\oplus \emptyset \oplus \emptyset = 082000$

Наречие. Для кодирования используется следующий шаблон:

09	η_1	η_2	η_3	η_4
----	----------	----------	----------	----------

Первая позиция отводится для двузначного кода словоформ-наречий, четыре последующих позиции заполняются либо 0, либо 1 в зависимости от того, какой из двух признаков соответствует грамматическому значению категории конкретной словоформы.

Примеры кодирования словоформ-наречий:

Пример 1. боло = боло $\oplus \emptyset \oplus \emptyset \oplus \emptyset \oplus \emptyset = 090000$

Пример 2. болотар = боло \oplus тар $\oplus \emptyset \oplus \emptyset \oplus \emptyset = 091000$

Пример 3. болотаракро боло \oplus тар \oplus ак $\oplus \emptyset \oplus$ ро = 091101

Звукоподражательные слова. Для кодирования звукоподражательных словоформ используется следующий шаблон:

15	l_1	l_2
----	-------	-------

Первая позиция отводится двузначному коду, присваиваемому звукоподражательным словоформам, две последующих заполняются цифровыми значениями граммем, соответствующими грамматическим значениям категорий конкретной словоформы.

Примеры кодирования звукоподражательного слова.

Пример 1. гулдур-гулдур = гулдур-гулдур $\oplus \emptyset \oplus \emptyset = 1500$

Пример 2. ак-аки = ак-ак \oplus и $\oplus \emptyset = 1510$

Пример 3. бакар-бакарро = бакар-бакар $\oplus \emptyset \oplus$ ро = 1501

Нумератив. Для кодирования используется следующий шаблон:

16	κ_1	κ_2
----	------------	------------

Первая позиция отводится двузначному коду, присваиваемому словоформам-нумеративам, две последующие заполняются цифровыми значениями граммем, соответствующими грамматическим значениям категорий конкретной словоформы.

Примеры кодирования словоформ-нумеративов:

Пример 1. нафар = нафар $\oplus \emptyset \oplus \emptyset = 1600$

Пример 2. нафарро = нафар $\oplus \emptyset \oplus$ ро = 1601

Пример 3. нафари = нафар \oplus и $\oplus \emptyset = 1610$

ЛИТЕРАТУРА

1. Усманов З.Д., Довудов Г.М. О формировании базы морфов таджикского языка – Душанбе: Дониш, 2014, 110 с.
2. Усманов З.Д., Довудов Г.М. Концептуальная модель морфологического анализа таджикских словоформ. Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2014, т.57, № 3, с. 205-209
3. Расторгуева В.С. Краткий очерк грамматики таджикского языка. Таджикско-русский словарь; ред. М.В. Рахими, Л.В. Успенская. - М., 1954, с. 529-570.
4. Таджикский современный литературный язык (Забони адабии ҳозираи тоҷик). Лексикология, фонетика и морфология/ под. ред. Б. Ниёзмухаммадова. - Душанбе: Ирфон, 1973, т.1, 451 с.
5. Грамматика современного таджикского литературного языка (Грамматикаи забони адабии ҳозираи тоҷик). – Душанбе: Дониш, 1985, 355 с.
6. Арзуманов С.Д., Сангинов А. Таджикский язык. – Душанбе: Маориф, 1988, 416 с.

7. Исмаилов М.А. Основы автоматизированного морфологического анализа слов таджикского языка. – Душанбе: Институт математики АН РТ, 1994, 156 с.
8. Назаров Р.С. О множестве префиксов таджикского литературного языка. Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2006, т. 49, № 7, с. 620-628.
9. Гращенко Л.А. Математические основы автоматизированной таджикско-персидской конверсии графических систем письма: дисс. ... к. физ.-мат. н. – Душанбе, 2010, 115 с.

З.Ҷ.УСМОНОВ, Г.М.ДОВУДОВ*

КОДИРОНИИ ПОЗИТСИОНИИ КАЛИМАҲОИ ЗАБОНИ ТОҶИКӢ

*Институти математика ба номи А. Ҷӯраеви,
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,
*Донишқадаи политехникии Донишгоҳи техникии Тоҷикистон
ба номи М.С.Осимӣ дар ш. Хуҷанд*

Системаи кодиронии позитсионии калимаи дилхоҳи забони тоҷикӣ пешниҳод карда мешавад. Ин система имконият медиҳад, ки ҳамаи нишонаҳои барои коркарди автоматии маълумоти матнӣ лозимбуда, аниқ муайян карда шавад.

Калимаҳои калидӣ: забони тоҷикӣ – калима – граммема – код.

Z.D.USMANOV, G.M.DOVUDOV

POSITIONAL CODING OF TAJIK WORDFORMS

*A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,
Khujand's Polytechnic Institute of the M.S.Osimi Tajik Technical University*

Positional coding of Tajik wordforms is presented. It admits uniquely to recognize all grammatical characteristics of a wordform necessary for the automatic processing of text information.

Key words: Tajik language – wordform – grammeme – code.

УДК 523.6

С.Х.АБДУЛЛОЕВ, Н.Х.МИНИКУЛОВ

ФОТОМЕТРИЯ АСТЕРОИДА (00533) SARA

Институт астрофизики АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 20.01.2015 г.

Приведены результаты наблюдений астероида (00533) Sara. Получена кривая блеска объекта и уточнен период его вращения.

Ключевые слова: *астероид – фотометрия – кривая блеска – период вращения.*

С 27 по 30 августа 2014 г. на телескопе Цейсс-600 Международной астрономической обсерватории Санглох (МАОС ИА АН РТ) были проведены наблюдения астероида (00533) Sara с целью уточнения периода вращения. *В течение четырёх ночей наблюдений получено 824 изображения объекта.*

Для определения блеска астероида (00533) Sara были использованы 8 звёзд из ближайшего окружения астероида в качестве звёзд сравнения по каталогу Tycho [1] со спектральными классами от A0 до близких к спектральному классу Солнца G2. Основные характеристики звёзд сравнения приведены в таблице, где α – прямое восхождение, δ – склонение, V – звёздная величина в фильтре V, (B-V) – показатель цвета в стандартной фотометрической системе. Обработка полученных кадров проведена с помощью программы MaxIm DL. Переход от инструментальных звёздных величин астероида в систему относительных звёздных величин производился с помощью каталога Tycho и данных стандартной фотометрической системы [2]. По звёздам сравнения определены звёздные величины астероида в фильтре R в моменты наблюдений и построена его кривая блеска. Точность измерений блеска астероида не превышает 0.02 звёздной величины.

Адрес для корреспонденции: *Абдуллоев Сафарали Холмуродович. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бухоро, 22, Институт астрофизики АН РТ. E-mail: a-bakhodur@mail.ru*

Основные характеристики звёзд сравнения

№ звёзды	α	δ	V	B-V
1	1 ^h 47 ^m 44.58 ^s	+08°59'46.1"	12.16	0.16
2	1 ^h 47 ^m 20.49 ^s	+09°10'03.0"	12.62	0.20
3	1 ^h 48 ^m 10.17 ^s	+09°28'53.0"	11.78	0.43
4	1 ^h 48 ^m 28.81 ^s	+09°30'40.2"	12.29	0.31
5	1 ^h 50 ^m 18.93 ^s	+09°13'04.1"	11.32	0.37
6	1 ^h 50 ^m 17.57 ^s	+09°12'23.6"	12.43	0.07
7	1 ^h 50 ^m 37.61 ^s	+09°13'15.0"	11.15	0.83
8	1 ^h 50 ^m 36.71 ^s	+09°01'26.7"	11.12	0.21

На рис.1 показаны положения астероида на звёздном небе во время наблюдений, когда объект находился в созвездии Рыб и имел следующие параметры: мировое время в момент наблюдений UT=16^h00^m; координаты $\alpha=01^{\text{h}}50^{\text{m}}17.5^{\text{s}}$ и $\delta=+09^{\circ}17'19''$; блеск $m(R)=14.8$ звёздных величин; фаза $ph=15.4\%$; расстояние от Земли $\Delta=2.4$ а.е. (361.5 млн. км); расстояние от Солнца $r=3.1$ а.е. (465.5 млн. км).

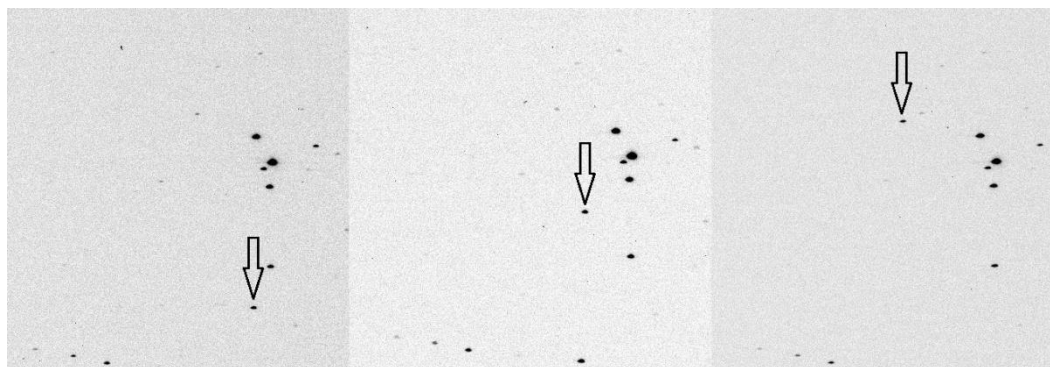


Рис.1. Кадры с изображением астероида (00533) Sara за 27-29.08.2014 г.

На рис.2 приведены относительные кривые блеска астероида в зависимости от времени наблюдений за четыре последовательные ночи, из которых видно, что амплитуда изменения блеска составляет 0.4 звёздной величины.

Для поиска периодических изменений блеска использована программа «Period04» [3]. Результат поиска периода представлен на рис. 3, где частота равная 4.1 гц соответствует периоду вращения 11.624 часам (или 697.44 минут). Это значение почти совпадает с периодом, найденным ранее по оптическим наблюдениям $P=11.654$ часам (или 699.24 минут) [4]. Разница между нашим результатом и ранее найденным периодом составляет 1 минуту 48 секунд.

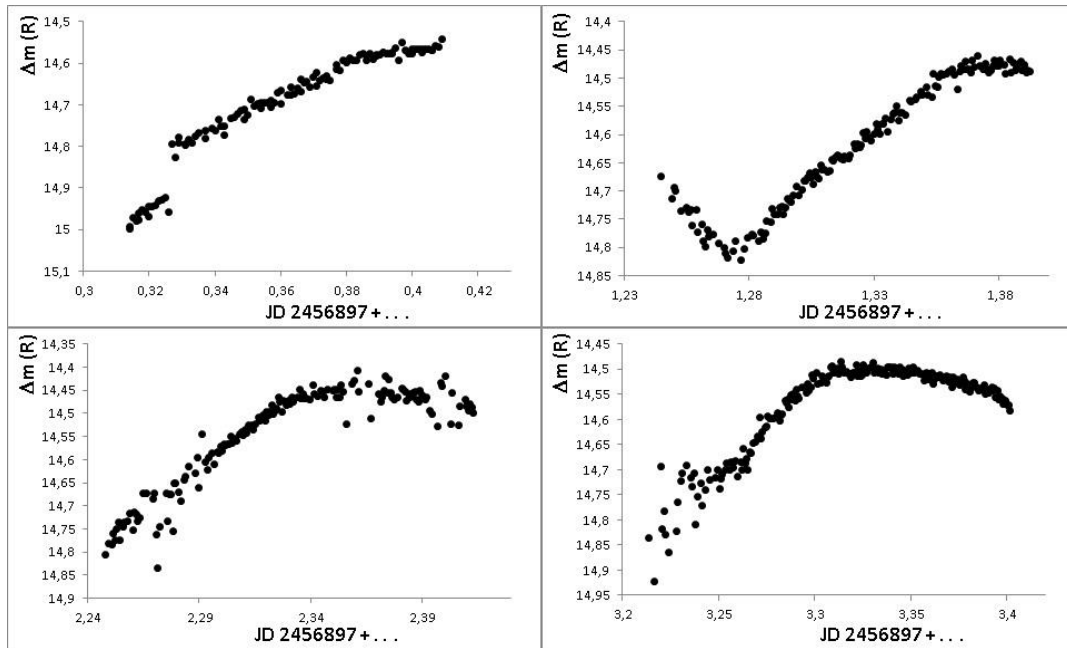


Рис.2. Относительные кривые блеска астероида (00533) Sara по наблюдениям за 27-30.08.2014 г.

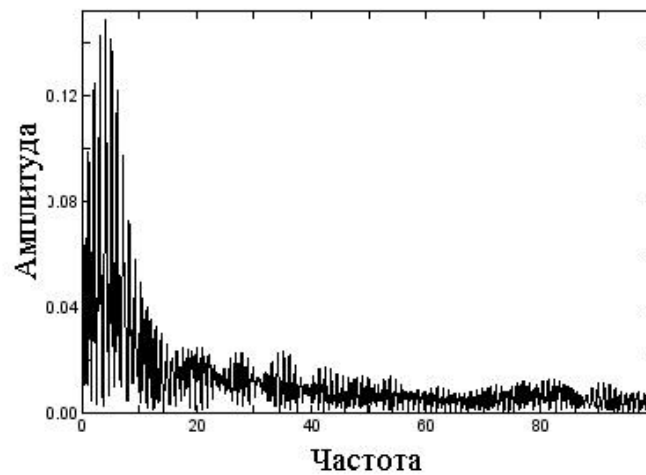


Рис. 3. Спектр мощности, полученный в результате Фурье-анализа наблюдений астероида (00533) Sara.

На рис. 4 представлена фазовая кривая блеска астероида, приведённая к периоду 11.6 часам. Большинство точек наблюдений хорошо ложатся на фазовую кривую изменения блеска, то есть кривые блеска по четырём датам наблюдений имеют одинаковый вид. По нашим оценкам площадь одной части фигуры астероида больше другой в 3.5 раза, что создает соответствующую переменность в амплитуде блеска при вращении астероида. Отсюда предположим, что геометрическая фигура астероида является несферической.

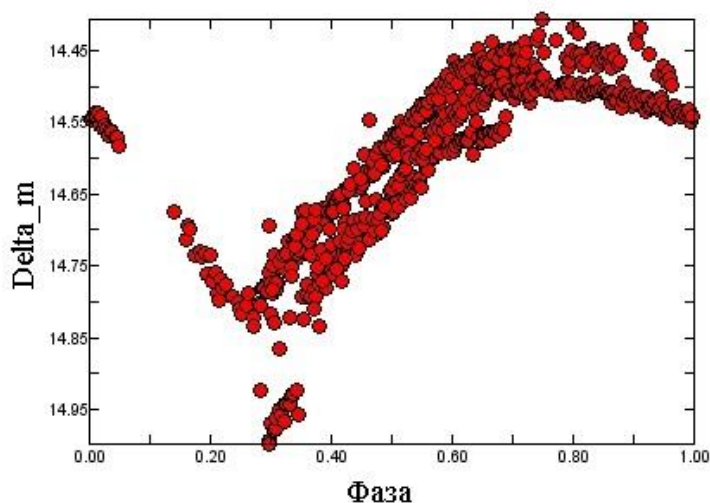


Рис.4. Фазовая кривая блеска (00533) SARA.

Заклучение

1. Проведены фотометрические наблюдения астероида (00533) SARA.
2. Оценён период вращения астероида, равный 11.6 часам.
3. Средняя амплитуда изменения блеска даёт соотношение видимых площадей астероида как 1:3.5.
4. Определённый нами период вращения астероида, равный 11.624 часам, почти совпадает с периодом, найденным ранее по оптическим наблюдениям, $P=11.654$ часам.

ЛИТЕРАТУРА

1. <http://www.minorplanetcenter.net/iau/MPEph/MPEph.html>.
2. Страйжис В. Многоцветная фотометрия звёзд. – Вильнюс: «Моклас», 1977, 312 с.
3. <https://www.univie.ac.at/tops/Period04/>
4. <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#results>

С.Х.АБДУЛЛОЕВ, Н.Х.МИНИКУЛОВ

ФОТОМЕТРИЯ И АСТЕРОИДИ (00533) SARA

Институт астрофизикаи Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Мушоҳидаҳои фотометрии астероиди (00533) SARA августи соли 2014 гузаронида шуд. Хатти каҷи дурахшонии астероид сохта шуда, аз рӯи он даври чархзаниаш аниқ қарда шуд. Муаян гардид, ки масоҳати як сатҳаш нисбат ба дигараш 3.5 маротиба фарқ мекунад яъне шакли геометрии астероид ғайрикурағӣ мебошад.

Калимаҳои калидӣ: астероид – фотометрия – хати каҷи дурахшонӣ – даври чархзанӣ.

S.KH.ABDULLOEV, N.KH.MINIKULOV

PHOTOMETRY OF ASTEROID (00533) SARA

Institute of Astrophysics of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

The photometric observations of asteroid (00533) Sara were carried out in August 2014. As a result, the light curve was obtained. The rotation period of asteroid is equal to 11.624 hours that coincides almost with the period determined previously by optical observations $P=11.654$ hours.

Key words: asteroid – photometry – light curve – period of rotation.

УДК 537.266

С.ОДИНАЕВ, Р.С.МАХМАДБЕГОВ*

**РАСЧЕТ ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА И ДИАГРАММА КОУЛА-КОУЛА
ВОДНОГО РАСТВОРА ХЛОРИДА НАТРИЯ В ЗАВИСИМОСТИ
ОТ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ**

*Академия наук Республики Таджикистан,
*Таджикский национальный университет
Поступила в редакцию 08.12.2014 г.*

Проведены расчеты частотных спектров коэффициентов диэлектрической проницаемости $\epsilon_1(\omega)$ и диэлектрических потерь $\epsilon_2(\omega)$ водного раствора NaCl, на основе которых построены диаграмма Коула-Коула при фиксированных значениях параметров состояния и частот. Полученные результаты сравнены с литературными данными, которые находятся в удовлетворительном согласии.

Ключевые слова: коэффициенты диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерь – частотный спектр – диаграмма Коула-Коула.

Диэлектрические материалы широко используют в электротехнике и энергетике, радиотехнике и технике связи, в автоматике и приборостроение, а также в вычислительной и электронной технике. Хотя диэлектрики не являются проводниками электрического тока, однако они обладают интересными механическими, тепловыми, электрическими и оптическими свойствами. В современной технике и технологии важное значение имеют такие свойства жидких и твердых диэлектриков, которые позволяют их использовать для преобразования энергии и информации. К примеру, согласно [1], пьезоэлектрики и пироэлектрики, нелинейные свойства сегнетоэлектриков и параэлектриков, постоянные электрические поля, создаваемые электретами, и высокая оптическая активность жидких кристаллов позволяют использовать эти диэлектрики для модуляции, детектирования, усиления, регистрации, запоминания, отображения и других видов преобразования электрических и оптических сигналов, несущих информацию. Поэтому в физике диэлектриков

Адрес для корреспонденции: Одинаев Саидмухамед. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Президиум АН РТ. E-mail: odbs42@mail.ru

необходимо исследовать свойства диэлектриков не только касающихся электроизоляционных характеристик, но также учитывать возможности преобразования диэлектриком электрических, оптических, механических и тепловых воздействий.

Из всех вышеназванных свойств диэлектриков наиболее важным являются электрические свойства, обусловленные перемещением электрических зарядов в веществе, приводящие к явлениям электропроводности, поляризации, диэлектрические потери, электрическое старение, а также электрический пробой, которые относятся как к обратимым, так и к необратимым процессам.

Среди этих различных свойств наиболее главным и определяющим свойством является явление поляризации, вследствие которого электрическая индукция в диэлектриках оказывается больше, чем в вакууме, а также определяет поведение диэлектриков как в постоянных, так и переменных электрических полях. В [1] приведены микроскопические представления о механизмах поляризации диэлектриков, согласно которым электрическая поляризация обусловлена индуцированием: электрическим полем (упругая, тепловая, объёмно-зарядная), неэлектрическим полем (пьезополяризация, пирополяризация, фотополяризация), а также существует без внешних воздействий (спонтанная и остаточная). Там же приводится классификация диэлектриков в зависимости от структур: газы (полярные и неполярные), жидкие диэлектрики (полярные, неполярные, жидкие кристаллы) и твердые диэлектрики (центросимметричные и нецентросимметричные).

Следует отметить, что теоретическим и экспериментальным исследованиями структуры, механизмов поляризации и классификации диэлектриков, явлениям переноса и многим другим физико-химическим свойствам диэлектриков посвящено много работ, обзоры которых приведены в [1-10]. По мере возможности, ниже приводим краткий обзор и анализ экспериментальных и теоретических работ, которые посвящены изучению динамических коэффициентов диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерь, их частотного спектра, тангенса угла потерь, а также диаграммы Коула-Коула.

В [2] изложена физическая теория растворов, прежде всего их термодинамика и теория сильных электролитов. Там же приводится исследование Онзагера по теории электропроводности водных растворов электролитов в случае слабых стационарных электрических полей. Им получены аналитические выражения для коэффициентов удельной и эквивалентной электропроводностей водных растворов электролитов слабой концентрации. В приближении слабых стационарных полей зависимость между коэффициентами удельной электропроводности и диэлектрической проницаемости отсутствует.

Дебаем и Фалькенгагеном [2,3] исследовано влияние электрического поля высокой частоты на электропроводность и коэффициент диэлектрической проницаемости растворов электролитов. Ими, как для потенциала асимметрии колеблющегося иона, так и бинарной функции распределения, получены дифференциальные уравнения, а также аналитические выражения для динамических коэффициентов удельной электропроводности

и диэлектрической проницаемости, которые соответствуют экспоненциальному закону затухания (периодических полей).

Подробное изложение теории диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерь для однородных диэлектрических веществ, находящихся под действием как статических, так и зависящих от времени внешних полей, не зависящих от пространственных координат имеется в [3]. Были выведены формулы Дебая о частотной зависимости комплексной диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}(\omega)$ для различных моделей, а также аналитические выражения для коэффициентов диэлектрической проницаемости $\epsilon_1(\omega)$ и диэлектрических потерь $\epsilon_2(\omega)$. В основе исследования теории Дебая есть гипотеза о том, что в постоянном внешнем электрическом поле установление равновесия во времени происходит по экспоненциальному закону.

Изучение явлений переноса и диэлектрических свойств растворов электролитов развивалось как экспериментальными, так и теоретическими методами [1,5-7], а также, наряду с феноменологической теорией, в физике диэлектриков широко применялись методы молекулярно-кинетической теории, временных автокорреляционных функций и метод коллективных переменных [9-13]. Краткий обзор и анализ полученных результатов этих работ приведён в [14].

Исследованиям диэлектрических свойств водных растворов электролитов, изучению частотного спектра коэффициентов диэлектрической проницаемости $\epsilon_1(\omega)$ и диэлектрических потерь в зависимости от температуры, плотности и концентрации посвящено много работ, краткий обзор и анализ которых приведен в [15]. Согласно [15], в работах [16-20] показано, что на основе изучения частотного спектра диэлектрической проницаемости можно определить образование ионных пар в растворе. Методом диэлектрической спектроскопии при концентрации 0.05 моль/л было обнаружено образование ионных пар для растворов сульфатов кобальта, бериллия, меди, никеля, алюминия и др. Вторая дебаевская область легко выделяется на диаграммах Коула-Коула, а также в частотных коэффициентах диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерь [20], которая проявляется в области частот 0.1-2 ГГц. На основе этих данных можно определить молекулярные характеристики ионных пар. Проведение такого анализа, согласно [17], позволяет рассчитать времена релаксации и дипольные моменты ионных пар. Таким образом, использование метода диэлектрической спектроскопии даёт большие возможности изучения молекулярной структуры растворов электролитов и позволяет идентифицировать структурные водно-органические растворители. Поэтому наряду с экспериментальными исследованиями диэлектрических свойств растворов электролитов представляет большой интерес теоретическое изучение частотной зависимости коэффициентов диэлектрической проницаемости $\epsilon_1(\omega)$ и диэлектрических потерь $\epsilon_2(\omega)$ при высоких частотах, а также связи между ними.

Во второй части обзора постараемся вкратце привести экспериментальные и теоретические работы, посвященные определению тангенса угла потерь, и диаграммы Коула-Коула. Впервые Кеннет С. Коул и Роберт Х. Коул в [21], на основе эмпирического уравнения для комплексного коэффициента диэлектрической проницаемости, исследовали дисперсию и поглощение переменных токовых характеристик во многих диэлектрических веществах (в воде, спиртах, классических жидкостях, во льду, органических кристаллах и твердых телах). Данное эмпирическое уравнение требует, чтобы кривая (график) диэлектрической проницаемости на комплексной плоскости была дугой окружности с концами на оси чисел и центром ниже этой оси. На основе этого уравнения методом Фуосса-Кирквуда определяется распределение времен релаксации и соответствующих характеристических частот. В этом случае тангенс угла потерь определяется как отношение коэффициента диэлектрических потерь $\varepsilon_2(\omega)$ к коэффициенту диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1(\omega)$. При фиксированных значениях частот построены графики зависимости численных значений $\varepsilon_2(\omega)$ от $\varepsilon_1(\omega)$ в системе координат, которые представляются в виде полуокружностей с центрами ниже оси абсцисс. Данные зависимости являются результатом частотной дисперсии коэффициентов $\varepsilon_2(\omega)$ и $\varepsilon_1(\omega)$, в дальнейшем получили название диаграммы Коула-Коула. В последующие годы были широко исследованы диаграммы Коула-Коула для диэлектрических веществ (газов, жидкостей, жидких кристаллов и твердых тел) в зависимости от плотности, концентраций и температур. Ограничимся рассмотрением некоторых серий этих работ.

В [22] на основе детального анализа экспериментальных данных по диэлектрическим параметрам концентрированного водного раствора NaCl показано, что диэлектрические параметры описываются релаксационной моделью Коула-Коула, а не чисто релаксационной моделью Дебая, как предполагалось ранее. Выявлены зависимости параметра распределения, релаксационной длины волны, статического и «оптического» значений диэлектрической постоянной от солености (0-250%) и температуры (10-25°C). Комплексный диэлектрический спектр водных растворов хлорида цинка, а также хлорида магния были измерены в [23] при 25°C диапазоне частот 0.4 и 57 ГГц, в интервале изменения концентраций $0.48 \leq C \leq 7.4$ моль/л и $0.42 \leq C \leq 3.6$ моль/л, соответственно. Растворы MgCl₂ показывают только область дисперсии/поглощения около 20 ГГц, которая обусловлена релаксацией водного растворителя. Для раствора ZnCl₂ при $C > 0.5$ моль/л дополнительный процесс релаксации находится на частотах ниже 3 ГГц. Для этих растворов построены диаграммы Коула-Коула, результирующая кривая которых состоит из двух отдельных релаксационных областей.

В серии работ [24-33] исследованы диэлектрические свойства растворов хлористого гуанидиния; вклад вращательного движения молекул воды в гидратных оболочках ионов и широкополосные диэлектрические спектры растворов электролитов; изменения структурного состояния, динамики молекул воды и свойств растворов при переходе к

электролитно-водному растворителю; гидрофобной гидратации в водных растворах аллил-замещенных аммониевых солей; изучены СВЧ–диэлектрические свойства водных растворов фторида аммония, найдены параметры диэлектрической релаксации воды; измерены высокочастотная диэлектрическая проницаемость, диэлектрические свойства и низкочастотная проводимость водных растворов солей аммония при температуре 288, 298 и 308 К и диапазоне частот 7-25 ГГц; исследованы комплексные диэлектрические проницаемости смешанных водно-формамидных растворов солей нитратов калия и натрия в области концентраций формамида 1-10 мол.% и 1 моля соли на кг чистой воды в интервале температур (283;313 К) на частотах 10.2-25 ГГц; была использована микроволновая спектроскопия для изучения диэлектрических свойств водных растворов электролитов в широком интервале изменения концентраций, температур (288 до 313 К или 288 до 308 К), диапазоне частот (от 7 до 25 или от 7 до 120 ГГц). Во всех этих работах изучены и построены диаграммы Коула-Коула для LiCl, NaCl, KCl, KF, MgCl₂, Ba(NO₃)₂, [C(NH₃)₃]Cl, NH₄NO₃, NH₄CNS, NH₄F, NH₄H₂PO₄, (NH₄)₃PO₄ в зависимости от концентраций, температур и частоты внешнего воздействия.

Изучению температурной зависимости СВЧ–диэлектрических свойств и структурно-кинетических изменений воды в растворах йодидов щелочных металлов и тетраалкиламмониевых соединений посвящена работа [34]. Проведено систематическое изучение комплексной диэлектрической проницаемости и релаксации водных растворов электролитов в интервале температур 288-333 К и в широком диапазоне концентраций, включая высококонцентрированные растворы. Построены диаграммы Коула-Коула водных растворов KJ при температуре 298 К, на частотах от 2.5 до 38.5 ГГц и концентрациях 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 м (моль/кг H₂O). В работе [35] изучена комплексная диэлектрическая проницаемость иодида-лития при температурах 288-323 К в широком диапазоне концентраций, в области дисперсии диэлектрической проницаемости воды для семи частот в диапазоне 7.5-25 ГГц. Построены диаграммы Коула-Коула для водного раствора LiJ.

Целью настоящей работы является исследование частотных спектров и проведение численных расчётов коэффициентов диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1(\omega)$ и диэлектрических потерь $\varepsilon_2(\omega)$, а также построение диаграммы Коула-Коула водного раствора хлорида натрия в зависимости от плотности ρ , концентрации C и температуры T . Для этого воспользуемся выражениями $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$, приведенными в [36]:

$$\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_\infty + \sum_a \frac{\sigma_a^0 \tau_a}{\varepsilon_0 [1 + (\omega \tau_a)^2]} \left[1 + \sum_b \left(\frac{1 - (\omega \tau_a)^2 \frac{\tau_{ab}}{\tau_a}}{1 + (\omega \tau_a)^2 \left(\frac{\tau_{ab}}{\tau_a}\right)^2} A_{ab}(0) \right) \right], \quad (1)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \sum_a \frac{(\omega\tau_a)\sigma_a^0\tau_a}{\varepsilon_0[1+(\omega\tau_a)^2]} \left[1 + \sum_b \left(\frac{\left(1 + \frac{\tau_{ab}}{\tau_a}\right)}{1+(\omega\tau_a)^2\left(\frac{\tau_{ab}}{\tau_a}\right)^2} A_{ab}(0) \right) \right], \quad (2)$$

где

$$A_{ab}(0) = 6\pi n_b^* q_{ab} \int \frac{\partial^2 \Phi_{ab}^*(r)}{\partial r^2} g_{ab}(r) r^2 dr, \quad (3)$$

$$\sigma_a^0 = \frac{n_a e_a^2}{\beta_a}; \quad \tau_a = \frac{m_a}{2\beta_a}; \quad \tau_b = \frac{m_b}{2\beta_b}; \quad \tau_{ab} = \frac{d_{ab}^2 \beta_a \beta_b}{kT \beta_a + \beta_b}; \quad d_{ab} = \frac{1}{2}(d_a + d_b); \quad n_b^* = \frac{\pi}{6} n_b d_{ab}^3;$$

$$q_{ab} = \frac{4 e_b \beta_a - e_a \beta_b}{\pi e_a (\beta_a + \beta_b)}; \quad \Phi_{ab}^*(r) = \frac{\Phi_{ab}(r)}{kT}; \quad \Phi_{ab}(r) - \text{потенциальная энергия взаимодействия}$$

между структурными единицами раствора электролита и $g_{ab}(r)$ – радиальная функция распределения, $m_a, m_b, e_a, e_b, n_a, n_b, d_a, d_b, \beta_a, \beta_b$ – массы, заряды, числовые плотности, диаметры и коэффициенты трения ионов сорта a и b , τ_a, τ_b и τ_{ab} – времена релаксации в импульсном и конфигурационном пространстве, $\vec{r}_{ab} = \vec{q}_b - \vec{q}_a$ – взаимное расстояние, $\vec{r} = \vec{r}_{ab} / d_{ab}$ – приведённое расстояние между ионами сорта a и b , ε_0 – электрическая постоянная, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота, ν – частота процесса, ε_∞ – значение коэффициента диэлектрической проницаемости при $\omega \rightarrow \infty$.

В формулах (1) и (2) коэффициенты $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$ состоят из кинетических и потенциальных частей, которые, согласно (3), определяются посредством потенциальной энергии взаимодействия между структурными единицами раствора $\Phi_{ab}(r)$ и радиальной функцией распределения $g_{ab}(r)$. Выбираем полуфеноменологическую осмотическую модель раствора использованную в [36], которая описывается согласно теории Мак-Миллана-Майера.

Для определения коэффициентов трения β_a, β_b и времён релаксации $\tau_a, \tau_b, \tau_{ab}$ воспользуемся аналитическими выражениями, приведёнными в [37]:

$$\beta_a^2 = \sum_a \frac{4\pi}{3} \rho_a \sum_b d_{ab} \int_0^\infty \nabla^2 \Phi_{ab}(r) g_{ab}(r) r^2 dr,$$

$$\beta_b^2 = \sum_b \frac{4\pi}{3} \rho_b \sum_a d_{ab} \int_0^\infty \nabla^2 \Phi_{ab}(r) g_{ab}(r) r^2 dr, \quad (4)$$

где $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r})$ – радиальная часть оператора Лапласа, $\rho_a = m_a n_a$, $\rho_b = m_b n_b$ – массовые плотности частиц сорта a и b .

Потенциальную энергию взаимодействия и радиальную функцию распределения $g_{ab}(r)$, согласно [37], принимаем в следующем виде:

$$\Phi_{ab} = \frac{4\varepsilon_{ab}}{\varepsilon_{ss}} (r^{-12} - r^{-6}) + R_{ab} \frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad (5)$$

где $d_{ab} = (d_{aa} + d_{bb}) / 2$, $R_{ab} = fz_a z_b e^2 e^{\kappa} / [kT \varepsilon_{ss} d_{ab} (1 + \kappa)]$, $\varepsilon_{ab} = (\varepsilon_{aa} \varepsilon_{bb})^{\frac{1}{2}}$ – глубина потенциальной ямы энергии межчастичного взаимодействия, $f = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9 \text{ Ф/м}$, ε_0 – электрическая постоянная, ε_{ss} – коэффициент диэлектрической проницаемости растворителя, e – элементарный заряд, d_{aa} , d_{bb} и z_a , z_b – диаметры и валентность ионов сорта a и b , $\kappa = \kappa_a d_{ab}$ – приведённый обратный дебаевский радиус экранировки, в котором κ определяется в виде $\kappa^2 = \sum_a n_a e_a^2 / \varepsilon_r \varepsilon_0 kT$. Следуя [11], для $g_{ab}(r)$ ионной подсистемы принимаем

$$g_{ab}(r) = y(r, \rho) e^{\frac{\Phi_{ab}(r)}{kT}}, \quad (6)$$

где $y(r, \rho)$ – бинарная функция распределения двух полостей, где ограничимся её контактным значением $y(r, \rho) \approx y(\rho)$ на расстоянии $r = 1$ ($r_{ab} = d_{ab}$), полученном Карнаханом-Старлингом в виде

$$y(\rho) = (2 - \rho) / 2(1 - \rho)^3, \quad (7)$$

где $\rho = \pi n d_{ab}^3 / 6 = \pi \rho d_{ab}^3 N_0 / 6M$ – приведённая плотность, ρ – плотность раствора, N_0 – число Авогадро, M – молярная масса.

На основе формул (1) и (2), с учётом (4) – (7) произведём численный расчёт коэффициентов трения β_a , β_b , времён релаксации τ_a , τ_b и τ_{ab} , а также коэффициентов диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1(\omega)$ и диэлектрических потерь $\varepsilon_2(\omega)$ водного раствора NaCl в зависимости от плотности, концентрации, температуры и частот. Результаты численных расчётов этих параметров приведены в таблицах и рисунках.

В табл. 1 приведены вычисленные значения коэффициентов трения β_1 и β_2 , времен релаксации $\tau_1, \tau_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, коэффициентов $\varepsilon_1(\nu)$ и $\varepsilon_2(\nu)$ для водного раствора NaCl в зависимости от $\rho, C = 1; 4; 5$ моль/л, при температуре 298 К, а в табл.2 - значения этих параметров в зависимости от плотности и температуры, при $C = 1$ моль/л.

Таблица 1

Значения $\beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}, \varepsilon_1(\nu)$ и $\varepsilon_2(\nu)$ водного раствора NaCl в зависимости от ρ, C при $T=298$ К

C, моль/л	ρ , кг/м ³	$\beta_1, 10^{-14}$	$\beta_2, 10^{-14}$	$\tau_1, 10^{-12}$	$\tau_2, 10^{-12}$	$\tau_{11}, 10^{-12}$	$\tau_{12}, 10^{-12}$	$\tau_{22}, 10^{-12}$			
		кг/с	кг/с	с	с	с	с	с			
1	1039	3.50	4.49	0.55	0.66	0.32	0.69	1.29			
4	1145	7.21	9.37	0.26	0.31	0.65	1.43	2.69			
5	1184	8.44	10.99	0.23	0.27	0.76	1.67	3.16			
C, моль/л	ρ , кг/м ³	$\nu, \Gamma\Gamma\text{ц}$									
		0.0046	0.046	0.46	4.6	46	230	460	2300	4600	46000
$\varepsilon_1(\nu)$											
1	1039	60.04	60.04	60.04	60.03	59.30	46.67	30.11	6.93	5.50	5.00
4	1145	48.93	48.93	48.93	48.93	49.00	41.24	27.26	6.67	5.43	5.00
5	1184	44.80	44.80	44.80	44.81	45.85	39.36	26.07	6.58	5.41	5.00
$\varepsilon_2(\nu)$											
1	1039	0.0006	0.006	0.06	0.62	6.14	22.91	26.65	9.89	5.09	0.51
4	1145	0.0003	0.003	0.03	0.35	3.73	18.17	22.71	8.54	4.39	0.44
5	1184	0.0001	0.001	0.01	0.14	2.49	16.99	21.42	8.06	4.14	0.42

Таблица 2

Значения $\beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}, \varepsilon_1(\nu)$ и $\varepsilon_2(\nu)$ водного раствора NaCl в зависимости от T, ρ при $C=1$ моль/л

T, К	ρ , кг/м ³	$\beta_1, 10^{-14}$	$\beta_2, 10^{-14}$	$\tau_1, 10^{-12}$	$\tau_2, 10^{-12}$	$\tau_{11}, 10^{-12}$	$\tau_{12}, 10^{-12}$	$\tau_{22}, 10^{-12}$			
		кг/с	кг/с	с	с	с	с	с			
283	1044	3.41	4.37	0.56	0.67	0.33	0.71	1.32			
293	1041	3.47	4.46	0.55	0.66	0.32	0.70	1.30			
298	1039	3.50	4.49	0.55	0.66	0.32	0.69	1.29			
303	1037	3.54	4.53	0.54	0.65	0.32	0.68	1.28			
313	1033	3.60	4.61	0.53	0.64	0.31	0.67	1.26			
323	1029	3.66	4.69	0.52	0.63	0.31	0.66	1.24			
333	1024	3.72	4.77	0.51	0.62	0.30	0.65	1.23			
343	1018	3.77	4.84	0.51	0.61	0.30	0.65	1.21			
353	1012	3.83	4.92	0.50	0.60	0.29	0.64	1.19			
T, К	ρ , кг/м ³	$\nu, \Gamma\Gamma\text{ц}$									
		0.003	0.03	0.3	3	30	150	300	1500	3000	30000
$\varepsilon_1(\nu)$											
283	1044	63.43	63.43	63.43	63.42	62.65	49.23	31.64	7.05	5.53	5.00
293	1041	61.12	61.12	61.12	61.11	60.37	47.49	30.60	6.97	5.51	5.00
298	1039	60.04	60.04	60.04	60.03	59.30	46.67	30.11	6.93	5.50	5.00
303	1037	58.98	58.98	58.98	58.97	58.26	45.87	29.63	6.90	5.49	5.00
313	1033	56.94	56.94	56.94	56.93	56.25	44.34	28.71	6.82	5.47	5.00
323	1029	54.99	54.99	54.99	54.98	54.32	42.86	27.82	6.75	5.45	5.00
333	1024	53.17	53.17	53.17	53.16	52.53	41.49	27.00	6.69	5.44	5.00
343	1018	51.48	51.48	51.48	51.47	50.86	40.22	26.24	6.63	5.42	5.00

353	1012	49.85	49.85	49.85	49.85	49.26	39.00	25.50	6.58	5.41	5.00
T, K	ρ , кг/м ³	$\varepsilon_2(\nu)$									
283	1044	0.0007	0.007	0.07	0.66	6.52	24.33	28.29	10.50	5.40	0.55
293	1041	0.0006	0.006	0.06	0.64	6.26	23.37	27.17	10.09	5.19	0.52
298	1039	0.0006	0.006	0.06	0.62	6.14	22.91	26.65	9.89	5.09	0.51
303	1037	0.0006	0.006	0.06	0.61	6.02	22.47	26.14	9.70	4.99	0.50
313	1033	0.0006	0.006	0.06	0.59	5.79	21.62	25.15	9.34	4.81	0.49
323	1029	0.0006	0.006	0.06	0.57	5.57	20.80	24.21	8.99	4.63	0.47
333	1024	0.0005	0.005	0.05	0.54	5.37	20.04	23.33	8.66	4.46	0.45
343	1018	0.0005	0.005	0.05	0.53	5.18	19.34	22.52	8.36	4.30	0.43
353	1012	0.0005	0.005	0.05	0.51	4.99	18.66	21.73	8.07	4.15	0.42

Согласно этим данным, при фиксированной температуре, с увеличением плотности и концентраций, а также при фиксированной концентрации с увеличением температуры и уменьшением плотности значения $\varepsilon_1(\nu)$ и $\varepsilon_2(\nu)$ уменьшаются. Однако в обоих случаях с увеличением частоты ν , значения $\varepsilon_1(\nu)$ монотонно падают до ε_∞ , а значения $\varepsilon_2(\nu)$ - сначала растут до максимума, а затем уменьшаются до ε_∞ (см. рис.1 а, б).

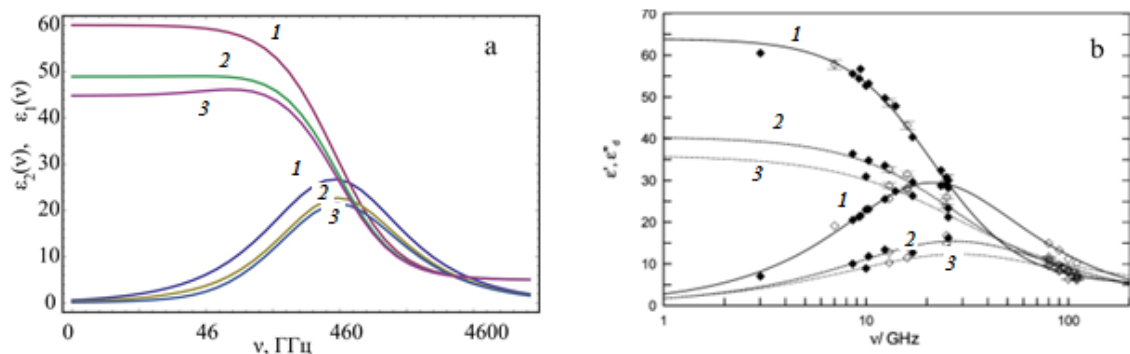


Рис. 1. Частотная зависимость $\varepsilon_1(\nu)$ и $\varepsilon_2(\nu)$ для NaCl при температуре 298 К:

- а) расчет по формулам (1) и (2) при концентраций 1 – 1 моль/л; 2 – 4 моль/л и 3 – 5 моль/л;
 б) экспериментальные результаты [33] при соответствующих концентрациях.

На основе расчетных данных таблиц для $\varepsilon_1(\nu)$ и $\varepsilon_2(\nu)$, при фиксированных значениях температуры, концентрации и частот на рис.2(с, d) построены диаграммы Коула-Коула водного раствора хлорида натрия и сравнены с экспериментальными результатами работ [33,38] на рис.2 (а, б).

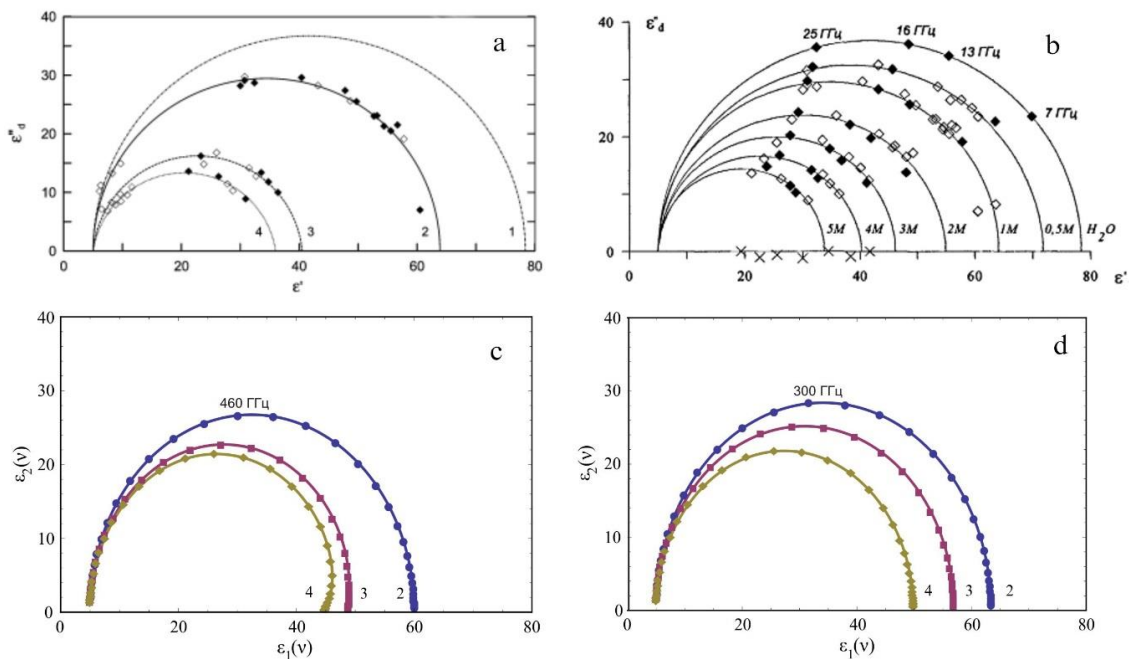


Рис. 2. Диаграмма Коула-Коула для NaCl при температуре 298 К:

а) концентрации: 1 – H₂O; 2 – 1; 3 – 4 и 4 – 5 моль/л [33], б) концентраций: H₂O; 0.5, 1, 2, 3, 4 и 5 моль/л результаты [38], в) расчет по формулам (1) и (2) при концентрации 2 – 1, 3 – 4 и 4 – 5 моль/л, д) расчет по формулам (1) и (2) при концентрации 1 моль/л, температурах 2 – 283 К, 3 – 313 К, 4 – 353 К.

Как видно из рис.1 и рис.2, ход кривых и количественные значения рассчитанных и экспериментальных данных на диаграммах находятся в удовлетворительном согласии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поплавко Ю.М. Физика диэлектриков. – Киев: Вища школа, 1980, 460 с.
2. Семенченко В.К. Физическая теория растворов. – М.-Л.: Госиздат технико-теоретический литературы, 1941, 382 с.
3. Харнед Г., Оуэн Б. Физическая химия растворов электролитов. – М.: Изд-во ИЛ, 1952, 628 с.
4. Фёрлих Г. Теория диэлектриков. – М.: Изд-во ИЛ, 1960, 251 с.
5. Сканави Г.И. Физика диэлектриков (область слабых полей). – М.-Л.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1949, 500 с.
6. Сканави Г.И. Физика диэлектриков (сильные поля) – М.:Физматгиз, 1958, 678 с.
7. Браун В. Диэлектрики. – М.: Изд-во ИЛ, 1961, 326 с.
8. Эрдеи-Груз Т. Явления переноса в водных растворах. – М.: Мир, 1976, 597 с.
9. Гайдук В.И. Теория диэлектрической дисперсии полярных сред. – М.: Изд-во МФТИ, 1980, 92 с.
10. Богородицкий Н.П., Пасынков В.В, Тареев Б.М. Электрические материалы. – Л.: Энергия, 1985, 304 с.
11. Юхновский И.Р., Головкин М.Ф. Статистическая теория классических равновесных систем. – Киев: Наукова думка, 1980, 372 с.

12. Потапов А.А., Мецик М.С. Диэлектрическая поляризация. – Иркутск: Изд. Иркут. университета, 1986, 264 с.
13. Barther J.M.G., Krienke H., Kunz W. Physical chemistry of electrolyte solution. Modern aspects. Steinkopff: Darmstadt; New York: Springer, 1998, 401p.
14. Одинаев С., Махмадбегов Р.С. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2013, №1 (150), с. 47-59.
15. Одинаев С., Махмадбегов Р.С. – ДАН РТ, 2014, т.57, №6, с.483-490
16. Pottel R.– Ber.Bun.Phys.Chem., 1965, v.5, pp. 363-378.
17. Cavell E.A., Pettrucci S– F.Chem. Soc.Far.Trans.,1978, v.74, pp.1019-1030.
18. Kaatze U., Giese K. – Journal of Molecular Liquids, 1987, v.36, pp.15-35.
19. Kaatze U., Lonneck V., Pottel R. – J. Chem. Phys., 1987, v.91, pp. 2206-2211.
20. Buchner R., Sipos P., Hefter G., May P.M. – J. Phys. Chem. A, 2002, v.106, pp. 6527-6532.
21. Kennet S.Cole, Robert H.Cole – J. Chem. Phys., 1941, v.9, April, pp.341-351.
22. Шарков У.А. –Журн. физ.химии, 1984, т.58, №7, с.1765-1710.
23. Kaatze U., Lonneck V., Pottel R. – J. Phys. Chem., 1987, v.91, pp.2206-2211.
24. Лилеев А.С., Лященко А.К., Ястремский П.С. – Журн. физ.химии, 1985, т.59, №7, с. 1655-1659.
25. Лященко А.К., Новскова Т.А., Лилеев А.С., Засецкий А.Ю., Гайдук В.И. – Журн. физ.химии, 1993, т.67, №8, с.1615-1622.
26. Лященко А.К., Засецкий А.Ю. – Журн. структурной химии, 1998, т.9, №5, с.851-863.
27. Филимонова З.А., Верстаков Е.С., Лященко А.К. – Вестник ВолГМУ, 2005, 3(15), с.34-36.
28. Lileev A., Loginova D., Lyashchenko A., Timofeeva L., Kleshchva N. – J.Molec. Liquids, 2007, v. 131-132, pp.101-104.
29. Осокина М.Д., Логинова Д.В., Лилеев А.С., Лященко А.К. –Успехи в химии и химической технологии, 2008, т. 22, №3(83), с.60-63.
30. Васильева А.В., Логинова Д.В., Лилеев А.С., Лященко А.К. – Успехи в химии и химической технологии, 2008, т. 22, №3(83), с.93-96.
31. Lileev A., Lyashchenko A. – J. Molec. Liquids, 2009, v.150, pp.4-8.
32. Филимонова З.А., Лященко А.К. – Известия ВолГМУ, 2005, 4, с.82-87.
33. Lyashchenko Andrey, Lileev Alexander – J. Chem. Phys., 2010, v.55, pp. 2008-2016.
34. Кобелев А.В. Температурная зависимость СВЧ-диэлектрических свойств и структурно-кинетических изменений воды в растворах иодидов щелочных металлов и тетраалкиламмониевых соединений: Автореф. дисс. к.т.н. – М., 2012, 22 с.
35. Lyashchenko A.K., Kovelev A.V., Karataeva I.M., Lileev A.S. – Rus. Jour. of inorganic chemistry, 2014, v.59, №7, pp.757-705.
36. Одинаев С., Махмадбегов Р.С. – ДАН РТ, 2014, т.57, №9-10, с.746-754.
37. Одинаев С., Акдолов Д.М.– Журн. физ. хим, 2013, т.87, №7 с11-54.
38. Лилеев А.С. Диэлектрическая релаксация и молекулярно-кинетическое состояние воды в растворах: Дисс. д.х.н.- М., 2004, 276 с.

С.ОДИНАЕВ, Р.С.МАХМАДБЕГОВ*

**ҲИСОБКУНИИ СПЕКТРИ БАСОМАДӢ ВА ДИАГРАММАИ
КОУЛА-КОУЛА БАРОИ МАҲЛУЛИ ОБИИ ХЛОРИДИ НАТРИЙ
ВОБАСТА АЗ ПАРАМЕТРҲОИ ҲОЛАТ**

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,

**Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Ҳисобкуниҳои адабии спектрҳои басомадии зарифҳои нуфузпазирии диэлектрикӣ $\varepsilon_1(\omega)$ ва талафшавии диэлектрикӣ $\varepsilon_2(\omega)$ -и маҳлули обии NaCl гузаронида шуда, бо ёрии онҳо барои қиматҳои муайяни параметрҳои ҳолат ва басомад диаграммаи Коула-Коула сохта шудааст. Натиҷаҳои ҳосилшуда бо қиматҳои муайяни таҷрибавии маълумбуда муқоиса карда шудаанд, ки ба яқдигар мувофиқат менамоянд.

Калимаҳои калидӣ: зарифҳои нуфузпазирии диэлектрикӣ ва талафшавии диэлектрикӣ – спектри басомадӣ – диаграммаи Коула-Коула.

S.ODINAEV, R.S.MAKHMADBEGOV*

**CALCULATION OF THE FREQUENCY SPECTRUM AND COLE-COLE'S DI-
AGRAMMS OF AQUEOUS SOLUTION OF NaCl DEPENDING
ON STATE PARAMETERS**

Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,

**Tajik National University*

Calculations of frequency spectrum of coefficients of dielectric permeability and dielectric losses of aqueous solution of NaCl on the basis of which are constructed Cole-Cole's diagrams at the fixed values of parameters of a state and frequencies are carried out. The received results are compared to literary data which are in satisfactory consent.

Key words: coefficients of dielectric permeability and dielectric losses – a frequency range – Cole-Cole's diagramm.

УДК 624.04

Д.Н.НИЗОМОВ, И.КАЛАНДАРБЕКОВ

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ
ДЕФОРМАЦИЙ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии

АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 12.01.2015 г.

Развитие и совершенствование методов расчёта является одной из важнейших задач строительной механики. Изложены результаты сравнительного анализа методов сосредоточенных деформаций и конечных элементов, полученных на примерах тестовых задач.

Ключевые слова: метод сосредоточенных деформаций – метод конечных элементов – продольная деформация – аналитическое решение.

Главным требованием к методам расчёта является уменьшение трудоёмкости расчётов при сохранении достаточной точности полученного решения. Инженеры и учёные, специалисты в области технических наук широко используют в последнее время численные методы исследований. Эти методы основаны на приближенном решении уравнений, описывающих физическую задачу. В связи с этим является актуальным вопрос о разработке численных методов, обладающих достаточной точностью и удобных для использования современных компьютеров.

В данной статье развивается метод сосредоточенных деформаций, который применяется для решения задач строительной механики и теории сейсмостойкости зданий и сооружений.

Для большей наглядности сравнительного анализа и возможности ручного счёта, рассмотрим задачу продольной деформации стержня с различными граничными условиями от действия распределенной нагрузки.

Адрес для корреспонденции: Низомов Джахонгир Низомович. 734029, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии АН РТ. E-mail: tiees@mail.ru, nizomov-jn@mail.ru

Дифференциальное уравнение продольных деформаций стержня жёсткостью EF от действия распределенной нагрузки $q(x)$ имеет вид

$$EF \frac{d^2 u}{dx^2} + q(x) = 0. \quad (1)$$

Ниже приводятся аналитические решения этой задачи при различных граничных условиях и вида нагрузки [1].

Далее рассмотрим решения задачи о продольных деформациях стержня длиной L с различными граничными условиями на основе МСД. Дискретизация осуществляется путём разбиения бруса на n конечных элементов с сосредоточением их деформаций в $n+1$ сечениях (рис.1). Длина i -го элемента равняется $h_i = a_i + b_i$, а длина отрезка, от которого деформация сосредотачивается в j -е сечение, равняется $l_{j-1,j} = b_{j-1} + a_j$, $j = 2, \dots, n$.

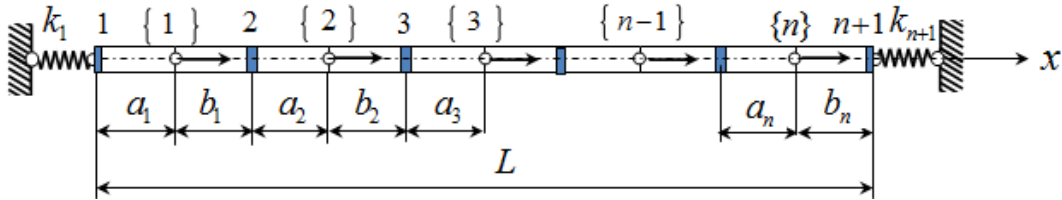


Рис.1. Расчётная модель с n элементами.

С целью приближенного решения уравнения (1) разбиваем стержень длиной L на 3 конечных элемента МСД с четырьмя сечениями, в которых сосредотачиваются деформации элементов, и тремя узлами посередине элементов, в которых содержатся фиктивные связи.

В процессе продольной деформации стержня в сечениях 1,2,3,4 возникают нормальные силы N_1, N_2, N_3, N_4 . Из рассмотрения конечного элемента {1} с фиктивной связью в соответствии с законом Гука можно определить значения абсолютных деформаций в сечениях 1 и 2

$$\Delta u_{11} = \frac{N_1 a_1}{EF_{11}} + \frac{N_1}{k_1}, \quad \Delta u_{21} = \frac{N_2 b_1}{EF_{21}} + \frac{N_2 \delta_{01}}{EF_{01}}, \quad (2)$$

где δ_0, EF_0 - ширина и жёсткость реального шва. Двойной индекс указывает на номер сечения и номер конечного элемента соответственно. Аналогично из равновесия конечных элементов {2} и {3} получаем

$$\Delta u_{22} = \frac{N_2 a_2}{EF_{22}} + \frac{N_2 \delta_{02}}{EF_{02}}, \quad \Delta u_{32} = \frac{N_3 b_2}{EF_{32}} + \frac{N_3 \delta_{02}}{EF_{02}}, \quad (3)$$

$$\Delta u_{33} = \frac{N_3 a_3}{EF_{33}} + \frac{N_3 \delta_{03}}{EF_{03}}, \quad \Delta u_{43} = \frac{N_4 b_3}{EF_{43}} + \frac{N_4}{k_4}. \quad (4)$$

Исходя из условия неразрывности деформаций

$$\Delta u_1 = \Delta u_{11}, \quad \Delta u_2 = \Delta u_{21} + \Delta u_{22}, \quad \Delta u_3 = \Delta u_{32} + \Delta u_{33}, \quad \Delta u_4 = \Delta u_{43},$$

физические уравнения (2)-(4) могут быть представлены в матричной форме

$$\lambda = BS, \quad (5)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta u_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & & & 0 \\ & b_{22} & & \\ & & b_{33} & \\ 0 & & & b_{44} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$b_{11} = \frac{a_1}{EF_{11}} + \frac{1}{k_1}, \quad b_{22} = \frac{b_1}{EF_{21}} + \frac{a_2}{EF_{22}} + \frac{\delta_{01}}{EF_{01}} + \frac{\delta_{02}}{EF_{02}},$$

$$b_{33} = \frac{b_2}{EF_{32}} + \frac{a_3}{EF_{33}} + \frac{\delta_{02}}{EF_{02}} + \frac{\delta_{03}}{EF_{03}}, \quad b_{44} = \frac{b_3}{EF_{43}} + \frac{1}{k_4},$$

λ – вектор абсолютных деформаций, B - диагональная матрица податливости, S - вектор внутренних усилий. Матричное уравнение (5) можно представить в виде

$$S = B^{-1}\lambda = C\lambda, \quad (6)$$

$$C = B^{-1} = \text{diag}(b_{11}^{-1} \ b_{22}^{-1} \ b_{33}^{-1} \ b_{44}^{-1}) = \text{diag}(c_{11} \ c_{11} \ c_{11} \ c_{11}),$$

где C называется матрицей внутренней жёсткости дискретной модели МСД. Исходя из статического равновесия каждого конечного элемента МСД, получим систему уравнений, которую можно записать в виде

$$AS + P = 0 \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

здесь A – матрица коэффициентов размера 3×4 , P – вектор внешних сил. Матрица внешней жёсткости выражается через матрицу внутренней жёсткости C , матрицу коэффициентов A и матрицу совместности деформаций A^T

$$K = ACA^T,$$

где A^T – матрица коэффициентов геометрических уравнений размера 3×4 , являющаяся транспонированной матрицей уравнений равновесия. В результате преумножения трёх матриц получим матрицу внешней жёсткости размера 3×3

$$K = \begin{bmatrix} (c_{11} + c_{22}) & -c_{22} & 0 \\ -c_{22} & (c_{22} + c_{33}) & -c_{33} \\ 0 & -c_{33} & (c_{33} + c_{44}) \end{bmatrix}.$$

Система разрешающих алгебраических уравнений представляется в виде

$$KU = P, \quad (8)$$

где $U = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ – вектор искомых перемещений. Уравнения совместности деформаций [2] можно представить в матричном виде

$$A^T U + \lambda = 0 \text{ или } \lambda = -A^T U, \quad (9)$$

что соответствует матричному уравнению равновесия (7).

1. Стержень конечной длины L с одним закреплённым концом испытывает действия равномерно распределённой нагрузки. В частном случае, для системы с параметрами

$$EF = const; \ a_i = b_i = L/6; \ \delta = 0; \ k_1 \rightarrow \infty; \ k_4 \rightarrow 0,$$

коэффициенты матрицы жёсткости будут равны:

$$c_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{EF}{a_1} = \frac{6EF}{L}, \quad c_{22} = \frac{1}{b_{22}} = \frac{EF}{b_1 + a_2} = \frac{3EF}{L},$$

$$c_{33} = \frac{1}{b_{33}} = \frac{EF}{b_2 + a_3} = \frac{3EF}{L}, \quad c_{44} = \frac{1}{b_{44}} = \frac{EFk_4}{EF + b_3k_4} = 0.$$

Тогда система уравнений (8) при $p_1 = p_2 = p_3 = qL/3$ приобретает вид

$$9\bar{u}_1 - 3\bar{u}_2 = 1/3, \quad -3\bar{u}_1 + 6\bar{u}_2 - 3\bar{u}_3 = 1/3, \quad -3\bar{u}_2 + 3\bar{u}_3 = 1/3, \quad \bar{u} = uEF / qL^2,$$

откуда получим:

$$\bar{u}_1 = 1/6 = 0.1666; \ \bar{u}_2 = 7/18 = 0.3888; \ \bar{u}_3 = 1/2 = 0.5.$$

В дальнейшем, краткости ради, чёрточки над безразмерными величинами опускаем.

Абсолютные деформации по формуле (9) приобретают вид

$$\lambda = \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta u_4 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 - u_1 \\ u_3 - u_2 \\ -u_3 \end{Bmatrix},$$

откуда с учётом того, что перемещения опоры A , $u_A = 0$ и опоры B , $u_B = u_3$, получаем

$$\Delta u_1 = u_1 - u_A = 1/6; \Delta u_2 = u_2 - u_1 = 2/9;$$

$$\Delta u_3 = u_3 - u_2 = 1/9; \Delta u_4 = u_B - u_3 = 0.$$

Полное удлинение стержня будет равняться

$$\Delta L = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 + \Delta u_4 = 1/2.$$

Нормальные силы, определяемые по формуле (6), в безразмерном виде выражаются:

$$N_1 = c_{11}\Delta u_1 = 1; N_2 = c_{22}\Delta u_2 = 2/3;$$

$$N_3 = c_{33}\Delta u_3 = 1/3; N_4 = c_{44}\Delta u_4 = 0.$$

Размерное значение нормальной силы $N = NqL$.

Точное решение уравнения (1) приводит к следующим результатам:

а) для перемещений в узлах $x = L/6; L/2; 5L/6$.

$$u_1 = 11/72 = 0.1528; u_2 = 3/8 = 0.3750; u_3 = 35/72 = 0.4861,$$

б) для нормальных сил в сечениях $x = 0; L/3; 2L/3; L$.

$$N_1 = 1; N_2 = 2/3; N_3 = 1/3; N_4 = 0.$$

Сравнение показывает, что максимальное перемещение по МСД на 2.8% отличается от точного решения, а нормальные силы и полное удлинение совпадают с аналитическим решением.

2. Для стержня с обоими закреплёнными концами и при других равных условиях, решение (8) при $k_1 \rightarrow \infty$ и $k_4 \rightarrow \infty$ приводит к следующим результатам для перемещений в узлах $\{1\}, \{2\}, \{3\}$:

$$u_1 = 1/12 = 0.08333; u_2 = 5/36 = 0.1388;$$

$$u_3 = 1/12 = 0.08333; u = u \cdot qL^2 / EF.$$

Точное решение $u(x) = q(Lx - x^2) / 2EF$ при $x = L/6; L/2; 5L/6$ приводит к следующим результатам:

$$u_1 = 0.06944; u_2 = 0.1250; u_3 = 0.06944; u = u \cdot qL^2 / EF;$$

Нормальная сила $N(x) = q(L - 2x)/2$ при $x = 0; L/3; 2L/3; L$:

$$N_1 = 1/2; N_2 = 1/6; N_3 = -1/6; N_4 = -1/2.$$

На рис. 2 результаты МСД по перемещениям, полученные при разбивке бруса на 3 элемента, сопоставляются с точными решениями и МКЭ [2] для задач с одним свободным концом (кривые 1) и с обоими закреплёнными концами (кривые 2).

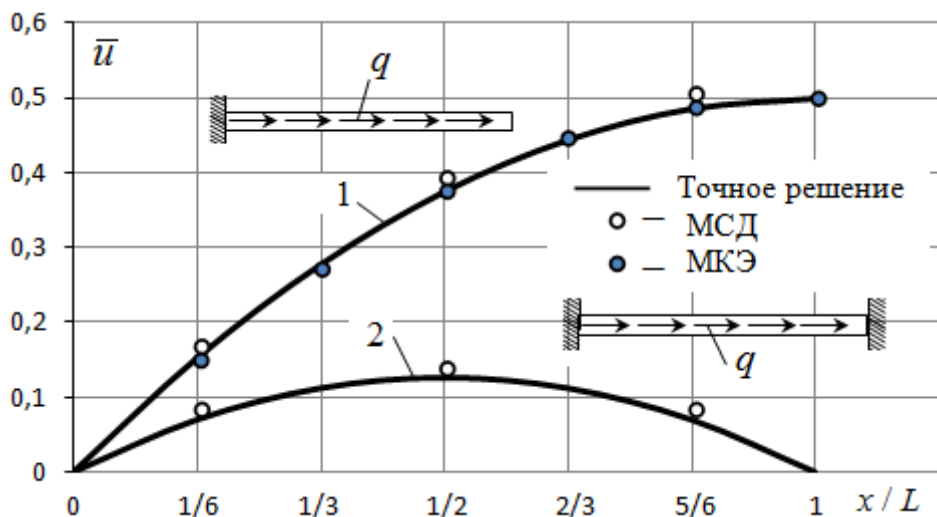


Рис. 2. Сравнение результатов.

Таким образом, алгоритм расчёта по МСД сводится к следующему:

1. Несущая система расчленяется на жёсткие элементы. Этими элементами могут быть отдельные целые панели.
2. Все деформации сосредотачиваются в швах между конечными элементами, и они рассматриваются как абсолютно жёсткие. На этом формальное сходство между МСД и МКЭ в обычном его представлении заканчивается.
3. Деформативность швов в общем случае определяется расчётом (иногда экспериментом); в результате разбивки деформируемой системы на отдельные абсолютно жёсткие элементы не нарушаются её общие свойства.
4. Разбивка несущей системы на конечные элементы выполняется по линиям реальных соединений между ними. При этом сами исходные элементы рассматриваются как абсолютно жёсткие, а их деформируемость «стекается» в расчётные швы. В этом случае характеристики последних зависят от свойств материала самих реальных швов, а также от свойств материала примыкающих к швам конструкций. Такой расчётный шов является комплексным, состоящим из реального шва заполнения и фиктивных швов, моделирующих свойства примыкающих конструкций.
5. Конечные элементы МСД могут быть получены также путём дополнительной разрезки исходных элементов; в таком случае по линиям разрезки будут располагаться только фиктивные швы.

6. Полученные конечные жёсткие элементы закрепляются в их центрах масс от возможных перемещений (двух линейных и одного углового).

7. Внешние нагрузки остаются в местах их непосредственного приложения или сводятся к центрам элементов с сохранением статической эквивалентности.

8. Задача решается методом перемещений; уравнения выражают равенство нулю усилий в фиктивных связях, накладываемых на каждый конечный жёсткий элемент.

9. Решение динамической задачи плоского напряжённого состояния МСД базируется на алгоритме статического расчёта. Для этого, с использованием принципа Даламбера, составляются системы динамических уравнений, где в правую часть входит вектор инерционных сил. Особенность динамического расчёта состоит в том, что путём сплайновой аппроксимации ускорения получаем систему уравнений, которая решается шаговым методом.

С целью сравнительного анализа отметим, что алгоритм расчёта по МКЭ в основном состоит из следующих этапов: 1) разбивка конструкций на конечные элементы (КЭ); 2) выбор функций перемещений по полю конечного элемента; 3) формирование матриц жёсткости; 4) решение системы уравнений и определение напряженно-деформированного состояния.

Согласно методу сосредоточенных деформаций, разбивка рассчитываемой конструкции линиями сосредоточенных деформаций производится формально аналогично методу конечного элемента. Однако в МСД размеры элементов между плоскостями сосредоточенных деформаций могут быть приняты значительно больше, чем в МКЭ. Это объясняется тем, что в МСД, в отличие от МКЭ, допускается переменное поле перемещений, деформаций, напряжений и модулей деформаций. В этом смысле элементы МСД можно уподобить суперэлементам или улучшенным элементам МКЭ.

В элементах МСД дополнительными точками по аналогии с комплекс-элементами МКЭ служат точки, расположенные по граням, однако при принятом плоском законе распределения продольных деформаций в каждом направлении эти дополнительные точки элементарно связаны в своих перемещениях с перемещением центров элементов МСД и не осложняют, как это бывает в МКЭ, составление матрицы жёсткости.

Вторым этапом в МКЭ выделен выбор функций перемещений по полю элемента. Чаще всего в МКЭ поле перемещений задаётся в форме линейных функций локальных координат, поэтому при одинаковых перемещениях двух соседних узлов смежных КЭ по линии соприкосновения последних получают также одинаковые перемещения, то есть поле перемещений в рассчитываемой конструкции получается непрерывным. Вместе с тем поле деформаций, постоянное в пределах каждого КЭ, получает скачки (разрывы) по линиям контакта между смежными элементами; то же относится и к напряжениям, а также и к жёсткостным характеристикам в случае физически нелинейных задач. В МСД для плосконапряжённого состояния общее поле перемещений в пределах каждого элемента

допускает скачки по линиям локальных координат. Это поле перемещений, как правило, имеет разрывы по смежным граням между соседними элементами.

Таким образом, поле перемещений в плосконапряженной конструкции, рассчитываемой по МСД, менее спокойно, чем в МКЭ; однако оно, в отличие от МКЭ, имеет чётко выраженную физическую природу, являясь совокупностью элементарных напряжённых состояний: сжатия - растяжения в направлении локальных координатных осей, изгибов и сдвигов в плоскости конструкции. Поле деформаций в пределах каждого элемента МСД предполагается переменным по линейному закону (согласно гипотезе плоских сечений), что делает возможным вести расчёт с переменными жёсткостными характеристиками материалов в пределах каждого элемента МСД. Разумеется, поля деформации и напряжений будут иметь, как правило, разрывы по граням элементов и по линиям локальных координатных осей. Таким образом, поле деформаций в элементах МСД является более сложным, чем в МКЭ, то есть оно обладает большими возможностями.

Существенная разница между МКЭ и МСД прослеживается на третьем этапе при формировании матриц жёсткости. Согласно МКЭ для плосконапряженных железобетонных конструкций, жёсткостные характеристики материалов (бетона и арматуры) в пределах каждого КЭ должны быть постоянными (средними в пределах КЭ). Это требование с одновременным стремлением к наибольшей детализации в раскрытии напряженно-деформированного состояния приводит к тому, что КЭ должны приниматься достаточно малыми, а их общее число и соответственно размерность системы алгебраических уравнений получаются большими.

Расчётная модель МСД имеет некоторые преимущества по сравнению с моделью МКЭ. Так, при дискретизации конструкции не требуется введения дополнительных конечных элементов для учёта податливости швов, так как в общем случае разбивка на элементы предполагает наличие между ними реального шва, а расчёт сплошных конструкций является частным случаем. При этом неразрывность перемещений по граням и однородность поля деформаций внутри элемента не являются необходимыми условиями точности расчётов, что позволяет применять более крупную разбивку в неоднородных конструкциях.

На основе вышеизложенного можно заключить, что основными достоинствами МСД являются: а) чёткое деление сложного напряжённого состояния на элементарные составляющие (изгиб, сжатие-растяжение, сдвиг и т.д.); б) простота учёта податливых соединений между элементами или в опорных устройствах; в) простота формирования матриц жёсткости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела. – М.: Наука, т.1, 1975, 832 с.; т.2, 1978, 616 с.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984, 428 с.
3. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991, 439 с.

Ҷ.Н.НИЗОМОВ, И.ҚАЛАНДАРБЕКОВ

ТАҲЛИЛИ МУҚОИСАВИИ МЕТОДҲОИ МУТАМАРКАЗКУНИИ ДЕ- ФОРМАТСИЯҲО ВА ЭЛЕМЕНТҲОИ ОХИРНОК

*Институти геология, сохтмони ба заминҷунбӣ тобовар ва сейсмологияи
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Инкишоф ва ташаккули усулҳои ҳисоб, яке аз масъалаҳои асосии механикаи сохтмон ба ҳисоб меравад. Бо истифода аз ҳалли мисолҳои интиҳобгардида, таҳлили муқоисавии методи пешниҳодгардида бо методи элементҳои охирноқ маврили муҳокима қарор дода шудааст. Нишон дода шудааст, ки методи пешниҳодгардидаи мутамарказкунии деформатсияҳо бо якҷанд хусусиятҳои хоси худ нисбати методи элементҳои охирноқ бартарӣ дорад.

Калимаҳои калидӣ: методи мутамарказкунии деформатсияҳо – методи элементҳои охирноқ – деформатсияи ҳаттӣ – методи аналитикӣ.

J.N.NIZOMOV, I.KALANDARBEKOV

COMPARATIVE ANALYSIS METHOD OF THE CONCENTRATED DEFOR- MATION AND FINITE ELEMENTS

*Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology,
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

Development and improvement of methods of calculation is one of the major problems of structural mechanics. The article presents the results of a comparative analysis of methods concentrated deformation and finite element obtained by examples of test problems.

Key words: concentrated deformation method – finite element method – longitudinal deformation – analytical solution.

УДК 541.49:546.72

У.Р.РАДЖАБОВ, С.Г.ЁРМАМАДОВА*, А.У.КОЗИХОНОВ, Р.Н.РАХИМОВА

**ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ РЕАКЦИЙ ОБРАЗОВАНИЯ
КООРДИНАЦИОННЫХ СОЕДИНЕНИЙ ЖЕЛЕЗА (III) И ЖЕЛЕЗА (II)
С ДИБАЗОЛОМ ПРИ ИОННОЙ СИЛЕ 0.25 МОЛЬ/Л**

Таджикский государственный медицинский университет им. Абуали ибн Сино,

**Таджикский национальный университет*

Поступила в редакцию 10.11.2014 г.

На основании данных оксрeдметрии было показано, что в системе железо (III) и железо (II), дибазол – H₂O при 288.16-308.16 К и ионной силе 0.25 моль/л в водных растворах образуются следующие комплексы железа: Fe HDb³⁺, FeHDbOH²⁺, Fe₂(HDb)₂ (OH)₄²⁺, Fe HDb²⁺. Для установленных комплексов рассчитаны константы устойчивости и термодинамические функции.

Ключевые слова: железо (III) и железо (II) – окислительный потенциал – окислительная функция – энтальпия – свободная энергия – энтропия.

Сведения о составе координационных соединений Fe (III) и Fe (II) в водных растворах азолов немногочисленны. Они относятся к ограниченному интервалу концентрационных условий. Особенно мало данных о полиядерных и гетеровалентных комплексах железа, хотя именно они входят в состав активных центров железосодержащих ферментов, обеспечивая в электронно-транспортных цепях осуществление многоэлектронных переносов при биологическом окислении, которые с точки зрения термодинамики более выгодны, чем одноэлектронные. Поэтому исследование термодинамических характеристик реакций, сопровождающихся образованием полиядерных и гетеровалентных координационных соединений Fe (III) и Fe (II) в водных растворах азолов именно дибазола, актуально [1,2].

Адрес для корреспонденции: Раджабов Умарали Раджабович. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 139, Таджикский государственный медицинский университет.
E-mail:umarali55@mail.ru

Экспериментальная часть

Работа выполнена методом окислительного потенциала [3,4] при 288.16 -308.16 К и ионной силе 0.25 моль/л. Данный метод позволил нам при совместном анализе экспериментально полученных зависимостей φ от активности ионов водорода, концентрации дибазола и концентрации ионов железа установить число и тип соединений, образующихся в системе, содержащей одновременно окисленную и восстановленную формы иона комплексообразователя. Состав и константа устойчивости координационных соединений Fe (III) и Fe (II) с дибазолом уточнены также с помощью окислительной функции. По рассчитанным значениям констант образования комплексов методом температурного коэффициента при ионной силе 0.25 моль/л были определены значения изменения стандартной энтальпии (ΔH^0) [5-7]. По известным значениям изменений энтальпии и свободной энергии были рассчитаны изменения энтропии. Вычисленные значения термодинамических функций реакций образования координационных соединений приведены в таблице.

Проведение экспериментальных измерений предусматривало выполнение следующих предварительных работ: подготовку и проверку хлорсеребряного электрода; калибровку стеклянных электродов. Известно, что перхлорат ионы не обладают комплексообразующей способностью, поэтому исходными солями Fe (II) и Fe (III) были выбраны перхлораты. Соли перхлоратов двух и трёхвалентного железа были получены по методике, описанной в [4]. Концентрация ионов железа (III) определялась титрованием 0.1 н раствором аскорбиновой кислоты в присутствии индикатора вариаминового голубого и 0.1 н раствора двухзамещённой соли этилендиаминтетрауксусной кислоты (ЭДТА). В качестве индикатора использовалась салициловая кислота. Концентрация ионов двухвалентного железа определялась бихроматометрическим методом в присутствии индикатора дифениламин сульфоната натрия. Дибазол марки «х.ч.» применялся без дополнительной очистки. Необходимые количества раствора дибазола в воде или в 5%-ном спиртовом растворе готовились растворением навески рассчитанного количества дибазола. Эквимолекулярная смесь растворов перхлоратов железа в двух степенях окисления готовилась в 1 М растворе хлорной кислоты, а их общая концентрация определялась восстановлением Fe (III) до Fe (II) с помощью редуктора Джонсона. Соль NaClO_4 очищалась перекристаллизацией насыщенного водного раствора. Хлорная кислота HClO_4 марки «х.ч.» использовалась без предварительной очистки. Концентрация гидроксида натрия определялась методом прямого титрования 0.1 М раствором соляной кислоты в присутствии индикатора метилового оранжевого. Титр раствора NaOH устанавливался янтарной кислотой. Химическая посуда, используемая при выполнении экспериментальных работ, промывалась хромовой смесью, проточной водой, затем ополаскивалась дистиллированной водой. Хромовая и кислотная смеси были приготовлены согласно соответствующим методикам [3-8].

Следует отметить, что исследование комплексообразования системы железо (III) и железо (II) с различными органическими и неорганическими лигандами в растворах в экспериментальном и расчётном отношении связано с некоторыми трудностями. Поэто-

му при изучении комплексообразования этой системы и расчёте ионных равновесий нами были учтены следующие обстоятельства:

1 - всегда есть риск окисления ионов железа в степени окисления два под действием кислорода воздуха;

2 - ионы железа со степенью окисления три лабильны к образованию координационных соединений даже в кислых средах, а железа (II) при этих условиях остаются неустойчивыми и образуют координационные соединения в средах ближе к нейтральным;

3 - при увеличении рН среды возрастает роль гидролиза и ионы железа (III) образуют гидрокосомплексы состава $\text{Fe}(\text{OH})^{+}_2$ и $\text{Fe}(\text{OH})^{+}_3$, где не исключается и процесс их полимеризации.

Поэтому при постановке эксперимента и проведении непосредственных измерений, особенно при составлении химической модели и расчёте экспериментальных данных, необходимо принимать во внимание приведённые выше обстоятельства. По-видимому, это является основной причиной некоторого расхождения между теоретически рассчитанной и экспериментально полученной окислительной функциями.

Результаты и их обсуждение

Исследования процессов комплексообразования ионов железа (III) и железа (II) в водных растворах дибазола в интервале температур 288.16 - 308.16 К позволили получить достоверные сведения о составе и устойчивости координационных соединений.

Процесс вычисления констант образования состоит из нескольких последовательных операций, включающих нахождение приближённых значений констант образования, оценку приближённых значений равновесных концентраций полиядерных координационных соединений, вычисления их молярных долей и расчёт точных значений констант образования координационных соединений. Значения величин равновесных концентраций ионов железа и биядерных комплексов необходимы только в тех областях рН, где они доминируют и находятся в пределе от 0 до $C^0 = C^r$. Вычисления начинают с молярных долей или степеней накопления комплексных частиц, которые дают сведения не только об областях доминирования, но и позволяют определить равновесные концентрации всех существующих частиц в растворах. Если все подготовительные операции предварительно проведены достаточно точно, методом итерации (последовательного приближения), после 8 - 10 итераций можно определить истинные значения констант образования комплексов. Все расчёты нами проводились на компьютере по программе Excel [5,6].

Найденные численные значения констант образования комплексов позволили графически представить влияние рН, концентрации комплексов и температуры на содержание соединений в изученных растворах [4,6].

Концентрационные константы устойчивости комплексных частиц позволяют получить значения свободной энергии их реакции образования или когда в качестве стандартного выбрано состояние ионной силы солевого раствора. Константа устойчивости, свободная энергия, энтальпия и энтропия образования комплекса составляют термодина-

мическую характеристику данного процесса. Знание этих величин позволяет подойти к оценке факторов, определяющих устойчивость комплексов.

При образовании двухядерных и гетеровалентных координационных соединений могут играть значительную роль размеры лигандов. Поскольку гетероциклическое соединение, выступающее в качестве лиганда, значительно крупнее молекул воды, то процесс комплексообразования может вызывать отщепление более чем одной молекулы воды. Это может приводить к положительному изменению величины изменения энтропии. Таким образом, отрицательный знак изменения энтальпии и большой положительный знак изменения энтропии вносят немаловажный вклад в отрицательное значение свободной энергии. Большое отрицательное изменение свободной энергии Гиббса указывает на самопроизвольность протекания реакции образования координационных соединений. Поэтому вероятность образования полиядерного и гетеровалентного комплексов по сравнению с моноядерными соединениями возрастает.

С повышением температуры наблюдается возрастание отрицательных значений ΔG^0 для координационных соединений Fe (III) и Fe (II) с дибазолом, что указывает на более вероятное образование координационных соединений железа (II) и железа (III). Таким образом, значения ΔH , ΔS^0 и ΔG^0 показывают, что образование дибазолатных координационных соединений железа (II) и железа (III) относится к самопроизвольным процессам (таблица).

Отрицательные значения ΔG^0 с повышением температуры увеличиваются в случае образования комплексных соединений железа (III) и железа (II). Это говорит о том, что с ростом температуры вероятность самопроизвольного образования координационных соединений железа (II) и железа (III) с дибазолом увеличивается. Положительное значение ΔS^0 при образовании координационных соединений как железа (II), так и железа (III) связано с тем, что в ходе реакции комплексообразования вытесняется большое количество молекул воды.

Результаты расчёта термодинамических функций показали, что температура не оказывает заметного влияния на изменение величины ΔH^0 для моно- и диазольных комплексов железа (III) и железа (II), а также гетеровалентного комплекса, что можно связать с близостью значений теплоёмкостей компонентов реакций комплексообразования. Кроме того, это связано с тем, что дибазол является нейтральным лигандом и при образовании координационных соединений заряд комплексов не меняется.

На основании выше изложенного, можно сказать, что в реализациях реакции образования координационных соединений положительные изменения энтропии связаны как со смещением молекулы воды из внутренней координационной сферы, так и освобождением нескольких молекул воды из гидратных оболочек металлов комплексообразователей и лиганда.

Таблица

Термодинамические функции реакций образования координационных соединений

Лиганд	Комплекс	Т, К			
		ТФ*	288.16	298.16	308.16
ДИБАЗОЛ	Fe HDb ³⁺	$\Delta H^0_{\text{кДж/моль}}$	44.67	44.67	44.67
		$\Delta S^0_{\text{Дж/моль}\cdot\text{К}}$	118.30	118.80	117.80
		$-\Delta G^0_{\text{кДж/моль}}$	18.20	20.54	22.41
	FeOH ²⁺	$-\Delta H^0_{\text{кДж/моль}}$	91.50	38.29	47.86
		$-\Delta S^0_{\text{Дж/моль}\cdot\text{К}}$	83.60	55.36	84.56
		$-\Delta G^0_{\text{кДж/моль}}$	-23.38	-21.79	-21.82
	Fe HDb OH ²⁺	$\Delta H^0_{\text{кДж/моль}}$	134.00	47.86	89.40
		$\Delta S^0_{\text{Дж/моль}\cdot\text{К}}$	174.90	85.70	182.00
$-\Delta G^0_{\text{кДж/моль}}$		67.57	7.74	82.56	
Fe HDb (OH) ₂ ⁺	$-\Delta H^0_{\text{кДж/моль}}$	191.00	119.70	114.90	
	$-\Delta S^0_{\text{Дж/моль}\cdot\text{К}}$	64.38	153.70	125.30	
	$-\Delta G^0_{\text{кДж/моль}}$	20.46	14.26	14.68	
Fe ₂ (HDb) ₂ (OH) ₄ ²⁺	$\Delta H^0_{\text{кДж/моль}}$	47.86	47.86	59.50	
	$\Delta S^0_{\text{Дж/моль}\cdot\text{К}}$	159.10	160.20	196.80	
	$-\Delta G^0_{\text{кДж/моль}}$	26.74	29.67	30.78	
Fe HDb ²⁺	$\Delta H^0_{\text{кДж/моль}}$	32.18	32.18	32.18	
	$\Delta S^0_{\text{Дж/моль}\cdot\text{К}}$	113.50	110.60	110.60	
	$-\Delta G^0_{\text{кДж/моль}}$	20.51	20.77	21.88	
Fe (HDb) ₂ ²⁺	$\Delta H^0_{\text{кДж/моль}}$	52.20	52.20	52.20	
	$\Delta S^0_{\text{Дж/моль}\cdot\text{К}}$	178.00	177.90	177.90	
	$-\Delta G^0_{\text{кДж/моль}}$	-46.04	-47.81	-49.59	
Fe ^{III} Fe ^{II} (HDb) ₂ (OH)	$\Delta H^0_{\text{кДж/моль}}$	69.62	69.62	69.62	
	$\Delta S^0_{\text{Дж/моль}\cdot\text{К}}$	126.00	122.9	122.9	
	$-\Delta G^0_{\text{кДж/моль}}$	29.61	29.67	30.9	

ТФ* - термодинамическая функция

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджабов У.Р., Рахимова М.М., Юсупов З.Н. Имидазольные и бензимидазольные комплексы железа. – Естественные и технические науки, 2011, №3, с. 63-70.
2. Раджабов У.Р., Рахимова Р.Н., Ёрмамадова С.Г., Шарипов И.Х. Биологические свойства азольных координационных соединений Fe Cu и Zn – Вест. ТНУ, Душанбе: Сино, 2013, № 1/1 (102), с. 135 - 139.
3. Оксредметрия / Б.П. Никольский [и др.] :под ред. Б.П. Никольского, В.В Пальчевского. – Л. : Химия, 1975, 304 с.
4. Якубов Х.М. Применение оксредметрии к изучению комплексообразования. – Душанбе: 1966, 121 с.
5. Раджабов У.Р., Ёрмамадова С.Г. Определение константы гидролиза Cu(II) в водных растворах при 308.16 К, 318.16 К и различных ионных силах. – Вестн. ТНУ. — Душанбе: Сино, 2014, № 1/2 (130), с. 141-147.
6. Раджабов У.Р., Рахимова Р.Н., Ёрмамадова С.Г. Комплексообразования железа с бензимидазолом и дибазолом. – Вест. ТНУ, Душанбе: Сино, 2013, № 1/2(106), с.172 - 175.
7. Раджабов У.Р., Ёрмамадова С.Г., Шарипов И.Х. Азольные комплексы железа (II,III). – Вест. ТНУ, Душанбе: Сино, 2014, № 1/1 (126), с. 127 - 130.
8. Шарло Г. Методы аналитической химии. Количественный анализ неорганических соединений /Пер. с франц. Ю.Ю.Лурье. – М.: Химия, 1965, 930 с.

У.Р.РАҶАБОВ, С.Г.ЁРМАМАДОВА*, А.У.ҚОЗИХОНОВ, Р.Н.РАҶИМОВА
ТАВСИФИ ТЕРМОДИНАМИКИИ РЕАКСИЯИ ҲОСИЛШАВИИ
ПАЙВАСТАҲОИ КООРДИНАТСИОНИИ ОҲАНИ (II) ВА ОҲАНИ (III)
БО ДИБАЗОЛ ДАР ҚУВВАИ ИОНИИ 0.25 МОЛЬ/Л

Донишгоҳи давлатии тиббии Тоҷикистон ба номи Абӯалӣ ибни Сино,

**Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар асоси таҳқиқоти оксредметрӣ таъин гардид, ки дар системаи оҳани (II) ва оҳани (III) бо дибазол дар қувваи ионии 0.25 моль/л пайваستاҳои комплекси зерин ҳосил мешаванд: $Fe\ HDb^{3+}$, $Fe\ HDb\ OH^{2+}$, $Fe\ HDb(OH)_2^{+}$, $Fe_2(HDb)_2(OH)_4^{2+}$, $Fe\ HDb^{2+}$. Муайян гардид, ки ҳарорат танҳо ба собитаи устуворӣ таъсир намуда, таркиби зарраҳо тағйир намеёбад.

Калимаҳои калидӣ: оҳан – дибазол – потенциали оксидшавӣ - функцияи оксидшавӣ – энталпия - энергияи озод – энтропия.

U.R.RAJABOV, S.G.ERMAMADOVA*, A.U.KOZICHONOV, R.N.RACHIMOVA*
THERMODYNAMIC FUNCTIONS OF REACTION FORMATION OF
COORDINATION COMPOUNDS OF IRON (III) AND IRON (II) WITH DIBA-
ZOLOM AND 0.25 MOL/L

AvicennaTajik State Medical University,

**Tajik National University*

The method of oxidative capacity and oxidative function were calculated stability constants and thermodynamic functions of reactions identified the

formation of complex compounds of iron with Dibazole: $Fe\ HDb^{3+}$, $Fe\ HDb\ OH^{2+}$, $Fe\ HDb(OH)_2^{+}$, $Fe_2(HDb)_2(OH)_4^{2+}$, $Fe\ HDb^{2+}$.

Key words: iron – dibazole – transition metals – coordination compounds – oxidative potential and oxidative function – enthalpy – free energy – ent.

УДК 541.4:(4546.74.2+548.736)

Х.Г.МУДИНОВ, С.М.САФАРМАМАНОВ, А.Д.ХУСАЙНОВ

**КОМПЛЕКСООБРАЗОВАНИЕ СЕРЕБРА (I) С 1,2,4-ТРИАЗОЛОМ
ПРИ 288-318 К**

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 19.03.2014 г.

Потенциометрическим методом исследован процесс комплексообразования серебра (I) с 1,2,4-триазолом в интервале температур 288-318 К. Установлено, что серебро (I) с 1,2,4-триазолом образует три комплексные частицы. Ступенчатые константы образования комплексов уменьшаются с увеличением температуры.

Ключевые слова: серебро - 1,2,4-триазол - комплексообразование - константа устойчивости.

Триазол и его производные находят практическое применение в различных отраслях промышленности, медицине, сельском хозяйстве. Высокая биологическая активность производных 1,2,4-триазола позволила широко использовать их в качестве системных фунгицидов широкого спектра действия с малым расходом препарата, а также в качестве регуляторов роста растений с высокой избирательностью действия [1]. В неорганической химии 1,2,4-триазолы используются в качестве лигандов для изучения комплексообразования различных металлов. Известны координационные соединения Co, Cu, Ni и Zn с 1,2,4-триазолом [2]. В работе [3] методом потенциометрического титрования изучено комплексообразование Mn^{2+} с 1,2,4-триазолом и его производными. На основании данных по устойчивости комплексов, образующихся в процессе комплексообразования, сделан вывод о влиянии положения заместителя в лиганде на его донорные свойства по отношению к иону Mn^{2+} . В работе [4] представлены данные по исследованию процесса комплексообразования рения(V) с 1,2,4-триазолом. Показано, что координация 1,2,4-триазола к рению(V) осуществляется монодентатно посредством атома азота находящегося в поло-

Адрес для корреспонденции: Мудинов Хайриддин Гуломович, Сафармамадов Сафармамад Муборакишович, Хусайнов Авазхон Додоевич. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail : xairiddin-8887@mail.ru; sash65@mail.ru.

жении 4 триазольного кольца. В литературе отсутствуют сведения о комплексообразовании серебра (I) с 1,2,4-триазолом.

Целью настоящей работы явилось исследование комплексообразования серебра (I) с 1,2,4-триазолом потенциометрическим методом при различных температурах.

Экспериментальная часть

Нитрат серебра получали по методике, описанной в [5]. 1,2,4-триазол синтезировали согласно [6]. В качестве индикаторного электрода использовали пластинку из серебра, электродом сравнения служил – хлорсеребряный. Процесс комплексообразования исследовали в водном растворе с ионной силой раствора 0.1 моль/л, создаваемой NaNO_3 . Потенциал системы при потенциометрическом титровании измеряли с помощью рН-метра 150МИ. Равновесное значение потенциала на индикаторном электроде устанавливалось в течение 5-10 мин. Температуру в ячейке поддерживали постоянной при помощи водяного термостата. Равновесную концентрацию иона серебра определяли по уравнению:

$$\lg [Ag^+] = C_{Ag^+} - \frac{\Delta E}{59.16},$$

где $[Ag^+]$ – равновесная концентрация ионов серебра в каждой точке титрования; $\Delta E = E_1 - E_2$; E_1 – начальный потенциал системы; E_2 – потенциал системы в каждой точке титрования; C_{Ag^+} – аналитическая концентрация серебра. Равновесную концентрацию 1,2,4-триазола определяли по уравнению:

$$[L] = C_L - n(C_{Ag^+} - [Ag]),$$

где C_L – аналитическая концентрация лиганда; n – координационное число серебра; C_{Ag^+} – аналитическая концентрация серебра; $[Ag^+]$ – равновесная концентрация ионов серебра в каждой точке титрования.

Результаты и их обсуждение

В современной научной литературе предлагается много методов для установления количества частиц, образующихся в растворе, их состава и устойчивости. Для определения количества частиц, образующихся при действии серебра (I) с 1,2,4-триазолом, нами был использован метод, предложенный Яцимирским [7]. По данным таблицы 1 и результатам потенциометрического титрования при других температурах строили зависимость ΔE от $-\lg[L]$ (рис.1). По углу наклона зависимости ΔE от $-\lg[L]$ при избытке 1,2,4-триазола находили максимальное число лиганда, присоединённого к иону серебра (I).

Таблица 1

Данные по определению равновесной концентрации ионов серебра (I), 1,2,4-триазола и функции Ледена при 298 К; $C_L=2 \cdot 10^{-2}$ моль/л; $C_{Ag^+}=1 \cdot 10^{-4}$ моль/л

$\Delta E, \text{мВ}$	$C_L \cdot 10^{-3} \text{ моль/л}$	$[Ag] \cdot 10^{-4} \text{ моль/л}$	$[L] \cdot 10^{-3} \text{ моль/л}$
20.00	0.39216	0.45912796	0.229895250
30.00	0.76923	0.31110043	0.562560898
38.00	1.13208	0.22786315	0.900434418
42.00	1.48148	0.19501178	1.239985016
45.00	1.81818	0.17352055	1.570237983
47.00	2.14286	0.16052559	1.891014821
57.00	2.75862	0.10877051	2.491251842
64.00	3.33333	0.08283006	3.058182351
69.00	3.87097	0.06818226	3.591422420
73.00	4.37500	0.05835232	4.092505697
75.00	4.84848	0.05398232	4.564679544
86.00	5.71429	0.03518156	5.424840182
94.00	6.48649	0.02576847	6.194217026
99.00	7.17949	0.02121153	6.885850639
103.00	7.80488	0.01815343	7.510324079
105.00	8.37209	0.01679392	8.077131200
111.00	9.13043	0.01329634	8.834423686
116.00	9.79592	0.01094500	9.499201867
119.00	10.38462	0.00973881	10.087537027
121.00	10.90909	0.00900947	10.611793749
128.00	11.52542	0.00686082	11.227481974
133.00	12.06349	0.00564754	11.765186326
137.00	12.53731	0.00483333	12.238763431
139.00	12.95775	0.00447136	12.659087886
146.00	13.42105	0.00340499	13.122074130
150.00	13.82716	0.00291409	13.528034721
152.00	14.18605	0.00269585	13.886855268

Угол наклона зависимости ΔE от $-\lg[L]$ при избытке лиганда в зависимости от температуры изменяется в среднем до $0.18-0.20 \text{ мВ} \cdot \text{л} \cdot \text{моль}^{-1}$, что свидетельствует о присоединении трёх молекул 1,2,4-триазола к иону серебра (I). Форма кривых, представленных на рисунке 1, свидетельствует о ступенчатом характере комплексообразования между ионом серебра (I) и 1,2,4-триазолом.

Для определения общих констант нестойкости 1,2,4-триазольных комплексов Ag (I) использовали уравнение, предложенное Яцимирским [6]:

$$\lg \beta = \frac{-\Delta E}{n \cdot 0.059} + n \lg [L],$$

где $\lg \beta$ – общая константа нестойкости; n – координационное число; $\lg [L]$ – равновесная концентрация 1,2,4-триазола; $\Delta E = E_1 - E_2$; E_1 – начальный потенциал системы; E_2 – потенциал системы в каждой точке титрования.

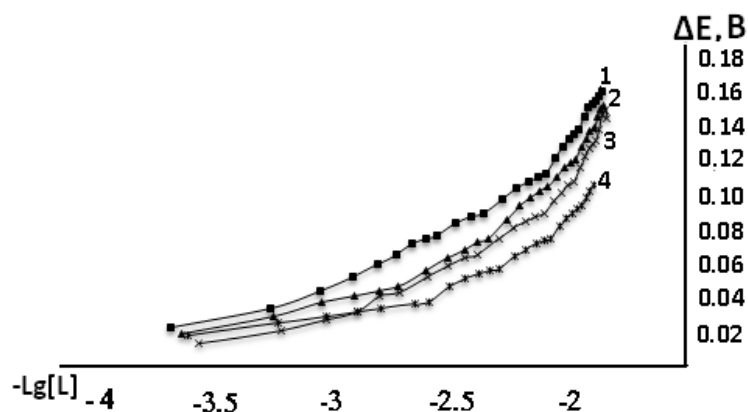


Рис.1. Зависимость ΔE от $-\lg[L]$ для 1,2,4-триазольных комплексов серебра (I) при ионной силе раствора равной 0.1 моль/л: 1 – 288; 2 – 298; 3 – 308; 4 – 318 К.

В табл. 2 представлены величины общих констант устойчивости 1,2,4-триазольных комплексов Ag (I).

Таблица 2

Значение общих констант устойчивости 1,2,4-триазольных комплексов Ag (I) при 288-318 К и ионной силе 0.1 моль/л

T, K	K_1	K_2	K_3
288	$1.12 \cdot 10^4 \pm 0.02$	$2.29 \cdot 10^6 \pm 0.017$	$4.67 \cdot 10^8 \pm 0.04$
298	$7.08 \cdot 10^3 \pm 0.023$	$1.38 \cdot 10^6 \pm 0.021$	$2.73 \cdot 10^8 \pm 0.05$
308	$5.62 \cdot 10^3 \pm 0.02$	$1.02 \cdot 10^6 \pm 0.02$	$1.89 \cdot 10^8 \pm 0.049$
318	$2.82 \cdot 10^3 \pm 0.02$	$5.62 \cdot 10^5 \pm 0.031$	$1.54 \cdot 10^7 \pm 0.064$

С увеличением температуры наблюдается уменьшение общих констант устойчивости, что свидетельствует об отрицательном действии температуры на величины констант образования комплексов.

Из общих констант устойчивости нами были рассчитаны ступенчатые константы образования всех трёх комплексных частиц, образующихся при действии 1,2,4-триазола с Ag (I) при 288-318 К и ионной силе 0.1 моль/л (табл.3).

Таблица 3

Значение ступенчатых констант устойчивости 1,2,4-триазольных комплексов Ag (I) при 288-318 К и ионной силе 0.1 моль/л

T, K	K_1	K_2	K_3
288	$1.12 \cdot 10^4$	$2.04 \cdot 10^2$	$2.04 \cdot 10^2$
298	$7.08 \cdot 10^3$	$1.94 \cdot 10^2$	$1.97 \cdot 10^2$
308	$5.62 \cdot 10^3$	$1.81 \cdot 10^2$	$1.85 \cdot 10^2$
318	$2.82 \cdot 10^3$	$1.99 \cdot 10^2$	$2.7 \cdot 10^1$

При возрастании температуры ступенчатые константы 1,2,4-триазольных комплексов Ag (I) претерпевают незначительное изменение. В целом с возрастанием температуры устойчивость комплексов уменьшается.

Одним из наиболее распространённых методов оценки термодинамических функций процесса образования комплексных частиц считается метод температурного коэффициента. С использованием этого метода нами были рассчитаны термодинамические функции процесса образования для моно-и двухзамещённого комплекса серебра (I) с 1,2,4-триазолом (рис.2).

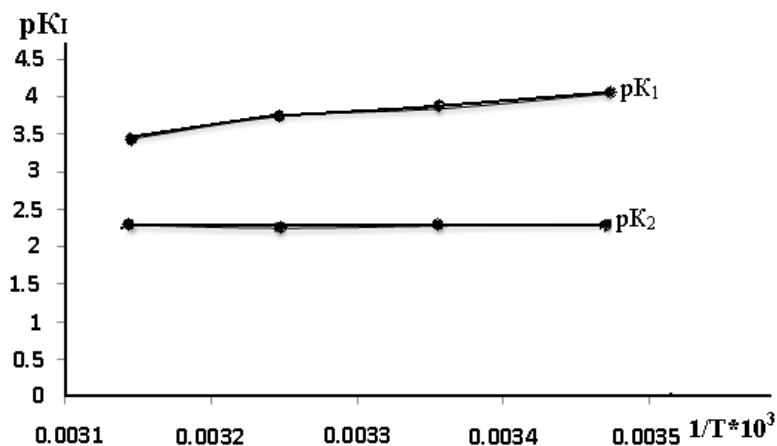


Рис. 2. Зависимость pK_i от $1/T$ для моно- и двухзамещённого комплекса серебра (I) с 1,2,4-триазолом при ионной силе раствора 0.1 моль/л.

Как видно из рис.2, зависимость pK_i от $1/T$ для моно- и двухзамещённого комплекса в интервале 288-318 К линейна. Величины ΔH и ΔS , определённые методом температурного коэффициента, а также величины ΔG процесса образования комплексов серебра (I) с 1,2,4-триазолом, рассчитанные по уравнению $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$, представлены в табл 4.

Таблица 4

Значения термодинамических функций процесса образования 1,2,4-триазольных комплексов серебра (I)

Состав соединения	$\Delta H, \text{кДж/моль}$	$\Delta G, \text{кДж/моль}$	$\Delta S, \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}$
$[\text{AgL}(\text{H}_2\text{O})_3]^+$	-33.13	-22.04	-37.21
$[\text{AgL}_2(\text{H}_2\text{O})_2]^+$	-11.19	-13.02	39.95

Как моно- так и двухзамещённые комплексы образуются с выделением тепла. Величина ΔG для обоих комплексов отрицательна и изменяется в зависимости от количестве присоединенных лигандов в положительную сторону.

Нами также были построены диаграммы распределения образующихся комплексов (рис. 3) при всех изученных температурах.

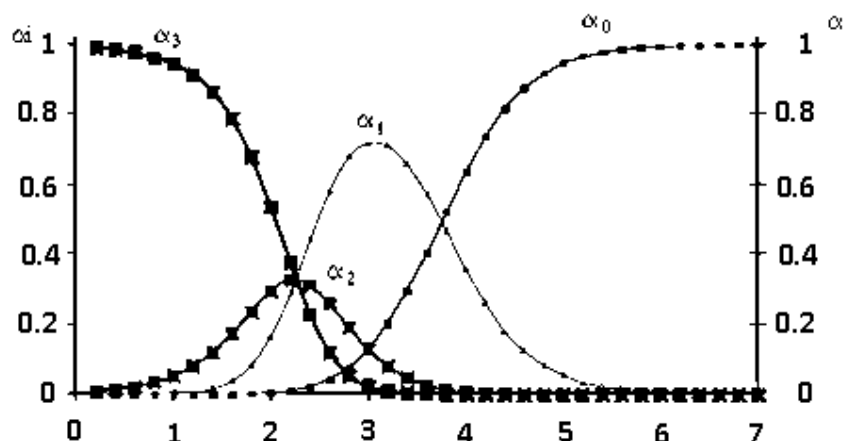


Рис.3. Кривые распределения 1,2,4-триазольных комплексов Ag (I) при 298 К, где α_0 – AgNO₃; α_1 – [Ag(H₂O)₃L]⁺; α_2 – [Ag(H₂O)₂L₂]⁺; α_3 – [Ag(H₂O)L₃]⁺.

Полученные данные о распределении комплексных соединений в зависимости от концентрации органического лиганда и температуры будут использованы при синтезе комплексов Ag (I) с 1,2,4-триазолом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников Н.Н. Пестициды. Химия, технология и применение. - М.: Химия, 1987, с. 619-633.
2. Лавренова Л.Г., Ларионов С.В., Гранкина З.А. Комплексы металлов с 4-амино-1,2,4-триазолом. - Изв. СО АН СССР. Сер. хим., 1979, т.5, с.88.
3. Barszez B. Complexes of Mn (II) with azolex. Factors determining the stability of Mn (II) Complexes with chosen amino derivatives of 1,2,4- triazole and pyrazole. -Pol. g.Chem., Partulice, 1989, v.63, № 1, с.9.
4. Аминджанов А.А., Ахмедов К.У., Баситова С.М. Исследования комплексообразования рения (V) с 1,2,4-триазолтиолом-3 (5) при различных температурах. - Журн. неорг. Химии, 1986, т.31, вып.11, с.2283-2286.
5. Карякин Ю.В. Чистые химические вещества. – М., 1974, 209 с.
6. Синтез гетероциклических соединений. Ереван, 1969, вып. VIII, 66 с.
7. Новаковский М.С. Лабораторные работы по химии комплексных соединений. — Харьковский университет, 1972, 217 с.

Х.Ғ.МУДИНОВ, С.М.САФАРМАДОВ, А.Д.ХУСАЙНОВ

КОМПЛЕКСХОСИЛКУНИИ НУҚРА (I) БО 1,2,4-ТРИАЗОЛ ДАР ҲАРО- РАТҲОИ 288-318 К

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Бо усули потенциометрӣ раванди комплексҳоилкунии нуқра бо 1,2,4-триазол дар ҳароратҳои 288-318 К омӯхта шуд. Муайян карда шуд, ки нуқра (I) бо 1,2,4-

триазол се заррачаи комплексӣ ҳосил мекунад. Бо зиёдшавии ҳарорат собитии устувории пайвастиҳои комплексӣ кам мешавад.

Калимаҳои калидӣ: нукра – 1,2,4-триазол – комплексҳои собитии устуворӣ.

H.G.MUDINOV, S.M.SAFARMAMADOV, A.D.HUSAYNOV

COMPLEX FORMATION SILVER (I) WITH 1,2,4-TRIAZOLE AT 288-318 K

Tajik National University

Potentiometric method is studied complexes formation silver (I) with 1,2,4-triazole in the temperature 288-318 K. It has been established that silver (I) with 1,2,4-triazole formed three complex forms. With increasing temperature, decreasing stepwise constant.

Key words: silver – 1,2,4-triazole – complexes generation – constant stability.

УДК 547.311.362

И.У.ФАЙЗИЛОВ*, М.Д.ИСОБАЕВ*, М.И.САБУРОВ

**СИНТЕЗ Z,E-ИЗОМЕРОВ ПРОСТЫХ МОНОЭФИРОВ ДИТРЕТИЧНЫХ
ЕНИНОВЫХ ДИОКСИАЛЬДЕГИДОВ**

Таджикский государственный медицинский университет им. Абуали ибн Сино,

**Институт химии им. В.И.Никитина АН Республики Таджикистан*

Поступила в редакцию 30.10.2014 г.

В работе приведены условия проведения синтеза и схема получения Z,E-изомерных простых моноэфиров ениновых диоксиальдегидов. Данная реакция проведена путем окисления Z,E-изомеров простых моноэфиров первично-дитретичных ениновых триолов активированной двуокисью марганца (MnO₂), реакция проводится в среде сухого эфира или гексана при температуре 40-50°C.

Ключевые слова: простые моноэфиры – активированная двуокись марганца – ениновые диоксиальдегиды.

Среди ацетиленовых соединений ениновые производные, то есть соединения, в которых двойная и тройная связи сопряжены, являются наиболее интересными, так как позволяют оценить вклад структурного фактора в биологическую активность. Наличие двойной связи предполагает наличие пространственных Z,E-изомеров. Данные изомеры различаются, помимо пространственного расположения групп относительно двойной связи, способностью образовывать внутримолекулярные водородные связи (ВВС). Для Z-изомера характерным является образование ВВС между электронным облаком ацетиленовой связи и протоном ОН концевой метиленовой группы. Показателем того, в какой степени ВВС оказывает влияние на химические свойства соединений данного класса, является способность оксиметиленовой группы к окислению. В результате такой реакции получены Z,E-изомерные первично-дитретичные ениновые диоксиальдегиды. Таким образом было доказано, что ВВС не является определяющим фактором химического поведения Z,E-изомеров ениновых триолов [1,2]. Если обратиться к биологической активно-

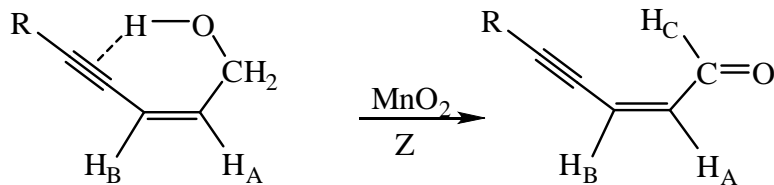
Адрес для корреспонденции: Файзилов Икром Усманович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: coordin@yandex.ru

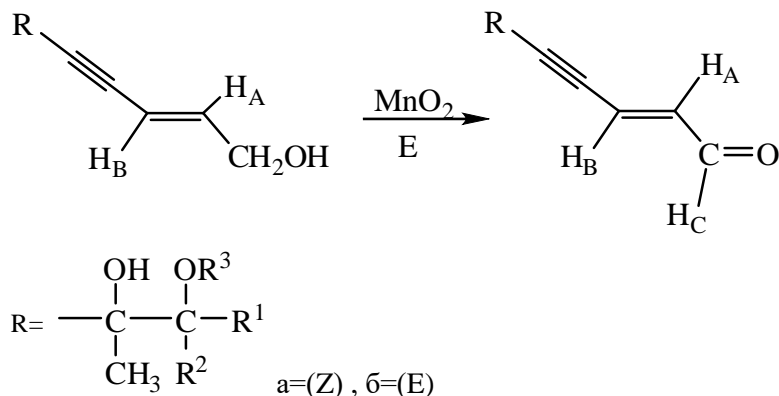
сти соединений данного ряда, то, как показал фармакологический скрининг, Z,E-изомеры ениновых триолов и их простые эфиры с алифатическими и алициклическими радикалами проявляют желчегонную и противовоспалительную активность, тогда как окисленные производные ениновых триолов ениновые диоксиальдегиды проявили антибактериальную активность. Установлено, что ениновые диоксиальдегиды эффективно действуют на патогенные штаммы золотистого стафилококка, стрептококка, палочки сине-зеленого гноя, дизентерийных микробов, энтеропатогенной кишечной палочки, сальмонеллы, паратифа «В» и вульгарного протей. Изучение зависимости антимикробной активности от пространственной структуры показало, что E-изомеры в 2-3 раза более активны, чем соответствующие Z-изомеры.

Анализ литературных данных показал, что окисление высокосопреженных систем представляет определенные трудности, в частности применение сильных окислителей (KMnO_4 , $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ и др.) может привести к таким нежелательным процессам, как расщепление молекул по кратным связям. В наших экспериментах по применению в качестве окислительного агента более мягких окислителей, таких как активная перекись никеля, перекись водорода, хромово-пиридиновый комплекс, хромовый ангидрид в серной кислоте, приводит к заметному осмолению. Наиболее подходящим окислителем для получения Z,E-изомерных простых моноэфиров дитретичных ениновых диоксиальдегидов, как показали дальнейшие опыты, является активированная двуокись марганца (MnO_2).

В продолжение исследований по синтезу и зависимости химических свойств, биологической активности ениновых триолов и их производных от структурных факторов, проведен синтез новых представителей диоксиальдегидов путем окисления Z,E-изомеров простых моноэфиров первично-дитретичных ениновых триолов.

Данная реакция проводится в среде сухого эфира или гексана при температуре 40-50°C путем перемешивания исходных Z,E-изомерных простых моноэфиров дитретичных ениновых триолов с 5-7-кратным количеством MnO_2 . Контроль за ходом реакции осуществлялся по тонкослойной хроматографии на силуфолу в системе бензол: метанол (8:2). Начало реакции отмечено по истечении 30-40 минут, а ее завершение проходило за 5-6 часов. В процессе реакции не наблюдается осмоления или других побочных эффектов. Схему реакции можно представить следующим образом:





где (Ia,б) $\text{R}^1=\text{R}^2=\text{R}^3=\text{CH}_3$; (IIa,б) $\text{R}^1=\text{R}^2=\text{CH}_3$; $\text{R}^3=\text{C}_2\text{H}_5$; (IIIa,б) $\text{R}^1=\text{C}_2\text{H}_5$, $\text{R}^2=\text{R}^3=\text{CH}_3$; (IVa,б) $\text{R}^1=\text{R}^3=\text{C}_2\text{H}_5$; $\text{R}^2=\text{CH}_3$

Полученные продукты представляют собой вязкие жидкости светло-желтого цвета. Выход продуктов составляет 46-76.5%. Состав и строение синтезированных соединений (Ia,б-IVa,б) доказаны элементным анализом, ИК- и ПМР- спектрами (таблица 1-3).

В ИК-спектрах простых моноэфиров ениновых диоксиальдегидов наблюдаются четко выраженные полосы поглощения $-\text{C} \equiv \text{C}-$ связи при $2180-2200 \text{ см}^{-1}$, $-\text{C}=\text{C}-$ связи при $1580-1600 \text{ см}^{-1}$ и $\text{C}=\text{O}$ связи при $1640-1670 \text{ см}^{-1}$. Более низкие значения частот этиленовой и карбонильной групп по сравнению с ениновыми триолами обусловлены эффектом сопряжения ениновой системы с карбонильной группой. Валентные колебания OH дают широкую полосу в области $3380-3400 \text{ см}^{-1}$. Полосы поглощения в области $1155-1160 \text{ см}^{-1}$ соответствуют колебаниям $\text{C}-\text{O}$ третичных гидроксильных групп. Наличие поглощений в области $725-745 \text{ см}^{-1}$ для соединений (Ia-IVa) характеризует их Z-конфигурацию, для соединений (Iб-IVб) найденные полосы поглощения при $940-945 \text{ см}^{-1}$ характеризуют их E-конфигурацию. Полосы поглощения в области $2825-2860 \text{ см}^{-1}$ характеризуют колебания метоксильных и этоксильных групп в соединениях (Ia,б-IVa,б).

В спектрах ПМР полученных соединений отмечено появление сигналов в области 9.46 м.д. (E-изомер) и 10.0 м.д. (Z-изомер), соответствующих альдегидному протону.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

ИК-спектры синтезированных соединений сняты на приборе «UR-20» и «Specord» на жидкой пленке. Спектры ПМР сняты на спектрометре «Tesla BS-487C» с рабочей частотой 80 МГц в растворе CDCl_3 с ГМДС в качестве внутреннего стандарта. Синтез исходных простых моноэфиров первично- дитретичных ениновых триолов описан в [1].

Ниже приведена методика получения простых моноэфиров дитретичных диоксиальдегидов на примере Z,E-изомеров 6-гидрокси-6,7-диметил-7-метокси-2-октен-4-ин-аля (I a,б).

Таблица 1

Выход, физико-химические характеристики и данные элементного анализа соединений (Ia,б-IVa,б)

№ Соединения	Соединение	Выход, %	T _{кип} , °C (мм рт.ст)	n _D ⁵⁰	Найдено, %		Формула	Вычислено, %	
					С	Н		С	Н
Ia	Z-6-гидрокси-6,7-диметил-7-метокси-2-октен-4-ин-аль	62	138-139 (1)	1.5147	67.42	8.06	C ₁₁ H ₁₆ O ₃	67.35	8.16
Iб	E-6-гидрокси-6,7-диметил-7-метокси-2-октен-4-ин-аль	67	141-142 (1)	1.5156	67.23	8.21	C ₁₁ H ₁₆ O ₃	67.35	8.16
IIa	Z-6-гидрокси-6,7-диметил-7-этокси-2-октен-4-ин-аль	73	144-146 (1)	1.4942	68.64	8.62	C ₁₂ H ₁₈ O ₃	68.57	8.57
IIб	E-6-гидрокси-6,7-диметил-7-этокси-2-октен-4-ин-аль	76,5	148-150 (1)	1.4997	68.50	8.51	C ₁₂ H ₁₈ O ₃	68.57	8.57
IIIa	Z-6-гидрокси-6,7-диметил-7-метокси-2-нонен-4-ин-аль	57	153-156 (1)	1.4804	68.63	8.49	C ₁₂ H ₁₈ O ₃	68.57	8.57
IIIб	E-6-гидрокси-6,7-диметил-7-метокси-2-нонен-4-ин-аль	61	157-159 (1)	1.4898	68.53	8.64	C ₁₂ H ₁₈ O ₃	68.57	8.57
IVa	Z-6-гидрокси-6,7-диметил-7-этокси-2-нонен-4-ин-аль	46	161-163 (1)	1.4976	69.73	8.84	C ₁₃ H ₂₀ O ₃	69.64	8.93
IVб	E-6-гидрокси-6,7-диметил-7-этокси-2-нонен-4-ин-аль	52	168-169 (1)	1.5018 109	69.59	8.97	C ₁₃ H ₂₀ O ₃	69.64	8.93

Таблица 2

Основные частоты поглощения в ИК спектрах простых моноэфиров дитретичных ениновых диоксиальдегидов (I а,б – IV а,б)

№ Соединения	ИК- спектры (ν , см ⁻¹)						
	C \equiv C	HC=CH	C=O	OH	C-O (трет.ОН)	-OCH ₃	-OC ₂ H ₅
Iа	2200	1600 725	1670	3400	1160	2825	--
Iб	2200	1600 940	1670	3400	1160	2825	--
IIа	2180	1580 740	1640	3380	1155	--	2860
IIб	2180	1580 940	1640	3380	1155	--	2860
IIIа	2190	1585 730	1655	3390	1160	2830	--
IIIб	2190	1585 940	1655	3390	1160	2830	--
IVа	2200	1575 735	1645	3380	1150	--	2860
IVб	2200	1575 945	1645	3380	1150	--	2860

Таблица 3

Параметры ПМР спектров простых моноэфиров дитретичных ениновых диоксиальдегидов (I а,б – III а,б)

Соединение	ПМР-спектры, м.д. (J, Гц), растворитель СДCl ₃
Ia	1.44, 1.32, 1.23 (CH ₃), 3.1 (OH), 10.0 д. д. (H _c), J H _c H _b = 7.8, 6.53д (H _b), J H _A H _B = 10.0, 6.2д (H _A), 3.41 (OCH ₃)
Iб	1.44, 1.32, 1.23 (CH ₃), 3.1 (OH), 9.46 д. д. (H _c), J H _c H _a = 1.0, J H _c H _b = 6.6, 6.3д. д. (H _A), J H _A H _B = 15.0, 6.54д. д. (H _B), 3.41 (OCH ₃)
IIa	1.44, 1.32, 1.23 (CH ₃), 3.1 (OH), 10.0 д. д. (H _c), J H _c H _b = 7.8, 6.53д (H _b), J H _A H _B = 10.0, 6.2д (H _A), 1.09 т. (CH ₃), 3.4 кв. (OCH ₂)
IIб	1.44, 1.32, 1.23 (CH ₃), 3.1 (OH), 9.46 д. д. (H _c), J H _c H _a = 1.0, J H _c H _b = 6.6, 6.3д. д. (H _A), J H _A H _B = 15.0, 6.54д. д. (H _B), 1.09 т. (CH ₃), 3.4 кв. (OCH ₂)
IIIa	1.44, 1.25*, 1.14* (CH ₃), 0.93 т (CH ₃ , R), J CH ₃ CH ₂ = 7.0, 1.62 кв (CH ₂ , Et), 3.25(OH), 10.0д. д. (H _c), J H _c H _A ≈ 0.7, J H _c H _B = 7.8, 6.61д. д. (H _B), J H _A H _B = 10.0, 6,35д. д. (H _A), 3.42 (OCH ₃)
IIIб	1.44, 1.25*, 1.14* (CH ₃), 0,93 т (CH ₃ , R), J CH ₃ CH ₂ 7.0, 1.62 кв (CH ₂ , Et), 3.25 (OH), 9.46д. д. (H _c), J H _c H _A = 1.0, J H _c H _B = 6.6, 6.62д. д. (H _B), J H _A H _B = 15.0, 6,35д. д. (H _A), 3.42 (OCH ₃)
IVa	**
IVб	**

Примечания. *- отмечены сигналы диастереомеров ; ** - для соединений (IV а,б) спектры ПМР не сняты.

К раствору 0.08 моль (15.84 г) простого моноэфира ениного триола в 100 мл эфира при перемешивании добавляли 60 г активной двуокиси марганца, смесь перемешивали в течение 5 ч при температуре 40-50°C. Ход реакции окисления контролировали тонкослойной хроматографией на «Silufol»-е в системе бензол: метанол (8:2). После полного исчезновения на хроматографической пластинке пятна от енинового триола прекратили перемешивание. Смесь охладили до комнатной температуры, осадок отделяли, многократно промывали эфиром и эфирный раствор продукта высушивали сульфатом магния. После отгонки эфира остаток перегоняли в вакууме. Разгонкой в вакууме получено 9.72 г (62%) соединение (Ia), 10.5 г (67%) соединение (Iб).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабиров С.С., Файзилов И.У., Исобаев М.Д. Синтез первично-дитретичных ениновых триолов, их простых моноэфиров и их гидрирование. - ЖорХ., 1986, т.22, вып.5, с. 987-992.
2. А.с. 1072409 (СССР). Сабиров С.С., Файзилов И.У., Хайдаров К.Х., Алиджонов У. Ениновый триол, обладающий желчегонной активностью. – 1983, 5 с. (не подлежит опубл. в открытой печати).

И.У.ФАЙЗИЛОВ*, М.Д.ИСОБАЕВ*, М.И.САБУРОВ
**СИНТЕЗИ Z,E-ИЗОМЕРҲОИ МОНОЭФИРҲОИ СОДДАИ
ДИСЕЮМИНАИ ДИОКСИАЛЬДЕГИДҲОИ ЕНИНӢ**

Донишгоҳи давлатии тиббии Тоҷикистон ба номи Абуалӣ ибни Сино,

**Институту химияи ба номи В.И.Никитини*

Академияи илмҳои Чумхурии Тоҷикистон

Шароити гузаронидани синтез ва схемаи ҳосилкунии Z,E-изомерҳои моноэфирҳои соддаи диоксиальдегидҳои енинӣ оварда шудаанд. Реаксияи мазкур бо роҳи оксидкунии Z,E-изомерҳои моноэфирҳои соддаи триолҳои якуми-дисеюмини енини бо дуоксиди мангани фаъл (MnO₂) дар муҳити эфири хушк ё гексан ва ҳарорати 40-50°C гузаронида шудааст.

Калимаҳои калиди: моноэфирҳои содда – дуоксиди мангани фаъл – диоксиальдегидҳои енинӣ.

I.U.FAYZILOV*, M.J.ISOBAEV*, M.I.SABUROV
**PREPARATION OF Z,E-ISOMERIC MONOETHERS OF DI-TRETIC ENIN
DIOXYALDEHYDES**

Avicenna Tajik State Medical University,

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

In the paper the conditions and scheme of preparation of Z,E-isomeric monoethers of ditretic enin dioxyaldehydes was shown. This reaction was realized by the way of oxidation Z,E-isomeric simple monoethers of related enin triols. Oxidative agent was Manganese Dioxide (MnO₂) in the media of dried ether or hexane at the temperature 40-50°C.

Key words: simple ethers – manganese dioxide – enin dioxyaldehydes.

УДК 677.016

О.Г.БОБИЕВ, А.Н.ШАХМАТОВ*, В.Д.АБУЛХАЕВ**

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ
АКТИВНЫХ КРАСИТЕЛЕЙ

Технологический университет Таджикистана,

**Общество с ограниченной ответственностью «Занд»,*

***Институт химии им.В.И.Никитина АН Республики Таджикистан*

Поступила в редакцию 22.12.2014 г.

Приведены результаты исследования диффузионно-сорбционных характеристик, реакционной способности, степени фиксации и гидролиза монохлортриазиновых красителей ярко-красного 6С, ярко-голубого К и дивинилсульфонового ремазола черного В при крашении целлюлозного волокна.

Ключевые слова: диффузия – сорбция – реакционная способность – степень фиксации – константа гидролиза – ярко-красный 6С – ярко-голубой К – ремазол черный В.

В настоящее время в текстильной промышленности наиболее широко применяются активные красители, содержащие различные функциональные группы [1]. С химической точки зрения, крашение хлопчатобумажного волокна заключается в образовании ковалентной связи между активными группами

красителя и целлюлозы. Установлено, что ход крашения зависит от многих факторов, в том числе и от реакционной способности красителя [2]. Изучение технологических параметров взаимодействия красителя с целлюлозным волокном имеет большое значение для оптимизации процесса крашения. Для многих красителей такие технологические параметры, как диффузионно-сорбционные характеристики, реакционная способность, степень фиксации и гидролиза не определены для всех видов крашения. Например, технологические характеристики активного красителя ремазола черного В при крашении непрерывным способом в литературе отсутствуют.

Адрес для корреспонденции: Абулхаев Владимир Джалолович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: abulkhaev-48@mail.ru; Бобиев Олим Гуломкодирович. 734061, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Негмата Карабаева, 63/3, Технологический университет Таджикистана. E-mail: axpert@mail.ru

Целью данного сообщения является изучение диффузионно-сорбционных характеристик, реакционной способности, степени фиксации и гидролиза монохлортриазиновых красителей ярко-красного 6С, ярко-голубого К и дивинилсульфонового ремазола черного В с целлюлозным волокном при плюсовочно-запарном способе крашения.

Экспериментальная часть

При выполнении экспериментальных исследований использовались очищенные активные красители ярко-красный 6С, ярко-голубой К и дивинилсульфоновый ремазол черный В.

Определение коэффициента диффузии активных красителей в хлопчатобумажное волокно

Образец массой 0.1 г (со 100%-ной влажностью) помещали в водный раствор, содержащий краситель в количестве 10% от массы материала, и окрашивали при 25°C в течение 0.3, 1, 2, 5, 10, 15, 30 и 90 мин. После крашения образцы промывали дистиллированной водой. Количество красителя на волокне определяли колориметрированием. Коэффициент диффузии красителя рассчитывали по формуле

$$D = \frac{0.063}{t_{1/2}} \times r^2,$$

где r - средний радиус волокна хлопка, $t_{1/2}$ - время половинного крашения. Значения D определялись для сухого хлопкового волокна со средним радиусом 2.3×10^{-2} мм.

Определение сродства активных красителей к целлюлозному волокну

Величину термодинамического сродства активного красителя к целлюлозному волокну определяли по калибровочным кривым для растворов с концентрацией красителя 2.8×10^{-5} моль/л, NaCl – 513 моль/л (30 г/л). Образцы хлопчатобумажной ткани массой 1 г пропитывали раствором хлорида натрия (30 г/л), отжмали до 100%-ного приращения массы и окрашивали в растворе красителя при 25°C в течение 6 суток. Затем сорбированный краситель экстрагировали 5-кратным кипячением в дистиллированной воде.

По калибровочным кривым определяли концентрацию красителя в экстракте ($C^э$). Остаточное количество красителя на волокне учитывали посредством колориметрирования образцов до и после экстракции ($C^{э*}$). Содержание красителя в экстракте рассчитывали по формуле

$$C^э = \frac{D^э}{D_K} \times C_K,$$

где C_K - концентрация красителя в калибровочном растворе, $D^э$ - оптическая плотность раствора экстракта, D_K - оптическая плотность калибровочного раствора.

Количество красителя, не экстрагированного с волокна, определяли по формуле

$$C^{\text{Э}^*} = C^{\text{Э}n}$$

$$n = \frac{(K/C)^0 + (K/S)^{\text{Э}}}{(K/S)^0},$$

где n – коэффициент, учитывающий остаточное количество красителя на волокне, $(K/S)^0$ – интенсивность окраски образца ткани с сорбированным красителем, $(K/S)^{\text{Э}}$ – интенсивность окраски образца после экстракции красителя. Содержание красителя в волокне в равновесном состоянии

$$C_{\infty}^B = \frac{C^{\text{Э}^*} - V^{\text{Э}}}{m^B} \times 1000, \text{ моль/кг},$$

где m^B – масса волокна, кг, $V^{\text{Э}}$ – объём экстракта с красителем, л.

Равновесную концентрацию ионов натрия в волокне (мг/экв/кг) рассчитывали по формуле

$$[\text{Na}^+]_B = 1/Z \{ Z C_{\infty}^B + (Z^2 (C_{\infty}^B)^2 + 4V^2 [\text{Na}^+]_P [\text{Cl}^-]^{1/2}) \},$$

где $[\text{Na}^+]_P$ – концентрация ионов Na^+ в растворе, $[\text{Cl}^-]_P$ – концентрация ионов хлора в растворе, V – эффективный объём волокна (0.3 л/кг), Z – количество сульфогрупп в молекуле красителя.

Сродство активного красителя к целлюлозному волокну ($-\Delta\mu^0$) (кДж/моль) рассчитывали по формуле

$$-\Delta\mu^0 = RT \{ \ln C_{\infty}^B + Z \ln [\text{Na}^+]_B - (Z+1) \ln V - \ln C_{\infty}^B - Z \ln [\text{Na}^+]_P \},$$

где R – универсальная газовая постоянная (8.306 Дж/град моль), T – абсолютная температура (293 К).

Определение реакционной способности активного красителя

Реакционную способность активных красителей по отношению к целлюлозному волокну оценивали по значениям константы скорости их взаимодействия $K_{\text{целл}}$ с использованием соотношения [3].

$$K_{\text{целл}} = \frac{\Delta C}{\Delta e[S_{\text{CB}}]},$$

где ΔC – количество ковалентно фиксированного красителя за время t , мг/г; Δt – время, мин, $[S_{\text{CB}}]$ – концентрация активной формы красителя, субстантивно связанного с волокном, мг/г.

Реакционную способность активных красителей оценивали по кинетическим зависимостям фиксации при крашении образцов хлопчатобумажной ткани по плюсовочно-запарному способу со следующей последовательностью операций:

- 1) плюсование образца с отжимом до 80% (дважды);

- 2) запаривание в расплавленном состоянии при 100°C в течение 10 мин;
- 3) промывка: холодной и горячей водой (дважды); кипящим раствором ПАВ (2 г/л) в течение 10 мин. горячей и холодной водой (дважды).

Количество сорбированного красителя определяли колориметрическим методом, ковалентно фиксированного – методом кислотных гидрозолей.

Определение степени ковалентной фиксации активных красителей

Образцы ткани взвешивали с точностью до 0.001 г и растворяли при охлаждении в 20 мл H₂SO₄ (плотность 1.84 г/см³) в течение 1-2 суток, затем разбавляли дистиллированной водой в присутствии НПАВ и колориметрировали на приборе СФ-46.

Степень ковалентной фиксации активных красителей (С_ф) рассчитывали по формуле:

$$C_{\phi} = \frac{D_{\phi}}{D_0} \times 100\% ,$$

где D₀ – оптическая плотность растворённых в концентрированной серной кислоте окрашенных образцов хлопчатобумажной ткани до их промывки, D_ф – оптическая плотность после промывки.

Определение константы скорости гидролиза активных красителей

Константу гидролиза определяли методом десорбции гидролизованной формы красителя после выдерживания навески окрашенной хлопчатобумажной ткани в водном растворе превоцелла WOF-100 (0.8 г/л) при 80°C и постоянном перемешивании раствора в течение 6 ч. Через определенные промежутки времени (t) определяли оптическую плотность растворов с десорбированным (гидролизированным) красителем. Значения константы скорости гидролиза рассчитывали по уравнению 1-го порядка

$$K_{\Gamma} = \frac{2.303}{t_1 - t_2} \times \lg \frac{D_2}{D_1} , \text{ мин}^{-1} ,$$

где Δt = t₁ - t₂ – продолжительность гидролиза красителя, мин; D₁ – оптическая плотность раствора при времени t₁; D₂ – оптическая плотность раствора при времени t₂.

Определение остаточного содержания зафиксированного красителя на волокне

Образцы окрашенной хлопчатобумажной ткани обрабатывались в растворе превоцелла WOF-100 (2 г/л) в течение 30 мин при интенсивном перемешивании на магнитной мешалке. Остаточное содержание незафиксированного красителя на образце (S) рассчитывали по формуле:

$$S = \frac{D_i}{D_0} \times 100\%$$

где D₀ – оптическая плотность исходного красильного раствора с концентрацией красителя 10 г/л; D_i – оптическая плотность десорбционного раствора.

Результаты и обсуждение

Крашение хлопкового волокна активным красителем включает следующие стадии: диффузия красителя в объём волокна, сорбция красителя на волокне и химическая реакция между активными группами красителя и волокна. Продолжительность процесса крашения определяется диффузионными характеристиками красителя. Сведений о диффузионных характеристиках активных красителей очень мало. Нами для определения коэффициентов диффузии была использована стандартная методика, основанная на расчётах времени половинного крашения, определённого по кинетическим кривым сорбции этих красителей целлюлозным волокном.

Кинетические кривые сорбции исследуемых активных красителей представлены на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что лучше всего внутрь волокна диффундируют монохлортриазиновые красители (ярко-красный 6С, ярко-голубой К), хуже – дивинилсульфоновый краситель ремазол черный В. Вероятно, это связано с тем, что диффузия ремазола черного В затруднена термодинамическими и стерическими факторами. При расчёте были получены следующие значения коэффициентов диффузии: для ярко-красного 6С – 23×10^9 см²/с, для ярко-голубого К – 29×10^9 см²/с, для ремазола черного В – 21×10^9 см²/с.

Известно, что скорость и степень фиксации красителя, сорбированного волокном, зависит от подвижности его активного центра, то есть от вероятности столкновения этого центра с реакционноспособными группами волокна. С этой точки зрения, бифункциональные активные красители могут рассматриваться как системы с повышенной способностью к образованию химических (ковалентных) связей с целлюлозным субстратом пропорционально концентрации сорбированной активной формы красителя (в ионном состоянии).

Нами было определено сродство красителей к целлюлозному волокну. Для ярко-красного 6С было получено следующее значение $\Delta\mu^0$ – 5.82 кДж/моль, для ярко-голубого К – 4.1 кДж/моль, для ремазола черного В – 6.9 кДж/моль. Эти данные говорят о том, что ремазол черный В обладает наибольшим сродством к волокну вследствие того, что он содержит две функциональные группы.

На следующем этапе исследований оценивалась реакционная способность активных красителей по кинетическим кривым фиксации на образцах хлопчатобумажной ткани. Реакционная способность красителя определялась для случая плюсовочно-запарного способа. Реакционную способность красителя оценивали по степени фиксации красителей на волокне.

Кинетические кривые зависимости степени фиксации красителя на волокне при плюсовочно-запарном крашении приведены на рис. 2.

Для ярко-красного 6С максимальная степень фиксации достигалась уже через 6 мин запаривания. Для ярко-голубого К время достижения максимальной степени фиксации составляло 10 мин., для ремазола черного В - 5 мин.

Были получены следующие значения $K_{\text{целл}}$: для ярко-красного 6С - 0.153 мин^{-1} при степени фиксации красителя 65.7%, для ярко-голубого К - 0.131 мин^{-1} при степени фиксации красителя 68.1%, для ремазола черного В = К - 0.48 мин^{-1} при степени фиксации 77.3%.

Как видно из полученных результатов, отмечается прямая зависимость степени фиксации от константы реакции взаимодействия красителя с волокном: чем выше $K_{\text{целл}}$, тем выше степень фиксации.

Крашение активными красителями практически всегда протекает в водной среде, поэтому краситель, реагируя с гидроксильными группами целлюлозы, может одновременно подвергаться гидролизу. Однако преобладающей является реакция активного красителя с волокном и реакционная способность красителя связана со скоростью его гидролиза в водной среде [3].

Были определены константы гидролиза изученных красителей. Результаты показали, что значение константы гидролиза для ярко-красного 6С составляет $0.27 \text{ мин}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$, ярко-голубого К - $0.24 \text{ мин}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$, ремазола черного В - $0.47 \text{ мин}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$. Из этого следует, что наиболее устойчивым к гидролизу является ремазол черный В.

Таким образом, на основании проведенных исследований установлено, что бифункциональный активный краситель ремазол черный В обладает высокой реакционной способностью (по отношению к целлюлозным волокнам) и является более устойчивым к гидролизу в щелочной среде по сравнению с монохлортриазиновыми красителями.

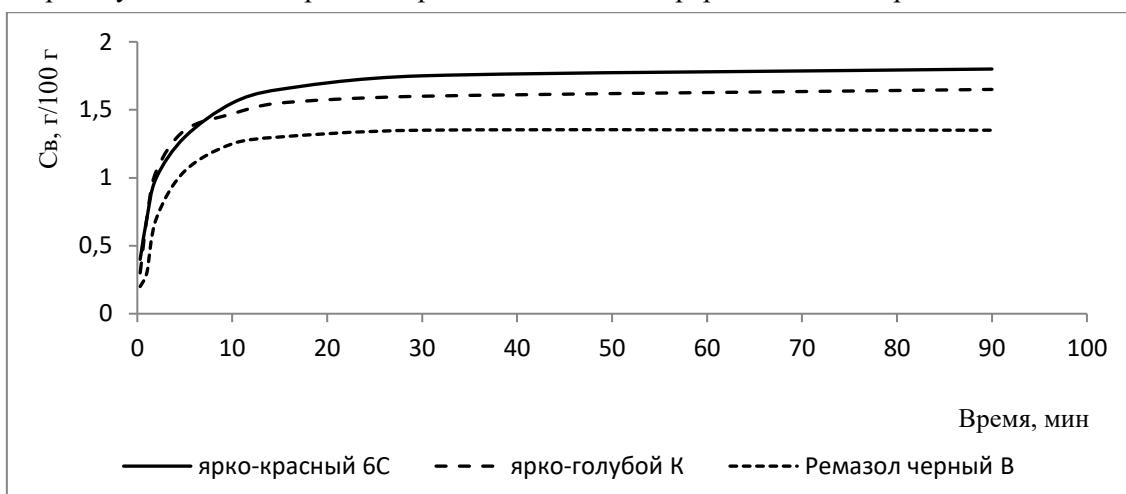


Рис.1. Кинетические кривые сорбции активных красителей.

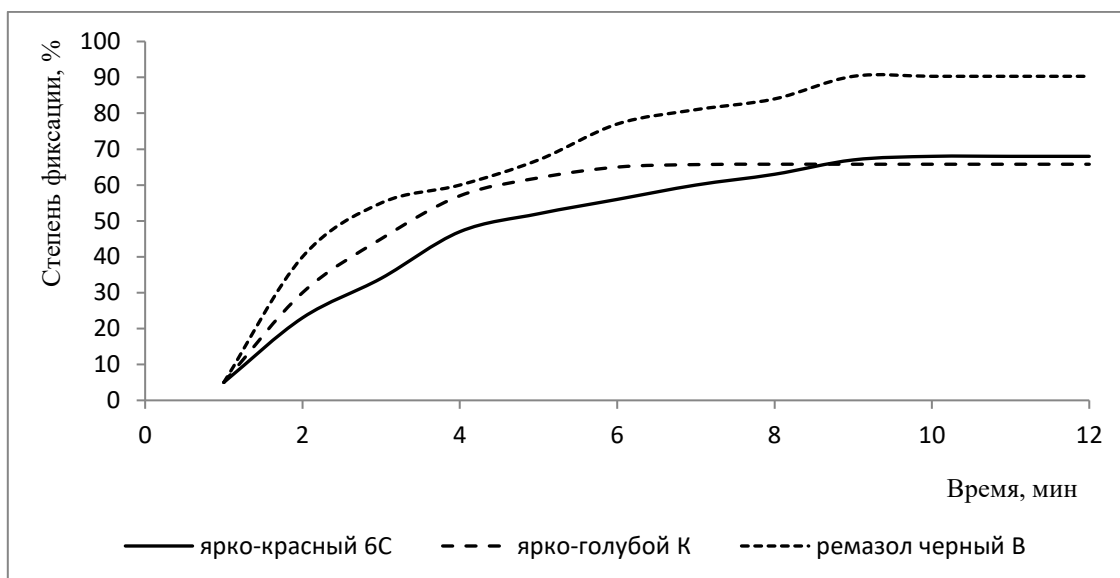


Рис. 2. Зависимость фиксации активных красителей на хлопчатобумажной ткани от продолжительности запаривания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочергин А.Б., Разуваев А.В. Экономичная гамма бифункциональных активных красителей. - Текстильная химия, 2004, № 3, с.21-28.
2. Мельников Б.Н., Виноградова Г.И. Применение красителей. Учеб. для вузов. - М.: Химия, 1986, 240 с.
3. Маркова О.Ю., Лобанова Л.А., Николаева Н.В. Анализ реакционной способности и устойчивости к гидролизу активных моно- и бифункциональных красителей. - Научный альманах-спец. выпуск журнала «Текстильная промышленность», 2010, № 3, с.26–34.

О.Ф.БОБИЕВ, А.Н.ШАХМАТОВ*, В.Д.АБУЛҶАЕВ**

ТАВСИФОТИ ТЕХНОЛОГИИ БАЪЗЕ РАНГУНАНДАҶОИ ФАЪОЛ

Донишгоҳи технологияи Тоҷикистон,

**Чамъияти дорои масъулияти маҳдуди «Занд»,*

****Институт химияи ба номи В.И.Никитини Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон**

Натиҷаҳои таҳқиқоти тавсифоти диффузионию сорбсионӣ, қобилияти реаксионӣ, дараҷаи мустаҳкам шудан ва ҳидролизии рангкунандаҳои монохлортриазинии сурхи баланд 6С, кабудии баланд К ва ремазоли дивинилсулфонии сиёҳ В, хангоми рангкунии нахҳои целлюлозӣ оварда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: диффузия – сорбсия – қобилияти реаксионӣ – дараҷаи мустаҳкамшавӣ – собити ҳидролиз – сурхи баланд 6С – кабудии баланд К – ремазоли сиёҳ В.

O.G.BOBIEV, A.N.SHAKHMATOV*, V.D.ABULKHAEV**

TECHNOLOGICAL CHARACTERISTICS OF SOME ACTIVE DYES

Technological university of Tajikistan,

**Zand Limited,*

****V.I. Nikitin Institute of Chemistry, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan**

Results of research of characteristics of diffusion, sorbtion, reactionary ability, fixing and hydrolysis degree monochlorotriazine dyes bright red 6C, is bright-blue K and divinyl-sulphone remazol black B at dyeing of cellulose fibre are resulted.

Key words: diffusion – sorbtion – reactionary ability – fixing degree – a hydrolysis constant – bright-red 6C – bright-blue K – remazol black B.

УДК 662.66

Б.С.ДЖАМОЛЗОДА, А.МУРОДИЁН, Т.ШУКУРОВ, А.Г.САФАРОВ, Х.С.САФИЕВ*

**ИК-СПЕКТРЫ АНТРАЦИТА МЕСТОРОЖДЕНИЯ НАЗАРАЙЛОК ДО И ПОСЛЕ
ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ**

*Физико-технический институт им. С.У.Умарова АН Республики Таджикистан,
Государственное унитарное предприятие «Таджикская алюминиевая компания»
(ГУП ТАЛКО)*

Поступила в редакцию 21.01.2015 г.

Методом ИК-спектроскопии изучена структура и свойства антрацита месторождения Назарайлок до и после термической обработки. При термообработке (1000-1200 °С) в структуре антрацита происходят существенные изменения; полностью теряются адсорбированная и генетическая вода, летучие органические вещества, происходит расщепление CH_3 - и CH – группы. В низкочастотной области при 1200 °С наблюдались четыре полосы поглощения с ν_{max} при 1618, 1480, 972 и 640 см^{-1} , отличающихся по форме и интенсивности. Данные полосы поглощений относятся к деформационным колебаниям органических соединений, которые могут быть связаны с потерей водорода за счёт отщепления CH_x -групп. Пласт №4 антрацита месторождения Назарайлока можно рекомендовать для производства катодных блоков с целью футеровки алюминиевых электролизёров. Термообработку антрацита необходимо производить при t° не ниже 1200 °С.

Ключевые слова: ИК-спектроскопия – антрацит – термообработка – метаморфизм – молекулярная структура – витринит.

Молекулярной структурой антрацитов занимался ряд исследователей [1-3 и др]. Из-за сложности строения органической массы и разной палеогеоботаники первичного материала, подвергшегося углефикации, получить однозначное представление о молекулярной структуре антрацитов пока невозможно.

Антрациты являются наименее изученными твёрдыми горючими ископаемыми. Граница между каменными углями и антрацитами проводится довольно условно. Обычно

Адрес для корреспонденции: Джамолзода Бехрузи Саъдонхуджа. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Физико-технический институт АН РТ. E-mail: beha4417@mail.ru

под антрацитами понимают твёрдые горючие ископаемые с выходом летучих веществ ≤ 9.0 ($V^{\text{daf}} = 9\%$) и содержанием углерода $C \geq 91.0\%$.

В спектрах антрацитов с содержанием углерода менее 95.5% обнаружена полоса поглощения 2920 см^{-1} , свидетельствующая о наличии CH_x – групп [4]. В спектрах антрацитов с $C^{\text{daf}} \geq 95.5\%$ эта полоса отсутствует. Фиксированные изменения в ИК-спектрах свидетельствуют о полной потере антрацитами CH_2 - и CH_3 -групп. С ростом степени метаморфизма идёт потеря водорода за счёт отщепления CH_x – групп, постепенно увеличивается размер углеродных сеток, появляются делокализованные π -электроны. Антрациты месторождения Назарайлок подвержены низкому метаморфизму, поэтому после термообработки появляются локализованные π -электроны [5], о чём свидетельствует низкое удельное электросопротивление (УЭС), равное $1200 \text{ Ом мм}^2/\text{м}$ после термообработки (1200°C) [6].

Антрациты Российского Донбасса по петрографическому составу принадлежат к витриниту и подвержены более высокому метаморфизму (высокие давления и температуры). При $C^{\text{daf}} > 95.5\%$ в антрацитах наблюдается ускоренный рост цепей сопряжений и ароматических структур. Атомы ароматического углерода участвуют в образовании сопряженных систем. Специфические свойства этой системы обуславливают π -электроны, в основном состоянии находящиеся на связывающих молекулярных орбиталях, образуя устойчивую электронную оболочку [7].

В антрацитах месторождения Назарайлок установлено 16 угольных пластов. Промышленную ценность и уникальную по химическому составу (низкой золы – 1.5-3.0 мас%) представляют 4-ый и 6-ой пласты. По вещественному составу угли относятся к однородным витринитовым типам [8]. Среднее содержание углерода в углях – 88.26 – 96.26% (по массе). Угли данного месторождения (особенно 4-й пласт) уникальны, хорошо метаморфизованы. В эксперименте был использован уголь пласта № 4, имевший следующий усредненный химический состав, % : C - 91.30; H – 3.50; O – 1.50; N - 1.02; летучих – 9.00; зольность – 2.50; объёмная плотность – 1.40 г/см^3 .

Исходный сырой антрацит термообработывался при температуре $1000\text{-}1200^\circ\text{C}$ в промышленной вращающейся барабанной печи [9]. Печь имела длину 45 м с внутренним диаметром 3.00 м, угол наклона 1.06° . Скорость вращения печи составляла 1.06 об/мин. После завершения прокалики антрацит охлаждался во вращающемся барабанном холодильнике до $t = 40\text{-}45^\circ\text{C}$. Подобная печь используется для прокалики сырых нефтяных коксов.

Схематическая диаграмма зоны прокаливания углеродного сырья и температурные профили газового потока и слоя материала по длине печи приведены на рис.1 [9].

Для печи длиной 45 м и более при прокаливании антрацита можно условно выделить три характерные зоны термических превращений материала. Первая – зона сушки и разогрева сырья, вторая – зона выделения летучих веществ и третья – зона уплотнения структуры углеродного сырья.

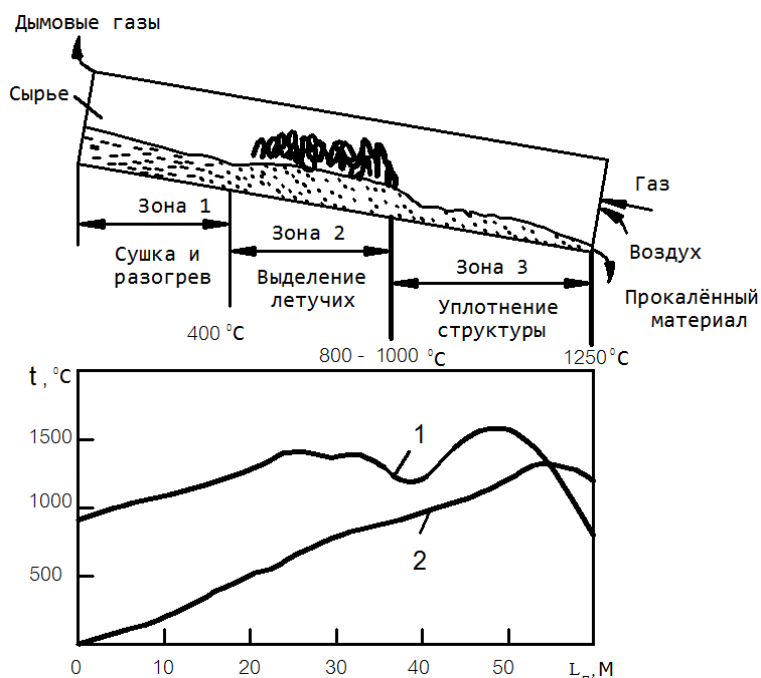


Рис. 1. Схематическая диаграмма зон прокаливания углеродного сырья и температурные профили газового потока 1 и слоя материала 2 по длине печи.

Подготовка образцов для регистрации ИК-спектров осуществлялась следующим образом: образцы антрацита измельчались, из полученного порошка брали навеску 2 мг, смешивали с порошком монокристаллического бромида калия (KBr) (600 мг), затем смесь прессовали в специальной пресс-форме под вакуумом [10]. Образец для исследования, как правило, получался в виде таблетки. Запись ИК-спектров осуществлялась с помощью прибора SHERCORD-75 IR в диапазоне частот 4000-400 см^{-1} . Указанный диапазон выбран из-за того, что для целей данной работы особый интерес представляют полосы 2920-2860 см^{-1} , обусловленные валентными колебаниями алифатических CH_x -групп, а также полоса 3030 см^{-1} , которая относится к колебаниям ароматических CH -групп [4]. Остальные полосы важны для обнаружения свободных радикалов, возникающих за счёт разорванных δ -связей и наличия CH_4 , H_2 , H_2S , CO_2 , когда в рассматриваемом антраците содержание углерода колеблется в пределах 90–92%.

На рис. 2 приведены ИК-спектры антрацита в разных режимах термообработки. Как видно из рис. 2, в исходном (термонеобработанном) образце антрацита (кривая 1) в спектре наблюдается три очень слабых полосы поглощения с частотой максимумом (ν_{max}) при 3738, 3290 и 1474 см^{-1} . Эти полосы соответственно относятся к содержанию адсорбированной, генетической воды, а также H_2 , N_2 , золы и летучих компонентов.

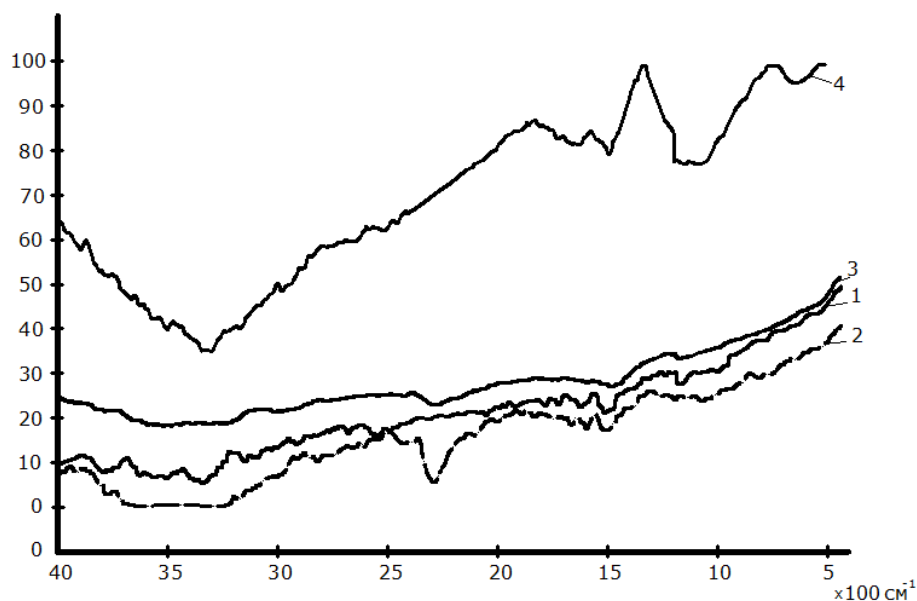


Рис. 2. ИК-спектры сырого и термообработанного антрацита месторождения «Назарайлок» (пласт №4). 1 – сырой антрацит, 2 – термообработан при 1000°С, 3 – термообработан при 1100°С, 4 – термообработан при 1200°С.

После термообработки при 1000 и 1100°С (кривые 2,3) в диапазоне частот 3750-3265 см⁻¹ наблюдается 100% поглощения в спектре ν_{\max} . очень слабых полос при 3738-1474 см⁻¹ смещаются в низко- и высокочастотную область на 38 и 56 см⁻¹ и проявляются при 3700 и 1530 см⁻¹. При указанных температурах в структуре антрацита происходят существенные изменения; полностью теряются адсорбированная и генетическая вода, летучие компоненты, происходят расщепления СН_х- и СН-групп. При температуре 1200°С (кривая 4) обнаруживаются более чёткие полосы поглощения в спектре в диапазоне частот 4000 – 2800 см⁻¹, где появляется широкая и интенсивная полоса поглощения, характерная валентным колебаниям гидроксильных (ОН)-групп. В низкочастотной области частот наблюдаются четыре полосы поглощений с ν_{\max} . при 1618, 1480, 972, и 640 см⁻¹, отличающиеся по форме и интенсивности. Данные полосы поглощений относятся к деформационным колебаниям органических соединений, которые могут быть связаны с потерей водорода за счёт отщепления СН_х-групп.

Таким образом, на основе проведённых исследований можно утверждать:

- с целью производства катодных блоков для футеровки алюминиевых электролизёров из антрацита с содержанием углерода 90-92% термообработку сырья необходимо производить при температуре не ниже 1200°С;

- использовать пласт №4 месторождения Назарайлок в промышленных целях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гюльмалиев А.М., Головин Г.О., Гладун Т.Г. Теоретические основы химии угля. – М : МГГУ, 2003, 556 с.

2. Фиалков А.С. Углерод, межслоевые соединения и композиты на его основе. – М.: Аспект Пресс, 1997, 718 с.
3. Русьянова Н.Д. Углехимия. – М.: Наука, 2003, 316 с.
4. Артемов А.В., Пересунько Т.Ф. –ХТТ, 1975, № 3, с. 35-41.
5. Вохидов М.М., Муродиён А. и др. – ДАН РТ, 2014, т.57, № 3, с.225-229.
6. Вохидов М.М., Муродиён А. и др. – ДАН РТ, 2012, т.55, №4, с.322-326.
7. Тотевский В.М. Химическое строение углеводов и закономерности в их физико-химических свойствах. – М.: Изд. МГУ, 1953, 319 с.
8. Ёров З.Ё., Кабиров Ш.О., Муродиён А., Сироджев Н.М. Минерально-сырьевая база химико-металлургической промышленности Таджикистана. – Душанбе.: Изд. Мега-Басым, Истанбул, 2012, 413 с.
9. Янко Э.А. Аноды алюминиевых электролизеров. - М.: Изд. дом «Руда и металлы», 2001, 670 с.

Б.С.ЧАМОЛЗОДА, А.МУРОДИЁН*, Т.ШУКУРОВ, А.Ф.САФАРОВ, Ҳ.С.САФИЕВ*

ИК-СПЕКТРҲОИ СОҲТОРИ МОЛЕКУЛЯВИИ АНТРАСИТИ МАЪДАНИ НАЗАРАЙЛОҚ ТО ВА БАЪДИ КОРКАРДИ ГАРМӢ

*Институти физикаю техники ба номи С.У.Умарови
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,
Муассисаи давлатии «Пажӯҳишгоҳи илмию таҳқиқотии металлургия»-и
КВД «Ширкати Алюминийи Тоҷик»*

Бо усули ИК-спектроскопӣ соҳтори молекулявии антрасити маъдани Назарайлоқ то ва баъди коркарди гармӣ омукта шудааст. Нишон дода шудааст, ки дар натиҷаи коркарди гармӣ (1000-1200°C) дар қачиҳои ИК-спектри чор хатти фурубарӣ 1618, 1480, 972 ва 640 см⁻¹ нишон дода шудааст, ки ба лаппишҳои деформатсионии пайвастагиҳои органикӣ марбут буда, ба хоричшавии гидроген аз таркиби гуруҳи СН_x шаҳодат медиҳад. Қабати №4 антрасити маъдани Назарайлоқ барои истехсоли блокҳои катодӣ, ки бо онҳо электролизёрҳои алюминийи бутабандӣ мегарданд, мувофиқ мебошад.

Калимаҳои калидӣ: ИК-спектроскопӣ – антрасит – коркарди гармӣ – метаморфизм – соҳтори молекулявӣ – витринит.

B.S.JAMOLZODA, A.MURODIYON*, T.SHUKUROV, A.G.SAFAROV, H.S.SAFIYEV*

STUDY IR-SPECTROSCOPIC PROPERTIES OF ANTHRACITE OF DEPOSIT "NAZARAILOK" BEFORE AND AFTER HEAT TREATMENT

*S.U.Umarov Physical-Technical Institute, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,
State Institution "Research Institute of Metallurgy" SUE "TALCO"*

IR spectroscopy method to study the structure and properties of anthracite of field “Nazarailok” before and after thermal treatment. When thermal treatment (1000 - 1200°C) in

the structure of anthracite comes significant change; completely lost and genetic adsorbed water, volatile, there is a splitting of CH_x and CH - group. In the low frequency of the frequency-region (at 1200°C) four absorption bands observed with ν_{max} at 1618, 1480, 972 and 640 cm⁻¹, which differs in shape and intensity. These absorption bands are bending vibrations of organic-compounds which may be associated with loss of hydrogen due to the relationship CH_x groups.

Cavity №4 anthracite of deposit “Nazarailok” can be recommended for the production of cathode blocks for the purpose of lining of aluminum electrolytic. Thermal treatment anthracite is necessary to make at temperature not lower than 1200°C

Key words: IR-spectroscopy – anthracite – heattreatment – metamorphism – molecular structure – showcase.

**I-Й ТАДЖИКСКО-ЯПОНСКИЙ СИМПОЗИУМ ПО НАУКЕ,
ТЕХНИЛОГИИ И ИННОВАЦИИ**

С 19 по 22 марта 2015 г. в Душанбе проходил I-й Таджикско-Японский Симпозиум по науке, технологии и инновации, который был организован Университетом г. Цукуба (Япония) и Центром инновационного развития науки и новых технологий Академии наук Республики Таджикистан.

На открытии I-го Таджикско-Японского Симпозиума с приветственными обращениями к участникам выступили директор Центра инновационного развития науки и новых технологий Академии наук Республики Таджикистан, академик Мамадшо Илолов и второй секретарь Посольства Японии в Республике Таджикистан Йошиширо Хорие.

Далее участники Симпозиума ознакомились со следующими научными сообщениями:

- «Исследование биомасс водорослей в Университете г. Цукуба». (Профессор Макото Ватанабэ, Лаборатория биомасс водорослей и энергетических систем Института биологии и окружающей среды Университета г. Цукуба).
- «Обработка отходов, очищение окружающей среды и экстракция минералов». (Профессор Тоёхиса Фудзита, Центр инженерии и исследования артефактов факультета инновационных систем Университета г. Цукуба).
- «Перспектива использования энергии городского мусора для энергетической системы Таджикистана» (Гульнора Анварова, энергетический факультет Таджикского технического университета им. М.С.Осими).
- «Реактивные кислородные радикалы, которые ускоряют инвазию раковых клеток». (доктор Хирофуми Мацуи, Отделение гастроэнтерологии Института общечеловеческих наук Университета г. Цукуба).
- «Лечение рака в преклонном возрасте». (доктор Цуёши Канеко, (Отделение гастроэнтерологии Института общечеловеческих наук Университета г. Цукуба).
- «Гепатит В и рак печени в Таджикистане». (доктор Абдусамад Дустов, Институт гастроэнтерологии Академии медицинских наук Республики Таджикистан).

Итоги состоявшегося Симпозиума подвел в своей заключительной речи директор Центра инновационного развития науки и новых технологий АН Республики Таджикистан, академик Мамадшо Илолов.

20 марта гости из Японии отдали дань памяти доктору Ютака Акино (в прошлом декану факультета международных отношений Университета г. Цукуба) и возложили цветы у мемориальной плиты, установленной при входе в здание ПРООН в г. Душанбе. Док-

тор Акино погиб на пути установления мира в Таджикистане (вместе с другими сотрудниками ООН) 20 июля 1998 г., будучи сотрудником Миссии наблюдателей ООН в Таджикистане.

В этот же день японские ученые посетили ряд Научно-исследовательских институтов – Институт гастроэнтерологии Академии медицинских наук Республики Таджикистан, Институт химии им. В.И.Никитина АН РТ, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии АН РТ и Институт водных проблем, гидроэнергетики и экологии АН РТ, где ознакомились с инфраструктурой вышеуказанных учреждений и проводимыми в них научными исследованиями. Целью посещения было ознакомление с достижениями ученых, встреча с руководством и сотрудниками институтов для определения круга вопросов эффективного сотрудничества Японии и Таджикистана в области науки, технологии и инноваций, установление научных связей, дальнейшего обмена опытом. Гости из Японии представили своим таджикским коллегам краткие проспекты об университетах г. Цукуба и г.Токио.

21 марта по приглашению администрации Вахдатского района японские ученые приняли участие в праздновании Навруза. Администрация района по поручению председателя дала обед в честь высоких гостей в живописном месте пос. Явроз.

22 марта гости из Японии ознакомились с достопримечательностями г. Душанбе и посетили Гиссарскую крепость.

Подводя итоги посещения Таджикистана японские ученые выразили удовлетворение и надежду на дальнейшее сотрудничество, детали которого будут обсуждены в ближайшее время.

М.Илолов, Р.А.Бухаризода

**ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ОТДЕЛЕНИЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
№1 (158), 2015 г.**

Редакция и корректура – Н.Г.Сапожников

Сдано в набор 15.06.2015 г. Подписано в печать 29.06.2015 г.
Печать офсетная. Формат 70×100 1/16. Гарнитура Times. Усл. печ. л.8. Заказ № _____.
Тираж 300 экз.

*Адрес редколлегии: 734025, Душанбе, пр.Рудаки, 33, каб. 11.
Тел.:2-21-62-64. E-mail: danrt@mail.ru
Издательство «Дониш»: 734029, Душанбе, ул.Айни, 121, корп.2.*
