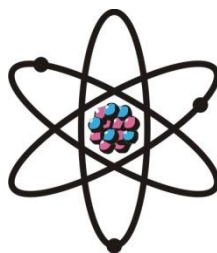


ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Журнал основан
в январе 1952 г.



№ 1 (162)
2016 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

С.О.Одинаев – главный редактор, академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Кохирова Г.И.** – зам.главного редактора, доктор физико-математических наук; **Н.Г.Сапожников** – ответственный секретарь; **Х.М.Ахмедов** – академик, доктор химических наук; **П.Б.Бабаджанов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Р.М.Марупов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **Х.Х.Муминов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Ф.Рахими** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Д.Усманов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

К.Тухлиев. Точные значения n -поперечников некоторых классов функций	7
М.Г.Ахмадиев, Ю.Х.Хасанов. Прямые методы решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений в задачах дифракции.....	15
С.З.Курбаншоев, Н.С.Якубов. Принцип сведения в теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве	23
Ч.Т.Ганиев, М.К.Юнуси. О решении одной интегро-дифференциальной системы уравнений, связанной с популяционной турбулентностью.....	33

М.Нурублоев. Краевые задачи для системы уравнений высокого порядка составного типа в n-мерном пространстве 40

ИНФОРМАТИКА

А.А.Косимов. О множестве анаграмм в поэме А.Фирдауси «Шахнаме» 48

Г.З.Рустамов. Частотность таджикских словоформ в коллекциях текстов детской и современной литературы 54

АСТРОНОМИЯ

Г.И.Кохирова, Ф.Рахими, С.В.Крючков, И.В.Николенко, А.Ш.Мулло-Абдолов, У.Х.Хамроев, С.Х.Абдуллоев. Новый «Первый свет» телескопа Цейсс-1000 международной астрономической обсерватории Санглох 59

АСТРОФИЗИКА

Д.Давлатзода, С.Х.Абдуллоев, Н.Х.Миникулов. Неоднозначные изменения показателей цвета цефеиды $v383$ суг с ослаблением блеска 71

ФИЗИКА

И.В.Амирханов, Х.Х.Муминов, И.Сархадов, А.Холов. Численное моделирование колебаний газового пузырька в жидкости под действием акустических волн 77

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Д.Н.Низомов, И.Каландарбеков, И.И.Каландарбеков. Расчёт неразрезных балок от действия статических нагрузок методом сосредоточенных деформаций 86

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Х.М.Ахмедов, Г.А.Ташбаев, К.Партоев, Ш.Абдуллоев, С.Абдуллаева. Применение ферментного препарата «Duozym» при производстве этилового спирта из топинамбура 93

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Р.О.Азизов, М.Х.Саидов. Температурные напряжения в системе «покрытие-основа» 100

ПЕТРОХИМИЯ

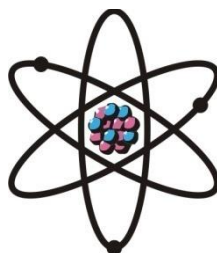
М.М.Мамадвафоев, И.У.Рахмонов. Петрохимия магматических комплексов бассейна реки Лойлякуль (Гиссарский хребет) 106

ПАЛЕОНТОЛОГИЯ

А.А.Сабиров. Систематика и филогения салпинготураммин (известковые фораминиферы) 113

ШҮЪБАИ
ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,
ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА

Маҷалла аз моҳи
январӣ соли 1952
нашр мешавад



№ 1 (162)
с. 2016

ҲАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:

С.О.Одинаев – сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;
Кохирова Г.И. – муовини сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;
Н.Г.Сапожников – котиби масъул; **Ҳ.М.Ахмедов** – академик, доктори илми химия;
Р.Б.Бобочонов – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;
И.Н.Ғаниев – академик, доктори илми химия, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Р.М.Маърупов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор;
Ҳ.Ҳ.Муминов – узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;
С.Х.Неъматуллоев – академик, доктори илмҳои техника; **Ф.Раҳимӣ** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Х.Раҳмонов** – узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Рачабов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҷ.Усмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;
А.Р.Ғайзиев – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва минералогия, профессор;
Ҷ.Х.Холиқов – академик, доктори илми химия, профессор.

МУНДАРИҶА

МАТЕМАТИКА

Қ.Тухлиев. Қимати аниқи n -қутрҳо дар баъзе синфҳои функсияҳо	7
М.Г.Ахмадиев, Ю.Х.Ҳасанов. Усулҳои ҳалли муодилаҳои сингулярии интегро-дифференсиалии назарияи дифраксия.....	15
С.З.Қурбоншоев, Н.С.Якубов. Усули овардашавӣ дар назарияи муодилаҳои дифференсиалии дар фазои банаҳӣ	23
Ч.Т.Ғаниев, М.К.Юнусӣ. Ҳалли як масъалаи интегро-дифференсиалии бо турбулентнокии афзоишӣ алоқамандбуда	33
М.Нуруллоев. Масъалаҳои канорӣ барои системаи муодилаи тартиби олии тип таркибӣ дар фазои n -ченака.....	40

ИНФОРМАТИКА

- А.А.Қосимов.** Оиди маҷмӯи анаграммаҳои китоби «Шоҳнома»–и А.Фирдавсӣ..... **48**
Г.З.Рустамов. Басомади воҳӯри ва назаррасии шаклҳои калима дар матнҳои адабиёти атфол ва навини тоҷик **54**

АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Қохирова, Ф.Раҳимӣ, С.В.Крючков, И.В.Николенко, А.Ш.Мулло-Абдолов, У.Х.Ҳамроев, С.Х.Абдуллоев.** «Нури Аввалини»-и нави телескопи Тсейсси-1000-и расадхонаи астрономии байналмилалӣ Санглох **59**

АСТРОФИЗИКА

- Д.Давлатзода, С.Х.Абдуллоев, Н.Х.Миникулов.** Тағйирёбии номуайяни нишондиҳандаҳои рангҳои сефеиди V383 Суг бо суштасавии дурахшони..... **70**

ФИЗИКА

- И.В.Амирхонов, Ҳ.Ҳ.Муминов, И.Сарҳадов, А.Холов.** Моделсозии адабии лапишҳои ҳубобчаи газӣ дар моеъ бо таъсири мавҷҳои акустикӣ **76**

МЕХАНИКАИ БИНОКОРӢ

- Ҷ.Н.Низомов, И.Қаландарбеков, И.И.Қаландарбеков.** Ҳисоби болорҳои бефосила аз таъсири қувваҳои статикӣ бо методи мутамарказкунии деформатсияҳо **85**

ХИМИЯИ ОРГАНИКӢ

- Ҳ.М.Ахмедов, Ғ.А.Ташбаев, Қ.Партоев, Ш.Абдуллоев, С.Абдуллоева.** Истифодаи препарати ферментӣ «Duozym» ҳангоми истехсоли спирти этилӣ аз топинамбур **92**

ХИМИЯИ ФИЗИКАВӢ

- Р.О.Азизов, М.Ҳ.Саидов.** Шиддатҳои ҳароратӣ дар маҷмуи «руйпӯш – асос» **99**

ПЕТРОХИМИЯ

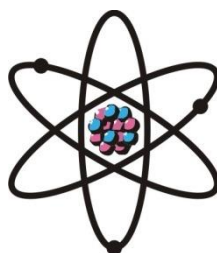
- М.М.Мамадвафоев, И.У.Раҳмонов.** Петрохимияи комплексҳои магматикии водии дарёи Лойлакул (Қаторкӯҳи Ҳисор)..... **105**

ПАЛЕОНТОЛОГИЯ

- А.А.Собиров.** Таснифот ва таҳаввулоти салпинготурамминаҳо (фораминифераҳои оҳаки)..... **112**

**DEPARTMENT OF
PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES**

The journal was established
in January 1952



№ 1 (162)
2016

EDITORIAL BOARD

Prof. **Saidmukhammad Odinaev**, Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; **Gulchekhra Kokhirova**, Doctor of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **Nikolay Sapozhnikov**, Secretary; **Khakim Akhmedov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Pulat Babadzhonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Abdulkhak Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **Mamadsho Iolov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Izatullo Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **Dzhuraboy Khalikov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Rakhim Marupov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Ulmas Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Khikmat Muminov**, Doctor of Physical and Mathematical; **Sabit Negmatullaev**, Doctor of Engineering; Prof. **Nusrat Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Farhod Rakhimi**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Zarullo Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Zafar Usmanov**, Doctor of Physical and Mathematical.

CONTENTS

MATHEMATICS

- K.Tukhliev**. The exact value of n -widths of some classes of functions..... 7
- M.G.Akhmadiev, Yu.Kh.Khasanov**. Direct methods for solving singular integro-differential equations in the diffraction problems 15
- S.Z.Kurbanshoev, N.S.Yakubov**. Principle information the theory of differential equations in Banach spaces..... 23
- Ch.T.Ganiev, M.K.Yunusi**. Solution of an integro-differential problems of the turbulence population..... 33
- M.Nurubloev**. Boundary value problems for a system of higher order equations of composite type in n -dimensional space 40

INFORMATICS

- A.A.Kosimov**. On a set of the anagrams in poem "Shehnomeh" by A.Firdousi 48
- G.Z.Rustamov**. Frequencies of tajik word forms of child and modern literature..... 54

ASTRONOMY

G.I.Kokhirova, F.Rakhimi, S.V.Kryuchkov, I.V.Nikolenko, A.Sh.Mullo-Abdolv, U.Kh.Khamroev, S.H.Abdulloev. New “First Light” of the telescope Zeiss-1000 of the International Astronomical Observatory Sanglokh **59**

ASTROPHYSICS

D.Davlatzoda, S.Kh.Abdulloev, N.Kh.Minikulov. Ambiguous color changes of cepheid V383 Cyg with fadings of light..... **70**

PHYSICS

I.V.Amirkhanov, Kh.Kh.Muminov, I.Sarhadov, A.Kholov. Numerical simulation of oscillations of a gas bubble in a liquid under the influence of acoustic waves..... **76**

STRUCTURAL MECHANICS

J.N.Nizomov, I.Kalandarbekov, I.I.Kalandarbekov. Calculation of action continuous beams static load by concentrated deformation method **85**

ORGANIC CHEMISTRY

Kh.M.Akhmedov, G.A.Tashbaev, K.Partoev, Sh.Abdullaev, S.Abdullaeva. The use of the «Duozym» drug at the production of ethyl alcohol from jerusalem artichoke..... **92**

PHYSICAL CHEMISTRY

R.O.Azizov, M.Kh.Saidov. Temperature voltage system "coverage – basis" **99**

PETROCHEMISTRY

M.M.Mamadvafoev, I.Y.Rachmonov. Petrochemistry of magmatic complexes of Loilacul river basin (Hissar ridge)..... **105**

PALEONTOLOGY

A.A.Sabirov. The taxonomy and phylogenesis of the *Salpingothuramina* (calcareous foraminifera) **112**

УДК 517.5

К.ТУХЛИЕВ

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ n -ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ФУНКЦИЙ

Худжандский государственный университет им. Б.Гафурова
Поступила в редакцию 17.09.2015 г.

Найдены точные значения различных n -поперечников для классов функций, возникающих при отыскании точных оценок скорости сходимости рядов Фурье-Бесселя.

Ключевые слова: функция Бесселя, наилучшие приближения, обобщённый модуль непрерывности m -го порядка, ряд Фурье-Бесселя, n -поперечники.

1. Данная статья является продолжением нашей работы [1]. Нам для изложения последующих результатов потребуются ряд определений и обозначений. Пусть S - единичный шар в пространстве L_2 ; $\Lambda_n \subset L_2$ - n -мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ - подпространство коразмерности n ; $\mathcal{L}: L_{2,\mu} \rightarrow \Lambda_n$ - линейный непрерывный оператор; $\mathcal{L}^\perp: L_{2,\mu} \rightarrow \Lambda_n$ - непрерывный оператор линейного проектирования; \mathfrak{M} - выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 . Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \|f - g\| : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\| : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L} L_2 \subset \Lambda_2 \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \inf \{ \|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \right\},$$

Адрес для корреспонденции: Тухлиев Камаридин. 735700, Республика Таджикистан, г.Худжанд, ул. Мавлонбекова, 1, Худжандский государственный университет. E-mail: kataridin.t54@mail.ru

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\| : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным* n -поперечниками подмножества \mathfrak{M} в пространство L_2 . Указанные n -поперечники монотонны по n и между ними в L_2 выполняются соотношения [2,3]:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}; L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}; L_2). \quad (1)$$

Введём классы функций, естественно вытекающие из теорем, доказанных в [1]. Пусть $h \in (0,1)$, $0 < p \leq 2$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi \geq 0$ – суммируемая на интервале $(0, h)$ неэквивалентная нулю функция. Через $W_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi)$ обозначим класс, состоящий из функций $f \in L_2^{(r)}(D)$, у которых $D^r f$ удовлетворяет условию

$$\int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t) \varphi(t) dt \leq 1.$$

Теорема 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h < 1$, $\varphi \geq 0$ – суммируемая на интервале $(0, h)$ неэквивалентная нулю функция. Тогда для произвольной $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \gamma_n(W_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi), L_2) &= E_{n-1}(W_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} = \\ &= \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\gamma_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$, а

$$E_{n-1}(W_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} := \sup \{ E_{n-1}(f)_2 : f \in W_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi) \}.$$

Доказательство. Оценку сверху всех перечисленных n -поперечников получаем используя неравенство (18) из [1], соотношение (1) и определение класса функций $W_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \gamma_n(W_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi), L_2) &\leq d_n(W_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi); L_2) \leq \\ &\leq E_{n-1}(W_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} \leq \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned}$$

Для получения оценок снизу на множестве $\mathcal{P}_n \cap L_2$ рассмотрим шар

$$S_{n+1} := \left\{ q_n \in \mathcal{P}_n : \|q_n\|_2 \leq \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \right\}$$

и докажем включение $S_{n+1} \subset W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$. Для произвольного полинома

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k(q_n) J_\nu(\lambda_k x) \in S_{n+1}$$

на основании формул (15), (16) из [1] и монотонного возрастания элементов последовательности собственных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \Omega_m(D^r q_n, t) &= \left\{ \sum_{k=1}^n (1-(1-t)^k)^{2m} \lambda_k^{4r} c_k^2(q_n) \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \lambda_n^{2r} (1-(1-t)^n)^m \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n c_k^2(q_n) \right\}^{1/2} = \lambda_n^{2r} (1-(1-t)^n)^m \cdot \|q_n\|. \end{aligned} \quad (3)$$

Возведя левую и правую части неравенства (3) в степень p , умножая их на весовую функцию φ и интегрируя обе части полученного таким образом неравенства по переменной t в пределах от $t = 0$ до $t = h$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^h \Omega_m^p(D^r q_n, t) \varphi(t) dt &\leq \lambda_n^{2rp} \cdot \|q_n\|^p \cdot \int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \leq \\ &\leq \lambda_n^{2rp} \cdot \int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \cdot \lambda_n^{-2rp} \cdot \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1} = 1, \end{aligned}$$

и, следовательно, включение $S_{n+1} \subset W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$ доказано. Но тогда, на основании определения бернштейновского n -поперечника и соотношения (1) между n -поперечниками, записываем

$$\begin{aligned} \gamma_n(W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi), L_2) &\geq b_n(W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi), L_2) \geq \\ &\geq b_n(S_{n+1}; L_2) \geq \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (4)$$

Сравнением оценки сверху (3) и оценки снизу (4) получаем равенства (2). Теорема 1 доказана. Из доказанной теоремы вытекает ряд утверждений.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 при $\varphi_*(t) := n(1-t)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \gamma_n(W_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi_*)) &= E_{n-1}(W_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi_*)) = \\ &= \left\{ \frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

В качестве второго следствия теоремы 1 будем рассматривать экстремальную задачу вычисления точной верхней грани модуля коэффициентов Фурье-Бесселя $c_n(f)$. Такая задача для периодических классов функций рассмотрена, например, в работе [4], а для коэффициентов Фурье разложения функций по ортогональным с весом полиномам в работах [5,6]. Для рассматриваемых здесь классов функций эта задача также представляет определённый интерес.

Следствие 2. Пусть $0 < p \leq 2$. Тогда для произвольной $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sup\{|c_n(f)| : f \in W_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi)\} &= \\ &= \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned}$$

Доказательство. Воспользуясь свойством ортогональности частичной суммы Фурье-Бесселя

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x),$$

для произвольной функции $f \in L_2$ запишем равенство

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \int_0^1 x f(x) J_\nu(\lambda_n x) dx = \int_0^1 x (f(x) - S_{n-1}(f, x)) J_\nu(\lambda_n x) dx = \\ &= \int_0^1 \{\sqrt{x}(f(x) - S_{n-1}(f, x))\} \cdot \{\sqrt{x} J_\nu(\lambda_n x)\} dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Оценив по модулю равенство (5) и применив неравенство Коши-Буняковского и формулу (2) из [1], получаем соотношение

$$|c_n(f)| \leq \|f - S_{n-1}(f)\| \cdot \|J_\nu(\lambda_n \cdot)\| = \|f - S_{n-1}(f)\| = E_{n-1}(f). \quad (6)$$

Из формул (2) и (6) получаем оценку сверху модуля коэффициентов на всём классе функций:

$$\begin{aligned} \sup\{|c_n(f)|: f \in \mathbf{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi)\} &\leq E_{n-1}(\mathbf{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi)) = \\ &= \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для получения оценки снизу величины, записанной в левой части неравенства (7), рассмотрим функцию

$$g_0(x) := \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \cdot J_\nu(\lambda_n x),$$

которая, легко проверить, содержится в шаре S_{n+1} , введенном при доказательстве теоремы 1. Но, так как $S_{n+1} \subset \mathbf{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi)$, то функция g_0 принадлежит этому же классу. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup\{|c_n(f)|: f \in \mathbf{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi)\} &\geq c_n(g_0) = \\ &= \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из сравнения оценки сверху (7) и оценки снизу (8) следует утверждение следствия 2.

2. Неубывающую на $[0, \infty]$ функцию Φ называют k -мажорантой [7, с.25], если функция $\Phi(t)/t^k$, где $k \in \mathbb{N}$ не возрастает на $(0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и при $t \rightarrow 0$ имеем $\Phi(t) \rightarrow 0$. Множество всех k -мажорант обозначаем символом $\mathcal{F}^{(k)}$.

Символом $\mathbf{W}_{m,k}^{(r)}(\mathcal{K}; \Phi)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}(D)$, для которых функция $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, t^m) \leq \Phi(t^m), \quad 0 < t \leq 1,$$

где Φ — произвольная функция из множества $\mathcal{F}^{(k)}$. В случае $k=1$ вместо символа $\mathbf{W}_{m,1}^{(r)}(\mathcal{K}; \Phi)$ напишем просто $\mathbf{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}; \Phi)$.

Теорема 2. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$, имеют место равенства

$$\gamma_n(\mathbf{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi), L_2) = E_{n-1}(\mathbf{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi))_{L_2} = \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}). \quad (9)$$

Доказательство. Используя определения класса $\mathbf{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)$ и применяя равенство (31) из [1] и неравенство (1), получаем оценку сверху

$$\begin{aligned}
\gamma_n(\mathbf{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi), L_2) &\leq d_n(\mathbf{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)) \leq \\
&\leq E_{n-1}(\mathbf{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi))_{L_2} = \sup\{E_{n-1}(f) : f \in \mathbf{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)\} \leq \\
&\leq \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2r}).
\end{aligned}$$

Для получения оценки снизу рассматриваемых n -поперечников нужно показать, что сфера обобщенных полиномов

$$\tilde{\mathcal{S}}_{n+1} := \{q_n \in \mathcal{P}_n : \|q_n\| \leq \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m})\}$$

содержится внутри класса $\mathbf{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)$, то есть имеет место включение $\tilde{\mathcal{S}}_{n+1} \subset \mathbf{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)$. Но так как в силу определения класса $\mathbf{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)$ функция $\Phi \in \mathcal{F}^{(1)}$, то для любых значений $0 < x_1 < x_2 \leq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{\Phi(x_1)}{x_1} \geq \frac{\Phi(x_2)}{x_2}. \quad (10)$$

Полагая в неравенстве (10) $x_1 = t_1^{2m}$, $x_2 = t_2^{2m}$, где $0 < t_1 < t_2 \leq 1$, имеем

$$\frac{\Phi(t_1^{2m})}{\Phi(t_2^{2m})} \geq \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{2m}. \quad (11)$$

Теперь заметим, что из соотношения (35) и (36) из [1] вытекает неравенство

$$\|\mathcal{D}^{r+m}(q_n)\| \leq \lambda_n^{2(r+m)} \cdot \|q_n\|, \quad q_n \in \mathcal{P}_n. \quad (12)$$

Пусть сперва $0 < t \leq 1/\lambda_n$. Используя неравенство (11), в котором полагаем $t_1 := t$, $t_2 := 1/\lambda_n$, применяя второе неравенство из соотношения (34) в [1] и неравенство (12), для произвольного полинома $q_n \in \tilde{\mathcal{S}}_{n+1}$ получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathcal{D}^r q_n, t^{2m}) &\leq t^{2m} \|\mathcal{D}^{r+m} q_n\| \leq t^{2m} \cdot \lambda_n^{2(r+m)} \|q_n\| \leq \\
&\leq t^{2m} \lambda_n^{2m} \cdot \Phi(\lambda_n^{-2m}) \leq \Phi(t^{2m}).
\end{aligned} \quad (13)$$

Если же $1/\lambda_n \leq t < 1$, то, используя первое неравенство в соотношении (34) и неравенство (36) из [1], а также учитывая, что мажоранта $\Phi \in \mathcal{F}^{(1)}$ является неубывающей функцией, для произвольного полинома $q_n \in \mathcal{P}_n$ имеем:

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}^r q_n, t^{2m}) \leq \|\mathcal{D}^r q_n\| \leq \lambda_n^r \|q_n\| \leq \Phi(\lambda_n^{-2m}) \leq \Phi(t^{2m}). \quad (14)$$

Таким образом, из неравенств (13) и (14) следует включение $\tilde{\mathcal{S}}_{n+1} \subset \mathbf{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)$ и, согласно определению бернштейновского n -поперечника и соотношению (1), запишем оценки снизу

$$\begin{aligned} \gamma_n(W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi), L_2) &\geq b_n(W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi), L_2) \geq \\ &\geq b_n(\tilde{S}_{n+1}, L_2) \geq \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}). \end{aligned} \quad (15)$$

Равенства (9) следуют из оценок (11) и (15), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Следствие 3. При выполнении условий теоремы 2 при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)\} = \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}).$$

Доказательство утверждения следствия 3 не приводится, поскольку оно повторяет схему доказательства следствия 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тухлиев К., Муродов К.Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье-Бесселя и значения n -поперечников некоторых классов функций. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2015, №4(161), с.16-26.
2. Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1985, 292 p.
3. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Издательство МГУ, 1976, 325 с.
4. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 . – Analysis Mathematica, 2008, т.38, №2, с.147-159.
5. Вакарчук С.Б., Швачко А.Ю. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций. – Укр.матем.журн, 2013, т.65, №12, с.1604-1621.
6. Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита и поперечники функциональных классов. – Матем.заметки, 2014, т.95, вып.5, с.666-684.
7. Шевчук А.И. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наукова думка, 1992, 224 с.

Қ.ТУХЛИЕВ

ҚИМАТИ АНИҚИ n -ҚУТРҲО ДАР БАЪЗЕ СИНФҲОИ ФУНКСИЯҲО

Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи Б.Ғ.Гафуров

Қимати аниқи n -қутрҳои ҳархела барои синфи функсияҳои, ки дар вақти баҳо додани суръати наздикшавии қаторҳои Фурье-Бессел пайдо мешавад ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: функсияи Бессел, наздикунии беҳтарин, модули бефосилаи умумикардашудаи тартиби m , қаторҳои Фурье-Бессел, n -қутрҳо.

K.TUKHLIEV

THE EXACT VALUE OF n -WIDTHS OF SOME CLASSES OF FUNCTIONS

B.G.Gafurov Khugand State University

The exact meaning of the various n -widths for the classes of functions encountered in accurate estimates of the rate convergence of Fourier-Bessel finding was found.

Key words: Bessel function, best approximation, ranks of Fourier-Bessel, generalized modulus of continuity of m -th order, n -widths.

УДК 517.948

М.Г.АХМАДИЕВ, Ю.Х.ХАСАНОВ*

**ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ**

Казанский национальный исследовательский технологический университет,

**Российско-Таджикский (Славянский) университет*

Поступила в редакцию 14.09.2015 г.

В работе приведены некоторые прямые методы приближенного решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения, встречающиеся в задачах дифракции с заданными на отрезке квадратично суммируемыми функциями. В зависимости от структурных свойств коэффициентов уравнения уточнены скорости сходимости рассматриваемых методов.

Ключевые слова: сингулярное интегро-дифференциальное уравнение, задача дифракции, метод коллокации, метод Галеркина, метод наименьших квадратов, скорость сходимости метода.

Рассмотрим сингулярное интегро-дифференциальное уравнение, которое возникает в задачах теории дифракции

$$\frac{d}{dt} \int_{-b}^b \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_{-b}^b \frac{h(t,\tau)}{(\tau-t)^\lambda} \varphi(\tau) d\tau = f(t) \quad (-b < t < b), \quad (1)$$

при условиях

$$\varphi(-b) = \varphi(b) = 0, \quad (2)$$

где $h(t,\tau)$ и $f(t)$ – заданные функции, $\varphi(t)$ – неизвестная функция, λ – числовой параметр $0 \leq \lambda < 1$, а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши[1], b – конечное вещественное число.

Адрес для корреспонденции: Хасанов Юсуфали. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Мирзо Турсун-заде, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: yukhas60@mail.ru

В работе [2] задача (1)-(2) решается методом кусочно-постоянной аппроксимации.

В данной работе нам удалось найти решение задачи (1)-(2) некоторыми прямыми приближенными методами, при этом предполагается, что $h(t, \tau)$ и $f(t)$ являются непрерывными или квадратично суммируемыми функциями на $[-b, b]$.

Решение неизвестной функции $\varphi(t)$ задачи (1)-(2) ищем в виде

$$\varphi(t) = \sqrt{b^2 - t^2} x(t),$$

где $x(t)$ – ограниченная функция на $[-b, b]$. Введем пространство $L_{2,\rho}$ квадратично суммируемых функций с весом $\rho(t) = \sqrt{b^2 - t^2}$, а также линейное нормированное пространство функций $L_{2,\rho}^{(1)}$, первые производные которых квадратично суммируемы с весом $\rho(t)$, с нормой

$$\|\varphi\|_{L_{2,\rho}^{(1)}} = \left(\int_{-b}^b \rho(t) |\varphi'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (-b < t < b).$$

Рассмотрим также оператор, действующий из $L_{2,\rho}^{(1)}$ в C вида

$$(T\varphi)(t) = \int_{-b}^b \frac{h(t, \tau)}{|t - \tau|^\lambda} \varphi(\tau) d\tau \quad (0 \leq \lambda < 1).$$

Если $h(t, \tau)$ ограниченная непрерывная функция, то этот оператор является вполне непрерывным [3].

1. Метод коллокации. Пусть $X = L_{2,\rho}^{(1)}, Y = L_{2,\rho}$. Тогда задачу (1)-(2) запишем в следующем операторном виде

$$K\varphi \equiv S\varphi + T\varphi = f, \varphi \in X, f \in Y, \quad (3)$$

где

$$S\varphi = \frac{d}{dt} \int_{-b}^b \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad T\varphi = \int_{-b}^b \frac{h(t, \tau)}{|t - \tau|^\lambda} \varphi(\tau) d\tau,$$

K – линейный ограниченный оператор из X в Y .

Приближенное решение задачи (1)-(2) ищем в виде

$$\varphi_n(t) = \sqrt{b^2 - t^2} \sum_{k=1}^n \alpha_k U_{k-1} \left(\frac{t}{b} \right), \quad (4)$$

где $U_{k-1}(s)$ – полиномы Чебышева второго рода степени k .

Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяем из системы линейных алгебраических уравнений

$$-\pi \sum_{k=1}^n k \alpha_k U_{k-1}\left(\frac{t_j}{b}\right) + \sum_{k=1}^n \alpha_k (Tu_k)(t_j) = f(t_j), \quad (5)$$

$$t_j = b \cos \frac{j\pi}{n+1} \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

где $u_k(t) = \sqrt{b^2 - t^2} U_{k-1}\left(\frac{t}{b}\right)$.

Теорема 1. Пусть $f, h \in C$ и уравнение (3) однозначно разрешимо в X при любом $f \in Y$. Тогда при n таких, что

$$q_n = A_0 K^{-1} \left\{ \omega'(h, \delta)_C + \delta^{1-\lambda} \right\} < 1, \quad (6)$$

система метода коллокации (5) имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}$ и приближенные решения $\varphi_n^* = \sum_{k=1}^n \alpha_k^* u_k$ сходятся к точному решению φ^* в пространстве $L_{2,\rho}^{(1)}$ со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\| \leq \frac{\|K^{-1}\|}{1 - q_n} \left\{ \sqrt{2\pi} b E_{n-1}(f)_C + q_n \|f\|_{L_{2,\rho}} \right\}, \quad (7)$$

где $\omega'(h, \delta)$ – модуль непрерывности функции $h(t, \tau)$ по переменной t , $E_{n-1}(f)_C$ – наилучшее равномерное приближение функции f полиномами степени не выше $n-1$, A_0 – вполне определенная постоянная, не зависящая от n .

Доказательство. Пусть $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ – мерные подпространства алгебраических полиномов степени не выше n с нормами соответственно из X и Y . Систему (5) запишем в виде эквивалентного ей линейного операторного уравнения

$$K_n \varphi_n \equiv S \varphi_n + P_n T \varphi_n = P_n f, \quad \varphi_n \in X_n, P_n f \in Y_n, \quad (8)$$

где K_n – линейный оператор из $X_n \subset Y_n$, P_n – оператор, ставящий в соответствие любой непрерывной функции ее интерполяционный полином Лагранжа по узлам $t_j (j=1, 2, \dots, n)$ из (5).

Для любого $\varphi_n \in X_n$, используя теорему Эрдеша-Турана (см., например [4]), находим

$$\begin{aligned} \|K\varphi_n - K_n\varphi_n\|_{L_{2,\rho}} &= \|T\varphi_n - P_n T\varphi_n\|_{L_{2,\rho}} \leq 2 \left(\int_{-b}^b \rho(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} E_{n-1}(T\varphi_n)_C = \\ &= \sqrt{2\pi} b E_{n-1}(T\varphi_n)_C \leq \sqrt{2\pi} b (b\pi + 1) \omega \left(T\varphi_n; \frac{1}{n} \right)_C. \end{aligned}$$

Оценим величину $\omega \left(T\varphi_n; \frac{1}{n} \right)_C$ методом, предложенным в работе [5].

$$\omega(T\varphi_n; \delta)_C \leq A_1 \{ \omega^t(h; \delta)_C + \delta^{1-\lambda} \} \|\varphi_n\|_C \leq A_2 \{ \omega^t(h; \delta)_C + \delta^{1-\lambda} \} \|\varphi\|_{L_{2,\rho}^{(1)}},$$

где $A_1 = \max \left(\frac{2b^{1-\lambda}}{1-\lambda}, M(h) \frac{2(2^\lambda + 1)}{1-\lambda} \right)$, $A_2 = \sqrt{\pi} A_1$, $\delta = \frac{1}{n}$,

а постоянная $M(h)$ определяется соотношением $|h(t, \tau)| \leq M(h)$.

Так как оператор K из (3) в условиях теоремы линейно обратим, то для достаточно больших n выполняется неравенство (6). Тогда (см. [6], гл. 1, теоремы 14) операторы K_n из (8) также линейно обратимы, в частности система (5) имеет единственное решение, и легко получается оценка (7).

Теорема 2. В условиях теоремы 1 приближенные решения φ_n^* , полученные методом коллокации, сходятся к точному решению со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{L_{2,\rho}^{(1)}} \leq A_3 E_{n-1}(S\varphi^*)_C,$$

где A_3 – определенная константа.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично работе [7] (см. [7], теорема 2), используя при этом работу [6] (см. [6], гл. 1, теорема 14) и некоторые результаты работы [8], касающиеся оператора S .

Следствие 1. В предположениях теоремы 1 приближенные решения φ_n^* сходятся к точному решению φ^* со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{L_{2,\rho}^{(1)}} \leq A_3 \{ E_{n-1}(f)_C + E_{n-1}(T\varphi^*)_C \},$$

где A_3 – определенная константа.

В зависимости от структурных свойств коэффициентов уравнения скорость сходимости метода можно конкретизировать. В частности, если коэффициенты уравнения (3) таковы, что $S\varphi^* \in H_\mu^{(r)}$, то приближенные решения φ_n^* сходятся со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{L_{2,\rho}^{(1)}} \leq A_4 n^{-(r+\mu)} \quad (0 < \mu \leq 1, r \geq 0).$$

2. Метод Галеркина. Приближенное решение задачи (1)-(2) будем искать в виде (4). Неизвестные коэффициенты определяем из системы

$$-\frac{b^2 \pi^2}{2} j \alpha_j + \sum_{k=1}^n \alpha_k (Tu_k, \psi_j) = (f, \psi_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

где $(\varphi, \psi) = \int_{-b}^b \rho(t) \varphi(t) \psi(t) dt$ – скалярное произведение в $L_{2,\rho}$,

$$\psi_j = U_{j-1} \left(\frac{t}{b} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 3. Пусть $h(t, \tau)$ – ограниченная на $D = [-b, b]^2$ функция, и уравнение (3) однозначно разрешимо в $X = L_{2,\rho}^{(1)}$ при любом $f \in Y = L_{2,\rho}$. Тогда при достаточно больших n система (9) имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}$ и приближенные решения $\varphi_n^* = \sum_{k=1}^n \alpha_k^* u_k$ сходятся к точному решению φ^* со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{L_{2,\rho}^{(1)}} \leq A_5 E_n(S\varphi^*)_{L_{2,\rho}}, \quad (10)$$

где A_5 – определенная константа.

Доказательство. Систему (9) запишем в операторном виде

$$K_n \varphi_n \equiv S\varphi_n + P_n T \varphi_n = P_n f, \quad \varphi_n \in X_n, \quad P_n f \in Y_n,$$

где K_n – линейный оператор из X_n в Y_n , P_n – оператор Фурье-Чебышева, ставящий в соответствие любой функции из $L_{2,\rho}$ n -ый отрезок ее ряда Фурье по системе $\{\psi_j\}$, а подпространства $X_n \subset X, Y_n \subset Y$ определены при доказательстве теоремы 1.

Для любого $\varphi_n \in X_n$ находим

$$\|K\varphi_n - K_n \varphi_n\|_{L_{2,\rho}} = \|T\varphi_n - P_n T \varphi_n\|_{L_{2,\rho}} = E_n(T\varphi_n)_{L_{2,\rho}},$$

где $E_n(\phi)_{L_{2,\rho}}$ – наилучшее среднеквадратическое приближение функции $\phi \in L_{2,\rho}$ полиномами степени не выше n . В силу вполне непрерывности оператора T получим, что

$$K - K_{nX_n \rightarrow Y} = T - P_n T_{X_n \rightarrow Y} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

Тогда (см. [6], гл.1, теоремы 14) при достаточно больших n система (9) имеет единственное решение и приближенные решения сходятся к точному решению и легко получается оценка (10).

Следствие 2. В предположениях теоремы 3 приближенные решения φ_n^* сходятся к точному решению со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{L_{2,\rho}^{(1)}} \leq A_5 \left\{ E_n(f)_{L_{2,\rho}} + E_n(T\varphi^*)_{L_{2,\rho}} \right\},$$

где A_5 – константа из (10).

3. Метод наименьших квадратов. Приближенное решение задачи (1)-(2) будем искать в виде (4). Неизвестные коэффициенты определяем из системы

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{kj} = f_j \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (11)$$

где

$$\beta_{kj} = \int_{-b}^b \left\{ -\pi k U_{k-1} \left(\frac{t}{b} \right) + (Tu_k)(t) \right\} \left\{ -\pi j U_{j-1} \left(\frac{t}{b} \right) + (Tu_j)(t) \right\} \sqrt{b^2 - t^2} dt,$$

$$f_j = \int_{-b}^b f(t) \left\{ -\pi j U_{j-1} \left(\frac{t}{b} \right) + (Tu_j)(t) \right\} \sqrt{b^2 - t^2} dt.$$

Теорема 4. Пусть уравнение (3) разрешимо в X при данной правой части $f \in Y$. Тогда система (11) имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}$ при любых n и приближенные решения $\varphi_n^* = \sum_{k=1}^n \alpha_k^* u_k$ сходятся к точному решению φ^* в том смысле, что $K\varphi_n \rightarrow f$ и справедлива оценка

$$\|f - K\varphi_n^*\|_{L_{2,\rho}} \leq \|K\| E_n(\varphi^*)_{L_{2,\rho}} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Если, кроме того, уравнение (3) однозначно разрешимо при любой правой части $f \in Y$, то

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{L_{2,\rho}} \leq \eta(K) E_n(\varphi^*)_{L_{2,\rho}} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично работе [9] (см. [9], теорема 1).

Замечание 1. Приведенные выше теоремы 1-4 легко переносятся на уравнение более общего вида

$$\frac{d}{dt} \int_{-b}^b \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_{-b}^b \frac{\ln^m |t-\tau|}{|t-\tau|^\lambda} h(t,\tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t),$$

где m – целые неотрицательные числа, $0 \leq \lambda < 1$. При этом достаточно воспользоваться некоторыми результатами работы [10] относительно свойств интегрального оператора

$$(T\varphi) = \int_{-b}^b \frac{\ln^m |t-\tau|}{|t-\tau|^\lambda} h(t,\tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Замечание 2. В условиях теорем 1-4 операторы K_n линейно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности. Поэтому следует, что (см. [6], гл. 1, §5) рассмотренные нами методы устойчивы относительно малых возмущений элементов аппроксимирующих уравнений.

Замечание 3. Из работы [6] (см. [6], гл. 1, §5) также следует, что если существует числа обусловленности $\eta = \eta(K)$ для точных уравнений [9]

$$\frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_{-1}^1 \frac{h(t,\tau)}{(\tau-t)^\lambda} \varphi(\tau) d\tau = f(t) \quad (-1 < t < 1)$$

и (3), то в условиях теорем 1-4 хотя бы при достаточно больших n существуют числа обусловленности $\eta_k = \eta(K_n)$ для аппроксимирующих уравнений, причем

$$\eta_k \leq q\eta \quad (1 \leq q \leq 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0, n \geq n_0(\varepsilon)), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968, 512 с.
2. Захаров Е.В., Собянина И.В. О численном решении сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в задачах дифракции. – Тез. докл. всесоюз. симпоз. “Метод дискретных особенностей в задачах математической физики”. – Харьков, 1985, с. 48-50.
3. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968, 575 с.
4. Натансон П.Н. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949, 688 с.
5. Габдулхаев Б.Г., Душков П.Н. – Приложение функционального анализа к приближенным вычислениям. – Казань: изд-во КГУ, 1974, с. 37-57.
6. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: изд-во КГУ, 1980, 232 с.
7. Ахмадиев М.Г. О прямых методах решения одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. – Казань, 1985, 19 с. Рук.деп. в ВИНТИ, №5366-85.

8. Хведелидзе Б.В. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения. – Тр. матем. ин-та АН ГрузССР, 1957, 23, с.3-158.
9. Ахмадиев М.Г., Хасанов Ю.Х. - Приближенные методы решения интегро-дифференциальных уравнений. – ДАН РТ, 2015, т.58, №3 (в печати).
10. Габдулхаев Б.Г., Горлов В.Е. – Функциональный анализ и его приложения. – Казань: изд-во КГУ, 1975, с. 60-72.

М.Г.АХМАДИЕВ, Ю.Х.ҲАСАНОВ*

УСУЛҲОИ ҲАЛЛИ МУОДИЛАҲОИ СИНГУЛЯРИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНСИАЛИИ НАЗАРИЯИ ДИФРАКСИЯ

Донишгоҳи миллии тадқиқотии технологияи Қазон,

**Донишгоҳи Славянии Россияву Тоҷикистон*

Дар мақола усулҳои бевоситаи тақрибии ҳалли муодилаҳои сингулярии интегро-дифференсиалии назарияи дифраксия бо функцияҳои дар порча суммиронидашавандаи квадратӣ тадқиқ карда шудаанд. Вобаста аз хосиятҳои тақрибии коэффициентҳои муодила наздикшавии метод аниқ карда мешавад.

Калимаҳои калидӣ: муодилаҳои сингулярии интегро-дифференсиалӣ, масъалаи дифраксия, усули коллокатсия, усули Галеркин, усули квадратҳои хурдтарин, суръати наздикшавии усул.

M.G.AKHMADIEV, YU.KH.KHASANOV*

DIRECT METHODS FOR SOLVING SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE DIFFRACTION PROBLEMS

Kasan National Research Technological University,

**Russian-Tajik Slavonic University*

In the article some direct methods for solving singular integro-differential equations arising in diffraction problems on a segment square-summable functions are given. Convergence velocity of considered methods is corrected depending on structure characteristic properties of the equation's coefficients.

Key words: singular integro-differential equation, diffractions problem, collocations method, Galerkin method, least square method, convergence velocity of the method.

УДК 517.9

С.З.КУРБАНШОЕВ, Н.С.ЯКУБОВ *

ПРИНЦИП СВЕДЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Российско-Таджикский (Славянский) университет,

** Таджикский технический университет им. акад. М.С. Осими.*

Поступила в редакцию 19.11.2015 г.

В статье рассматривается метод сведения Ляпунова нелокального характера с помощью построения специальных интегральных многообразий, указываются достаточные и необходимые условия применимости принципа сведения для системы достаточно общего вида. Указаны замены, осуществляющие сведение.

Ключевые слова: метод сведения, интегральные неравенства, интегральное многообразие, метод последовательных приближений.

При исследовании устойчивости в критических случаях А.М.Ляпуновым [1] был использован приём, получивший название принципа сведения. Этот метод позволяет свести вопрос об устойчивости решений заданной системы при наличии критической части спектра у оператора, стоящего коэффициентом в главной линейной части, к вопросу об устойчивости решений уравнения относительно критических переменных и, таким образом, свести задачу об устойчивости для исследуемой системы, рассматриваемой в конечномерном нормированном пространстве B , к задаче об устойчивости для уравнения меньшей размерности.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + \mu\varphi(t, x, y) & x \in B_1, \\ \frac{dy}{dt} = B(t)y + f(t, y) + \mu\psi(t, x, y), & y \in B_2. \end{cases} \quad (1)$$

Адрес для корреспонденции: Курбанишоев Сафарали Завкибекович. 734025, Республика Таджикистан г. Душанбе, ул. Мирзо Турсун-заде, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет.
E-mail:ksz_48_@hotmail.com

Здесь B_1, B_2 – некоторые банаховы пространства. Предполагаем, что оператор-функции f, φ, ψ – непрерывны по t при $t \geq 0$ и удовлетворяют условиям Липшица:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x_1, y_1) - \varphi(t, x_2, y_2)\| &\leq L_0 \|x_1 - x_2\| + L_1 \|y_1 - y_2\|, \\ \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| &\leq L_2 \|y_1 - y_2\|, \\ \|\psi(t, x_1, y_1) - \psi(t, x_2, y_2)\| &\leq L_3 \|x_1 - x_2\| + L_4 \|y_1 - y_2\|, \end{aligned} \quad (2)$$

и их разложения в степенные ряды начинаются с членов не ниже второго порядка.

Дополнительно будем предполагать ограниченность этих функций при $x = 0, y = 0$:

$$\|\varphi(t, 0, 0)\| \leq M_0, \quad \|f(t, 0)\| \leq M_1, \quad \|\psi(t, 0, 0)\| \leq M_2. \quad (3)$$

Предполагаем, что операторы $A(t), B(t)$ – линейные, локально интегрируемые при $t \geq 0$. Пусть дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad \frac{dy}{dt} = B(t)y$$

имеют соответственно разрешающие операторы $P(t, \tau), N(t, \tau)$, для которых выполняются условия:

$$\|P(t, \tau)\| \leq ce^{-\lambda(t-\tau)}, \quad \|N(t, t)\| \equiv 1 \quad (\lambda > 0, c \geq 1, t \geq \tau \geq 0). \quad (4)$$

Предполагаем выполнение условия $\lambda > L_0$.

При $\mu = 0$ система (1) распадается на независимые уравнения, когда вопрос об устойчивости решений [1] системы (1) целиком зависит от второго из уравнений. Ниже указывается значение μ_0 ($\mu_0 > 0$) такое, что при $|\mu| < \mu_0$ можно построить вспомогательное уравнение в B_1 , устойчивость решений которого равносильна устойчивости соответствующих решений системы (1).

В дальнейшем приходится неоднократно решать интегральные неравенства специального вида, которые решаются используя следующую лемму.

Лемма. Пусть решение функционального уравнения

$$y = Ay + v, \quad y, v \in B \quad (*)$$

в полупорядоченном банаховом пространстве B может быть всегда получено методом последовательных приближений:

$$y_{n+1} = Ay_n + v, \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Если оператор A такой, что из неравенства $x \geq y$ всегда следует выполнение неравенства $Ax \geq Ay$, то решение неравенства $y \leq Ay$ имеет вид $y \leq x$, где x – решение уравнения: $x = Ax$.

Доказательство леммы. Из неравенства $y \leq Ay$ следует, что для каждого y найдётся такой элемент $v \in B$, что будет выполнено равенство (*). Решения уравнений (*) и $x = Ax$ ищем методом последовательных приближений [2], полагая $y_0 = x_0$. Пусть при некотором значении n известно, что $y_n \leq x_n$.

Для последующих приближений получим:

$$y_{n+1} \leq Ay_n + v \leq Ay_n \leq Ax_n = x_{n+1}.$$

Следовательно, при всех n выполнено неравенство $y_n \leq x_n$. Предельный переход при $n \rightarrow \infty$ доказывает лемму.

Рассмотрим отдельно первое уравнение системы (1). Для этого считаем функцию $y(t)$ известной. Через $R(t, x_0, y(\tau))$ обозначим решение дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \mu\varphi(t, x, y(t)), \quad x|_{t=0} = x_0.$$

Для оператора R имеет место интегральное уравнение

$$R(t, x_0, y(t)) = P(t, 0)x_0 + \mu \int_0^t P(t, s)\psi(s, y(s), R(s, x_0, y(\tau)))ds. \quad (5)$$

Укажем некоторые свойства оператора $R(t, x_0, y(\tau))$.

а. Подставляя в (5) $y(\tau) \equiv 0$, получим неравенство

$$\|R(t, x_0, 0)\| \leq ce^{-\lambda t} \|x_0\| + |\mu| \int_0^t ce^{-\lambda(t-s)} (M_2 + L_4 \|R(s, x_0, 0)\|) ds.$$

Решая интегральное неравенство, получим оценку:

$$\|R(t, x_0, 0)\| \leq c \|x_0\| e^{-L_6 t} + |\mu| c M_2 L_6^{-1}, \quad L_6 \equiv \lambda - |\mu| c L_4. \quad (6)$$

б. Пусть при всех $\tau \leq t$ выполнено неравенство

$$\|y_1(\tau) - y_2(\tau)\| \leq q(\tau).$$

Из уравнения (5), составленного при $y = y_1(\tau)$, $y = y_2(\tau)$, получим интегральное нера-

венство $p(t) \leq ce^{-\tau t} \|x_1 - x_2\| + |\mu| \int_0^t ce^{-\lambda(t-s)} (L_4 p(s) + L_3 q(s)) ds$, где введено обозначение

$p(t) = \|R(t, x_1, y_1(\tau)) - R(t, x_2, y_2(\tau))\|$. Решение неравенства с помощью леммы имеет вид:

$$p(t) \leq ce^{-L_6 t} \|x_1 - x_2\| + |\mu| cL_3 \int_0^t e^{-L_6(t-s)} q(s) ds. \quad (7)$$

В важном частном случае, когда выполнены неравенства

$$\|y_1(\tau) - y_2(\tau)\| \leq Qe^{L(t-s)}, \quad \lambda - L - |\mu| cL_4 > 0,$$

из (7) получим оценку:

$$\|R(t, 0, y_1(\tau)) - R(t, 0, y_2(\tau))\| \leq \frac{|\mu| cL_3 Q}{\lambda - L - |\mu| cL_4}. \quad (8)$$

в. Пусть для функции $\psi(t, x, y)$ в (1) выполнено равномерно при $t \geq 0$ дополнительное условие:

$$\|\psi(t, 0, y)\| \leq \alpha \|y\|^n \quad (n > 0, \quad \alpha = const).$$

Пусть выполнены неравенства $\|y(\tau)\| \leq \|y\| e^{L(t-s)}$, $\lambda - nL - |\mu| cL_4 > 0$.

Из уравнения (5) при $x_0 = 0$ получим интегральное неравенство

$$\|R(t, 0, y(\tau))\| \leq |\mu| \int_0^t ce^{-\lambda(t-s)} (\alpha \|y\|^n e^{nL(t-s)} + L_4 \|R(s, 0, y(\tau))\|) ds.$$

Решение этого неравенства приводит к оценке:

$$\|R(t, 0, y(\tau))\| \leq \beta \|y\|^n, \quad \beta \equiv \frac{|\mu| c\alpha}{\lambda - nL - |\mu| cL_4}.$$

При известном операторе $R(t, x_0, y(\tau))$ интегрирование системы (1) сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + f(t, x) + \mu\psi(t, R(t, x_0, y(\tau)), y). \quad (9)$$

Значения оператора $R(t, x_0, y(\tau))$ определены, если известны значения функции $y(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq t$. Аналогичные операторы использовались ранее, например в работе [3].

Все решения системы (1), удовлетворяющие начальному условию $x|_{t=0} = x_0$ при закрепленном x_0 и произвольных значениях $y(0)$, образуют интегральное многообразие

[4], которое будем обозначать через $G(x_0)$. В некоторых случаях оно представимо уравнением

$$x = g(t, x_0, y). \quad (10)$$

Очевидно, что будет выполняться тождество $g(0, x_0, y) \equiv x_0$.

Предполагая, что в нашем случае возможно представление интегрального многообразия уравнением (10), построим вспомогательное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + f(t, y) + \mu\psi(t, g(t, x_0, y), y), \quad y = y(t), \quad (11)$$

все решения которого совпадают с решениями уравнения (9). Отметим принципиальную разницу уравнений (9) и (11). Для вычисления правой части уравнения (9) необходимо знать решение $y(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq t$. Поэтому уравнение (9) можно называть дифференциально-функциональным уравнением, частным случаем которого является интегродифференциальное уравнение. Для вычисления правой части уравнения (11) в момент t достаточно знать $y(t)$. Уравнение (11) представляет систему (1) на многообразии $G(y_0)$. При известном y значение x находится по формуле (10).

Функция $g(t, x_0, y)$ неизвестна, но если она существует, то выполняется тождество $g(t, x_0, y) \equiv R(t, x_0, y(\tau))$, где $y(\tau)$ – решение интегрального уравнения:

$$y(\tau) = N(\tau, t)y + \int_t^\tau N(\tau, s)[f(s, y(s)) + \mu\psi(s, y(s), g(s, x_0, y(s)))]ds.$$

Для построения функции $g(t, x_0, y)$ используем метод последовательных приближений в форме, предложенной в работе [5]. Будем сначала рассматривать для простоты обозначений частный случай, когда $x_0 = 0$, полагая $g(t, y) \equiv g(t, 0, y)$. Сам метод последовательных приближений примет вид:

$$g_0(t, y) \equiv 0, \quad g_{n+1}(t, y) = R(t, 0, y_n(\tau)) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (12)$$

$$y_n(\tau) = N(\tau, t)y + \int_t^\tau N(\tau, s)[f(s, y_n(s)) + \mu\psi(s, y_n(s), g_n(s, y_n(s)))]ds. \quad (13)$$

Ниже рассматриваются свойства последовательности функций $g_n(t, y)$. Другой, но по существу близкий способ построения интегральных многообразий использован в работе [6].

Покажем сначала, что при определенных условиях функции $g_n(t, y)$ удовлетворяют условию Липшица с общей постоянной Липшица. Пусть выполнено условие

$$\|g_n(t, y) - g_n(t, y^*)\| \leq L_5 \|y - y^*\|. \quad (14)$$

Для соответствующих решений $y_n(\tau), y_n^*(\tau)$, обращающихся при $\tau = t$ в y, y^* , из уравнения (11) при $\tau \leq t$ получим интегральное неравенство

$$\|y_n(\tau) - y_n^*(\tau)\| \leq \|y - y^*\| + \int_{\tau}^t L \|y_n(s) - y_n^*(s)\| ds, \quad L \equiv L_0 + |\mu| L_1 + |\mu| L_2 L_5.$$

Решая это неравенство с помощью леммы, получим оценку:

$$\|y_n(\tau) - y_n^*(\tau)\| \leq \|y - y^*\| e^{L(t-\tau)}.$$

Из формулы (8) получим, с учётом (12), неравенство

$$\|g_{n+1}(t, y) - g_{n+1}(t, y^*)\| \leq |\mu| c L_5 (\lambda - L - |\mu| c L_4)^{-1}.$$

Следовательно, если выполняется неравенство

$$L_5 \geq \frac{|\mu| c L_3}{\lambda - L_0 - |\mu| L_1 - |\mu| c L_4 - |\mu| L_2 L_5}, \quad (15)$$

то условие Липшица (14), выполненное при $n = 0$, будет выполняться при всех $n = 1, 2, \dots$. Положительное решение L_5 неравенства (15) существует при $|\mu| \leq \mu_0$, где обозначено:

$$\mu_0 = \frac{\lambda - L_0}{L_1 + 2\sqrt{c L_2 L_3} + c L_4}. \quad (16)$$

При $|\mu| \leq \mu_0$ находим наименьшее значение L_5 :

$$L_5 = \frac{2|\mu| c L_3}{L_7 + \sqrt{L_7^2 - 4|\mu|^2 c L_2 L_3}}, \quad (17)$$

$$L_7 \equiv \lambda - L_0 - |\mu| L_1 - |\mu| c L_4.$$

При $\mu = \mu_0$ параметры L_5, L достигают наибольших значений L_5^0, L^0 , пригодных при всех значениях μ таких, что $|\mu| \leq \mu_0$. Подставляя $\mu = \mu_0$, находим значения L_5^0, L^0 :

$$L_5^0 = \sqrt{c L_3 L_2^{-1}}, \quad L^0 = L_0 + \mu_0 L_1 + \mu_0 L_2 L_5^0. \quad (18)$$

Отметим, что для существования $\mu_0 > 0$ необходимо выполнение для системы (1) условия $\lambda > L_0$.

Докажем теперь то, что последовательность функций $g(t, y)$ ограничена при $y = 0$. Пусть при $|\mu| \leq \mu_0$ при некотором n выполнено условие

$$\|g_n(t, 0)\| \leq m_n \quad (t \geq 0, m_0 = 0).$$

Из уравнения (13) получим при $y(t) = 0$ интегральное неравенство

$$\|y_n(\tau)\| \leq \int_{\tau}^t (L^0 \|y_n(s)\| + M_0 + |\mu| M_1 + |\mu| L_2 m_n) ds.$$

Решая это неравенство, получим оценку для $y_n(\tau)$:

$$\|y_n(\tau)\| \leq (L^0)^{-1} (M_0 + |\mu| M_1 + |\mu| L_2 m_n) e^{L^0(t-\tau)}.$$

Используя формулу (6) при $x_0 = 0$ и формулу (5), получим оценку:

$$\|g_{n+1}(t, 0)\| = \|R(t, 0, y_n(\tau))\| \leq \|R(t, 0, 0)\| + \|R(t, 0, y_n(\tau)) - R(t, 0, 0)\| \leq m_1 + qm_n,$$

где введены обозначения:

$$m_1 = \frac{|\mu| c M_2}{\lambda - |\mu| c L_4} + \frac{|\mu| c L_3 (M_0 + |\mu| M_1)}{(\lambda - L^0 - |\mu| c L_4) L^0}, \quad q = \frac{|\mu|^2 c L_2 L_3}{(\lambda - L^0 - |\mu| c L_4) L^0}.$$

Следовательно, оценки m_n можно связать уравнением

$$m_{n+1} = m_1 + qm_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

При $|\mu| < \mu_0$ для величины q получим с помощью формул (17), (18):

$$q \leq \frac{|\mu|^2 \mu_0 c L_2 L_3}{\mu_0 L^0 (\lambda - L^0 - \mu_0 c L_4)} \leq \left| \frac{\mu}{\mu_0} \right|^2 \frac{\mu_0 L_2 L_3^0}{L_0 + \mu_0 L_1 + \mu_0 L_2 L_5^0} < 1.$$

Поэтому последовательность m_n ограничена при $|\mu| < \mu_0$:

$$m_n \leq m_1 (1 - q)^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из изложенных выше результатов вытекает следующая

Теорема 1. При выполнении условия $|\mu| < \mu_0 \equiv \frac{\lambda - L_0}{L_1 + 2\sqrt{cL_2L_3} + cL_4}$ система диф-

ференциальных уравнений (1) с условиями (2)-(4) имеет интегральное многообразие $G(0)$, представимое уравнением

$$x = g(t, y), \quad (19)$$

на котором лежат все решения системы (1) с начальным условием $y(0) = 0$. Непрерывная функция $g(t, y)$ удовлетворяет следующие условия:

$$\|g_n(t, y) - g_n(t, y^*)\| \leq L_5 \|y - y^*\|, \quad \|g_n(t, 0)\| \leq m_1(1 - q)^{-1},$$

где L_5, m_1, q введены в (16) и (18). Функция $g(t, y)$ найдена как предел последовательности функций $g_n(t, y)$ (12): $g(t, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t, y)$ (19). Последовательность сходится равномерно при $\|y\| \leq a < \infty, |\mu| < \mu_0$.

Другой, но по существу близкий способ построения интегральных многообразий, использован в работе [7].

Замечание. Построение уравнения (10) для интегрального многообразия $G(x_0)$, на котором лежат все решения системы (1), удовлетворяющие начальному условию $x(0) = x_0$, сводится к рассмотренному случаю: $x(0) = 0$.

При этом полагаем последовательно:

$$x = N(t, 0)x_0 + z, \quad z = y, \quad (z(0) = 0).$$

Приходим снова к системе вида (1) с новыми значениями M_1, M_2 :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + \mu\phi(t, N(t, 0)x_0 + x, y), \\ \frac{dy}{dt} = B(t)y + f(x, y) + \mu\psi(t, N(t, 0)x_0 + x, y). \end{cases} \quad (20)$$

Постоянные, входящие в выражение для μ_0 (16), не изменились. Поэтому при $|\mu| < \mu_0$ система (20) имеет интегральное многообразие $G(0)$, а следовательно, система (1) имеет интегральное многообразие $G(x_0)$, представимое уравнением (10).

При рассмотрении решения системы (1) с начальными условиями $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ при известном интегральном многообразии $G(x_0)$ порядок системы (1) понижается, так как достаточно рассматривать лишь дифференциальное уравнение (11).

Теорема 2. Пусть устойчивость нулевого решения уравнения

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + f(x, y) + \mu\psi(t, x, 0) + s(t, y) \quad (21)$$

не зависит от функции $s(t, y)$ при условии $\|s(t, y)\| \leq \gamma \|y\|^n$ ($n > 0$, $\gamma = \text{const}$).

Если в системе (1) выполнены условия $\|\psi(t, y, 0)\| \leq \alpha \|y\|^n$ ($\alpha = \text{const}$), $\lambda - nL - |\mu|cL_4 > 0$, то устойчивость нулевого решения системы (1) равносильна устойчивости нулевого решения уравнения (21).

Рассмотрим систему (11) или

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + f(x, y) + \mu\psi(t, 0, y) + s(t, y). \quad (22)$$

Функция $s(t, y) = \psi(x, t, y) - \psi(t, 0, y)$ обращается в нуль при $x = 0$ и разложение её в степенной ряд по предположению начинается с членов не ниже второго порядка. Отсюда и из условия $\|\psi(t, 0, y)\| \leq \alpha \|y\|^n$ ($\alpha = \text{const}$), $\lambda - nL - |\mu|CL_4 > 0$ следует, что

$$\|s(t, y)\| \leq \gamma \|y\|^n. \quad (23)$$

Поэтому, если устойчивость нулевого решения системы уравнений (22) не зависит от выбора вектор-функции $s(t, y)$ при выполнении условия (23), то устойчивость нулевого решения $x = 0$, $y = 0$ системы (1) равносильна устойчивости нулевого решения системы (22).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М., 1950, 472 с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М., 1967, 383 с.
3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М., 1970, 534 с.
4. Валеев К.Г., Финин Г.С. Построение функций Ляпунова. – Киев: Наукова думка, 1981, 432 с.
5. Валеев К.Г., Жаутыков О.А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Издательство. –Алма-Ата: Наука, 1974, 413 с.
6. Плисс В.А. Принцип сведения в теории устойчивости движения. – Известия АН СССР. Серия математ., 1964, т.28, № 6, с. 1295-1324.
7. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. –М.: Наука 1970, 512 с.

С.З.ҚУРБОНШОЕВ, Н.С.ЯҚУБОВ*

**УСУЛИ ОВАРДАШАВӢ ДАР НАЗАРИЯИ МУОДИЛАҲОИ
ДИФФЕРЕНСИАЛӢ ДАР ФАЗОИ БАНАХӢ**

Донишгоҳи (Славяни) Россияю Тоҷикистон,

**Донишгоҳи техники Тоҷикистон ба номи академик М. Осимӣ*

Дар мақола усули овардашавии Ляпунов, характери ғайрилокалӣ дорад, бо ёрии сохтани бисёршаклиҳои интегралӣ махсус дида баромада шудааст. Шарти зарурӣ ва кифоягии усули овардашавӣ барои системаи тадқиқшаванда ба намуди умумӣ нишон дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: усули овардашавӣ, нобаробариҳои интегралӣ, бисёршаклҳои интегралӣ, методи пайдарпай наздикшавӣ.

S.Z.KURBANSHOEV, N.S.YAKUBOV*

**PRINCIPLE INFORMATION THE THEORY OF DIFFERENTIAL
EQUATIONS IN BANACH SPACES**

Russian-Tajik (Slavonic) University,

**M.Osimi Tajik Technical University*

The article discusses the method of reduction nonlocal character by constructing a special integral manifolds, and sufficient and necessary conditions for the applicability of the principle of information system is sufficiently general form. Indicated substitutions are mixing.

Key words: method of information, integral inequality, integral manifold, method of successive approximations.

УДК 517.948

Ч.Т.ГАНИЕВ, М.К.ЮНУСИ

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННОЙ С ПОПУЛЯЦИОННОЙ
ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 18.03.2016 г.

В работе приводится решение с помощью ряда Фурье одной интегро- дифференциальной задачи, описывающей модель популяционной турбулентности с учётом временно-возрастного и пространственного распределений, связанных с изменением параметров (коэффициента диффузии) в некоторой области заданным нелинейным уравнением. Доказана теорема о равномерной сходимости решений задачи, связанной с популяционной турбулентностью.

Ключевые слова: популяция, численность, модель, время, возраст, пространство, турбулентность.

Предметом настоящей статьи является следующая система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial a} + \sum_j \mathcal{D}_j \frac{\partial N}{\partial x_j} = F_0(a)N + \sum_j D_j \frac{\partial^2 N}{\partial x_j^2}, \\ 0 < x_j < L_j, \quad 0 < a \leq a_{\max}, \quad 0 < t \leq t_k, \\ N(x, a, 0) = N_0(x, a), \quad 0 \leq x \leq L_j, \quad 0 \leq a \leq a_{\max}, \\ N(x, 0, t) = \int_0^{a_{\max}} B_0(\xi) N(x, \xi, t) d\xi, \quad 0 \leq x_j \leq L_j, \quad 0 \leq t \leq t_k, \\ \frac{\partial N}{\partial x} - \alpha_j N \Big|_{x_j=(0, L_j)} = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Адрес для корреспонденции: Ганиев Чалиш Тагойбекович, Юнуси Махмадюсуф Камарзода. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: chalish@mail.ru; yunusi@mail.tj

описывающая динамику модельной популяции с учётом её временного, возрастного и пространственного распределений [1-7]. В этой системе $N = N(x, a, t)$ - численность популяции возраста a , $0 \leq a < \infty$, в точке $x = (x_1, x_2) \in G$, $G = \{(x_1, x_2) : 0 < x_i < L, i = 1, 2\}$, в момент времени t , $F_0 = F_0(a)$ - коэффициент смертности, $B_0 = B(a)$ - коэффициент рождаемости, $N_0(x, a)$ - численность популяции в начальный момент времени.

Задача популяционной турбулентности следует из задачи (1) путём предложенных в [5-7] замен независимых переменных и функций:

$$\alpha' = \alpha, \quad t' = \alpha + \tau, \quad \varphi(x, \alpha, \tau) = N(x, \alpha, \alpha + \tau),$$

$$u(x, \alpha, \tau) = \varphi(x, \alpha, \tau) \exp \left(\int_0^\alpha F_0(\xi) d\xi + \sum_j \mathcal{G}_j \frac{x_j}{2D_j} - \sum_j \frac{\mathcal{G}_j^2 \alpha}{4D_j} \right),$$

что преобразует систему (1) к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \sum_j D_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, & 0 \leq x_j \leq L_j, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}, \quad 0 \leq t \leq t_k \\ u(x, a, \tau) = \int_0^{\alpha_{\max}} B_0(\xi) u(x, \xi, t) d\xi, \\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big|_{x_j=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big|_{x_j=L_j} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

При изменении коэффициента диффузии D_j в допустимых пределах возможно протекание диффузионного процесса в максимальном режиме, порождающем популяционную турбулентность.

Пусть

$$D_j = D\alpha_j, \quad \alpha_j \in M,$$

где $M = \left\{ \alpha : \alpha_0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \sum_j \alpha_j^{\frac{n}{n-s}} = 1 \right\}$ - область изменения диффузионных

коэффициентов D_j , $0 < D < D_{\max}$. Задача популяционной турбулентности состоит в максимизации правой части уравнения (2) по параметру $\alpha \in M$. Тогда уравнение популяционной турбулентности принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \max_{\alpha \in M} \left(D \sum_j \alpha_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right). \quad (1')$$

Поскольку максимум правой части задачи (1') достигается при некотором $\alpha^0 \in M$, то уравнение (1') является частным случаем уравнения (1) и, следовательно, все основные результаты будут выводиться из решения задачи (1). Учитывая это, введём обозначения $Q = G \times [0, \infty) \times [0, t_k]$, $\bar{G} = G + S$, где S – граница G .

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены условия согласования: $\frac{\partial N}{\partial n} \Big|_S = \alpha N \Big|_S$ при $t=0$, $N_0(x, a) = \int_0^\infty B(a, 0) N_0(x, a) da$, и n – внешняя нормаль к границе

S . В противном случае пришлось бы считать функцию $N(x, a, t)$ разрывной, что внесло бы некоторые формальные трудности, ничего не меняя по существу.

Теорема 1. Пусть $F(a, t) \equiv F(a)$, $B(a, t) \equiv B(a)$ для всех $0 \leq a \leq \infty$, $0 \leq t \leq t_k$, $\|F(a)\|_C < \infty$, $\|B(a)\|_C < \infty$, $\frac{\partial N_0}{\partial a} \in C_{[0, \infty)}$ и δ_{n_1, n_2}^{\max} , $\delta|_{n_1, n_2}$ – являются корнями уравнения

$$\int_0^\infty \tilde{B}_n(a) e^{-\delta a} da = 1, \quad \tilde{B}_n(a) = B(a) e^{-\lambda_n a + \int_0^\infty F(\xi) d\xi}, \quad (3)$$

$$n = (n_1, n_2), \quad n_k = 1, 2, 3, \dots, \quad j = 2, 3, 4, \quad k = 1, 2.$$

Тогда решение задачи (1) представляется в виде

$$N(x, a, t) = \frac{2}{L_1 L_2} \sum_{n=1}^\infty C_n^1 e_n^{\delta \max(t-a)} + \sum_{j=2}^\infty C_n^j e_n^{\alpha_n^j(t-a)} \cdot \cos(\omega_n^j(t-a)) * \\ * \exp \left\{ -\lambda_n a + a \int_0^a F(\xi) d\xi + \frac{g_1 x_1}{2D_1} + \frac{g_2 x_2}{2D_2} \right\} \cos \frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \cos \frac{\pi n_2 x_2}{L_2}, \quad (4)$$

где

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{g_k^2}{4D_k} + D_k \left(\frac{\pi n_k}{L_k} \right)^2 \right], \quad n = (n_1, n_2), \quad n_k = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, \quad C_n^j, \quad j = 1, 2, 3, 4, \dots -$$

являются коэффициентами разложения функции

$$\tilde{N}_n^0(a) = \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} N_0(x, a) e^{\frac{g_1 x_1}{2D_1} - \frac{g_2 x_2}{2D_2} - \int_0^a F(\xi) d\xi + \lambda_n a} \cdot \cos \frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \cos \frac{\pi n_2 x_2}{L_2}$$

в ряд по экспонентам с показателями $\beta_n^j, \beta_n^i = \delta_n^{\max} + \lambda_n, \quad \beta_n^j = \delta_n^j + \lambda_n,$
 $\delta_n^j = \alpha_n^j + i\omega_n^j, \quad n = (n_1, n_2), \quad n_k = 1, 2, 3, \dots, k = 1, 2; \quad j = 2, 3, 4, \dots$

Доказательство. Используя последовательно замены $t = a + \tau$,

$$\varphi(x, a, \tau) = N(x, a, a + \tau), \quad \psi(x, a, \tau) = \varphi(x, a, \tau) \exp\left(-\int_0^a F(\xi) d\xi\right),$$

уравнение (1) перепишем в следующем виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = \sum_{j=1}^2 \left(D_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} - g_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right). \quad (5)$$

Решение (5) с учетом граничных условий (1) будем искать методом разделения переменных, представив $\psi(x, a, \tau) = T(a, \tau)X(x_1, x_2)$ и проводя обычные рассуждения, аналогичные [3]. Имеем

$$\psi(x, a, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0, \tau) C_n e^{-\lambda_n a + \frac{g_1 x_1}{2D_1} + \frac{g_2 x_2}{2D_2} \sin \frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \sin \frac{\pi n_2 x_2}{L_2}}, \quad (6)$$

где $\lambda_n = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{g_k^2}{4D_k} + D_k \left(\frac{\pi n_k}{L_k} \right)^2 \right]$ и $C_n, n = (n_1, n_2)$

определяются из условия нормировки

$$C_n \cdot \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \sin^2 \frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \sin^2 \frac{\pi n_2 x_2}{L_2} dx_1 dx_2 = 1,$$

т.е. $C_n = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}}$. Таким образом, с учетом введенных выше обозначений, из (6) полу-

чим

$$N(x, a, t) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0, t-a) e^{-\alpha_n \varepsilon + \frac{g_1 x_1}{2D_1} + \frac{g_2 x_2}{2D_2} + \int_0^a F(\xi) d\xi} \cos\left(\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}\right), \quad (7)$$

где $T_0(0, t-a)$ – пока произвольные функции, $n_k = 1, 2, \dots, k = 1, 2, n = (n_1, n_2)$. Их определим так, чтобы найденное решение удовлетворяло начальным и граничным условиям задачи (1). Подставим (7) в третье условие (1) и, введя обозначение $\mu_n(t) = T_n(0, t)$, получим интегральное уравнение типа уравнения восстановления [1]:

$$\mu_n(t) = \int_0^{\infty} B_n(a) \mu_n(t-a) da, \quad 0 \leq t \leq t_k. \quad (8)$$

Легко видеть, что решение (8) представляется в виде

$$\mu_n(t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_n^j e^{\delta_n^j t} = C_n^t e^{\delta_n^{\max} t} + \sum_{j=2}^{\infty} C_n^j e^{\alpha_n^j} \cos \omega_n^j t, \quad (9)$$

$n = (n_1, n_2)$, где δ_n^j являются корнями уравнения (3), C_n^j — коэффициентами разложения функции $\tilde{N}(a)$ в ряд по экспонентам с показателями δ_n^j , $j = 1, 2, \dots$. Как показано в [1], это уравнение имеет только один вещественный (максимальный) корень δ_n^{\max} , а остальные корни являются попарно сопряженными $\delta_n^j = \alpha_n^j \pm i\omega_n^j$, причем $\alpha_n^j < \delta_n^{\max}$ и

$$\int_0^{\infty} \tilde{B}_n(a) e^{-a^j n^a} \cos \omega_n^j a da = 1, \quad \int_0^{\infty} \tilde{B}_n(a) e^{-a^j n^a} \sin \omega_n^j a da = 0.$$

Таким образом, из (7) – (9) следует, что функция

$$N(x, a, t) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \sum_{n=1}^x C_n^j \exp \left\{ \delta_n^j t \left(\delta_n^j + t_n \alpha + \int_0^a F(\xi) d\xi + \frac{g_1 x_1}{2D_1} + \frac{g_2 x_2}{2D_2} \right) \right\} \\ * \cos \frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \cos \frac{\pi n_2 x_2}{L_2}$$

для всех $(x, a, t) \in \bar{Q}$ является решением задачи (1), так как легко видеть, что ряд (10), а

так же ряды для производных $\frac{\partial N}{\partial t}$, $\frac{\partial N}{\partial a}$, $\frac{\partial N}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2}$, $i = 1, 2$ равномерно сходятся. В си-

лу того, что $\delta_n^j = \alpha_n^j + i\omega_n^j$, $j = 2, 3, 4, \dots$, $n_k = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2$, очевидно, что формулы (5) и (10) эквивалентны. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть $\int_0^{\infty} \tilde{B}_n(a) da = 1$, $n_k = 1, 2, \dots$, $n = (n_1, n_2)$. Тогда существует

стационарное решение задачи (1) и оно представляется в виде

$$N^*(x, a) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n a + \int_0^a F(\xi) d\xi + \frac{g_1 x_1}{2D_1} + \frac{g_2 x_2}{2D_2}} \cdot \cos \frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \cos \frac{\pi n_2 x_2}{L_2}.$$

Если $\int_0^{\infty} \tilde{B}_n(a) da > 1$, $n = (n_1, n_2)$, $n_k = 1, 2, \dots$, то в формуле (4) $\delta_n^{\max} > 0$, и следовательно,

но, с ростом t функция $N(x, a, t)$ неограниченно растёт.

Если же $\int_0^{\infty} \tilde{B}_n(a) da < 1$, $n_k = 1, 2, 3, \dots$, $n = (n_1, n_2)$, то $\delta_n^{\max} < 0$ и $N(x, a, t) \rightarrow 0$

при $t \rightarrow \infty$.

Замечание 2. Если $B(a)$ – достаточно гладкая функция (например, $B(a) \in C_{[0, \infty)}$), то $\alpha_n^j < \delta_n^{\max}$ и при больших t в разложении (5) можно пренебречь всеми членами суммы по $j = 2, 3, \dots$. Если же функция $B(a)$ является дельта-образной функцией типа $B(a) = C\delta(a - \bar{a})$ (т.е. популяция размножается только в возрасте \bar{a}), то возможно достижение $\alpha_n^j = \delta_n^{\max}$ и, следовательно, колебаний функции N . Периоды этих колебаний T_j определяются по формуле:

$$T_j = \frac{2\pi}{\omega_j}, \quad \omega_j = \frac{2\pi j}{\bar{a}}, \quad j = 1, 2, \quad \bar{a} = \max T_j.$$

Теорема 2. Пусть $F = F(a, t)$, $B = B(a, t)$, тогда решение задачи (1) представляется в виде (7), где $T_n(0, t - a) = \mu_n(t - a)$ является решением следующего интегрального уравнения:

$$\mu_T(t) = \int_0^{\infty} \tilde{B}_n(a, t) \mu_n(t - a) da, \quad 0 \leq t \leq t_k, \quad 0 \leq a < \infty, \quad (11)$$

где

$$\tilde{B}_n(a, t) = B(a, t) \exp \left\{ -\lambda_n a + \int_0^a F(\xi, \xi + t - a) da \right\}, \quad n = (n_1, n_2).$$

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 3. Решение интегрального уравнения (11) представляется в виде

$$\mu_n(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n^m(t), \quad n = (n_1, n_2), \quad 0 \leq t \leq t_k,$$

где

$$\mu_n^{m+1}(t) = \int_0^{\infty} \tilde{B}_n(a, t) \mu_n^m(t - a) da, \quad n = (n_1, n_2), \quad 0 \leq t \leq t_k, \quad n_k = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Юнуси М.К. Математический способ определения критических значений экосистем трех трофических уровней. – Журнал общей биологии, 1982, т.43, № 6, с. 836-841.

2. Юнуси М.К. Динамика изолированных популяций с учётом возрастного состава и пространственных распределений. – Математическое моделирование в проблемах рационального природопользования. – Ростов-на-Дону, 1988, с.118-119.
3. Юнуси М.К. Об одном классе нелокальных задач. – М:ВЦ АН СССР, 1991, 30 с.
4. Юнуси М.К. Математические модели защиты растений и охраны популяций животных. – 1988, 290с.
5. Юнуси М.К. Некоторые математические вопросы охраны популяций животных. – Докл.АН Тадж.ССР, 1989, т.32, № 2, с.87-92.
6. Юнуси М.К. Решения одного класса интегро-дифференциальных задач и его приложения в биологии. – Душанбе, 1989, 53 с.
7. Чиллингуорт Д. Структурная устойчивость математических моделей. В книге: Математическое моделирование.– М.: Мир, 1979, с. 249-276.
8. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.

Ч.Т.ҒАНИЕВ, М.К.ЮНУСИ

ҲАЛЛИ ЯК МАСЪАЛАИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНТСИАЛИИ БО ТУРБУЛЕНТНОКИИ АФЗОИШӢ АЛОҚАМАНДБУДА

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола масъалаҳои тадқиқ ва асосноккунии ҳалли як масъалаи интегро-дифференсиалии, модели афзоиши турбулентнокии бо назардошти тақсимои вақтӣ-синусоли ва фазогӣ бо ивазшавии параметрҳои он (коэффитсиенти диффузия) алоқамандро, ки дар ягон соҳа бо муодилаи ғайрихаттӣ дода шудааст, дида баромада шудааст. Теорема дар бораи наздикшавии мунтазами қаторҳои Фуре барои масъалаи мазкур исбот карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: афзоиши моделӣ, шумораи афзоиш, афзоиши турбулентӣ, тақсимои вақтӣ-синну соли-фазой.

CH.T.GANIEV, M.K.YUNUSI

SOLUTION OF AN INTEGRO-DIFFERENTIAL PROBLEMS OF THE TURBULENCE POPULATION

Tajik National University

This work deals with the study and research of the solution of one integro-differential problem describing the population model of turbulence with the time-space distribution and age-related change in the parameters (diffusion coefficient) in a given field of nonlinear equations. A proven theorem on the uniform convergence of Fourier series for a given task.

Key words: model populations, quantity populations, population turbulence, time-age-spatial distribution.

УДК 517:948.9:669.548.55

М.НУРУБЛОЕВ

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО
ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА В n -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Российско-Таджикский (Славянский) университет

Поступила в редакцию 18.01.2016 г.

В работе рассматривается линейная система уравнений m -го порядка составного типа с n -независимыми переменными и постановка корректных граничных задач для нее.

Ключевые слова: система уравнений составного типа, краевая задача, итерация, характеристическая форма, моногенная функция.

Исследование разрешимости граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными высокого порядка в многомерных пространствах вида

$$M^m u = M(M \dots (Mu) \dots) = 0, \quad (1)$$

является актуальным, так как здесь наблюдаются новые эффекты разрешимости граничных задач, отличных от случая $Mu = 0$. Например, известная система А.В.Бицадзе $u_{\bar{z}\bar{z}} = 0$, для которой задача Дирихле является некорректной, определяется итерацией оператора Коши-Римана $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Ф.Брач и Р.Делонге [1, 2], исследуя уравнение (1) в случае

$M = D$, где D – оператор гиперкомплексного дифференцирования, ввели новый класс функций, который назвали классом моногенных функций.

Естественно, возникает интерес к исследованию систем уравнений, левая часть которых порождена итерацией конечного порядка дифференциального оператора M .

Адрес для корреспонденции: Нурублов Мавлон. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М.Турсун-заде, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: hudson90@mail.ru

В пространстве R^n рассматривается система составного типа вида (1), в котором матричным дифференциальным оператором M является оператор, сопоставляющий вектору $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ левой части системы вида [3]

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{2, n}, \quad (2)$$

где $u_j (j = \overline{1, n})$ – искомые вещественные функции, а m, n – любые натуральные числа.

Характеристическая форма системы (2) имеет вид

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi_1^{n-2} |\xi|^2, \quad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2.$$

Следовательно, эта система при $n \geq 3$ является системой составного типа. При $n = 2$ система эллиптична.

Следует отметить, что система (1) при $m = 1$ и $m = 2$ исследована многими авторами (см. [3, 4] и имеющиеся там списки литературы). Однако многомерные неклассические системы высших порядков очень мало изучены. В работах [5, 6] для одной трехмерной системы высшего порядка методом преобразования Фурье исследованы краевые задачи только в случае полупространства. В работе [7] была исследована краевая задача для системы (1) в случае, когда $m = 2n$ – четное число. Было установлено, что характер разрешимости задачи Дирихле для рассматриваемой системы во многом аналогичен характеру разрешимости задачи Дирихле для сильно эллиптических систем, однако от граничных данных было требование более высокой гладкости. По существу это является обобщением результатов работы [8] автора, в которой эта же задача была решена в трехмерном пространстве. В отличие от вышеназванных работ мы записываем систему (1) через основные операторы векторного анализа и, применяя совершенно другой метод, который хорошо применяется также и в случае ограниченной области, получаем общее представление решений системы (1) для любого m .

Характеры разрешимости краевых задач для системы (1) в случаях четности и нечетности показателя итерации (т.е. m) сильно отличаются. Поэтому каждый случай будет рассматриваться отдельно.

Нетрудно проверить, что когда $m = 2n$ – любое четное число, тогда систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} \Delta^{2n-2} u_1 = 0 \\ \frac{\partial^{2n} \mathcal{G}}{\partial x_1^{2n}} + \left[\sum_{k=1}^n \Delta^{k-1} \frac{\partial^{2(n-k)}}{\partial x_1^{2(n-k)}} \right] \text{grad div } \mathcal{G} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Случай, когда $m = 2n + 1$ – любое нечетное число, система (1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta^n u_1 + \operatorname{div} \Delta^n \mathcal{G} &= 0 \\ \operatorname{grad} \Delta^n u_1 + \frac{\partial^{2n+1} \mathcal{G}}{\partial x_1^{2n+1}} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sum_{k=1}^n \Delta^{k-1} + \frac{\partial^{2(n-k)}}{\partial x_1^{2(n-k)}} \right] \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathcal{G} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathcal{G} = (u_2, u_3, \dots, u_n)$, а Δ – оператор Лапласа по всем переменным.

Для системы (3) в полупространстве

$$R_+^n = \{(x_1, X) : x_1 > 0, X = (x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^{n-1}\}$$

рассмотрим задачу Дирихле в следующей постановке.

Задача 1. Найти в R_+^n регулярное решение системы (3), удовлетворяющее на гиперплоскости $x_1 = 0$ условиям

$$\left. \frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^k} \right|_{x_1=0} = f_k^{(j)}(X), \quad k = \overline{0, 2n-1}; \quad j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где $f_k^{(j)}(X)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Теорема 1. *Задача 1 корректно поставлена, то есть она имеет и притом единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных.*

Укажем схему доказательства теоремы.

Первый компонент u_1 искомого вектора u единственным образом определяется из первого уравнения системы (3) и условий (5) как решения задачи Дирихле для полигармонического уравнения.

Применяя ко второму уравнению системы (3) операцию div , убеждаемся, что скалярная функция $Q(x_1, X) = \operatorname{div} \mathcal{G}(x_1, X)$ удовлетворяет уравнение

$$\Delta^n Q = 0, \quad (6)$$

из которого следует, что $\operatorname{div} \mathcal{G}$ – является полигармонической вектор-функцией n -го порядка.

Действуя на систему (3) оператором Δ^n с учетом (6) получаем

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x_1^{2n}} \Delta^n \mathcal{G} = 0. \quad (7)$$

В силу того, что система (7) является следствием системы (3), то всякое решение системы (3) удовлетворяет систему уравнений (7).

Построим представление общего решения системы (3) при помощи представления решений системы (7). Всякое решение системы (7) можно представить в виде

$$u_j = \varphi_j + \psi_j, \quad j = \overline{2, n}, \quad (8)$$

где φ_j – полигармонические функции порядка $(2n - 2)$, а ψ_j – удовлетворяют уравнения

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x_1^{2n}} \psi_j = 0. \quad (9)$$

Подставляя значения u_j из (8) в систему (3), легко увидеть, что полигармонические функции φ_j удовлетворяют также соотношения (3), а функции ψ_j – решение уравнения (9) соотношению

$$\sum_{i=2}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} = 0. \quad (10)$$

Таким образом, если полигармонические функции φ_j и решение ψ_j уравнения (9) удовлетворяют соотношения (3) и (10) соответственно, то выражение (8) удовлетворяет систему (3), при этом

$$\varphi_j = \sum_{k=1}^n x_1^{k-1} \frac{\partial H_k}{\partial x_j},$$

где $H_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – регулярные гармонические функции в пространстве R^n . Следовательно, все регулярные в некоторой области пространства R^n решения системы (3) представляются в виде

$$u_j = \sum_{k=1}^n x_1^{k-1} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{2n} x_1^{k-1} \psi_k^*, \quad k = \overline{2, n}, \quad (11)$$

где ψ_k^* – $(2n - 1)$ раз дифференцируемые во всем пространстве функции, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{k=2}^n \frac{\partial \psi_k^*}{\partial x_k} = 0. \quad (12)$$

Пусть $\Phi(X) = H_1(0, X)$ – значение гармонической функции $H_1(x_1, X)$ на гиперплоскости $x_1 = 0$.

Из общего предоставления регулярных в полупространстве R_+^n решений системы (3) и второго условия (5) для определения произвольной гармонической функции H_1 и ψ_1^* получим

$$\psi_1^* = f_1^{(2)}(X) - \text{grad } H_1 \Big|_{x_1=0}. \quad (13)$$

Применяя к (13) оператор div , с учетом (12) из (13) получим

$$\Delta \Phi = \text{div } f_1^{(2)}(X),$$

из которого следует [9]

$$\Phi(X) = -\frac{1}{\omega_n R^n} \int \frac{\text{div } f_1^{(2)}(\xi)}{r^{n-2}} d\xi, \quad r = |X - \xi|,$$

где ω_n – площадь единичной сферы в R^n . Гармоническая в полупространстве R_+^n функция $H_1(x_1, X)$ по своим граничным значениям при $x_1 = 0$ определяется однозначно и выписывается явно по формуле [9]

$$H_1(x_1, X) = \frac{x_1}{\omega_{n+1} R^n} \int \frac{\Phi(\xi) d\xi}{(r^2 + x_1^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

При известном H_1 , функция ψ_1^* определяется однозначно по (13). Следовательно, первый компонент вектора $\mathcal{G}(x_1, X)$ задачи однозначно находится по формуле

$$u_2(x_1, X) = \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + f_1^{(2)}(X) - \text{grad } H_1 \Big|_{x_1=0}. \quad (14)$$

Аналогично, используя второе условие (5) ($k = 1$), при известном $H_1(x_1, X)$ однозначно определяется неизвестная функция $u_3(x_1, X)$ и т.д., после конечного числа шагов определяются все функции u_j из оставшихся условий вида (5).

Задача 2. Найти в R_+^n регулярное решение системы (4), удовлетворяющее на гиперплоскости $x_1 = 0$ условиям

$$\frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^k} \Big|_{x_1=0} = g_k^{(j)}(X), \quad k = \overline{0, 2n+1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (15)$$

где $g_k^{(j)}$ – заданные достаточно гладкие функции.

Теорема 2. *Задача (4), (15) корректно поставлена, то есть она имеет, и притом единственное регулярное решение, непрерывно зависящее от начальных данных.*

Доказательство. Прежде всего, из системы (4) следует равенство

$$\frac{\partial^{2n+2} \mathcal{G}}{\partial x_1^{2n+2}} + \left[\Delta^n + \sum_{k=1}^n \Delta^{k-1} \frac{\partial^{2(n-k)}}{\partial x_1^{2(n-k)}} \right] \text{grad div } \mathcal{G} = 0, \quad (16)$$

из которого следует, что div – является полигармонической вектор-функцией $(n + 1)$ -го порядка

$$\Delta^{n+1} (\text{div } \mathcal{G}) = 0, \quad (17)$$

Применяя ко второму уравнению системы (4) операции Δ^{n+1} и div с учетом (17), получаем

$$\frac{\partial^{2n+2}}{\partial x_1^{2n+2}} \Delta^{n+1} \mathcal{G} = 0. \quad (18)$$

Рассуждая аналогично, как и выше, то есть представляя решение системы (16) в виде (9), все регулярные в полупространстве R_+^n решения второго уравнения системы (4) можно представить в виде

$$u_j = \sum_{k=1}^{n+1} x_1^{k-1} \frac{\partial H_j^*}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{2n+2} x_1^{k-1} \varphi_j^*, \quad (19)$$

где H_j^* – регулярные гармонические функции в R^n , а $\varphi_k^* - (2n + 2)$ раз дифференцируемые во всем пространстве функции, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{k=2}^n \frac{\partial \varphi_k^*}{\partial x_k} = 0. \quad (20)$$

Из общего представления (19) видно, что при использовании первого условия (15) произвольная гармоническая функция $H_1^*(x_1, X)$ и функция φ_1^* однозначно определяются как в случае задачи 1. Тогда из (19) и условий (15) все функции $\varphi_k^* (k = \overline{2, 2n+2})$ находятся при известных $H_1^*(x_1, X)$ и $\varphi_1^*(X)$.

Для определения искомой функции u_1 , первое уравнение системы (4) дифференцируя по x_1 , ко второму уравнению применяя операцию div и складывая, получим

$$\Delta^{n+1} u_1 = 0. \quad (21)$$

Функция u_1 однозначно определяется из (21) и условий (15) ($k = \overline{0, n}$).

Из приведенного выше исследования вытекает, что характер разрешимости поставленных задач для системы (1) во многом аналогичен характеру разрешимости задачи Дирихле для сильно эллиптических систем, однако для системы (1) новым моментом является требование более высокой гладкости граничных данных, а именно $(2n + 2)$ -кратной в случае задачи 1 и $(2n + 4)$ -кратной в случае задачи 2 дифференцируемости $f_k^{(j)}, g_k^{(j)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brach F. The behavior at infinity of (R)-monogenic functions of a quaternion variable. – Quart J. Pure Appl. Math, 1978, v. 52, №2, pp. 49-60.
2. Delanghe R., Brach F. Hyper complex functions theory Hilbert modules with reproducing kernel. – Proc. London, Math. Soc., 1978, №37, №3, pp. 545-576.
3. Янушаускас А.И. Многомерные эллиптические системы с переменными коэффициентами. – Вильнюс: Мокслас, 1990, 178 с.
4. Сафаров Д.Х. Многомерные неклассические системы уравнений с частными производными. – Душанбе, 1996, 229 с.
5. Муртазаев Д., Муллоева М.С. Краевая задача для n -й итерации системы Мойсила-Теодореску. – ДАН РТ, 1999, т. 42, №3, с. 17-23.
6. Муллоева М.С. Представление решения одной системы составного типа высшего порядка. – Мат-лы научн.конф. «Актуальные проблемы современной математики», ТНУ, 2011, с. 66-72.
7. Нурублов М.Н. Об одной системе дифференциальных уравнений составного типа высшего порядка в n -мерном пространстве. Мат-лы науч.-теоретич. конф., посвящ. памяти проф. Муртазоева Д. – Душанбе, 2014, с. 92-95.
8. Нурублов М.Н. Краевая задача для системы уравнений высокого порядка, порожденных итерацией оператором первого порядка. – ДАН РТ, 2011, т. 54, №1, с. 18-22.
9. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964, 830 с.

М.НУРУБЛОВ

МАСЪАЛАҶОИ КАНОРӢ БАРОИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАИ ТАРТИБИ ОЛИИ ТИПИ ТАРКИБӢ ДАР ФАЗОИ n -ЧЕНАКА

Донишгоҳи (Славянии) Россияю Тоҷикистон

Дар мақола барои системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби олиии таркибӣ дар нимфазо ҳалшавандагии масъалаи Дирихле тадқиқ карда шудааст. Исробот карда шудааст, ки масъалаҳои гузошташуда ҳалли ягона доранд.

Калимаҳои калидӣ: системаи муодилаҳои тартиби таркибӣ, масъалаи канорӣ, итератсия, формаи хосаи тартибӣ, функсияи моногенӣ.

M.NURUBLOEV

**BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A SYSTEM OF HIGHER ORDER
EQUATIONS OF COMPOSITE TYPE IN n -DIMENSIONAL SPACE**

Russian-Tajik (Slavonic) University

In the paper we investigate solvability of the Dirichlet problem in the half-space for systems of higher order differential equation of composite type. It is proved that problem under consideration have a unique solution.

Key words: system of equations of composite type, boundary value problem, iteration, characteristic form, monogenic function.

УДК 81'322::811.222.8::519.25

А.А.КОСИМОВ

О МНОЖЕСТВЕ АНАГРАММ В ПОЭМЕ А.ФИРДАУСИ «ШАХНАМЕ»

*Худжандский политехнический институт
Таджикского технического университета им. акад. М.С.Осими,
Поступила в редакцию 08.07.2015 г.*

С помощью специального кодирования словоформ получены данные о многообразии анаграмм произведения «Шахнаме» А.Фирдауси. Анонсирован ряд анаграмм с наибольшим количеством словоформ.

Ключевые слова: Фирдауси, Шахнаме, словоформа, кодирование, анаграмма, статистика.

Статья посвящена изучению количественных закономерностей, свойственных анаграммам произведения А.Фирдауси «Шахнаме» на таджикско-персидском языке в кириллической графике [1]. Согласно определению, *анаграмма* – это, по крайней мере, пара слов естественного языка, составленных из одного и того же набора букв [2]. Известно, что всякой анаграмме при “упорядоченном алфавитном” кодировании соответствует единственный образ, так называемый $\alpha\beta$ - код. Такое кодирование используется в качестве инструмента для эффективного распознавания словоформных анаграмм [3].

1. Материал. Произведение А.Фирдауси изучается в полном объеме, содержащим 64 поэмы (достоны), в которых 4736 страниц, 46181 предложений, 52156 байтов (двуступный, пар строк), 573082 словоупотреблений и 3241098 символов (букв, знаков препинаний и пробелов).

2. Обработка данных с целью обнаружения всего многообразия анаграмм состояла из двух этапов:

- построения списка различных словоформ с частотами их встречаемости в текстах произведения “Шахнаме”;

Адрес для корреспонденции: Косимов Абдунаби Абдурауфович. 735714, Республика Таджикистан, Худжанд, ул. Ленина, 226, Худжандский политехнический институт Таджикского технического университета. E-mail: abdunabi_kbtut@mail.ru

- кодирования полученных словоформ и формирование списка различных кодов с частотами их встречаемости.

Не останавливаясь на описании первого этапа, достаточно очевидного по содержанию, отметим, что на втором этапе речь идёт о применении упорядоченного алфавитного (или же $\alpha\beta$ -) кодирования словоформ, предложенного в [3]. При таком кодировании произвольной словоформе $W = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ длины n , в которой α_k ($k = \overline{1, n}$) - буквы таджикского алфавита, ставится в соответствие цепочка $CW = \alpha_{s_1}\alpha_{s_2} \dots \alpha_{s_n}$ из тех же самых букв, что и в W , но упорядоченных по алфавиту (например: $W = \text{доман} \rightarrow CW = \text{адмно}$).

3. Первоначальные результаты обработки произведения «Шахнаме» представлены в табл. 1.

Таблица 1

Соотношение кодов без учёта их частот встречаемости

1	2	3	4	5	6	7
Размер произведения	Число словоформ	Число различных кодов	Число однозначных кодов	Число многозначных кодов	Отношение (4)/(3) в %	Отношение (5)/(3) в %
573082	24 839	22 688	20 898	1790	92.1	7.9

В столбце 1 указывается размер произведения в словоупотреблениях. В соответствии с первым этапом обработки данных на основе словоупотреблений построен частотный словарь, из которого в столбец 2 выписано только число различных словоформ (без дубликатов). Кодирование последних позволило сформировать список различных кодов, число которых 22 688 показано в столбце 3. Как и следовало ожидать, число различных кодов оказалось меньше числа различных словоформ. Причина в том, что по отношению к $\alpha\beta$ - кодированию всё множество словоформ W может быть представлено в виде:

$$W = W^{(1)} + A, \quad (1)$$

где $W^{(1)}$ ($W^{(1)} \subset W$) – подмножество тех словоформ, которые не входят в состав анаграмм и которые также, как и в [4], назовём “тривиальными” анаграммами, и A – подмножество всех реальных анаграмм, причём словоформам одной анаграммы соответствует один и тот же код, многозначный при декодировании.

В табл. 1 числа однозначно и многозначно декодируемых кодов (соответственно “тривиальных” и реальных анаграмм) приведены в столбцах 4 и 5; в столбцах 6 и 7 они выражены в процентах по отношению к общему количеству различных кодов столбца 3. Из этих данных видно, что для произведения «Шахнаме» количество однозначно декодируемых кодов на порядок больше суммарного количества кодов анаграмм при условии, что частота встречаемости кодов не принимается во внимание. Интересно отметить, что

подобные отношения получены ранее для английского, русского, таджикского и литовского языков, а также для искусственного языка эсперанто [5].

Учёт частот встречаемости однозначно и многозначно декодируемых кодов создаёт точное представление о мощности множества словоформ, входящих в состав анаграмм.

Таблица 2

Соотношение кодов «Шахнаме» с учётом их частот встречаемости

1	2	3	4	5
Размер произведения	Число однозначных кодов	Число многозначных кодов	Отношение (2)/(1) в %	Отношение (3)/(1) в %
573082	362 957	210125	63.3	36.7

Из этой таблицы следует, что мощности множеств словоформ, входящих в состав “тривиальных” и реальных анаграмм, сравнимы между собой. Данные столбцов 4 и 5 близки к результатам, полученным в [5, 6].

4. Статистическое распределение, обнаруженное в результате обработки произведения «Шахнаме», представлено в табличном виде:

Таблица 3

Мощность анаграммы (m)	1	2	3	4	5	6	7	8	Итого
Число различных анаграмм (n)	20898	1508	219	52	9	0	1	1	22688

В этой таблице для целочисленной переменной m (количества словоформ, входящих в состав анаграмм) рассматриваются значения от 1 до 8. При $m = 1$ мы имеем дело с “тривиальными” анаграммами, то есть с 20898 словоформами, находящимися во взаимно однозначном соответствии со своими $\alpha\beta$ -кодами. Для прочих значений m ($m \geq 2$) речь идёт уже о реальных анаграммах. В изучаемом корпусе выявлена всего лишь одна анаграмма ($n = 1$) с максимальным числом $m = m_0 = 8$ словоформ (то же самое и для $m = 7$) и ни одной анаграммы с $m = 6$ ($n = 0$). Для прочих анаграмм, $2 \leq m \leq 5$, имеем $n \geq 2$.

5. Как ясно из табл. 3, в произведении «Шахнаме» обнаружено 1790 нетривиальных анаграмм. Помимо этого удалось определить полный список всех таджикских словоформ, входящих в состав нетривиальных анаграмм. В связи с их огромным количеством в последующей таблице приводится информация только о тех анаграммах, для которых $n = 4, 5, 7$ и 8.

Отметим, что в табл. 4, состоящей из трёх столбцов, первый указывает $\alpha\beta$ -код анаграммы, иными словами тот код, который соответствует всем словоформам, входящим в состав анаграммы. В третьем столбце частота $\alpha\beta$ -код анаграммы, а в четвертом мощность, то есть число словоформ в анаграмме. Во втором столбце указывается мощность,

то есть число словоформ в анаграмме. В третьем столбце проводится список словоформ, обнаруженных в составе анаграмм.

Таблица 4

Коды анаграмм	Мощность анаграммы	Состав словоформ в анаграммах
адмно	8	андом, дамон, доман, донам, мадон, монад, монда, номад
адимно	7	андоми, домани, мадоин, монади, мондаи, монида, номади
абдин	5	бадин, банди, бинад, инбад, набид
амно	5	амон, мано, намо, нома, онам
агимр	5	гарми, гирам, магир, магри, марги
адмру	5	дамур, дурам, марду, мурад, мурда
адиност	5	дастони, дониста, истодан, наистод, ситонад
аабрт	5	барат, барта, батар, табар, тараб
аабднор	5	андароб, бандаро, боранда, наборад, обандар
азмр	5	зерам, марез, марзе, разме, рамзе
амнор	5	армон, марон, номар, рамон, ронам
адимр	4	дирам, марди, мирад, рамид
абир	4	абир, абри, бари, бира
аипс	4	аспи, паси, писа, сипа
аабднр	4	бандар, баранд, данбар, набард
еимн	4	мёни, миён, ниём, ниме
аипрс	4	испар, пирса, писар, сипар
аадмнно	4	монанда, надонам, намонад, намонда
аикн	4	инак, кани, киан, кина
абзно	4	анбоз, баноз, забон, обзан
аддно	4	дадон, додан, донад, надод
аабдр	4	бадар, бадра, барад, барда
абдимно	4	бидонам, бимонад, бимонда, мабинод
азмру	4	зурам, марзу, разму, рузам
абдину	4	бандуи, будани, набиду, набуди
адимнор	4	дармони, мардони, номарди, норамид
гзору	4	гозур, гузор, гуроз, рузго
абиор	4	ароби, барои, бораи, рабои
ино	4	ино, нои, оин, они
аднор	4	оранд, радон, ронад, ронда
аагдинр	4	гардани, гиранда, нагарди, нагирад
адннох	4	нахонд, хандон, хонанд, хондан
абдир	4	барди, бидар, бирад, дабир
адру	4	дару, раду, руда, удар
адмнор	4	дармон, мардон, номард, рондам
аностх	4	насохт, нахост, сохтан, хостан
аарст	4	араст, астар, раста, сарат
абдиру	4	бурдаи, бурида, дабиру, рабуди
арсту	4	расту, руста, сурат, тарсу
абнор	4	анбор, барно, барон, онбар
амруш	4	машур, умраш, шарму, шумар
адимнно	4	андимон, монанди, надимон, намонди
аинорс	4	асирон, нораси, расони, сарони
абирст	4	бираст, бистар, битарс, ситабр
орсту	4	росту, русто, тусро, урост
абдру	4	бадру, барду, бурда, рабуд
агдирш	4	гардиш, гирадш, гирдаш, дигарш

Коды анаграмм	Мощность анаграммы	Состав словоформ в анаграммах
адзно	4	андоз, зодан, назод, нозад
азирх	4	захир, захри, зирах, зихар
бноух	4	нохуб, обхун, хубон, хуноб
аёимн	4	миёна, наёми, найём, нимас
адмнору	4	дармону, мардону, намудор, рондаму
аавдинор	4	ардавони, новарида, овардани, оваридан
биноух	4	бихону, нохуби, хубони, хуноби
адмноу	4	андому, дамону, мадону, монаду
аабднру	4	баранду, данбару, набарду, рабудан
абиирст	4	бирасти, бистари, битарси, ситабри
азнор	4	арзон, занро, ноарз, разон
аадкнрш	4	карданаш, кашандар, накардаш, нашкарад
аабгдинрр	4	барнагарди, барнагирад, набаргарди, набаргирад
аимр	4	амир, амри, ирам, рами
аабгднор	4	бадрагон, бардагон, бароганд, борандаг
аборт	4	барот, борат, работ, табор

При сравнении результатов данной таблицы с таблицей 4 из [4], обнаруживается, в частности, что коды “адмно” и “адимно” в произведении «Шахнаме» определяют анаграммы с 8 и 7 словоформами, в том время как этим кодам в корпусе таджикских текстов соответствуют анаграммы с 11 и 14 словоформами. Причина разницы очевидна: размер корпуса таджикских текстов (55 808 495 словоупотреблений) намного превосходит размер произведения «Шахнаме» (573082 словоупотребления).

Заключение. Необходимо отметить, что настоящее исследование совместно с [7, 8] формируют начальные представления о цифровом образе творчества великого поэта таджикско-персидской литературы А.Фирдауси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фирдавси А. Шохнома. – Душанбе: Адиб, 2007/2008/2009/2010, чилд 1-10, 4736 с.
2. Анаграмма. – Википедия: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Анаграмма>
3. Усманов З.Д. – Об упорядоченном алфавитном кодировании слов естественных языков. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2012, т.55, № 7, с. 545-548.
4. Усманов З.Д., Довудов Г.М., Холматова С.Д. О множестве анаграмм таджикского языкаю – Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2013, №1(150), с. 32-39.
5. Усманов З.Д., Нормантас В. Статистические свойства $\alpha\beta$ -кодирования слов естественных языков. Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2012, т.55, № 8, с 622-625.
6. Усманов З.Д., Довудов Г.М. О многообразии анаграмм корней таджикского языка. - Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2014, т.57, № 4, с 287-291.
7. Усманов З.Д., Косимов А.А. К вопросу о положении точки кульминации в художественных произведениях. – Мат-лы 17 науч.-практ. семинара "Новые информационные технологии в автоматизированных системах". – М., 2013, с. 392-395.

8. Усманов З.Д., Косимов А.А. Цифровой образ «Шахнаме – Книги царей» А.Фирдауси. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2014, т.57, № 6, с. 471-476.

А.А.ҚОСИМОВ

**ОИДИ МАЧМЎИ АНАГРАММАҲОИ КИТОБИ
«ШОҲНОМА»–И А.ФИРДАВСӢ**

*Донишқадаи политехникии Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи М.С.Осими
дар ш. Хуҷанд*

Бо истифодаи кодиронии махсуси калимаҳо, маълумот оиди гуногунии анаграммаҳои асари Шоҳномаи А.Фирдавсӣ дарёфт карда шуд. Рӯихати анаграммаҳо, ки шумораи зиёдтарини калима доранд, пешниҳод карда мешавад.

Калимаҳои калидӣ: Фирдавсӣ, Шоҳнома, шаклҳои калима (парадигмаҳо), кодиронӣ, анаграмма, омор.

A.A.KOSIMOV

ON A SET OF THE ANAGRAMS IN POEM "SHEHNOMEH" BY A.FIRDOUSI

Khujand's Politechnic Institute of M.Osimi Tajik Technical University

Thanks to special coding of wordforms, a set of anagrams to "Shehnomeh" by A.Firdousi is exhaustively described. Statistical data on the number of different anagrams with a specified number of items are received. Some anagrams with the highest number of wordforms are presented for discussion.

Key words: Firdousi, Shehnomeh, word form, coding, anagram, statistics.

**ЧАСТОТНОСТЬ ТАДЖИКСКИХ СЛОВОФОРМ В КОЛЛЕКЦИЯХ
ТЕКСТОВ ДЕТСКОЙ И СОВРЕМЕННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 22.02.2016 г.

Установлена линейная зависимость между служебными словами и нелинейная зависимость между знаменательными словоформами детской и современной художественной литературы.

Ключевые слова: таджикский язык, словоформа, служебные, знаменательные, корреляция.

Основу нашего исследования составили коллекции текстов детской и современной художественной литературы. Первая коллекция – авторская, сформированная из 77 произведений с суммарным объёмом в 43652 словоупотреблений. Вторая коллекция размером в 59 344 883 словоупотребления предоставлена в распоряжение автора Г.М.Довудовым.

В настоящей статье в качестве предмета исследования рассматриваются не сами коллекции, а их базы, соответственно, размера 9859 и 273 734 словоформ. Первая база с информацией о частотности словоформ получена непосредственно в результате обработки множества словоупотреблений из коллекции текстов для детей, а вторая база, также с частотностью словоформ, заимствована из [1, 2].

1. Корреляция коллекций на уровне 50%-го покрытия текстов.

Частотные словари используются для изучения вопроса о возможных корреляциях коллекций текстов детской и современной художественной литературы. Предварительное изучение этого вопроса базируется на сравнении и обработке информации, заключенной в “урезанных” частотных словарях, осуществляющих 50%-е покрытие текстовых коллекций. Для детской и современной литературы такие покрытия выполняются наборами D_1 и D_2 , содержащими соответственно 325 и 489 словоформ (см. табл. 1). В свою очередь,

Адрес для корреспонденции: Рустамов Гетигурд Зафарович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, д. 299/1, Институт математики АН РТ. E-mail: getigurd@gmail.com

так же, как и в [3], оба набора разделяются на две части $D_s = D_s^{(1)} + D_s^{(2)}$ ($s = 1, 2$), из которых $D_s^{(1)}$ – набор служебных слов и $D_s^{(2)}$ – набор знаменательных словоформ. Для детской литературы эти наборы содержат 22 и 303 слов, для современной литературы – 20 и 469 слов.

Таблица 1

Количественный состав слов 50%- го уровня покрытия текста

Число	Детская литература D_1	Современная литература D_2
словоупотреблений	21832	29385567
словоформ	325	489
(из них) служебных	22 (+1)	20 (+3)
(из них) знаменательных	303	469

Напомним, что *служебные слова* (предлоги, послелогии, союзы, частицы, изафет) не имеют самостоятельной номинативной, когнитивной и информативной функции, в то время как *знаменательные словоформы*, несущие смысл предложения, обладают самостоятельным лексическим значением, выполняют номинативную функцию, служат названиями предметов, действий, качеств, свойств, выступают в предложении в роли его членов [4].

Для сравнения $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ ($k = 1, 2$), различающихся как по количеству, так и по составу словоформ, производится “выравнивание” этих наборов. С этой целью из элементов, входящих в $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$, составляется общий список. Для $D_1^{(1)}$ и $D_2^{(1)}$ этот список включает в себя 23 служебных слова, из которых 22 содержатся в детской литературе и 20 – в современной литературе. Для выравнивания исходных списков к набору $D_1^{(1)}$ присоединяется одно дополнительное служебное слово, которое встречается в наборе $D_2^{(1)}$ и которого не было среди $D_1^{(1)}$, а к набору $D_2^{(1)}$ – три дополнительных, которые встречаются в $D_1^{(1)}$ и которых нет среди $D_2^{(1)}$. Факт выравнивания отмечен в третьей строке табл. 1 присутствием скобок (+1) и (+3).

Обозначенные символами $D_1^{(1)*}$ и $D_2^{(1)*}$ выравненные наборы служебных слов (список дается во второй колонке) совместно с их частотностями в коллекциях текстов детской (под символом λ_1) и современной литературы (под символом λ_2) приведены в табл. 2.

Таблица 2

Частотность служебных слов в коллекциях текстов

n	$D_1^{(1)*}, D_2^{(1)*}$	λ_1	λ_2		n	$D_1^{(1)*}, D_2^{(1)*}$	λ_1	λ_2
1	дар	1.9518	3.5287		13	на	0.126	0.1123
2	ба	3.2576	3.4125		14	чун	0.4169	0.0952
3	ва	0.4444	2.9132		15	боз	0.2337	0.0555
4	аз	2.9162	2.5591		16	балки	0	0.0514
5	ки	1.2302	2.3506		17	бе	0.1191	0.0442
6	бо	0.8362	1.0672		18	не	0.1901	0.0357
7	барои	0.1672	0.597		19	зи	0.1214	0.0335
8	то	0.3917	0.336		20	эй	0.2612	0.0299
9	ё	0.142	0.2834		21	гар	0.0825	0
10	бар	0.5246	0.226		22	чу	0.0756	0
11	аммо	0.1054	0.2106		23	магар	0.0619	0
12	вале	0.0893	0.164					

Аналогичная процедура “выравнивания” применяется к наборам $D_1^{(2)}$ и $D_2^{(2)}$ знаменательных словоформ. В рассматриваемом случае “выровненный” список формируется из 637 словоформы. К набору $D_1^{(2)}$ присоединяются 334 дополнительных знаменательных словоформ, которые встречаются в наборе $D_2^{(2)}$ и которых не было среди $D_1^{(2)}$, а к набору $D_2^{(2)}$ – 168 дополнительных, которые встречаются в $D_1^{(2)}$ и которых нет среди $D_2^{(2)}$. Здесь не приводится таблица, подобная табл. 2, с соответствующими данными о составе и частотности знаменательных словоформ из-за большого объёма.

Отметим, что в обоих рассмотренных случаях данные о частотностях дополнительно присоединяемых словоформ извлекаются из двух баз словоформ с их частотами, которые были получены в результате соответствующей обработки коллекции текстов детской и современной литературы. Уместно также указать, что при отсутствии в базах необходимых словоформ им присваивается частотность, равная нулю.

Изучение корреляции коллекций текстов детской и современной литературы по схеме, примененной в статьях [5, 6], производится путём сравнения частот λ_1 и λ_2 служебных слов и знаменательных словоформ, осуществляющих 50% - ые покрытия множеств словоупотреблений:

- вначале вычисляется коэффициент r_e выборочной корреляции между двумя наборами частот λ_1 и λ_2 , [7]; для служебных слов табл. 2 он оказывается равным $r_e = 0.84$, а для знаменательных словоформ – $r_e = 0.58$;

- затем, вычисляя наблюдаемое значение критерия $T_{набл}$ по формуле $T_{набл} = r_e \sqrt{n - 2} / \sqrt{1 - r_e^2}$, находим для служебных слов $T_{набл} = 0.83\sqrt{23 - 2} / \sqrt{1 - 0.84^2} = 7.09$, а для знаменательных словоформ $T_{набл} = 0.58\sqrt{637 - 2} / \sqrt{1 - 0.58^2} = 18.17$;

- далее для уровня значимости $\alpha = 0.001$ и числа степеней свободы $k = 21$ (для служебных слов) и $k = 635$ (для знаменательных словоформ) проверяется нулевая гипотеза $H_0: r_r = 0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1: r_r \neq 0$. По таблице распределения Стьюдента определяем критическую точку $t_{кр}(0.001; 21) = 0.38$ (для служебных слов) и $t_{кр}(0.001; 635) = 0.10$ (для знаменательных словоформ). Поскольку в обоих случаях $T_{набл} > t_{кр}$ – нулевая гипотеза отвергается. Следовательно, выборочный коэффициент корреляции для обеих коллекций *значимо отличается от нуля*.

Иными словами, *между частотами служебных слов и частотами знаменательных словоформ на уровне 50% -го покрытия текстов детской и современной художественной литературы имеет место корреляция*. Более того, близкое к единице значение выборочного коэффициента корреляции $r_s = 0.83$ и близкое к 0.5 значение $r_s = 0.58$ подсказывают существование линейной зависимости между относительными частотами служебных слов и нелинейной связи между относительными частотами знаменательных словоформ.

2. Корреляция коллекций на уровне 75%-го покрытия текстов.

Исходные данные показаны в табл. 3.

Таблица 3

Количественный состав слов 75%-го уровня покрытия текста

Число	Детская литература	Современная литература
	D_1	D_2
словоупотреблений	32 736	44 066 944
словоформ	1800	3230
(из них) служебных	22	23
(из них) знаменательных	1778	3207

Аналогично предыдущему разделу изучена корреляция коллекций детской и современной литературы на уровне 75% -го покрытия текстов. Итоговые результаты представлены в табл. 4.

Таблица 4

Количественный состав слов 75%-го уровня покрытия текста

Показатели	Служебные слова	Знаменательные словоформы
n	23	4180
k	21	4178
α	0.001	0.001
r_s	0.84	0.63
$T_{набл}$	7.12	52.65
$t_{кр}(\alpha; k)$	0.38	0.03

В этой таблице так же, как и выше, приняты обозначения: n – число словоформ в 75 %-ом уровне покрытия текстов, k – число степеней свободы, α – уровень значимости

нулевой гипотезы, r_e – выборочный коэффициент корреляции, $T_{набл}$ – наблюдаемое значение критерия и $t_{кр}(\alpha; k)$ – критическая точка при уровне значимости α и числе степеней свободы k . Как показывает табл. 4, и для служебных слов и для знаменательных словоформ имеет место неравенство $T_{набл} > t_{кр}$, что отвергает нулевую гипотезу. Следовательно, как и в предыдущем разделе, между коллекциями детской и современной литературы на уровне 75%-го покрытия текстов существует значимая корреляция, линейная – для служебных слов и нелинейная – для знаменательных словоформ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усманов З.Д., Довудов Г.М. Формирование базы морфов таджикского языка – Душанбе: Дониш, 2014, 110 с.
2. Усманов З.Д., Довудов Г.М. Морфологический анализ словоформ таджикского языка – Душанбе: Дониш, 2015, 130 с.
3. Усманов З.Д., Фозилова М.М. Лугати басомадии морфемаҳои забони адабии томактабии тоҷик (Частотный словарь морфем дошкольной таджикской литературы) – Прикладные информационные системы: проблемы моделирования, разработки и применения в развивающихся странах. – Мат-лы междунар. научной конф. Худжанд, 29-30 июня 2012, с.22-26.
4. Жеребило Т.В. Словарь лингвистических терминов. – Назрань, 2010, 488 с.
5. Усманов З.Д., Косимов А.А. Цифровой образ “Шахнаме” (“Книга царей”) А.Фирдауси. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2014, т.57, № 6, с.471-476.
6. Усманов З.Д., Косимов А.А. Частотность букв таджикской литературы – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2015, т.58, № 2, с.112-115.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высш. шк., 2003, 479 с.

Г.З.РУСТАМОВ

БАСОМАДИ ВОХҶҶРИ ВА НАЗАРРАСИИ ШАКЛҶҶОИ КАЛИМА ДАР МАТНҶҶОИ АДАБИЁТИ АТФОЛ ВА НАВИНИ ТОҶИК

Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраев,

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Байни калимаҳои ёридиҳанда ва шаклҳои калимаҳои мустақилмаънои адабиёти кӯдакона ва адабиёти муосири бадеӣ тобеият қорӣ карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: забони тоҷикӣ, шакли калима, ёридиҳанда, мустақилмаъно, таносуб.

G.Z.RUSTAMOV

FREQUENCIES OF TAJIK WORD FORMS OF CHILD AND MODERN LITERATURE

A. Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

Established linear dependence between syntactic word forms and nonlinear dependence between significant word forms of the child and modern literature.

Key words: Tajik language, word form, syntactic word, significant word, correlation.

УДК 523. 532

Г.И.КОХИРОВА, Ф.РАХИМИ*, С.В.КРЮЧКОВ**, И.В.НИКОЛЕНКО***,
А.Ш.МУЛЛО-АБДОЛОВ, У.Х.ХАМРОЕВ, С.Х.АБДУЛЛОЕВ

**НОВЫЙ «ПЕРВЫЙ СВЕТ» ТЕЛЕСКОПА ЦЕЙСС-1000
МЕЖДУНАРОДНОЙ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ САНГЛОХ**

Институт астрофизики АН Республики Таджикистан,

**Президиум АН Республики Таджикистан,*

***Институт астрономии Российской академии наук,*

****Крымская астрофизическая обсерватория Российской академии наук*

Поступила в редакцию 12.07.2016 г.

Телескоп Цейсс-1000 Международной астрономической обсерватории Санглох (МАОС) Института астрофизики АН РТ находился в нерабочем состоянии более 25 лет. Учитывая большое значение функционирования телескопа для дальнейшего развития астрономических исследований в Таджикистане, а также превосходный астроклимат МАОСа и имеющуюся инфраструктуру, в марте 2015 г. начаты работы по восстановлению и модернизации телескопа. В результате, в апреле-мае 2016 г. получен новый «Первый свет» телескопа Цейсс-1000 МАОСа, т.е. получены цифровые изображения космических объектов.

Ключевые слова: обсерватория, телескоп, программа, наблюдения, координаты, галактика.

Международная астрономическая обсерватория «Санглох» (МАОС) Института астрофизики Академии наук Республики Таджикистан расположена на горе Санглох на высоте 2300 м в Дангаринском районе Хатлонской области Республики Таджикистан в 90 км юго-восточнее г. Душанбе. В Центре малых планет MPC (Minor Planet Center) Международного астрономического союза обсерватория Санглох зарегистрирована под кодом 193.

Адрес для корреспонденции: Кохирова Гулчехра Исроиловна. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бухоро, 22, Институт астрофизики АН РТ. E-mail: kokhirova2004@mail.ru

Специальные исследования, проведенные несколькими экспедициями в 1960-х гг., доказали уникальность астроклиматических условий на Санглохе со следующими показателями:

количество ясных ночей в году 230;

качество изображения 0.54 угловых секунд;

коэффициент оптической прозрачности атмосферы 0.78.

Кроме того, на горе весьма благоприятными для астрономических наблюдений оказались температурный режим и роза ветров [1]. Наблюдения показали, что качество изображений звезд стабильно хорошее начиная с уровня земли и до высоты свыше 300 метров. Такие результаты не имеет ни одна обсерватория в мире, включая и известную обсерваторию в жерле вулкана Мауна Кеа на Гавайских островах. В результате было принято решение о создании на этом месте обсерватории и в 1977 г. на горе Санглох началось ее строительство. Подобный астроклимат, возникший благодаря местному рельефу и глобальной карте ветров, сложился случайно, но благодаря систематичности и результативности проведенных научных исследований стал достоянием суверенного Таджикистана.

Большим событием в жизни Института астрофизики явилось открытие в 1980 г. новой горной астрономической обсерватории Санглох с новым телескопом. 1-м зеркальный телескоп системы Ричи-Кретьена-Куде (1-м RCC) производства фирмы Карл Цейсс (Йена, Германия) был установлен и введен в эксплуатацию на Санглохе также в 1980 г. [1].

Интенсивные систематические наблюдения на обсерватории Санглох стали проводиться с 1981 г. За это время исследованы все основные системы телескопа, выполнено много серьезных наблюдательных работ, продолжено изучение астроклимата, выжившее сохранение его высоких качеств и после возведения 17-метровой башни телескопа [2-4].

Для пояснения эффективности телескопа приведем следующие факты. Телескоп позволяет различать объекты размером 10 см на расстоянии 40 тыс. км от Земли. В сентябре-декабре 1984 г. во время очередного приближения кометы Галлея к Солнцу ее первые снимки на фотопластинках были получены на Санглохе с помощью 1-м телескопа, в то время как ее не смогли найти с помощью 6-м телескопа [4]. На тот момент блеск кометы составлял 22 зв. вел. (человеческий глаз видит до 6 зв.вел.). По качеству изображений данный телескоп почти близок к показателям 2-м телескопа или в 2 раза лучше, чем 1-м телескоп, расположенный на месте с худшим астроклиматом. Наблюдения показали, что точные координаты слабых объектов на 1-м телескопе определяются с ошибкой меньше одной угловой секунды [4].

Постановлением Правительства РТ за № 723 от 6 декабря 1995 г. эта обсерватория преобразована в Международную астрономическую обсерваторию Санглох при Институте астрофизики Академии наук Республики Таджикистан, а Постановлением Правитель-

ства РТ за № 257 от 10 июня 1996 г. утверждено Положение о Международной астрономической обсерватории Санглох.

К сожалению, в начале 90-х гг. прошлого столетия в связи с известными событиями, система управления движением телескопа была выведена из строя. В таком нерабочем состоянии телескоп находился более 20 лет. Кроме того, за это время произошел революционный переход астрономических наблюдений от использования фотопластинок и фотопленок на цифровые методы регистрации света. Повсеместно в мире в качестве приемников излучения стали использоваться камеры с ПЗС матрицами (CCD), которые позволили значительно повысить эффективность телескопов, а также существенно ускорить получение и обработку астрономических данных. Эта инновационная технология, внедренная в астрономические и астрофизические наблюдения, вывела науку на кардинально новый уровень развития.

Учитывая возможность применения современной технологии на 1-м телескопе, а также превосходный астроклимат МАОСа и имеющуюся инфраструктуру, в марте 2015 г. Президиум АН РТ на основе ходатайства Института астрофизики принял решение о восстановлении телескопа и его модернизации. Это решение имеет большое значение для дальнейшего развития Института астрофизики АН РТ, поскольку возобновление астрономических наблюдений с помощью телескопа Цейсс-1000, снабженного ПЗС камерой, позволит перевести научные исследования на качественно новый уровень.

Уже в марте 2015 г. в Президиуме АН РТ был создан рабочий штаб по восстановлению и модернизации 1-м телескопа, а также полному ремонту всех зданий и помещений МАОСа.

Комплекс 1-м телескопа производства Карл Цейсс Йена включает в себя 8-м купол и сам телескоп. Купол представляет собой металлодеревянный каркас с дощатой опалубкой и алюминиевым покрытием, оснащенный тельфером грузоподъемностью 1.5 т. Полный оборот купола происходит за 2.5 мин., скорость его вращения составляет 17 см/с. Купол имеет щель шириной 2.5 м, которая закрывается посредством двух раздвижных створок. Время открытия и, соответственно, закрытия створок около 34 с. Все операции можно выполнять как с использованием 3-х фазных электрических двигателей, так и вручную.

Телескоп Цейсс-1000 с оптической системой Ричи-Кретьена-Куде имеет следующие характеристики:

- Главное зеркало, свободное отверстие – 1016 мм;
- Фокусное расстояние – 4064 мм.

Оптическая система Ричи-Кретьена:

- Эквивалентное фокусное расстояние -13.3 м;
- Диаметр невиньетированного поля – 170 мм;
- Диаметр вторичного зеркала – 324 мм.

Оптическая система Куде:

- Эквивалентное фокусное расстояние – 36.5 м;
- Диаметр невиньетированного поля – 76 мм;
- Диаметр вторичного зеркала – 294 мм.

Телескоп имеет искатель, с фокусным расстоянием 750 мм, свободным отверстием 110 мм, полем зрения 1.4° и гид с фокусным расстоянием 3000 мм, свободным отверстием 200 мм, полем зрения 21' (угловых минут).

Монтировка телескопа английского типа. Телескоп может двигаться по обеим осям с четырьмя скоростями – 120°/мин, 3°/мин, 10'/мин, 1'/мин. Предусмотрена также скорость для звездного ведения – 15'/мин.

В апреле 2015 г. было проведено обследование состояния телескопа. Оптические и механические узлы, а также электродвигатели телескопа находились в рабочем состоянии. Система управления телескопом, включавшая в себя управляющую ЭВМ Vilati, коммутационное оборудование (реле, пускатели) и пульты управления, была сильно повреждена, и ее восстановление было нецелесообразным. Было принято решение сделать новую систему управления на современной элементной базе с использованием персонального компьютера и микроконтроллеров. По сравнению с оригинальной системой управления, в новой системе сильно сокращено количество реле и других электромеханических устройств. Это повысило надежность системы.

В сентябре 2015 г. и марте-апреле 2016 г. выполнены основные работы, связанные с восстановлением и модернизацией 1-м телескопа. Были заменены новыми неисправные пускатели электродвигателей телескопа. Для управления силовой частью использованы микроконтроллерные модули Kernelchip Laurent-112, содержащие управляемые реле и имеющие интерфейс Ethernet. Наличие Ethernet позволяет включить контроллеры в локальную сеть, что дает возможность управлять телескопом с любого компьютера в сети, а впоследствии - через Интернет.

Для компенсации суточного вращения Земли используется двигатель звездного ведения, работающий от частоты 50.14 Гц. Эта частота задается с помощью частотного преобразователя Simens. Предусмотрена также возможность переключения на сетевую частоту (50 Гц).

Для определения положения телескопа использованы абсолютные многооборотные энкодеры Kubler. Эти энкодеры, в отличие от ранее использовавшихся энкодеров Zeiss, не содержат лампы накаливания, что увеличивает надежность устройства. Разрядность энкодеров – 25 бит позволяет определять положение телескопа с точностью до 1 угловой секунды. Однако реальная точность позиционирования определяется механическими характеристиками телескопа и составляет несколько минут дуги. Такая точность позволяет наводиться на нужные объекты с использованием в фокусе Кассегрена камеры с ПЗС матрицей диагональю 52 мм (поле зрения 10x10 угловых минут). Для более точного позиционирования необходимо провести юстировку телескопа либо ввести программ-

ную коррекцию. Энкодеры подключены к компьютеру по интерфейсу RS-485, обеспечивающему надежную связь с компьютером на расстоянии в несколько десятков метров.

На рис.1 приведена блок-схема телескопа и системы управления после его восстановления.

При опускании трубы телескопа ниже горизонта, а также при столкновении с северным пилоном возможно повреждение телескопа. Для предотвращения этого существует узел ограничений положений телескопа. Узел представляет собой прозрачный цилиндр, движущийся синхронно с телескопом благодаря сельсинам, связанным с приводами осей. Цилиндр покрыт непрозрачной маской в местах, соответствующих опасным положениям и снабжен оптопарой. При затемнении фотодиода движение телескопа выключается.

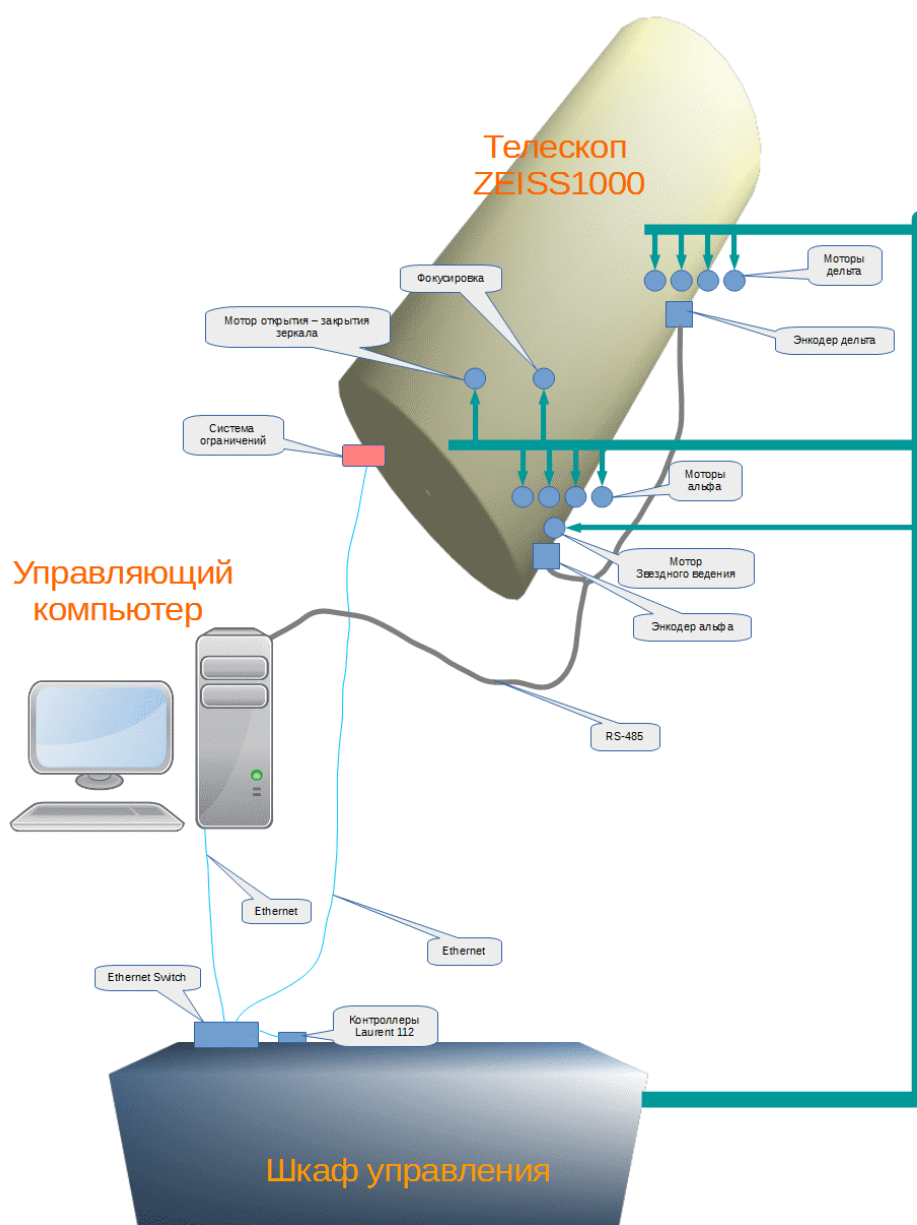


Рис.1. Блок-схема телескопа и системы управления.

Этот узел также был модернизирован. Лампа накаливания в оптопаре была заменена более надежным светодиодом. Вместо контроллера, собранного на дискретных элементах, и реле использован микроконтроллерный модуль Arduino Uno, который отключает двигатели телескопа и передает информацию о входе в опасную зону на управляющий компьютер. Таким образом, защита организована на двух уровнях – программном и аппаратном.

Для управления узлами телескопа разработана программа управления ZEISS1000_S, работающая на персональном компьютере с операционной системой Win-

Windows 7. Программа отображает координаты точки, куда смотрит телескоп – часовой угол, прямое восхождение, склонение, зенитный угол, а также всемирное и звездное время. Программа позволяет управлять движением телескопа, включать и выключать звездное ведение, открывать и закрывать заслонку зеркала, управлять фокусировкой. Кроме того, предусмотрено позиционирование телескопа на выбранные координаты. В будущем планируется включить дополнительные функции. Программа написана на языке DELPHI и имеет удобный пользовательский интерфейс (рис.2).



Рис.2. Пользовательский интерфейс программы управления.

Для правильного позиционирования телескопа требуется точное время. Для привязки времени используется GPS-приемник Trimble Resolution-T, позволяющий привязывать системное время компьютера с точностью до 1 мс.

Также была модернизирована сеть электропитания телескопа. Установлены модули грозозащиты, что значительно снижает риск выхода из строя электронных модулей телескопа и навесного оборудования во время грозы.

Вместо устаревшего оборудования для фотопластинок и фотоплёнок на телескопе в качестве современного приемника и регистрации излучения была установлена новая камера с ПЗС матрицей SBIG STX 16803. Эта крупноформатная камера седьмого поколения SBIG с низким уровнем шума имеет расширенные возможности. В камере используется ПЗС матрица KAF-16803 фирмы Kodak с разрешением сенсора в 16.8Мп (4096x4096). С матрицей размером 36.9x36.9 мм, расположенной в фокусе Кассегрена, можно получить изображение размером 11x11 угловых минут. Камера имеет расширенные возможности охлаждения и компьютерные интерфейсы USB 2.0 и Ethernet. Камера, установленная на ZEISS-1000, удалена от компьютера на расстояние около 20 м. На таком расстоянии применение USB 2.0 возможно только с использованием удлинителя USB. Интерфейс Ethernet позволяет подключить камеру к компьютеру без дополнительных устройств, что повышает надежность. Однако скорость обмена с компьютером через Ethernet ниже, чем через USB 2.0. Совместно с камерой используется 7-позиционное колесо фильтров турель FW7-STX, которое содержит семь 50-мм квадратных ячеек для фильтров стандартных полос U, B, V, R, I.

В первом полугодии 2016 г. завершены основные работы по восстановлению и модернизации телескопа Цейсс-1000 МАОСа Института астрофизики АН РТ. На рис. 3 приведена фотография здания с башней телескопа и на рис.4 – снимок самого телескопа после восстановления. Теперь управление движением телескопа и наблюдения выполняются с помощью компьютеров и специальных программ. Осуществлено автоматическое наведение телескопа на определенные объекты по заданным координатам. Подключение к телескопу ПЗС-камеры позволяет получать изображения объектов на 5 звездных величин более слабых, чем на фотопластинках. Изображения выводятся на монитор компьютера и сразу доступны для обработки специализированными астрономическими программами (MaximDL, CCDOps и др.)



Рис.3. Здание с башней телескопа Цейсс-1000 МАОСа.



Рис.4. Телескоп Цейсс-1000 МАОСа.

В конце апреля – мае 2016 г. на телескопе Цейсс-1000 проведены первые наблюдения после его полной реконструкции. Во время тестовых наблюдений получены цифровые снимки таких объектов, находящихся вне нашей Галактики, как шаровое звездное скопление М3 на расстоянии $322 \cdot 10^{15}$ км от Земли (рис.5); спиральная галактика М64 или "Черный глаз" на расстоянии $181 \cdot 10^{18}$ км от Земли (рис.6), ярчайшая звезда в созвездии Льва и одна из ярчайших звезд на ночном небе - Альфа Льва или Регул на расстоянии 24 триллиона км от Солнечной системы и массивнее Солнца в 3.5 раза. В июне получены снимки некоторых объектов Солнечной системы, как естественного, так и искусственного происхождения. На рис. 7 приведен снимок долгопериодической кометы C/2014 W2 (PANSTARRS). На момент наблюдений комета уже миновала перигелий своей орбиты, т.е. уже начала удаляться от Солнца, ее расстояние от Земли составляло 2.7 а.е. или 409.5 млн. км, а блеск равнялся почти 13 звездным величинам. Период обращения кометы вокруг Солнца составляет более 61 тысячи лет. Получены изображения геостационарных спутников (ГСС) Земли, расположенных на расстоянии 38-40 тыс. км от Земли (рис.8). Блеск объектов равен 10 звездным величинам.



Рис.5. Шаровое скопление М3.



Рис.6. Спиральная галактика М64 или "Черный глаз".

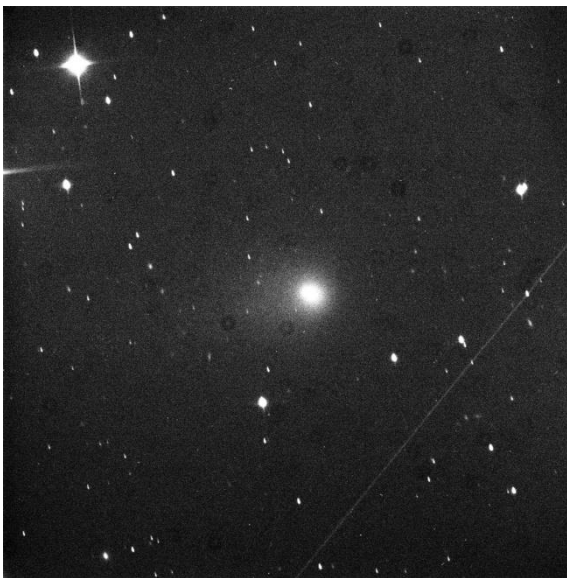


Рис.7. Долгопериодическая комета С/2014 W2 (PANSTARRS) (в центре кадра) 30 июня 2016 г.

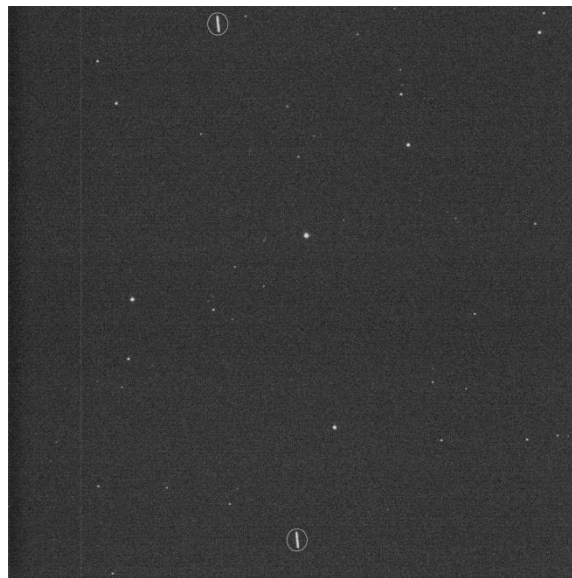


Рис.8. Изображения двух ГСС Земли, полученные 30 июня 2016 г. на телескопе Цейсс-1000 МАОСа.

Таким образом, после 26 лет перерыва получен новый "Первый свет" на телескопе Цейсс-1000 Международной астрономической обсерватории Санглох Института астрофизики АН РТ. В астрономии "Первым светом" называются изображения различных небесных объектов, впервые зарегистрированных с помощью новых или восстановленных и модернизированных телескопов.

Теперь перед сотрудниками Института поставлены новые задачи. Необходимо, в первую очередь, всесторонне исследовать новые фотографические свойства телескопа. С

целью определения динамических и физических свойств космических объектов, особенно околоземных и потенциально опасных, следует проводить их систематические астрометрические и фотометрические наблюдения. Обсерватория Санглох теперь имеет все возможности стать полноценным полигоном для подготовки квалифицированных кадров в области астрономических и астрофизических исследований. Кроме того, необходимо укреплять и расширять имеющееся в Институте международное сотрудничество. Телескоп Цейсс-1000 может придать этому новый импульс, поскольку в мировом астрономическом сообществе всегда есть запросы на использование хороших телескопов и, соответственно, возможны предложения на выполнение международных проектов. В результате совместных с учеными иностранных государств наблюдений публикуются совместные статьи, представляются совместные доклады на международных конференциях, все это является существенным вкладом в повышение авторитета наших ученых, подготовку кадров и укрепление международного сотрудничества.

Все работы по восстановлению и модернизации телескопа осуществлялись с организационными усилиями и при всесторонней поддержке со стороны президента АН РТ, Президиума АН РТ, Правительства РТ.

Запланированный объем работ совместно с инженерами С.В.Крючковым и И.В.Николенко выполняли сотрудники Института: Г.И.Кохирова, А.Ш.Мулло-Абдолов, У.Х.Хамроев, С.Х.Абдуллоев, а также принимали участие сотрудники: Ф.Дж.Рахматуллаева, Н.У.Рустамова, А.М.Буриев, Ш.Файзов, А.Джонмухаммади, Д.Аюбов, Х.Гулов.

Заключение

Таким образом, после 26 лет перерыва получен новый "Первый свет" на телескопе Цейсс-1000 Международной астрономической обсерватории Санглох Института астрофизики АН РТ. Вторая жизнь телескопа даст новый импульс развитию астрономической науки в Таджикистане и повышению международного авторитета результатов наших исследований, а также подготовке молодых кадров и укреплению международного сотрудничества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kiselev N.N., Maksumov M.N., Shcheglov P.V. The 1 m RCC telescope of the mountain Sanglok observatory. – Jena Review, 1988, v. 33, № 2, pp.88-89.
2. Сатыволдиев В., Иркаев Б.Н., Юферов А.О. Исследования фотографических свойств метрового телескопа обсерватории Санглох. – Бюлл. Ин-та астрофизики АН ТаджССР, 1989, № 78, с. 3-9.
3. Киселев Н.Н., Рахимов В.Ю., Сиклицкий В.И., Чернова Г.П. Атмосферная экстинкция на обсерватории Санглох. – Бюлл. Ин-та астрофизики АН ТаджССР, 1989, № 78, с. 65-68.
4. Галиева З.А., Герасименко С.И., Киселев Н.Н., Логинова Е.М., Чернова Г.П. Позиционные наблюдения на 1-м RCC телескопе. – Бюлл. Ин-та астрофизики АН ТаджССР, 1989, № 78, с. 62-64.

Г.И.ҚОҲИРОВА, Ф.РАҲИМӢ*, С.В.КРЮЧКОВ**, И.В.НИКОЛЕНКО***,
А.Ш.МУЛЛО-АБДОЛОВ, У.Ҳ.ҲАМРОЕВ, С.Х.АБДУЛЛОЕВ

«НУРИ АВВАЛИНИ»-И НАВИ ТЕЛЕСКОПИ ТСЕЙССИ-1000-И РАСАД- ХОНАИ АСТРОНОМИИ БАЙНАЛМИЛАЛИИ САНГЛОХ

Институти астрофизикаи Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,

**Раёсати Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,*

***Институти астрономияи Академияи илмҳои Россия,*

****Расадхонаи астрономии Крим-и Академияи илмҳои Россия*

Телескопи Тсейсс-1000-и Расадхонаи астрономии байналмилалӣ Санглохи Институти астрофизикаи АИ ҶТ зиёда аз 25 сол дар ҳолати корношоямӣ қарор дошт. Бо назардошти аҳамияти зиёди ҷаҳони телескоп барои инкишофи ояндаи тадқиқотҳои астрономӣ, инчунин иқлими астрономии беҳтарин ва доштани инфра-структура, корҳо барои барқарор ва модернизатсия намудани телескоп моҳи март соли 2015 оғоз шуданд. Дар натиҷа "Нури аввалин"-и телескопи Тсейсси-1000-и РАБС аз нав мушоҳида карда шуд, яъне нахустин аксҳои рақамии объектҳои кайҳонӣ фотографиярониданд.

Калимаҳои калидӣ: расадхона, телескоп, барнома, мушоҳидаҳо, координатҳо, галактика.

G.I.KOKHIROVA, F.RAKHIMI*, S.V.KRYUCHKOV**, I.V.NIKOLENKO***,
A.SH.MULLO-ABDOLOV, U.KH.KHAMROEV, S.H.ABDULLOEV

NEW "FIRST LIGHT" OF THE TELESCOPE ZEISS-1000 OF THE INTERNA- TIONAL ASTRONOMICAL OBSERVATORY SANGLOKH

Institute of Astrophysics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,

**Prezidium of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,*

***Institute of Astronomy of the Russian Academy of Sciences,*

****Astrophysical observatory of Cream of the Russian Academy of Sciences*

The telescope Zeiss-1000 of the International Astronomical Observatory Sanglokh (IAOS) of the Institute of Astrophysics of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan was out a working state more than 25 years. Taking into account the significant importance of an operating of the telescope for the further development of astronomical investigations in Tajikistan, the excellent astroclimate of the IAOS and existing infrastructure, the reconstruction and modernization of the telescope have started in March 2015. As a result, the new "First light" of the telescope Zeiss-1000 was obtained in April-May 2016, i.e. the digital images of the outer space objects were registered.

Key words: observatory, telescope, software, observations, coordinates, galaxy.

УДК 523.83.841+523.85

Д.ДАВЛАТЗОДА, С.Х.АБДУЛЛОЕВ, Н.Х.МИНИКУЛОВ

НЕОДНОЗНАЧНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЦВЕТА ЦЕФЕИДЫ
V383 Cyg С ОСЛАБЛЕНИЕМ БЛЕСКА

Институт астрофизики АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 03.06.2016 г.

Проанализированы результаты фотометрических BVRI наблюдений цефеиды V383 Cyg, построена её кривая блеска, исследован характер изменения цвета с ослаблением блеска на двухцветных диаграммах V-(B-V), V-(V-R), V-(V-I) и V-(R-I). Показано, что звезда V383 Cyg демонстрирует неоднозначные изменения показателей цвета с ослаблением блеска, что в основном свойственно молодым звёздам с алголеподобными ослаблениями блеска.

Ключевые слова: переменные звёзды, цефеиды, кривая блеска, двухцветная диаграмма.

По эволюционному статусу в диаграмме Герцшпрунга-Рессела цефеиды (с возрастом от десятков млн. лет до сотен млн. лет) находятся ближе к молодым звёздам. В связи с этим было необходимо изучить особенности изменения показателей цвета с ослаблением блеска обычной цефеиды. В качестве объекта наблюдений была выбрана малоизученная цефеида V383 Cyg. Первую информацию об исследовании переменной звезды V383 Cyg дает Джой [1]. Физические параметры данной цефеиды являются следующими: период изменения блеска - 4.57 дня, абсолютная звёздная величина - 1.3m, модуль расстояния - 6.61. Звезда имеет лучевую скорость около -20.0 км/сек и расположена ближе к плоскости Галактики.

Наблюдения цефеиды V383 Cyg выполнены на 70-см телескопе АЗТ-8 ГисАО в течение 2-х ночей – 12 и 17 сентября 2014 г., было получено 1402 кадров. Фотометрические наблюдения проведены в 4-х фильтрах (BVRI) с применением ПЗС камеры FLI 1001E. Температура охлаждения камеры во время наблюдений была установлена на уровне -20°C и время экспозиции: 15 и 30 сек. Для полной обработки кадров были также

Адрес для корреспонденции: Давлатзода Далер, Абдуллоев Сафарали Холмуродович, Миникулов Насридин Худойбердиевич. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бухоро, 22, Институт астрофизики АН РТ. E-mail: davlatzoda-daler@mail.ru, a-bakhodur@mail.ru, mnasridin@mail.ru

получены Dark и Flat. Для выполнения количественных оценок фотометрических наблюдений V383 Cyg в четырех фотометрических полосах (BVRI) из ближайшего окружения данной цефеиды были выбраны звезды сравнения, параметры которых приведены в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики звезд сравнения

№	Прямое восхождение	Склонение	Обозначение	V
1	20 ^h 29 ^m 04.02 ^s	+33°57'60.0"	TYC2693-01123-1	11.86
2	20 ^h 29 ^m 27.47 ^s	+34°02'21.2"	TYC2693-01033-1	11.55
3	20 ^h 29 ^m 12.26 ^s	+34°02'05.7"	TYC2693-01229-1	12.49
4	20 ^h 29 ^m 06.70 ^s	+34°10'16.1"	TYC2693-01321-1	11.19
5	20 ^h 28 ^m 53.47 ^s	+34°10'18.6"	TYC2693-01113-1	11.51
6	20 ^h 29 ^m 31.51 ^s	+34°11'46.3"	TYC2693-01099-1	11.24

Обработка наблюдений выполнена по стандартной методике с вычетом усредненных темновых кадров из основных рабочих кадров и учета плоского поля для выравнивания интенсивности пикселей по всему полю рабочих кадров. Ошибки измерения блеска переменной звезды V383 Cyg за обе наблюдательные ночи оказались не хуже 0.01 звёздной величины.

На рис.1 приведены результаты наблюдений за 12 сентября 2014 г., в этот момент звезда находилась ближе к минимуму блеска. Как видно из рисунка, при ослаблении блеска звезды на $\Delta V \approx 0.15^m$ показатели цвета (B-V) и (V-R) смещаются в сторону покраснения, что объясняется снижением температуры звезды. Это вполне соответствует физическим процессам, происходящим в цефеидах.

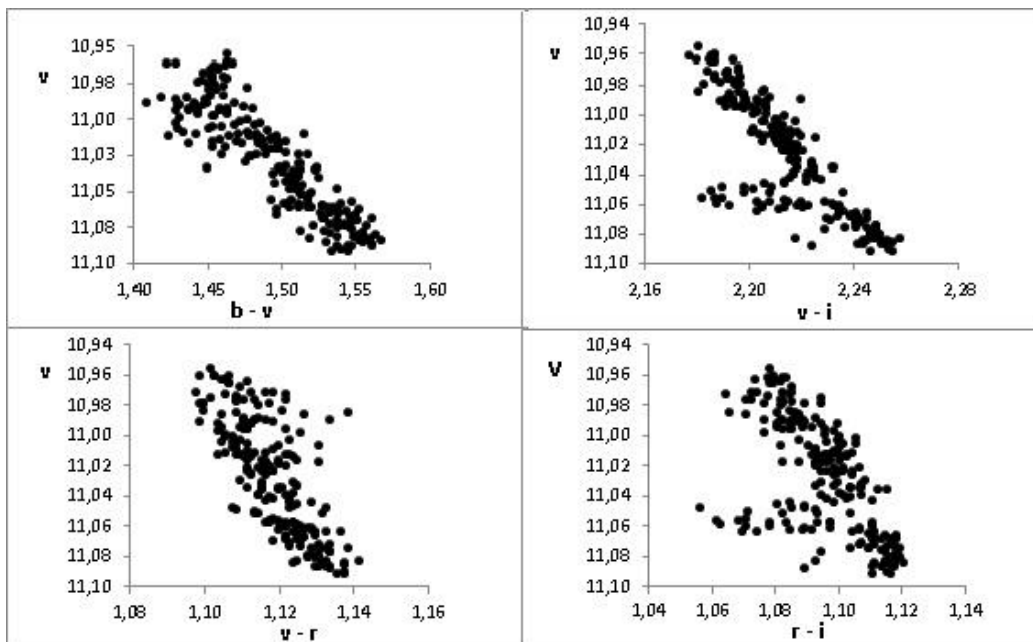


Рис. 1. Изменение показателей цвета и блеска V383 Cyg за 12.09.2014 г.

В то же время изменения показателей цвета (V-I) и (R-I) происходят неоднозначным образом. Как видно из рис. 1, в начальном этапе ослабления блеска эти показатели цвета также смещаются в красную сторону. Однако на уровне блеска 11.04^m происходит поворот в голубую сторону, и величина сдвига составляет более 0.04 звёздной величины, что намного больше величины ошибки наблюдений. По этой причине данный сдвиг является вполне реальным, что невозможно объяснить лишь изменением температуры.

В качестве примера неоднозначных изменений показателей цвета с ослаблением блеска можно привести диаграмму величина – цвет для типичной молодой звезды с аллопедобными ослаблениями блеска WW Vul (см. рис. 2).

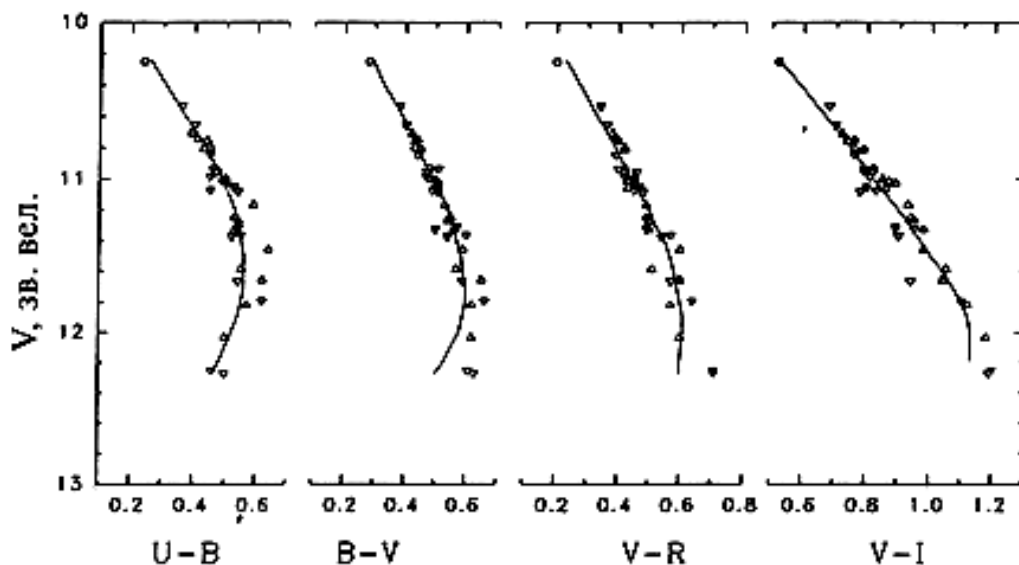


Рис. 2. Изменение показателей цвета молодой звезды Ae Хербига WW Vul.

Молодая звезда WW Vul имеет оптически прозрачную протяженную пылевую оболочку, в которой непрозрачные пылевые сгустки, вращаясь вокруг звезды, время от времени затмевают ее – в результате чего возникают глубокие ослабления блеска звезды. В ярком состоянии вклад прямого излучения звезды преобладает и с ослаблением блеска постепенно увеличивается вклад рассеянного излучения от протяженной пылевой оболочки. В связи с этим происходит смещение показателей цвета вначале в красную и затем в голубую сторону.

Результаты наблюдений за 17 сентября 2014 г. приведены на рис. 3, откуда видно, что звезда находится вблизи яркого состояния блеска и при небольших ослаблениях блеска показатели цвета (B-V) и (V-R) изменяются так же, как описано выше в случае наблюдений за 12 сентября 2014 г. Однако, в этом случае изменения показателей цвета (V-I) и (R-I) происходят совершенно по-другому, то есть при небольших ослаблениях блеска происходит сдвиг в голубую сторону. Величина этого сдвига равняется 0.15 зв. вел. Вероятно, этот сдвиг можно объяснить увеличением вклада околозвёздного горячего газа при небольших ослаблениях блеска V380 Cyg.

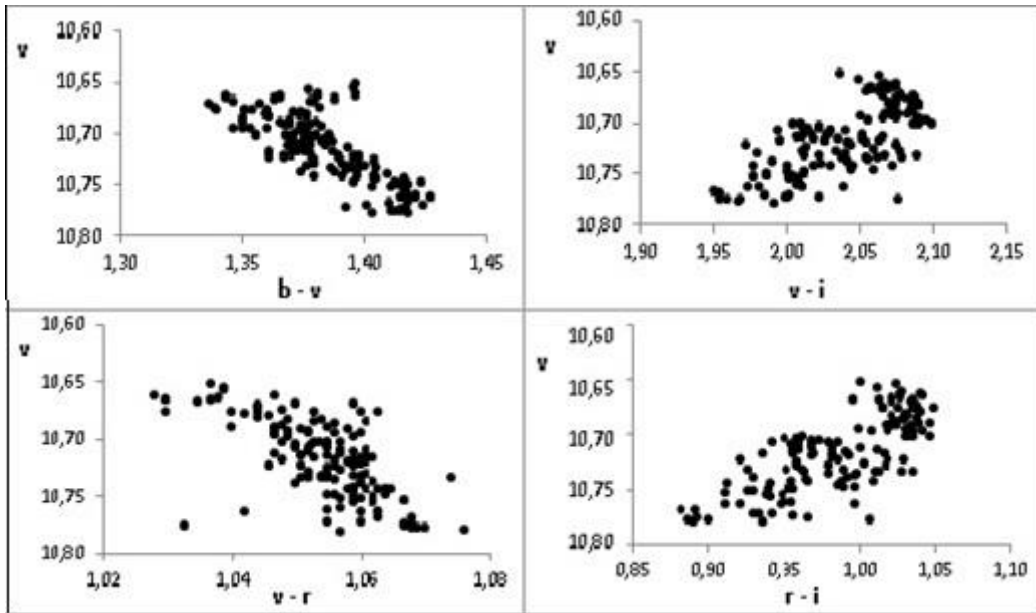


Рис. 3. Изменение показателей цвета и блеска переменной за 17.09.2014 г.

Для демонстрации и представления общего характера изменения показателей цвета с ослаблением блеска, данные наблюдений этой цефеиды за 12 и 17 сентября 2014 г. были объединены и представлены на рис. 4.

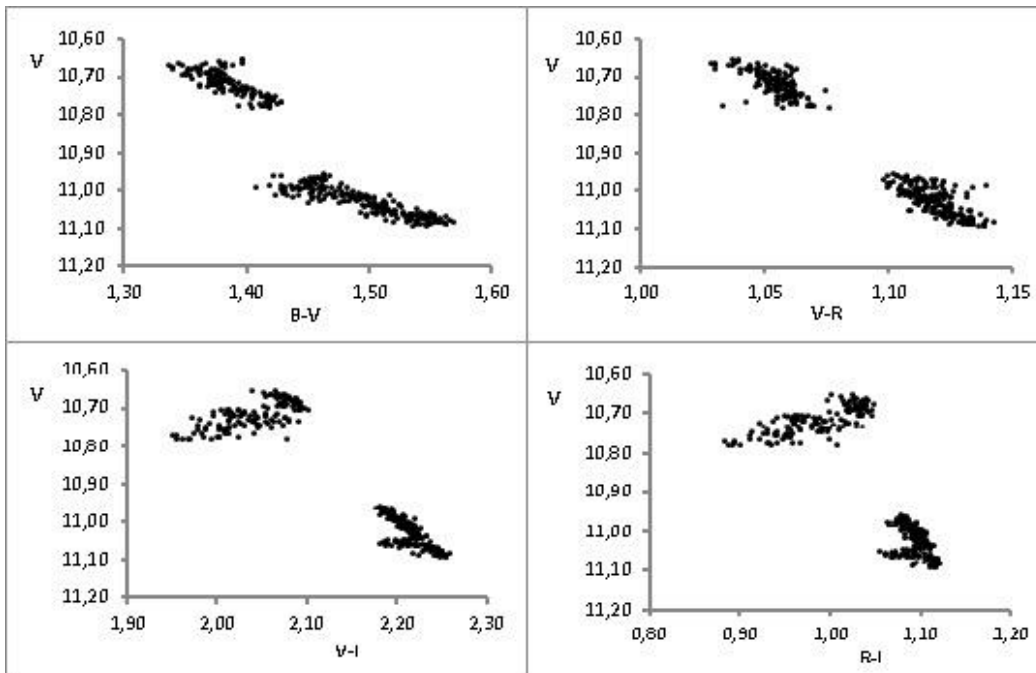


Рис. 4. Изменение показателей цвета и блеска V383 Cyg по наблюдениям за 12 и 17 сентября 2014 г.

Как видно из рис. 4, лишь показатель цвета (V-R) с ослаблением блеска изменяется в соответствии с физикой пульсирующих процессов, происходящих в излучении цефе-

ид. Остальные показатели цвета демонстрируют сложные изменения, требующие простых объяснений механизма переменности блеска и цвета. В связи с этим для объяснения причин изменения цвета с ослаблением блеска V383 Cyg возникает необходимость продолжить более плотные по времени наблюдения этой переменной.

Заключение

Проведены 4-часовые BVRI фотометрические наблюдения цефеиды V383 Cyg в течение двух ночей в разных состояниях блеска.

Установлено, что показатели цвета (B-V) и (V-R) при ослаблении блеска смещаются в сторону покраснения, что является вполне объяснимым. С другой стороны, изменения показателей цвета (V-I) и (R-I) при ослаблении блеска происходят неоднозначно.

В случае наблюдений за 12.09.2014 г., когда звезда находилась вблизи слабого состояния, при дальнейшем ослаблении блеска звезды показатели цвета (V-I) и (R-I) сначала смещаются в красную сторону и затем поворачивают в голубую сторону. Это напоминает случаи изменения цвета с молодыми алгоподобными переменными звёздами, у которых в ослабленном состоянии в суммарном излучении увеличивается вклад рассеянного излучения от околозвёздной пылевой оболочки. В случае наблюдений за 17.09.2014 г., когда звезда находилась вблизи яркого состояния, при ослаблении блеска показатели цвета (V-I) и (R-I) смещаются в голубую сторону, что, возможно, означает увеличение вклада в суммарное излучение околозвёздных горячих газов. Такие похожие свойства этих разных типов звёзд, возможно, связаны близким эволюционным статусом и похожими физическими условиями околозвёздного пространства.

Таким образом, для выяснения причины неоднозначных изменений показателей цвета с ослаблением блеска звезды необходимо проводить дальнейшие наблюдения этой переменной во всех состояниях блеска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Joy A.H. – *Astrophys. Journal*, 1939, v.89, pp.356-376.

Д.ДАВЛАТЗОДА, С.Х.АБДУЛЛОЕВ, Н.Х.МИНИКУЛОВ

ТАҒЙИРЁБИИ НОМУАЙЯНИ НИШОНДИҲАНДАҲОИ РАНҒҲОИ СЕФЕИДИ V383 Cyg БО СУСТШАВИИ ДУРАХШОНИ

Институти астрофизикаи Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Натиҷаҳои мушоҳидаҳои BVRI фотометрияи сефеиди V383 Cyg таҳлил гардида хати каҷи дурахшонии он сохта шудааст. Хусусияти тағйири ранги сефеиди V383 Cyg бо суштшавии дурахшонияш дар диаграммаҳои V-(B-V), V-(V-R), V-(V-I) и V-(R-I) таҳқиқ карда шудааст. Нишон дода шудааст, ки тағйирёбии номуайяни нишондиҳандаҳои рангҳои ситораи V383 Cyg шабоҳат ба тағйирёбии нишон-

дихандаҳои рангҳои ситораҳои ҷавони сулшавии дурахшонияшон алголмонанд до-
рад.

Калимаҳои калидӣ: ситораҳои тағйирёбанда, сефеидҳо, хати қачи дурахшонӣ, диаграммаи
дуранга.

D.DAVLATZODA, S.KH.ABDULLOEV, N.KH.MINIKULOV

**AMBIGUOUS COLOR CHANGES OF CEPHEID V383 Cyg
WITH FADINGS OF LIGHT**

Institute of Astrophysics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

We analyze the results of BVRI photometric observations of cepheid V383 Cyg and the curve of the brightness of these star is built. The character color changes with the light fading of V383 Cyg on two-color diagrams V- (B-V), V- (V-R), V- (V-I) and V- (R-I) is investigated. It is shown that the star V383 Cyg shows changes in mixed color indices with the weakening of light, which is mainly characterized by young stars with Algol-like fadings of light.

Key words: variable stars, Cepheids, light curve, two-color diagram.

УДК 536.36-541.12

И.В.АМИРХАНОВ*, Х.Х.МУМИНОВ, И.САРХАДОВ*, А.ХОЛОВ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА
В ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН**

*Физико-технический институт им. С.У.Умарова АН Республики Таджикистан,
*Объединённый институт ядерных исследований, г. Дубна Московской обл., Россия
Поступила в редакцию 03.03.2016 г.*

В работе проведено численное моделирование газового пузырька под действием акустических волн в жидкости. При моделировании использовался метод динамически адаптирующихся сеток, эффективность применения которого продемонстрирована в модельных задачах. Применение метода динамических адаптирующихся сеток позволило при моделировании использовать меньшее количество точек дискретизации и одновременно повысить скорость счета и точность вычисления.

Ключевые слова: численное моделирование, метод динамических адаптирующих сеток, газовый пузырёк, акустические волны.

1. Введение. Важность исследования динамических процессов в пузырьковых жидкостях связана с тем, что они широко представлены в природе и технике. Многие современные технологии, используемые в различных отраслях промышленности, основаны на применении кавитационных эффектов. Поэтому адекватное описание процессов образования, роста и схлопывания газовых пузырьков в жидкости с учётом возникновения ударных волн в среде является актуальной задачей механики и физики.

Построение и реализации математической модели, описывающей динамику одиночного газового пузырька в жидкости, представляется важным по двум причинам. С одной стороны, решение задачи о колебаниях монопузырька способствует формированию понятий об основных закономерностях движения в процессе взаимодействия пузырьков в кластере. С другой стороны, рассматриваемая задача представляет самостоятельный интерес в связи с исследованием кумулятивных эффектов, возникающих в момент схлопывания

Адрес для корреспонденции: Муминов Хикмат Халимович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1. Физико-технический институт АН РТ. E-mail: khikmat@inbox.ru

вания газовой полости. Открытие в последнее десятилетие явления однопузырьковой сонолюминесценции, свечения газа в пузырьке под действием внешнего акустического воздействия стало новым стимулом для совершенствования теоретических и экспериментальных методов описания процесса [1,2].

Явление схлопывания газового пузырька в жидкости вызывает в последнее время большой интерес в связи с появившимися указаниями на возможность достижения внутри пузырька температур и давления, достаточных для осуществления управляемого термоядерного синтеза [3,4].

В работе [5] исследовались колебания газового пузырька на основе уравнения Рэля-Плессета, которое получено в предположении соблюдения условия гомобаричности и неизменности массы газа внутри пузырька. В самом деле, при колебании пузырька в нём может происходить диффузия газа из него в окружающую среду или наоборот. Кроме того, на границе с жидкостью может происходить испарение жидкости, и внутри пузырька, кроме газа, появляется пар. Внутри пузырька распределение давления, температуры и энергии будет неоднородным. Учет этих эффектов усложняет модель. Чтобы выявить влияние каждого из указанных эффектов, начнём исследование с простой модели, в дальнейшем постепенно усложняя её.

2. Постановка задачи. В настоящей работе численное моделирование колебаний газового пузырька, находящегося в жидкости под действием ультразвука, проведено на основе реальной модели, а именно, совместного решения уравнений сохранения массы, импульса и энергии для газа ($\alpha=g$) и жидкости ($\alpha=l$), в предположении неизменности массы газа внутри пузырька:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_\alpha \rho_\alpha) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha u_\alpha) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_\alpha \rho_\alpha) + \frac{\partial P_\alpha}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\alpha}) + \frac{\tau_{r\alpha}}{r}, \tau_{r\alpha} = \\ \frac{4\mu_\alpha}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (E_\alpha + P_\alpha - \tau_{r\alpha}) u_\alpha] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \lambda_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial r}), \\ E_\alpha = \rho_\alpha \left(e_\alpha + \frac{u_\alpha^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

здесь $\rho_\alpha, u_\alpha, P_\alpha, \mu_\alpha, e_\alpha, \lambda_\alpha, T_\alpha$ – соответственно плотность, скорость, давление, коэффициент вязкости, внутренняя энергия единицы массы, теплопроводность, температура газа ($\alpha = g$) и жидкости ($\alpha = l$). В уравнениях (1-3) количество неизвестных для каждой

компоненты равно пяти $(\rho_\alpha, u_\alpha, P_\alpha, e_\alpha, T_\alpha)$, а количество уравнений равно трем. Поэтому к исходной системе необходимо добавить уравнения состояния

$$e_\alpha = e_\alpha(\rho_\alpha, T_\alpha); \quad P_\alpha = P_\alpha(\rho_\alpha, T_\alpha). \quad (4)$$

Система уравнений (1-4) решается с учетом начальных и граничных условий, исходящих из физической постановки задачи. В данной системе не учтена диффузия газа из пузырька в воду и обратно. Пусть в центре колбы радиуса R_F с жидкостью находился пузырек радиуса a_0 . Имеется внешнее постоянное давление, действующее на жидкость P_0 . Тогда начальные условия для системы (1)-(4) будут следующие:

$$\begin{aligned} u_g(r, 0) = 0, \quad T_g(r, 0) = T_0, \quad \rho_g(r, 0) = \rho_{0g}, \quad P_g(r, 0) = P_{0g}, \quad 0 \leq r \leq a_0; \\ u_l(r, 0) = 0, \quad T_l(r, 0) = T_0, \quad \rho_l(r, 0) = \rho_{0l}, \quad P_l(r, 0) = P_0, \quad a_0 \leq r \leq R_F. \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношения (5) означают, что жидкость и газ вначале находились в состоянии покоя при комнатной температуре, имея различные плотности. Давление внутри пузырька P_{0g} в начальный момент времени превышает внешнее давление P_0

$$P_{0g} = P_0 + \frac{2\sigma_l(T_0)}{a_0},$$

где $\sigma_l(T_0)$ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости при комнатной температуре.

К этим начальным условиям добавим следующие граничные условия:

$$u_g(0, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial T_g}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (6)$$

$$P(R_F, t) = f_1(t); \quad \left. \frac{\partial T_l}{\partial r} \right|_{r=R_F} = 0. \quad (7)$$

Газ считаем Ван-дер-Ваальсовским, тогда уравнения состояния для этого газа следующие

$$e_g = \frac{1 - b\rho_g}{\gamma - 1} \frac{P_g}{\rho_g}, \quad P_g = \frac{\rho_g}{1 - b\rho_g} \frac{R_g T_g}{M_g}, \quad \gamma = \frac{C_{pg}}{C_{vg}}.$$

Как и в работе [4], уравнение состояния жидкости-воды записываем в виде

$$e_l = C_{pl}(T_l - T_0), \quad \frac{P_l + B}{P_0 + B} = \left(\frac{\rho_l}{\rho_0} \right)^n, \quad \rho_0 = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad n = 7.15,$$

$$B = 3049.13 \text{ bar}.$$

Здесь $C_{p\alpha}$ – удельная теплоемкость газа ($\alpha = g$) и жидкости ($\alpha = l$) при постоянном давлении, C_{gv} удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, b – объем, занимаемый молекулами газа, M_g – молекулярная масса газа, $R_g = 8.31$ Дж/моль, K – универсальная постоянная газов. При более высоких давлениях и температурах уравнения состояния учитывают как процессы диссоциации, так и процессы ионизации молекул [2].

Кроме этих условий, на границе жидкость-газ должны удовлетворяться условия сопряжения:

$$u_l(a, t) = u_g(a, t) = \dot{a}, \quad \lambda_l \left. \frac{\partial T_l}{\partial r} \right|_{r=a} - \lambda_g \left. \frac{\partial T_g}{\partial r} \right|_{r=a} = \dot{a} (\tau_{rl} - P_l + P_g),$$

$$P_g(a, t) = P_l(a, t) + \frac{2\sigma_l(a, t)}{a} + \frac{4\mu_l \dot{a}}{a}.$$

Здесь a и \dot{a} – соответственно радиус пузырька в момент времени t и его скорость изменения, σ_l – коэффициент поверхностного натяжения жидкости. При данной постановке задачи, для простоты, не учтены фазовый переход типа испарения – конденсации на границе пузырька, диффузия газа из жидкости в пузырек и наоборот.

3. Система уравнений в безразмерных величинах. При численном моделировании системы уравнений (1)-(7) удобно перейти к следующим безразмерным переменным и величинам

$$\bar{r} = \frac{r}{a_0}, \quad \bar{P}_\alpha = \frac{P_\alpha}{P_0}, \quad \bar{T}_\alpha = \frac{T_\alpha}{T_0}, \quad \bar{\rho}_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\rho_0}, \quad \bar{u}_\alpha = \frac{u_\alpha}{u_0}, \quad u_0 = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = \frac{a_0}{u_0},$$

$$\bar{e}_\alpha = \frac{e_\alpha}{u_0^2}, \quad \bar{\lambda}_\alpha(\bar{T}_\alpha) = \frac{\lambda_\alpha(T_\alpha)}{\lambda_\alpha(T_0)}, \quad \bar{E}_\alpha = \frac{E_\alpha}{P_0}, \quad \bar{a} = \frac{a}{a_0}, \quad \bar{B} = \frac{B}{P_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_l}{\sigma_l(T_0)}.$$

Искомая система в этих переменных выглядит следующим образом

$$\frac{\partial \bar{\rho}_\alpha}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r}^2 \bar{\rho}_\alpha \bar{u}_\alpha) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\bar{\rho}_\alpha \bar{u}_\alpha) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r}^2 \bar{\rho}_\alpha \bar{u}_\alpha) + \frac{\partial \bar{P}_\alpha}{\partial \bar{r}} = A_{1\alpha} \left[\frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r}^2 \bar{\tau}_{r\alpha}) + \frac{\bar{\tau}_{r\alpha}}{\bar{r}} \right],$$

$$\bar{\tau}_{r\alpha} = \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}_\alpha}{\bar{r}}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_\alpha}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\bar{r}^2 (\bar{E}_\alpha + \bar{P}_\alpha - A_{1\alpha} \bar{\tau}_{r\alpha}) \bar{u}_\alpha \right] = A_{2\alpha} \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r}^2 \bar{\lambda}_\alpha \frac{\partial \bar{T}_\alpha}{\partial \bar{r}} \right),$$

$$\bar{E}_\alpha = \bar{\rho}_\alpha (\bar{e}_\alpha + \frac{\bar{u}_\alpha^2}{2}), \quad (10)$$

$$\bar{e}_\alpha = \bar{e}_\alpha(\bar{\rho}_\alpha, \bar{T}_\alpha), \quad \bar{P}_\alpha = \bar{P}_\alpha(\bar{\rho}_\alpha, \bar{T}_\alpha), \quad (11)$$

$$A_{1\alpha} = \frac{4\mu_\alpha u_0}{3a_0 P_0}, \quad A_{2\alpha} = \frac{\lambda_\alpha(T_0) t_0 T_0}{P_0 a_0^2}, \quad P_{0g} = 1 + \frac{2\sigma_l(T_0)}{P_0 a_0}, \quad \rho_{0g} = \frac{\rho_{0g}}{\rho_0},$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_g(\bar{r}, 0) = 0, \quad \bar{T}_g(\bar{r}, 0) = 1, \quad \bar{\rho}_g(\bar{r}, 0) = \bar{\rho}_{0g}, \quad \bar{P}_{0g}(\bar{r}, 0) = \bar{P}_{0g}, \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1, \\ \bar{u}_l(\bar{r}, 0) = 0, \quad \bar{T}_l(\bar{r}, 0) = 1, \quad \bar{\rho}_l(\bar{r}, 0) = 1, \quad \bar{P}_l(\bar{r}, 0) = 1, \quad 1 \leq \bar{r} \leq \bar{R}_F, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\bar{u}_g(0, \bar{t}) = 0; \quad \left. \frac{\partial \bar{T}_g}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=0} = 0, \quad (13)$$

$$\bar{P}(\bar{R}_F, t) = \bar{f}_1(t); \quad \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=\bar{R}_F} = 0, \quad (14)$$

$$\bar{e}_g = \frac{1 - \bar{b} \bar{\rho}_g}{\gamma - 1} \frac{\bar{P}_g}{\bar{\rho}_g}, \quad \bar{b} = b \rho_0, \quad \bar{P}_g = A_3 \frac{\bar{P}_g}{1 - \bar{b} \bar{\rho}_g}, \quad A_3 = \frac{\rho_0 R_g T_g}{M_g P_0},$$

$$\bar{e}_l = \bar{C}_{pl} (\bar{T}_l - 1), \quad \frac{\bar{P}_l + \bar{B}}{1 + \bar{B}} = \bar{\rho}_l^n, \quad n = 7.15, \quad \bar{C}_{pl} = \frac{C_{pl} T_0 \rho_0}{P_0},$$

$$\bar{u}_l(\bar{a}, \bar{t}) = \bar{u}_g(\bar{a}, \bar{t}) = \dot{\bar{a}}, \quad A_{2l} \bar{\lambda}_l \left. \frac{\partial \bar{T}_l}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=\bar{a}} - A_{2g} \bar{\lambda}_g \left. \frac{\partial \bar{T}_l}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=\bar{a}} = \dot{\bar{a}} (A_{1l} \bar{r}_{rrl} - \bar{P}_l + \bar{P}_g),$$

$$\bar{P}_g(\bar{a}\bar{t}) = \bar{P}_l(\bar{a}\bar{t}) + A_4 \frac{\bar{\sigma}(\bar{a}\bar{t})}{\bar{a}} + A_5 \frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}, \quad A_4 = \frac{2\sigma(T_0)}{P_0 a_0}, \quad A_5 = \frac{4\mu_l u_0}{P_0 a_0}.$$

В дальнейшем моделирование колебаний пузырька проводим на основе системы уравнений (8)-(14), при этом далее знак черты над символами опускаем, а переменные подразумеваем безразмерными. При получении системы (8)-(14) вязкостью газа пренебрегли.

4. Метод численного решения. При численном моделировании, когда границы области решения меняются со временем, задачу лучше решать путем перехода к подвижной системе координат. Поэтому в системе (8)-(14) переходим от переменных r, t к переменным q, τ ($t = \tau, r = r(q, \tau)$). Это равносильно следующей замене производных:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{Q}{\psi} \frac{\partial}{\partial q}; \quad Q = -\frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad \psi = \frac{\partial r}{\partial q}.$$

Система (8)-(14) в этих переменных выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi r^2 \rho_\alpha) + \frac{\partial}{\partial q} [r^2 (Q + u_\alpha) \rho_\alpha] = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}(\psi r^2 \rho_\alpha u_\alpha) + \frac{\partial}{\partial q} [r^2 (Q + u_\alpha) u_\alpha \rho_\alpha] + r^2 \frac{\partial P_\alpha}{\partial q} = \\ A_{1\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial q} (r^2 \tau_{r\alpha}) + \psi r \tau_{r\alpha} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\tau_{r\alpha} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \frac{u_\alpha}{r},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}(\psi r^2 E_\alpha) + \frac{\partial}{\partial q} [r^2 (Q + u_\alpha) E_\alpha + r^2 (P_\alpha - \tau_{r\alpha}) u_\alpha] = \\ A_{2\alpha} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{r^2 \lambda_\alpha}{\psi} \frac{\partial T_\alpha}{\partial q} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$u_q(q, 0) = 0, \quad T_q(q, 0) = 1, \quad \rho_g(q, 0) = \rho_{0g}, \quad P_g(q, 0) = P_{0g}, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad (18)$$

$$u_l(q, 0) = 0, \quad T_l(q, 0) = 1, \quad \rho_l(q, 0) = 1, \quad P_l(q, 0) = 1, \quad 0 \leq q \leq 1,$$

$$u_g(0, \tau) = 0, \quad \left. \frac{\partial T_g}{\partial q} \right|_{q=0} = 0, \quad (19)$$

$$P_l(R_f, \tau) = f_1(\tau), \quad \left. \frac{\partial T_g}{\partial q} \right|_{q=R_f} = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} u_l(1, \tau) = u_g(1, \tau) = \dot{a} = \frac{da}{d\tau}, \quad \frac{A_{2l} \lambda_l}{\psi_l} \frac{\partial T_l}{\partial q_{q=1}} - \frac{A_{2g}}{\psi_g} \frac{\partial T_g \lambda_g}{\partial q_{q=1}} = \\ \dot{a} (A_{1l} \tau_{r\alpha} - P_l + P_g)_{q=1}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$P_g(a, \tau) = P_l(a, \tau) + A_4 \frac{\sigma(a, \tau)}{a} + A_5 \frac{\dot{a}}{a}. \quad (22)$$

Можно легко убедиться, что функции $\Psi(q, \tau)$, $Q(q, \tau)$ связаны уравнением:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{\partial Q}{\partial q} = 0. \quad (23)$$

В методе адаптивных сеток последнее уравнение добавляется к системе (15)-(22). Вид функции $Q(q, \tau)$ определяет эволюцию функции $\Psi(q, \tau)$, которая определяет динамику координат точек физической сетки в расчетной сетке. Существуют разные способы зада-

ния этой функции. Если при решении системы уравнений (15)-(22) решения не имеют резких изменений (больших градиентов), то функцию $Q(q, \tau)$ можно задавать в виде:

$$Q = -D_0 \frac{\partial \psi}{\partial q}.$$

Однако, если в некоторых точках физической сетки решения изменяются резко, тогда зависимость функции $Q(q, \tau)$ от $\Psi(q, \tau)$ и от других неизвестных $u_\alpha, \rho_\alpha, T_\alpha$ должна отражать это поведение решений. Например, если в ходе решения возникают большие градиенты температуры, то функцию $Q(q, \tau)$ можно задавать в следующем виде:

$$Q = -D_0 \frac{\partial \psi}{\partial q} - D_1 \frac{\partial}{\partial q} \left(\psi \left| \frac{\partial T_\alpha}{\partial q} \right| \right).$$

Поскольку плотность, скорость и давление зависят от температуры, то поведение распределения температуры тоже влияет на их распределение по физической сетке. Нам заранее не известно, где могут возникать большие градиенты. Эти крутые изменения определяются после решения системы (15)-(23) с заданной функции $Q(q, \tau)$.

В дальнейшем при записи численной схемы индексы, указывающие на тип вещества, опустим и подразумеваем, что в области $0 \leq q \leq l$ находится газ, а вне этой области – жидкость.

5. Численная схема. Для численного решения системы уравнений (15)-(23) в расчетном пространстве $\Omega_{q, \tau}$ использовалась равномерная сетка по q с разнесенными узлами. Шаг по τ выбирался автоматически из условия достижения необходимой точности. В дискретной записи искомой системы присутствуют значения некоторых из функций в целых и полуцелых узлах, она выглядит следующим образом

$$i=0, 1, \dots, m-1, m+1, \dots, N-1,$$

$$\frac{(\psi r^2 \rho)_k^{j+1} - (\psi r^2 \rho)_k^j}{\Delta \tau} + \frac{F_{\rho i+1}^{j+1} - F_{\rho i}^{j+1}}{\Delta q} = 0, \quad k = i + \frac{1}{2}, \quad F_\rho = r^2 (Q + u) \rho, \quad (24)$$

$$\frac{(\psi r^2 \rho u)_k^{j+1} - (\psi r^2 \rho u)_k^j}{\Delta \tau} + \frac{F_{\rho u i+1}^{j+1} - F_{\rho u i}^{j+1}}{\Delta q} = 2(rP\psi)_k^{j+1} +$$

$$+ A_1 \left[\frac{(r^2 \tau_{rr})_i}{\Delta q} + (\psi \tau \tau)_k \right], \quad \tau_{ri} = \frac{1}{\psi_i} \frac{u_{k+1}^{j+1} - u_{k-1}^{j+1}}{\Delta q} - \frac{u_i^{j+1}}{r_i^{j+1}},$$

$$F_{\rho u} = r^2 [(Q + u) \rho u + P], \quad \tau_{rrk}^{j+1} = \frac{1}{\psi_k} \frac{u_{k+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{\Delta q} - \frac{u_k^{j+1}}{r_k^{j+1}}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\psi E)_k^{j+1} - (\psi E)_k^j}{\Delta \tau} + \frac{F_{Ei+1}^{j+1} - F_{Ei}^{j+1}}{\Delta q} = \\ & = \frac{A_2}{\Delta q^2} \left[\left(\frac{r^2 \lambda}{\psi} \right)_{i+1} (T_{k+1}^{j+1} - T_k^{j+1}) - \left(\frac{r^2 \lambda}{\psi} \right)_i (T_k^{j+1} - T_{k-1}^{j+1}) \right], \\ & F_E = r^2 [(Q + u)E + (P - \tau_{rr})u] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\psi_k^{j+1} - \psi_k^j}{\Delta \tau} + \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta q} = 0, \\ & Q_i^{j+1} = -D_0 \frac{\psi_k^{j+1} - \psi_{k-1}^{j+1}}{\Delta q} - D_1 \frac{\psi_k^{j+1} |T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}| - \psi_{k-1}^{j+1} |T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}|}{\Delta q^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь N – общее количество точек сетки, а m – количество точек внутри пузырька. $j+1$ – номер временного слоя, для которого решается дискретное уравнение с использованием известных величин в предыдущем слое j . Дискретные уравнения (24)-(27) описывают решения во внутренних точках сетки за исключением границы раздела газ-жидкость, а также граничные точки. К уравнениям (24)-(27) добавим начальные и граничные условия в дискретной форме, а также условия сопряжения на границе раздела:

$$\begin{aligned} & T_i^0 = 1, u_i^0 = 0, \psi_i^0 = 1, i = 0, 1, \dots, N \\ & \rho_i^0 = \begin{cases} \rho_{0g, i=0,1,\dots,m}, \\ 1, i = m+1, m+2, \dots, N, \end{cases} P_i^0 = \begin{cases} P_{0g, i=0,1,\dots,m}, \\ 1, i = m+1, m+2, \dots, N, \end{cases} \\ & u_0^2 = 0, T_{-1/2}^j = T_{1/2}^j, P_N^j = f(\tau_j), T_{N-1/2}^j = T_{N+1/2}^j. \\ & u_m = a, A_{2l} \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial q} - A_{2g} \lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial q} = \dot{a} (A_{1l} \tau_{rl} - P_l + P_g). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Топольников А.С. Численное моделирование нелинейных колебаний газовых пузырьков в жидкости с учетом образования ударных волн: Дисс...к. ф.-м.н. – Уфа, 2000.
2. Bagdasarov Kh.S., Okinshevich V.V., Kholov A. On the Theory of Gas Bubbles by a Crystal Growing from the Melt. – Phys. stat. sol. (a), 1980, v.58, 317.
3. Taleyarkhan R.P. et al. – Phys. Rev. Lett. 2006, v.96.
4. Амирханов И.В., Костенко Б.Ф., Пузынин И.В., Пузынина Т.П., Сархадов И. Численное исследование схлопывания газового пузырька в жидкости. – Тез. докл. XLIV всерос. конф. по проблемам математики, информатики, физики и химии. – М.: РУДН, 21-25 апреля 2008 г., с. 30-31.
5. Yuan L. et al. – Phys. Rev. E, 1998, v.57, 4265.

И.В.АМИРХОНОВ*, Ҳ.Ҳ.МУМИНОВ, И.САРҲАДОВ*, А.ХОЛОВ

МОДЕЛСОЗИИ АДАДИИ ЛАППИШҶОИ ҲУБОБЧАИ ГАЗӢ ДАР МОЕЪ БО ТАЪСИРИ МАВҶҶОИ АКУСТИКӢ

Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,

**Институти муттаҳидаи тадқиқотҳои ҳастаӣ, ш. Дубна, вилояти Москва, Россия*

Дар мақолаи мазкур лаппиши ҳубобчаи газӣ дар моеъ бо таъсири мавҷҳои акустикӣ бо усули ададӣ моделсозӣ карда шудааст. Ҳангоми моделсозӣ усули шабакаи динамикӣ мутобиқкунанда истифода бурда шудааст ва самаранокии истифодаи он дар масъалаҳои моделӣ нишон дода шудааст. Истифодаи усули шабакаҳои динамикӣ мутобиқкунанда ҳангоми моделсозӣ имконият медиҳад, ки бо истифодаи миқдори ками нуқтаҳои дискретизатсия суръати ҳисоб ва саҳеҳияти ҳисобкунӣ ба-ланд бардошта шавад.

Калимаҳои калидӣ: моделсозии ададӣ, усули панҷараҳои ба таври динамикӣ мутобиқкунанда, ҳубобчаи газӣ, мавҷҳои акустикӣ.

I.V.AMIRKHANOV*, Kh.Kh.MUMINOV, I.SARHADOV*, A.KHOLOV

NUMERICAL SIMULATION OF OSCILLATIONS OF A GAS BUBBLE IN A LIQUID UNDER THE INFLUENCE OF ACOUSTIC WAVES

S.U.Umarov Physical-Technical Institute, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,

**Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscow region, Russia*

In this paper, numerical simulation of a gas bubble under the influence of acoustic waves in the fluid has been conducted. In the simulation the method of dynamically adapting grids is used, the effectiveness of which has been demonstrated in the model problem. Application of the method of dynamically adapting grids allow to conduct simulation with less number of sampling points and simultaneously increase the speed and precision of calculations.

Key words: numerical simulation, method of dynamically adapting grids, gas bubble, acoustic waves.

УДК 624.042

Д.Н.НИЗОМОВ, И.КАЛАНДАРБЕКОВ, И.И.КАЛАНДАРБЕКОВ

**РАСЧЁТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК ОТ ДЕЙСТВИЯ СТАТИЧЕСКИХ
НАГРУЗОК МЕТОДОМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ**

Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии

АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию

Приведён расчёт двухпролетной неразрезной балки на действие статической нагрузки с податливыми опорами. Показаны особенности формирования матрицы коэффициентов и матрицы внутренней жёсткости для промежуточных податливых опор. Полученные результаты сопоставлены с аналитическим решением.

Ключевые слова: метод сосредоточенных деформаций, неразрезная балка, матрица внутренней жёсткости, диагональная матрица податливости, коэффициент жёсткости, аналитическое решение.

Неразрезной балкой называется статически неопределимая балка, опирающаяся на шарнирные опоры.

Реализацию метода сосредоточенных деформаций (МСД) рассмотрим на примере двухпролётной неразрезной балки. При этом опорные закрепления могут быть податливыми. Особенность расчёта неразрезной балки состоит в том, что поперечная сила на промежуточных опорах претерпевает разрыв и деформации в них сосредотачиваются в двух сечениях – левее и правее от опоры (рис.1).

При формировании матрицы коэффициентов для неразрезной балки необходимо учитывать разрыв функции поперечной силы на промежуточных опорах. Например, для неразрезной балки с десятью элементами МСД (рис. 2) мы получаем ленточную матрицу **A** размера 30×34 , а вектор внутренних сил размерности 34 представляется в виде [1]

Адрес для корреспонденции: Низомов Джахонгир Низомович, Каландарбеков Имомёрбек. 734029, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии АН РТ.

E-mail: ties@mail.ru, nizomov-jn@mail.ru, kalandarbekov-55@mail.ru

$$\mathbf{S} = (N_A, M_A, Q_A, N_{12}, M_{12}, Q_{12}, \dots, N_{56}, M_{56}, \\ |Q_{D,5}, Q_{D,6}|, N_{67}, M_{67}, Q_{67}, \dots, N_B, M_B, Q_B), \quad (1)$$

где $Q_{D,5}$ и $Q_{D,6}$ – поперечные силы, действующие слева и справа от опоры D .

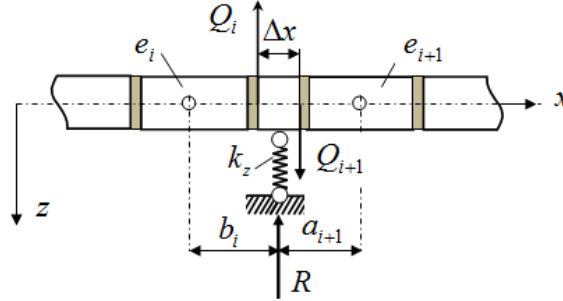


Рис. 1. К расчёту неразрезной балки.

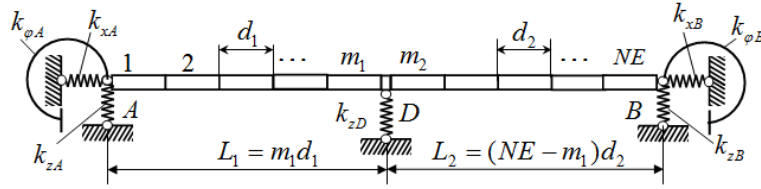


Рис. 2. Расчётная модель двухпролётной неразрезной балки.

Диагональные матрицы внутренней жёсткости опорных сечений A , B и других сечений, кроме сечений в промежуточной опоре D , выражаются так:

$$\mathbf{C}_A = \text{diag}(EF_A / a_1, EI_A / a_1, GF_A / a_1), \quad \mathbf{C}_B = \text{diag}(EF_B / b_{10}, EI_B / b_{10}, GF_B / b_{10}), \\ \mathbf{C}_{i,i+1} = \text{diag}(EF_{i,i+1} / l_{i,i+1}, EI_{i,i+1} / l_{i,i+1}, GF_{i,i+1} / l_{i,i+1}), \quad (i = 2, 3, \dots, NE). \quad (2)$$

Для получения матрицы внутренней жёсткости сечения левее и правее опоры D , формируем матрицы податливости этих сечений. С этой целью запишем связь между деформациями и усилиями

$$w_{D,m_1} = \frac{Q_{D,m_1} b_{m_1}}{GF_{D,m_1}} + \frac{Q_{D,m_1}}{k_{zD}} = Q_{D,m_1} \frac{b_{m_1} k_{zD} + GF_{D,m_1}}{k_{zD} GF_{D,m_1}} = Q_{D,m_1} / \eta_{D,m_1}, \\ w_{D,m_2} = \frac{Q_{D,m_2} a_{m_2}}{GF_{D,m_2}} + \frac{Q_{D,m_2}}{k_{zD}} = Q_{D,m_2} \frac{a_{m_2} k_{zD} + GF_{D,m_2}}{c_{zc} GF_{D,m_2}} = Q_{D,m_2} / \eta_{D,m_2}, \\ \eta_{D,m_1} = \frac{k_{zD} GF_{zD,m_1}}{b_{m_1} k_{zD} + GF_{zD,m_1}}, \quad \eta_{D,m_2} = \frac{k_{zD} GF_{zD,m_2}}{a_{m_2} k_{zD} + GF_{zD,m_2}}. \quad (3)$$

$$u_{D,m_1} = \frac{N_{Dm_1} b_{m_1}}{EF_{D,m_1}}; u_{D,m_2} = \frac{N_{D,m_2} a_{m_2}}{EF_{D,m_2}}, u_{D,m_1} = u_{D,m_2} = N_D \frac{l_{m_1 m_2}}{EF_D},$$

$$\varphi_{D,m_1} = \frac{M_{D,m_1} b_{m_1}}{EI_{yD}}, \varphi_{D,m_2} = \frac{M_{D,m_2} a_{m_2}}{EI_{yD}}, \varphi_{D,m_1} = \varphi_{D,m_2} = M_D \frac{l_{m_1 m_2}}{EI_{yD}}.$$

Следовательно, при постоянной жёсткости пролётов, диагональная матрица податливости опорного сечения D представляется в виде

$$\mathbf{V}_D = \text{diag} \left(l_{m_1 m_2} / EF_{D,m_1}, l_{m_1 m_2} / EI_{D,m_1}, 1 / \eta_{D,m_1}, 1 / \eta_{D,m_2} \right). \quad (4)$$

Диагональная матрица жёсткости сечений на опоре D , как обратная из (4), представляется в виде:

$$\mathbf{C}_D = \mathbf{C}_{m_1 m_2} = \text{diag} \left(EF_D / l_{m_1 m_2}, EI_D / l_{m_1 m_2}, \eta_{D,m_1}, \eta_{D,m_2} \right). \quad (5)$$

Общая матрица внутренней жёсткости неразрезной балки (рис. 2) приобретает вид

$$\mathbf{C} = \text{diag} \left(C_A, C_{12}, C_{23}, \dots, C_{m_1 m_2}, \dots, C_B \right). \quad (6)$$

Пример 1. Реализацию алгоритма расчёта неразрезных балок по МСД рассмотрим на примере балки на трёх опорах от действия сосредоточенной нагрузки (рис. 3). Из точного решения [2] следует, что опорная реакция и изгибающий момент на опоре C соответственно равны:

$$R_C = \frac{P[(l_1 + l_2)^2 - c^2 - l_1^2]c}{2l_1 l_2^2}, \quad M_C = -\frac{P(l_2^2 - c^2)c}{2l_2(l_1 + l_2)}. \quad (7)$$

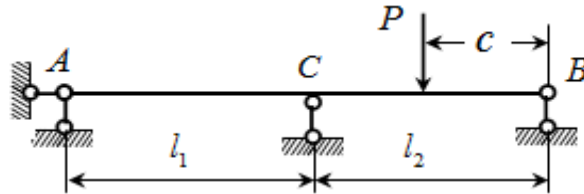


Рис. 3. Балка на трёх опорах от действия сосредоточенной нагрузки.

Численное решение задачи по МСД, полученное при разбивке каждого пролёта на 7 элементов ($NE = 14$) при следующих данных:

$$l_1 = l_2 = 3 \text{ м}, c = l_2 / 2, P = 1 \text{ т}, b \times h = 0.4 \times 0.4 \text{ м},$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ тс/м}^2, \nu = 0.25, \mu = 1.2,$$

приводит к результатам:

$$R_C = Q_{C,2} - Q_{C,1} = 0.6794 \text{ тс}, M_C = -0.2692 \text{ тс}\cdot\text{м},$$

что соответственно на 1.17 и 4.3% отличаются от точного решения (7):

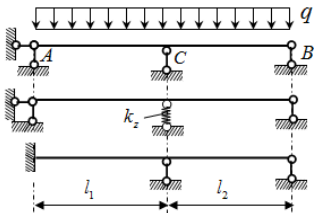
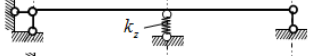

$$R_C = 11P / 16 = 0.6875 \text{ тс}, M_C = -3Pl / 32 = -0.2813 \text{ тс}\cdot\text{м}.$$

В табл. 1 представлены результаты (прогиб и момент в центре первого пролёта, изгибающий момент и реакция на опоре C) при данных:

$$q = 1 \text{ тс/м}, k_z = GF_z / (l_1 + l_2) = 1.778 \cdot 10^4 \text{ тс/м}.$$

Таблица 1

Результаты численного решения

Схема балки	$10^3 w_1, \text{ м}$	$M_1, \text{ тс}\cdot\text{м}$	$M_C, \text{ тс}\cdot\text{м}$	$R_C, \text{ тс}$
	0.1168	0.5637	-1.077	3.718
	0.2519	0.7018	-0.8005	3.534
	0.0529	0.3161	-0.9265	3.403

Пример 2. В качестве примера рассмотрим решение статической задачи двухпролётной неразрезной балки постоянного поперечного сечения от действия равномерно распределённой нагрузки $q=10 \text{ кН/м}$ и с различными граничными условиями при следующих данных: пролёты - $l_1 = l_2 = l = 3 \text{ м}$, поперечное сечение - $0.2 \times 0.3 \text{ м}$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, модуль сдвига $G = 0.4E$.

Результаты получены при равномерной разбивке каждого пролёта на пять элементов МСД $d = l / 5$. Были получены результаты расчёта неразрезной балки со следующими граничными условиями: А - шарнирно опёртые концы, В - левый конец защемлённый, а правый - шарнирный, С - оба конца защемлены, DA - шарнирные концы с податливой промежуточной опорой с коэффициентом жёсткости $C_{zc} = 2 \cdot 10^3 \text{ кН/м}$, ЕС - защемлённые концы с податливой промежуточной опорой, АА - шарнирные концы с податливой опорой, жёсткость которой стремится к нулю.

В табл. 2 приведены результаты расчёта неразрезной балки (числитель - МСД, знаменатель - аналитическое решение) с различными условиями закрепления и с учётом податливости опор. Буквенные обозначения, использованные в табл.2, соответствуют характерным сечениям балки: А - левая опорная точка, а, d - точки на расстояниях 1.2 м и 1.8 м соответственно от опоры А, С - промежуточная опора, В - правая опора.

Сравнение результатов внутренних усилий показывает, что МСД даёт достаточно удовлетворительные результаты при достаточно грубой разбивке пролёта балки. Следует

заметить, что при значении коэффициента жёсткости $C_{zc} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ кН} / \text{м}$ (схема *AA*) мы получим результаты, соответствующие простой однопролётной балке. Можно заметить, что результаты практически совпадают с аналитическим решением. Следовательно, при разбивке пролёта балки на 10 элементов МСД точность метода значительно повышается.

Таблица 2

Изгибающий момент и поперечная сила в характерных сечениях двухпролётной неразрезной балки

M_A (кН.м)	M_a (кН.м)	M_d (кН.м)	M_c (кН.м)	Q_A (кН)	Q_c^a (кН)	Q_c^n (кН)	Q_B (кН)	Схема балки
<u>0.0000</u> 0.0000	<u>6.596</u> 6.300	<u>4.494</u> 4.050	<u>-10.511</u> -11.250	<u>11.496</u> 11.250	<u>-18.504</u> -18.750	<u>18.504</u> 18.750	<u>-11.496</u> -11.250	<i>A</i>
<u>-6.348</u> -6.428	<u>3.370</u> 3.090	<u>2.829</u> 2.449	<u>-9.051</u> -9.630	<u>14.099</u> 13.932	<u>-15.901</u> -16.067	<u>18.017</u> 18.210	<u>-11.983</u> -11.790	<i>B</i>
<u>-7.200</u> -7.500	<u>3.600</u> 3.300	<u>3.600</u> 3.300	<u>-7.200</u> -7.500	<u>15.000</u> 15.000	<u>-15.000</u> -15.000	<u>15.000</u> 15.000	<u>-15.000</u> -15.000	<i>C</i>
<u>0.0000</u> 0.0000	<u>17.547</u> 17.550	<u>20.920</u> 20.925	<u>16.868</u> 16.875	<u>20.622</u> 20.625	<u>-9.377</u> -9.375	<u>9.377</u> 9.375	<u>-20.622</u> -20.625	<i>DA</i>
<u>-24.812</u> -25.500	<u>0.077</u> 0.030	<u>7.122</u> 6.900	<u>10.412</u> 10.500	<u>26.741</u> 27.000	<u>-3.258</u> -3.000	<u>3.258</u> 3.000	<u>-26.741</u> -27.000	<i>EC</i>
<u>0.0000</u> 0.0000	<u>28.797</u> 28.800	<u>37.797</u> 37.800	<u>44.996</u> 45.000	<u>29.998</u> 30.000	<u>0.0000</u> 0.0000	<u>0.0000</u> 0.0000	<u>-29.998</u> -30.000	<i>AA</i>

В табл. 3 приведены перемещения и углы поворотов, полученные МСД. Эти перемещения соответствуют точкам (1-5) в центре пяти элементов в первом пролёте и одного элемента б во втором пролёте. Углы поворотов соответствуют двум элементам 5 и 6, прилегающим к промежуточной опоре.

Таблица 3

Перемещения и углы поворотов в характерных сечениях двухпролётной неразрезной балки

w_1 мм	w_2 мм	w_3 мм	w_4 мм	w_5 мм	w_6 мм	$\varphi_5 \times 10^3$ рад	$\varphi_6 \times 10^3$ рад	Схема балки
0.23	0.52	0.55	0.35	0.12	0.12	-0.35	0.35	<i>A</i>
0.07	0.21	0.26	0.17	0.05	0.15	-0.14	0.47	<i>B</i>
0.08	0.24	0.32	0.24	0.08	0.08	-0.24	0.24	<i>C</i>
1.58	4.52	6.88	8.47	9.22	9.22	0.56	-0.56	<i>DA</i>
0.27	1.01	1.95	2.73	3.16	3.16	0.35	-0.35	<i>EC</i>
2.99	8.65	13.39	16.80	18.57	18.57	1.5	-1.5	<i>AA</i>

Для оценки точности можно сравнить перемещения точек 5 или 6 схемы AA , где промежуточная опора отсутствует, с результатами аналитического решения простой балки с равномерно распределённой нагрузкой $q = 10 \text{ кН} / \text{м}$ и $EI = 9000 \text{ кНм}^2$, в которой вертикальное перемещение в центре пролёта, без учёта деформации сдвига, равняется 18.75 мм.

Таким образом, при разбивке каждого пролёта неразрезной балки на 10 элементов МСД можно получить вполне приемлемые результаты для практического расчёта.

Сравнение результатов внутренних усилий показывает, что МСД даёт достаточно хорошие результаты при относительно грубой разбивке пролётов балки. Например, для сравнения отметим, что для балки первой схемы (табл. 1) точное решение [3] даёт результаты

$$M_1 = ql^2 / 16 = 0.5625, M_c = -ql^2 / 8 = -1.125, R_c = 5ql / 4 = 3.75.$$

Следует заметить, что при значении коэффициента жёсткости $k_z \rightarrow 0$ получаем результаты, соответствующие простой балке, где прогиб $w_c = 0.003968 \text{ м}$, и момент $M_c = 4.500 \text{ тс}\cdot\text{м}$ практически совпадают с аналитическим решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Низомов Д.Н., Каландарбеков И. Метод сосредоточенных деформации. – Душанбе: Дониш, 2015, 436 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959, 439 с.
3. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. – М.: Мир, 1976, 669 с.

Ч.Н.НИЗОМОВ, И.ҚАЛАНДАРБЕКОВ, И.И.ҚАЛАНДАРБЕКОВ

ҲИСОБИ БОЛОРҶОИ БЕФОСИЛА АЗ ТАЪСИРИ ҚУВВАҶОИ СТАТИКИ БО МЕТОДИ МУТАМАРКАЗКУНИИ ДЕФОРМАТСИЯҶО

*Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мақола ҳисоби болорҷои бифосилаи дуравоқа аз таъсири қувваҳои статикӣ бо таъриҳҳои нарм оварда шудааст. Хусусияти ҳосилтартиб додани матрисаи зарбҳо ва матрисаи сахтии дохилӣ барои таъриҳҳои нарм нишон дода шудааст. Натиҷаҳои ба даст оварда шуда бо методи аналитикӣ муқоиса карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: методи мутамарказкунии деформатсияҳо, болори бифосила, матрисаи сахтии дохилӣ, матрисаи нарми диагоналӣ, коэффиенти сахтӣ, методи аналитикӣ, лаппиши озод.

J.N.NIZOMOV, I.KALANDARBEKOV, I.I.KALANDARBEKOV

**CALCULATION OF ACTION CONTINUOUS BEAMS STATIC LOAD BY
CONCENTRATED DEFORMATION METHOD**

*Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology,
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

The calculation of two-span continuous beam at static load effect with supple legs is given. Features the formation of the coefficient matrix and the stiffness matrix of the inner intermediate compliant supports were shown. The results are compared with the analytical solution.

Key words: method of lumped strain, continuous beam, internal stiffness matrix, a diagonal matrix ductility, hardness factor, analytic solution.

УДК 637.143

Х.М.АХМЕДОВ, Г.А.ТАШБАЕВ, К.ПАРТОЕВ, Ш.АБДУЛЛОЕВ*, С.АБДУЛЛАЕВА*

**ПРИМЕНЕНИЕ ФЕРМЕНТНОГО ПРЕПАРАТА «DUOZYUM»
ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ ЭТИЛОВОГО СПИРТА ИЗ ТОПИНАМБУРА**

Центр инновационного развития науки и новых технологий

АН Республики Таджикистан,

**Дочернее предприятие Закрытого Акционерного Общества «Фон-Дарё»*

Поступила в редакцию 05.12.2014 г.

В работе в качестве альтернативного нетрадиционного сырья для производства этилового спирта использованы клубни топинамбура сорта «Интерес». Для ускорения гидролиза в качестве ферментного препарата использован «Диозум». Подобраны оптимальные условия проведения гидролиза измельченной массы клубней топинамбура под действием собственных инулаз сырья и ферментного препарата «Диозум». Применение «Диозум» и проведение гидролиза топинамбура с применением обычных хлебопекарных дрожжей позволило получить осветленное сусло с высоким содержанием фруктозанов и этилового спирта.

Ключевые слова: топинамбур, этиловый спирт, фермент, дрожжи, инулин, гидролиз, сбразивание, фруктоза.

Современные биотехнологии, высокопродуктивные методы переработки и утилизации растительного сырья играют важную роль в решении ряда продовольственных, фармацевтических, экологических и других проблем [1,2].

Развитие биоэнергетики предполагает использование в качестве сырья биомассы растений как биологически возобновляемый ресурс. В последние годы в мире активно ведутся работы по созданию новых и совершенствованию ранее разработанных промышленных технологий переработки растительной массы в моторное топливо, альтернативное топливу углеводородного происхождения [3,4].

Адрес для корреспонденции: Ахмедов Хаким Мунавварович. 734025, Республики Таджикистан, г. Душанбе, ул. Рудаки, 33. Президиум АН РТ, Центр инновационного развития науки и новых технологий АН РТ. E-mail: khakim48@mail.ru

В качестве нетрадиционного альтернативного возобновляемого сырья для производства спирта могут подойти материалы, содержащие сахар или полисахариды, которые в результате гидролиза превращаются в сбраживаемые вещества [5].

В работе [6] приведены результаты применения сахарного сорго для спиртового производства. В работе [7] в качестве сырья для получения спирта использовали метельчатый зерновой амарант, а в работе [8] ягоды тутового дерева.

Для решения топливно-энергетических, экологических и ряда продовольственных проблем Таджикистана необходимы высокоэффективные методы переработки и утилизации растительного сырья. С этой точки зрения наиболее перспективным нетрадиционным инулинсодержащим сырьем с позиции производства, использования и переработки сырья большой практический интерес в решении ряда продовольственных, фармацевтических, экономических, энергетических проблем и вопросов кормопроизводства представляет топинамбур (земляная груша) [9-14]. Клубни топинамбура являются хорошим источником сбраживаемых сахаров, благодаря чему это растение является одним из наиболее дешевых видов сырья в спиртовой промышленности.

Перспектива увеличения производства этанола из топинамбура заключается в наличии большого количества сырья в республике. Достоинством данной культуры является её высокая урожайность (клубней – до 500 ц/га и 1000-1200 ц/га зеленой массы), неприхотливость к погодным условиям, почвам и упрощенная агротехника возделывания. Кроме того, в технологии производства спирта из топинамбура имеются возможности совершенствования, направленные на уменьшение энергозатрат и достаточно высокий выход продукции.

Целью данной работы являлось использование ферментного препарата для ускорения ферментативного гидролиза инулина топинамбура и повышения выхода этилового спирта.

Объектом исследования были клубни топинамбура сорта «Интерес», выращенные нами на экспериментальном участке Института ботаники, физиологии и генетики растений АН Республики Таджикистан: Массовую долю инулина в клубнях определяли по [15]. Чистоту спирта определяли в Испытательном центре Агентства по стандартизации, метрологии, сертификации и контролю за торговлей при Правительстве Республики Таджикистан (Таджикстандарт) в соответствии с ГОСТ 5963-67.

В качестве ферментного препарата использовался коммерческий ферментный препарат «Duozum» (производства Китайской Народной Республики), оптимум действия которого проявляется при $pH = 5.5-6.0$; $T^{\circ}=50-55^{\circ}C$. Осахаривание проводили при $pH=5.5-6.0$, температуре $45-50^{\circ}C$ и перемешивании в течение 4 часов. Значение $pH = 5.5-6.0$ устанавливали 15%-раствором серной кислоты. Образцы для исследования готовили следующим образом: клубни промывали, затем обрабатывали 1%-ным раствором хлорной извести, измельчали на соковыжималке, добавляли воду в соотношении 1:1

по объему и раствор CaSO_4 из расчета внесения ионов Ca^{+2} в количестве 0.01% к массе сырья и препарат «Duozym». из расчета 1 г на 1 кг сырья.

Полученное неосветленное сусло затем прессовали и получали осветленное сусло и твердую фазу (жмых топинамбура).

Осахарённое осветленное сусло подвергали дальнейшему сбраживанию с помощью пищевых дрожжей производства Ирана или КНР. Дрожжи вносили в количестве 5% от объема сбраживаемого сусла. Брожение проводили при температуре 30°C в течение 72 часов. Процесс брожения контролировали по выделению углекислого газа.

Этиловый спирт из смеси выделяли ректификацией на колонке $D=20$ мм, высотой 700 мм. Концентрацию этилового спирта определяли пикнометрическим методом [16]. Предгон и вышекипящую фракцию, входящие в состав сивушных масел спирта, выбрасывали.

Была отобрана основная фракция с содержанием 92-95% абсолютного спирта. Абсолютирование спирта до объемного содержания 99% проводили по методике [17] при помощи бензола.

В технологии спиртового производства эффективность процесса определяется способами подготовки сырья к сбраживанию, а также особенностями применяемых заквасочных дрожжей. Свойства дрожжей определяют выход этанола из единицы перерабатываемого сырья, а также накопление в бражке побочных продуктов спиртового брожения.

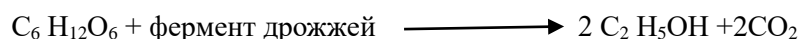
Сусло из топинамбура как осветленное, так и неосветленное имеет свои специфические характеристики, так как в качестве основных сбраживаемых углеводов в нем содержатся фруктоза и фруктозаны разной молекулярной массы, которые образуются при гидролизе топинамбура.

Проведение гидролиза в жестких термических условиях разваривания клубней может привести к накоплению в бражке сверхнормативного количества метанола.

В связи с этим в настоящей работе подобраны оптимальные условия гидролиза измельченной массы топинамбура под действием собственных инулаз сырья и препарата «Duozym», под действием которых при подобранных оптимальных условиях – $\text{pH}=5.5-6.0$ и температуре 45-50°C происходит гидролиз инулина с образованием фруктозы и фруктозанов по схеме: $[\text{C}_6 \text{H}_{10}\text{O}_5]_n + n \text{H}_2\text{O} + \text{фермент} \longrightarrow n \text{C}_6 \text{H}_{12}\text{O}_6$

Ионы Ca^{+2} , введенные в виде раствора CaSO_4 , активируют действие фермента и повышают степень гидролиза полифруктозанов.

При сбраживании сусла хлебопекарными дрожжами идет одновременно дальнейшее образование фруктозы из инулина под действием собственных инулаз топинамбура и превращения её под действием ферментов дрожжей в этиловый спирт по следующей схеме:



Использование препарата «Duozym», обычных хлебопекарных дрожжей, проведение гидролиза инулина топинамбура с использованием собственных инулаз сырья позволило получить осветленное сусло с высоким переводом в него фруктозанов клубней и минимальной деструкцией пектиновых веществ, которые в основном остаются в жмыхе из топинамбура.

В табл. 1 приведены данные по кинетике выделения углекислого газа при сбраживании осветленного сусла топинамбура различными расами дрожжей.

Таблица 1

Время сбраживания, час	Выделение углекислого газа (г/100 г сусла)		
	сбраживание под действием дрожжей китайского производства	сбраживание под действием дрожжей иранского производства	сбраживание под действием дрожжей, применяемых на спиртзаводах
4	-	-	0.1
8	0.18	0.25	0.3
12	0.35	0.45	0.5
16	0.78	0.88	0.9
20	0.82	0.95	1.0
24	1.0	1.2	1.3
28	1.1	1.3	1.4
32	1.25	1.5	1.6
36	1.65	1.8	2.0
40	2.2	2.6	2.7
46	3.4	4.9	5.2
52	6.0	6.4	6.8
60	6.6	7.0	7.5
66	6.6	7.2	7.5
72	6.6	7.2	7.5

Данные табл. 1 свидетельствуют, что при применении для сбраживания хлебопекарных дрожжей иранского и китайского производства протекает интенсивное сбраживание и выделение углекислого газа. Причем количество выделяемого углекислого газа больше при применении дрожжей иранского производства, что свидетельствует о более интенсивном сбраживании сусла по сравнению с применением дрожжей китайского производства. По количеству образовавшегося спирта действие дрожжей иранского производства очень близко с результатами при применении спиртовой расы дрожжей в спиртзаводах для сбраживания.

В результате проведенных работ нами из 1 кг топинамбура получен 90 мл (или в пересчете на 1 тонну сырья - 90 литров) этилового спирта.

В табл. 2 приведены физические параметры этилового спирта.

Таблица 2

Физические параметры этилового спирта

Продукция	Температура кипения, °С	Плотность	Показатель преломления
Этиловый спирт, полученный с применением дрожжей иранского производства	78.2	0.801	1.3640
Этиловый спирт, полученный с применением дрожжей китайского производства	78.0	0.80	1.3641
Этиловый спирт, полученный с применением расы дрожжей, применяемых на спирт-заводах	78.1	0.801	1.3640
Полученный этиловый спирт	78.3	0.799	1.3630

В табл. 3 приведены результаты испытания этилового спирта, полученного из топинамбура. Видно, что в полученном спирте с объёмной долей 95%, массовая концентрация альдегидов и уровень примесей сивушных масел ниже допустимой нормы на 35 и 25% соответственно, а объёмная доля метилового спирта соответствует требованиям нормативных документов.

Таблица 3

Результаты исследования этилового спирта, полученного из топинамбура

Название показателей	Требования по нормативным документам	Фактические результаты
Внешний вид	Прозрачная жидкость без примесей	Прозрачная жидкость без примесей
Цвет	Бесцветная жидкость	Бесцветная жидкость
Вкус и запах	Свойственна этиловому спирту, без запаха и вкуса посторонних веществ	Свойственна этиловому спирту, без запаха и вкуса посторонних веществ
Объёмная доля этилового спирта, % не менее	95.0 ± 0.2	95.0
Массовая концентрация альдегидов, в безводном спирте, мг/дм ³ , не более	4.0	2.6
Уровень примесей сивушных масел в пересчёте на изоамиловый спирт в 1 дм ³ безводного спирта, в %, не более	4.0	3.0
Объёмная доля метилового спирта в пересчёте на безводный спирт, в %, не более	0.05	0.05

Таким образом, топинамбур является перспективным растением для получения спирта в условиях нашей республики. Кроме того, из клубней топинамбура можно получать пектиновые вещества, а также белковые препараты из остаточных дрожжей после перегонки спирта, что имеет особое значение в повышении рентабельности производства спирта в будущем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ярошевич М.И., Вечер Н.Н. Топинамбур – перспективная культура многоцелевого использования. – Тр. БГУ, 2010, т.4, вып.2, с.1-12.
2. Пасько Н.М. Топинамбур – биологический потенциал для пищевых, лечебных, технических, кормовых и экологических целей.– Сб. Тр. «Инновационные технологии и продукты». – Новосибирск, 1999, с.9-16.
3. Кочнев Н.К., Калиничева М.В. Топинамбур – биоэнергетическая культура XXI века. – М.: «Арес», 2002, 76 с.
4. Зеленков В.Н., Шоин С. Многоликий топинамбур в прошлом и настоящем. – Новгород: «Арес», 2000, 24 с.
5. Вагабов М.В., Керимова З.М., Мальдьева Г.В. Корнева О.С. Применение ферментных препаратов с целью ускорения гидролиза инулина при производстве этилового спирта. – Биотехнология, 2005, №1, с.34-36.
6. Казумов Н.Б., Казумян К.Н., Казумян Н.К., Казумян Г.А. Безотходное производство из амаранта. – Производство спирта и ликёроводочных изделий, 2007, №1, с.300-301.
7. Джуруллаев Д.С. Новое сырье для производства спирта. – Производство спирта и ликёроводочных изделий, 2002, №1, с.38-39.
8. Джуруллаев Д.С. Универсальное и экономичное сырье – тутовник. – Пищевая промышленность, 2000, №5, с.36.
9. Климовский Д.Н., Стабников В.Н. Технология спиртового производства. – М.: Пищепромиздат, 1950, 448 с.
10. Рейнгрет Э.С., Кочнев Н.К., Понамарев А.Г., Звягинцев П.С. Перспективы использования топинамбура для производства биоэтанола. Достижение науки и техники РПК, 2008, №1, с.38-40.
11. Ахмедов Х.М., Партоев К.П., Ташбаев Г.А. Топинамбур – перспективная биоэнергетическая культура для производства биотоплива в Таджикистане. – Изв. АН РТ. Отд. физ.- мат., хим., геол. и техн.н., 2014, №4, с.105-112.
12. Партоев К.П., Ахмедов Х.М., Сайдалиев Н.Х. Топинамбур – биоресурс для производства биоэтанола в Таджикистане. – Изв. вузов. Прикладная химия и биотехнология, 2015, №1, с.105-107.
13. Ахмедов Х.М., Ташбаев Г.А. Способ производства этилового спирта из топинамбура. Патент Республики Таджикистан. № ТЈ 721 от 17.08.2015.
14. Ахмедов Х.М., Партоев К.П., Ташбаев Г.А. Химический состав, биологическая и хозяйственная продуктивность топинамбура. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн.н., 2015, №3, с.121-131.
15. Методы биохимического исследования растений. Под ред. А.И.Ермакова. – Л.:Агропромиздат, 1987, 452 с.
16. Великая Е.Н., Суходол В.Ф. Лабораторный практикум по курсу общей технологии бродильных производств. Общие методы контроля. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1983, 312 с.
17. Гордон А., Форд Р. Спутник химика. – М.: Мир, 1976, с.448.

**Ҳ.М.АХМЕДОВ, Ғ.А.ТАШБАЕВ, Қ.ПАРТОЕВ, Ш.АБДУЛЛОЕВ*,
С.АБДУЛЛОЕВА***

**ИСТИФОДАИ ПРЕПАРАТИ ФЕРМЕНТИИ «DUOZYM» ҲАНГОМИ
ИСТЕҲСОЛИ СПИРТИ ЭТИЛӢ АЗ ТОПИНАМБУР**

*Маркази рушди инноватсионии илм ва технологияҳои нави Академияи илмҳои
Ҷумҳурии Тоҷикистон,*

**Ҷамъияти саҳҳомии шакли кушодаи «Фон-Дарё»*

Дар мақола ба сифати ашёи алтернативии ғайрианъанавӣ барои истеҳсоли спирти этилӣ топинамбури навъи «Интерес» истифода гардидааст. Барои тезонида-ни суръати гидролиз ферменти «Duozym» истифода шудааст. Шароити мӯътадили гузаронидани гидролизи топинамбур зери таъсири инулазаҳои ашё ва препарати ферментии «Duozym» интихоб гардидааст.

Истифодаи препарати ферментии «Duozym» ва гузаронидани гидролизи инулини топинамбур дар шароити мӯътадил бо истифода аз инулазаҳои ашё, хамиртурушҳои оддӣ хангоми туршонидани шираи топинамбур, имконият дод, ки шираи софи топинамбур бо миқдори зиёди фруктозанҳои бехмева ва спирти этилӣ истеҳсол карда шавад.

Калимаҳои калидӣ: топинамбур, спирти этилӣ, фермент, хамиртуруш, инулин, гидролиз, туршонӣ, фруктоза.

Kh.M.AKHMEDOV, G.A.TASHBAEV, K.PARTOEV, Sh.ABDULLAEV*, S.ABDULLAEVA*

**THE USE OF THE «DUOZYM» DRUG AT THE PRODUCTION OF ETHYL
ALCOHOL FROM JERUSALEM ARTICHOKE**

Centre of innovative development of a science and new technologies,

Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,

**A Subsidiary of Joint stock Company “Fon-Darya”*

In this paper, as an alternative feedstock for the production of ethyl alcohol it was used Jerusalem artichoke variety “Interest”. To accelerate the hydrolysis of the enzyme as “Duozym” drug was used. It was found the optimal conditions for hydrolysis of the crushed mass of Jerusalem artichoke under the action of its own raw materials and «Duozym» drug.

The use of the enzyme “Duozym” drug and conduction of inulin hydrolysis under milled conditions using own inulase feedstock ordinary bakers yeast in the fermentation yielded clarified word with high fruktozanov of tubers.

Key words: Jerusalem artichoke, ethyl alcohol, enzyme, yeast, inulin, hydrolyze, fermentation, fructose.

УДК 621.793

Р.О.АЗИЗОВ, М.Х.САИДОВ*

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ «ПОКРЫТИЕ-ОСНОВА»

Президиум Академии наук Республики Таджикистан,

**Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими*

Поступила в редакцию 25.01.2016 г.

В статье рассматривается влияние параметров процесса нагрева и охлаждения на формирование напряженного состояния системы «покрытие – основа».

Ключевые слова: покрытие, основа, напряженное состояние, остаточное напряжение.

Газотермическое (газопламенное, плазменное) напыление широко применяется в технологии создания полимерных покрытий и представляет собой процесс, основанный на нагреве полимерного материала до пластического состояния и распыления его на изделие - подложку с помощью газовой струи. Нагретые частицы с большой скоростью удаляются от поверхности, сцепляются с ней и друг с другом, образуя полимерный слой.

Напыление – наиболее удобный способ формирования покрытий на поверхностях деталей, имеющих различную конфигурацию.

Как показывает анализ полученных теоретических соотношений, распределение в пространстве и изменение во времени внутренних напряжений зависят от температурного поля в теле. Поэтому необходимо рассмотреть, в какой степени параметры процесса нагрева и охлаждения оказывают влияние на формирование напряженного состояния системы «покрытие-основа».

Остаточные напряжения в покрытии и основе с учетом полного сцепления друг с другом будут описываться следующими соотношениями (рис.1):

$$\sigma_{r_1}(r) = \zeta\mu\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi_1}(r) = \zeta\mu\left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{z_1}(r) = \mu\omega\delta; \quad (1)$$

Адрес для корреспонденции: Азизов Рустам Очильдиевич. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр.Рудаки, 33, Президиум АН РТ. E-mail: rustam.azizov57@gmail.com

$$\sigma_{r_2}(r) = \zeta \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi_1}(r) = \zeta \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{z_2}(r) = \omega \delta. \quad (2)$$

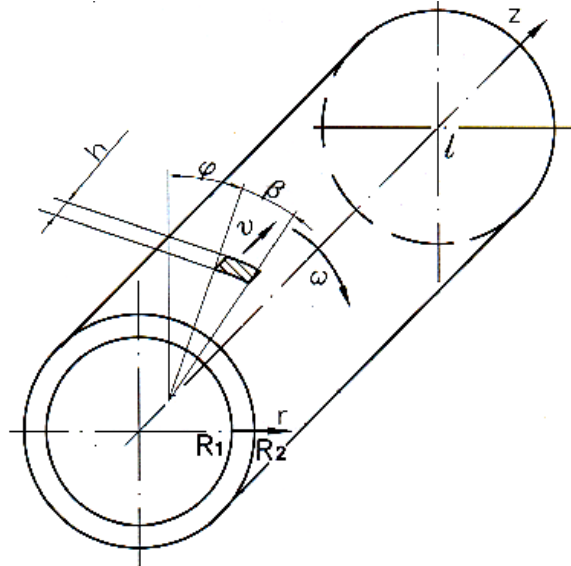


Рис. 1. Расчетная схема для определения остаточных напряжений в полем ограниченном цилиндре.

Исследование остаточных напряжений по сечению слоя и основы проводилось на основе расчетов по формулам (1) и (2) при $R_0 = 0.025$ м, $R_1 = 0.030$ м, $R_2 = 0.032$ м. Значение термомеханических характеристик материалов основы (сталь) и покрытия (полиамид) принимались по данным работ [1, 2] и составляли $E_1 = 19.5 \cdot 10^{10}$ Н/м², $E_2 = 12 \cdot 10^8$ Н/м², $\nu_1 = 0.24$, $\nu_2 = 0.47$, $\alpha_{T_1} = 15.2 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, $\alpha_{T_2} = 10^{-4}$ К⁻¹. Расчет проводился для схемы двухстороннего охлаждения при различных значениях коэффициента теплоотдачи ($\alpha = 100$ Вт/м²К и $\alpha = 500$ Вт/м²К).

Изменение радиальных σ_{rr} , окружных $\sigma_{\varphi\varphi}$, и осевых σ_{zz} остаточных напряжений показано на рис. 2.

При этом видно, что радиальные напряжения являются растягивающими и имеют свои максимальные значения на поверхности сопряжения R_1 , снижаясь до нуля на свободных поверхностях R_0 и R_2 . Осевые и окружные напряжения являются растягивающими для покрытия и сжимающими для основы. Осевые напряжения не зависят от радиуса, а изменение окружных напряжений носит более сложный характер. В частности, максимальные их значения находятся на поверхности контакта цилиндров, при этом уровень напряжений в основе снижается при уменьшении радиуса при любых значениях коэффициента теплоотдачи в исследованном диапазоне, в то время как в покрытии по мере увеличения коэффициента теплоотдачи минимум остаточных напряжений смещается с

поверхности слоя в его глубину. С повышением коэффициента теплоотдачи, то есть с увеличением скорости охлаждения уровень остаточных напряжений и в покрытии и в основе повышается с одновременным ростом неравномерности их распределения по сечению, что связано с увеличением градиента температур в момент образования жесткой связи между слоем и основой.

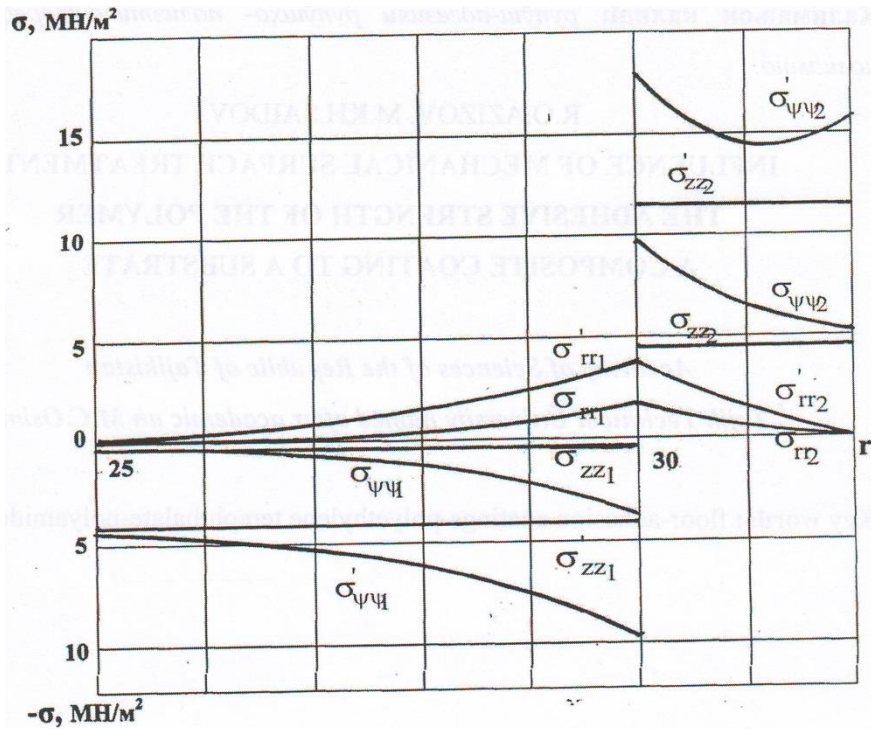


Рис. 2. Распределение остаточных напряжений по сечению покрытия и основы при двухстороннем охлаждении при различных коэффициентах теплоотдачи: обозначения без штриха – для $\alpha=100$ Вт/(м²·К); обозначения со штрихом – для $\alpha=500$ Вт/(м²·К).

Расчетные значения максимальных остаточных напряжений в покрытии (табл. 1) показывают что для малых скоростей охлаждения $\alpha=10$ Вт/(м²·К) при обеих схемах охлаждения (двухстороннее и одностороннее со стороны покрытия) характерно наличие примерно одинаковых остаточных напряжений растяжения в покрытии, при этом наиболее высокие значения имеют окружные напряжения (+5.8...+6.2 МН/м²), наиболее низкие – радиальные (+1.6...+1.8 МН/м²).

Это объясняется тем, что остаточное напряжение определяется характером распределения температуры в момент образования жесткой связи между цилиндрами и процессами усадки вследствие различия температурных коэффициентов расширения материалов цилиндров. При низкой скорости охлаждения (т.е. при малых значениях коэффициента теплоотдачи) первый фактор не имеет решающего значения, поскольку вне зависимости от начального распределения температуры, заданного параметрами нагрева, к мо-

менту охлаждения поверхности сопряжения цилиндров до температуры $0.33 T_{пл}$ материала покрытия, когда, согласно принятым допущениям, начинается взаимовлияние цилиндров, температурное поле в системе цилиндров имеет относительно равномерное распределение.

Таблица 1

Влияние величины коэффициента теплоотдачи на уровень максимальных остаточных напряжений в покрытии при различных схемах охлаждения

Схема охлаждения	Коэффициент теплоотдачи, Вт/м ²	Уровень остаточных напряжений, МН/м ²		
		σ_{rr}	$\sigma_{\varphi\varphi}$	σ_{zz}
Односторонняя со стороны покрытия	10	+1.8	+6.2	+2.7
	50	+2.3	+8.8	+5.7
	100	+3.5	+10.3	+7.7
	500	+5.0	+19.8	+12.5
	1000	+9.8	+24.7	+18.6
Двухсторонняя	10	+1.6	+5.8	+2.3
	50	+1.8	+7.2	+3.0
	100	+2.1	+9.7	+4.8
	500	+3.5	17.8	+11.7
	1000	+2.3	+16.2	9.7

При одностороннем охлаждении со стороны покрытия с увеличением коэффициента теплоотдачи остаточные напряжения в покрытии постепенно увеличиваются во всем исследованном диапазоне значений коэффициента теплоотдачи, достигая при $\alpha=1000$ Вт/(м²·К) значений, например, для окружных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}=+24$ МН/м², для осевых напряжений $\sigma_{zz}=+18.6$ МН/м² и для радиальных напряжений – $\sigma_{rr}=+9.8$ МН/м².

При схеме двухстороннего охлаждения остаточные напряжения растяжения покрытия достигают максимума при $\alpha=500$ Вт/(м²·К) наблюдается максимум ($\sigma_{\varphi\varphi}=17.8$ МН/м²), после чего уровень напряженного состояния начинает снижаться.

Исследование остаточных напряжений в покрытии в зависимости от его толщины при коэффициенте теплоотдачи $\alpha=100$ Вт/(м²·К) показывает (табл. 2), что растягивающие радиальные напряжения в покрытии и основе с увеличением толщины покрытия в пределах 0.5 – 5.0 мм возрастают с 0.8 до 8.7 МН/м². Окружные и осевые напряжения в основе являются сжимающими, и их максимальные значения по мере увеличения толщины покрытия также возрастают, находясь в диапазоне $\sigma_{\varphi\varphi}=-0.2\dots-8.3$ МН/м² и $\sigma_{zz}=-0.1\dots-7.7$ МН/м².

Остаточные окружные и осевые напряжения в покрытии являются растягивающими, и по мере увеличения толщины покрытия от 0.5 до 2.0 мм они постепенно снижаются, имея минимальное значение на уровне $\sigma_{\varphi\varphi}=+9.7$ МН/м² и $\sigma_{zz}=+4.8$ МН/м², а затем начинают возрастать, принимая при толщине покрытия 5.0 мм значения $\sigma_{\varphi\varphi}=+28.6$ МН/м² и $\sigma_{zz}=+24.3$ МН/м².

Таблица 2

Влияние толщины покрытия на уровень остаточных напряжений

Толщина покрытия, мм	Максимальные остаточные напряжения, МН/м ²				
	σ_{rr}	$\sigma_{\varphi\varphi_1}$	$\sigma_{\varphi\varphi_2}$	σ_{zz_1}	σ_{zz_2}
0.5	+0.8	-0.2	+2.3	-0.1	1.8
1.0	+1.6	-1.6	+4.6	-0.5	+2.9
2.0	+2.1	-2.5	+9.7	-1.1	+4.8
3.0	+3.9	-3.2	+13.6	-2.9	+9.6
4.0	+6.3	-5.9	+19.2	-4.6	+17.8
5.0	+8.7	-8.3	+28.6	-7.7	24.3

Исследуя остаточные напряжения можно сказать следующее: для регулирования остаточных напряжений в покрытиях необходимо, во-первых, исходя из заданных конкретных условий работы детали с покрытием, заранее определить требования к уровню остаточных напряжений; во-вторых, используя различные технологические приемы, стремиться получить покрытия с заданными характеристиками по напряжениям.

Технологическими приемами, позволяющими регулировать остаточные напряжения в покрытии, могут являться:

- согласование свойств материалов покрытия и основы и, в первую очередь, их коэффициентов линейного расширения;
- изменение толщины покрытия;
- регулирование термического воздействия на покрытие и основу путем изменения условий охлаждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудицын М.Н., Артемов П.Я., Любищц М.И. Справочное пособие по сопротивлению материалов. – Минск: Вышэйшая школа, 1970, 340 с.
2. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К.Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976, 1008 с.

Р.О.АЗИЗОВ, М.Х.САИДОВ*

ШИДДАТҲОИ ҲАРОРАТӢ ДАР МАҚМУИ «РУЙПӢШ – АСОС»

Раёсати Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,

**Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ*

Дар мақола таъсири ченакҳои раванди гармшавӣ ва хунуқшавӣ ба таъсисебии ҳолати шиддатнокии мақмуи «руйпӯш – асос» нишон дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: руйпӯш, асос, ҳолати шиддатнокӣ, шиддатҳои боқимонда.

R.O.AZIZOV, M.KH.SAIDOV*

TEMPERATURE VOLTAGE SYSTEM "COVERAGE – BASIS"

Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,

**M.Osimi Tajik Technical University*

The article deals with influencing parameters of the heating and cooling process in the formation of the stress state of the system "coverage – basis".

Key words: coverage, base, the state of stress, residual voltage.

УДК 552.54 (553)

М.М.МАМАДВАФОВ, И.У.РАХМОНОВ

**ПЕТРОХИМИЯ МАГМАТИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ БАССЕЙНА РЕКИ
ЛОЙЛЯКУЛЬ (ГИССАРСКИЙ ХРЕБЕТ)**

*Главное управление геологии при Правительстве Республики Таджикистан
Поступила в редакцию 24.09.2014 г.*

Приводятся первые сведения по петрохимии магматических комплексов бассейна реки Лойлякуль (Гиссарский хребет), представленных гранитоидами инверсионной (C_{2-3}) многофазной интрузии, их жильными производными, порфировыми субвулканическими постинверсионно-орогенными (P_1) дайками и щелочными базальтоидами даек тафрогенного ($P_2 - T?$) геодинамического режима развития района.

Ключевые слова: петрохимия, магматические комплексы, гранитоиды, плутон, эндо- и экзоконтакты, спессартиты, кварцево-латитовые порфиры, щелочные базальтоиды.

Химизм магматических комплексов района рассматривается впервые по данным 143 силикатных анализов проб авторов (табл.1), пересчитанных на числовые характеристики составов пород (табл.2) по методике А.Н.Заварицкого [1,2]. Идентификация химического состава пород по их числовым характеристикам осуществлена путем сравнения последних со среднемировыми «стандартными» значениями [3] по Р.Дэли.

Исследуемый район представляет зону эндо- и экзоконтактов гранитоидного плутона в верхнем течении р.Кафандар – бассейне р. Лойлякуль, и почти на 80% сложен магматитами. Последние, согласно схемы последовательности магматизма Гиссарского хребта [4,5], выделяются в следующие магматические комплексы: 1) среднекаменноугольный кварц-диорит-кварц-монцодиорит-гранодиоритовый; 2) позднекаменноугольный гранит-лейкогранитовый; 3) раннепермский гранитоид-порфировый; 4) позднепермский ($P_2-T?$) щелочно-базальтоидный. Каменноугольные гранитоиды слагают интрузию, представляющую аналог Северо-Варзобского (на западе) и Обигарм-Рамитского (на востоке) плутонов [4,5]. Разновозрастные (C_{2-3} , P_1 , $P_2-T?$) и разноформационные дайковые

Адрес для корреспонденции: Мамадвафоев Мабатишо Мамадвафоевич. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Мирзо Турсунзаде, 27, Главное управление геологии при Правительстве Республики Таджикистан.

тела находятся как среди гранитоидов, так и вмещающих их палеозойских (S_2-C_1) терригенных и карбонатных формаций. Ниже рассматривается химизм пород вышеупомянутых магматических комплексов (табл.1,2) в соответствии с последовательностью их формирования.

Кварцевые диориты – кварцевые монцодиориты характеризуются значительной вариацией содержания SiO_2 , Mg и полевошпатовой извести. Они относятся к классам пересыщенных и слабо пересыщенных кремнекислотою ($Q=4.5\div 26.7$), группе от бедных ($a:c=1.8\div 2.0$) и умеренно-богатых до богатых щелочами пород ($a:c=2.6\div 3.7$). По соотношению Al, Ca, Na и K относятся к типам пород, нормальных и пересыщенных глинозёмом. Для них характерно преобладание Fe над Mg, почти равные соотношения Na и K; в отдельных случаях отмечаются незначительные превышения K над Na, что связано, очевидно, с неравномерным площадным развитием постмагматического щелочного метасоматоза. В целом, рассматриваемые породы по среднему химическому составу, особенно по главным числовым характеристикам составов, близки к средним типам кварцевых диоритов и тоналитов, по Р.Дэли, отличаясь от последних более низким содержанием SiO_2 , Na, Fe^{3+} , Fe^{2+} и K. По содержанию кремнезема ($Q=15.8$) и отношению щелочей к полевошпатовой извести ($a:c=2.2$; табл.2) они относятся к классу пересыщенных кремнекислотою и группе очень бедных щелочами пород.

Среди рассматриваемых пород обильно развиты ксенолиты диоритизированных (кварцевые диориты) пород кровли интрузии, которые относятся (табл.1,2) к классу пород, насыщенных кремнекислотою и бедных щелочами. Они близки к монцонитовым породам [3] по Р.Дэли, отличаясь от них несколько повышенным содержанием Fe^{2+} и пониженным – калия.

Гранодиориты относятся к классу пересыщенных кремнекислотою ($Q=18.7\div 28.3$), группам от очень бедных ($a:c=2.0\div 2.5$) и бедных ($a:c=2.5\div 3.6$) до умеренно богатых ($a:c=4.4\div 7.4$) щелочами пород. Среди них выделяются нормальный и пересыщенный глинозёмом ряды. Они относятся к кали-натриевой серии, характеризуются преобладанием Fe над Mg. По средним значениям химических составов (табл.1,2) они приближаются к средним типам гранодиоритов [3] по Р. Дэли.

Гранодиорит-порфиры находятся в апофизах, отходящих от гранодиоритов. По параметрам Q и a:c, наиболее близки к кварцевым монцонитам [3] по Р.Дэли. Они относятся к нормальному ряду, классу пересыщенных кремнекислотой, группе умеренно богатых щелочами. Для них характерно преобладание Na+K над Ca, Fe над Mg и Na над K.

Породы позднекаменноугольного магматического комплекса обычно находятся в значительном удалении от эндоконтактных зон исследуемой интрузии. Они, как правило, представлены штоко- и дайкообразными телами биотит-роговообманковых, биотитовых и лейкократовых (аплитовидных) гранитов.

Таблица 1

Средние химические составы магматических пород бассейна р. Лойлякуль

№№ п.п.	Название породы, ее возрастной индекс	Количество проб	Окислы (масс. %) *				
			SiO ₂	TiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	FeO
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Кварцевые диориты и кварцевые монцодиориты, С ₂	28	<u>60.55</u> 55.1 – 65.7	<u>0.51</u> 0.15 – 0.78	<u>15.58</u> 14.2 – 19.2	<u>1.60</u> 0.59 – 2.36	<u>4.17</u> 1.15 – 5.26
2	Гранодиориты, С ₂	16	<u>66.03</u> 64.0 – 68.5	<u>0.34</u> 0.10 – 0.50	<u>15.47</u> 13.11 – 17.5	<u>1.44</u> 0.48 – 2.10	<u>3.04</u> 0.70 – 4.39
3	Ксенолиты диоритизированных пород (кварцевых диоритов)	9	<u>55.2</u> 53.5 – 58.2	<u>0.77</u> 0.67 – 0.97	<u>16.85</u> 15.8 – 17.6	<u>2.63</u> 2.00 – 3.05	<u>6.22</u> 5.10 – 7.56
4	Гранодиорит-порфиры, С ₂	6	<u>66.21</u> 65.74 – 66.9	<u>0.51</u> 0.43 – 0.54	<u>14.80</u> 15.37 – 14.15	<u>0.80</u> 0.58 – 1.16	<u>2.73</u> 2.16 – 2.95
5	Бiotитовые, биотит-роговообманковые граниты, С ₃	3	<u>70.10</u> 68.84 – 71.80	<u>0.13</u> 0.10 – 0.15	<u>14.25</u> 13.61 – 14.94	<u>0.21</u> 0.14 – 0.85	<u>2.23</u> 2.02 – 2.52
6	Плагииграниты биотит-амфиболовые, С ₃	10	61.13	0.52	14,90	3.66	3.74
7	Аплитовидные граниты (лейкограниты), С ₃	27	<u>72.21</u> 66.98 – 75.46	<u>0.13</u> 0.01 – 0.36	<u>13.40</u> 11.97 – 15.09	<u>0.59</u> 0.21 – 1.09	<u>1.58</u> 0.37 – 3.53
8	Лампрофиры (спессартиты), С ₂₋₃	10	<u>54.69</u> 50.94 – 61.62	<u>0.64</u> 0.32 – 1.26	<u>14.50</u> 13.06 – 15.46	<u>1.92</u> 1.15 – 2.99	<u>4.66</u> 3.67 – 5.47
9	Кварцево-латитовые порфиры, Р ₁	8	<u>64.77</u> 63.30 – 66.25	<u>0.44</u> 0.25 – 0.49	<u>14.79</u> 14.29 – 15.95	<u>1.32</u> 0.79 – 2.13	<u>2.10</u> 1.08 – 2.88
10	Щелочные базальтоиды, Р ₂ – Т (?)	35	<u>52.48</u> 45.66 – 59.04	<u>1.11</u> 0.47 – 1.45	<u>13.78</u> 11.41 – 16.20	<u>2.06</u> 0.53 – 2.97	<u>5.55</u> 3.89 – 6.98

Таблица 1 (продолжение)

№№ п.п.	Окислы (масс. %)*							
	MnO	MgO	CaO	Na ₂ O	K ₂ O	P ₂ O ₅	П.п.п.	Сумма
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	<u>0.09</u> 0.01 – 0.12	<u>2.65</u> 0.30 – 4.53	<u>5.31</u> 0.72 – 7.40	<u>2.70</u> 0.25 – 3.30	<u>3.42</u> 2.60 – 10.10	<u>0.14</u> 0.05 – 0.16	<u>2.29</u> 0.55 – 5.66	<u>99.01</u> 99.50 – 100.24
2	<u>0.06</u> 0.02 – 0.09	<u>1.50</u> 0.13 – 2.62	<u>3.90</u> 2.45 – 4.64	<u>3.17</u> 2.50 – 3.75	<u>3.83</u> 2.69 – 5.40	<u>0.13</u> 0.08 – 0.16	<u>1.47</u> 0.69 – 4.42	<u>100.38</u> 99.50 – 100.15
3	<u>0.21</u> 0.02 – 0.75	<u>3.62</u> 2.48 – 4.79	<u>6.35</u> 5.46 – 8.00	<u>3.34</u> 2.40 – 3.80	<u>2.70</u> 2.10 – 3.40	<u>0.21</u> 0.13 – 0.33	<u>1.51</u> 1.08 – 2.87	<u>99.91</u> 99.54 – 100.26
4	<u>0.05</u> 0.05 – 0.07	<u>0.94</u> 0.80 – 1.07	<u>2.85</u> 2.38 – 3.46	<u>3.07</u> 2.80 – 3.30	<u>3.84</u> 3.60 – 4.10	<u>0.58</u> 0.17 – 2.60	<u>3.44</u> 3.16 – 3.80	<u>99.82</u> 99.52 – 100.23
5	<u>0.04</u> 0.03 – 0.05	<u>1.31</u> 1.11 – 1.61	<u>2.25</u> 1.82 – 2.48	<u>2.89</u> 2.52 – 3.19	<u>4.48</u> 3.95 – 5.26	<u>0.06</u> 0.06 – 0.06	<u>1.50</u> 1.04 – 2.15	<u>99.45</u> 99.58 – 100.0
6	0.09**	2.20	4.18	3.71	3.60	0.17	1.90	99.97
7	<u>0.03</u> 0.01 – 0.09	<u>0.44</u> 0.13 – 1.20	<u>1.58</u> 0.57 – 3.47	<u>3.13</u> 0.00 – 6.27	<u>5.09</u> 3.00 – 7.40	<u>0.09</u> 0.01 – 0.27	<u>0.85</u> 0.17 – 2.11	<u>99.87</u> 99.50 – 100.49
8	<u>0.09</u> 0.08 – 0.14	<u>5.97</u> 2.73 – 8.43	<u>6.25</u> 4.48 – 8.22	<u>2.89</u> 2.23 – 3.40	<u>2.83</u> 2.05 – 4.81	<u>0.35</u> 0.19 – 0.60	<u>5.09</u> 2.32 – 6.71	<u>99.88</u> 99.51 – 100.59
9	<u>0.06</u> 0.03 – 0.08	<u>1.06</u> 0.59 – 1.54	<u>3.76</u> 2.46 – 4.46	<u>2.79</u> 1.30 – 3.36	<u>3.74</u> 3.30 – 4.23	<u>0.18</u> 0.12 – 0.26	<u>4.64</u> 2.12 – 6.49	<u>99.65</u> 99.50 – 100.48
10	<u>0.12</u> 0.07 – 0.19	<u>6.79</u> 3.71 – 11.79	<u>6.89</u> 3.28 – 9.65	<u>2.88</u> 1.16 – 4.60	<u>3.25</u> 0.92 – 6.00	<u>0.64</u> 0.018 – 1.90	<u>4.31</u> 1.55 – 7.48	<u>99.86</u> 99.50 – 100.38

Примечание. В числителе – среднее содержание, в знаменателе – пределы колебания содержаний; ** анализ единичный, поэтому пределы колебания содержаний отсутствуют.

Таблица 2

Числовые характеристики средних химических составов магматитов бассейна р. Лойлякуль

№№ п.п.	Название породы, ее возраст	Числовые характеристики пород по А.Н.Заварицкому												
		s	a	c	b	Q	a: c	a'	c'	m'	f'	n	t	φ
1	Кварцевые диориты, кварцевые монцодиориты, С ₂	71.7	11.3	5.1	11.8	15.8	2.2	-	13.4	39.4	47.2	55.0	0.59	11.9
2	Гранодиориты, С ₂	75.6	12.5	4.0	7.7	22.4	3.1	-	8.8	32.7	58.4	56.5	0.36	15.9
3	Диоритизированные ксенолиты пород кровли интрузии (кварцевые диориты)	65.7	11.5	5.8	16.9	2.7	1.9	-	12.5	37.1	50.4	64.6	1.0	13.3
4	Гранодиорит-порфиры, С ₂	77.5	14.0	3.1	5.3	23.9	4.5	-	7.8	28.6	63.6	60.0	0.54	13.0
5	Биотитовые, биотит- роговообманковые граниты, С ₃	79.3	12.9	2.7	5.1	30.4	4.7	12,0	-	42.6	45.3	49.4	0.08	2.6
6	Плагиограниты биотит- амфиболовые, С ₃	72.6	12.6	3.1	11.6	17.0	4.0	-	15.0	30.5	54.4	61.2	0.53	25.5
7	Аплитовидные граниты (лейко- граниты), С ₃	80.9	14.4	1.7	3.0	31.3	8.5	-	6.8	25.0	68.2	49.5	0.08	18.2
8	Лампрофиры (спессартиты), С ₂₋₃	64.5	10.8	4.6	20.1	2.8	2.3	-	16.4	52.1	31.5	61.0	8.7	8.2
9	Кварцево-латитовые порфиры, Р ₁	78.0	11.9	4.5	5,6	27.7	2.6	-	6.4	34.6	58.9	54.2	4.6	20.5
10	Щелочные базальтоиды, Р ₂ – Т(?)	61.4	11.2	3.7	23.7	3.3	3.0	-	20.3	49.3	30.4	57.4	1.6	7.3

Биотитовые и биотит-роговообманковые граниты представляются пересыщенными глиноземом и кремнекислотой ($Q=30.4$), умеренно богатыми щелочами ($a:c=4.7$) пород; они сопоставимыми со средними типами «гранитов всех периодов» [3] по Р.Дэли. В целом их состав лежит в пределах граничных значений, установленных для гранитов [6].

Плагиограниты, биотит-амфиболовые отмечаются в единичных дайкоподобных телах. Они относятся к классу пересыщенных кремнекислотой ($Q=17.0$), группе бедных ($4>a:c>2$) и умеренно-богатых ($8>a:c>4$) щелочами пород (табл.2), близки к тоналитам [3] по Р.Дэли.

Аплитовидные граниты по составу отвечают лейкогранитам [6] нормального и пересыщенного глиноземом типов. Они относятся к классу пород пересыщенных кремнекислотой, группе богатых щелочами, и наиболее близки к риолитам [3] по Р.Дэли. Имеющиеся материалы показывают (табл.1,2), что основность, кремнекислотность и щелочность гранитоидов изменяется от ранних к поздним закономерно, что свидетельствует о единстве их генезиса. Некоторые вариации химизма обусловлены процессами ассимиляции, гибридизма и автометасоматоза.

Спессартиты – жильные производные гранитоидов, относятся к классу насыщенных кремнекислотой, группе бедных щелочами, подгруппе меланократовых пород. От среднего состава спессартитов [3], по Р.Дэли, отличаются некоторым богатством кремнекислотой, пониженным содержанием оснований.

Кварцево-латитовые (риодацитовые) порфиры в дайковых телах представляют продукты раннепермского постинверсионно-орогенного интрузивно-вулканогенного комплекса. Возможно, дайки представляют подводящие каналы (корни) раннепермских вулканитов поверхностных фаций, уничтоженных эрозией еще в триасе [7,8]. Они относятся к классу пересыщенных кремнекислотой и группам пород от бедных до умеренно богатых щелочами. Характерной их особенностью является преобладание Fe над Mg, и Na+K над Ca; петрохимически наиболее близки кварцевым монцонитам [3] по Р.Дэли.

Щелочные базальтоиды отмечаются в дайковых телах, по минеральному составу приближаются к слюдяным лампрофирам. В группу «щелочных базальтоидов» объединены породы с содержанием SiO_2 от 45.66 до 59.04 %, то есть от слабо пересыщенных кремнекислотой до слегка недосыщенных ею. Соотношение щелочей и полевошпатовой извести испытывает значительное колебание, не устойчиво также соотношение Fe к Mg – с изменением до обратного; иногда концентрации Fe и Mg равны.

В заключение надлежит отметить, что в результате петрохимических исследований надежно идентифицированы магматиты района по их химическому составу, что является «...существенной задачей» [1] не только петрографических, но и металлогенических и геохимических исследований.

Авторы выражают глубокую благодарность доктору геолого-минералогических наук, профессору А.Х.Хасанову, содействовавшему выполнению настоящих исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заварицкий А.Н. Введение в петрохимию изверженных горных пород. – М.: Изд. АН СССР, 1950, 400 с.
2. Заварицкий А.Н. Пересчет химических анализов изверженных горных пород и определение химических типов их. – М.: Госгеолтехиздат, 1960, 156 с.
3. Четвериков С.Д. Руководство к петрохимическим пересчётам химических анализов горных пород и определению их химических типов. – М.: Госгеолтехиздат, 1956, 246 с.
4. Баратов Р.Б. Интрузивные комплексы южного склона Гиссарского хребта и связанное с ними оруденение. – Душанбе.: Дониш, 1966, 336 с.
5. Хасанов А.Х. Петрология и рудоносность метасоматических комплексов Центрального Таджикистана. – Душанбе.: Дониш, 1976, 250 с.
6. Магматические горные породы: классификация, номенклатура. // Под ред. О.А.Богатикова. – М.: Недра, 1986, 320 с.
7. Хасанов А.Х. – Труды Таджикского госуниверситета им. В.И.Ленина. т. 2, серия «Естественных наук», 1957, с. 87-98.
8. Мамадвафоев М.М., Хасанов А.Х., Кривошекова Н.И., Ниезов А.С. Раннепермский магматизм и ртутно-сурьмяное оруденение Зеравшано-Гиссарского рудного пояса (Центральный Таджикистан). – Душанбе.: Недра, 2010, 136 с.

М.М.МАМАДВАФОЕВ, И.У.РАҲМОНОВ

ПЕТРОХИМИЯ И КОМПЛЕКСЫ ВОДИ ДАРЁИ ЛОЙЛАКУЛ (ҚАТОРКЎҲИ ҲИСОР)

Саридораи геологии назди Ҳукумати Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақола маълумоти аввалин оиди петрохимияи комплекси магматикии води дарёи Лойлакул (қаторкӯҳи Ҳисор), ки ба намуди гранитоидҳои инверсионии бисёрфазагии интрузивӣ, рағҳои ба онҳо алоқаманд, порфирҳои субвулканикӣ постинверсионӣ-орогеникӣ (P_1) дайкавӣ ва базальтоидҳои ишқорӣ дайкавӣ тафрөгеникӣ речаи геодинамикии тарақиёти ноҳияи пешниҳодшудаанд, оварда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: петрохимия, комплекси магматикии гранитоидҳо, плутон, эндо- ва экзоконтактҳо, спессартитҳо, порфирҳои кварциву-латитӣ, базальтоидҳои ишқорӣ.

M.M.MAMADVAFOEV, I.Y.RACHMONOV

PETROCHEMISTRY OF MAGMATIC COMPLEXES OF LOILACUL RIVER BASIN (HISSAR RIDGE)

General Directorate of Geology under the Government of the Republic Tajikistan

The article provides the first information about petrochemistry of magmatic complexes of Kafandar river basin (Hissar ridge), presented by granitoids of inverse multiphase intrusion, their vein derivatives, porphyritic sub-volcanic post-inversion and orogenic dikes and alkaline basaltoids dikes of taphrogenic geodynamic regime of development of the region.

Key words: petrochemistry, magmatic complexes, granitoids, pluton, endo and exocontacts, spessartites, quartz-latitude porphyry, alkaline basaltoids.

УДК 563.12:551.73

А.А.САБИРОВ

**СИСТЕМАТИКА И ФИЛОГЕНИЯ САЛПИНГОТУРАММИН
(ИЗВЕСТКОВЫЕ ФОРАМИНИФЕРЫ)**

*Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии
АН Республики Таджикистан
Поступила в редакцию 06.01.2016 г.*

*На основе изучения опубликованной литературы и палеозойских известковых фораминифер Тянь-Шаня разработана новая систематика рода *Salpingothuramina*, а также приведена схема предполагаемых филогенетических связей между его видами.*

Ключевые слова: фораминиферы, систематика, филогения, палеозой.

После установления в 1945 г. И.С.Сулеймановым рода *Parathuramina* [1], объем его понимался весьма широко, так как к нему относились все однокамерные известковые фораминиферы с устьями различной формы и с различной толщиной стенки. Первую попытку систематизировать паратураммин предприняла О.А.Липина [2], выделив среди них 2 группы видов – толстостенных и тонкостенных. В составе 2-й группы были выделены 2 подгруппы – с сосочковидными и шиповидными устьевыми возвышениями. В 1961 г. О.В.Юферев [3] предложил классификацию рода, в которой на основе пересмотра таксономического значения различных признаков выделил в его составе несколько групп, в одну из которых включил паратураммины с устьевыми возвышениями трубчатой формы и тонкой стенкой с типовым видом *Parathuramina crassithec* Antropov, 1950.

В этом же году Б.В.Поярков [4], не придавая таксономического значения составу и структуре стенки, отнес всех паратураммин к роду *Thuramina* Brady, 1879, объединяющему агглютинирующие формы. По его мнению, строение устьевых возвышений должно отражать форму псевдоподий, поэтому среди тураммин выделяются 2 группы видов – с сосочковидными и трубчатыми возвышениями. Формы 2-й группы он выделил в новый

Адрес для корреспонденции: Сабиров Абдувахид Абдухамидович. 734063, Республика Таджикистан, Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии АН РТ. E-mail: svakhid@mail.ru

подрод *Salpingothurammia* с типовым видом *S. tuberculata* Lipina, 1950. При этом, наряду с формами с трубчатými возвышениями, в его состав он необоснованно включил также некоторые толстостенные виды без устьевых возвышений. Позднее [5, 6] он отнес салпинготураммин в качестве подрода к роду *Parathurammia*, тем самым восстановив статус последнего.

В работе [7] различные виды паратураммин с трубчатými устьевыми возвышениями были включены в состав новых родов *Poligonella*, *Bykovaella*, *Radiosphaerella* и *Cordatella*. Позднее В.М.Задорожным [8] первый род был признан синонимом *Salpingothurammia*, причем включен он был в подсемейство Parathuramminitinae Antropov, 1967 вместе с толстостенными формами без устьевых возвышений и с коническими устьевыми возвышениями. В состав трех остальных родов также включались виды с различным строением устьевых возвышений и различным строением стенки, что не согласовывалось с признанием формы устьев важнейшим таксономическим признаком паратурамминид. Ниже предлагается новая систематика рода *Salpingothurammia*, уточняющая его диагноз и объем, таблицы сравнения видов, включенных автором в состав рода, а также схема филогении.

Семейство Parathuramminidae E.Bykova, 1955, emend. Sabirov, 1987

Род *Salpingothurammia* Pojarkov, 1961

Parathurammia (part.): auct.

Thurammia (*Salpingothurammia*): Поярков, 1961, с. 31.

Parathurammia (*Salpingothurammia*): Поярков, 1969, с. 86 (part.); 1979, с. 44 (part.).

Poligonella (part.): Задорожный, Юферев, 1984, с. 91.

Bykovaella (part.): Задорожный, Юферев, 1984, с. 78-79; Задорожный, 1987, с. 15-16.

Radiosphaerella (part.): Юферев в: Задорожный, Юферев, 1984, с. 90.

Cordatella (part.): Задорожный, Юферев, 1984, с. 82; Задорожный, 1987, с. 19.

Salpingothurammia: Задорожный, 1987, с. 29 (part.); Loeblich et Tappan, 1988, p. 193.

Chrysothurammia (part.): Neumann, Pozariska and Vashard, 1975.

Типовой вид – *Salpingothurammia tuberculata* (Lipina), 1950 из фаменских отложений Восточно-Европейской платформы.

Диагноз. Раковины свободные от сферической до неправильно-угловатой формы. Устья многочисленные на концах трубчовидных устьевых возвышений; устьевые каналы цилиндрические. Стенка известковая от тонкой до толстой, микрогранулярная равномерной толщины, однородная.

Сравнение. От рода *Parathuramina* отличается трубчатými устьевыми возвышениями с цилиндрическими устьевыми каналами.

Замечания. В составе тонкостенных представителей рода выделяются две группы видов: а) с трубчатými устьевыми возвышениями, основания которых образованы оттянутыми наружу краями стенок и б) с такими же трубчатými устьевыми возвышениями, но отходящими от раковины под прямым углом. У форм первой группы при косом сечении через основание трубчатого устьевого возвышения наблюдается картина, аналогичная устьевым возвышениям сосочковидной формы. Однако часть возвышений в плоскости данного шлифа остаётся трубчатой. У паратураммин с коническими и сосочковидными устьевыми возвышениями трубчатая форма не наблюдаются при любых сечениях.

Состав. 2 подрода – *Salpingothuramina* Pojarkov, 1961 и *Pachysalpingothuramina* Sabirov, 2014.

Возраст и распространение. Средний ордовик – нижний карбон; Евразия и Северная Америка.

Подрод *Salpingothuramina* Pojarkov, 1961

Типовой вид – *Salpingothuramina tuberculata* (Lipina), 1950 (= *Parathuramina tuberculata* Lipina, 1950) из фаменских отложений Восточно-Европейской платформы.

Диагноз. Раковины свободные от сферической до неправильно-угловатой формы; устья многочисленные на концах трубчовидных устьевых возвышений, устьевые каналы цилиндрические. Стенка известковая тонкая микрогранулярная равномерной толщины, однородная.

Сравнение. От подрода *Pachysalpingothuramina* Sabirov, 2014 отличается тонкой стенкой равномерной толщины и образом жизни. Легкие тонкостенные раковины свидетельствуют о планктонном образе жизни, а толстостенные формы подрода *Pachysalpingothuramina* – о свободном бентосе.

Замечания. Трехслойная стенка у вида *Salpingothuramina lipinae* (Антропов), 1950 образовалась в результате роста одной раковины в другой и «средний светлый стекловатый слой», который выклинивается у устьев, это результат заполнения пространства между камерами кальцитом из вмещающей породы [9, с. 63]. Поэтому, если не принимать во внимание средний и наружный «слои», то эта форма очень близка по морфологическим признакам к виду *Parathuramina* (= *Spinosella*) *spinosa* Lipina, однако отличается тонкой стенкой равномерной толщины, что характерно для салпинготураммин.

Внешний неравномерный по толщине и непостоянный второй серый слой стенки у вида *Salpingothuramina gekkeri* (Антропов), 1950 имеет вторичное происхождение [9, с. 64]. Если не учитывать его, то данная форма приобретает вид тонкостенной формы с трубчатými возвышениями, а не сосочковидными, как описывал И.А.Антропов, имея в виду конические массивные возвышения, образующиеся за счет вторичного внешнего

светлого массивного «слоя», поэтому этот вид должен относиться к роду *Salpingothuramina*.

Таблица 1

Сравнение видов подрода *Salpingothuramina*

Вид	Форма раковины	Размеры раковины	Диаметр устьевых каналов	Высота устьевых возвыш.	Кол-во устьев в сеч.	Толщина стенки
<i>S. tuberculata</i> (Lipina)	шарообразная	0.07-0.20	0.007-0.009	0.02-0.05	мало (2-4)	0.007-0.01
<i>S. aperturata</i> (Pronina)		0.18-0.345	0.005-0.012	0.013-0.067	много (12-20)	0.005-0.009
<i>S. argensis</i> (Sabirov)	субшарообразная	0.21-0.38	0.006-0.009	0.04-0.095	мало (1-4)	0.003-0.008
<i>S. bykovaе</i> Pojarkov	сферическая	0.285-0.72	0.015-0.045	0.04-0.065	(3-8)	0.012-0.03
<i>S. crassitheca</i> (Antropov)	шарообразная	0.13-0.36	до 0.02	до 0.085	(4-6)	0.015-0.020
<i>S. ellipsoidalis</i> (Pojarkov)	овоидная	0.235-0.3	0.004-0.008	0.084	много (10-14)	0.008-0.03
<i>S. horrida</i> (Tchuvashov)	округло-многоугольная с пережимами	0.15-0.27	0.011-0.015	0.059-0.074	3-8	0.008-0.013
<i>S. gekkeri</i> (Antropov)	субшарообразная	0.080-0.235	0.006-0.008	до 0.07	4-5	0.004-0.008
<i>S. ? globulosa</i> (Zaslavskaya)	сферическая	0.19	0.017	0.051	6	0.017
<i>S. irregularis</i> (Pronina)	неправильно-округлая	0.510-0.525	0.015-0.022	0.075	много (15-17)	0,007
<i>S. irregulariformis</i> (Zadorozhnyi et Juferev)	угловато-округлая, с пережимами	0.4-0.35	0.009-0.012	0.029-0.050	4-7	0.008-0.012
<i>S. kazankaensis</i> (Pronina)	шарообразная	0.135-0.225	0.005-0.006	0.015-0.075	4-6	0.010-0.030
<i>S. khavsakiensis</i> (Sabirov)	эллипсоидальная, субшарообразная	0.262-0.38	очень тонкий, 0.003	0.03-0.08	4-7	0.006-0.009
<i>S. lipinae</i> (Antropov)	субшарообразная	0.21-0.30	до 0.01	до 0.12	4-5	до 0.01
<i>S. oblisa</i> (Petrova)	неправильно-эллипсоидальная	0.30-0.45	0.015-0.03	0.03-0.13	много (8-13)	0.01-0.015
<i>S. paradagmarae</i> (Lipina)	субшарообразная	0.25-0.288	0.008-0.01	0.015-0.026	много (до 12)	0.004-0.005
<i>S. praeaperturata</i> (Saltovskaja)	угловато-округлая	0.30-0.38	тонкий ?	—	много (до 25)	0.008-0.011
<i>S. radiosphaerica</i> (Bogush et Jufer.)	сферическая	0.08-0.13	тонкий	0.06-0.08	4-6	0.004-0.009
<i>S. uralica</i> (Petrova)		0.13-0.24	0.01-0.02	0.03-0.045	много (7-10)	0.004-0,01
<i>S. ? sergiensis</i> (Pronina)		0.157-0.165	тонкий	до 0.090	много	0.015

Вид *Parathuramina iniqua* (Pronina), 1970 по всем систематическим признакам и стратиграфическому положению является синонимом вида *S. bykovaе* (Pojarikov), 1961.

Для *Parathuramina sergiensis* (Pronina), 1960 автор вида указывает наличие темной тонкой мелкозернистой стенки, состоящей из 4-6 слоев (чередование темных и светлых слоев), производящей впечатление сложной дифференцированной, по ее мнению, из-за вторичных процессов. Поэтому данный вид условно отнесен к салпинготурамминам, учитывая наличие у него трубчочковидных устьевых возвышений и тонкой равномерной по толщине стенки. Вид *Parathuramina globulosa* Zaslavskaya, 1971 [10] условно отнесен к данному роду. Б.В.Поярков [6] включал его в состав рода *Parathuraminites*, основываясь на толщине стенки. Однако стенка у вида тонкая равномерная, к тому же имеются трубчочковидные устьевые возвышения. К сожалению, в [10] не указывается форма устьевых каналов, имеющая для паратурамминид важное систематическое значение, а приведенные изображения неудовлетворительного качества. Поэтому по ним нельзя судить о большинстве морфологических характеристик, но в любом случае, судя по наличию устьевых возвышений, указанных в описании вида, он не может быть отнесен к роду *Parathuraminites*.

Состав. (см. табл. 1).

Возраст и распространение. Средний ордовик–нижний карбон; Евразия и Северная Америка.

Подрод *Pachysalpingothuramina* Sabirov, 2014

Pachysalpingothuramina: Сабиров, 2014, с. 73.

Типовой вид – *Pachysalpingothuramina pachysphaerica* (Bogush et Juferev), 1962 (= *Parathuramina pachysphaerica* Bogush et Juferev, 1962) из слоев с *Quasiendothyra communis* и нижнего и среднего турне Центрального и Малого Каратау.

Диагноз. Раковины свободные от сферической до угловато-сферической формы; устья на концах трубчочковидных устьевых возвышений, устьевые каналы цилиндрические. Стенка известковая толстая микрогранулярная равномерной толщины, однородная.

Таблица 2

Сравнение видов подрода *Pachysalpingothuramina*

Вид	Форма раковины	Размеры раковины	Диаметр устьевых каналов	Высота устьевых возвыш.	Кол-во устьев в сеч.	Толщина стенки
<i>P. pachysphaerica</i> (Bogush et Juferev)	сферическая	0.15-0.20	0.006	0.02-0.07	мало и среднее кол-во (3-5)	0.014-0.040
<i>P. (?) bella</i> (Reitlinger)	округло-угловатая	0.17-0.27	тонкий	0.02-0.07	много (8-12)	0.024-0.079
<i>P. miclukhomaclayi</i> (Saltovskaja)		0.4-0.6		0.06-0.164	среднее кол-во (6-8)	0.027-0.041
<i>P. regularis</i> (Tchuvashov)	сферическая	0.25-0.50	—	0.02-0.085	мало и среднее кол-во (3-8)	0.025-0.055
<i>P. petchorica</i> (Reitlinger)		0.27-0.33	0.020-0.034	0.025-0.036	мало (4)	0.025-0.03

С р а в н е н и е . См. выше подрод *Salpingothuramina* Поярков, 1961.

З а м е ч а н и я . (см. [11, с. 73]). С о с т а в . (см. табл. 2)

В о з р а с т и р а с п р о с т р а н е н и е . Верхний девон-нижний карбон; Печорский бассейн, Урал, Китай, Каратау и Таласский Алатау, Таджикистан.

Филогения рода *Salpingothuramina*. Предковой формой салпинготураммин, по-видимому, является вид *S. sergiensis* (Pronina), появившийся в среднем ордовике Урало-Тяньшанского бассейна и прослеживаемый до конца раннего силура (см. рис.). На рубеже силура и девона в Тянь-Шаньском бассейне от него произошли виды *S. argensis* (Sabirov), *S. khavsakiensis* (Sabirov), и *S. praeaperturata* (Saltovskaja), отличающиеся друг от друга количеством и длиной трубчатых устьевых возвышений, толщиной стенки, а также размерами и формой раковины. Начиная со среднего девона количество видов, отличающихся друг от друга приведенными в табл. 1 и 2 характеристиками, резко возрастает.

Последние тонкостенные салпинготураммины известны из визейских отложений. Во франском веке от вида *S. bykovaе* Rojarkov, имеющего, в отличие от остальных салпинготураммин, относительно более толстую стенку, видимо, начинает развиваться новая ветвь толстостенных форм, отнесенных к подроду *Pachysalpingothuramina*, развитие которых прослеживается до визейского века нижнего карбона включительно.

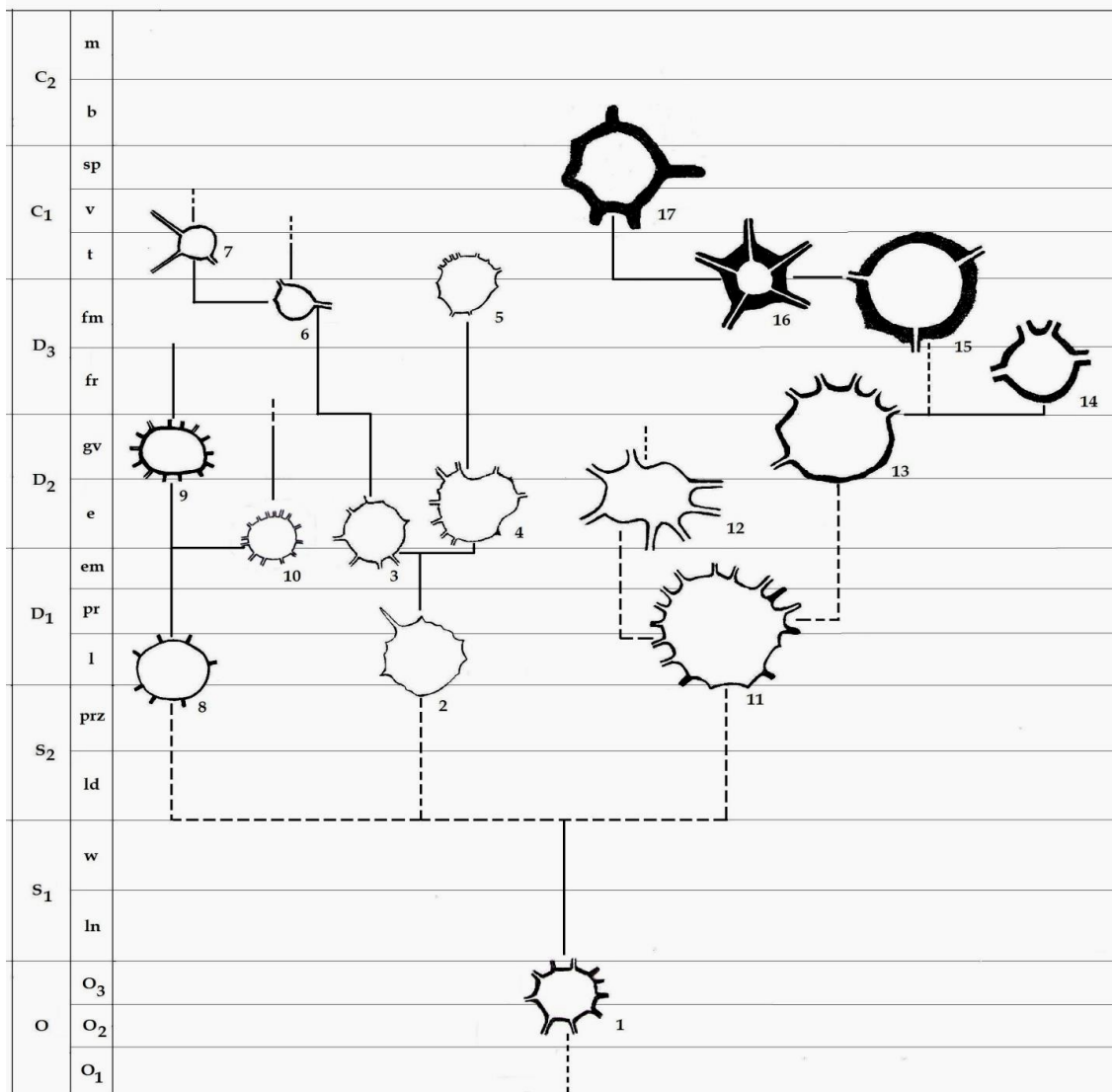


Рис. Предполагаемые филогенетические связи между видами рода *Salpingothuramina*
 1 – *Salpingothuramina sergiensis* (Pronina); 2 – *S. argensis* (Sabirov); 3 – *S. crassithec*a (Antropov);
 4 – *S. irregularis* (Pronina); 5 – *S. paradagmarae* (Lipina); 6 – *S. tuberculata* (Lipina); 7 – *S. radio-*
sphaerica (Bogush et Juferev); 8 – *S. khavsakiensis* (Sabirov); 9 – *S. ellipsoidal*is (Pojar-
 kov); 10 – *S. ap-*
erturata (Pronina); 11 – *S. praeaperturata* (Saltovskaja); 12 – *S. oblisa* (Petrova); 13 – *S. bykova*e Pojar-
 kov; 14 – *Pachysalpingothuramina petchorica* (Reitlinger); 15 – *P. regularis* (Tchuvashov); 16 – *P.*
pachysphaerica (Bogush et Juferev); 17 – *P. miklukhomaclayi* (Saltovskaja).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сулейманов И.С. Новые виды мелких фораминифер из турнейского яруса Ишимбаевского нефтеносного района. – ДАН СССР, 1945, т. 48, № 2, с. 130-134.
2. Липина О.А. Фораминиферы турнейского яруса и верхней части девона Волго-Уральской области и западного склона Среднего Урала. – Тр. ИГН АН СССР, 1955, вып. 163, 96 с.
3. Юферев О.В. О систематике паратураммин. – Вопр. микропалеонтологии, 1961, вып. 5, с. 121-127.

4. Пуркин М.М., Поярков Б.В., Рожанец В.М. Стратиграфия и новые виды фораминифер турнейских отложений хребта Борколдой (Тянь-Шань). – Изв. АН КиргССР, сер естеств. и техн. наук, 1961, т. III, вып. 4, с. 15-37.
5. Поярков Б.В. Стратиграфия и фораминиферы девонских отложений Тянь-Шаня. – Фрунзе: Илим, 1969, 169 с.
6. Поярков Б.В. Развитие и распространение девонских фораминифер. – М.: Наука, 1979, 172 с.
7. Задорожный В.М., Юферев О.В. Foraminifera. – Палеозой юго-востока Западно-Сибирской плиты. – Новосибирск: Наука, 1984, с. 70-113.
8. Задорожный В.М. Фораминиферы и биостратиграфия девона Западно-Сибирской плиты и ее складчатого обрамления. – Новосибирск: Наука, 1987, 126 с.
9. Сабиров А.А. К классификации паратураммин. – Изв. АН ТаджССР. Отд. физ.-мат., хим. и геол. наук, 1982, № 3 (85), с. 62-67.
10. Заславская Н.М. Первые находки живетских фораминифер северо-восточной части Омолонского массива. – Геология и геофизика, СО АН СССР, 1971, с. 30-36.
11. Сабиров А.А. Новые известковые палеозойские примитивные фораминиферы. – Геология и вопросы сейсмичности территории Таджикистана (Мат-лы научн. конф., посвящ. 80-летию М.Р.Джалилова). Душанбе: Балогат, 2014, с. 72-80.

А.А.СОБИРОВ

ТАСНИФОТ ВА ТАҲАВВУЛОТИ САЛПИНГОТУРАММИНАҲО (ФОРАМИНИФЕРАҲОИ ОҲАКИ)

Институти геология, сохтмони ба заминчунбии тобовар ва сейсмологияи Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар асоси таҳлили адабиёти нашрсудаи ҷаҳонӣ ва маълумотҳои муаллиф таснифоти нави фораминифераҳои зоти *Salpingothuramina* қор қарда шуда, тақлиф шудааст ва нақшаи таҳаввулоти онҳо сохта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: фораминифераҳо, таснифот, таҳаввулот, палеозой.

A.A.SABIROV

THE TAXONOMY AND PHYLOGENESIS OF THE SALPINGOTHURAMMINA (CALCAREOUS FORAMINIFERA)

Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

In the article on the basis of analysis of the word literature and author's research the taxonomy of the genus *Salpingothuramina* has been worked out and its phylogenetic diagram constructed.

Key words: foraminifera, taxonomy, phylogenesis, Paleozoic.

Редакция и корректура – Н.Г.Сапожников

Сдано в набор 18.07.2016 г. Подписано в печать 28.07.2016 г.
Печать офсетная. Формат 70×100 1/16. Гарнитура Times. Усл. печ. л.8. Заказ № ____.
Тираж 300 экз.

*Адрес редколлегии: 734025, Душанбе, пр.Рудаки, 33, каб. 47.
Тел.:2-21-62-64. E-mail: danrt@mail.ru
Издательство «Дониш»: 734029, Душанбе, ул.Айни, 121, корп.2.*
