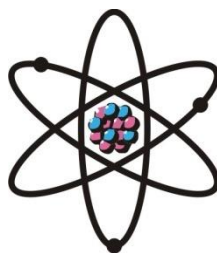


ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Журнал основан
в январе 1952 г.



№ 2 (167)
2017 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Х.Х.Муминов – главный редактор, академик, доктор физико-математических наук, профессор;
Г.И.Кохирова – зам.главного редактора, член-корреспондент, доктор физико-математических наук;
Н.Г.Сапожников – ответственный секретарь; **Х.М.Ахмедов** – академик, доктор химических наук;
П.Б.Бабаджанов – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.В.Кобулиев** – член-корреспондент, доктор технических наук, профессор; **Р.М.Марупов** – академик, доктор технических наук, профессор; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **С.О.Одинаев** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Ф.Рахими** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Д.Усманов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

М.С.Саидусайнов. K -функционалы и точные значения n -поперечников в пространстве Бергмана 7

К.Тухлиев, К.Н.Муродов. Точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $L_{2,\nu}$ и значения поперечников некоторых классов функций..... 18

М.Азизов, А.Мухлис. Информационная сложность приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма с гармоническими коэффициентами..... 32

ИНФОРМАТИКА

З.Д.Усманов, Г.М.Довудов. О статистическом портрете таджикского предложения 42

Ш.Н.Ашурова, А.А.Косимов. Оценка эффективности использования словесных униграмм при идентификации текста 49

АСТРОНОМИЯ

Г.И.Кохирова, С.Х.Абдуллоев, У.Х.Хамроев. Потенциально опасный астероид 2004VL86 во время сближения с Землей 27 января 2015 г. 55

ФИЗИКА

Х.Х.Муминов, А.Т.Максудов, Т.А.Тошов. К теории магнитоупругих взаимодействий в ферромагнетиках с высокими значениями спина при учете обменной анизотропии 62

Т.Х.Салихов, А.Махмалатиф, Ю.П.Ходжаев. Особенности генерации основной гармоники нелинейного фотоакустического отклика в оптически неоднородных двухслойных образцах 74

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

К.А.Корзун, А.А.Ковалевский, Д.А.Котов, С.В.Гранько. Состав и электрофизические параметры графеноподобного материала, получаемого при преобразовании угля 88

Ш.Б.Назаров, А.М.Баротов, А.С.Курбонов, Ж.А.Мисратов, У.Мирсаидов. Изучение особенности разложения бор- и алюмосиликатных руд спеканием с CaCl_2 95

ГЕОХИМИЯ

Дж.Н.Фозилов, Б.А.Алидодов. Элементы-примеси в углях каменноугольного месторождения Фан-Ягноб 101

ГЕОЛОГИЯ

А.Т.Махмадалиев, А.Р.Файзиев. Геолого-минералогические особенности стратиформного месторождения Бальджуан (Афгано-Таджикская депрессия) 111

СТРАТИГРАФИЯ

А.А.Сабиров. Границы и биостратиграфия фаменского яруса в Таджикистане по фораминиферам 119

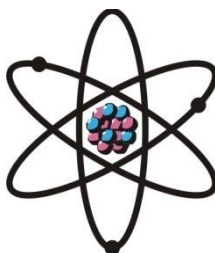
ПАМЯТИ УЧЕНОГО

Музаффар Нусратуллаевич Максумов (к 80-летию со дня рождения) 128

К 80-летию со дня рождения Ф.Х.Хакимова (1937-2017) 131

ШҮЪБАИ
ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,
ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА

Маҷалла аз моҳи
январӣ соли 1952
нашр мешавад



№ 2 (167)
с. 2017

ҲАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:

Ҳ.Ҳ.Муминов – сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Кохирова Г.И.** – муовини сармуҳаррир, узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Г.Сапожников** – котиби масъул; **Ҳ.М.Аҳмедов** – академик, доктори илми химия; **П.Б.Бобочонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **И.Н.Ғаниев** – академик, доктори илми химия, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.В.Кобулиев** – узви вобаста, доктори илмҳои техникӣ, профессор; **Р.М.Марупов** – академик, доктори илмҳои техникӣ, профессор; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор; **С.Х.Неъматуллоев** – академик, доктори илмҳои техникӣ; **С.О.Одинаев** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Ф.Раҳимӣ** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҳ.Раҳмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Рачабов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҷ.Усмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **А.Р.Ғайзиев** – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва минералогия, профессор; **Ҷ.Х.Холиқов** – академик, доктори илми химия, профессор.

МУНДАРИҶА

МАТЕМАТИКА

М.С.Саидусайнов. \mathcal{K} -функционал ва қимати аниқи n -кӯтрҳо дар фазои Бергман.....	7
Қ.Тухлиев, К.Н.Муродов. Сарҳади аниқи болоии наздиққунии бехтарини суммаҳои Фурйе-Бессел дар фазои $L_{2,\nu}$ ва қимати кӯтрҳои баъзе синфҳои функсияҳо.....	18
М.Азизов, А.Мухлис. Душвории итилоотии ҳалли тақрибии муодилаҳои интегралӣ Фредгоlm бо коэффициентҳои гармоникӣ	32

ИНФОРМАТИКА

- З.Ч.Усмонов, Г.М.Довудов.** Оид ба хусусиятҳои оморӣ ҷумлаҳои забони тоҷикӣ **42**
- Ш.Н.Ашурова, А.А.Қосимов.** Баҳоидиҳои самарабахшии истифодаи униграммаҳои калимаҳо дар монандкунии матн **49**

АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Қохирова, С.Х.Абдуллоев, У.Х.Ҳамроев.** Астероиди эҳтимолан-хатаровари (357439) 2004BL86 ҳангоми наздикшавӣ ба Замин рӯзи 27 январи соли 2015..... **55**

ФИЗИКА

- Ҳ.Ҳ.Муминов, А.Т.Максудов, Т.А.Тошов.** Оид ба назарияи таъсири мутақобилаи магнеточандирӣ дар ферромагнетикҳои бо қимати баланди спин дар назардошти ғайриҳамсонгардии мубодилавӣ **62**
- Т.Ҳ.Солиҳов, А.Маҳмалатиф, Ю.П.Ҳочаев.** Хусусиятҳои ангиши гармоникаи асосии сигнали ғайрихатии фотоакустикии намунаҳои дуқабатаи оптикӣ ғайрирякҷинса **74**

ХИМИЯИ ҒАЙРИОРГАНИКӢ

- К.А.Корзун, А.А.Ковалевский, Д.А.Котов, С.В.Гранко.** Таркиб ва параметрҳои электрофизикии маводи графенмонанд, ки бо усули табдилдодани ангишт ҳосил карда шудааст **88**
- Ш.Б.Назаров, А.М.Баротов, А.С.Курбонов, Ҷ.А.Мисратов, У.Мирсаидов.** Омӯзиши асосҳои таҷзияи маъданҳои бор- ва алюминийсиликатӣ ҳангоми пухтан бо CaCl_2 **95**

ГЕОХИМИЯ

- Ҷ.Н.Фозилов, Б.А.Алидодов.** Элементҳои ғашӣ кони ангишти Фон-Яғноб..... **101**

ГЕОЛОГИЯ

- А.Т.Маҳмадалиев, А.Р.Файзиев.** Хусусиятҳои геологӣ минералогӣ кони стратиформии балҷувон (пастхамии Афғону Тоҷик)..... **111**

СТРАТИГРАФИЯ

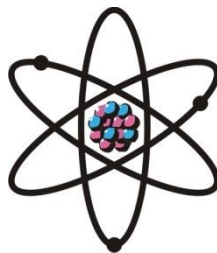
- А.А.Собиров.** Сарҳадҳо ва биостратиграфияи яруси фамени Тоҷикистон дар асоси фораминифераҳо **119**

ЁДБУДИ ОЛИМ

- М.Н.Максумов (1937-2013)** **128**
- Ф.Х.Ҳақимова (1937-2017)**..... **131**

**DEPARTMENT OF
PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES**

The journal was established
in January 1952



№ 2 (167)
2017

EDITORIAL BOARD

Prof. **Kh.Kh.Muminov**, Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; **G.I.Kokhirova**, Doctor of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **N.G.Sapozhnikov**, Secretary; **Kh.M.Akhmedov**, Doctor of Chemistry; Prof. **P.B.Babadzhanov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **A.R.Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **M.I.Iolov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **I.N.Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **D.Kh.Khalikov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Z.V.Kobuliev**, Doctor of Engineering; Prof. **R.M.Marupov**, Doctor of Engineering; Prof. **U.M.Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; **S.Kh.Negmatullaev**, Doctor of Engineering; Prof. **S.O.Odinaev**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **N.R.Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **F.Rakhimi**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.Kh.Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.D.Usmanov**, Doctor of Physical and Mathematical.

CONTENTS

MATHEMATICS

- M.S.Saidusaynov**. \mathcal{K} -functional and the values of n -widths in Bergman space 7
- K.Tukhliev, K.N.Murodov**. An exact upper bounds of the best approximation by Fourier-Bessel sum in the space $L_{2,\nu}$ and the values of n -widths of some classes of functions..... 18
- M.Azizov, A.Muhlis**. Information complexity of approximate solution of integral Fredholm's equations with harmonic coefficients 32

INFORMATICS

- Z.D.Usmanov, G.M.Dovudov**. On a statistical portrait of tajik sentences 42
- Sh.N.Ashurova, A.A.Kosimov**. Efficiency evaluation of using words unigramm for a text identification..... 49

ASTRONOMY

G.I.Kokhirova, S.Kh.Abdulloev, U.Kh.Khamroev. Potentially hazardous asteroid (357439) 2004BL86 during close approach to the Earth on January 27, 2015 **55**

PHYSICS

Kh.Kh.Muminov, A.T.Maksudov, T.A.Toshov. To the theory of magnetoelectric interactions in ferromagnetics with high values of spintaking into account exchange anisotropy **62**

T.Kh.Salikhov, A.Mahmalatif, Yu.P.Khodjaev. Features of generation of the fundamental harmonic of nonlinear photoacoustic response in optically inhomogeneous two-layer samples..... **74**

INORGANIC CHEMISTRY

K.A.Korzun, A.A.Kovalevsky, D.A.Kotov, S.V.Granko. Composition and electrophysical parameters of graphene-like material produced under coal transformations **88**

Sh.B.Nazarov, A.M.Barotov, A.S.Kurbonov, Zh.A.Misratov, U.Mirsaidov. Study of the basis of decomposition of boron- and aluminum silicate ores by sintering with CaCl₂..... **95**

GEOCHEMISTRY

Dj.N.Fozilov, B.A.Alidodov. Elements of the impurities in coal coalfield background..... **101**

GEOLOGY

A.T.Mahmadaliev, A.R.Fayziev. Geological and mineralogical features of the Baljuan strateform deposit (Afgan-Tajik depression) **111**

STRATIGRAPHY

A.A.Sabirov. The boundaries and biostratigraphy of the famennian stage by foraminifers in Tajikistan **119**

MEMORY OF SCIENTIST

M.N.Maksumov (1937-2013) **128**

F.Kh.Khakimova (1937-2017)..... **131**

УДК 517.5

М.С.САИДУСАЙНОВ

**K-ФУНКЦИОНАЛЫ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ n -ПОПЕРЕЧНИКОВ
В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА**

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 28.11.2016 г.

В работе рассматривается задача среднеквадратичного приближения функций комплексного переменного, регулярных в ограниченной области комплексной плоскости, рядами Фурье по ортогональной в этой области системе функций. В случае, когда область является единичным кругом, получены точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональной системе $\{z^k\}$ ($k=0,1,2,\dots$) на классе функций, задаваемых K -функционалом от производной заданного порядка. Вычислены точные значения ряда поперечников на указанном классе функций.

Ключевые слова: обобщенный модуль непрерывности, неравенство Джексона-Стечкина, K -функционал, n -поперечники.

1. Будем рассматривать вопросы среднеквадратичных приближений суммами Фурье комплексных функций f , регулярных в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, принадлежащих пространству $L_2 := L_2(\mathcal{D})$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2(\mathcal{D})} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ – элемент площади.

Теория среднеквадратичного приближения по области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функций f тесно связана с теорией ортогональных по области функций. Приведем основные понятия,

Адрес для корреспонденции: Саидусайнов Муқим Саидусайнович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: stujim@gmail.com

связанные с этой теорией. Последовательность функций $\{\varphi_k(z)\}(k=0,1,2,\dots)$ назовем ортогональной по области \mathcal{D} системой комплексных функций, если

$$\frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \varphi_k(z) \overline{\varphi_l(z)} d\sigma = 0, \text{ при } k \neq l.$$

Такая система функций называется ортонормированной системой, если

$$\frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} \varphi_k(z) \overline{\varphi_l(z)} d\sigma = \delta_{k,l},$$

где $\delta_{k,l} = 0$ при $k \neq l$ и $\delta_{k,k} = 1, k \in \mathbb{N}$. Если $f \in L_2$, то числа

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} f(z) \overline{\varphi_k(z)} d\sigma \quad (1)$$

называются коэффициентами Фурье функции f по отношению к ортонормированной системе $\{\varphi_k(z)\}(k=0,1,2,\dots)$. Функции f сопоставляется ее ряд Фурье по указанной ортогональной системе

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z). \quad (2)$$

Пусть

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f) \varphi_k(z)$$

– частичная сумма n -го порядка ряда (2). Составим линейную комбинацию первых из n функций системами $\{\varphi_k(z)\}$:

$$p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \varphi_k(z),$$

которую назовём обобщённым полиномом, где $d_k \in \mathbb{C}$ – произвольные комплексные коэффициенты. Хорошо известно, что (см., например [1], с.263):

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &= \inf \{ \|f - p_{n-1}\|; d_k \in \mathbb{C} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $a_k(f)$ – коэффициенты Фурье функции f , определённые равенством (1).

2. В случае приближения в среднем функций комплексной переменной, регулярной в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональной в \mathcal{D} системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина изучалась в [2, 3]. Напомним, что под неравенствами Джексона-Стечкина понимают соотношения, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством в заданном нормированном пространстве оценивается через модуль гладкости самой функции или некоторой её производной. В рассматриваемом нами случае воспользуемся подходом, предложенным в работах [2, 4-6]. Пусть

$$T(\xi, \eta; h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) \overline{\varphi_k(\eta)} h^k, \quad (4)$$

где $h \in (0, 1)$, $(\xi, \eta) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, а равенство (4) понимается в смысле сходимости в $L_2(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$. В пространстве L_2 рассмотрим оператор

$$F_h f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} f(\zeta) T(z, \zeta; 1-h) d\sigma, \quad (5)$$

который будем называть оператором обобщенного сдвига. Непосредственной проверкой можно убедиться, что оператор (5) обладает следующими свойствами (см., например, [2]):

- 1) $F_h(f_1 + f_2) = F_h(f_1) + F_h(f_2)$;
- 2) $F_h(\alpha f) = \alpha F_h(f)$, $\alpha \in \mathbb{C}$;
- 3) $\|F_h(f)\| \leq \|f\|$;
- 4) $F_h \varphi_k(z) = (1-h)^k \varphi_k(z)$;
- 5) $\|F_h(f) - f\| \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0+$.

Учитывая соотношение (4), оператор (5) представим в следующем виде

$$F_h f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{(\mathcal{D})} f(\zeta) T(z, \zeta; 1-h) d\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z) (1-h)^k. \quad (6)$$

Следуя работе [2], для функции $f \in L_2$ определим конечные разности первого и высших порядков следующим образом

$$\Delta_h^1 f(z) = F_h f(z) - f(z) = (F_h - \mathbb{I}) f(z),$$

$$\Delta_h^m f(z) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(z)) = (F_h - \mathbb{I})^m f(z) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(z),$$

где $F_h^0 f(z) = \mathbb{I}f(z) = f(z)$, $F_h^k f(z) = F_h(F_h^{k-1} f(z))$, $k = 1, 2, \dots, m$; $m \in \mathbb{N}$, \mathbb{I} – единичный оператор в пространстве L_2 . Из формул (2) и (6) в смысле сходимости в $L_2(\mathcal{D})$ получаем

$$\Delta_h^1 f(z) = F_h f(z) - f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z) ((1-h)^k - 1).$$

Методом математической индукции при любом $m \in \mathbb{N}$ легко доказать формулу

$$\Delta_h^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^m [1 - (1-h)^k]^m a_k(f) \varphi_k(z), \quad h \in (0, 1).$$

Отсюда, применяя равенство Парсеваля, в силу ортонормированности системы $\{\varphi_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) имеем

$$\|\Delta_h^m f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} [1 - (1-h)^k]^{2m} |a_k(f)|^2. \quad (7)$$

Величину

$$\Omega_m(f; t)_2 = \sup \{ \|\Delta_h^m f\| : 0 < h \leq t \} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [1 - (1-t)^k]^{2m} |a_k(f)|^2 \right\}^{1/2} \quad (8)$$

будем называть обобщенным модулем непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$.

Рассмотрим более подробно случай, когда \mathcal{D} есть единичный круг $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Очевидно, что в этом случае система функций $\varphi_k(z) = z^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) является ортогональной в круге U :

$$\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} \varphi_k(z) \overline{\varphi_l(z)} d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{k+l+1} e^{i(k-l)t} dr dt = 0, \quad k \neq l.$$

Но эта система не является ортонормированной, поскольку

$$\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |\varphi_k(z)|^2 d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{2k+1} dr dt = \frac{1}{k+1}.$$

Следовательно, система функций $\varphi_k^*(z) = \sqrt{k+1} z^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) является ортонормированной системой. Через $\mathcal{A}(U)$ обозначим множество функций f , аналитических в U . Ряд Маклорена этой функции имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad (9)$$

где $c_k(f)$ – коэффициенты Маклорена функции f . Заметим, что

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}, \quad E_{n-1}^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}. \quad (10)$$

В монографии [1] доказано, что ряд Фурье функции f по ортонормированной системе $\varphi_k^*(z) = \sqrt{k+1}z^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) совпадает с рядом (9) функций $f \in \mathcal{A}(U)$, то есть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad (11)$$

а потому ряд (11) можно сколько угодно раз почленно продифференцировать и по теореме Вейерштрасса (7, с.107] для произвольного $r \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k(f) k(k-1) \cdots (k-r+1) z^{k-r} := \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \quad (12)$$

где ради краткости обозначено

$$\alpha_{k,r} := k(k-1) \cdots (k-r+1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad k \geq r.$$

Из свойства 4 оператора $F_h(f)$ следует, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq r$ и $h \in (0, 1)$ имеет место равенство

$$F_h(z^{k-r}) = (1-h)^{k-r} z^{k-r}.$$

Всюду далее через $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}(U)$ ($L_2^{(0)} := L_2(U)$) обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых $f^{(r)} \in L_2$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $f^{(0)} \equiv f$).

3. В этом пункте докажем некоторые точные неравенства, связывающие величину наилучшего приближения $E_{n-1}(f)$ функций, принадлежащих классу $L_2^{(r)}$, посредством \mathcal{K} -функционала Петре. Определение и некоторые свойства \mathcal{K} -функционала Петре приведены, например, в [8]. В [9, 10] доказаны прямые и обратные теоремы теории приближения посредством \mathcal{K} -функционалов. Определим \mathcal{K} -функционал, построенный по пространствам L_2 и $L_2^{(m)}$:

$$\mathcal{K}_m(f, t^m)_2 := \mathcal{K}(f, t^m; L_2; L_2^{(m)}) = \inf \left\{ \|f - g\|_2 + t^m \cdot \|g^{(m)}\|_2 : g \in L_2^{(m)} \right\}, \quad (13)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $0 < t \leq 1$. Отметим, что в [9] также доказана слабая эквивалентность \mathcal{K} -функционала (13) специальным обобщенным модулем непрерывности m -го порядка.

Теорема 1. Пусть $n, m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ -- произвольные числа, такие, что $n \geq r + m$.

Тогда справедливо следующее равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} = 1. \quad (14)$$

Доказательство. Используя равенство (12) легко установить, что

$$E_{n-r-1}^2(f^{(r)}) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}, \quad r \in \mathbb{Z}_+. \quad (15)$$

Учитывая равенство (15), получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k-r+1}{(k+1)\alpha_{k,r}^2} \cdot \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \leq \\ &\leq \max_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} \left\{ \frac{k-r+1}{(k+1)\alpha_{k,r}^2} \right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} = \\ &= \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot E_{n-r-1}^2(f^{(r)}). \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ запишем

$$E_{n-1}(f) \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} E_{n-r-1}(f^{(r)}) \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \|f^{(r)} - S_{n-r-1}(g)\|, \quad (17)$$

где $S_{n-r-1}(g)$ есть частная сумма $(n-r)$ -го порядка ряда Фурье произвольной функции $g \in L_2^{(m)}$. В силу равенства (2) и неравенства (16) получаем

$$\begin{aligned} \|g - S_{n-r-1}(g)\| &= E_{n-r-1}(g) \leq \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} E_{n-r-m-1}(g^{(m)}) \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \|g^{(m)}\|. \end{aligned} \quad (18)$$

Из неравенств (17) и (18) сразу следует, что

$$E_{n-1}(f) \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left\{ \|f^{(r)} - g\| + \|g - S_{n-r-1}(g)\| \right\} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left\{ \|f^{(r)} - g\| + \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \|g^{(m)}\| \right\}. \quad (19)$$

Теперь заметим, что левая часть неравенства (19) не зависит от функции $g \in L_2^{(m)}$, а потому, переходя в правой части неравенства (19) к нижней грани по всем функциям $g \in L_2^{(m)}$ и используя определения \mathcal{K} -функционала (13), получаем

$$E_{n-1}(f) \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right).$$

Отсюда следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} \leq 1. \quad (20)$$

С целью получения оценки снизу экстремальной характеристики, записанной в левой части (20), в равенстве (13) полагаем $f(z) := p_n(z)$, где $p_n(z)$ – произвольный алгебраический комплексный полином из \mathcal{P}_n . Поскольку функция $g(z) \equiv 0$ принадлежит классу $L_2^{(m)}$, то из (13), в частности, следует оценка сверху

$$\mathcal{K}_m(p_n; t^m)_2 \leq \|p_n\|.$$

Так как функция $g(z) := p_n(z)$ также принадлежит классу $L_2^{(m)}$, то из (13) также следует оценка

$$\mathcal{K}_m(p_n; t^m)_2 \leq t^m \|p_n^{(m)}\|.$$

Таким образом, для произвольного элемента $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ из двух последних соотношений вытекает неравенство

$$\mathcal{K}_m(p_n; t^m)_2 \leq \min \left\{ \|p_n\|; t^m \|p_n^{(m)}\| \right\}. \quad (21)$$

Рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n$. Поскольку

$$f_0^{(r+m)} = n(n-1) \cdots (n-r+1) \cdots (n-r-m+1) z^{n-r-m} = \alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m} z^{n-r-m},$$

то в силу неравенства (21) будем иметь

$$\mathcal{K} \left(f_0^{(r)}; \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right) \leq \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \|f_0^{(r+m)}\| =$$

$$= \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \cdot \frac{\alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m}}{\sqrt{n-r-m+1}} = \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}.$$

Используя полученное неравенство и второе из равенств (10), имеем:

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \in \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}_m \left(f^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} \geq \\ & \geq \frac{\sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot \alpha_{n,r} E_{n-1}(f_0)}{\mathcal{K}_m \left(f_0^{(r)}, \sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right)} \geq 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Требуемое равенство (14) получаем из сопоставления оценки сверху (20) с оценкой снизу (22), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

4. Приводим ряд определений и обозначений, которыми далее будем пользоваться. Пусть S – единичный шар в пространстве L_2 ; $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n ; $\mathcal{L}: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – линейный непрерывный оператор; $\mathcal{L}^\perp: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования; \mathfrak{M} – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 . Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \|f - g\| : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\| : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \sup \{ \|f\|_{2,\gamma} : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\| : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекторным* n -*поперечниками* подмножества \mathfrak{M} в пространстве L_2 . Перечисленные выше n -поперечники монотонны по n и между ними в гильбертовом пространстве L_2 выполняются соотношения (см., например, [11, 12]):

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \quad (23)$$

Через $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Psi)$ ($r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}$) обозначим класс функций, состоящих из элементов $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\mathcal{K}_m(f^{(r)}, t^m) \leq \Psi(t^m), 0 < t < 1.$$

В определении введенного класса Ψ является некоторой мажорантой, которая не убывает и неотрицательна при $0 < t < 1$ и не возрастает при $\frac{\Psi(t)}{t}$, и $L_2^{(0)} \equiv L_2$, а $W_2^{(0)}(\mathcal{K}_m, \Psi) = W_2(\mathcal{K}_m, \Psi)$. Для произвольного подмножества $\mathfrak{M} \subset L_2$ положим

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} := \sup \{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Теорема 2. Пусть Ψ – мажоранта, задающая класс $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Psi)$, где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого натурального числа $n \geq m+r$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Psi), L_2) &= E_{n-1}(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Psi)) = \\ &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Psi \left(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-r,m}} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.-Л.: Наука, 1964, 440 с.
2. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$. – ЖВМ и МФ, 2010, т.50, №6, с.999-1004.
3. Shabozov M.Sh., Saidusaynov M.S. Mean-square approximation of complex variable functions by Fourier series in the weighted Bergman space. – International J. of Advanced Research in Mathematics, 2017, v. 9, pp.34-43.
4. Тухлиев К. Среднеквадратические приближение функций рядами Фурье-Бесселя и значения поперечников некоторых классов функций. – Чебышевский сб., 2016, т.17., №4, с.141-156.
5. Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита и поперечники функциональных классов – Матем. заметки, 2014, т.95, 5, с.666-684.

6. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона-Стечкина с обобщенными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций. – Труды Института математики и механики УрО РАН, 2015, т.21, 4, с.292-308.
7. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984, 320 с.
8. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980.
9. Ditzian Z., Totik V. K-functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$. – J. Approx. Theory, 1986, v.46, iss.1, pp. 38-41.
10. Ditzian Z., Totik V. Moduli of Smoothness. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo, 1987, 225 p.
11. Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo, 1985, 252 p.
12. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976, 324 с.

М.С.САИДУСАЙНОВ

\mathcal{K} -ФУНКЦИОНАЛ ВА ҚИМАТИ АНИҚИ n -ҚУТРҲО ДАР ФАЗОИ БЕРГМАН

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола, масъалаи наздиккунии миёнакардашудаи функсия тағйирёбандаи комплексӣ, ки дар соҳаи маҳдуди ҳамвории комплексӣ регулярий мебошад, бо қатори Фурйеи дар соҳаи мазкур ортогоналӣ, омӯхта шудааст. Дар ҳолате, ки соҳаи мазкур давраи воҳидӣ аст, баҳои аниқи суръати наздикшавии қатори Фурйе бо системаи ортогоналии $\{z^k\} (k = 0, 1, 2, \dots)$ барои синфи функсияҳое, ки ба воситаи \mathcal{K} -функсионали ҳосилаи тартиби додашуда муайян карда шудаанд, ёфта шудааст. Барои синфи додашуда қимати аниқи як қатор қутрҳо ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: модули бефосилагии умумикардашуда, нобаробарии Чексон-Стечкин, \mathcal{K} -функсионал, n -қутрҳо.

M.S.SAIDUSAYNOV

\mathcal{K} -FUNCTIONAL AND THE VALUES OF n -WIDTHS IN BERGMAN SPACE

Tajik National University

In this paper the problem of mean-square approximation of complex variables functions which are regular in bounded domain of complex plane by the orthogonal in the domain of system of functions Fourier series is considered. When the domain is a unit disk, accurate estimates of convergence rate of Fourier series by orthogonal system $\{z^k\}$ ($k=0,1,2,\dots$) on class of functions given by \mathcal{K} -functional of derivatives by defined order were obtained. An exact values of some widths for specified class of functions were calculated.

Key words: generalized module of continuity, Jackson-Stechkin inequality, \mathcal{K} -functional, n -widths.

УДК 517.5

К.ТУХЛИЕВ, К.Н.МУРОДОВ

**ТОЧНЫЕ ВЕРХНИЕ ГРАНИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ СУММАМИ
ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_{2,\nu}$ И ЗНАЧЕНИЯ
ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ**

Худжандский государственный университет им. Б.Г.Гафурова

Поступила в редакцию 14.10.2015 г.

В гильбертовом пространстве $L_{2,\nu} := L_2([0,1], x^{2\nu+1})$, $\nu > -1/2$ с весом $x^{2\nu+1}$ найдены точные неравенства типа Джексона-Стечкина, связывающие величину наилучшего приближения функции $f(x)$ частичными суммами ряда Фурье-Бесселя с усреднённым положительным весом обобщённого модуля непрерывности t -го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^t f; t)$, где \mathcal{D} – некоторый дифференциальный оператор второго порядка. Для классов функций, определяемых указанными модулями непрерывности, вычислены точные значения различных n -поперечников в пространстве $L_{2,\nu}$.

Ключевые слова: обобщенный модуль непрерывности, наилучшее приближение, ряд Фурье-Бесселя, n -поперечники.

1. Приведём определения и вспомогательные факты нужные нам в дальнейшем.

Всюду далее \mathbb{R} – множество вещественных чисел, \mathbb{R}_+ – множество положительных чисел, \mathbb{N} – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть $L_{2,\nu} := L_2(x^{2\nu+1}, [0,1])$ – пространство суммируемых с квадратом функций f , интегрируемых с весом $x^{2\nu+1}$, $\nu > -1/2$ на отрезке $[0,1]$ и конечной нормой

Адрес для корреспонденции: Тухлиев Камаридин, Муродов Каримджон Насимович. 735700, Республика Таджикистан, г.Худжанд, ул. Мавлонбекова, 1, Худжандский государственный университет. E-mail: kataridin.t54@mail.ru ; kn-murodov@mail.ru

$$\|f\|_{2,\nu} := \|f\|_{L_{2,\nu}} = \left(\int_0^1 x^{2\nu+1} f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

В [1, с.355] доказано, что система функций

$$j_\nu(\lambda_n x) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) \mathcal{J}_\nu(\lambda_n x) \cdot (\lambda_n x)^{-\nu}, \quad n=1,2,\dots, \quad (1)$$

где $\mathcal{J}_\nu(u)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν , а $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ – занумерованные в порядке возрастания положительные нули уравнения $\mathcal{J}_\nu(u) = 0$, является полной ортогональной системой в пространстве $L_{2,\nu}$. При этом произвольная функция $f \in L_{2,\nu}$ разлагается в ряд Фурье-Бесселя

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x), \quad (2)$$

где

$$b_k^2(f) = \frac{1}{\|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2} \int_0^1 x^{2\nu+1} f(x) j_\nu(\lambda_k x) dx, \quad (3)$$

а равенство (2) понимается в смысле сходимости в норме $L_{2,\nu}$.

Символом

$$E_{n-1}(f)_{2,\nu} = \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\nu} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\nu}$ множеством \mathcal{P}_{n-1} - обобщённых полиномов вида

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k j_\nu(\lambda_k x).$$

В силу свойств ортогональности системы функций (1), пользуясь разложением (2) и применяя равенство Парсеваля, получаем

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\nu} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\nu}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2(f), \quad (4)$$

где

$$S_{n-1}(f, x) := \sum_{k=1}^{n-1} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x)$$

– частичная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда Фурье-Бесселя (2), а

$$a_k^2(f) = \|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2 b_k^2(f), k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

В пространстве $L_{2,\nu}$ введём следующий оператор усреднения

$$T_{h,\nu}(f, x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+h^2-2xh\cos t}\right) \sin^{2\nu} t dt,$$

обладающий свойствами [2]:

а) для произвольных функций $f, g \in L_{2,\nu}$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно равенство $T_{h,\nu}(\alpha f + \beta g, x) = \alpha T_{h,\nu}(f, x) + \beta T_{h,\nu}(g, x)$;

б) $T_{h,\nu}(j_\nu(\lambda x)) = j_\nu(\lambda h) j_\nu(\lambda x)$; в) $T_{0,\nu}(f, x) \equiv f(x)$;

в) $\|T_{h,\nu}(f, \cdot)\|_{2,\nu} \leq \|f\|_{2,\nu}$ и $\|T_{h,\nu}(f, \cdot) - f(\cdot)\|_{2,\nu} \rightarrow 0$, при $h \rightarrow 0$;

г) функция $u(x, h) := T_{h,\nu}(f; x)$, $x, h \in [0, 1]$ является решением следующей задачи

Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \frac{2\nu+1}{h} \cdot \frac{\partial u}{\partial h}, u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial h} \Big|_{h=0} = 0,$$

где $f(x)$ – произвольная дважды непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[0, 1]$.

В последнее время при решении экстремальных задач теории приближения часто используют различные разновидности классического модуля непрерывности, связанного со спецификой рассматриваемых задач и позволяющего получить окончательные результаты [3-6]. Здесь мы воспользуемся подходом, предложенным в работе [7], и докажем ряд новых результатов. Известно [8], что для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$ с рядом Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x)$$

имеет место формула

$$T_{h,\nu}(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} j_\nu(\lambda_k h) b_k(f) j_\nu(\lambda_k x), \quad (6)$$

причём сходимость ряда, стоящего в правой части равенства (6), понимается в смысле пространства $L_{2,\nu}$.

Пусть E_ν – единичный оператор в пространстве $L_{2,\nu}$. Полагаем

$$T_{h,\nu}^1(f;x) = T_{h,\nu}(f;x), T_{h,\nu}^m(f;x) := T_{h,\nu}(T_{h,\nu}^{m-1}(f;\cdot), x), m \in \mathbb{N}.$$

Используя эти соотношения для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$, запишем конечные разности первого и высших порядков:

$$\begin{aligned} \Delta_{h,\nu}^1(f,x) &:= F_{h,\nu}(f,x) - f(x) = (F_{h,\nu} - E_\nu)f(x), \\ \Delta_{h,\nu}^m(f,x) &:= \Delta_{h,\nu}(\Delta_{h,\nu}^{m-1}(f,\cdot), x) = (F_{h,\nu} - E_\nu)^m f(x) = \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_{h,\nu}^k(f,x), k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$ и $t \in (0,1)$, исходя из введённых разностей (7), определим обобщённый модуль непрерывности m -го порядка

$$\Omega_m(f,t)_{2,\nu} := \sup \left\{ \|\Delta_{h,\nu}^m(f,\cdot)\|_{2,\nu} : 0 < h \leq t \right\}.$$

Введём обозначения:

$$\mathcal{D} := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x} \cdot \frac{d}{dx}, \nu > -1/2$$

– дифференциальный оператор второго порядка.

В монографии [9, с.321] доказано, что функции $j_\nu(\lambda_n x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$\mathcal{D}y = \lambda_n^2 y, j_\nu(0) = 1, j'_\nu(0) = 0.$$

Умножая обе части этого уравнения на весовую функцию $x^{2\nu+1} (\nu > -1/2)$, получаем

$$\frac{d}{dx} \left(x^{2\nu+1} \frac{d}{dx} j_\nu(\lambda_n x) \right) + \lambda_n^2 x^{2\nu+1} j_\nu(\lambda_n x) = 0,$$

пользуясь которым для коэффициентов (3) легко доказать формулу (см. [7, с.5])

$$b_k(f) = (-1)^r \lambda_n^{-2r} b_k(\mathcal{D}^r f), \quad (8)$$

где $\mathcal{D}^0 f = f$, $\mathcal{D}^r(f) := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D}) (r \in \mathbb{Z}_+; L_{2,\nu}^{(0)}(\mathcal{D}) \equiv L_{2,\nu}, \nu > -1/2)$ – класс функций $f \in L_{2,\nu}$, имеющих на отрезке $[0,1]$ абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$ -го порядка и производную r -го порядка $\mathcal{D}^r f$, принадлежащую пространству $L_{2,\nu}$.

Пользуясь формулами (2), (6) и соотношениями (7), запишем разность первого порядка в следующем виде

$$\Delta_{h,v}^1(f, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (j_v(\lambda_k h) - 1) b_k(f) j_v(\lambda_k x). \quad (9)$$

Последовательно применяя формулу (9), из (7) для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем рекуррентную формулу

$$\Delta_{h,v}^m(f, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (j_v(\lambda_k h) - 1)^m b_k(f) j_v(\lambda_k x). \quad (10)$$

Используя равенство Парсеваля, в силу ортогональности системы функций $\{j_v(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$, из (10) получаем формулу

$$\|\Delta_{h,v}^m(f, \cdot)\|_{2,v}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - j_v(\lambda_k h))^{2m} a_k^2(f). \quad (11)$$

Учитывая равенства (7) и (11), запишем:

$$\Omega_m^2(f, t)_{2,v} := \sup_{h \leq t} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1 - j_v(\lambda_k h))^{2m} a_k^2(f) \right\}. \quad (12)$$

Заметим, что для произвольной функции $f \in L_{2,v}^{(r)}(\mathcal{D})$ из (8) и (5) следует равенство

$$a_k^2(\mathcal{D}^r f) = b_k^2(\mathcal{D}^r f) \cdot \|j_v(\lambda_k x)\|_{2,v}^2 = \lambda_k^{4r} b_k^2(f) \cdot \|j_v(\lambda_k x)\|_{2,v}^2 = \lambda_k^{4r} a_k^2(f),$$

в силу которого из равенства (12) получаем [4]:

$$\begin{aligned} \Omega_m^2(\mathcal{D}^r f, t)_{2,v} &= \sup_{h \leq t} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1 - j_v(\lambda_k t))^{2m} a_k^2(\mathcal{D}^r f) \right\} = \\ &= \sup_{h \leq t} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1 - j_v(\lambda_k t))^{2m} \lambda_k^{4r} a_k^2(f) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

2. В настоящее время теория приближения функций имеет дело главным образом с приближением классов функций при помощи заданных подпространств фиксированной размерности, связанных с получением точных результатов, реализующих n -поперечники на указанных классах функций. Наиболее эффективная реализация этой идеи основана на \mathcal{K} -функционале Петре [10]. Отметим, что особенно большую роль играют \mathcal{K} -функционалы в экстремальных задачах теории приближения функций. При этом изучение связи между модулями гладкости и \mathcal{K} -функционалами является одной из основных задач теории приближения функций. Для различных обобщённых модулей гладкости такие задачи изучались, например, в [11-13].

Пусть $L_{2,\nu}^{(m)}$ – пространство Соболева, построенное по оператору D , то есть $L_{2,\nu}^{(m)} := \{f \in L_{2,\nu} : D^j f \in L_{2,\nu}, j=1,2,\dots,m\}$. Определим \mathcal{K} -функционал, построенный по пространствам $L_{2,\nu}$ и $L_{2,\nu}^{(m)}$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(f, t; L_{2,\nu}; L_{2,\nu}^{(m)}) &:= \mathcal{K}_m(f, t^m, L_{2,\nu}; L_{2,\nu}^{(m)}(D)) = \\ &= \inf \left\{ \|f - g\|_{2,\nu} + t^m \|D^m g\|_{2,\nu} : g \in L_{2,\nu}^{(m)}(D) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $f \in L_{2,\nu}$, $0 < t < 1$. Далее, ради краткости, будем использовать обозначение $\mathcal{K}_m(f, t)_{2,\nu} := \mathcal{K}_m(f, t; L_{2,\nu}; L_{2,\nu}^{(m)})$. Эквивалентность модуля непрерывности (12) и \mathcal{K} -функционала (14) устанавливает следующая

Теорема [14]. *Существуют положительные константы $c_1 = c_1(m, \alpha)$ и $c_2 = c_2(m, \alpha)$, для которых справедливы неравенства*

$$c_1 \Omega_m(f, t)_{2,\alpha} \leq \mathcal{K}_m(f, t^m)_{2,\alpha} \leq c_2 \Omega_m(f, t)_{2,\alpha}$$

для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$, $t > 0$.

Имеет место следующая

Теорема 2.1. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\nu}^{(r)}(D) \\ f \neq \text{const}}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)_{2,\nu}}{\mathcal{K}_m(D^r f, \lambda_n^{-2m})_{2,\nu}} = 1. \quad (15)$$

Доказательство. Воспользуясь формулами (4) и (12), для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}^{(r)}$ имеем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{2,\nu} &= \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2(f) \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{-4r} a_k^2(D^r f) \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \lambda_n^{-2r} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2(D^r f) \right\}^{1/2} = \lambda_n^{-2r} E_{n-1}(D^r f)_{2,\nu} \leq \lambda_n^{-2r} \|D^r f - S_{n-1}(g)\|_{2,\nu}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$S_{n-1}(g, x) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k(g) j_\nu(\lambda_k x)$$

– частичная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда Фурье-Бесселя функции $g \in L_{2,\nu}^{(m)}(D)$ по ортогональной с весом $x^{2\nu+1}, \nu > -1/2$ системы специальных функций (1). В силу равенства (4) и соображений, связанных с получением первого неравенства в (16), для произвольной функции $g \in L_{2,\nu}^{(m)}(D)$ имеем:

$$\|g - S_{n-1}(g)\|_{2,\nu} = E_{n-1}(g)_{2,\nu} \leq \lambda_n^{-2m} E_{n-1}(\mathcal{D}^m g)_{2,\nu}. \quad (17)$$

Учитывая (17) и применяя неравенство треугольника к правой части (16), получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{2,\nu} &\leq \lambda_n^{-2r} \|\mathcal{D}^r f - S_{n-1}(g)\|_{2,\nu} \leq \\ &\leq \lambda_n^{-2r} \left\{ \|\mathcal{D}^r f - g\|_{2,\nu} + \|g - S_{n-1}(g)\|_{2,\nu} \right\} \leq \\ &\leq \lambda_n^{-2r} \left\{ \|\mathcal{D}^r f - g\|_{2,\nu} + \lambda_n^{-2m} E_{n-1}(\mathcal{D}^m g) \right\} \leq \\ &\leq \lambda_n^{-2r} \left\{ \|\mathcal{D}^r f - g\|_{2,\nu} + \lambda_n^{-2m} \|\mathcal{D}^m g\|_{2,\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Переходя в (18) к нижней грани по всем функциям $g \in L_{2,\nu}^{(m)}$, с учётом определения \mathcal{K} -функционала будем иметь

$$E_{n-1}(f)_{2,\nu} \leq \lambda_n^{-2r} \mathcal{K}_m(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m}),$$

и так как полученное неравенство справедливо для любого $f \in L_{2,\nu}^{(m)}(D)$, то отсюда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\nu}^{(m)}(D) \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)_{2,\nu}}{\mathcal{K}_m(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} \leq 1. \quad (19)$$

Для установления оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (19), для произвольного обобщенного полинома вида

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k(q_n) j_\nu(\lambda_k x), \quad b_k(q_n) \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

имеем

$$\mathcal{D}^r q_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k(q_n) \mathcal{D}^r j_\nu(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^n b_k(q_n) \lambda_k^{2r} j_\nu(\lambda_k x),$$

и применяя равенство Парсеваля, получаем

$$\| \mathcal{D}^r q_n \|_{2,\nu} = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k^{4r} a_k^2 \right\}^{1/2}. \quad (20)$$

Учитывая, что последовательность собственных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ является монотонно возрастающей, из (20) получаем

$$\| \mathcal{D}^r q_n \|_{2,\nu} \leq \lambda_n^{2r} \left\{ \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\}^{1/2} = \lambda_n^{2r} \| q_n \|_{2,\nu}. \quad (21)$$

Полагая теперь в равенстве (14) сначала $g = 0$, а затем $g = q_n$, для \mathcal{K} -функционала $\mathcal{K}_m(q_n, t^m)_{2,\nu}$ получаем оценку сверху

$$\mathcal{K}_m(q_n, t^m)_{2,\nu} \leq \begin{cases} \| q_n \|_{2,\nu}, \\ t^m \| \mathcal{D}^m q_n \|_{2,\nu}. \end{cases} \quad (22)$$

Пусть $f_0(x) := j_\nu(\lambda_n x) \| j_\nu(\lambda_n x) \|^{-1}$. Очевидно, что $f_0 \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})$, причём

$$\mathcal{D}^{r+m} f_0(x) := (-1)^{r+m} \lambda_n^{r+m} j_\nu(\lambda_n x) \| j_\nu(\lambda_n x) \|^{-1}. \quad (23)$$

Учитывая равенство (23) и второе неравенство (22), получаем

$$\mathcal{K}_m(\mathcal{D}^r f_0, \lambda_n^{-2m})_{2,\nu} \leq \lambda_n^{-2m} \| \mathcal{D}^{r+m} f_0 \|_{2,\nu} = \lambda_n^{2r}.$$

Используя полученное неравенство и заметив, что $E_{n-1}(f_0) = 1$, имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D}) \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)_{2,\nu}}{\mathcal{K}_m(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} \geq \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f_0)_{2,\nu}}{\mathcal{K}_m(\mathcal{D}^r f_0, \lambda_n^{-2m})} \geq 1. \quad (24)$$

Из сравнения оценки сверху (19) и оценки снизу (24) вытекает требуемое равенство (15). Теорема 2.1 доказана.

3. Для изложения дальнейших результатов нам потребуются некоторые определения и обозначения. Пусть S – единичный шар в пространстве $L_{2,\nu}$; $\Lambda_n \subset L_{2,\nu}$ – n -мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_{2,\nu}$ – подпространство коразмерности n ; $\mathcal{L}: L_{2,\nu} \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор; $\mathcal{L}^\perp: L_{2,\nu} \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования; \mathfrak{M} – выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\nu}$. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_{2,\nu}) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0: \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\}: \Lambda_{n+1} \subset L_{2,\nu}\},$$

$$\begin{aligned}
d_n(\mathfrak{M}, L_{2,\nu}) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - g\|_{2,\nu} : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda_n \subset L_{2,\nu} \}, \\
\delta_n(\mathfrak{M}, L_{2,\nu}) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\|_{2,\nu} : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}L_{2,\nu} \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_{2,\nu} \}, \\
d^n(\mathfrak{M}, L_{2,\nu}) &= \inf \{ \inf \{ \|f\|_{2,\nu} : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda_n \subset L_{2,\nu} \}, \\
\Pi_n(\mathfrak{M}, L_{2,\nu}) &= \\
&= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\|_{2,\nu} : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}^\perp L_{2,\nu} \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_{2,\nu} \}
\end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским* и *проекционным* поперечниками подмножества \mathfrak{M} в пространстве $L_{2,\nu}$. Указанные экстремальные величины монотонны по n и между ними в $L_{2,\nu}$ имеют место соотношения [15, 16]

$$b_n(\mathfrak{M}, L_{2,\nu}) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_{2,\nu}) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_{2,\nu}) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_{2,\nu}) = \delta(\mathfrak{M}, L_{2,\nu}). \quad (25)$$

Введём класс функций, для которого вычислим точные значения вышеприведённых аппроксимационных величин.

Неубывающую на положительной полуоси $[0, \infty)$ функцию Φ называют k -мажорантой, если функция $\Phi(t)/t^k$, $k \in \mathbb{N}$ не возрастает на $(0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и при $t \rightarrow 0$, $\Phi(t) \rightarrow 0$ (см., например, [17]). Множество всех k -мажорант обозначим символом \mathcal{F}^k . Через $W_{2,k}^{(r)}(\mathcal{K}_m; \Phi)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m, k \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})$, для которых функция $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию $\mathcal{K}_m(\mathcal{D}^r f, t^m) \leq \Phi(t^m)$, где $0 < t \leq 1$ – любое число, а мажоранта Φ – произвольная функция, принадлежащая \mathcal{F}^k . В случае $k = 1$ вместо символа $W_{2,1}^{(r)}(\mathcal{K}_m; \Phi)$ будем писать $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m; \Phi)$.

Теорема 3.1. *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место следующие равенства*

$$\rho_n \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), L_{2,\nu} \right) = E_{n-1} \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right)_{2,\nu} = \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}), \quad (26)$$

где $\rho_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$, а

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{2,\nu} := \inf \{ E_{n-1}(f)_{2,\nu} : f \in L_{2,\nu} \}$$

для $\mathfrak{M} \subset L_{2,\nu}$.

Доказательство. Из соотношения между n -поперечниками (24) и равенством (15) с учётом определения класса $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ запишем оценки сверху

$$\begin{aligned}
\rho_n \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), L_{2,\nu} \right) &\leq E_{n-1} \left(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right)_{2,\nu} = \\
&= \sup \left\{ E_{n-1}(f)_{2,\nu} : f \in W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \right\} \leq \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}).
\end{aligned} \tag{27}$$

Для получения оценок снизу рассматриваемых n -поперечников вводим в рассмотрение шар

$$\tilde{S}_{n+1} := \left\{ q_n \in \mathcal{P}_n : \|q_n\|_{2,\nu} \leq \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}) \right\}$$

и покажем, что $\tilde{S}_{n+1} \subset W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$. Теперь заметим, что мажоранта Φ в силу определения класса $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ принадлежит семейству \mathcal{F}^1 . В самом деле, согласно определению \mathcal{F}^1 , для любых значений $0 < x_1 \leq x_2 < 1$ выполняется неравенство

$$x_2 \Phi(x_1) \geq x_1 \Phi(x_2). \tag{28}$$

Полагая $x_1 = t_1^m, x_2 = t_2^m$, где $0 < t_1 \leq t_2 < 1$, из неравенства (27) имеем

$$\frac{\Phi(t_1^m)}{\Phi(t_2^m)} \geq \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^m. \tag{29}$$

Воспользуемся также неравенством

$$\| \mathcal{D}^{r+m} q_n \|_{2,\nu} \leq \lambda_n^{2(r+m)} \| q_n \|_{2,\nu}, q_n \in \mathcal{P}_n, \tag{30}$$

вытекающем из соотношения (21). Пусть сначала $0 < t \leq 1/\lambda_n$. В этом случае полагаем в неравенстве (29) $t_1 = t^2, t_2 = 1/\lambda_n^2$, применяя второе неравенство из (22), а также (30), для любого $q_n \in \tilde{S}_{n+1}$ получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_m(\mathcal{D}^{r+m} q_n, t^{2m}) &\leq t^{2m} \| \mathcal{D}^{r+m} q_n \|_{2,\nu} \leq \lambda_n^{2(r+m)} \cdot t^{2m} \| q_n \|_{2,\nu} \leq \\
&\leq t^{2m} \lambda_n^{2m} \Phi(\lambda_n^{-2m}) \leq \Phi(t^{2m}).
\end{aligned} \tag{31}$$

Далее полагая $1/\lambda_n \leq t < 1$ и используя первое неравенство из соотношения (22) и неравенство (21), а также учитывая, что Φ – неубывающая функция, для произвольного $q_n \in \tilde{S}_{n+1}$ получаем

$$\mathcal{K}_m(\mathcal{D}^r q_n, t^{2m}) \leq \| \mathcal{D}^r q_n \|_{2,\nu} \leq \lambda_n^{2r} \| q_n \|_{2,\nu} \leq \Phi(\lambda_n^{-2m}) \leq \Phi(t^{2m}). \tag{32}$$

Из неравенств (31) и (32) следует включение $\tilde{S}_{n+1} \subset W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$. Пользуясь соотношениями (25) и определением бернштейновского n -поперечника, запишем оценки снизу

$$\begin{aligned} \rho_n(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), L_{2,\nu}) &\geq b_n(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi), L_{2,\nu}) \geq \\ &\geq b_n(\tilde{S}_{n+1}; L_{2,\nu}) \geq \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}). \end{aligned} \quad (33)$$

Теперь равенство (26) следует из сравнения оценок (27) и (33), чем и завершаем доказательство теоремы 3.1.

В последнее время интенсивно изучается вопрос вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье по различным ортогональным системам на различных классах функций [18, 19]. Рассмотрим данный вопрос для изученного в этой статье класса функций.

Следствие 3.1. *В условиях теоремы 3.1 справедливы равенства*

$$\sup \{ |b_n(f)| : f \in W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \} = \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}). \quad (34)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} b_n^2(f) &= \|j_\nu(\lambda_n x)\|_{2,\nu}^{-2} \int_0^1 x^{2\nu+1} f(x) j_\nu(\lambda_n x) dx = \\ &= \|j_\nu(\lambda_n x)\|_{2,\nu}^{-2} \int_0^1 x^{2\nu+1} \{f(x) - S_{n-1}(f, x)\} j_\nu(\lambda_n x) dx = \\ &= \|j_\nu(\lambda_n x)\|_{2,\nu}^{-2} \int_0^1 \{x^{2\nu+1} [f(x) - S_{n-1}(f, x)]\} \{x^{(2\nu+1)/2} j_\nu(\lambda_n x)\} dx, \end{aligned} \quad (35)$$

где $S_{n-1}(f)$ – частная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда Фурье-Бесселя функции f по системе специальных функций $\{j_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{n-1}$, ортонормированных с весом $x^{2\nu+1}$ на отрезке $(0,1)$. Применяя к правой части равенства (35) неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$|b_n(f)| \leq \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\nu} = E_{n-1}(f)_{2,\nu}. \quad (36)$$

Из соотношений (26) и (36) запишем оценку сверху

$$\sup \{ |b_n(f)| : f \in W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \} \leq E_{n-1}(W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi))_{2,\nu} \leq$$

$$\leq \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}). \quad (37)$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (37), вводим в рассмотрение экстремальную функцию

$$g_0(x) := \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}) j_\nu(\lambda_n x) \| j_\nu(\lambda_n x) \|^{-1},$$

которая, как легко проверить, является элементом шара S_{n+1} , введённого нами в теореме 3.1, а потому принадлежит классу $W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$.

Следовательно,

$$\sup \{ |b_n(f)| : f \in W_2^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi) \} \geq a_n(g_0) = \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}). \quad (38)$$

Сравнивая оценку сверху (37) с оценкой снизу (38), получаем равенство (34). Следствие 3.1 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, 4-е изд. - М.: Наука, 1981, 512 с.
2. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. - Усп.матем.наук, 1951, т. 6, 2, с.102-143.
3. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π -периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$. - Матем.заметки, 2004, т. 76, 6, с.803-811.
4. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 . - Сиб.матем.журнал, 2011, т. 52, 6, с.1414-1427.
5. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов. - Укр.матем.вісник, 2014, т. 11, 3, с.417-441.
6. Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций. - Укр.матем.журнал, 2013, т. 65, 12, с.1604-1621.
7. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Приближение функций суммами Фурье-Бесселя. - Известия вузов. Математика, 2001, т. 18, 8, с.3-9.
8. Левитан Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига. - М.: Наука, 1973, 312 с.
9. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. Самосопряжённые обыкновенные дифференциальные операторы. - М.: Наука, 1970, 671 с.
10. Ditzian Z., Totik V. K -functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$. - J. Approx.Theory, 1986, v.46, 1, pp.38-41.
11. Löfström J., Peetre J. Approximation theorems connected with generalized translations. - Math. Ann., 1969, v.181, p. 255-268
12. Ditzian Z., Totik V. Moduli of smoothness. - New York etc.: - Springer-Verlag, 1987, 228 p.
13. Feng Dai. Some equivalence theorems with \mathcal{K} -functionals. - J. Appr. Theory, 2003, v.121, p. 143-157.

14. Белкина Е.С., Платонов С.С. Эквивалентность \mathcal{K} -функционалов и модулей гладкости, построенных по обобщенным сдвигам Данкля. - Известия вузов. Математика, 2008, 8, с.3-15.
15. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. - М.: МГУ, 1976, 318 с.
16. Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. - Berlin: - Springer-Verlag. - Heidelberg. - New York. - Токуо, 1985, 287 p.
17. Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных функций. - Киев: Наука думка, 1992, 226 с.
18. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 . - Analysis Mathematica, 2012, т. 38, 2, с.154-165.
19. Shabozov M.Sh., Palavonov K.K. Exact values of widths of certain classes of periodic differentiable functions in the space $L_2[0, 2\pi]$. - Analysis Mathematica, 2015, т. 41, 2, с.103-115.

Қ.ТУХЛИЕВ, К.Н.МУРОДОВ

**САРҲАДИ АНИҚИ БОЛОИИ НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ
СУММАҲОИ ФУРЬЕ-БЕССЕЛ ДАР ФАЗОИ $L_{2,\nu}$ ВА ҚИМАТИ
ҚУТРҲОИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ ФУНКСИЯҲО**

Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи Б.Ғ.Гафуров

Дар фазои Гилбертии $L_{2,\nu} := L_2([0,1], x^{2\nu+1})$, $\nu > -1/2$ бо вазни $x^{2\nu+1}$ нобаробариҳои аниқи намуди Чексон-Стечкин ёфта шудаанд, ки бузургии наздикшавии беҳтарини функцияи $f(x)$ -ро бо суммаҳои хусусии қатори Фурье-Бессел бо вазни мусбати миёнакардашудаи модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби m -ум $\Omega_m(D'f; t)$, ки дар инҷо D - оператори дифференсиалии тартиби дуюм аст, алоқаманд менамояд. Барои синфи функцияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагии нишондодашуда муайян карда мешаванд, қимати аниқи n -қутрҳои гуногун дар фазои $L_{2,\nu}$ ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: модули бефосилагии умумикардашуда, наздикунии беҳтарин, қатори Фурье-Бессел, n -қутрҳо.

K.TUKHLIEV, K.N.MURODOV

**AN EXACT UPPER BOUNDS OF THE BEST APPROXIMATION BY
FOURIER-BESSEL SUM IN THE SPACE $L_{2,\nu}$ AND THE VALUES OF
 n -WIDTHS OF SOME CLASSES OF FUNCTIONS**

B.G.Gafurov Khugand State University

In Hilbert space $L_{2,\nu} := L_2([0,1], x^{2\nu+1})$, $\nu > -1/2$ with the weight $x^{2\nu+1}$ the exact inequalities in the mean of Jackson-Stechkin which colligate the best approximation of functions $f(x)$ by partial sum of Fourier-Bessel series with positive average weight of generalized modulus continuity $\Omega_m(D^r f; t)$, where D is a differential operator of second order, are received. For some classes of functions defined by smoothness characteristic the values of n -widths are calculated in $L_{2,\nu}$ space.

Key words: generalized modulus of continuity, the best approximation, Fourier-Bessel series, n -widths.

УДК 517.968

М.АЗИЗОВ, А.МУХЛИС

**ИНФОРМАЦИОННАЯ СЛОЖНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА
С ГАРМОНИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

*Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни
Поступила в редакцию 15.02.2017 г.*

Найден точный в логарифмической шкале порядок минимального радиуса информации для уравнений Фредгольма второго рода с периодическими гармоническими ядрами и свободными членами.

Ключевые слова: минимальный радиус, интегральное уравнение, гармоническое ядро, информационная сложность, число Гельфанда.

1. Постановка задачи. Пусть V, E и K – линейные нормированные пространства. Пространства линейных непрерывных операторов из V в E будем обозначать через $L(V, E)$. Кроме того, $L(E) = L(E, E)$. Предположим, что V вложено в E с константой вложения, равной единице, и $J_v \in L(V, E)$ есть оператор вложения V в E . Будем предполагать еще, что существует линейный непрерывный оператор T , ставящий в соответствие каждому элементу $k \in K$ оператор $T_k \in L(E)$. Зафиксируем некоторые подмножества $V_o \subset V$ и $K_o \subset K$ такие, что для любого $k \in K_o$ справедливо вложение $(I - T_k)^{-1} \in L(E)$, где I – тождественный оператор. Обозначим через $X_o = K_o \times V_o$ класс операторных уравнений

$$u - T_k = f, k \in K_o, f \in V_o. \quad (1)$$

Адрес для корреспонденции: Азизов Музафар. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет. E-mail: azizov.muz@gmail.com

Оператор $S : X_o \rightarrow E$, определяемый соотношением

$$S(k, f) = (I - T_k)^{-1} f, \quad (2)$$

называется оператором решения для уравнений (1) из X_o .

Под способом задания информации (СЗИ) об уравнениях (1) из класса X_o будем понимать совокупность $N = (N_1, N_2)$ двух произвольных наборов N_1 и N_2 линейных непрерывных функционалов

$$N_1 k = [\lambda_1(k), \lambda_2(k), \dots, \lambda_{n_1}(k)], \lambda_i \in K^*, i = 1, 2, \dots, n_1,$$

$$N_2 f = [\sigma_1(f), \sigma_2(f), \dots, \sigma_{n_2}(f)], \sigma_j \in V^*, j = 1, 2, \dots, n_2,$$

где K^* и V^* – пространства, сопряженные к K и V соответственно. Кроме того, через $card(N)$ будем обозначать общее количество линейных функционалов, принимающих участие в определении СЗИ N , то есть $card(N) = n_1 + n_2$.

Под алгоритмом φ приближенного решения уравнений (1) мы понимаем произвольный оператор, ставящий в соответствие информационному вектору $N(k, f) = (N_1 k, N_2 f) \in R^{n_1+n_2}$ в качестве приближенного решения уравнения (1) элемент $\varphi(N; k, f) \in E$. При фиксированном СЗИ N обозначим через $\Phi(N)$ – множество всех алгоритмов φ , использующих в качестве информации значения компонентов информационного вектора $N(k, f)$. Погрешность алгоритма $\varphi \in \Phi(N)$ на классе X_o определяется как обычно:

$$e(X_o, \varphi) = \sup_{(k, f) \in X_o} \|S(k, f) - \varphi(N; k, f)\|_E.$$

Кроме того, для фиксированного СЗИ $N = (N_1, N_2)$ рассмотрим величину:

$$r_n(X_o, N) = \inf_{\varphi \in \Phi(N)} e(X_o, \varphi),$$

называемую радиусом информации N в классе X_o . Как и в [1], будем рассматривать задачу оптимизации СЗИ в смысле величины

$$r(X_o) = \inf_{N: card(N) \leq n} r_n(X_o, N),$$

называемой минимальным радиусом информации. Эта величина равна минимальной погрешности, которую можно достигнуть на классе X_o , используя не более чем n значений информационных функционалов (ЗИФ). СЗИ N_o , для которого $card(N_o) \leq n$ и $logr(X_o, N_o) = logr_n(X_o)$, будем называть оптимальным по порядку СЗИ для класса X_o в логарифмической шкале.

Настоящая работа посвящена определению порядка величины r_n в логарифмической шкале для класса уравнений Фредгольма второго рода с периодическими ядрами и свободными членами, являющимися по каждой переменной следами гармонических в единичном круге $\{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$ функций, на окружности радиуса $\rho \{(x, y): x^2 + y^2 = \rho^2\}, 0 < \rho < 1$.

В дальнейшем нам потребуется связь между минимальным радиусом информации $r_n(X_o)$ и числом Гельфанда некоторого специального оператора. Эта связь установлена в [2] при следующих условиях, накладываемых на класс $X_o = K_o \times V_o$.

Пусть B_K и B_V – единичные шары подпространств K и V с центрами в нуле соответственно. Предположим, что существует набор постоянных $\theta(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6), \theta_i > 0, i = 1, \dots, 6$ таких, что

$$\theta_1 \cdot B_K \subset K_o \subset \theta_2 \cdot B_K \quad (3)$$

для любых $k \in K_o$

$$\begin{aligned} \|T_k\|_{E \rightarrow E} &\leq \theta_3, \|(I - T_k)^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq \theta_4, \|T_k\|_{V \rightarrow V} \leq \\ &\leq \theta_5, \|(I - T_k)^{-1}\|_{V \rightarrow V} \leq \theta_6. \end{aligned} \quad (4)$$

Напомним, что m -ым числом Гельфанда линейного непрерывного оператора U , действующего из нормированного пространства Y в нормированное пространство Z , называется величина:

$$G_m(U : Y \rightarrow Z) = \inf_{\substack{\lambda_i \in Y^*, \\ i=1, m-1}} \sup_{\substack{y \in Y, \|y\|_Y \leq 1, \\ \lambda_i(y) = 0, i=1, m-1}} \|Dy\|_Z.$$

Рассмотрим оператор (функтор) $\Psi: K \rightarrow L(V, E)$, ставящий в соответствие каждому $k \in K$ оператор $\Psi_k \in L(V, E)$, определяемый равенством $\Psi_k = T_k J_k$, где J_k оператор вложения V и E .

Теорема Хейнриха [2]. Если множество K_o удовлетворяет условиям (3), (4), а $V_o = B_V$, то для класса $X_o = K_o \times V_o$ справедливо соотношение:

$$r_n(X_o) \asymp \inf_{n_1+n_2 \leq n} \{G_{n_1}(\Psi: K \rightarrow L(V, E)) + G_{n_2}(J_V: V \rightarrow E)\}.$$

2. Оценка снизу. Определим упомянутый выше класс уравнений Фредгольма с периодическими гармоническими ядрами и свободными членами. Пусть L_2 – пространство функций, суммируемых в квадрате на $[0, 2\pi]$ с обычной нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением (\cdot, \cdot) . В этом пространстве рассмотрим ортонормированный базис, образованный тригонометрическими функциями

$$e_o = 1/\sqrt{2\pi}, e_m(t) = \cos(mt)/\sqrt{\pi}, e_{-m}(t) = \sin(mt)/\sqrt{\pi}, m = 1, 2, \dots$$

Известно, что функции $e_{l,m}(t, \tau) = e_l(t) \cdot e_m(\tau)$, $l, m = 0 \pm 1, \dots$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(Q)$ функций двух переменных $k(t, \tau)$, суммируемых в квадрате на $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ с нормой $\|\cdot\|_2$ и скалярным произведением (\cdot, \cdot) , определяемым обычным образом. Для $f \in L_2$ и $k \in L_2(Q)$ положим $\hat{f}(m) = (f, e_m)$, $\hat{k}(l, m) = (k, e_{l,m})$ и рассмотрим следующие нормированные пространства функций одной и двух переменных:

$$\Gamma^\rho = \{f: f \in L_2, \|f\|_\rho := (\sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho^{-2|m|} \cdot \hat{f}^2(m))^{1/2} < \infty\},$$

$$\mathcal{T}^\rho = \{k: k \in L_2(Q), \|k\|_{2,\rho} := (\sum_{l,m=-\infty}^{\infty} \rho^{-2(|l|+|m|)} \cdot \hat{k}^2(l,m))^{1/2} < \infty\}.$$

Известно [3], что пространства Γ_ρ и \mathcal{T}^ρ состоят из 2π периодических функций одной и двух переменных, являющихся по каждой переменной следами гармонических в единичном круге $\{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$ функций, на окружности радиуса $\rho \{(x, y): x^2 + y^2 = \rho^2\}$, $0 < \rho < 1$.

В рамках обозначений предыдущего пункта положим $E = L_2, V = \Gamma^\rho, K = \mathcal{T}^\rho$. Кроме того, оператор T , ставящий в соответствие каждому элементу $k \in \mathcal{T}^\rho$ оператор $T_k \in \mathcal{L}(L_2)$, определим следующим равенством

$$T_k g(t) = \int_0^{2\pi} k(t, \tau) \cdot g(\tau) d\tau \quad (5)$$

и рассмотрим множество

$$K_\rho = K_\rho(\alpha) = \left\{ k, k \in \mathcal{T}^\rho, \|k\|_{2,\rho} \leq \alpha_1, \|(I - T_k)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \alpha_2 \right\}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Тогда класс $X_\rho = X_\rho(\alpha) = K_\rho = K_\rho(\alpha) \times B_{\Gamma_\rho}$ состоит из интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$u(t) - T_k u(t) := u(t) - \int_0^{2\pi} k(t, \tau) \cdot u(\tau) dr = f(t) \quad (6)$$

с ядрами $k(t, \tau)$ из множества K_ρ и свободными членами $f(t)$ из единичного шара B_{Γ_ρ} пространства Γ_ρ с центром в нуле.

Лемма 1. *Существует постоянная c , зависящая от α и ρ , такая, что $r_n(X^\rho) \geq c \cdot \rho^{\sqrt{n}} / \sqrt{n}$.*

Доказательство. Легко проверить, что при $E = L_2, V = \Gamma^\rho, K = \mathcal{T}^\rho$ и операторе T , определяемом в (5), множество $K_\rho(\alpha)$ удовлетворяет условиям (3), (4) с некоторыми постоянными $\theta_{i,j} = \overline{1,6}$, зависящими лишь от α, ρ . Тогда для класса X^ρ справедлива теорема Хейнриха, из которой следует

$$\begin{aligned} r_n(X_o) &\asymp \inf_{n_1 + n_2 \leq n} \left\{ G_{n_1}(\Psi: \mathcal{T}_\rho \rightarrow \mathcal{L}(\Gamma^\rho, L_2)) + G_{n_2}(J_\rho: \Gamma^\rho \rightarrow L_2) \right\} \geq \\ &\geq c_1 \cdot G_n(\Psi: \mathcal{T}_\rho \rightarrow \mathcal{L}(\Gamma^\rho, L_2)), \end{aligned} \quad (7)$$

где постоянная c_1 не зависит от n . Теперь для доказательства леммы нужно оценить число Гельфанда оператора Ψ .

Пусть Z – поле целых чисел, а $Z^2 = Z \times Z$ – множество пар целых чисел $(l, m), l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, с некоторым правилом нумерации этих пар. Через $l_2(Z^2)$ и

$l_\infty(Z^2)$ обозначим стандартные пространства последовательностей, нумерация членов которых совпадает с нумерацией, введенной в Z^2 . Базис в $l_2(Z^2)$ и $l_\infty(Z^2)$ образует последовательности $b_{l,m}$, все члены которых равны нулю, за исключением члена, имеющего номер, совпадающий с номером пары (l,m) в Z^2 , причем последний равен 1. Оператор $D:l_2(Z^2) \rightarrow l_\infty(Z^2)$ называется диагональным, если все его собственные элементы являются элементами базиса. Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \lambda_n \geq \dots$ - собственные числа диагонального оператора D и $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда из теорем 11.11.17, 11.7.4, 11.5.2 в [4] следует:

$$G_n(D:l_2(Z^2) \rightarrow l_\infty(Z^2)) \asymp \lambda_n / \sqrt{n}. \quad (8)$$

Рассмотрим оператор $W:l_2(Z^2) \rightarrow T^\rho$, определяемый соотношением

$$Wb_{l,m} = \rho^{|l+m|} \cdot e_l(t) \cdot e_m(\tau).$$

Кроме того, определим оператор $U:\mathcal{L}(\Gamma^\rho, L_2) \rightarrow l_\infty(Z^2)$, сопоставляющий каждому $A \in \mathcal{L}(\Gamma^\rho, L_2)$ последовательность $UA = \{\rho^{|m|}(Ae_m, e_l)\}, (l,m) \in Z^2$. Легко видеть, что $W \leq 1, U \leq 1$. Пусть теперь $\Psi_k = T_k J_\rho$, где J_ρ - оператор вложения Γ_ρ в L_2 , а T_k определен в (5). Тем самым определен оператор (функтор) $\Psi:T_\rho \rightarrow \mathcal{L}(\Gamma^\rho, L_2)$. Тогда оператор $D = U\Psi W$ действует из $l_2(Z^2)$ в $l_\infty(Z^2)$ так, что $Wb_{l,m} = \rho^{(|l+m|)} b_{l,m}, l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Это означает, что D - диагональный оператор, а числа $\varepsilon_{l,m} = \rho^{(|l+2|m|)}$ являются собственными значениями D . Рассмотрим множества

$$Q_v = \{(l,m): l, m \in Z, |l| + 2|m| \leq v\}, \quad v = 1, 2, \dots,$$

и пусть $\text{card}(Q_v)$ - общее число пар $(l,m) \in Q_v$. Легко проверить, что

$$v^2 + v - 1 \leq \text{card}(Q_v) \leq v^2 + v + 1. \quad (9)$$

С другой стороны, при $(l,m) \in Q_v$ все собственные числа $\varepsilon_{l,m}$ оператора D удовлетворяют неравенству

$$\varepsilon_{l,m} \asymp \rho^{|l+2|m|} \geq \rho^v. \quad (10)$$

Пусть теперь $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \lambda_n \geq \dots$ - элементы последовательности $\{\varepsilon_{l,m}\}$, упорядоченные по убыванию. В силу (9) при любом $v = 1, 2, \dots$ существует не менее v^2 собственных чисел оператора D , удовлетворяющих (10). Но тогда $\lambda_{v^2} \geq c_2 \cdot \rho^v$ или, что то же самое,

$$\lambda_n \geq c_2 \cdot \rho^{\sqrt{n}}, \quad (11)$$

где постоянная c_2 не зависит от n . Объединяя (8) и (11), для $D = U\Psi W$ имеем

$$G_n(U\Psi W : l_2(Z^2) \rightarrow l_\infty(Z^2)) \geq c_2 \cdot \rho^{\sqrt{n}} / \sqrt{n}. \quad (12)$$

Кроме того, из основного свойства чисел Гельфанда следует

$$\begin{aligned} & G_n(U\Psi W : l_2(Z^2) \rightarrow l_\infty(Z^2)) \leq \\ & \leq UG_n(\Psi : \mathcal{T}_\rho \rightarrow \mathcal{L}(\Gamma^\rho, L_2)) \cdot \|W\| \leq G_n(\Psi : \mathcal{T}_\rho \rightarrow \mathcal{L}(\Gamma^\rho, L_2)). \end{aligned}$$

Утверждение леммы следует из последнего неравенства и (7), (12).

3. Оценка сверху. Рассмотрим СЗИ $N_{Q_v} = (N_{1,v}, N_{1,v})$, определяемый следующими наборами информационных функционалов

$$\begin{aligned} N_{1,v} k &= (\lambda_{l,m}(k) = \hat{k}(l,m), (l,m) \in Q_v), \\ N_{2,v} f &= (\sigma_m(f) = \hat{f}(m), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm v). \end{aligned}$$

Используя значения этих функционалов, поставим в соответствие каждому уравнению (6) уравнение

$$\bar{u}(t) - T_{k_v} \bar{u}(t) : \bar{u}(t) - \int_0^{2\pi} k(t, \tau) \cdot \bar{u}(\tau) dr = S_v f(t) \quad (13)$$

Так как (13) является интегральным уравнением с вырожденным ядром, то построение его решения в виде тригонометрического многочлена порядка v сводится к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Тем самым определен некоторый алгоритм $\varphi_v \in \Psi(N_{Q_v})$, при котором, используя только ЗИФ из набора N_{Q_v} , мы ставим в соответствие каждому уравнению (6) в качестве приближенного решения точное решение уравнения (13), то есть

$$\varphi_v(N_{Q_v}; k, f) = (I - T_{k_v})^{-1} S_v f.$$

Теорема 1. Пусть $v = [\sqrt{n}] - 2$, где $[\alpha]$ - целая часть числа α . Тогда

$$c\rho^{\sqrt{n}} / \sqrt{n} \leq r_n(X^\rho) \leq r(X^\rho, N_{Q_v}) \asymp e(X^\rho, \varphi_v) \asymp \rho^{\sqrt{n}}$$

и N_{Q_v} является оптимальным по порядку в логарифмической шкале СЗИ для класса X^ρ .

Доказательство. Нам потребуется следующее утверждение

Лемма 2. Если $k \in K_\rho(\alpha)$, то

$$\|T_k - T_{k_v}\|_{T_\rho \rightarrow L_2} \leq \alpha_1 \cdot \rho^v, \|T_k - T_{k_v}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \alpha_1 \cdot \rho^{v/2}.$$

Доказательство проведем для первого неравенства. Второе неравенство доказывается аналогично.

По определению Q_v и $k_v(t, \tau)$

$$T_k f(t) - T_{k_v}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e_l(t) \cdot \sum_{m > \frac{v-|l|}{2}} \hat{k}(l, m) \hat{f}(m).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|T_k - T_{k_v}\|^2 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m > \frac{v-|l|}{2}} \hat{k}(l, m) \hat{f}(m) \right)^2 \leq \\ &\leq \rho^{2v} \cdot \|f\|_\rho^2 \cdot \|k\|_\rho^2 \leq \rho^{2v} \cdot \alpha_1^2 \cdot \|f\|_\rho^2. \end{aligned} \quad (14)$$

В силу произвольности $f \in \Gamma^\rho$ утверждение леммы следует из последнего неравенства и определения класса $K_\rho(\alpha)$.

Вернемся к доказательству теоремы 1. В силу теоремы о разрешимости приближенного уравнения [5] и второго неравенства леммы 2 для $k \in K_\rho(\alpha)$ и достаточно большого v имеем

$$\left\| (I - T_{k_v})^{-1} \right\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \rho^{\frac{v}{2}}} \leq \beta_1,$$

где постоянная β_1 не зависит от v . Кроме того, для $k \in K_\rho(\alpha)$ и $g \in L_2$

$$\|T_k g\|_\rho^2 \leq \|g\|^2 \|k\|_{2,\rho}^2 \leq \alpha_1^2 \cdot \|g\|^2.$$

Но тогда для решения $u(t)$ любого уравнения (6) из X^ρ имеем

$$\|u\|_\rho \leq 1 + \alpha_1 \cdot \|(I - T_k)^{-1} f\| \leq 1 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 . \quad (15)$$

Напомним еще, что для $f \in B_\rho$ (см. напр. [3])

$$\|f - S_v f\| \leq \rho^v . \quad (16)$$

Таким образом, из леммы 2 и (14) – (16) при $v = \lceil \sqrt{n} \rceil - 2$ находим

$$e(X^\rho, \varphi_v) \leq \beta_1 \cdot \rho^v + \beta_1 \cdot \alpha_1 \cdot \rho^v \cdot (1 + a_1 \cdot a_2) \leq c_4 \cdot \rho^v , \quad (17)$$

где постоянная c_4 зависит лишь от α и ρ . С другой стороны, при $v = \lceil \sqrt{n} \rceil - 2$ из (9) имеем

$$\begin{aligned} \text{card}(N_{Q_v}) &= \text{card}(N_Q) + 2v + 1 \leq v^2 + 3v + 2 \leq \\ &\leq n - 4\sqrt{n} + 4 + 3\sqrt{n} - 6 + 2 = n - \sqrt{n} < n . \end{aligned} \quad (18)$$

Объединяя (17) и (18), получаем оценку сверху для $r_n(X^\rho)$:

$$r_n(X^\rho) \leq e(X^\rho, \varphi_{\lceil \sqrt{n} \rceil - 2}) \leq c_4 \cdot \rho^{\sqrt{n}} .$$

Требуемая оценка снизу следует из леммы 1. Теорема доказана.

Замечание. Начиная с работы [2], для оценки величины $r_n(X_0)$ использовалась схема, основанная на использовании предтабличного поперечника Δ_n , введенного К.И.Бабенко [6]. Точнее, для оценки снизу использовалась лемма о том, что при достаточно общих предположениях $r_n(X^\rho) \geq \Delta_n(R(X_0))$, где $R(X_0)$ - класс решений уравнений из X_0 . Для классов интегральных уравнений с ядрами и свободными членами конечной гладкости указанная выше схема в ряде случаев позволила получить значения точных порядков величин r_n [7], [8]. Однако для $X^\rho = K_\rho(\alpha) \times B_{\Gamma^\rho}$ эта схема приводит к неравенству $r_n(X^\rho) \geq C \cdot \Delta_n(B_{\Gamma^\rho})$, из которого, используя известную связь предтабличного поперечника и поперечника Александрова [6], имеем $r_n(X^\rho) \geq C \cdot \rho^{n/2}$. Сравнивая это соотношение с доказанной нами теоремой, приходим к заключению, что в нашем случае применяемая ранее схема оценки r_n не дает возможности получить точный порядок минимального радиуса информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Переверзев С.В., Азизов М. – Укр. мат. журнал, 1996, т. 48, №5, с. 656-665.
2. Heinrich S. – J. Complexity, 1993, v. 9, №2, pp. 141-153.
3. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1976, 304 с.
4. Пич А. Операторные идеалы. – М.: Мир, 1982, 536 с.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977, 774 с.
6. Бабенко К.И. – Успехи мат. наук, 1985, т. 40, №1, с. 3-27.
7. Переверзев С.В. – Сиб. мат. журн, 1991, т. 32, №1, с. 107-115.
8. Махкамов К.Ш. – Укр. мат. журн, 1994, т. 46, №7, с. 853-903.

М.АЗИЗОВ, А.МУХЛИС

ДУШВОРИИ ИТИЛООТИИ ҲАЛЛИ ТАҚРИБИИ МУОДИЛАҶОИ ИНТЕГРАЛИИ ФРЕДГОЛМ БО КОЭФФИЦИЕНТҲОИ ГАРМОНИКӢ

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Дар шкалаи логарифмӣ тартиби аниқи радиуси минималии информация ба-
рои муодилаҳои интегралӣ Фредгольми чинси дуюм бо коэффицентҳои гармоникӣ
ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: радиуси минималӣ, муодилаи интегралӣ, ядрои гармоникӣ, душвории
итилоотӣ, ададҳои Гелфанд.

M.AZIZOV, A.MUHLIS

INFORMATION COMPLEXITY OF APPROXIMATE SOLUTION OF INTEGRAL FREDHOLM'S EQUATIONS WITH HARMONIC COEFFICIENTS

S.Ayni Tajik State Pedagogical University

The exact logarithmic order is found of the minimal radius of information for the second
kind with periodic and harmonic kernels. The result shows that information complexity of the
Fredholm problem of the second kind with harmonic kernels has more high order in comparison
with complexity of the corresponding problem of approximation.

Key words: minimal radius, integral equations, harmonic kernels, information complexity, Gelfand num-
ber.

УДК 519.25::81'322::811.222.8

З.Д.УСМАНОВ, Г.М.ДОВУДОВ*

О СТАТИСТИЧЕСКОМ ПОРТРЕТЕ ТАДЖИКСКОГО ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан,

**Худжандский политехнический институт*

Таджикского технического университета им. акад. М.С.Осими

Поступила в редакцию 16.02.2017 г.

На основе статистической обработки коллекции текстов установлены частотности предложений различной длины, усреднённая частеречевая структура предложения, частеречевая частотность первого и последнего слова в предложении, распределение частотности частей речи в предложениях длиной в одно, два, ... и десять слов.

Ключевые слова: таджикский язык, предложение, часть речи, частотность.

Материал. Коллекция текстов суммарным объёмом в 24 файла, предназначенная для исследовательских целей, составлена из произведений С.Айнӣ “Ёддоштҳо” (т.т. 1- 4), С.Улуғзода “Достонҳои Шохнома” и “Субҳи ҷавонии мо”; Ч.Айтматова “Порабри сафеди Чингизхон” (перевод на таджикский), А.Баҳорӣ “Сунбула” и “Осори мунтахаб” (т. 1), У.Кӯҳзода “Тахти равон ва тахтбардорон”; А.Абдугаффора “Маҷмӯи ҳикояҳо” и “Барфи охирин”, Р.Махсумзода “Кафан киса надорад”, “Пули сирот” и “Соҷаи ишқ”, а также повестей и рассказов неизвестных авторов, извлеченных из разных интернет-сайтов. Используемая нами выборка текстов в электронном виде доступна по адресу www.tajlingvo.tj.

2. Информация о выборке приводится в табл. 1.

В этой таблице соответствующие строки характеризуют вклад авторов в совместную коллекцию текстов: в столбце 3 – размеры их текстовых файлов, измеряемые в словоупотреблениях; в столбце 4 – тот же материал, выраженный в процентах к суммарному количеству словоупотреблений; в столбце 5 – число использованных словоформ; в столбце 6 – среднее число словоупотреблений, приходящихся на одну словоформу.

Адрес для корреспонденции: Усманов Зафар Джураевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/1, Институт математики АН РТ. E-mail: zafar-usmanov@rambler.r

Таблица 1

Статистические данные о коллекции текстов

1. Авторы	2. Число произведений	3. Число словоупотр.	4. %	5. Число словоформ	6. Отношение (3)/(5)
Абдуғаффор А.	2	62144	5.69	13385	4.64
Айни С.	4	286741	26.25	27194	10.54
Айтматов Ч.	1	27779	2.54	7809	3.56
Баҳорӣ А.	2	102760	9.41	18462	5.57
Кӯҳзод У.	1	4804	0.44	1785	2.69
Махсумзод Р.	3	137754	12.61	19239	7.16
Улуғзода С.	2	122834	11.24	18002	6.82
Автор неизвестен	9	347666	31.82	37841	9.19
Итого	24	1092482	100	76100	14.36

Отметим, что итоговое количество 76100 словоформ, указанное в табл. 1, подсчитано для 1092482 словоупотреблений коллекции и не есть результат простого суммирования словоформ столбца 5, при котором завышается истинное значение этой величины вследствие того, что одна и та же словоформа повторно учитывается в нескольких произведениях.

К сказанному добавим, что итоговая величина 14.36, то есть число словоупотреблений, приходящихся на одну словоформу, получается путем деления соответствующих значений для коллекции в целом, а не как формальное усреднение данных столбца 6, которое выдаёт результат 6.27, не имеющий в нашем случае особого смысла.

Интересно также отметить, что среди всех авторов наивысший показатель плотности словоформ в тексте, равный $0.371 (= 1:2.69 = 1785: 4804)$, имеет У.Кӯҳзод.

3. Предварительная обработка статистического материала. Путём компьютерных вычислений установлено, что коллекция текстов содержит 88793 предложений, из которых 86777 уникальных и 2016 повторяющихся. В разрезе авторов аналогичная информация показана в табл. 2. Итоговая сумма 86777 уникальных (неповторяющихся) предложений рассчитывалась для коллекции в целом и не равна сумме чисел столбца 4, что выдает результат 87273, который превосходит истинное значение по причине повторного учета идентичных уникальных предложений различных авторов.

Таблица 2

Вклад авторов в коллекцию текстов

1. Авторы	2. Число произведений	3. Число предложений	4. Число уникальных предложений	5. Число повторяющихся предложений
Абдуғаффор А.	2	6714	6584	130
Айни С.	4	15254	15134	120
Айтматов Ч.	1	1901	1879	22
Баҳорӣ А.	2	10122	9915	207
Кӯҳзод У.	1	338	338	0
Махсумзод Р.	3	12832	12570	262
Улуғзода С.	2	10585	10493	92
Автор неизвестен	9	31047	30360	687
Итого	24	88793	86777	2016

Что касается итоговой суммы 2 016 повторяющихся предложений, то и она не является результатом сложения данных столбца 5, что дает число 1520 и занижает истинное значение по причине недоучета того, что некоторые уникальные предложения различных авторов оказываются повторяющимися в пределах коллекции в целом.

Ещё одна характеристика коллекции текстов – частота встречаемости предложений той или иной длины, измеряемая количеством слов (словоупотреблений), содержащихся в предложении. Полученные данные представлены в табл. 3, из которой видно, что все множество наличных предложений по признаку длины располагается в интервале 1-121.

Таблица 3

Частотность предложений по длине

Длина предложений	1	2	3	4	5	6				
Число предложений	1063	2689	3909	4916	5976	6693				
в %	1.2	3.02	4.4	5.54	6.73	7.54				
7	8	9	10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-121	Итого	
6159	5624	5269	4853	28726	8780	2647	951	538	88793	
6.94	6.33	5.93	5.47	32.35	9.89	2.98	1.07	0.61	100	

Предложения с числом словоупотреблений от 1 до 10 и от 1 до 30 включительно составляют соответственно 53.1 и 95.34% от общего количества 88793 предложений. Графическое представление табличных данных показано на рисунке, в котором по оси абсцисс откладываются значения длины предложений, а по оси ординат выраженные в процентах частоты их встречаемости в коллекции текстов.

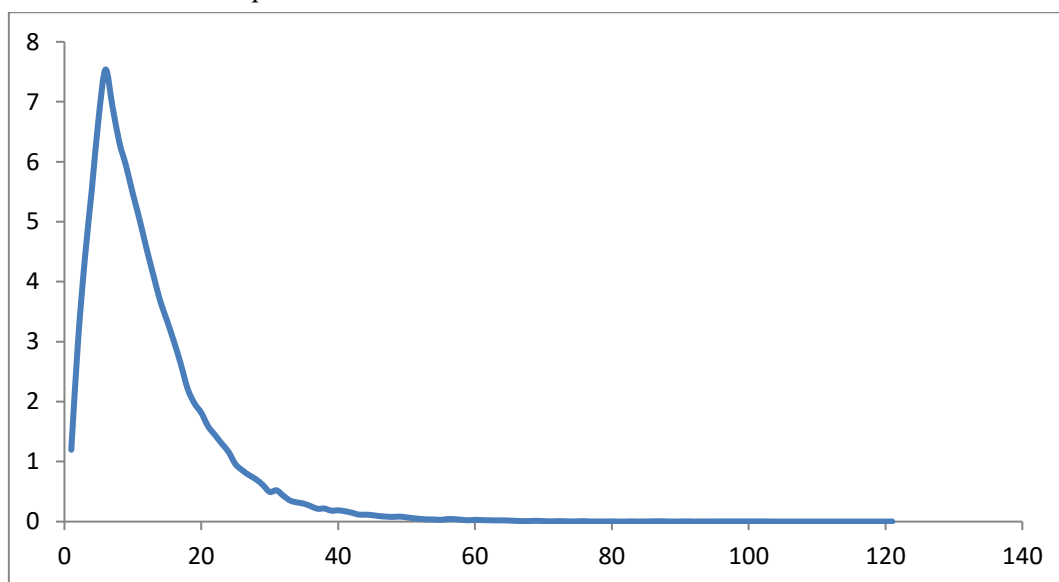


Рисунок. Частотность длины предложений.

4. Частеречевая структура таджикского предложения

Все результаты, представленные в последующих таблицах, получены путем вычислений с использованием программы таджикского компьютерного морфоанализатора [1], базы морфов таджикского языка [2], алгоритмов морфологического анализа [3] и автоматического позиционного кодирования словоформ [4].

Таблица 4

Частотность частей речи среди словоформ и словоупотреблений, в %

Часть речи	Среди словоформ	Среди словоупотреблений
Существительное	58.25	36.16
Прилагательное	19.8	7.39
Числительное	1.09	1.56
Местоимение	0.31	7.49
Глагол	11.74	11.86
Инфинитив	1.34	1.02
Причастие	3.85	3.89
Наречие	1.97	2.97
Предлог	0.07	8.17
Послелог	0	0
Союз	0.06	5.29
Частица	0.09	1.47
Междометие	0.08	0.12
Звукоподражательное слово	0.07	0.01
Нумератив	0.04	0.1
Омоним	1.24	10
Тире	0	2.5
Итого	100	100

Приведенные данные являются результатом обработки исходной коллекции текстов. Помимо частей речи, в таблицу двумя строками введены “омонимы” и “тире”. Причина их появления в том, что омонимы, в частности, выступают как омографы, а тире многофункциональны по своим значениям. На предварительном этапе исследования предложений разделить частоты их встречаемости по соответствующим частям речи не удаётся. Несмотря на это табл. 4 позволяет сформировать первое приближённое представление о частеречевой структуре таджикского предложения.

Действительно, в столбце словоупотреблений наиболее высокочастотными являются слова-существительные (36.16%) и слова-глаголы (11.86%), которые совместно составляют смысловое ядро предложения. Оно, в свою очередь, детализируется группой слов – предлогами (8.17%), прилагательными (7.39%), местоимениями (7.49%) и союзами (5.29%).

В дополнение к сказанному, из статистических данных табл.5 и 6 следует, что существительному, в основном, отводится первая позиция в предложениях (в 30.37% случаях), а глаголу – последняя (в 70.24% случаев), что, кстати, и отмечается в таджикской грамматике.

Таблица 5

Частотность части речи первого слова в предложениях коллекции текстов

Часть речи	Частотность в %
Существительное	30.37
Прилагательное	3.15
Числительное	1.16
Местоимение	11.18
Глагол	2.74
Инфинитив	0.13
Причастие	0.36
Наречие	4.99
Предлог	7.18
Союз	7.13
Частица	2.37
Междометие	0.41
Звукоподражательное слово	0.01
Нумератив	0.01
Тире	19.1
Омоним	9.71
Итого	100

Таблица 6

Частотность части речи последнего слова в предложениях коллекции текстов

Часть речи	Частотность в %
Существительное	10.77
Прилагательное	3.42
Числительное	0.15
Местоимение	2.04
Глагол	70.24
Инфинитив	0.15
Причастие	1.34
Наречие	0.39
Предлог	0.01
Союз	0.49
Частица	0.92
Междометие	0.16
Звукоподражательное слово	0.01
Нумератив	0.01
Тире	0
Омоним	9.9
Итого	100

Заключительная табл. 7 представляет статистику частеречевой структуры таджикских предложений, состоящих из одного, двух, ..., вплоть до 10 слов.

Таблица 7

Частотность частей речи в предложениях различной длины

.....Длина Часть речи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1-10
Существительное	43.84	31.91	34.75	35.78	36.55	36.83	36.43	36.76	37.38	37.39	36.7
Прилагательное	8.28	8.35	9.41	8.7	8.19	7.72	7.58	7.53	7.77	7.87	7.9
Числительное	0.75	1.3	0.7	0.85	1.04	1.22	1.29	1.38	1.44	1.48	1.27
Местоимение	5.17	9.65	10.34	10.75	10.69	10.84	10.82	10.56	9.89	9.59	10.35
Глагол	24.46	19.08	20.91	21.01	18.98	17.96	17.15	16.39	16.08	15.46	17.34
Инфинитив	0.19	0.17	0.54	0.59	0.71	0.56	0.62	0.7	0.83	0.86	0.69
Причастие	0.19	0.54	1.25	1.72	2.09	2.44	2.87	3.36	3.67	3.81	2.9
Наречие	3.85	2.05	2.54	2.83	2.99	3	3.14	3.31	3.25	3.28	3.11
Предлог	0	1.23	2.92	5.39	7.69	9.16	9.77	9.88	9.79	10.12	8.79
Послелог	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Союз	3.48	1.54	1.86	2.29	2.59	3.07	3.3	3.51	3.71	4.08	3.27
Частица	5.83	5.75	3.55	2.97	2.87	2.51	2.32	2.23	2.17	2.18	2.51
Междометие	3.39	1.86	0.83	0.37	0.39	0.22	0.21	0.22	0.18	0.14	0.29
Звукоподража- тельное слово	0.38	0	0.01	0.03	0.01	0	0	0.01	0	0.01	0.01
Нумератив	0	0	0.04	0.08	0.09	0.09	0.12	0.16	0.16	0.14	0.12
Тире	0.19	16.57	10.35	6.64	5.12	4.38	4.38	4	3.68	3.59	4.75
Итого	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Наиболее высокочастотные среди них, как видно из табл. 3, по длине (числу словоупотреблений) располагаются в интервале 4-10 и имеют почти идентичные частеречевые структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усманов З.Д., Довудов Г.М., Солиев О.М. Таджикский компьютерный морфоанализатор. Лицензия (информационный ресурс) зарегистрирован ЗИ-03.2.220 ТД, 20.12.2011. Национальный патентно-информационный центр. Министерство экономического развития и торговли РТ.
2. Усманов З.Д., Довудов Г.М. Формирование базы морфов таджикского языка. – Душанбе: Дониш, 2014, 110 с.
3. Усманов З.Д., Довудов Г.М. Морфологический анализ словоформ таджикского языка. – Душанбе: Дониш, 2015, 132 с.
4. Усманов З.Д., Довудов Г.М. Позиционное кодирование таджикских словоформ. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2015, № 1(158), с.58-66

З.Ч.УСМОНОВ, Г.М.ДОВУДОВ*

ОИД БА ХУСУСИЯТҲОИ ОМОРИИ ЧУМЛАҲОИ ЗАБОНИ ТОЧИКӢ

Институти математика ба номи А. Ҷӯраев,

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,

**Донишқадаи политехникии*

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи М.С.Осимӣ дар ш. Хучанд

Дар асоси коркарди омории маҷмӯи матнҳо басомади вохӯрии ҷумлаҳои дарозиашон гуногун, структураи умумии ҳиссаи нутқии ҷумлаҳо, омори ҳиссаи

нутқи калимаҳои аввалин ва охирини ҷумла, тақсимоти басомади вохӯрии ҳиссаҳои нутқ дар ҷумлаҳои иборат аз як, ду, ... даҳ калимаҳо, муайян карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: забони тоҷикӣ, ҷумла, ҳиссаи нутқ, басомади вохӯрӣ.

Z.D.USMANOV, G.M.DOVUDOV*

ON A STATISTICAL PORTRAIT OF TAJIK SENTENCES

A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,

**Khujand's Polytechnic Institute of the M.S.Osimi Tajik Technical University*

On the basis of a statistical processing of the text collection, the frequency of sentences to different lengths, their PoS averaged structure, PoS frequency of the first and last word in a sentence, the frequency distribution of PoS in sentences with one, two, ... and ten words are established.

Key words: Tajik language, sentence, part of speech (PoS), frequency.

УДК 81'322::811.222.8::519.25

Ш.Н.АШУРОВА, А.А.КОСИМОВ

**ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СЛОВЕСНЫХ
УНИГРАММ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕКСТА**

Худжандский политехнический институт

Таджикского технического университета им. академика М.С.Осими

Поступила в редакцию 25.02.2017 г.

Исследованы возможности критерия однородности Н.В.Смирнова и его модификатора распознавать автора текста по частотам словесных униграмм.

Ключевые слова: таджикский язык, униграмма, частотность, статистика, эффективность.

В настоящей статье мы продолжаем тестирование количественных характеристик на предмет их пригодности для идентификации авторов текстов. В качестве таковых в [1, 2] рассматривались буквы таджикского алфавита, в [3] – буквенные биграммы, в [4] – набор из пяти натуральных единиц измерения текста, а в [5] был рассмотрен ещё один количественный показатель текста – распределение частот встречаемости буквенных триграмм, с помощью которого удалось установить статистически достоверные различия, как между произведениями, так и между творчествами различных авторов.

Теперь мы обращаемся к ещё одному количественному показателю текста – распределению частот встречаемости словесных униграмм и в качестве исследовательского инструмента тестируем критерий однородности Н.В.Смирнова о принадлежности двух независимых выборок одному закону распределения [6] и сопутствующий ему метод, использованный в [3, 5].

1. Информация о коллекции текстов. Так же, как и в [3], выборка текстов была представлена произведениями А.Фирдоуси, Дж.Руми, С.Айни, М.Турсунзода и Л.Шерали.

Адрес для корреспонденции: Косимов Абдунаби Абдурауфович. 735700, Республика Таджикистан, Худжанд, ул. Ленина, 226, Худжандский политехнический институт Таджикского технического университета. E-mail: abdunabi_kbtut@mail.ru

2. Обработка литературных данных. В качестве единиц измерения текста используются словесные униграммы. Процесс обработки литературных данных реализуется в 3 этапа.

Этап 1. Вычисления частот встречаемости словесных униграмм по отдельности для всех упомянутых в п.1 произведений (авторов – 5, у каждого – по 2 произведения, итого – 10 текстов).

На основе полученных данных строятся функции распределения $F_{i,n}(\lambda)$ частотности λ униграмм слов для авторских текстов, помечаемых индексом i , $i = 1, \dots, 10$.

Этап 2. Вычисление по формуле

$$D_{n,m}^{(i,j)} = \sup_{\lambda} |F_{i,n}(\lambda) - F_{j,m}(\lambda)| \quad (1)$$

максимального значения взаимного отклонения функций распределения частотностей словесных униграмм i -го и j -го произведений, а по ним и статистики $S_{n,m}^{(i,j)}$ Н.В.Смирнова (см. [6]), по формуле:

$$S_{n,m}^{(i,j)} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m}^{(i,j)}, \quad (2)$$

где n и m – суммарные количества словесных униграмм в i -ом и j -ом произведениях.

Одновременно с (1) и (2) применяется другой способ обработки данных. Именно, вместо (1) используется формула

$$d_p^{(i,j)} = \sup_{\lambda} |F_{i,p}(\lambda) - F_{j,p}(\lambda)| \quad (3)$$

максимального значения взаимного отклонения функций распределения частотностей униграмм i -го и j -го произведений, а вместо (2) - формула

$$s_p^{(i,j)} = \sqrt{\frac{p}{2}} d_p^{(i,j)}, \quad (4)$$

причём в (3) и (4) p – общее число словесных униграмм в двух рассматриваемых произведениях. Очевидно, что (3) и (4) являются упрощениями формул (1) и (2). Они тестируются здесь для того, чтобы получить представление о перспективности их использования.

Этап 3. Проверка нулевой гипотезы H_0 о том, что пара произведений (авторов), помеченных индексами i и j , является выборками из одной и той же генеральной совокупности. Если речь идёт о произведениях, то они считаются однородными и могут принадлежать одному и тому же автору. Если же речь идёт об авторах, то их однородность

понимается в смысле неразличимости соответствующих функций распределений частотностей словесных униграмм.

Утверждение H_0 проверяется путём тестирования неравенства

$$S_{n,m}^{(i,j)} > K_\alpha, \quad (5)$$

в котором K_α - квантиль А.Н.Колмогорова уровня значимости α ($= 0.05, 0.01, 0.001$).

Если (5) выполняется для заданного уровня значимости α , то гипотеза H_0 об “однородности” i и j - объектов отвергается. Справедливой, с уровнем значимости $1 - \alpha$, становится конкурирующая (альтернативная) гипотеза H_1 , противоречащая H_0 : i и j - объекты “не однородны”.

Если имеет место неравенство

$$S_{n,m}^{(i,j)} < K_\alpha, \quad (6)$$

то принимается гипотеза H_0 об “однородности” i и j - объектов.

Аналогичные неравенства привлекаются для принятия решений по результатам применения формул (3) и (4) с необходимыми оговорками.

4. Результаты 1-го этапа о распределениях частотности словесных униграмм отдельных произведений и их авторов здесь не приводятся по причине того, что соответствующие данные слишком большого объёма. Вместо них в конце статьи даётся список высокочастотных словоформ всей рассматриваемой коллекции текстов, что формирует представление о частотности словоформ таджикской литературы в целом.

Результаты 2-го этапа показаны в табл. 1. В каждой ячейке даются два числа – верхнее число, подсчитанное по формулам (1) и (2), и нижнее, подсчитанное по формулам (3) и (4). Отметим, что в ячейках на главной диагонали представлена информация об отношениях между произведениями одного автора, а во всех других ячейках - информация об отношениях между произведениями различных авторов.

Результаты 3-го этапа связаны с проверкой нулевой гипотезы для уровня значимости $\alpha = 0.001$, которому соответствует квантиль А.Н.Колмогорова со значением $K_\alpha = 1.95$. В этом случае для всех статистик Н.В.Смирнова из табл. 1, расположенных на главной диагонали, кроме ячейки [Фирдоуси “Рустам ва Сӯҳроб” – Фирдоуси “Бежан ва Манижа”] и [Турсунзода “Хасани Аробакаш” – Турсунзода “Садои Осӣ”], выполняется неравенство (6). Согласно критерию Н.В.Смирнова, это эквивалентно утверждению о том, что произведения одного и того же автора (кроме Фирдоуси и Турсунзода) однородны, то есть подчиняются одному и тому же распределению частотностей словесных униграмм, а произведения Фирдоуси и Турсунзода оказываются неоднородными.

Таблица 1

Значения статистик $S_{n,m}^{(i,j)}$ Н.В.Смирнова и показателя $s_p^{(i,j)}$ для униграмм слов

Авторы и произведения	Фирдоуси Беж.&Ман.	Руми Дафтари Аввал	Турсунзода Садои Осиё	Шерали Катибаҳо	Айни Одина
Фирдоуси Рустам ва Сӯҳроб	2.2796 1.2919	6.3449 4.7129	5.9856 4.2455	3.7242 3.3379	6.3449 4.2007
Руми Дафтари Дуввум	8.3583 6.1825	1.9210 1.1770	3.3818 3.0308	1.8113 2.4375	9.3682 6.4017
Турсунзода Ҳасани Аробакаш	4.9376 3.6265	4.6138 4.4314	2.9450 2.3204	2.2278 2.0895	4.8881 3.9475
Шерали Суханреза	5.0372 4.3853	2.6470 3.4834	1.7168 1.5667	1.3191 1.1656	4.8499 5.1193
Айни Ахмади Девбанд	4.3760 3.2500	7.1920 7.2353	6.3935 5.1482	4.0936 3.7043	1.9037 1.5601

Что касается статистики Н.В.Смирнова, расположенной вне главной диагонали табл.1, то для них, кроме ячейки [Шерали “Суханреза” – Турсунзода “Садои Осиё”] и [Руми “Дафтари Дуввум” – “Шерали Катибаҳо”], выполняется неравенство (5). Последнее эквивалентно утверждению о том, что произведения разных авторов не однородны, то есть принадлежат различным распределениям частот встречаемости словесных униграмм, а указанные произведения Шерали и Турсунзода, Руми и Шерали оказываются однородными.

Таким образом, без учёта пробелов критерий Н.В.Смирнова из 25 случаев лишь в 4-х случаях даёт ошибочный результат. Следовательно, эффективность применения критерия оценивается в 84%.

Идентификация авторства по формулам (3) и (4) также оказывается вполне приемлемой, если вместо (5) и (6) воспользоваться их аналогами:

$$s_p^{(i,j)} > k, \quad (7)$$

$$s_p^{(i,j)} < k, \quad (8)$$

полагая при этом, что $k = 1.95$.

В таком случае с выполнением неравенства (7) будем связывать неоднородность i и j произведений, а с неравенством (8) – напротив, их однородность. Применяя это правило к нижнему ряду чисел табл.1, устанавливаем, что (7) не выполняется для всех ячеек, кроме ячейки [Шерали “Суханреза” – Турсунзода “Садои Осиё”], расположенной вне главной диагонали, а (8) нарушается тоже в одной ячейке на пересечении произведений Турсунзода. В рассматриваемом случае эффективность метода составляет 92% и оказывается даже выше, чем для критерия Н.В.Смирнова.

5. Заключение. Из полученных результатов извлекается следующее статистическое

Утверждение. Критерий Н.В.Смирнова и его модификатор позволяют по частотности знаков таджикского алфавита (словесных униграмм) с достаточно высокой степенью эффективности идентифицировать произведения поэтов классической таджикско-персидской литературы, а также различных авторов современной таджикской поэзии и прозы.

Высказанное утверждение опирается на результаты обработки ограниченного по объёму материала, который, тем не менее, как по составу авторов, так и по списку использованных произведений является *представительной выборкой* из генеральной совокупности изучаемой предметной области.

6. О частотности словесных униграмм в таджикской литературе. Основной вывод, сделанный в предыдущем пункте, подсказывает, что о частотах униграмм слов можно говорить лишь в применении к отдельным текстам, произведениям и даже к творчеству конкретных писателей и поэтов. Вместе с тем статистически достоверные различия обнаруживаются как между произведениями, так и между творчествами различных авторов. Следовательно, приводимые далее в табл. 2 распределения частот встречаемости словесных униграмм могут быть полезны для формирования хотя бы приближённого представления о том, что имеет место для генеральной совокупности – современного литературного таджикского языка.

Таблица 2

Относительная частотность таджикских униграмм слов

аз	0.0284	чӣ	0.0038	кунад	0.0018	сӯи	0.0012
ба	0.0271	мо	0.0034	кӣ	0.0017	хеш	0.0012
ки	0.0193	кард	0.0033	чо	0.0017	чони	0.0012
дар	0.0182	андар	0.0030	хаме	0.0017	барои	0.0012
он	0.0159	гар	0.0030	кун	0.0017	даст	0.0012
ин	0.0135	нест	0.0030	агар	0.0016	дид	0.0012
ту	0.0098	бувад	0.0026	туро	0.0016	каз	0.0012
ӯ	0.0094	бошад	0.0025	сари	0.0016	вай	0.0011
бар	0.0088	ҳама	0.0024	боз	0.0016	об	0.0011
зи	0.0083	на	0.0023	бахри	0.0015	дили	0.0011
ман	0.0082	яке	0.0023	худро	0.0015	роҳ	0.0011
аст	0.0076	омад	0.0023	кай	0.0015	ваз	0.0011
чун	0.0075	пас	0.0022	мар	0.0014	чуз	0.0010
ва	0.0072	пеши	0.0022	чаҳон	0.0014	рустам	0.0010
то	0.0071	ду	0.0022	ӯро	0.0014	сад	0.0010
бо	0.0067	зон	0.0022	кор	0.0014	кас	0.0010
хар	0.0062	маро	0.0020	чунин	0.0013	гашт	0.0010
гуфт	0.0059	дил	0.0020	асту	0.0013	рӯз	0.0010
шуд	0.0056	сар	0.0020	кӯ	0.0013	пур	0.0010
эй	0.0049	шавад	0.0019	шуда	0.0013	пеш	0.0010
буд	0.0047	карда	0.0019	зин	0.0013	шоҳ	0.0010
хам	0.0045	дигар	0.0018	ояд	0.0013	чаши	0.0010
худ	0.0044	чон	0.0018	ҳамчу	0.0013	чунки	0.0010
чу	0.0040	ё	0.0018	дасти	0.0013	дод	0.0009
як	0.0040	ҳақ	0.0018	ҳаст	0.0012	рафт	0.0009

Напомним, что в рассматриваемом случае число различных униграмм слов – 28467. Уровень 75.021% покрытия исходной текстовой коллекции составляет 3070 униграмм, а 50.006% – 370 и 37.027% – 100, список которых представлен в табл. 2. Общее число обработанных униграмм – 170958.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усманов З.Д., Солиев О.М. Проблема раскладки символов на компьютерной клавиатуре.– Душанбе: Ирфон, 2010, 104 с.
2. Усманов З.Д., Косимов А.А. Частотность букв таджикской литературы. – ДАН РТ, 2015, т.58, № 2, с. 112-115.
3. Усманов З.Д., Косимов А.А. Частотность биграмм таджикской литературы. – ДАН РТ, 2016, т.59, № 1-2, с. 28-32.
4. Усманов З.Д., Косимов А.А. Цифровой образ “Шахнаме” (“Книги царей”) А.Фирдауси – ДАН РТ, 2014, т.57, № 6, с. 471- 476.
5. Усманов З.Д., Косимов А.А. О распознавании авторства таджикского текста. – ДАН РТ, 2016, т.59, № 3-4, с. 114-119.
6. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики.– М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. литературы, 1983, 416 с.

Ш.Н.АШУРОВА, А.А.ҚОСИМОВ

БАҲОДИҶИИ САМАРАБАХШИИ ИСТИФОДАИ УНИГРАММАҲОИ КАЛИМАҲО ДАР МОНАНДКУНИИ МАТН

*Донишқадаи политехникии Донишгоҳи техникии Тоҷикистон
ба номи М.С.Осимӣ дар ш. Хуҷанд*

Таҳқиқот оид ба имконияти истифодабарии меъёри ягонагии Н.В.Смирнов ва ба шакли дигар овардашудаи он, барои муайянкунии муаллифи матн бо басомади вохӯрии униграммаҳои калимаҳо гузаронида шуд.

Калимаҳои калидӣ: забони тоҷикӣ, униграмма, басомади вохӯрӣ, омор, самаранокӣ.

SH.N.ASHUROVA, A.A.KOSIMOV

EFFICIENCY EVALUATION OF USING WORDS UNIGRAMM FOR A TEXT IDENTIFICATION

Khujand's Polytechnic Institute of the Tajik Technical University named by M.S.Osimi

By this work the possibilities of N.V.Smirnov's homogeneity criterion and its modifier for text identification by frequencies of word unigrams were explored.

Key words: Tajik language, unigram, frequency, statistics, efficiency.

УДК 523.532

Г.И.КОХИРОВА, С.Х.АБДУЛЛОЕВ, У.Х.ХАМРОЕВ

**ПОТЕНЦИАЛЬНО ОПАСНЫЙ АСТЕРОИД 2004VL86
ВО ВРЕМЯ СБЛИЖЕНИЯ С ЗЕМЛЕЙ 27 ЯНВАРЯ 2015 Г.**

*Институт астрофизики АН Республики Таджикистан
Поступила в редакцию 28.04.2017 г.*

Приведены результаты наблюдений астероида (357439) 2004VL86, отнесенного к группе потенциально опасных объектов, в период его сближения с Землей. Получены координаты астероида, построена кривая блеска объекта и уточнен период его вращения.

Ключевые слова: астероид, астрометрия, фотометрия, координаты, кривая блеска, период вращения.

Астероид 2004VL86 был открыт 30 января 2004 г. в рамках поисковой программы LINEAR, в обсерватории Нью Мехико, США. По наблюдениям определена орбита астероида и оказалось, что он имеет тесные сближения с Землей. Согласно некоторым оценкам, диаметр астероида составляет более 300 м. Из-за близких подходов к Земле и размера 2004VL86 классифицирован как потенциально опасный астероид. Очередной близкий подход астероида к Земле произошел 26-27 января 2015 г., тогда он сблизился с нашей планетой на расстояние 1.2-1.6 млн. км. Это событие вызвало огромный интерес к астероиду. Во-первых, из-за его размера. До сближения диаметр 2004VL86 оценивался в 600-700 м и он стал бы самым крупным телом, подлетающим к Земле на такое расстояние за последние 10 лет. Во-вторых, из-за относительно большой яркости астероида. Во время этого сближения блеск 2004VL86 равнялся 9^m звездным величинам, и его можно было наблюдать с помощью любительских средств. В связи с этим во всем мире проведена кампания по мониторингу астероида наземными наблюдательными средствами. Хотя 2004VL86 и имеет сотни метров в поперечнике, с расстояния в 1.2 млн. км он даже в самые крупные оптические телескопы практически неотличим от звезды. Однако радарные

Адрес для корреспонденции: Абдуллоев Сафарали Холмуродович. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бухоро, 22, Институт астрофизики АН РТ. E-mail: a-bakhodur@mail.ru

исследования способны «разглядеть» такие объекты более детально, чем оптические наземные средства. Радарные наблюдения 2004BL86 проведены на 70-метровом радиотелескопе в Голдстоуне, США [1]. Полученные радиоизображения 2004BL86 имеют разрешение 4 м на пиксель. После их конвертации в обычные снимки размер небесного тела был существенно уточнен, диаметр оказался равен 325 м, то есть вдвое меньше более ранних оценок и, самое важное, выяснилось, что у астероида имеется спутник (рис.1).

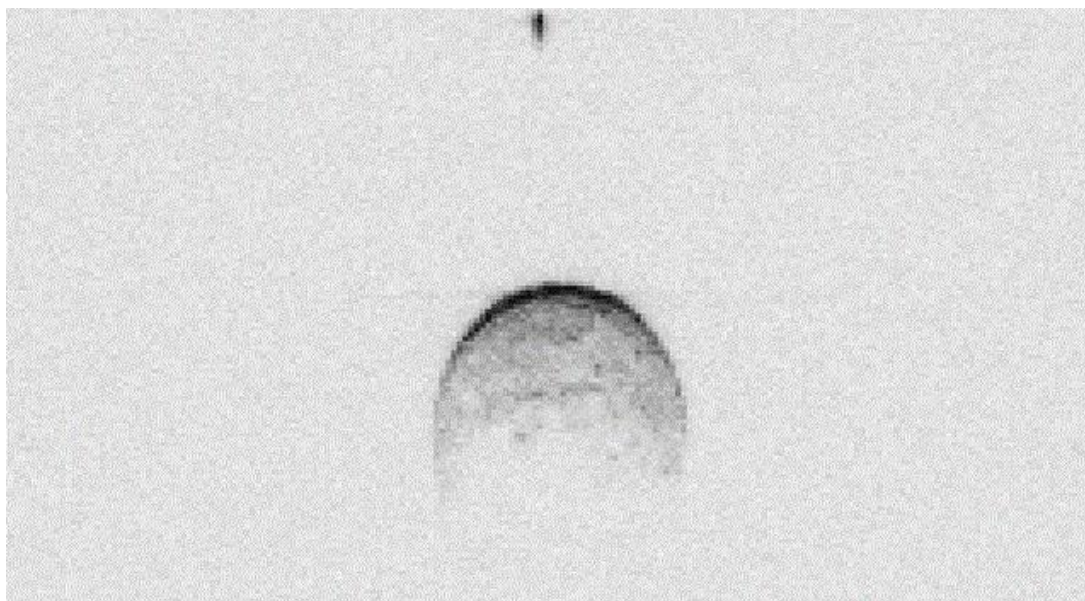


Рис.1. Изображение астероида 2004BL86 и его спутника, полученное с помощью радиотелескопа.

Радарные наблюдения показали, что форма астероида близка к сферической, а на его поверхности видны шероховатости. Спутник астероида 2004BL86 вращается по широкой орбите практически перпендикулярно к экватору астероида. Поперечник спутника оценивается в 70 м. Отметим, что наличие «луны» у 2004BL86 является интересным, но не уникальным фактом среди астероидов. По статистике примерно у 16% всех астероидов, сближающихся с Землей и имеющих размер свыше 200 метров, есть свои луны. Наряду с оптическими наблюдениями проводились и спектральные наблюдения 2004BL86 [1]. Они показали, что по своему химическому составу астероид близок к астероиду Веста, который в 2015 г. подробно изучил космический аппарат НАСА «Рассвет».

Мониторинг астероида (357439) 2004BL86 в момент его сближения с Землей был осуществлен также и в Гиссарской астрономической обсерватории (ГисАО). Для определения координат, блеска и его изменения, оценки геометрической фигуры и уточнения периода вращения наблюдения объекта проведены 27 января 2015 г. на телескопе АЗТ-8 с использованием широкополосного фильтра R. На рис.2 показано положение астероида на звездном небе во время наблюдений, когда объект находился в созвездии Рыси и имел следующие параметры [2]: мировое время в момент наблюдений $UT=16^h00^m$; координаты $\alpha=09^h02^m45.3^s$ и $\delta=+32^\circ58'38''$; блеск в фильтре R $m(R)=9.9$ звездных величин; фаза

$ph=15.3\%$; расстояние от Земли $\Delta=0.011$ а.е. (1.65 млн. км); расстояние от Солнца $r=0.996$ а.е. (149.4 млн. км). В течение трёх часов наблюдений получено 1300 изображений объекта, одно из которых приведено на рис.2.

Таблица

Астероид 2004BL86 имеет следующие элементы орбиты [1-2],
приведенные к равноденствию 2000.0:

большая полуось	$a=1.50$ а.е.
перигелийное расстояние	$q=0.897$ а.е.
афелийное расстояние	$Q=2.107$ а.е.
эксцентриситет	$e=0.402$
наклонение	$i=23.78$ град.
долгота восходящего узла	$\Omega=151.69$ град.
аргумент перигелия	$\omega=140.17$ град.
истинная аномалия	$M=208.112$ град.
период обращения	$P=1.84$ года
абсолютная звездная величина	$H=19.3^m$

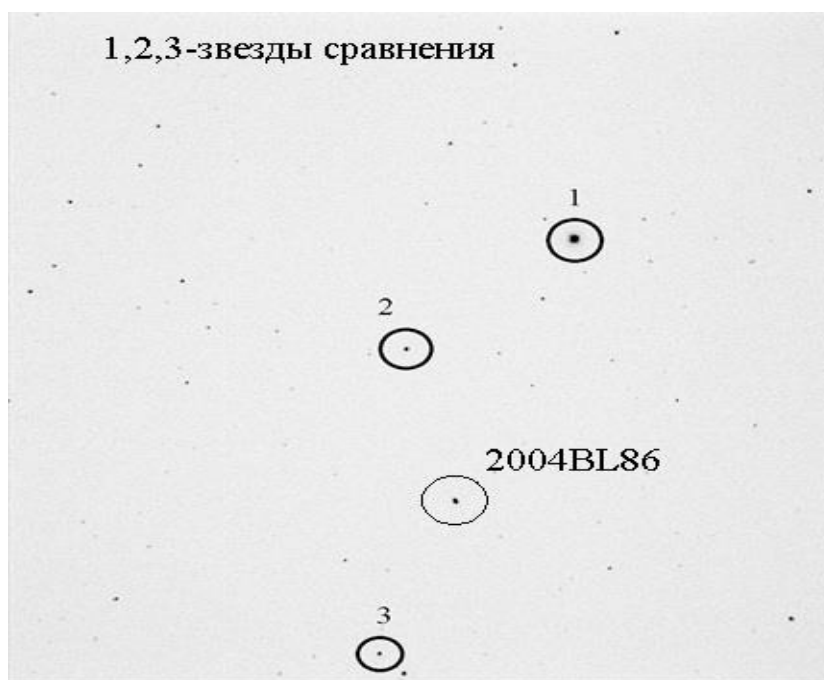


Рис.2. Кадр с изображением астероида (357439) 2004BL86, полученный в ГисАО 27 января 2015 г.

Положение орбиты объекта в межпланетном пространстве приведено на рис.3.

Орбитальная скорость астероида на момент наблюдений, вычисленная по формуле

[3]

$$V^2 = G(M_{\odot}) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

где $G=6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{с}^2 \cdot \text{кг}$ – гравитационная постоянная и $M_{\odot}=2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ – масса Солнца, составила 34.6 км/с. Отметим, что в момент прохождения через перигелий орбиты (положение наименьшего расстояния от Солнца) скорость объекта составляет 37.4 км/с и в момент прохождения афелия (положение наибольшего расстояния от Солнца) – 15.9 км/с.

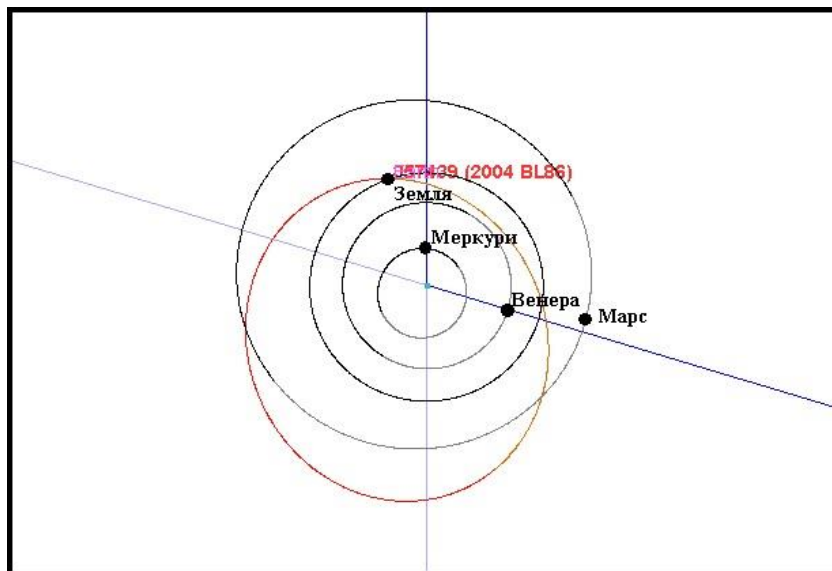


Рис.3. Схема расположения орбиты астероида 2004BL86 во внутренней Солнечной системе во время тесного сближения с Землей в 2015 г.

Обработка полученных кадров проведена с помощью программы MaxIm DL [4]. Для определения блеска астероида 2004BL86 использованы 35 звезд сравнения из каталога Tucho [5] со спектральными классами близкими к спектральному классу Солнца G2, расположенных вблизи астероида (рис.2). Кроме координат, для этих звезд известны V – звездные величины в фильтре V, (B-V) – показатели цвета в стандартной фотометрической системе. Переход от инструментальных звездных величин астероида в систему относительных звездных величин производился с помощью каталога Tucho и данных стандартной фотометрической системы [6]. По звездам сравнения определены звездные величины астероида в фильтре R в моменты наблюдений и построена его кривая блеска. Точность измерений блеска астероида не превышает 0.02 звездных величин.

Результаты определения координат астероида по наблюдениям в ГисАО приведены на рис.5, где по оси абсцисс даны α – прямое восхождение и по оси ординат δ – склонение объекта. Результаты определения блеска астероида в фильтре R приведены на рис. 6, где по оси абсцисс дана дата наблюдений и по оси ординат – mR – звездная величина в фильтре R.



Рис.4. Траектория астероида 2004BL86 по наблюдениям в ГисАО 27 января 2015 г.

Кривая блеска астероида в фильтре R (рис.5) показывает, что амплитуда изменения блеска за три часа наблюдений составляет 0.4 звездной величины. Как видно из графика, все точки наблюдений достаточно хорошо вписаны в общую кривую блеска, точки, значительно отстоящие от кривой или от средней амплитуды изменения блеска, не наблюдаются. Это указывает на однозначную переменность в амплитуде блеска астероида из-за его вращения. Отсюда можно предположить, что геометрическая фигура астероида действительно является сферической.

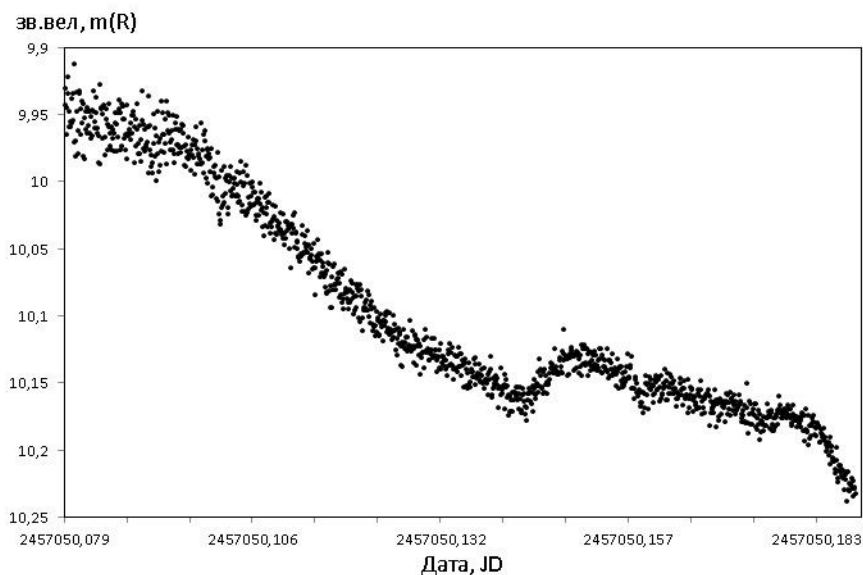


Рис.5. Кривая блеска астероида (357439) 2004BL86 в фильтре R по наблюдениям в ГисАО 27 января 2015 г.

Для поиска периодических изменений блеска использована программа «Period04» [7]. В результате получен спектр мощности (рис. 6), где амплитуда, равная 0.14 Гц, соответствует периоду вращения 2.22 часа (133.2 минуты). Период вращения, найденный по радарным наблюдениям 26 января 2015 г., составляет 2.64 часа (158.4 минуты) [1]. Разница между нашим результатом и ранее найденным периодом составляет почти 25 минут. Наблюдения объекта в ГисАО проведены спустя одни сутки после радионаблюдений, за это время аспект видимости астероида изменился, и это несколько повлияло на величину найденного периода вращения. Тем не менее, данные оптических наблюдений по точности превышают данные радарных наблюдений, и мы рассматриваем найденный нами период более достоверным.

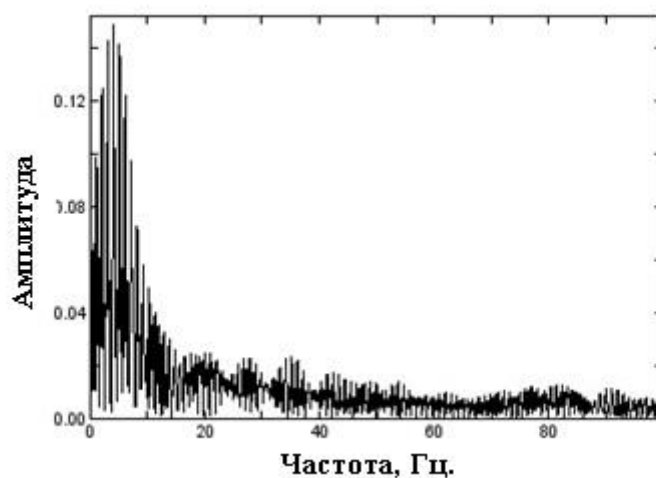


Рис.6. Спектр мощности, полученный в результате Фурье-анализа наблюдений астероида (357439) 2004BL86.

Заключение

Проведены астрометрические и фотометрические наблюдения астероида (357439) 2004BL86 в период его сближения с Землей 27 января 2015 г. Определены координаты объекта, блеск и амплитуда его изменения со временем, подтверждено, что астероид имеет сферическую фигуру. Найден период вращения астероида, равный 2.2 часа. Отличие данного значения от периода, найденного по радионаблюдениям, объясняется разными аспектами видимости астероида во время наблюдений в разные даты. Для уточнения характеристик необходимо продолжить мониторинг астероида.

ЛИТЕРАТУРА

1. <http://jpl.nasa.gov/horizons.cgi#results>.
2. <http://www.minorplanetcenter.net/iau/MPEph/MPEph.html>.
3. Кононович Э.В., Мороз В.И. Общий курс астрономии. - 2004, 544 с.
4. <http://www.kopona.net/soft/multimedia/29829-maxim-dl-pro-suite-v515.html>.

5. <http://www.astronet.ru/db/msg/1191467>.
6. Страйжис В. Многоцветная фотометрия звезд. - Вильнюс: Мокслас, 1977, 312 с.
7. <https://www.univie.ac.at/tops/Period04/>.

Г.И.ҚОҶИРОВА, С.Х.АБДУЛЛОЕВ, У.Х.ҲАМРОЕВ

**АСТЕРОИДИ ЭҲТИМОЛАН-ХАТАРОВАРИ (357439) 2004BL86 ҲАНГО-
МИ НАЗДИКШАВӢ БА ЗАМИН РӮЗИ 27 ЯНВАРИ СОЛИ 2015**

Институту астрофизикаи Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Натиҷаҳои мушоҳидаҳои астероиди (357439) 2004BL86, ки ба гурӯҳи эҳтимолан-хатаровар дохил мешавад, ҳангоми наздикшавӣ ба Замин пешниҳод карда шудаанд. Координатҳо ва ҳатти қачи дурахшонии астероид муайян шудаанд, даври чархзаниаш аниқ карда шуд.

Калимаҳои калидӣ: астероид, астрометрия, фотометрия, координатҳо, ҳати қачи дурахшонӣ, даври чархзанӣ.

G.I.KOKHIROVA, S.KH.ABDULLOEV, U.KH.KHAMROEV

**POTENTIALLY HAZARDOUS ASTEROID (357439) 2004BL86 DURING
CLOSE APPROACH TO THE EARTH ON JANUARY 27, 2015**

Institute of Astrophysics of AS of the Republic of Tajikistan

The results of observations of asteroid (357439) 2004BL86 denoted as potentially hazardous asteroid during its close approach to the Earth on January 27, 2015 are given. The coordinates and light curve were obtained, and the rotation period of asteroid was estimated.

Key words: asteroid, astrometry, photometry, coordinates, light curve, period of rotation.

УДК 531+539.2

Х.Х.МУМИНОВ, А.Т.МАКСУДОВ*, Т.А.ТОШОВ

**К ТЕОРИИ МАГНИТОУПРУГИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ
В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ С ВЫСОКИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ СПИНА
ПРИ УЧЕТЕ ОБМЕННОЙ АНИЗОТРОПИИ**

Физико-технический институт им. С.У.Умарова АН Республики Таджикистан,

**Худжандский научный центр АН Республики Таджикистан*

Поступила в редакцию 28.03.2017 г.

Приведены результаты исследования негејзенберговского ферромагнетика со значением спина $S=1$ с обменной анизотропией при наличии фононной модуляции спин-квадрупольных волн методом обобщенных когерентных состояний группы $SU(3)$. Показано, что наличие механизма магнитоупругих взаимодействий может привести к обмену энергией между фононной и спин-квадрупольной подсистемами.

Ключевые слова: негејзенберговский ферромагнетик, спин-фононное взаимодействие, магнитоупругие волны, спин-квадрупольные волны.

Вопросы динамики нелинейных волн намагниченности в магнитных средах со значениями спина $S \geq 1$ привлекают неослабевающее внимание многих исследователей в течение последних десятилетий [1-7]. Это связано с очень богатым спектром явлений, связанных с возбуждением мультипольной спиновой динамики и проявлением целого ряда новых эффектов, не свойственных нелинейной динамике волн намагниченности в магнетиках со значениями спина $S=1/2$ и даже более высокими спинами, однако в отсутствие одноионной анизотропии [8]. Вообще говоря, одноионная анизотропия в системах с высокими спинами приводит к возбуждению мультипольной спиновой динамики и, таким образом, для адекватного описания подобных квантовых спиновых систем более правильным будет использовать операторы группы $SU(2S+1)$, где S – значение спина, поскольку спиновый гамильтониан будет содержать нелинейные члены от спиновых опера-

Адрес для корреспонденции: Муминов Хикмат Халимович. 734069, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/1, Физико-технический институт АН РТ. E-mail: muminov.khikmat@mail.ru

торов, вследствие чего спиновый гамильтониан не может быть выражен в виде линейной комбинации спиновых операторов, которые представляют собой операторы группы SU(2).

Физика же данного явления, как было показано ранее в работах [1,2] и наших работах [3,4], заключается, по крайней мере, в возбуждении квадрупольных степеней спиновой динамики при наличии одноионной анизотропии, или одноионного обмена, а в общем случае имеет место возбуждение мультипольных степеней спиновой динамики.

О наличии квадрупольных электрических полей в ряде магнетиков, таких как Sr_2O_3 , и в купратах имеются экспериментальные данные [5,6] при температурах ниже нееловской для антиферромагнетиков. Очевидно, что данное наблюдение можно сделать при полной или частичной компенсации намагниченностей подрешеток в основном состоянии.

Одной из важнейших задач, до настоящего времени слабо изученных, является проблема магнитоупругого спаривания вследствие спин-фононных взаимодействий в магнетиках с высокими значениями спинов. Эта проблема приобретает большую актуальность в связи с возможностью куперовского спаривания в антиферромагнитных купратных слоях керамик высокотемпературных сверхпроводников [7,8].

Ниже мы сосредоточимся на изучении простейшего случая спин-фононных взаимодействий на примере обменного квазидномерного ферромагнетика со спином $S=1$.

Гамильтониан модели имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_S + H_p, \quad (1)$$

где

$$\hat{H}_S = -J \sum_j \left\{ \hat{S}_j \hat{S}_{j+1} + \delta \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+1}^z \right\}$$

является спиновой частью гамильтониана, $J = J(|y_{j+1} - y_j|)$ – обменный интеграл, δ – одноосная анизотропия, $\hat{S}_j \hat{S}_{j+1} = \hat{S}_j^x \hat{S}_{j+1}^x + \hat{S}_j^y \hat{S}_{j+1}^y + \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+1}^z$, спиновые операторы ($S=1$) имеют вид:

$$\hat{S}^+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}^- = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и связаны известным соотношением $\hat{S}^\pm = \hat{S}^x \pm i\hat{S}^y$,

а

$$H_p = \sum_j \left\{ \frac{p_j^2}{2m} + \frac{k}{2} (y_{j+1} - y_j)^2 \right\}$$

представляет собой фононную часть гамильтониана, учитывающую колебания атомов.

Исследуя гамильтониан (1) с применением техники обобщенных когерентных состояний (ОКС) группы SU(3) в действительной параметризации [3]

$$|\psi\rangle = e^{-i\varphi\hat{S}^z} e^{-i\theta\hat{S}^y} e^{-i\gamma\hat{S}^z} e^{2igQ^{xy}} |0\rangle, \quad (2)$$

то есть усредняя гамильтониан (1) по ОКС (5) группы SU(3), получим квазиклассический гамильтониан в следующем виде

$$H = H_s + H_{sp} + H_p, \quad (3)$$

где

$$H_s = s^2 J^0 \int \frac{dx}{a_0} \left[\frac{a_0^2}{2} (S_x)^2 - \Delta (S^2)^2 \right] \quad (3.a)$$

является спиновой частью гамильтониана,

$$H_p = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{a_0} \left(\frac{p^2}{m} + a_0^2 k y_x^2 \right) \quad (3.б)$$

- фононной частью гамильтониана и

$$H_{sp} = -s^2 J^0 \chi \int \frac{dx}{a_0} y_x (S^z)^2 \quad (3.в)$$

есть гамильтониан спин-фононного взаимодействия, где χ – константа спин-фононного взаимодействия, а средние от спиновых операторов принимают следующий вид

$$\hat{S}^+ = e^{i\varphi} \cos 2g \sin \theta,$$

$$\hat{S}^- = e^{-i\varphi} \cos 2g \sin \theta,$$

$$\hat{S}^z = \cos 2g \cos \theta,$$

здесь θ и φ – эйлеровы углы, g – параметр, описывающий возбуждение квадрупольного момента, а угол γ описывает вращение квадрупольного момента относительно направления намагниченности [3,4].

Для получения уравнений, описывающих магнитоупругие волны, используем следующие уравнения движения для спин-квадрупольной подсистемы [4]

$$\begin{aligned}\hbar\dot{\varphi}_t &= -\frac{1}{\cos 2g \sin \theta} \frac{\delta H}{\delta \theta}, \\ \hbar\dot{\theta}_t &= \frac{1}{\cos 2g \sin \theta} \left(\frac{\delta H}{\delta \varphi} - \cos \theta \frac{\delta H}{\delta \gamma} \right), \\ \hbar\dot{g}_t &= \frac{1}{2 \sin 2g} \frac{\delta H}{\delta \gamma}, \\ \hbar\dot{\gamma}_t &= -\frac{1}{2 \sin 2g} \frac{\delta H}{\delta g} + \frac{\cos \theta}{\cos 2g \sin \theta} \frac{\delta H}{\delta \theta}\end{aligned}$$

и, дополняя эту систему очевидными уравнениями

$$\begin{aligned}y_t &= -\frac{\delta H}{\delta p} = -\frac{p}{m}, \\ p_t &= -\frac{\delta H}{\delta y},\end{aligned}$$

получим полный набор классических уравнений движения.

Варьируя гамильтониан (3), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\hbar}{J_0 S^2} \sin \theta \dot{\varphi}_t &= 2 \delta \cos 2g \cdot \sin \theta \cos \theta - \\ &- a_0^2 \left(\cos 2g \theta_{xx} - 4 \sin 2g g_x \theta_x - 2 \cos 2g \sin \theta \cos \theta \cdot \varphi_x^2 \right),\end{aligned}\tag{4.a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\hbar}{J_0 S^2} \sin \theta \dot{\theta}_t &= a_0^2 \left(\cos 2g \sin \theta \varphi_{xx} - 4 \sin 2g \sin \theta g_x \theta_x + \right. \\ &\left. + 2 \cos 2g \cos \theta \cos \theta \theta_x \cdot \varphi_x \right),\end{aligned}\tag{4.б}$$

$$\frac{\hbar}{J_0 S^2} \dot{g}_t = 0,\tag{4.в}$$

$$\frac{\hbar}{J_0 S^2} \dot{\gamma}_t = 2 \cos 2g + a_0^2 \left(\cos 2g \left(\operatorname{ctg} \theta \theta_{xx} - \varphi_x^2 - \theta_x^2 - 4g_x^2 \right) - \right.$$

$$-2\sin 2g (2\operatorname{ctg}\theta g_x \theta_x + g_{xx}), \quad (4.г)$$

$$u_{tt} - \frac{ka_0^2}{m} u_{xx} - \chi \frac{s^2 J^0}{m} (\cos^2 \theta)_{xx} = 0. \quad (4.д)$$

Из уравнения (4.в) следует, что, вообще говоря, могут иметь место решения вида $g = g(x)$. Однако, поскольку мы решаем динамическую задачу, поля не являются «вмороженными» в структуру магнетика. В связи с этим необходимо положить $g(x) = \text{const}$.

Тогда система уравнений (4) примет следующий вид:

$$\frac{\hbar}{J_0 S^2} \sin \theta \varphi_t = 2\delta \cos 2g \cdot \sin \theta \cos \theta + a_0^2 2\cos 2g \sin \theta \cos \theta \cdot \varphi_x^2, \quad (5.а)$$

$$\frac{\hbar}{J_0 S^2} \sin \theta \theta_t = a_0^2 (\cos 2g \sin \theta \varphi_{xx} + 2\cos 2g \cos \theta \cos \theta_x \cdot \varphi_x), \quad (5.б)$$

$$\frac{\hbar}{J_0 S^2} g_t = 0, \quad (5.в)$$

$$\frac{\hbar}{J_0 S^2} \gamma_t = 2\cos 2g + a_0^2 (\cos 2g (\operatorname{ctg}\theta \theta_{xx} - \varphi_x^2 - \theta_x^2)), \quad (5.г)$$

$$u_{tt} - \frac{ka_0^2}{m} u_{xx} - \chi \frac{s^2 J^0}{m} (\cos^2 \theta)_{xx} = 0. \quad (5.д)$$

В уравнении (5.д) введем обозначение $u = y_x$. Следует отметить, что для того, чтобы получить решение системы (5), предполагается, что граничные условия для $\theta(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ определяют минимумы классического гамильтониана (3) легкоосного магнетика (т.е. вакуума классической системы)

$$\theta = 0, \pi, x \rightarrow \pm\infty.$$

Для того чтобы упростить систему (5), удобно использовать безразмерные переменные

$$z = bx, \quad \tau = at,$$

$$b^2 = \frac{k\hbar^2}{ma_0^2 (s^2 J^0)^2}, \quad a^2 = \frac{k\hbar^2}{ms^2 J^0}. \quad (6)$$

Тогда систему уравнений (5) можно переписать в виде

$$\theta_{zz} - \left[\varphi_z^2 + 2 \left(\frac{s^2 J^0}{\omega_0 \hbar} \right) \{ \Delta + \chi u \} \right] \sin \theta \cos \theta + \varphi_\tau \sin \theta = 0, \quad (7.а)$$

$$\left(\varphi_z \sin^2 \theta\right)_z - \theta_z \sin \theta = 0, \quad (7.6)$$

$$u_{\tau\tau} - u_{zz} - \chi \frac{s^2 J^0}{ka_0^2} (\cos^2 \theta)_{zz} = 0, \quad (7.в)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, а уравнение (5.г) можно опустить.

Будем искать солитонное решение системы (7) в виде

$$\theta(z - v\tau), \quad u = u(z - v\tau), \quad \varphi = \psi(z - v\tau) + \omega\tau, \quad (8)$$

с граничными условиями (легкоосный магнетик, $\delta > 0$)

$$\theta = \theta(z, \tau)_{z(x) \rightarrow \pm\infty} = 0, \pi.$$

Подстановка (8) сведет уравнения (7) к виду

$$\theta_{\xi\xi} - \left[\varphi_\xi^2 + 2 \left(\frac{s^2 J^0}{\omega_0 \hbar} \right)^2 \{ \Delta + \chi u \} \right] \sin \theta \cos \theta + \{ \Omega - v \psi_\xi \} \sin \theta = 0, \quad (9.a)$$

$$\left(\varphi_\xi \sin^2 \theta\right)_\xi - v \theta_\xi \sin \theta = 0, \quad (9.б)$$

$$(v^2 - 1) u_{\xi\xi} + \chi \frac{s^2 J^0}{ka_0^2} (\cos^2 \theta)_{\xi\xi} = 0. \quad (9.в)$$

Интегрируя уравнение (9.в) с учетом граничных условий

$$u = 0, \xi \rightarrow \pm\infty,$$

получим

$$u = \chi \frac{s^2 J^0}{ka_0^2} \frac{\sin^2 \theta}{v^2 - 1} \quad (10)$$

или

$$u = \chi \frac{s^2 J^0}{ka_0^2} \frac{\sin^2 \theta}{v^2 - v_s^2}.$$

Здесь v – скорость магнитного солитона в системе со спин-фононным взаимодействием.

Скорость звука в нашем обозначении (6)

$$v_s = a_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \equiv 1$$

и

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

В случае $\nu = \nu_s$ решение (10) становится сингулярным. Определим эту особенность как магнито-акустический резонанс, означающий, что в случае движения магнитных солитонов с околосвуковыми скоростями происходит перекачка энергии магнитных солитонов в фононную подсистему. Интегрируя второе уравнение системы (9)

$$\left(\varphi_\xi \sin^2 \theta - \nu \cos \theta\right)_\xi = 0,$$

с учётом граничных условий

$$\xi \rightarrow \pm\infty, \frac{d\psi}{d\xi} < 0, \theta = 0 \quad (11)$$

получим следующее соотношение

$$\psi_\xi = -\frac{1}{2} \frac{\nu}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (12)$$

Граничные условия (11) соответствуют нелинейным возбуждениям типа так называемых бэлл-солитонов.

Далее, подставляя соотношения (12) и (10) в (9.a), получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\theta}{2}\right)_{\xi\xi} + \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{\nu^2}{4} \cos^{-3} \frac{\theta}{2} + \omega \cos \frac{\theta}{2}\right) - \\ & - \left(a_1 \Delta - 4\chi^2 \frac{a_1 a_2}{1-\nu^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$a_1 = 2 \left(\frac{s^2 J^0}{\omega_0 \hbar}\right) = 2G,$$

$$a_2 = \frac{s^2 J^0}{ka_0^2} = \lambda.$$

Интегрируя уравнение (13) с граничными условиями (11), получим

$$\left(\frac{\theta}{2}\right)_\xi = -\frac{\nu^2}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + a_1 \Delta \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \omega \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2\chi^2 A \cos^4 \frac{\theta}{2} \sin^4 \frac{\theta}{2}, \quad (14)$$

где

$$A = \frac{a_1 a_2}{1 - v^2}. \quad (15)$$

Теперь, интегрируя уравнение (14), получим эллиптический интеграл следующего вида

$$\xi - \xi_0 = \frac{1}{2} \int \frac{y dy}{(y-1) \sqrt{-\frac{v^2}{4} y^4 - \omega y^3 + a_1 \Delta y^2 + 2\chi^2 A (y-1)}}, \quad (16)$$

где

$$y = \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 1.$$

Интеграл в формуле (16) может быть выражен через эллиптический интеграл Вейерштрасса I и III рода, тогда можно провести численные расчеты. Однако можно рассмотреть некоторые предельные случаи решения системы (9), которые могут быть выражены через элементарные функции.

Первый случай: рассмотрим магнитные солитоны, движущиеся со скоростью $v, v^2 \ll v_s^2$, ($v_s = 1$). Тогда $\chi^2 A \rightarrow 0$ и предполагая $\chi^2 A = 0$ (т.е. магнитные солитоны не чувствуют деформации решетки), получим решение

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\mu^2}{\Omega \cosh^2 \mu - \frac{\Omega - \Omega_1}{2}}, \quad (17.a)$$

где $\xi = z - v\tau$, $\mu = \sqrt{a_1 \Delta - \omega - \left(\frac{v}{2}\right)^2}$, а $\Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + 4v^2 - \left(\frac{v}{2}\right)^2}$ является параметром, который в лабораторной системе отсчета выполняет функцию безразмерной частоты прецессии магнитного момента нелинейной спиновой волны с параметрами v и ω , а $\Omega_1 = \omega + (v/2)^2$ определяет безразмерную частоту прецессии магнитного момента в солитоне с теми же параметрами v и ω в лабораторной системе отсчета. Интегрируя уравнение (12) и с учетом (17.a) и (8), получим

$$\varphi = \omega\tau - \frac{v}{2} \xi + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\Omega - \Omega_1}{\Omega + \Omega_1}} \operatorname{th} \gamma \xi. \quad (17.б)$$

Второй случай. В случае магнитных солитонов, движущихся со скоростью $v^2 \ll v_s^2$, как и в (15), имеем $A \rightarrow 0$ и, предполагая $A = 0$, имеем решение (17). Таким

образом, сверхзвуковые магнитные солитоны и солитоны, движущиеся со скоростями меньше скорости звука, не чувствуют деформацию решетки.

Третий случай. Рассмотрим решения системы уравнений (9) в приближении малых амплитуд спиновых отклонений. Перепишем уравнение (16) в виде

$$\xi - \xi_0 = \frac{1}{2} \int \frac{(x+1)dy}{x \sqrt{-\frac{v^2}{4}(x+1)^4 - \omega(x+1)^3 + a_1 \Delta (x+1)^2 + 2\chi^2 Ax}}, \quad (18)$$

где $x = tg^2 \frac{\theta}{2}$, и предполагая, что отклонение классического спина от положения равновесия (т.е. от основных состояний классической модели) достаточно мало $\theta \ll 1$, учтем в уравнении (18) слагаемые порядка $O(x^2)$ и опустим члены более высокого порядка. Тогда уравнение (18) может быть сведено к следующей интегральной сумме, которая может быть легко интегрирована

$$\xi - \xi_0 = \frac{1}{2} \left[\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \frac{dx}{x\sqrt{R}} \right], \quad (19)$$

где

$$R = a + bx + cx^2, \quad a = \mu^2 = a_1 \Delta - \omega - \frac{v^2}{4},$$

$$b = 2\chi^2 A + 2a_1 \Delta - 3\omega - v^2, \quad c = a_1 \Delta - 3\omega - \frac{3v^2}{2}.$$

Интегрируя уравнение (19), получим решение в следующем виде

$$\xi - \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arcsinh} \frac{2cx+b}{\sqrt{D}} - \frac{2}{\mu} \operatorname{arcsinh} \frac{2\mu^2 + bx}{x\sqrt{D}},$$

где $D = (4\mu^2 c - b^2)^{1/2}$.

Будем искать теперь решение системы (9) в виде доменной стенки. Полагая $\varphi = \varphi_0 = const$, ищем решения уравнения (9.a) в следующем виде

$$\theta = \theta(\xi), \quad \xi = z - v\tau. \quad (20)$$

Подставляя (20) в уравнение (9.a), получим

$$\theta_{\xi\xi} - a_1 (\Delta + \chi u) \sin\theta \cos\theta = 0. \quad (21)$$

Интегрирование уравнения (21) с нулевыми граничными условиями (рассматривается легкоосная модель) приводит к следующему выражению

$$\theta_\xi^2 - a_1 \Delta \sin^2 \theta - \chi^2 \frac{\Gamma}{2} \sin^4 \theta = 0.$$

Решение этого уравнения можно выразить через интегралы

$$2(\xi - \xi_0) = \int \frac{dx}{x\sqrt{R}} + \int \frac{dx}{\sqrt{R}} \quad (22)$$

$$\Gamma = \frac{s^2 J^0}{ka_0^2} \frac{1}{v^2 - 1}, \quad R = a + bx + cx^2, \quad a = c = a_1 \Delta,$$

$$b = 2(a_1 \Delta + \chi^2 \Gamma), \quad x = \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Можно легко проинтегрировать уравнение (22) и получить решения в следующем виде

$$2\sqrt{a}(\xi - \xi_0) = \ln \left[x \frac{2\sqrt{a}R + 2a(x+1) + 2\chi^2\Gamma}{2\sqrt{a}R + 2a(x+1) + 2\chi^2\Gamma x} \right]. \quad (23)$$

Очевидно, что в случае $\chi^2 = 0$ решение (23) принимает вид известной доменной границы уравнения Ландау-Лифшица

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \exp \left\{ \sqrt{a}(\xi - \xi_0) \right\}. \quad (24)$$

Если положим $\chi^2 \ll 1$ в (23), то получим решение типа доменной стенки в следующем виде

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \cong \frac{1}{1 - \chi^2 \Gamma} \exp \left\{ 2\sqrt{a}(\xi - \xi_0) \right\}.$$

Как видно, это решение отличается от решения типа доменной стенки (24) множителем $(1 - \chi^2 \Gamma)^{-1}$ и совпадает с этим решением в случае медленных солитонов, или в пренебрежении постоянной χ магнон-фононного взаимодействия.

Таким образом, видно, что магнитные солитоны в деформируемых кристаллических решетках сопровождаются деформационными волнами. В случае движения магнитного солитона с околосвуковыми скоростями в системе происходит резонансный эффект за счет взаимодействия спиновой подсистемы с фононной. Это явление определено как солитонный механизм магнито-акустического резонанса, при котором происходит перекачка энергии от магнитного солитона к деформационным волнам. Следует ожидать, что этот эффект может наблюдаться при движении магнитного солитона под воздействием сильных или высокочастотных внешних магнитных полей. В то же время линейное при-

ближение для звуковых уравнений, использованное для получения решений (17) и (18), сомнительно обосновано. Опущенные нелинейные члены могли бы выполнять ведущую роль в случае околосвуковых скоростей. Этот факт может быть усилен также необходимостью принимать во внимание эффект диссипации энергии магнитных солитонов. Более реалистическая модель должна учитывать также наличие двух дополнительных поперечных звуковых мод и, следовательно, возможность резонансного взаимодействия магнитных солитонов с поперечными волнами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Островский В.С. О нелинейной динамике сильноанизотропных магнетиков со спином $S=1$. – ЖЭТФ, 1986, т.91, в.5, с.1690-1701.
2. Онуфриева В.П. Точное решение одноионной задачи для магнетика с одноионной анизотропией в поле произвольного направления. – ЖЭТФ, 1981, т.80, в.7, с.2372-2379.
3. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х. Гамильтоновы уравнения движения в пространстве $SU(3)/SU(2)\times U(1)$. – ДАН ТаджССР, 1991, т. 34, №7, с.431-436.
4. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х. Системы уравнений для ферромагнетиков с обменной и одноионной анизотропией. – ФТТ, 1992, т.34, в.2, с.544-547.
5. Астров Д.Н., Ермаков Н.Б. О квадрупольном магнитном поле магнитоэлектрического Cr_2O_3 . – Письма в ЖЭТФ, 1994, т. 59, в. 4, с. 274-277.
6. Dzyaloshinskii I. External magnetic fields of antiferromagnets. – Solid St. Commun., 1992, v.82(7), pp.579-580.
7. Bilbro L.S., Aguilar R.V., Logvenov G., Pelleg O., Božovič I., Armitage N.P. Temporal correlations of superconductivity above the transition temperature in $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ probed by terahertz spectroscopy. – Nat. Phys., 2011, v.7, pp.298-302.
8. Li Lu, Wang Yayu, Komiya Seiki, Ono Shimpei, Ando Yoichi, Gu G. D, Ong N. P. Diamagnetism and cooper pairing above T_c in cuprates. – Phys. Rev. B, 2010, v.81(5), pp.54510-54512.

Ҳ.Ҳ.МУМИНОВ, А.Т.МАКСУДОВ*, Т.А.ТОШОВ

ОИД БА НАЗАРИЯИ ТАЪСИРИ МУТАҚОБИЛАИ МАГНЕТОЧАНДИРӢ ДАР ФЕРРОМАГНЕТИКҲОИ БО ҚИМАТИ БАЛАНДИ СПИН ДАР НАЗАРДОШТИ ҒАЙРИҲАМСОНГАРДИИ МУБОДИЛАВӢ

Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,

**Маркази илмии Хуҷанди Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Таҳқиқоти ферромагнетикҳои ғайриҳейзенбергии бо қимати спини $S = 1$ бо ғайриҳамсонгардии мубодилавӣ дар ҳузури модулятсияи фононии амвоҷи спин-квадруполь бо усули ҳолатҳои коҳерентии умумӣ кардашудаи гурӯҳи $SU(3)$ гузаронида шуд. Нишон дода шудааст, ки мавҷудияти механизми таъсири мутақобилаи магнеточандирӣ метавонад ба мубодилаи энергия дар байни зерсистемаҳои фононӣ ва спин-квадруполь оварда расонад.

Калимаҳои калидӣ: ферромагнетики ғайриҳейзенбергӣ, ҳамтаъсири спин-фононӣ, мавҷҳои магниточандирӣ, мавҷҳои спин-квадруполӣ.

KH.KH.MUMINOV, A.T.MAKSUDOV*, T.A.TOSHOV

**TO THE THEORY OF MAGNETOELECTRIC INTERACTIONS
IN FERROMAGNETICS WITH HIGH VALUES OF SPIN-TAKING
INTO ACCOUNT EXCHANGE ANISOTROPY**

*S.U.Umarov Physical-Technical Institute, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,
Khujand Scientific Center of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

Studies of a non-Heisenberg ferromagnet with a spin $S = 1$ with exchange anisotropy in the presence of phonon modulation of spin-quadrupole waves by the method of generalized coherent states of the SU (3) group are carried out. It is shown that the presence of a mechanism of magnetoelastic interactions can lead to an exchange of energy between the phonon and spin-quadrupole subsystems.

Key words: non-Heisenberg ferromagnet, spin-phonon interaction, magnetoelastic waves, spin-quadrupole waves

УДК 534.16:535.341

Т.Х.САЛИХОВ, А.МАХМАЛАТИФ, Ю.П.ХОДЖАЕВ

**ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ ОСНОВНОЙ ГАРМОНИКИ
НЕЛИНЕЙНОГО ФОТОАКУСТИЧЕСКОГО ОТКЛИКА В ОПТИЧЕСКИ
НЕОДНОРОДНЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ОБРАЗЦАХ**

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 30.01.2017 г.

Предложена теория возбуждения основной гармонике нелинейного ФА-сигнала в оптически неоднородных двухслойных твердотельных системах. Для ряда случаев, реализующих в ФА-эксперименте, получены выражения, описывающие зависимости амплитуды и фазы этого сигнала от термических коэффициентов теплофизических и оптических параметров, включая оптический коэффициент поглощения, а также от частоты модуляции падающего луча.

Ключевые слова: фотоакустика, нелинейный фотоакустический отклик, двухслойные системы, тепловая нелинейность, основная гармоника, оптическая неоднородность.

Различные аспекты возбуждения нелинейного фотоакустического (ФА) - сигнала для оптически однородных систем подробно исследованы в [1-10], а в [11] была разработана теория генерации основной гармонике (ОГ) оптически неоднородных однослойных твердотельных образцов. В частности, в [11] была выявлена зависимость амплитуды этой гармонике нелинейного ФА-сигнала от термического коэффициента (ТК) оптического коэффициента поглощения образца. Это означает, что из измерения амплитуды ОГ этого сигнала возникает возможность определения температурной зависимости оптического коэффициента поглощения, что является чрезвычайно важным. В этой связи представляет интерес теоретическое исследование этого вопроса для двухслойных оптически неоднородных систем, что и является целью настоящей работы.

Будем исходить из системы дифференциальных уравнений для ОГ колебаний температуры $\Phi_{1Ni}(t, x)$ в соответствующих слоях [12]:

Адрес для корреспонденции: Салихов Тагаймурод Хаитович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: tsalikhov@mail.ru

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1Ng}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1Ng}}{\partial t} = -(\delta_{2g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_g}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) [T_{0g}(x) \Phi_{Lg}(t, x)], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_{1NS(1)}}{\partial x^2} = & \frac{1}{\chi_{1S(1)}^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1NS(1)}}{\partial t} - (\delta_{2S(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1S(1)}}{\chi_{1S(1)}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) (T_{0S(1)}(x) \Phi_{LS(1)}(x, t)) - \\ & - \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1^{(0)} e^{\beta_1^{(0)} x}}{2k_{S(1)}^{(0)}} \times \{ \delta_{3(1)} [e^{i\omega t} \Theta_0 + \Phi_{LS(1)}(0, t)] + \end{aligned} \quad (2)$$

$$+ \delta_{4(1)} [e^{i\omega t} [T_{0S(1)}(x) + \beta_1^{(0)} \int_0^x T_{0S(1)}(y) dy] + \Phi_{LS(1)}(x, t) + \beta_1^{(0)} \int_0^x \Phi_{LS(1)}(y, t) dy \},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_{1NS(2)}}{\partial x^2} = & \frac{1}{\chi_{1S(2)}^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1NS(2)}}{\partial t} - \\ & - (\delta_{2S(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1S(2)}}{\chi_{1S(2)}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) (T_{0S(2)}(x) \Phi_{LS(2)}(x, t)) - \\ & - \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} (1 - R_{S(1)})^{(0)} \beta_2^{(0)} e^{\beta_2^{(0)} (x+l_1)}}{2k_{S(1)}^{(0)}} \{ \delta_{3(1)} [e^{i\omega t} W_{01} + \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & + \Phi_{LS(2)}(-l_1, t)] + \delta_{4(2)} [e^{i\omega t} [T_{0S(2)}(x) + \beta_2^{(0)} \int_{-l_1}^x T_{0S(2)}(y) dy] + \\ & + \Phi_{LS(2)}(x, t) + \beta_2^{(0)} \int_{-l_1}^x \Phi_{LS(2)}(y, t) dy] + \\ & + \delta_{4S(1)} [e^{i\omega t} \int_0^{-l_1} T_{0S(1)}(y) dy + \beta_1^{(0)} \int_0^{-l_1} \Phi_{LS(1)}(y, t) dy \}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1Nb}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1Nb}}{\partial t} = -(\delta_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_b}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t}) [T_{0b}(x) \Phi_{Lb}(t, x)]. \quad (4)$$

В (1)-(4) $\chi_i^{(0)} = \kappa_i^{(0)} / \rho C_{pi}^{(0)}$; $\kappa_i^{(0)} = \kappa(T_0)$, $C_{pi}^{(0)} = C_{pi}(T_0)$, $A^{(0)} = A(T_0)$, $\beta_i^{(0)} = \beta(T_0)$ - начальные значения коэффициента теплопроводности, теплоемкости единицы объема, поглощательной способности и оптического коэффициента поглощения соответствующих слоев, а $\delta_i = (1/C_{pi}^{(0)}) (\partial C_{pi} / \partial T)$, $\delta_{2i} = (1/\kappa_{2i}^{(0)}) (\partial \kappa_i / \partial T)$, $\delta_3 = (1/A^{(0)}) (\partial A / \partial T)$, $\delta_{4i} = (1/\beta_i^{(0)}) (\partial \beta_i / \partial T)$ - термические коэффициенты этих величин; выражение для $\Phi_{Li}(t, x)$ - линейной составляющей колебания температуры соответствующих слоев двухслойной системы, впервые было получено в [13] и в наших обозначениях приведено в [11,12]; выражения $T_{0g}(x)$, $T_{0b}(x)$, $T_{0S(1)}(x)$ и $T_{0S(2)}(x)$ с учетом ТК

теплофизических и оптических величин получены в [14] и дабы не загромождать данную работу здесь также не приводится.

Для решения системы (1)-(4) используется восемь граничных условий

$$\Phi_{1Ns(1)}(t, 0) = \Phi_{1Ng}(t, 0), \quad \Phi_{1Nb}(t, -l_{S(1)} - l_{S(2)}) = \Phi_{1Ns(2)}(t, -l_{S(1)} - l_{S(2)}), \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_{1g}(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_g^{(0)}} \left. \frac{\partial \Psi_{1s}(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad (6)$$

$$\Phi_{1Ns(1)}(t, -l_{S(1)}) = \Phi_{1Ns(2)}(t, -l_{S(1)}), \quad \left. \frac{\partial \Psi_{1s(1)}(t, x)}{\partial x} \right|_{x=-l} = \frac{\kappa_{s(2)}^{(0)}}{\kappa_{s(1)}^{(0)}} \left. \frac{\partial \Psi_{1s(2)}(t, x)}{\partial x} \right|_{x=-l}, \quad (7)$$

$$\Phi_{1Nb}(t, -l_{S(1)} - l_{S(2)} - l_b) = \Phi_{1Ng}(t, l_g) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_{1b}(t, x)}{\partial x} \right|_{x=-(l_{S(1)}+l_{S(2)})} = \frac{\kappa_s^{(0)}}{\kappa_b^{(0)}} \left. \frac{\partial \Psi_{1s}(t, x)}{\partial x} \right|_{x=-(l_{S(1)}+l_{S(2)})}, \quad (8)$$

где $\Psi_{li}(t, x) = \Phi_{1Ni}(t, x) + \delta_{2i} T_{0i}(x) \Phi_{Li}(t, x)$.

С учетом того, что $\Phi_L(t, x) = \Phi_L(\omega, x) \exp(i\omega t)$, положим $\Phi_{1Ni}(t, x) = \Phi_{1Ni}(\omega, x) \exp(i\omega t)$ тогда для функции $\Psi_{li}(\omega, x) = \Phi_{1Ni}(\omega, x) + \delta_{2i} T_{0i}(x) \Phi_{Li}(\omega, x)$, из (1)-(4) получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2 \Psi_{1N(i)}}{dx^2} - \sigma_{1(i)}^2 \Psi_{1N(i)} = \sigma_{1(i)}^2 (\delta_i - \delta_{2i}) T_{0(i)}(x) \Phi_{L(i)}(\omega, x), \quad i = g, b \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_{1s(1)}}{dx^2} - \sigma_{s(1)}^2 \Psi_{s(1)} &= \sigma_s^2 (\delta_{s(1)} - \delta_{2s(1)}) T_{0s(1)}(x) \Phi_{Ls(1)}(x, \omega) - B_1 e^{\beta^{(0)} x} \times \\ &\times \{ \delta_{3(1)} [\Theta_0 + \Phi_{Ls(1)}(0, \omega)] + \delta_{4(1)} [T_{0s(1)}(x) + \\ &+ \Phi_{Ls(1)}(x, \omega)] + \delta_{4(1)} \beta^{(0)} \left[\int_0^x T_{0s(1)}(y) dy + \int_0^x \Phi_{Ls(1)}(y, \omega) dy \right] \}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_{1s(2)}}{dx^2} - \sigma_{s(1)}^2 \Psi_{s(2)} &= \sigma_s^2 (\delta_{s(2)} - \delta_{2s(2)}) T_{0s(2)}(x) \Phi_{Ls(2)}(x, \omega) - B_2 e^{\beta^{(0)}(x+l)} \times \\ &\times \{ \delta_{3(2)} [W_{01} + \Phi_{Ls(2)}(-l_1, \omega)] + \delta_{4(2)} [T_{0s(2)}(x) + \beta_2^{(0)} \int_{-l_1}^x T_{0s(2)}(y) dy] + \\ &+ \Phi_{Ls(2)}(x, t) + \beta_2^{(0)} \int_{-l_1}^x \Phi_{Ls(2)}(y, t) dy \} + \delta_{4(1)} \left[\int_0^{-l_1} T_{0s(1)}(y) dy + \beta_1^{(0)} \int_0^{-l_1} \Phi_{Ls(1)}(y, t) dy \right] \}, \end{aligned} \quad (11)$$

где
$$B_1 = \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1^{(0)}}{2k_{S(1)}^{(0)}}, B_2 = \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}) \beta_2^{(0)} e^{-\beta_1 l_{S(1)}}}{2k_{S(2)}^{(0)}}, \quad \sigma_{1(i)} = \left(\frac{i\omega}{\chi_i^{(0)}} \right)^{1/2},$$

$\sigma_{1S(1)} = (1+i)/\mu_{1S(1)}^{(0)}$, $\sigma_{1S(2)} = (1+i)/\mu_{1S(2)}^{(0)}$, $\sigma_{1b} = (1+i)/\mu_{1b}^{(0)}$, а $\mu_i = (\omega/2\chi_i^{(0)})^{1/2}$ - длина тепловой волны в соответствующих средах.

Решение системы (9)-(11) описываются следующими выражениями:

$$\Psi_{1Ng} = \Theta_{1Ng} e^{-\sigma_{1g} x} + R_{1g} S_{1g}(x) e^{\sigma_{1g} x} - R_{1g} S_{2g}(x) e^{-\sigma_{1g} x} \quad (12)$$

$$\Psi_{1Nb} = W_{1Nb} e^{\sigma_{1b}(x+l_{S(1)}+l_{S(2)})} + R_{1b} S_{1b}(x) e^{\sigma_{1b}(x+l_{S(1)}+l_{S(2)})} - R_{1b} S_{2b}(x) e^{-\sigma_{1b}(x+l_{S(1)}+l_{S(2)})}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1Ns(1)} &= U_{1N1} e^{\sigma_{1S(1)} x} + V_{1N1} e^{-\sigma_{1S(1)} x} + \\ &+ [R_{1s(1)} S_{1s(1)}(x) - \Omega_{1S(1)}(x) - \Omega_{3S(1)}(x)] e^{\sigma_{1S(1)} x} - \\ &- [R_{1s(1)} S_{2s(1)}(x) - \Omega_{2S(1)}(x) - \Omega_{4s(1)}(x)] e^{-\sigma_{1S(1)} x} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1Ns(2)} &= U_{N2} e^{\sigma_{1S(1)}(x+l_{S(1)})} + V_{N2} e^{-\sigma_{1S(1)}(x+l_{S(1)})} + \\ &+ [R_{S(2)} S_{1S(2)}(x) - \Omega_{1S(2)}(x) - \Omega_{3S(2)}] e^{\sigma_{1S(1)}(x+l_{S(1)})} - \\ &- [R_{S(2)} S_{2S(2)}(x) - \Omega_{2S(2)}(x) - \Omega_{4S(2)}] e^{-\sigma_{1S(1)}(x+l_{S(1)})}. \end{aligned} \quad (15)$$

В (12)-(15) использованы следующие обозначения:

$$S_{1g}(x) = \int g_{0g}(x) \Phi_{Lg}(x, \omega) e^{-\sigma_g x} dx, \quad S_{2g}(x) = \int g_{0g}(x) \Phi_{Lg}(x, \omega) e^{\sigma_g x} dx, \quad (16)$$

$$S_{1b}(x) = \int g_{0b}(x) \Phi_{Lb}(x, \omega) e^{-\sigma_b(x+l)} dx, \quad S_{2b}(x) = \int g_{0b}(x) \Phi_{Lb}(x, \omega) e^{\sigma_b(x+l)} dx, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} S_{1s(1)}(x) &= \int g_{0s(1)}(x) \Phi_{Ls(1)}(x, \omega) e^{-\sigma_{1s(1)} x} dx, \\ S_{2s(1)}(x) &= \int g_{0s(1)}(x) \Phi_{Ls(1)}(x, \omega) e^{\sigma_{1s(1)} x} dx, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\Omega_{1s(1)}(x) = 0.5 B_1 \delta_{3(1)} \sigma_{1s(1)}^{-1} \int [\Theta_0 + \Phi_{Ls(1)}(\omega, 0)] e^{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(1)})x} dx, \quad (19)$$

$$\Omega_{2s(1)}(x) = 0.5 B_1 \delta_{3(1)} \sigma_{1s(1)}^{-1} \int [\Theta_0 + \Phi_{Ls(1)}(\omega, 0)] e^{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)})x} dx \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{3s(1)}(x) &= 0.5 B_1 \delta_{4s(1)} \sigma_{1s(1)}^{-1} \left\{ \int [T_{0s(1)}(x) + \beta_1^{(0)} \int_0^x [T_{0s}(y) dy] + \right. \\ &\left. + \int [\Phi_{Ls}(\omega, x) + \beta_1^{(0)} \int_0^x \Phi_{LS}(y, \omega) dy] \right\} e^{(\beta_1^{(0)} - \sigma_s)x} dx \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Omega_{4s(1)}(x) = 0.5B_1\delta_{4s(1)}\sigma_{1s(1)}^{-1} \left\{ \int [T_{0s(1)}(x) + \beta_1^{(0)} \int_0^x [T_{0s}(y)dy] + \right. \\ \left. + \int [\Phi_{L_s}(\omega, x) + \beta_1^{(0)} \int_0^x \Phi_{LS(1)}(y, \omega)dy] \right\} e^{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)})x} dx, \quad (22)$$

$$\Omega_{1s(2)}(x) = 0.5B_2\delta_{3s(2)}\sigma_{1s(2)}^{-1} \int e^{(\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)})(x+l_1)} [W_{01} + \Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1)] dx, \quad (23)$$

$$\Omega_{2s(2)}(x) = 0.5B_2\delta_{3s(2)}\sigma_{1s(2)}^{-1} \int e^{(\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)})(x+l_1)} [W_{01} + \Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1)] dx, \quad (24)$$

$$\Omega_{3s(2)}(x) = 0.5B_2\delta_{4s(2)}\sigma_{1s(2)}^{-1} \delta_{4(2)} \left\{ [T_{0s(2)}(x) + \beta_2^{(0)} \int_{-l_1}^x T_{0s(2)}(y)dy] + \right. \\ \left. + [\Phi_{LS(2)}(x, \omega) + \beta_2^{(0)} \int_{-l_1}^x \Phi_{LS(2)}(y, \omega)dy] + \right. \\ \left. + \delta_{4(1)} \left[\int_0^{-l_1} T_{0s(1)}(y)dy + \beta_1^{(0)} \int_0^{-l_1} \Phi_{LS(1)}(\omega, t)dy \right] \right\} e^{(\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)})(x+l_1)} dx \quad (25)$$

$$\Omega_{4s(2)}(x) = 0.5B_2\delta_{4s(2)}\sigma_{1s(2)}^{-1} \delta_{4(2)} \left\{ [T_{0s(2)}(x) + \beta_2^{(0)} \int_{-l_1}^x T_{0s(2)}(y)dy] + \right. \\ \left. + [\Phi_{LS(2)}(x, \omega) + \beta_2^{(0)} \int_{-l_1}^x \Phi_{LS(2)}(y, \omega)dy] + \right. \\ \left. + \delta_{4(1)} \left[\int_0^{-l_1} T_{0s(1)}(y)dy + \beta_1^{(0)} \int_0^{-l_1} \Phi_{LS(1)}(y, \omega)dy \right] \right\} e^{(\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)})(x+l_1)} dx. \quad (26)$$

Подставляя функции $\Phi_{Li}(x, \omega)$ и $T_{0i}(x)$ в подынтегральные выражения (16)-(26) для $S_{ij}(x)$ и $\Omega_{ij}(x)$, выполняя интегрирование, будем иметь:

$$S_{1g}(x) \approx \frac{\Theta_L}{2\sigma_g} \left[1 - \sqrt{1+b_g} + \frac{b_g}{2l_g \sqrt{1+b_g}} \left(x + \frac{1}{2\sigma_g} \right) \right] \exp(-2\sigma_g x),$$

$$S_{2g}(x) = - \left[\frac{2l_g}{3b_g} (1+b_g^{3/2}) \left[\sqrt{\left(1 - \frac{b_g x}{(1+b_g)l_1} \right)^3} - 1 \right] + x \right] \Theta_L,$$

$$\begin{aligned}
S_{1s(1)}(x) &= U_{L(1)} \left\{ D_2^{1/2} \left[x + \frac{1}{4} \frac{D_3}{D_2} \frac{x^2}{l_{s(1)}} - \frac{D_1 e^{\beta_1^{(0)} x}}{2D_2 \beta_1^{(0)}} \right] - x \right\} + \\
&\quad + \frac{V_{L(1)}}{2\sigma_{1s(1)}} \left\{ 1 - D_2^{1/2} - \frac{D_3}{2D_2^{1/2}} \left(x + \frac{1}{2\sigma_{1s(1)}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{D_1 \sigma_{1s(1)} e^{\beta_1^{(0)} x}}{D_2^{1/2} (\beta_1^{(0)} - 2\sigma_{1s(1)})} \right\} e^{-2\sigma_{1s(1)} x} - \frac{E}{\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(1)}} \times \\
&\quad \times \left\{ D_2^{1/2} - 1 + \frac{D_3}{2D_2^{1/2}} \left(x - \frac{1}{\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(1)}} \right) - \frac{D_1 (\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(1)}) e^{\beta_1^{(0)} x}}{2D_2^{1/2} (2\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(1)})} \right\} e^{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(1)}) x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2s(1)}(x) &= U_{L(2)} \left\{ D_2^{1/2} \left[x + \frac{1}{4} \frac{D_3}{D_2} \frac{x^2}{l_{s(1)}} - \frac{D_1 e^{\beta_1^{(0)} x}}{2D_2 \beta_1^{(0)}} \right] - x \right\} + \\
&\quad + \frac{V_{L(2)}}{2\sigma_{1s(1)}} \left\{ 1 - D_2^{1/2} - \frac{D_3}{2D_2^{1/2}} \left(x + \frac{1}{2\sigma_{1s(1)}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{D_1 \sigma_{1s(1)} e^{\beta_1^{(0)} x}}{D_2^{1/2} (\beta_1^{(0)} + 2\sigma_{1s(1)})} \right\} e^{-2\sigma_{1s(1)} x} - \frac{E}{\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)}} \times \\
&\quad \times \left\{ D_2^{1/2} - 1 + \frac{D_3}{2D_2^{1/2}} \left(x - \frac{1}{\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)}} \right) - \frac{D_1 (\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)}) e^{\beta_1^{(0)} x}}{2D_2^{1/2} (2\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)})} \right\} e^{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)}) x},
\end{aligned}$$

$$S_{2b}(x) \approx \frac{W_L}{2\sigma_b} \left[\sqrt{1+b_b} - 1 + \frac{b_b}{2l_b \sqrt{1+b_b}} \left(x + l_{s(1)} + l_{s(2)} - \frac{1}{2\sigma_b} \right) \right] \exp(2\sigma_b (x + l_{s(1)} + l_{s(2)})),$$

$$S_{1b}(x) = \left[\frac{2l_b}{3b_b} (1+b_b)^{3/2} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{b_b (x + l_{s(1)} + l_{s(2)})}{(1+b_b)l_b} \right)^3} - 1 \right] - (x + l_{s(1)} + l_{s(2)}) \right] W_L,$$

$$\begin{aligned}
S_{1s(2)}(x) &= U_{L2} \left\{ D_{2(2)}^{1/2} \left[x + \frac{1}{4} \frac{D_{3(2)}}{D_{2(2)}} \frac{x(0.5x + l_1)}{l_2} - \frac{D_{1(2)} e^{\beta_2^{(0)} (x+l_1)}}{2D_{2(2)} \beta_2^{(0)}} \right] - x \right\} + \frac{V_{L2}}{2\sigma_{1S(2)}} \left\{ 1 - D_{2(2)}^{1/2} - \right. \\
&\quad \frac{D_{32}}{2D_{2(2)}^{1/2} l_2} \left(x + l_1 + \frac{1}{2\sigma_{1S(2)}} \right) - \frac{D_{1(2)} \sigma_{1S(2)} e^{\beta_2^{(0)} (x+l_1)}}{D_{2(2)}^{1/2} (\beta_2^{(0)} - 2\sigma_{1S(2)})} \left. \right\} e^{-2\sigma_{1S(2)} (x+l_1)} - \frac{E_2}{\beta_2^{(0)} - \sigma_{1S(2)}} \left\{ D_{2(2)}^{1/2} - 1 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{D_{3(2)}}{2D_{2(2)}^{1/2} l_2} \left(x + l_1 - \frac{1}{\beta_2^{(0)} - \sigma_{1S(2)}} \right) - \frac{D_{1(2)} (\beta_2^{(0)} - \sigma_{1S(2)}) e^{\beta_2^{(0)} (x+l_1)}}{2D_{2(2)}^{1/2} (2\beta_2^{(0)} - \sigma_{1S(2)})} \right\} e^{(\beta_2^{(0)} - \sigma_{1S(2)}) (x+l_1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2S(2)}(x) &= \frac{U_{L2}}{2\sigma_{1S(2)}} \left\{ D_{2(2)}^{1/2} - 1 + \frac{D_{3(2)}}{2l_2 D_{2(2)}^{1/2}} \left(x + l_1 - \frac{1}{2\sigma_{1S(2)}} \right) - \frac{D_{1(2)}\sigma_{1S(2)}}{D_{2(2)}^{1/2}} \frac{e^{\beta_2^{(0)}(x+l_1)}}{\beta_2 + 2\sigma_{1S(2)}} \right\} e^{2\sigma_{1S(2)}(x+l_1)} + \\
&+ V_{L2} \left\{ D_{2(2)}^{1/2} \left[x + \frac{1}{4} \frac{D_{3(2)}}{D_{2(2)}} \frac{x(0.5x+l_1)}{l_2} - \frac{D_{1(2)}}{2\beta_2 D_{2(2)}} e^{\beta_2^{(0)}(x+l_1)} \right] - x \right\} - \frac{E_2}{\beta_2^{(0)} + \sigma_{1S(2)}} \left\{ D_{2(2)}^{1/2} - 1 + \right. \\
&\left. + \frac{D_{3(2)}}{2D_{2(2)}^{1/2} l_2} \left(x + l_1 - \frac{1}{\beta_2^{(0)} + \sigma_{1S(2)}} \right) - \frac{D_{1(2)}(\beta_2^{(0)} + \sigma_{1S(2)}) e^{\beta_2^{(0)}(x+l_1)}}{2D_{2(2)}^{1/2} (2\beta_2^{(0)} + \sigma_{1S(2)})} \right\} e^{(\beta_2^{(0)} + \sigma_{1S(2)})(x+l_1)},
\end{aligned}$$

$$\Omega_{1s(1)}(x) = (0.5B_1\delta_{3s(1)}\sigma_{1s(1)}^{-1}\Theta_0(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(1)})^{-1}e^{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(1)})x},$$

$$\Omega_{2s(1)}(x) = (0.5B_1\delta_{3s(1)}\sigma_{1s(1)}^{-1}\Theta_0(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)})^{-1}e^{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)})x},$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{3s(1)}(x) &= \frac{B_1\delta_{4s(1)}}{2\sigma_{1S(1)}} \left\{ \frac{1}{\delta_{2S(1)}} \left\{ \left[\frac{D_4}{\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)}} - \frac{D_1 e^{(2\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)})x}}{2\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)}} + \right. \right. \right. \\
&+ D_3 \left(\frac{x}{\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)}} - \frac{1}{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)})^2} \right) \left. \right\} e^{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)})x} + \\
&+ \frac{\beta_1^{(0)}}{\delta_{2S(1)}} \left[D_4 \left(\frac{x}{\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)}} - \frac{1}{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)})^2} \right) e^{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)})x} - \right. \\
&- \frac{D_1}{\beta} \left(\frac{1}{2\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)}} e^{(2\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)})x} - \frac{1}{\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)}} e^{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)})x} \right) + \\
&\left. \left. + \frac{D_3}{2} \left(\frac{x^2}{\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)}} - \frac{2x}{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)})^2} + \frac{2}{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)})^3} \right) e^{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1S(1)})x} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{4s(1)}(x) &= \frac{B_1\delta_{4s(1)}}{2\sigma_{1S(1)}} \left\{ \frac{1}{\delta_{2S(1)}} \left\{ \left[\frac{D_4}{\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)}} - \frac{D_1}{\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)}} + \right. \right. \right. \\
&+ D_3 \left(\frac{x}{\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)}} - \frac{1}{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)})^2} \right) \left. \right\} e^{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)})x} + \\
&+ \frac{\beta_1^{(0)}}{\delta_{2S(1)}} \left[D_4 \left(\frac{x}{\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)}} - \frac{1}{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)})^2} \right) e^{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)})x} - \right. \\
&- \frac{D_1}{\beta} \left(\frac{1}{2\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)}} e^{(2\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)})x} - \frac{1}{\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)}} e^{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)})x} \right) + \\
&\left. \left. + \frac{D_3}{2} \left(\frac{x^2}{\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)}} - \frac{2x}{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)})^2} + \frac{2}{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)})^3} \right) e^{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1S(1)})x} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{3s(2)}(x) = & \frac{B_2 \delta_{4s(2)}}{2\sigma_{1s(2)}} \left\{ \frac{1}{\delta_{2s(2)}} \left[\frac{D_{4(2)}}{\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)}} - \frac{D_{1(2)}}{\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)}} + \right. \right. \\ & + D_{3(2)} \left(\frac{x}{\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)}} - \frac{1}{(\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)})^2} \right) \left. \right] e^{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(1)})(x+l_1)} + \\ & + \frac{\beta_2^{(0)}}{\delta_{2s(2)}} \left[D_{4(2)} \left(\frac{x+l_1}{\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)}} - \frac{1}{(\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)})^2} \right) e^{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(1)})(x+l_1)} - \right. \\ & - \frac{D_1}{\beta_2^{(0)}} \left(\frac{1}{2\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)}} e^{(2\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(1)})(x+l_1)} - \frac{1}{\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)}} e^{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(1)})(x+l_1)} \right) + \\ & \left. \left. + \frac{D_3}{2} \left(\frac{x^2 - l_1^2}{\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)}} - \frac{2x}{(\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)})^2} + \frac{2}{(\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)})^3} \right) e^{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(1)})(x+l_1)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{4s(2)}(x) = & \frac{B_2 \delta_{4s(2)}}{2\sigma_{1s(2)}} \left\{ \frac{1}{\delta_{2s(2)}} \left[\frac{D_{4(2)}}{\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)}} - \frac{D_{1(2)}}{\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)}} + \right. \right. \\ & + D_{3(2)} \left(\frac{x}{\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)}} - \frac{1}{(\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)})^2} \right) \left. \right] e^{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)})(x+l_1)} + \\ & + \frac{\beta_2^{(0)}}{\delta_{2s(2)}} \left[D_{4(2)} \left(\frac{x+l_1}{\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)}} - \frac{1}{(\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)})^2} \right) e^{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)})(x+l_1)} - \right. \\ & - \frac{D_1}{\beta_2^{(0)}} \left(\frac{1}{2\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)}} e^{(2\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)})(x+l_1)} - \frac{1}{\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)}} e^{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)})(x+l_1)} \right) + \\ & \left. \left. + \frac{D_3}{2} \left(\frac{x^2 - l_1^2}{\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)}} - \frac{2x}{(\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)})^2} + \frac{2}{(\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)})^3} \right) e^{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(1)})(x+l_1)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\Omega_{1s(2)}(x) = (0.5B_2 \delta_{3s(2)} \sigma_{1s(2)}^{-1} (W_{01} + \Phi_{LS(2)}(-l_1, \omega)) (\beta_2^{(0)} - \sigma_{1s(2)})^{-1} e^{(\beta_1^{(0)} - \sigma_{1s(2)})(x+l_1)},$$

$$\Omega_{2s(2)}(x) = (0.5B_2 \delta_{3s(2)} \sigma_{1s(2)}^{-1} (W_{01} + \Phi_{LS(2)}(-l_1, \omega)) (\beta_2^{(0)} + \sigma_{1s(2)})^{-1} e^{(\beta_1^{(0)} + \sigma_{1s(2)})(x+l_1)}.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} E_0 = \exp(-l_1 \beta_1^{(0)}), \quad E_{01} = \exp(-l_2 \beta_2^{(0)}), \quad F_2 = \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)})^{(0)} E_{01}}{2k_{S(2)}^{(0)} \beta_2^{(0)}}, \quad A_1 = \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)}}{2k_{S(1)}^{(0)} \beta_1^{(0)}}, \\ D_1 = 2A_1 \delta_{2s(1)}, \quad D_2 = 1 + D_4, \quad D_3 = 2\Lambda_1 \Lambda^{-1} \delta_{2s(1)}, \quad D_4 = 2\Lambda_2 \Lambda^{-1} \delta_{2s(1)}, \quad D_{1(2)} = 2\delta_{2s(2)} F_2, \\ D_{2(2)} = 1 + D_{4(2)}, \quad D_{3(2)} = 2\Lambda_3 \Lambda_0^{-1} \delta_{2s(2)}, \quad D_{4(2)} = 2\Lambda_4 \Lambda_0^{-1} \delta_{2s(1)}. \end{aligned}$$

В выражения (12)-(15) входят комплексные амплитуды Θ_{1Ng} , W_{1Nb} , U_{N1} , V_{N1} , U_{N2} и V_{N2} , для нахождения которых воспользуемся граничными условиями (5)-(8) и получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \Theta_{1Ng} + R_{1g} [S_{1g}(0) - S_{2g}(0)] = U_{N1} + V_{N1} + R_{S(1)} [S_{1S(1)}(0) - S_{2S(1)}(0)] + \\ + \Omega_{2S(1)}(0) + \Omega_{4S(1)}(0) - \Omega_{1S(1)}(0) - \Omega_{3S(1)}(0) - \\ - g_{0S(1)}(0) \Phi_{LS(1)}(\omega, 0) + g_{0g}(0) \Phi_{Lg}(\omega, 0), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} U_{N1} e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} + V_{N1} e^{\sigma_{1S(1)l_1}} + [R_{S(1)} S_{1S(1)}(-l_1) - \Omega_{1S(1)}(-l_1) - \Omega_{3S(1)}(-l_1)] e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} - \\ - [R_{S(1)} S_{2S(1)}(-l_1) - \Omega_{2S(1)}(-l_1) - \Omega_{4S(1)}(-l_1)] e^{\sigma_{1S(1)l_1}} = \\ = U_{N2} + V_{N2} + [R_{S(2)} S_{1S(2)}(-l_1) - \Omega_{1S(2)}(-l_1) - \Omega_{3S(2)}(-l_1)] - \\ - [R_{S(2)} S_{2S(2)}(-l_1) - \Omega_{2S(2)}(-l_1) - \Omega_{4S(2)}(-l_1)] - \\ - g_{0S(2)}(-l_1) \Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1) + g_{0S(1)}(-l_1) \Phi_{LS(1)}(\omega, -l_1), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} U_{N2} e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} + V_{N2} e^{\sigma_{1S(2)l_2}} + [R_{S(2)} S_{1S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{1S(2)}(-l_1 - l_2) - \\ - \Omega_{3S(2)}(-l_1 - l_2)] e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} - g_{0S(2)}(-l_1 - l_2) \Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1 - l_2) - \\ - [R_{S(2)} S_{2S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{2S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{4S(2)}(-l_1 - l_2)] e^{\sigma_{1S(2)l_2}} + \\ + g_{0b}(-l_1 - l_2) \Phi_{Lb}(\omega, -l_1 - l_2) = W_{1Nb} + R_{1b} [S_{1b}(-l_1 - l_2) - S_{2b}(-l_1 - l_2)], \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} g \{ R_{1g} [S_{1g}(0) + S_{2g}(0)] - \Theta_{1Ng} \} = \\ = U_{N1} - V_{N1} + R_{S(1)} [S_{1S(1)}(0) + S_{2S(1)}(0)] - \\ - \Omega_{1S(1)}(0) - \Omega_{3S(1)}(0) - \Omega_{2S(1)}(0) - \Omega_{4S(1)}(0) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} s \{ U_{N1} e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} - V_{N1} e^{\sigma_{1S(1)l_1}} + [R_{S(1)} S_{1S(1)}(-l_1) - \Omega_{1S(1)}(-l_1) - \Omega_{3S(1)}(-l_1)] e^{-\sigma_{1S(1)l_1}} + \\ + [R_{S(1)} S_{2S(1)}(-l_1) - \Omega_{2S(1)}(-l_1) - \Omega_{4S(1)}(-l_1)] e^{\sigma_{1S(1)l_1}} \} = \\ = U_{N2} - V_{N2} + [R_{S(2)} S_{1S(2)}(-l_1) - \Omega_{1S(2)}(-l_1) - \Omega_{3S(2)}(-l_1)] + \\ + [R_{S(2)} S_{2S(2)}(-l_1) - \Omega_{2S(2)}(-l_1) - \Omega_{4S(2)}(-l_1)], \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} U_{N2} e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} - V_{N2} e^{\sigma_{1S(2)l_2}} + [R_{S(2)} S_{1S(2)}(-l_1 - l_2) - \\ - \Omega_{1S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{3S(2)}(-l_1 - l_2)] e^{-\sigma_{1S(2)l_2}} + \\ + [R_{S(2)} S_{2S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{2S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{4S(2)}(-l_1 - l_2)] e^{\sigma_{1S(2)l_2}} = \\ = b \{ W_{1Nb} + R_{1b} [S_{1b}(-l_1 - l_2) + S_{2b}(-l_1 - l_2)] \}. \end{aligned} \quad (32)$$

Совместное решение системы уравнений (27)-(32) позволяет получить выражение для Θ_{1Ng} :

$$\begin{aligned}
\Theta_{1Ng} = & R_{1g} [S_{2g}(0) - S_{1g}(0)] - [g_{0S(1)}(0)\Phi_{LS(1)}(\omega, 0) - g_{0g}(0)\Phi_{Lg}(\omega, 0)] + \\
& + \frac{2G_1}{G} \{ [R_{S(1)}S_{1S(1)}(0) - \Omega_{1S(1)}(0) - \Omega_{3S(1)}(0)] - \\
& - [R_{S(1)}S_{1S(1)}(-l_1) - \Omega_{1S(1)}(-l_1) - \Omega_{3S(1)}(-l_1)] \} - \\
& - \frac{2G_2}{G} \{ [R_{S(1)}S_{2S(1)}(0) - \Omega_{2S(1)}(0) - \Omega_{4S(1)}(0)] - \\
& - [R_{S(1)}S_{2S(1)}(-l_1) - \Omega_{2S(1)}(-l_1) - \Omega_{4S(1)}(-l_1)] \} + \\
& + \frac{2G_3}{G} [g_{0S(2)}(-l_1)\Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1) - g_{0S(1)}(-l_1)\Phi_{LS(1)}(\omega, -l_1)] + \\
& + \frac{4G_4}{G} \{ [R_{S(2)}S_{1S(2)}(-l_1) - \Omega_{1S(2)}(-l_1) - \Omega_{3S(2)}(-l_1)] - \\
& - [R_{S(2)}S_{1S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{1S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{3S(2)}(-l_1 - l_2)] \} + \\
& + \frac{4G_5}{G} \{ [R_{S(2)}S_{2S(2)}(-l_1) - \Omega_{2S(2)}(-l_1) - \Omega_{4S(2)}(-l_1)] - \\
& - [R_{S(2)}S_{2S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{2S(2)}(-l_1 - l_2) - \Omega_{4S(2)}(-l_1 - l_2)] \} + \\
& + 4bG^{-1} [2R_{1b}S_{2b}(-l_1 - l_2) + g_{0S(2)}(-l_1 - l_2)\Phi_{LS(2)}(\omega, -l_1 - l_2) - \\
& - g_{0b}(-l_1 - l_2)\Phi_{Lb}(\omega, -l_1 - l_2)]. \tag{33}
\end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
G &= e^{-\sigma_{1S(2)l_2}(1-b)} [e^{-\sigma_{1S(1)l_1}(1+s)} + e^{\sigma_{1S(1)l_1}(1-s)}] - e^{\sigma_{1S(2)l_2}(1+b)} [e^{-\sigma_{1S(1)l_1}(1-s)} + e^{\sigma_{1S(1)l_1}(1+s)}], \\
G_1 &= e^{-\sigma_{1S(2)l_2}(1-b)} e^{-\sigma_{1S(1)l_1}(1+s)} - e^{\sigma_{1S(2)l_2}(1+b)} e^{-\sigma_{1S(1)l_1}(1-s)}, \quad b^{-1} = k_{s(2)}^{(0)}\sigma_{1S(2)} / k_b^{(0)}\sigma_{1b}, \\
G_3 &= e^{-\sigma_{1S(2)l_2}(1-b)} - e^{\sigma_{1S(2)l_2}(1+b)}, \quad G_5 = e^{\sigma_{1S(2)l_2}(1+b)}, \quad s = k_{s(1)}^{(0)}\sigma_{1S(1)} / k_{s(2)}^{(0)}\sigma_{1S(2)}, \\
G_2 &= e^{-\sigma_{1S(2)l_2}(1-b)} e^{\sigma_{1S(1)l_1}(1-s)} - e^{\sigma_{1S(2)l_2}(1+b)} e^{\sigma_{1S(1)l_1}(1+s)}, \quad G_4 = e^{-\sigma_{1S(2)l_2}(1-b)}.
\end{aligned}$$

Выражение (33) является общим выражением для Θ_{1Ng} и соответствует произвольным значениям величин $\sigma_{1S(1)l_1}$ и $\sigma_{1S(2)l_2}$. Следовательно, для акустического колебания температуры в газовом слое справедливо выражение

$\Phi_{1Ng}(\omega, x) = [\Theta_{1N} - R_{1g}S_{2g}(x) - \Theta_L g_{0g}(x)] \exp(-\sigma_g x) + R_{1g}S_{1g}(x) \exp(\sigma_g x)$, а для экспериментально детектируемого ФА-сигнала необходимо выполнить интегрирование

$$\delta p_{1N}(\omega) = \frac{\gamma P_0 2\pi\mu_g}{T_{00}l_g} \bar{\Phi}_{1Ng}(\omega) = \frac{\gamma P_0}{T_{00}l_g} \int_0^{2\pi\mu_g} \Phi_{1Ng}(\omega, x) dx. \tag{34}$$

А. Предположим, что **первый слой является сильнопоглощающим**, тогда $l_{S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}$, $\exp(-l_{S(1)}\beta_1^{(0)}) \approx 0$.

1а. Оба слоя являются термически толстыми с условиями $l_{S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$, $l_{S(1)} \gg \mu_{1S(1)}(\omega)$, $\mu_{1S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$, $l_{S(2)} \gg \mu_{1S(2)}(\omega)$, $\exp(-\sigma_{1S(1)}l_1) \approx 0$, $\exp(-\sigma_{1S(2)}l_2) \approx 0$. Для этого случая из (34) получим:

$$\delta p_{1N1}(\omega) = \frac{\gamma P_0 I_0 A_{S(1)}^{(0)} \Theta_0}{2k_{S(1)}^{(0)} T_{00} l_g \sigma_{1g} \sigma_{1S(1)}} K_{1N1}, \quad (35)$$

где $K_{1N1}(l_{S(i)} \gg \mu_{2S(i)}, \mu_{2S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}) = \delta_{3S(1)} + \delta_{4S(1)} - 0.5(\delta_{S(1)} + \delta_{2S(1)})$. Из (35) легко убеждаемся в том, что в этом случае частотная зависимость амплитуды ФА-сигнала $|\delta p| \propto \omega^{-1}$.

2а. Оба слоя являются термически толстыми с условиями $l_{S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$, $l_{S(1)} \gg \mu_{1S(1)}(\omega)$, $\mu_{1S(1)} \ll \mu_{\beta(1)}(\omega)$, $l_{S(2)} \gg \mu_{1S(2)}(\omega)$. Выполнив необходимые вычисления, получим

$$\delta p_{1N2}(\omega) = \frac{\gamma P_0 I_0 A_{S(1)}^{(0)} \Theta_0 \beta_1^{(0)}}{2k_{S(1)}^{(0)} T_{00} l_g \sigma_{1g} \sigma_{1S(1)}^2} K_{1N2}.$$

Здесь $K_{1N1}(l_{S(i)} \gg \mu_{2S(i)}, \mu_{2S(1)} \ll \mu_{\beta(1)}) = \delta_{3S(1)} - \delta_{2S(1)}$. Нетрудно убедиться в том, что для этого случая справедлива оценка $|\delta p| \propto \omega^{-3/2}$.

3а. Первый слой является термически тонким, а второй термически толстым с условиями $l_{S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$, $l_{S(1)} \ll \mu_{1S(1)}(\omega)$, $\mu_{1S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$ и $l_{S(2)} \gg \mu_{1S(2)}(\omega)$. Тогда вычисление интеграла (34) позволяет получить выражение

$$\delta p_{1N3} = \frac{\gamma P_0 I_0 A_{S(1)}^{(0)}}{2k_{S(2)}^{(0)} T_{00} l_g \sigma_{1g} \sigma_{1S(2)}} [(\delta_{3S(1)} - \delta_{2S(1)})\Theta_0 + (\delta_{2S(2)} - \delta_{2S(1)} - \frac{\delta_{S(2)} - \delta_{2S(2)}}{2})W_{01}] \quad (36)$$

для нелинейного составляющего ФА-сигнала, где Θ_0, W_{01} - температуры облучаемой поверхности первого слоя и поверхности контакта между обоими слоями, соответственно. Из (36) видно, что имеет место $|\delta p| \propto \omega^{-1}$.

4а. Оба слоя являются термически тонкими с условиями $l_{S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$, $l_{S(1)} \ll \mu_{1S(1)}(\omega)$, $\mu_{1S(1)} \gg \mu_{\beta(1)}(\omega)$ и $l_{S(2)} \ll \mu_{1(2)}(\omega)$. Тогда справедливо выражение

$$\delta p_{1N4} = \frac{\gamma P_0 I_0 A_{S(1)}^{(0)}}{2k_b^{(0)} T_{00} l_g \sigma_{1g} \sigma_{1b}} [(\delta_{3S(1)} - \delta_{2S(1)})\Theta_0 + (\delta_{2S(2)} - \delta_{2S(1)})W_{01} - \frac{\delta_b - 3\delta_{2b}}{2} + \delta_{2S(2)})W_{02}],$$

где W_{02} - температура второго слоя, контактирующего с подложкой.

Б. Первый слой является прозрачным, а второй сильнопоглощающими.

Тогда справедливо $\beta_1^{(0)}l_1 \ll 1$, $\exp(-\beta_1^{(0)}l_1) \approx 1 - \beta_1^{(0)}l_1$, $\exp(-\beta_2^{(0)}l_1) \approx 0$.

16. Оба слоя являются термически тонкими с условиями, $l_{S(1)} \ll \mu_{S(1)}(\omega)$, $l_{S(1)} \ll \mu_{S(2)}(\omega)$, $|r_1| > 1$ и $|r_2| > 1$. Выполняя необходимые вычисления и пренебрегая малыми поправками, из (34) получим

$$\begin{aligned} \delta P_{1N} = & \frac{\gamma P_0 I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)})}{2k_b^{(0)} T_{00} l_g \sigma_{1g} \sigma_{1b}} [-\delta_{2S(1)} \Theta_0 + \\ & + (\delta_{2S(2)} - \delta_{2S(1)} + \delta_{3S(2)}) W_{01} - (\frac{\delta_b - \delta_{2b}}{2} - \delta_{2S(2)} + \delta_{2b}) W_{02}] \end{aligned}$$

В этом случае частотная зависимость амплитуды ФА-сигнала описывается согласно $|\delta p| \propto \omega^{-1}$.

26. Первый слой термически тонкий, а второй термически толстый с условиями $l_{S(1)} \ll \mu_{S(2)}(\omega)$, $l_{S(2)} \ll \mu_{S(2)}(\omega)$, $r_i = \beta_i^{(0)} / \sigma_i$, $|r_1| > 1$ и $|r_2| < 1$, $\exp(-\sigma_{1S(2)} l_2) \approx 0$, $\exp(-\sigma_{1S(1)} l_1) \approx 1$. Выполняя необходимые вычисления и пренебрегая малыми поправками, из (34) получим

$$\begin{aligned} \delta P_{1N} = & \frac{\gamma P_0}{T_{00} l_g \sigma_{1g}} \left\{ \frac{I_0 [A_{S(1)}^{(0)} \beta_1 l_1 + A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}) \beta_2 / \sigma_{1S(2)}]}{2k_{S(2)}^{(0)} \sigma_{1S(2)}} \times \right. \\ & \times [-\delta_{2S(1)} \Theta_0 + (\delta_{2S(2)} - \delta_{2S(1)} + \delta_{3S(2)} + \delta_{4S(2)}) W_{01}] - \\ & \left. - \left[\frac{(\delta_{S(2)} - \delta_{2S(2)})}{2} \frac{I_0 A_{S(1)}^{(0)} \beta_1 l_1}{2k_{S(2)}^{(0)} \sigma_{1S(2)}} - \frac{I_0 A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}) (\delta_{3S(2)} + \delta_{4S(2)}) \beta_2}{2k_{S(2)}^{(0)} \sigma_{1S(2)} \sigma_{1S(1)}} \right] W_{01} \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

Из (37) следует, что для этого случая частотная зависимость амплитуды нелинейного ФА-сигнала на основной частоте является достаточно сложной и описывается зависимостью

$$|\delta p| \propto A_1 \omega^{-1} + A_2 \omega^{-3/2},$$

где A_i определяется посредством термических коэффициентов и значений теплофизических коэффициентов второго слоя.

36. Первый слой термически тонкий, а второй термически толстый с условиями $l_{S(1)} \ll \mu_{S(2)}(\omega)$, $|r_1| \gg 1$, $|r_2| \gg 1$ и $l_{S(2)} \gg \mu_{S(2)}(\omega)$. В результате соответствующих вычислений будем иметь

$$\begin{aligned} \delta P_{1N} = & \frac{\gamma P_0}{T_{00} l_g \sigma_{1g}} \left\{ \frac{I_0 (A_{S(1)}^{(0)} \beta_1 l_1 + A_{S(2)}^{(0)} (1 - R_{S(1)}^{(0)}) \beta_2 / \sigma_{1S(2)})}{2k_{S(2)}^{(0)} \sigma_{1S(2)}} [-\delta_{2S(1)} \Theta_0 + \right. \\ & \left. + \frac{3\delta_{2S(2)} - \delta_{2S(1)} - \delta_{S(2)} + 2(\delta_{3S(2)} + \delta_{4S(2)})}{2} W_{01} \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Анализ выражения (38) показывает, что для этого случая спад амплитуды нелинейного ФА-сигнала с ростом частоты описывается зависимостью

$$|\delta p| \propto B_1 \omega^{-1} + B_2 \omega^{-3/2},$$

где величины B_i сложным образом определяются посредством значения $\kappa_i^{(0)} = \kappa(T_0)$ второго слоя и ТК.

Подводя результаты настоящей работы, можно заключить, что для некоторых случаев амплитуда основной гармоники нелинейного ФА-сигнала зависит от ТК оптического коэффициента поглощения материалов оптически неоднородных двухслойных твёрдотельных образцов. Это означает, что из измерения амплитуды этого сигнала возможно определение температурной зависимости величины оптического коэффициента поглощения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мадвалиев У., Салихов Т.Х., Шарифов Д.М. Тепловая нелинейность в фотоакустической камере. – ЖТФ, 2004, т.74, № 2, с. 17-23.
2. Мадвалиев У., Салихов Т.Х., Шарифов Д.М. Нелинейный фотоакустический отклик непрозрачных сред при газомикрофонной регистрации сигнала. – ЖПС, 2006, т.73, № 2, с. 170-176.
3. Мадвалиев У., Салихов Т.Х., Шарифов Д.М. Влияние тепловой нелинейности сильнопоглощающих сред на параметры фотоакустического сигнала при газомикрофонной регистрации. Основная и вторая гармоники. – ЖТФ, 2006, т.76, № 6, с. 87-97.
4. Салихов Т.Х., Шарипов Д.М., Туйчиев Х.Ш., Влияние температурной зависимости оптических величин на характеристики основной гармоники нелинейного фотоакустического сигнала твёрдых тел с объёмным. – ДАН РТ, 2011, т. 54, №6, с. 465-472.
5. Салихов Т.Х., Мадвалиев У., Шарипов Д.М., Влияние температурной зависимости оптических величин на характеристики второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала твёрдых тел с объёмным поглощением луча. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н, 2011, № 3 (144), с. 63-70.
6. Салихов Т.Х. Тепловая нелинейность в оптоакустике (обзор). III. Тепловая нелинейность в фотоакустике. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н, 2011, №4(145), с. 76-85.
7. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П. Теория генерации основной гармоники нелинейного фотоакустического сигнала двухслойными твердотельными образцами с оптически непрозрачным первым слоем – ДАН РТ, 2012, т. 55, № 2, с.132-140.
8. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П. Теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала двухслойными твердотельными образцами с оптически непрозрачным первым слоем – ДАН РТ, 2011, т. 54, № 9, с. 737-745.
9. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П. Нелинейный фотоакустический отклик двухслойных образцов с поверхностным поглощением второго слоя: II. Вторая гармоника – Вестник ТНУ, 2012, № 1/2 (81), с. 94-103.
10. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П. Теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического отклика двухслойных полупрозрачных образцов – ДАН РТ, 2012, т.55, № 12, с. 965-974.

11. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Особенности возбуждения основной гармоники нелинейного фотоакустического отклика оптически неоднородных твердотельных образцах. – Изв. АН РТ, Отд. физ.-мат., хим., геол., техн. н, 2017, №1(166), с.58-69.
12. Салихов Т.Х., А., Махмалатиф, Ходжаев Ю.П. и др. Нелинейный фотоакустический отклик оптически неоднородных двухслойных систем: I. математическая модель проблемы – Вестник ТНУ, Серия естественных наук, 2016, №1/2(196), с. 114-118.
13. Fujii Y., Moritani A., Nakai J. Photoacoustic Spectroscopy Theory for Multi - Layered Samples and Interference Effect - Jpn., J., Appl., Phys., 1981, v. 20, №2, 1981, pp. 361-367.
14. Салихов Т.Х., А., Махмалатиф, Ходжаев Ю.П. Нелинейный фотоакустический отклик оптически неоднородных двухслойных систем: II. Стационарное температурное поле. – Вестник ТНУ, Серия естественных наук. 2017, №1/2, с. 115-121.

Т.Х.СОЛИХОВ, А.МАХМАЛАТИФ, Ю.П.ХОЦАЕВ

ХУСУСИЯТҲОИ АНГЕЗИШИ ГАРМОНИКАИ АСОСИИ СИГНАЛИ ҒАЙРИХАТИИ ФОТОАКУСТИКИИ НАМУНАҲОИ ДУҚАБАТАИ ОП- ТИКӢ ҒАЙРИЯКЧИНСА

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Назарияи ангезиши гармоникаи асосии сигнали ғайрихатии фотоакустикии намунаҳои дуқабатаи оптикӣ ғайриякчинса пешниҳод карда шудааст. Барои мавридҳои муҳим вобастагии амплитудаи ин сигнал аз басомади модулятсияи нури афганда ва коэффисиентҳои термикии бузургиҳои гармофизикӣ ва оптикӣ муқарар карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: фотоакустика, ғайрихаттияти пажвоки фотоакустикӣ, системаи дуқабата, ғайрихаттияти ҳароратӣ, гармоникаи якум, ғайриякчинсагии оптикӣ.

T.Kh.SALIKHOV, A.MAHMALATIF, Yu.P.KHODJAEV

FEATURES OF GENERATION OF THE FUNDAMENTAL HARMONIC OF NONLINEAR PHOTOACOUSTIC RESPONSE IN OPTICALLY INHOMOGENEOUS TWO-LAYER SAMPLES

Tajik national University

A theory of fundamental harmonic generation of a nonlinear photoacoustic signal in optically inhomogeneous two-layer samples is proposed. For the most interesting cases, the dependencies of the amplitudes and phases of this signal on the frequency of modulation of the incident beam and the thermal coefficients of thermophysical and optical parameters, including the optical absorption coefficient, are established.

Key words: photoacoustic, thermal nonlinearity, two layers systems, nonlinear photoacoustic response, fundamental harmonic, optical inhomogeneous.

УДК 546.26-162

К.А.КОРЗУН, А.А.КОВАЛЕВСКИЙ, Д.А.КОТОВ, С.В.ГРАНЬКО

**СОСТАВ И ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ
ГРАФЕНОПОДОБНОГО МАТЕРИАЛА,
ПОЛУЧАЕМОГО ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ УГЛЯ**

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
Минск, Беларусь*

Поступила в редакцию 19.01.2017 г.

В работе приведены результаты изучения материала, полученного преобразованием углей в многослойные графеновые структуры в результате механохимической активации. Исследование проводилось с помощью сканирующей и просвечивающей микроскопии, спектроскопии комбинационного рассеяния, Оже-, ИК- и рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии. На основании экспериментальных исследований морфологии, химического состава и структуры полученного материала предложен механизм образования многослойного графена из наночастиц.

Ключевые слова: уголь, наночастицы, многослойный графен, спектр комбинационного рассеяния, дифрактограмма.

Повышенный интерес к графену и его производным связан с рядом его уникальных свойств: электронных, оптических, механических и других. Из множества обзоров очевидно, что графеновые материалы могут найти применение в устройствах для хранения энергии. На наш взгляд, в плане получения графеноподобных материалов особый интерес представляют угли. Они, как известно, по сути своей являются природными наноструктурированными материалами, в основе которых лежит углерод. Нами установлена возможность преобразования активированных и коксованных углей в материал со свойствами графена в результате механохимической обработки [1].

Преобразование активированных и коксованных углей при обработке определяется степенью их очистки от посторонних примесей и условиями механохимической обра-

Адрес для корреспонденции: Корзун Кристина Александровна. 220013, Республика Беларусь, г. Минск, ул. П.Бровки, 6, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. E-mail: kristin.korzun@gmail.com

ботки, в том числе и временем механического воздействия. Исходная размерность наночастиц угля влияет на процесс преобразования угля в материал со свойствами графена. Можно сделать вывод, что процесс механохимической активации углей во многом является определяющим при получении графеноподобных материалов и устройств на их основе.

Наблюдающееся на электронной дифрактограмме практически полное исчезновение дифракционных колец, а на рентгенограммах значительное снижение интенсивности и уширение линий, характерных для углерода, свидетельствуют о диспергировании, то есть глубоком измельчении частиц угля (рис. 1).

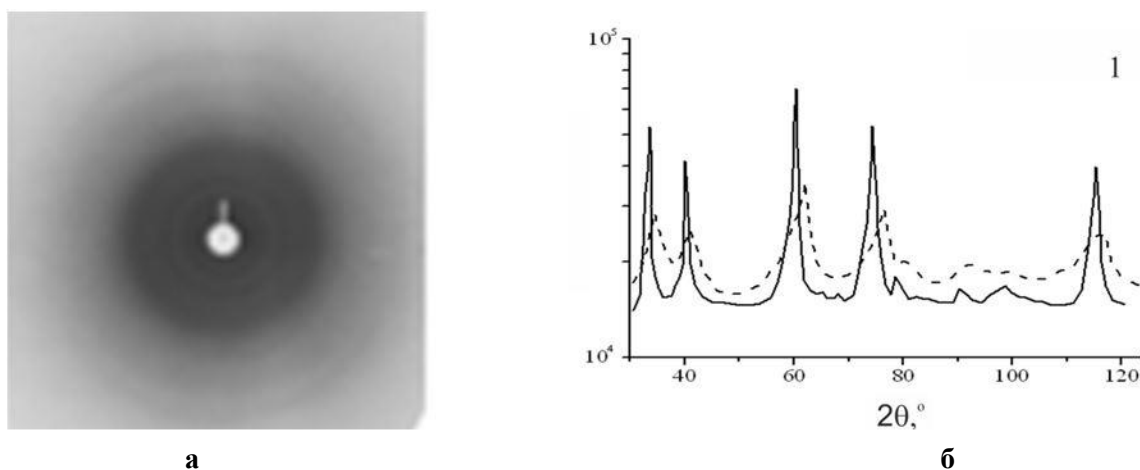


Рис. 1. Электронно- (а) и рентгенограммы (б), измельченных наноразмерных частиц угля.

Степень полиаморфной трансформации определяется отношением трансформируемой молекулярной структуры углей псевдокристаллической фазы в новую более совершенную фазу углерода в течение заданного времени. Влияние продолжительности измельчения проявилось в конкурирующей роли реакций деструкции органических веществ в составе углей, сопряженных с разрывом химических связей и образованием свободных радикалов, с реакциями поликонденсации и структурирования. Данные рентгеноструктурного анализа указывали на интенсивную аморфизацию углей с увеличением длительности процесса механоактивации от 28 до 48 часов. Образованные на основе чистого углерода графеновые хлопья характеризуются хорошим качеством кристаллической двумерной структуры и высокой термической устойчивостью.

Проведение фазового анализа дифрактограмм растираемых наноразмерных углей показало, что увеличение длительности процесса механоактивации от 28 до 48 часов приводит к повышению содержания углерода в псевдографене от 95.4 до 99.8%, при этом наблюдалось уменьшение межслоевого расстояния от 15 до 8.9-10 нм, а размера углеродного слоя по толщине от 21.0 до 5-12 нм. Число слоев в пакете увеличивалось от 2 до 15.

По нашему мнению, одной из наиболее вероятных возможностей образования слоистых структур является ассоциация молекул углерода в структуры типа молекулярных комплексов с переносом заряда.

С кинетической точки зрения, уровень полиаморфной трансформации зависит от энергетического барьера, препятствующего прохождению процесса. Другими словами, для того чтобы трансформация проходила, необходима определенная временная активация. Это не противоречит постулату, приведенному в [2], что эволюция наносистемы на различных стадиях получения включает важнейший параметр – время.

В свою очередь скорость трансформации при измельчении угля также зависит от размера исходных частиц угля и от соотношения массы шаров к массе угля.

Данные спектров комбинационного рассеяния (КР) и рентгеновских фотоэлектронных спектров (РФЭС) исследуемых многослойных графеновых структур представлены на рис. 2. КР-спектры состоят из трех характерных для графеновых структур полос: D, G и 2D, соответственно, в областях 1350, 1580 и 2700 см^{-1} .

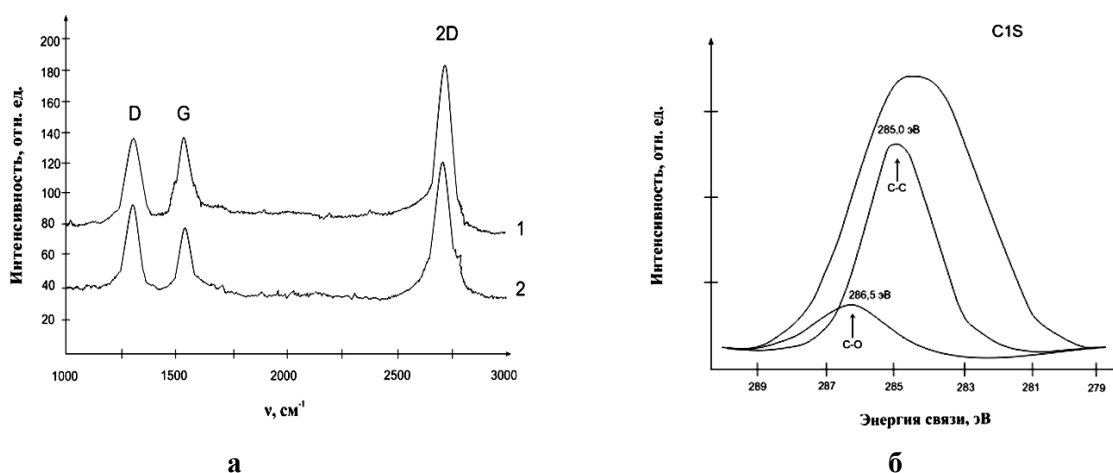


Рис. 2. КР- (а) и РФЭС (б) – спектры многослойных графеновых структур.

Присутствие D-полосы обусловлено содержанием в этих структурах либо аморфной фазы, либо разрушенных sp^2 – гибридных углеродных связей в углеродных кольцах графеновой структуры (разорванные связи по краям графеновых конгломератов, появление sp^2 – гибридных углеродных связей). Наличие G-полосы на КР-спектрах указывает на существование sp^2 – гибридных углеродных связей в плотных гексагональных графеновых структурах. Форма, положение и интенсивность 2D-полосы чувствительны к качеству графеновых слоев и их количеству при численности, по крайней мере, до 5 [3-5].

Измельчение углей при соотношении массы угля к массе шаров 1:100, при исходном размере частиц 70...50 нм в среде аргона при ускорении 400 м/с^2 в течение 48 часов, не только способствует уменьшению содержания посторонних примесей в формируемом материале, но сопровождается образованием графеновых хлопьевидных стружек, характеризующихся наименее дефектной структурой (рис.3). Кроме того, значение частотной характеристики 2D-полосы 2700 см^{-1} на КР-спектре, свидетельствует о том, что ему свойственна структура двумерного графена [3,6,7].

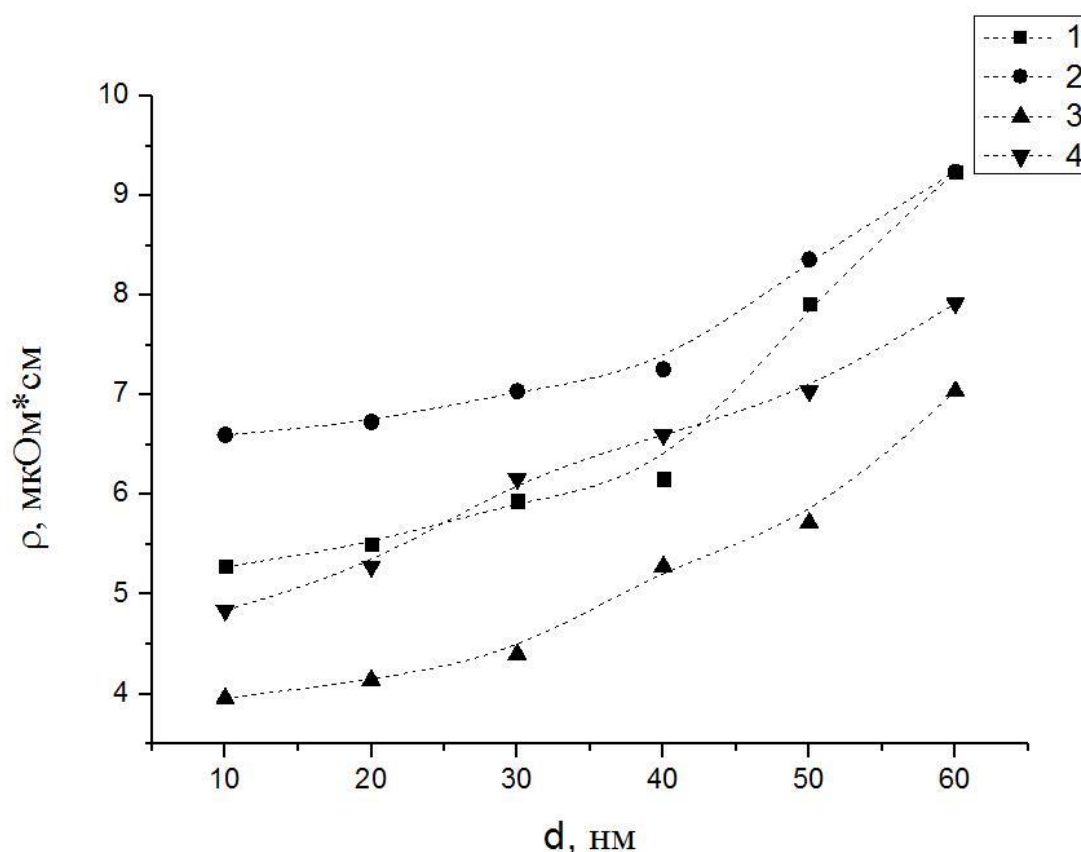


Рис. 3. Зависимость удельного электрического сопротивления многослойного графена от толщины слоев: 1 и 3 – из активированного угля, 2 и 4 – из коксованного угля, 1, 2 – свежеприготовленный многослойный графен, 3, 4 – прошедший обработку в среде аргона с водородом при температуре 350°C.

Разное качество структуры слоев в различных условиях их формирования иллюстрируют и формы 2D-полос на КР-спектрах, представленных на рис. 2а. Как видно из КР-спектров, по соотношению интенсивности пиков G и 2D и ширине пика 2D на полувысоте, образцы многослойного графена, полученные как измельчением активированного угля, так и коксованного, практически соответствуют по виду однослойному графену, обладающему достаточно высоким структурным совершенством. Тем не менее наличие высокого пика D указывает на наличие граней у данного материала. Это связано с механизмом формирования графена в результате механохимической активации через промежуточное образование графита. Следует отметить незначительное отличие в спектрах, относящихся к многослойному графену, сформированному при механохимической обработке коксованных углей. На их спектрах наблюдается несколько худшее соотношение пиков G и 2D. Это свидетельствует о явном наличии не совсем совершенной поверхности образца. Можно предположить, что это является следствием преобразования углерода в многослойный графен, хлопья которого характеризуются высокой размерной полидисперсно-

стью, и это свидетельствует о некоторой исходной трехмерной разупорядоченности слоев в этом материале [8,9].

На КР-спектре материала, полученного при растирании активированного угля в среде аргона, 2D-полоса является интенсивной и узкой (рис.2, спектр 1). Напротив, в КР-спектрах многослойного графена, полученного из коксованного угля при таких же условиях, она несколько расширена (рис.2, спектр 2). Можно сделать вывод, что активированный уголь в большей степени способствует формированию многослойного графена, по свойствам близкому к двумерному, и качество его структуры выше по сравнению с материалом, полученным из коксованного угля, то есть он характеризуется более высоким структурным совершенством.

В спектрах присутствует полоса в области 1580 см^{-1} , соответствующая дважды вырожденным деформационным колебаниям элемента графеновой структуры – шестичленного углеродного кольца в E_{2g} электронной конфигурации D_{6h}^{4g} кристаллической симметрии. Вторая полоса в области 1350 см^{-1} соответствует вибрационным состояниям разрушенной гексагональной решетки вблизи границ углеродных кристаллитов и свидетельствует о наличии в синтезируемом массиве частично упорядоченных переходных форм углерода. Наличие двух пиков на данных частотах с сопоставимой интенсивностью характерно для графитизированных материалов, состоящих из разупорядоченных углеродных нанокристаллов [7-9], углеродных нановолокон [10] или углеродных нанотрубок с высокой степенью дефектности. Таким образом, КР спектр свидетельствует о графитизированной структуре угля, измельченного методом механохимической активации.

В целом, данные КР-спектров исследованных материалов говорят о том, что при преобразовании углей в процессе механохимической обработки продукт, полученный при растирании в течение 48 часов, близок по структуре к графену. Это свидетельствует о том, что в этом случае произошли наиболее существенные преобразования и изменения структуры углей.

Дополнительно на рис. 2б представлены фотоэлектронные спектры остовных $C1s$ -уровней образца многослойного графена, полученного в результате механохимической активации активированного угля, и представлены результаты их разложения на составляющие. Из рис. 2 видно, что $C1s$ -спектр является сложным и может быть разложен на две отчетливо выраженные и характерно сдвинутые относительно друг друга составляющие в виде симметричных пиков с максимумами на 285.0 и 286.5 эВ. Отметим, что разница в энергиях связи $C1s$ -пиков, относящихся к атмосферному углероду и углероду в исследуемом материале, невелика и не может быть надежно подтверждена методом РФЭС без варьирования угла направленности рентгеновского излучения. Тем не менее, учитывая сравнительную интенсивность $C1s$ -пика с E_b , равном 285.0 эВ и наличие данного пика в спектре образца, поверхность которого распылялась в вакууме ионами аргона (т.е. наличие адсорбированных углеводородов исключается), можно констатировать, что $C1s$ -пик с E_b равном 285 эВ соответствует связи $C=C$ в полученном многослойном графене, хотя

конкретный характер гибридизации углерода (например, sp^2 или sp^3) не может быть однозначно установлен на основе полученного разложения.

На рис. 3 представлены зависимости удельного электрического сопротивления многослойного графена, которые свидетельствуют о высокой проводимости этого материала близкой к проводимости однослойного графена и ее зависимости от толщины слоя. Более того, обнаружено уменьшение проводимости с толщиной. Это обусловлено значительным вкладом границ раздела между слоями в величину удельного сопротивления материала. В свою очередь наблюдалось повышение проводимости материала в процессе обработки его в среде аргона с водородом при температуре 350°C. Эта закономерность обусловлена подчисткой его поверхности вследствие восстановительных реакций в результате воздействия водорода.

Причем это не разрушает его кристаллическую структуру, а напротив, усовершенствует ее, что существенно влияет на способность проявлять очень высокую электропроводность из-за носителей заряда, представляющих собой безмассовые дираковские фермионы.

Полученный новый материал состоит из стопки плоских листов графена с sp^2 -гибридизацией. Таким образом, механохимическая активация нанотрубок позволяет получить новые материалы по структуре, составу и электрофизическим свойствам близких к графену. Они могут использоваться в наноэлектронике и для создания новых композиционных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалевский А.А., Лабунов В.А., Строгова А.С., Цыбульский В.В., Шевченко А.А. Исследование влияния среды при тонком измельчении на состав углей. – *Материалы. Технологии. Инструмент*, 2012, т.17, №3. с.71-78.
2. Грайфер Е.Д., Макотченко В.Г., Назаров А.Г., Ким Сю-Дж, Федоров В.Е. Графен: химические подходы к синтезу и модифицированию. – *Успехи химии*, 2011, т.80, №8, с.784-804.
3. Букалов С.С., Михалицын Л.А., Зубавичус Я.В. и др. Исследование строения графитовых и некоторых других sp^2 углеродных материалов методами микроспектроскопии КР и рентгеновской дифракции. – *РХЖ*, 2006, т.L, №1, с. 83-91.
4. Ferrari A.C., Robertson J. Interpretation of Raman spectra of disordered and amorphous carbon. – *Phys. Rev. B.*, 2000, v.61, № 20, pp.14095-14107.
5. Casiraghi C. Ferrari A. C., Robertson J. Raman spectroscopy amorphous carbon. – *Phys. Rev. B*, 2005, v.72, № 8, pp.1-13.
6. Kelires P. C. Structural Properties and energetic of amorphous forms of carbon. – *Phys. Rev. B*, 1993, v. 47, № 4, pp.1829-1839.
7. Larouche N., Barry L. Classifying nanostructured carbons using graphitic indices derived from Raman spectra. – *Carbon*, 2010, v.48, №. 3, pp. 620-629.
8. Burian A. Daniel P., Duber S., Dore J. Raman scattering studies of the graphitization process in anthracene- and saccharose-based carbons. – *Phil. Mag. B*, 2001, v. 81, №. 5, pp. 525-540.
9. Pusz S. Duber S., Kwiecińska B.K. The study of textural and structural transformations of carbonized anthracites. – *Fuel Proc. Technology*, 2002, v. 77-78, pp. 173-180.

10. Харрис П. Углеродные нанотрубы и родственные структуры. Новые материалы XXI века. – М.: Техносфера, 2003, с.336.

К.А.КОРЗУН, А.А.КОВАЛЕВСКИЙ, Д.А.КОТОВ, С.В.ГРАНКО
**ТАРКИБ ВА ПАРАМЕТРҲОИ ЭЛЕКТРОФИЗИКИИ МАВОДИ
ГРАФЕНМОНАНД, КИ БО УСУЛИ ТАБДИЛДОДАНИ АНГИШТ
ҲОСИЛ КАРДА ШУДААСТ**

*Донишгоҳи давлатии информатика ва радиоэлектроникаи Беларус,
Минск, Беларус*

Дар кори мазкур натиҷаҳои омӯзиши маводе оварда шудааст, ки тариқи табдилёбии ангишт ба сохторҳои бисёрқабатаи графенӣ дар натиҷаи фаъолсозии механохимикӣ ҳосил карда шудааст. Тадқиқот бо истифода аз усулҳои нусхабардорӣ сканӣ ва трансмиссионӣ, спектроскопияи пароканиши комбинатсионӣ, Оже-, ИК- ва спектроскопияи рентгенӣ-фотоэлектронӣ гузаронида шудааст. Дар асоси тадқиқотҳои таҷрибавии морфология, таркиби кимиёвӣ ва сохтори маводи ҳосил карда шуда механизми ба вучуд омадани графени бисёрқабатаи наноангиштҳо пешниҳод карда шуд.

Калимаҳои калидӣ: ангишт, нанозарраҳо, графени бисёрқабата, спектри пароканиши комбинатсионӣ, дифрактограмма.

K.A.KORZUN, A.A.KOVALEVSKY, D.A.KOTOV, S.V.GRANKO
**COMPOSITION AND ELECTROPHYSICAL PARAMETERS
OF GRAPHENE-LIKE MATERIAL PRODUCED
UNDER COAL TRANSFORMATIONS**

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

Results of study of the material obtained by converting coal into multilayer graphene structure as a result of mechanical activation are given in the work. The research was conducted by use of scanning and transmission electron microscopy, Raman spectroscopy, Auger, IR and X-ray photoelectron spectroscopy. The mechanism of formation of multilayer graphene nano-coals is proposed by on the basis of experimental studies morphology, chemical composition and structure of the obtained material.

Key words: coal, nanoparticles, multilayer graphene, Raman spectrum, diffractogram.

УДК 521.633÷546.273

Ш.Б.НАЗАРОВ, А.М.БАРОТОВ, А.С.КУРБОНОВ, Ж.А.МИСРАТОВ, У.МИРСАИДОВ

**ИЗУЧЕНИЕ ОСОБЕННОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ БОР- И АЛЮМОСИЛИКАТ-
НЫХ РУД СПЕКАНИЕМ С CaCl_2**

Агентство по ядерной и радиационной безопасности АН Республики Таджикистан

Поступило 23.06.2017 г.

*Представлены результаты разложения бор- и алюмосиликатных руд спеканием с CaCl_2 .
Найдены оптимальные параметры процесса спекания. Дана сравнительная оценка особенностей
разложения борного сырья и нефелиновых сиенитов с CaCl_2 .*

Ключевые слова: спекание, нефелиновые сиениты, боросиликатная руда, хлористый кальций.

В работах [1-4] методом спекания изучено разложение бор- и алюминийсодержащих руд с неорганическими реагентами.

Как известно, процесс активации сырья включает в себя спекание сырья в присутствии минеральных солей. В качестве активаторов, роль которых сводится к разрушению внутренней конституции упорных минералов, использованы галлиды щелочных и щелочноземельных металлов, в частности NaCl , CaCl_2 , NaF , CaF_2 и др.

В настоящей работе изучены особенности спекания бор- и алюмосиликатных руд с CaCl_2 .

Для исследования выбраны нефелиновые сиениты месторождения Турпи и боросиликатная руда месторождения Ак-Архар. Химические составы указанных руд приводятся в табл. 1 и 2.

Адрес для корреспонденции: Мисратов Жахон Абдурахмонович. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Х.Хакимзаде, 17а, Агентство по ядерной и радиационной безопасности АН РТ. E-mail: misratov_zh@mail.ru

Таблица 1

Химический состав боросиликатного концентрата месторождения Ак-Архар

Компоненты													
Содержание, мас.%	B ₂ O ₃	SiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	FeO	CaO	MgO	TiO ₂	MnO	K ₂ O	Na ₂ O	P ₂ O ₅	П.п.п.
	17.41	46.8	2.45	2.67	1.68	23.6	0.75	0.15	0.29	0.1	0.03	0.11	3.56

Таблица 2

Химический состав нефелиновых сиенитов месторождения Турпи

Компоненты							
Содержание, мас.%	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	Na ₂ O	K ₂ O	CaO	SiO ₂	П.п.
	22.4	6.4	6.5	6.6	2.5	53.0	2.6

Для типичного опыта борную руду или нефелиновые сиениты измельчали до размера частиц 0.1 мм. Пробу смешивали с CaCl₂ в различных соотношениях и спекали в муфельной печи. Полученный спёк обрабатывали водой при температуре 80°C в течение часа для устранения избыточного хлорида кальция. Затем пульпу отфильтровывали и обрабатывали соляной кислотой. Условия разложения бор- и алюмосиликатных руд минеральными кислотами приведены в [2, 3].

Изучено влияние различных факторов (температура, продолжительность процесса, соотношение компонентов) на спекание руды и на водно-кислотную обработку (рис.1).

Как видно из рис.1, наиболее оптимальными условиями спекания борной руды с CaCl₂ являются: температура - 800-850 °С; продолжительность – 90 мин; соотношение руды к CaCl₂ 1:2. При таких условиях в раствор переходит (в %): B₂O₃ – 89.6, Al₂O₃ – 92.2, Fe₂O₃ – 96.9.

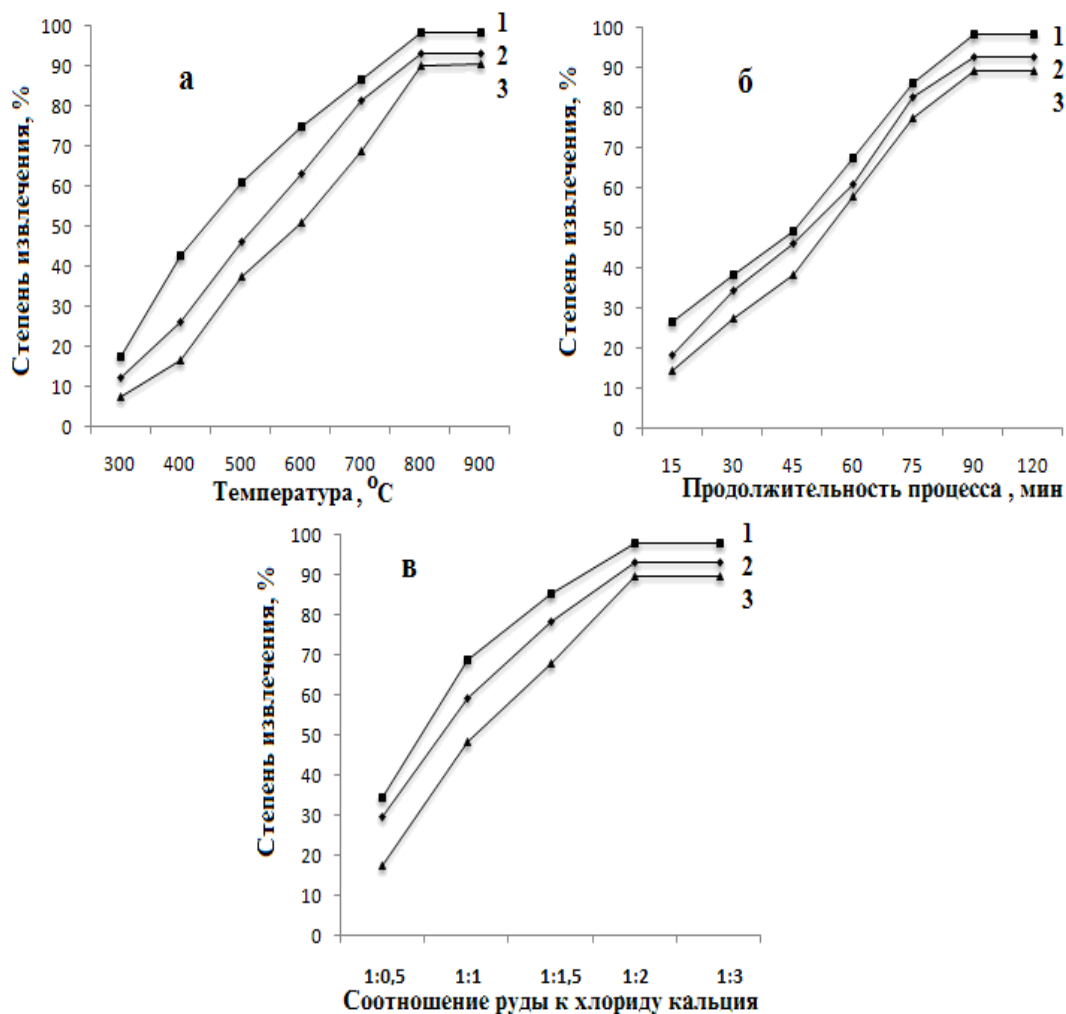


Рис.1. Зависимости степени извлечения оксидов из состава концентрата боросиликатной руды от: а) температуры; б) продолжительности процесса; в) массового соотношения руды к CaCl₂. 1 – Fe₂O₃, 2 – Al₂O₃, 3 – V₂O₅ (размер частиц < 0.1 мм; температура спекания – 850°C; продолжительность процесса – 90 мин).

На рис.2 представлено влияние различных физико-химических факторов, как на спекание нефелиновых сиенитов в присутствии активатора CaCl₂, так и на водную и соляно-кислотную обработку полученного спека.

Важным фактором, влияющим на разложение нефелиновых сиенитов при совместном спекании с CaCl₂, является массовое соотношение CaCl₂ к сырью (рис.2). При температуре 850°C и соотношении CaCl₂ : сырьё = 1:1 степень извлечения компонентов сырья достигает 80%, что намного лучше, чем в известном способе спекания алюминиевого сырья с известняком CaCO₃ [1], где такой же показатель извлечения достигается лишь при температуре 1100°C и массовом соотношении CaO:SiO₂=2:1. При массовом соотношении CaCl₂ : сырьё = 2:1 степень извлечения Al₂O₃, Fe₂O₃, Na₂O и K₂O достигает 95% и выше.

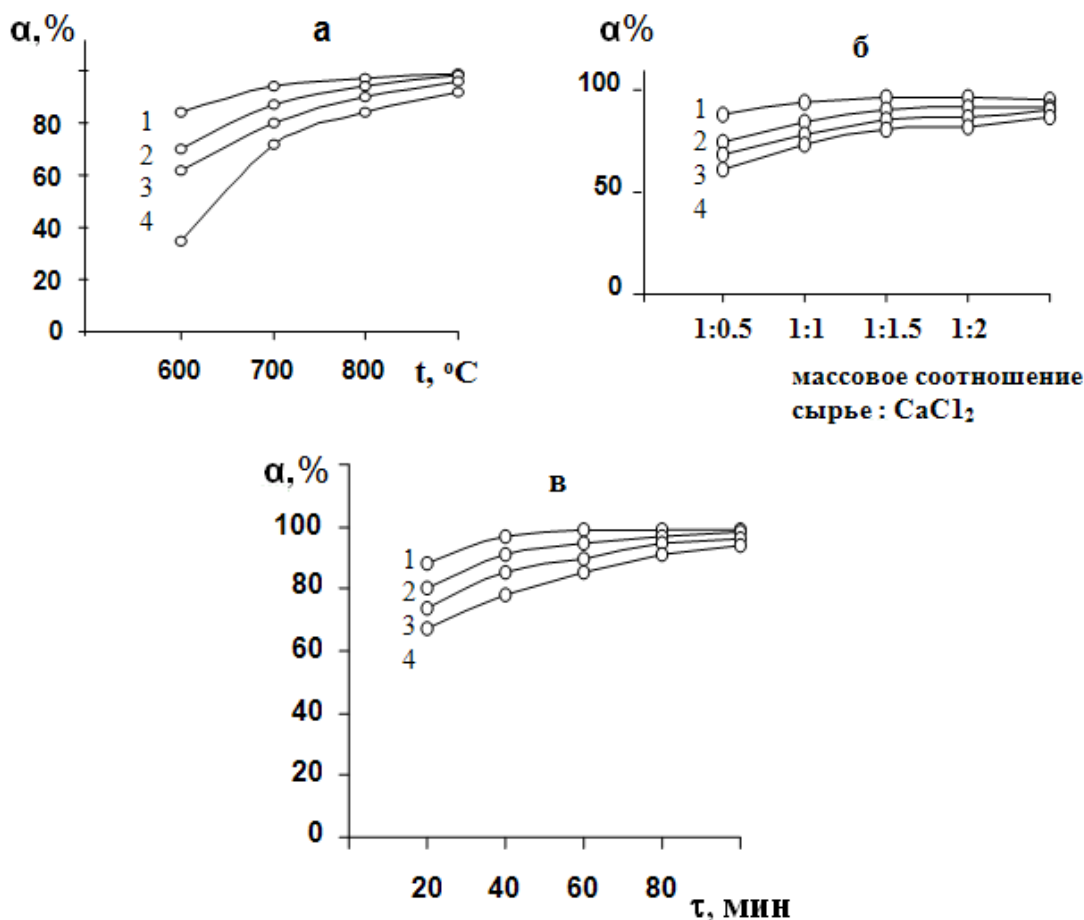


Рис.2. Зависимость степени извлечения полезных компонентов из нефелинового сырья от: температуры спекания (а), соотношения сырья : CaCl₂ (б) и продолжительности процесса (в). 1 - Fe₂O₃; 2 - Al₂O₃; 3 - Na₂O; 4 - K₂O.

Увеличение соотношения CaCl₂ : сырьё больше 2:1 практически не изменяет извлечение компонентов, а наоборот, увеличивает массу потока веществ, следовательно и теплотраты.

Влияние продолжительности процесса спекания показано на рис.2в, где неизменными факторами являлись: температура спекания - 900°C, соотношение CaCl₂ : сырьё = 2:1. Как видно из рис.2в, через 20 мин от начала процесса степень извлечения всех компонентов поднимается выше 70%. Продолжительность процесса спекания – 90 мин обеспечивает практически полное извлечение компонентов из сырья - степени извлечения Al₂O₃, Fe₂O₃, Na₂O и K₂O, соответственно, достигают (в %): 98.7; 100.0; 95.9; 97.8.

Как видно из рис.2, оптимальными условиями спекания нефелиновых сиенитов с CaCl₂ являются: температура спекания – 950°C, массовое соотношение нефелинового сырья к CaCl₂ - 1:2; продолжительность процесса – 60 мин.

Особенности спекания бор- и алюмосиликатных руд с CaCl_2 заключаются в том, что для боросиликатных руд наблюдается постепенное увеличение степени извлечения в зависимости от температуры, продолжительности процесса и соотношения реагентов (рис.1). Для нефелиновых сиенитов извлечение полезных компонентов мало зависит от данных параметров (рис.2). Эти особенности, по-видимому, объясняются минеральным составом указанных руд. Борная руда в основном состоит из данбурита, датолита, гидроборачита, аксинита. Эти минералы разлагаются при более низкой температуре (300°C) при спекании с CaCl_2 .

Минералы, которые содержат нефелиновые сиениты, трудно разлагаются. Например, железосодержащий минерал биотит в составе нефелиновых сиенитов при спекании переходит в форму минерала гематит, который разлагается при температуре $700-900^\circ\text{C}$. Это касается и других минералов, особенно микроклина, ортоклаза и нефелина.

Для нефелиновых сиенитов наряду с выделением Al_2O_3 важное значение имеют и другие продукты – K_2O и Fe_2O_3 , которые широко используются в сельском хозяйстве.

На рис.3 представлена сравнительная оценка извлечения полезных компонентов из бор- и алюмосиликатных руд.

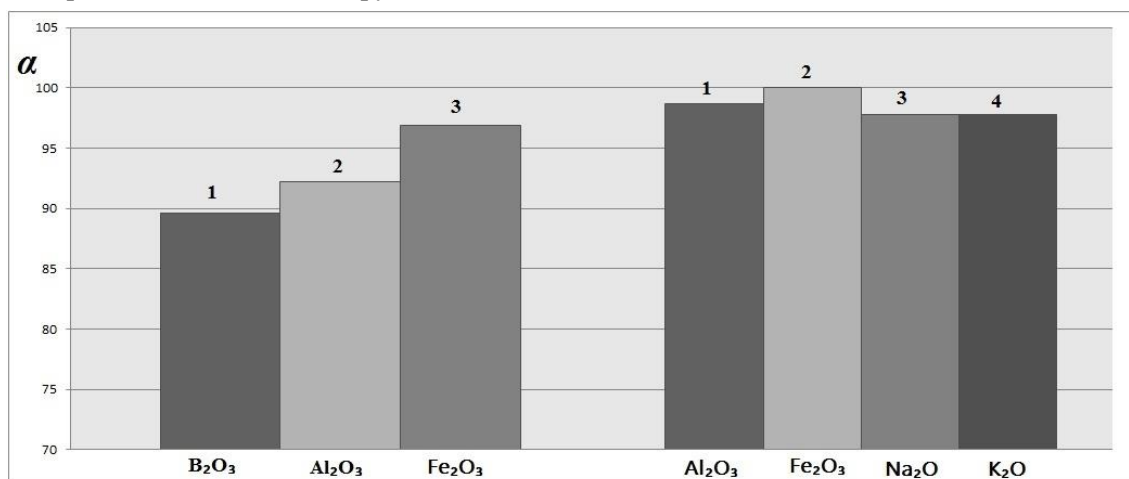


Рис.3. Сравнительная оценка извлечения полезных компонентов из бор- и алюмосиликатных руд.

Как видно из рис.3, при оптимальных параметрах из бор- и алюмосиликатных руд выделяется до 90% полезных компонентов, Исключение составляет B_2O_3 (89.6%).

Таким образом, метод спекания для борного сырья и нефелиновых сиенитов является наиболее рациональным методом, так как использует наиболее доступный реагент CaCl_2 с высоким выходом полезных продуктов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Запольский А.К. – Цветные металлы, 1989, №5, с.50-53.
2. Назаров Ш.Б., Сафиев Х.С., Мирсаидов У. Селективные методы разложения высококремнистых алюминиевых руд минеральными кислотами. – Душанбе: Дониш, 2008, 237 с.

3. Мирсаидов У.М., Маматов Э.Д., Сафиев Х.С. Особенности процесса хлорного разложения бор- и алюмосиликатных руд. – Душанбе: Дониш, 2013, 94 с.
4. Курбонов А.С., Баротов А.М., Назаров Ф.А., Мирсаидов У.М. – ДАН РТ, 2016, т.59, №1-2, с.53-56.

Ш.Б.НАЗАРОВ, А.М.БАРОТОВ, А.С.КУРБОНОВ, Қ.А.МИСРАТОВ,
У.МИРСАИДОВ

ОМУЌИШИ АСОСҲОИ ТАҶЗИЯИ МАЪДАНҲОИ БОР- ВА АЛЮМИ- НИЙСИЛИКАТӢ ҲАНГОМИ ПУХТАН БО CaCl_2

Агентии амнияти ядрой ва радиатсионии Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Натиҷаҳои таҷзияи маъданҳои бор- ва алюминийсиликатӣ ҳангоми пухтани он бо CaCl_2 оварда шудаанд. Параметрҳои мусоидаттарини раванди пазиш муайян карда шудаанд. Арзёбии муқоисавии асосҳои таҷзияи маъдани бор ва сиенитҳои нефелинӣ бо CaCl_2 гирд оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: пухтан, сиенитҳои нефелинӣ, маъдани борсиликатӣ, хлориди калсий.

Sh.B.NAZAROV, A.M.BAROTOV, A.S.KURBONOV, Zh.A.MISRATOV, U.MIRSAIDOV

STUDY OF THE BASIS OF DECOMPOSITION OF BORON- AND ALUMINUM SILICATE ORES BY SINTERING WITH CaCl_2

Nuclear and Radiation Safety Agency, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

The results of decomposition of boron- and aluminum silicate ores by sintering with CaCl_2 are presented. The optimal parameters for the sintering process are defined. The comparative assessment of the decomposition basis of boron ore and nepheline syenites with CaCl_2 is stated as well.

Key words: sintering, nepheline syenites, boron silicate ore, chloride calcium.

УДК 553:94(571.5):553.078

Дж.Н.ФОЗИЛОВ, Б.А.АЛИДОДОВ

**ЭЛЕМЕНТЫ-ПРИМЕСИ В УГЛЯХ КАМЕННОУГОЛЬНОГО
МЕСТОРОЖДЕНИЯ ФАН-ЯГНОБ**

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 18.03.2016 г.

Угли каменноугольного месторождения Фан-Ягноб характеризуются повышенными концентрациями таких сопутствующих малых элементов, как цинк, барий, фосфор, ванадий, хром, никель, марганец, олово, серебро (КК-10-55). За некоторыми исключениями их содержания повышены и в золах углей (100-760 г/т). Полученные данные могут представлять интерес при комплексном использовании угольных месторождений.

Ключевые слова: галлий, фосфор, ртуть, цинк, барий, ванадий, хром, никель, марганец, коэффициенты, концентрации.

В настоящее время наметившийся рост добычи и потребления угля в Таджикистане обусловил необходимость проведения работ по оценке потенциальной металлоносности и экологической безопасности добычи углей. Для организации таких исследований необходимо проведение опережающих прогнозно-металлогенетических работ, позволяющих на предварительной стадии выделить потенциальные металлоносные угли, требующие специализированного изучения [1].

В геологическом строении месторождения Фан-Ягноб принимают участие палеозойские хлоритовые, хлорит-серицитовые сланцы и известняки, являющиеся фундаментом обрамления депрессии. Осадочный чехол сложен терригенными и, отчасти, карбонатными отложениями триаса, юры, мела и неогена, перекрытыми четвертичными образованиями. Наиболее древними породами, слагающими площадь месторождения, являются силурийские отложения. Они составляют фундамент мезокайнозойских отложений и ограничивают их со всех сторон современными отложениями [2].

Адрес для корреспонденции: Фозилов Дживоншо Нурович, Алидодов Бахшидод Алидодович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: fozilov.tj@mail.Ru, E-mail: aliba04@mail.ru

Первые сведения о содержании микроэлементов в углях месторождения Фан-Ягноб получены Н.С.Огневым в 1955-1958. Полуколичественным спектральным методом с расшифровкой спектра на 26 элементов было проанализировано 670 угольных проб. Содержания германия в большинстве проб не превышали 10-30 г/т золы, а в трех пробах составили 60-100 г/т золы (Западная площадь).

С 1980 г. изучением металлоносности углей месторождения занимались М.М.Альтгаузен и И.Г.Шарова. Собранный ими фактический материал позволил дать оценку металлоносности углей отдельных площадей месторождения, оценить общие перспективы на германий и германиеносность отдельных угольных пластов, а также определить предварительный уровень концентрации токсичных элементов.

По результатам анализа 730 проб угля и вмещающих пород, отобранных из керна скважин Западной площади месторождения, изучена металлоносность пяти угольных пластов (12, 10, 9, 8 и 6) этой площади.

Данные о геохимической специализации угольных пластов Западной площади и концентрации элементов, потенциально перспективных для промышленного изучения, приводятся в табл. 1 и 2.

Содержание элементов в углях, экологически потенциально опасных элементов на Западной площади месторождения, повышенное. Здесь выделены зоны с достаточно высокими концентрациями фтора, мышьяка, ртути и ванадия. Свинец, бериллий и марганец образуют более локальные зоны повышенных концентраций. Вовлечение в потребление углей Западной площади необходимо сопровождать изучением концентраций токсичных элементов, а при централизованном их использовании в качестве топлива при проектировании углеперерабатывающего предприятия следует предусмотреть установку оборудования, исключающего загрязнения окружающей среды.

Изучение распределения содержаний элементов, представляющих возможный промышленный интерес, показало, что почти все угольные пласты Западной площади месторождения отличаются повышенными концентрациями цинка. Отдельные угольные пласты несут повышенные концентрации скандия, кобальта и серебра (Альтгаузен М.М., 1987).

Металлоносность угольных пластов Восточной площади изучена по результатам фактического материала, собранного И.Т.Шаровой (1986) и материала Джикрутской ГРП в процессе производства разведочных работ на этой площади в период 1986-1990 гг. Результаты изучения содержания малых элементов в четырех угольных пластах Восточной площади месторождения приведены в табл. 1-3.

Таблица 1

Среднее содержание малых элементов в углях и вмещающих породах месторождения Фан-Ягноб (в г/т)

Пласты угля	Кол-во проб	Mn	Ni	Co	V	Cr	Mo	W	Zr	Cu	Pb	Ag	Sb	Zn	Ga	Sr	Ge	Ba	Be	Sr	Y	Sc
Угольные пласты																						
Западная площадь																						
Пласт 17	2	55	3.0	5.3	194	61	6.1	1.6	5.3	103	25	0.17	5	432	6.6	3.3	1.1	122	6.4	15	2.5	1.3
Пласт 16	2	52	3.1	14.5	161	47	6.6	0.4	3.7	89	27	0.06	н/об	610	5.3	3.2	0.15	152	4.0	76	12	2.5
Пласт 15	2	105	1	2	29	5	0.7	0.15	5.7	10	1.5	0.015	н/об	25	1.5	0.5	0.3	44	3.6	35	4	2.9
Пласт 15 ^a	3	64	1.5	6	40	17	10	0.6	22	69	41	1.8	0.7	156	4.3	1	1	158	1.5	63	15	8.1
Пласт 14	20	763	7.8	16	167	52	5.7	1.2	26	116	73	0.01	10	135	4.2	1.1	0.5	120	50	47	27	7.1
Пласт 14 ^a	10	240	7	14.6	178	38	8	0.6	5	82	55	0.6	н/об	97	6.7	6	1.4	161	4.5	44	5.6	3.4
Пласт 13	7	70	3.5	5	185	37	3	н/об	5.5	4.2	81	0.3	н/об	335	7.9	3.1	0.3	184	1.2	27	4.2	1.7
Пласт 13 ^a	3	99	3.4	7.3	222	56	10.8	н/об	4.4	65	113	0.16	н/об	2145	12.2	3.4	11.2	132	0.8	27	5	2.2
Пласт 12	14	208	16.8	5.1	65	29	1.5	0.9	15	28	27	0.01	4.8	43	3.7	5	1.2	208	1.7	5	4.4	2
Пласт 12 ^a	24	154	14.2	8	94	30	3	0.7	12.4	33	35	0.01	6	206	4.5	2.6	1.2	98	2	19	2.4	2.4
Пласт 12	61	282	18.5	15.6	67	22	2.2	2.5	21	33	20	0.13	24	116	3.4	2.6	2.5	108	3.6	6	3.1	5.8
Пласт 11	14	140	17	5.2	37	12	2.1	5.1	11	55	42	0.03	4.7	64	27	3.6	4.4	173	5.1	31	7.8	7.1
Пласт 10	68	333	33	15	105	35	3.3	22	26	92	62	1.07	7.9	328	5.9	5.0	3	134	4.6	16	5.2	7.6
Пласт 9	29	58	15	5	97	32	2.8	6.2	20	44	32	0.12	5.8	138	4.1	2.9	2.5	96	3.2	14	3.6	4.8
Пласт 8	45	108	15	3.6	49	18	0.8	1.7	26	33	11	0.03	13	36	6	2.4	2.3	182	3.7	52	4.7	4.2
Пласт 6	47	194	21	8.8	47	17	1.4	6.5	14	32	16	1.2	6.2	32	3	1.6	1.1	104	2	17	3.3	3.8
Западной площади	351	238	11.3	8.4	109	32	4.2	3.1	14	58	41	0.4	5.4	306	5	3	2.1	136	3.3	34	7	4.2
Вмещающие породы, г/т																						
Аргиллит	65	320	37	14	350	48	1.4	1.7	64	51	33	0.17	н/о	225	1.9	9	1.7	300	0.5	22	12	6.3
Алевролит	172	386	40	15	360	55	1.2	1.9	70	59	38	0.14	н/об	290	1.8	11	1.8	320	0.6	33	1.4	2.0
Песчаник	76	280	35	16	330	48	1.1	1.8	75	48	27	0.13	н/об	210	1.7	12	1.1	280	0.5	26	12	5
Восточная площадь, пласт 13	118	89	6.4	5.2	76	14	8.4	3.3	н/об	34	30	0.32	21	107	2.9	8.4	0.4	110	3.9	53	4.2	2.0

Продолжение таблицы 1

Пласты угля	Кол-во проб	Mn	Ni	Co	V	Cr	Mo	W	Zr	Cu	Pb	Ag	Sb	Zn	Ga	Sr	Ge	Ba	Be	Sr	Y	Sc
Угольные пласты																						
Восточная площадь																						
Пласт 12	135	235	13	8.7	140	52	2.2	3.3	н/об	107	48	0.4	15	150	6.3	38	1.3	190	7.2	71	6.9	4.0
Пласт 9	466	176	15.7	5.0	72	21.8	1.4	7.2	н/об	56	26	0.18	9.9	76	3.8	10.3	1.1	156	2.2	48	4.8	2.6
Пласт 6	135	99	6	3.2	150	28	2.9	1.0	н/об	57	35	0.33	6	71	7.4	9	1.5	190	2.2	62	4.5	2.6
Восточной площади	784	150	10.3	5.8	110	29	3.7	3.7	н/об	67	35	0.33	6	71	7.4	9	1.5	190	2.2	62	4.5	2.6
Вмещающие породы																						
Аргиллиты	89	н/об	н/об	н/об	н/об	н/об	0.9	1.7	н/об	118	н/об	0.23	н/об	350	22	45.1	1.4	292	н/об	29	10.8	5
Алевриты	157	н/об	н/об	н/об	н/об	н/об	1.2	3.2	н/об	117	н/об	0.29	н/об	282	19.3	34.5	1.3	252	н/об	23	10.5	4.2
Песчаники	78	н/об	н/об	н/об	н/об	н/об	0.9	1.8	н/об	92	н/об	0.34	н/об	300	11.7	50	1.0	235	н/об	21	9.9	4.0
Гравелиты	19	н/об	н/об	н/об	н/об	н/об	0.6	1.5	н/об	67	н/об	03	н/об	72	5.7	46	0.5	150	н/об	17	9.7	2.2

Примечание: П-пласт

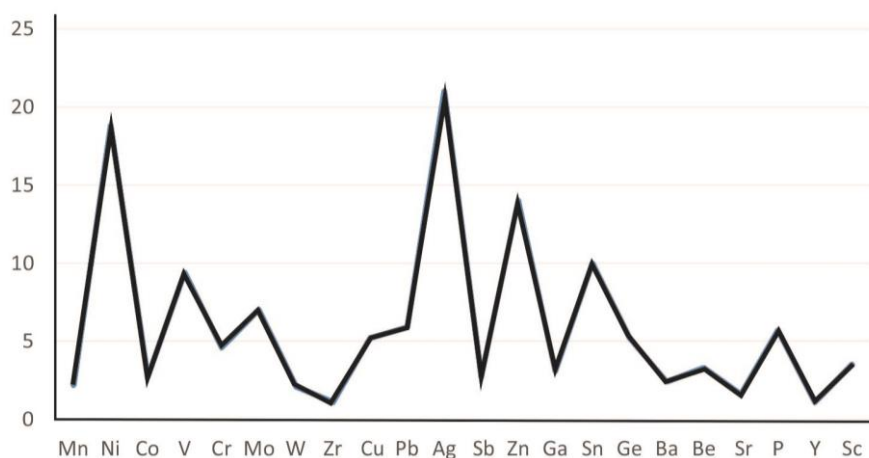
Таблица 2

Коэффициенты концентрации малых элементов в углях Западной и Восточной площади месторождения Фан-Ягноб

Пласты	Mn	Ni	Co	V	Cr	Mo	W	Zr	Cu	Pb	Ag	Sb	Zn	Ga	Sn	Ge	Ba	Be	Sr	P	Y	Sc
Западная площадь Пласт 12 ^а	1.5	1.6	2.6	3.5	4.3	5	3.5	1	3	5	42	3	9.4	2.8	8.7	3	1.7	2	0.9	6.2	0.4	2
Пласт 12	2.7	2	5.2	6.1	3.1	3.7	12.5	1.6	3	2.9	6.8	12	5.3	2.1	8.7	6.2	1.9	3.6	0.4	1.8	0.5	4.8
Пласт 11	1.3	1.9	1.7	3.2	1.7	3.5	25.5	1.8	5	6	1.8	0..	2.9	1.7	12	11	3.1	5.1	1.5	15.15	1.2	5.9
Пласт 10	3.1	3.7	4.8	9.5	5	5.5	112	1.8	8.3	8.9	56.3	4	14.9	3.7	16.7	7.5	2.4	4.6	0.8	5.9	0.8	6.3
Пласт 9	0.5	1.7	1.6	8.8	4.6	4.7	12	1.5	4	3.1	6.3	2.9	6.3	2.6	9.7	6.2	1.6	3.2	0.7	4.4	0.6	4
Пласт 8	1.0	1.7	1.2	4.5	2.6	1.3	8.5	1.2	3.4	1.6	1.6	6.5	1.6	2.2	8	5.8	3.2	3.7	2.5	17.8	0.8	3.5
Пласт 6	1.3	2.3	2.2	4.3	2.4	2.3	32.5	1.1	2.9	2.2	63.1	2.6	1.4	1.8	5.3	2.7	1.9	2	0.8	6.3	0.5	3.2
В целом по углям Западной площади	2.2	18.8	2.7	9.4	4.6	7	2.1	1.1	5.2	5.9	21	2.7	14	3.1	10	5.2	2.4	3.3	1.6	5.7	1.1	3.5
Восточная площадь. Пласт 13	0.8	0.7	2	6.6	2	14	2.2	1.1	3.1	4.3	17	10	4.9	1.8	28	1	2	3.9	2.5	6	0.7	1.7
Пласт 12	2.2	1.4	2.8	12.1	17.4	4	2.2	1.1	9.6	6.9	21	7.5	6.8	3.9	127	3.2	3.4	7.4	3.4	7	1.1	3.3
Пласт 9	1.7	1.7	1.6	6.2	3.1	2.3	4.8	н/об	5	3.7	9	5	3.6	2.4	34	2.8	2.8	2.2	2.3	5	0.8	2.2
Пласт 6	0.9	0.7	1	12.9	4	4.8	0.7	н/об	6	5	17	3	3.2	4.6	30	3.8	3.4	2.2	3.0	5	0.7	2.2
В целом по углям Восточной площади	1.4	1.1	1.9	9.5	4.1	6.2	2.5	1.1	6	5	16	6.5	4.6	3.2	53	2.8	2.9	3.9	2.8	5.9	0.8	2.3

Анализ табл. 1 и 2 показывает, что угольные пласты в целом имеют сходную геохимическую специализацию. Угли большинства угольных пластов специализированы ($KK > 5$) на ванадий, молибден, медь, серебро, сурьму, олово и фосфор, а также ($KK > 2$) хром, свинец, цинк, галлий, бериллий, вольфрам, германий, барий, стронций и скандий. Минимальные ($KK < 2$) характерны для марганца, никеля, кобальта, мышьяка, иттрия. На примере угольных пластов Восточной площади (9 и 6) изучена закономерность распределения содержаний микроэлементов в углях с различной зольностью (табл.4). Элементы, на которые специализированы угли площадей ($KK \geq 3-53$), концентрируются в высокозольных ($A^b > 40\%$) пачках угольных пластов. Это титан, германий, медь, серебро, олово, сурьма, ванадий, свинец, хром, цинк и бериллий.

В целом по углям Западной площади



В целом по углям Восточной площади

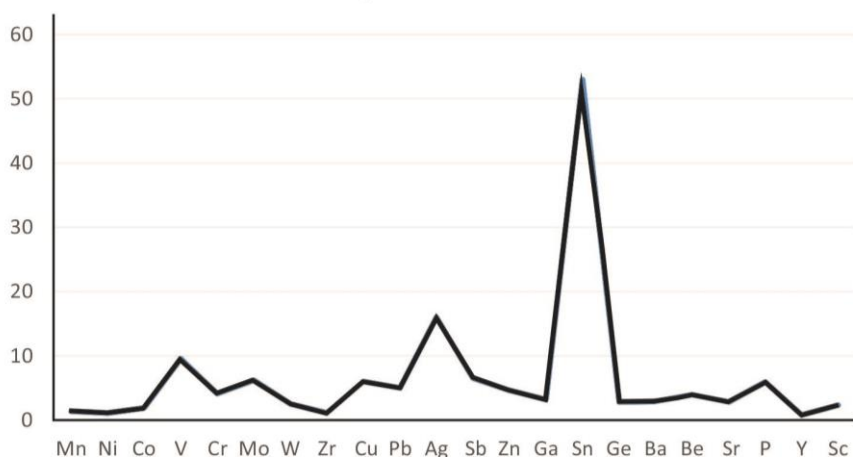


Рис.1. Вариационные диаграммы коэффициента концентрации малых элементов в углях месторождения Фан-Ягноб.

Как видно, эти величины для двух площадей неравнозначны и колеблются от 0.8 до 21.0. Наибольшими колебаниями и сравнительно значительными величинами коэффициента концентрации характеризуются угленосные образования Восточной площади, где они наиболее высоки для Ni, Ag, Zn, Sn и Ge (до 20 и более). Сравнительно стабильны коэффициенты концентрации для Западной площади, где отмечается аномально высокий коэффициент только одного элемента – олова (более 50).

Отмеченные выше отличия в коэффициентах концентрации малых элементов в углях Восточной и Западной площадей, судя по всему, связаны с особенностями геологического строения, рудогенеза и угленосности этих площадей.

Таблица 3

Среднее содержание основных элементов-индикаторов германиевого оруденения в углях месторождения Фан-Ягноб и значения прогнозных показателей

Пласты	Элементы-индикаторы (в г/т угля)						Прогнозные показатели		
	Ge	W	Sp	Mn	Mo	Be	Ge*WxSpхMn	GexWxMo	GexWxBe
Западная площадь, пласт 17	1.1	1.6	15	55	611	6.4	1x10 ³	-	-
Пласт 16	0.15	0.4	76	52	6.6	4.0	1x10 ³	-	-
Пласт 15	0.3	0.15	35	105	0.7	3.6	1x10 ²	-	-
Пласт 15 ^a	1.0	0.6	63	64	10	1.5	2x10 ³	-	-
Пласт 14	0.5	1.2	97	763	5.7	5.0	4x10 ⁴	3x10 ⁰	3x10 ⁰
Пласт 14 ^a	1.4	0.6	44	240	8	4.5	8x10 ³	-	-
Пласт 13 ^b	0.3	н/об	27	70	3	12	4x10 ²	-	-
Пласт 13 ^н	11.2	н/об	27	99	10.8	0.8	2x10 ⁴	9x10 ¹	7x10 ⁰
Пласт 12 ^с	1.2	0.9	5	208	1.5	1.7	1x10 ³	-	-
Пласт 12 ^a	1.2	0.7	19	114	3	2	2x10 ³	-	-
Пласт 12	2.5	2.5	8	232	2.2	3.6	1x10 ⁴	1x10 ¹	2x10 ¹
Пласт 11	4.4	1.1	31	140	2.1	5.1	9x10 ⁴	4x10 ¹	1x10 ²
Пласт 10	3	22	16	323	3.3	4.6	3x10 ⁵	3x10 ²	3x10 ²
Пласт 9	1.5	6.2	14	53	2.3	3.2	1x10 ⁴	4x10 ¹	5x10 ¹
Пласт 8	2.3	1.7	52	103	0.3	3.7	2x10 ⁴	3x10 ¹	1x10 ¹
Пласт 6	1.1	6.5	12	104	1.4	2	2x10 ⁴	1x10 ¹	1x10 ¹
Восточная площадь Пласт 13 ^a	0.4	2.3	18	89	8.4	3.9	6x10 ⁴	1x10 ²	5x10 ¹
Пласт 12	1.3	3.3	71	231	2.2	7.9	7x10 ⁵	9x10 ¹	3x10 ¹
Пласт 9	1.1	7.2	48	178	2.9	2.2	6x10 ⁴	1x10 ¹	1x10 ¹
Пласт 6	1.6	1.0	62	171	2.9	2.2	8x10 ³	-	-

Таблица 4

Содержание малых элементов в углях различной зольности
Восточной площади месторождения Фан-Ягноб (г/т)

Пласт	13	12	9	8
Кол-во проб	2	3	9	2
Зольность A ^b (%)	20	30	10	10
Ti	н/об	9.11	99	340
Mo	1.7	3	2	0.8
W	0.6	6	н/об	н/об
Zr	н/об	11	9	10
Cu	24	14	8	12
Ag	0.15	3	0.04	0.2
Zn	380	37	9	34
Sb	0.3	0.3	0.6	0.4
Ge	0.3	0.3	0.06	0.4
Ga	1.9	н/об	0.8	1.2
Ba	104	н/огр	64	116
Sr	38	72	10	19
P	760	280	106	485
Y	4.2	2	4	02
Sn	4.2	н/об	08	н/об
Hg	н/об	н/об	н/об	н/об
Be	2.1	7	0.4	0.6
V	47	352	15	24
Co	12	12	4	3
Ni	24	64	17	15
Pb	22	24	4	9
Cr	11	777	21	24
Mn	76	557	52	31
н/об		12	2	н/об

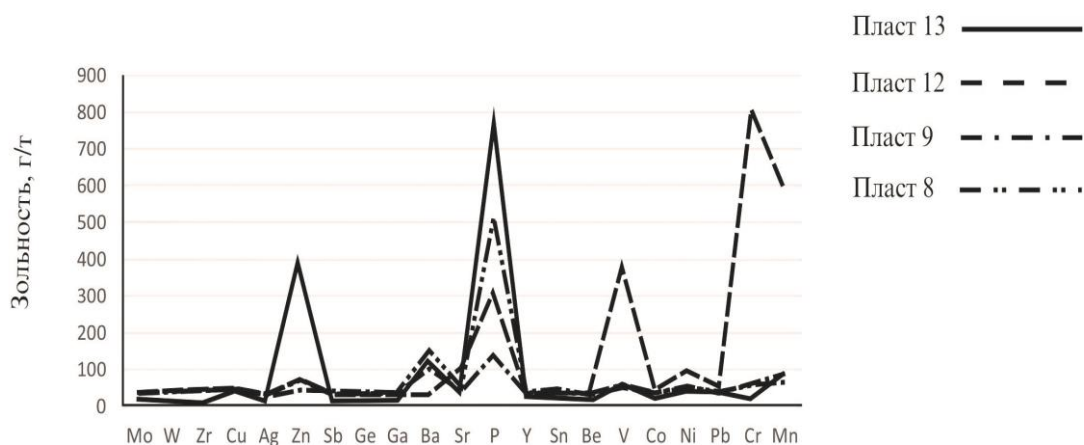


Рис.2. Вариации содержания малых элементов в зависимости от зольности углей
Восточной площади.

Как видно из кривых вариации содержания малых элементов в зависимости от зольности углей Восточной площади каменноугольного месторождения Фан-Ягноб (рис.2), в золах этих углей отмечаются повышенные концентрации цинка, бария, фосфора, ванадия, хрома, никеля и марганца, колеблющиеся в пределах от 0.15 до 760 г/т. Хотя эти данные в целом коррелируются с данными в углях месторождения Фан-Ягноб (рис.1), все же отмечаются и отличия в содержании некоторых элементов (олово, серебро, фосфор и др.), что, по-видимому, связано с подвижностью их летучих свойств. Такие элементы, как галлий, фосфор и ртуть, концентрируются в основном в низкзольных углях ($a^b < 20\%$); молибден, барий, цирконий равномерно распределены во всех разностях углей.

Оценка угольных пластов 6, 9, 12 на содержание германия осуществлена посредством определения значений прогнозных показателей (табл. 3). К числу потенциально перспективных относятся пласты 9 и 13. Перспективным на германиевое оруденение может быть признан пласт 12, значения прогнозных геохимических показателей которого равны или на порядок выше аналогичного германия угольного месторождения Ангрэн. По распределению значений коэффициента концентрации и прогнозных показателей в пределах 12-го угольного пласта оконтурена площадь, в пределах которой возможно обнаружение промышленных концентраций германия.

Происхождение высоких концентраций сурьмы и мышьяка в углях месторождения Фан-Ягноб объясняется расположением его в пределах Зеравшано-Гиссарского сурьмяно-ртутного пояса. Наличие в обрамлении депрессии месторождений и рудопроявлений олова обуславливает высокие концентрации этого металла, а со вмещающими сланцами палеозоя связаны повышенные содержания в углях скандия и ванадия. Происхождение высоких концентраций германия, бериллия, стронция, вольфрама может быть, по-видимому, объяснено как синугольной термальной деятельностью, так и обогащенностью этими элементами пород прилегающих площадей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фозилов Дж.Н., Алидодов Б.А. Особенности геологического строения и металлоносность угольного месторождения Гузун (Зеравшанский хребет) – Вестник ТНУ, №1\2 (160), 2015, с.300-306.
2. Фозилов Дж.Н. Особенности геологического строения и литологии каменноугольного месторождения Фан-Ягноб. – Мат-лы Республик.науч.-практ. конф., посвящ. Дню независимости Республики Таджикистан «Проблемы разработки месторождений полезных ископаемых». – Горно-металлургический институт Таджикистана, г. Чкалов, 2015, с. 34-37.
3. Брик М.И. Юрские отложения Центрального Таджикистана. – Геология СССР, т. 24, Таджикская ССР, ч.1. – М.: Госгеолгиздат, 1959.

Ҷ.Н.ФОЗИЛОВ, Б.А.АЛИДОДОВ

ЭЛЕМЕНТҲОИ ҒАШИ КОНИ АНГИШТИ ФОН-ЯҒНОБ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар таркиби ангиштсанги кони Фон-Яғноб миқдори зиёди элементҳои кимиёии ғаш ба мисли рӯх, барий, фосфор, ванадий, хром, никель, манган, қалъагӣ, нуқра муайян карда шудааст. Хокистари ангиштсанги кони Фон-Яғноб ҳам аз ин элементҳо (ба истиснои баъзеашон) ғанӣ мебошад. Маълумотҳои номбурдари барои истифодабарии комплекси конҳои ангиштсанг истифода кардан мумкин аст.

Калимаҳои калидӣ: галлий, фосфор, симоб, рӯх, барий, ванадий, хром, никел, манган, таносуи, концентратсия.

Dj.N.FOZILOV, B.A.ALIDODOV

ELEMENTS OF THE IMPURITIES IN COAL COALFIELD BACKGROUND YAGNOB

Tajik National University

Angles of coalfield background Yagnob are characterized by increased concentrations of accompanying small elements like zinc, barium, phosphorus, vanadium, chromium, nickel, manganese, tin, silver (CC-10-55). With few exceptions, their content is increased in coal ash as well (100-760 g/t). These data may be of interest for the complex use of coal deposits.

Key words: Gallium, phosphorous, mercury, zinc, barium, vanadium, chromium, nickel, manganese, ratios, concentrations.

УДК 561. 31(575.3)

А.Т.МАХМАДАЛИЕВ, А.Р.ФАЙЗИЕВ*

**ГЕОЛОГО-МИНЕРАЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ
СТРАТИФОРМНОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ БАЛЬДЖУАН
(АФГАНО-ТАДЖИКСКАЯ ДЕПРЕССИЯ)**

Главное управление геологии при Правительстве Республики Таджикистан,

**Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии*

АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 18.01.2017 г.

В статье приводятся сведения о геологическом строении, минералогии и рудоносности пород стратиформного месторождения Бальджуан.

Ключевые слова: месторождение, Бальджуан, галенит, сфалерит, кальцит, ярус.

Месторождение Бальджуан (Сурбиён) (рис. 1) расположено в 15 км к северо-северо-востоку от одноименного райцентра. Оно располагается в междуречье Шуробдари и ее правого притока р. Талхак. Месторождение находится в водораздельной части хребта Хазратишо в пределах присводовой части Яфучской антиклинали. Простираение складки 190-200°, углы падения крыльев от 30 до 70°.

Изучением месторождения Бальджуан в разные годы занимались геологи Ю.А.Арапов, Т.А.Борисова, В.Н.Вебер, Н.Г.Власов, Д.А.Вольнов, Ким-Бон-Нен, В.П.Нехорошев, А.В.Нечаева, В.И.Попов, Л.К.Чихачев, В. В. И. Солун, Л.В.Соколова, Н.Н.Четвериков, Л.К.Чихачев и другие.

Адрес для корреспонденции: Файзиев Абдулхак Раджабович. 7734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии АН РТ. E-mail: faiziev38@mail.ru



Рис. 1. Общий вид месторождения Бальджуан.

В геологическом строении месторождения Бальджуан основная роль принадлежит верхнемеловым отложениям (рис. 2). Незначительное распространение имеют палеогеновые и четвертичные отложения.

Верхнемеловые отложения здесь слагают ядро и крылья Яфучской антиклинали. Палеогеновые породы обнажаются на западном крыле антиклинали, перекрывая собой верхнемеловые осадки. Четвертичные отложения сосредоточены в приводораздельной части хребта. Верхнемеловые и палеогеновые отложения залегают между собой согласно. Первые представлены сенонским и датским ярусами, а палеоген – бухарским ярусом.

Сенонский ярус в нижних своих частях представлен детритусовыми известняками и детритусовыми оолитовыми известняками общей мощностью около 100 м. Они сменяются первым рудистовым горизонтом, сложенным органогенными известняками (мощность 10-15 м), детритусовыми оолитовыми известняками (мощность 22 м) и вторым рудистовым горизонтом (плотные органогенные известняки с фауной рудистов) мощностью около 70 м.

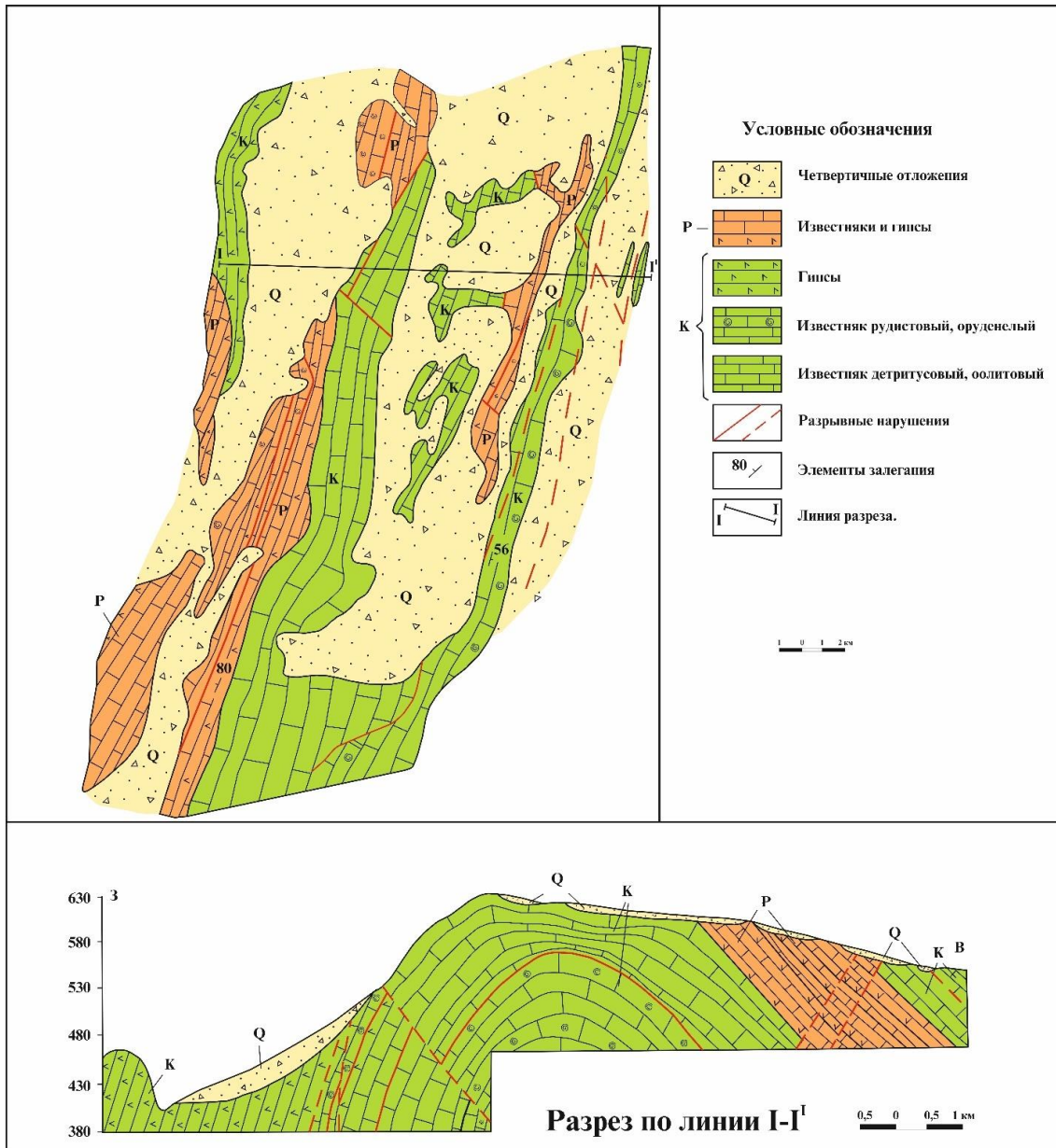


Рис. 2. Схематическая геологическая карта месторождения Бальджуан.

Осадки датского яруса представлены толщей мелкозернистых гипсов с редкими линзами известняков. Мощность яруса 100-110 м.

Бухарский ярус палеогена сложен толщей известняков и гипсов, общей мощностью 128 м.

Четвертичные отложения представлены лёссами (мощность 8-10 м), песчанистыми суглинками (4-5 м) и делювиально-пролювиальным материалом осыпей, мощностью 10-15 м.

Рудовмещающими породами Бальджуанского месторождения являются сенонские известняки, главным образом рудистовые разности.

Наибольшее количество оруденелых трещин приурочено к известнякам первого рудистового горизонта. Известняки этого горизонта серые, желтовато-серые мелкозернистые с фауной рудистов плохой сохранности. Они развиты как на западном, так и на восточном участках месторождения. Восточный участок оказался практически безрудным. В пределах первого рудистового горизонта оруденение приурочено, также как и в других горизонтах, к трещинам широтного простирания. Образовавшиеся при этом прожилки маломощны (от 0.2 до 2 мм), редко достигая 3-5 см. На один погонный метр приходится два-три прожилка. Среднее содержание металла в первом рудистовом горизонте 0.89%.

Известняки второго рудистового горизонта на западном участке месторождения прослеживаются узкой полосой и представлены серыми, светло-серыми и желтовато-серыми разностями. Они плотные, мелкозернистые, участками слабо песчанистые трещиноватые. Трещины заполнены кальцитом и бурыми окислами железа. Встречаются также и прожилки галенита. Известняки второго рудистового горизонта содержат незначительное количество оруденения. Общее протяжение известняков этого горизонта по поверхности равно 800 м, а мощность известняков, вскрытая горными выработками, колеблется от 14 до 21 м. Среднее содержание свинца в пробах, отобранных по выработкам западного участка месторождения, составляет 0.43%.

Детритусовые оолитовые известняки разделяющего горизонты хорошо обнажены на западном и восточном участках месторождения и состоят из серых, светло-серых и коричневатых образований. В породе широко развиты псевдооолитовые образования округлой формы, лишенные концентрически-скорлуповатого строения и сложенные бурым криптокристаллическим кальцитом. Среднее содержание свинца в них, по данным Л.В.Соколовой и др. (1954), на западном участке месторождения 0.24%, а на восточном участке от 0.02 до 0.12%.

Детритусовые известняки подстилающего горизонта имеют значительное развитие и хорошо выделяются только на западном участке. Они содержат меньшее количество оолитов, чем известняки разделяющего горизонта. Это серые, желтовато-серые, мелкозернистые, плотные породы, которые пересечены тонкими прожилками кальцита. Среднее содержание свинца по выработкам, вскрывшим известняки подстилающего горизонта, составляет 0.73%.

Таким образом, распределение оруденения на месторождении весьма неравномерное. Содержание свинца изменяется от 0.5 до 2.5%. Обращает на себя внимание тот факт, что повышенная концентрация галенита наблюдается на участках, содержащих значительное количество фауны.

Минеральный состав месторождения простой. Основным рудным минералом является галенит, в меньших количествах присутствуют сфалерит и дисульфиды железа (пирит, марказит, мельниковит). Жильные минералы представлены кальцитом, кварцем и флюоритом. В качестве вторичных минералов встречаются гидроокислы железа, церуссит и англезит.

Галенит является широко развитым рудным минералом месторождения. Встречается он в основном в виде прожилков, от тончайших волосовидных до извилистых и ветвящихся толщиной до 5-6 мм. Кроме того, галенит образует, совместно с жильными минералами, гнёзда размером до 4х1 см (рис. 3) и вкрапления во вмещающей породе.

Наряду с прожилками, гнёздами и вкраплениями встречаются выделения галенита округлой формы, в центре которой находятся колломорфные выделения кальцита. При этом галенит также имеет концентрически-скорлуповатое строение. В кальцитовых прожилках галенит занимает приконтактовые их части.



Рис. 3. Галенит (свинцово-серый) в ассоциации с кварцем и карбонатом.

Представлен галенит как сплошными мелко-крупнокристаллическими агрегатами, заполняющими трещины, так и встречается в виде каёмки и отдельных зёрен на стенках трещин и пустот. В исключительно редких случаях встречаются кристаллы кубической формы размером до 2-3 мм.

Кристаллизация галенита началась одновременно с колломорфным агрегатом кальцита и продолжалась после его обособления. Имеются случаи рассеивания этого кальцита прожилками галенита.

Атомно-адсорбционным анализом в галените установлены (г/т, среднее из 4 определений): Zn – 350, Cu – 226, Ag – 75, Cd – 30, Mg – 100, Mn – 60. Содержание Fe оказалось ниже чувствительности метода анализа. В зоне окисления за счёт галенита образуется церуссит и англезит.

Сфалерит тесно ассоциирует с галенитом и присутствует в виде мелких зёрен. Основное количество минерала тонковкрапленное (0.001-0.05 мм), нередко с зазубренными краями. Развит сфалерит также на стенках трещин и в пустотах выщелачивания с раз-

мерами отдельных выделений до 1 см в длину. Но главным образом минерал встречается в качестве эмульсионных включений в галените.

Дисульфиды железа. Пирит в основном встречается в виде равномерной очень тонкой вкрапленности во вмещающей породе. Найдены на месторождении и отдельные кристаллы пентагондодекаэдрического габитуса. Из дисульфидов на месторождении Л.В.Соколовой (1954) описаны также марказит и мельниковит. Марказит встречается среди карбоната в виде мелких кристалликов или же развит в приконтактовой, со сфалеритом зоне, образуя петельчатые выделения между зернами нерудных минералов. Мельниковит более развит, чем пирит и марказит. Образует он тонкие каемки по галениту и сфалериту. Кроме того, он встречается в виде угловатых, изолированных друг от друга, выделений размером от 0.1 мм до 2 см с зональной структурой. По мнению Л.В.Соколовой, при раскристаллизации мельниковита нередко образуется марказит.

Кальцит является главным жильным минералом месторождения Бальджуан. Он здесь двух типов: кристаллический и колломорфный.

Первый тип образует прожилки мощностью до 2 см. Нередко с одного бока прожилки инкрустированы друзами кристаллов скаленоэдрической формы, размер которых достигает 0.5 - 0.8 см. Кристаллический кальцит нередко встречается в виде гнездообразных выделений, размером до 2х5.5 см. Цвет кристаллического кальцита серовато-белый, кристаллы белые с голубоватым оттенком, полупрозрачные.

Колломорфный кальцит концентрически-скорлуповатого и радиально-лучистого строения. Иногда находится он в виде сосулькообразных выделений до 2 см в поперечнике. Этот кальцит представлен жилоподобными образованиями мощностью до 6-8 см. Сложены они шестоватыми агрегатами кальцита серовато-белого цвета. В тонких пластинках кальцит бесцветный полупрозрачный. Нередко описываемый минерал полосчатый: чередуются полупрозрачные серовато-белые разности минерала (мощность до 2 см) с серовато-бурым карбонатом (толщина 1-3 см). С колломорфным кальцитом в тесной ассоциации находятся сульфиды – галенит и сфалерит.

Атомно-адсорбционным методом анализа в кристаллическом кальците установлены (г/т, среднее из 3 анализов): Mg – 880, Sr – 910, Mn – 160, Cu – 70, Pb – 610, Fe – 201, Cd – 6, Ag – 3, Zn – 130, а в колломорфном (среднее из 5 проб): Mg – 220, Sr – 480, Pb – 21, Zn – 30, Cu – 24, Ag – 1.

Кварц образует неравномерную вкрапленность в жильной массе кальцита, а *флюорит* присутствует в виде мелких кристалликов кубической формы.

Гидроокислы железа развиваются за счет окисления дисульфидов за пределами основных рудных прожилков, а вторичные свинцовые минералы (англезит, церуссит) окаймляют выделения галенита, проникая в интерстиции зерен минерала и в трещинах спайности.

На месторождении по характеру распределения рудных минералов выделяется два типа оруденения: *жильный и вкрапленный*. Наиболее развитым является первый тип. Второй тип обнаружен только при изучении шлифов под микроскопом.

Из месторождения Бальджуан термометрически были исследованы как кристаллический, так и колломорфный кальциты. В кристаллическом кальците, находящемся в ассоциации с сульфидами, включения минералообразующих флюидов большей частью имеют форму отрицательных, призматической конфигурации, кристалликов. Размер их от 0.005 до 0.01 мм. Они главным образом двухфазовые газовой-жидкие, где газовая фаза составляет 10-20% объема включений. Обнаружены в кальците и однофазовые жидкие вакуоли. Основная масса двухфазовых включений гомогенизируется в жидкую фазу в диапазоне температур 200-150°C. Однако иногда встречаются включения, температура гомогенизации которых более высокая и достигает 220-230°C.

В колломорфном кальците включения минералообразующих флюидов в основном однофазовые жидкие округлой и овальной формы. Редкие двухфазовые вакуоли, размером 0.001-0.002 мм, имеют в основном фрагменты кристаллографической огранки. Газовая фаза в них занимает 5-8% объема включений, гомогенизируются в пределах температур 90-50°C.

Анализ тройных водных вытяжек из кальцита показывает, что минералообразующие растворы имели преимущественно бикарбонатный состав [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Файзиев А.Р., Махмадалиев А.Г., Сафаралиев Н.С., Набиев Н.Ф. – ДАН РТ, 2016, т.59, № 1-2, с.73-77.

А.Т.МАҲМАДАЛИЕВ, А.Р.ФАЙЗИЕВ*

ХУСУСИЯТҲОИ ГЕОЛОГИЮ МИНЕРАЛОГИИ КОНИ СТРАТИФОРМИИ БАЛЧУВОН (ПАСТҲАМИИ АФҶОНУ ТОҶИК)

Саридораи геологияи назди Ҳукумати Ҷумҳурии Тоҷикистон,

**Иститутҳои геология, сохтмони ба заминчунӣ тобовар ва сейсмологияи*

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақола маълумот дар бораи сохтори геологӣ, минералогӣ ва маъданнокӣ чинсҳои кӯҳии кони стратиформии Балчувон оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: кон, Балчувон, галенит, сфалерит, калсит, ярус.

A.T.MAHMADALIEV, A.R.FAYZIEV*

**GEOLOGICAL AND MINERALOGICAL FEATURES OF THE BALJUAN
STRATIFORM DEPOSIT (AFGAN-TAJIK DEPRESSION)**

Main Department of Geology under the Government of the Republic of Tajikistan,

**Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology,*

Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

The article provides information on the geological structure, mineralogy and ore-bearing rocks of the stratiform deposit of Baljuan.

Key words: deposit, Baljuan, galena, sphalerite, calcite, tier.

УДК 563.12:551.734/735(575.3)

А.А.САБИРОВ

**ГРАНИЦЫ И БИОСТРАТИГРАФИЯ ФАМЕНСКОГО ЯРУСА
В ТАДЖИКИСТАНЕ ПО ФОРАМИНИФЕРАМ**

Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии

АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 01.02.2017 г.

На основе изучения фораминифер в карбонатных разрезах девона Таджикистана установлены положение границ и объем фаменского яруса в этом регионе и проведено его биостратиграфическое расчленение. В пределах яруса выделено 7 фораминиферовых зон, сопоставленных с зонами ряда других регионов.

Ключевые слова: фораминиферы, фаменский ярус, биостратиграфия, Таджикистан.

Фаменский ярус на территории Таджикистана широко распространен и представлен различными фациальными типами отложений – карбонатными, терригенно-карбонатными, терригенно-кремнистыми и переходными между ними. В тех типах разрезов, в которых отсутствуют карбонатные отложения, представленные чистыми, вторично неизмененными известняками, фораминиферы отсутствуют или представлены редкими эврифациальными формами, которые не позволяют решать вопросы зонального расчленения и положения границ. Дробное зональное расчленение фаменского яруса в таких разрезах проведено на основании изучения конодонтов [1].

Карбонатные разрезы, содержащие многочисленные фораминиферы, развиты в Бельгау-Кураминской структурно-фациальной зоне Срединного Тянь-Шаня (калканатинский, алтынтопканский и барактынтауский типы разреза), в Южном Тянь-Шане – в Туркестано-Алайской зоне (чаувайский, уратюбинский, актурский, матчайский, акташский, андыгенский, курганакский и др.), в Зеравшано-Туркестанской зоне (шишкатский и урмитанский типы) и в хаузиерамском типе в Зеравшано-Гиссарской зоне.

Адрес для корреспонденции: Сабиров Абдувахид Абдухамидович. 734063, Республика Таджикистан, Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии АН РТ. E-mail: svakhid@mail.ru

Наибольшее разнообразие фораминифер наблюдается в наиболее детально изученном автором в нескольких профилях шишкатском типе разреза, в котором на фаменском уровне найдено более 200 видов, из которых только в верхнем фамене распространено 132 вида, в том числе все зональные. Этот разрез является наиболее полным, без следов перерыва, так как в нем установлены все фораминиферовые и конодонтовые зоны в нормальной стратиграфической последовательности. Поэтому он принят как эталонный разрез для биостратиграфического расчленения фамена, установления его границ и объема. В остальных перечисленных типах карбонатных разрезов с различной степенью полноты также устанавливаются те или иные фаменские фораминиферовые зоны. К примеру, в наиболее полном из профилей урмитанского типа разрезов (Урмитан-1) на фаменском уровне отсутствуют две верхние фораминиферовые зоны из семи, зато они диагностируются в барактынтауском и хаузиэрамском типах разрезов.

История изучения шишкатского разреза имеет длительную историю. По результатам работ 1931 года А.П.Марковский [2] отнес толстослоистые и массивные известняки у к. Шишкат (басс. р. Кштут)¹ к среднему девону на основании находок, по-видимому, в осыпи или в нижележащих отложениях, брахиопод. Здесь же он отмечает наличие верхнего девона, охарактеризованного франскими брахиоподами. В результате проведения геолого-съёмочных и тематических работ (Виноградов, Бобкова, 1941; Менаков, Менакова, 1955) пачка тонкослоистых известняков, залегающая ниже толстослоистых и массивных, была отнесена соответственно к эйфельскому ярусу и к нижнему девону-эйфелю. К верхнему девону были отнесены светлые толстослоистые и массивные известняки, которые в настоящее время датируются визейским и серпуховским ярусами нижнего карбона. П.Д.Виноградов и др. [3] верхнюю часть тонкослоистых известняков отнесли к франскому ярусу на основе находок брахиопод, а залегающие выше толсто- и массивнослоистые светлые известняки – к нижнему карбону, отметив срезание верхов девона крутопадающим надвигом. При этом было высказано предположение о возможности соответствия самой верхней пачки разнослоистых «немых» известняков, согласно залегающих на тонкослоистых, фаменскому ярусу. В 1966 г. А.Н.Голиков и М.М.Посохова [4] вновь датировали эту пачку франским ярусом, а Т.В.Шевченко [5] – франом и под вопросом фаменом (?) на основании единичной находки брахиоподы *Leiorhynchus baschkiricus* Tschern. где-то восточнее по простиранию полосы развития палеозойских отложений. Присутствие фамена в самом разрезе никем фаунистически доказано не было. В 1972 г. автором [6] в разнослоистых известняках, залегающих выше тонкослоистых и ниже светлых массивных в одном из профилей шишкатского разреза (г. Калагач), был обнаружен комплекс фаменских однокамерных и многокамерных фораминифер, в том числе *Eotuberitina talassica*

¹ Толстослоистые и массивные светлые известняки в настоящее время относятся к визейскому и серпуховскому ярусам нижнего карбона.

Pojark., *Septaglomospiranella grozdilovae* Pojark. и зональный вид *Q. regularis* (Lip.). Впервые были получены фаунистические доказательства наличия в разрезе отложений фаменского яруса, согласно залегающих на фаунистически охарактеризованных отложениях франского. При этом предполагалось наличие переходных отложений между девоном и карбоном, однако имелось в виду старое понимание границы систем по основанию зоны *Q. kobeitusana*, как это в то время было принято в Тянь-Шане и в других регионах СССР. В 1971 и 1978 гг. стратиграфические исследования на разрезе проводил Д.А.Старшинин. Однако проблема увязки возраста и границ выделяемых им местных стратонтов с единицами общей шкалы все еще оставалась нерешенной. С 1979 по 1999 гг. изучением стратиграфии палеозойских отложений региона, в том числе шишкатского разреза, занимался коллектив Стратиграфической партии ТГСЭ под руководством И.А.Бардашева. При этом привлечение для биостратиграфических исследований конодонтов позволило решить многие проблемы региональной стратиграфии, в том числе проблему детализации стратиграфической шкалы и зональных границ фаменского яруса и их корреляции с единицами общей шкалы.

Фораминиферы с середины 50-х годов прошлого века успешно применялись как ведущая группа для биостратиграфического расчленения и корреляции фаменских отложений, а также для установления положения границы девона и карбона на территории бывшего СССР и в Западной Европе. Все известные к середине 80-х годов данные об этом были систематизированы в работе Е.А.Рейтлингер и А.В.Дуркиной [7]. По обобщенным данным, в основу биостратиграфического расчленения верхнего фамена была положена эволюция видов рода *Quasiendothyra*. При этом в нижнем фамене были выделены слои с однокамерными фораминиферами и с *Septaglomospiranella*, соответствующие зоне Df2 (зона *Septatournaella*) Франко-Бельгийского бассейна [8, 9]. В верхнем фамене была выделена генозона *Quasiendothyra*, подразделенная на 2 зоны: *Q. bella*-*Q. communis* и *Q. kobeitusana*. Обе зоны включают по 3 подзоны (см. схему). Из них 5 нижних подзон соответствует 5 подзонам Франко-Бельгийской шкалы (зона Df3), а 6-я – *Q. dentata* – в последнем регионе не выделяется.

В 2008 г. Б.И.Чувашов и А.Л.Анфимов [10] предложили фораминиферовую шкалу всего разреза девона Урала, в которой на уровне фаменского яруса выделяются 4 зоны. Ранее Б.В.Поярков [11] для соседней с Таджикистаном территории Кыргызстана на фаменском уровне выделял 3 фораминиферовые зоны, верхнюю из которых он относил к турнейскому ярусу нижнего карбона (см. схему).

В 1991-1992 гг. автор повторно изучал шишкатский разрез по профилю на г. Калагач, а также по профилю на г. Юра, расположенному несколько восточнее, совместно с геологами Стратиграфической партии ТГСЭ. Разрез по новому профилю оказался более полным, содержащим все фораминиферовые и конодонтовые зоны фаменского яруса, а также турнейского яруса нижнего карбона, которые наращиваются согласно залегающими массивными светлыми известняками визе и серпухова (см. схему). Нижняя граница фамена по фораминиферам в этом разрезе фиксируется по резкому и полному исчезновению

всех руководящих для франского яруса многокамерных родов *Tikhinella*, *Eonodosaria*, *Eo-geinitzina*, *Multiseptida*, *Nanicella*, сменяющихся комплексом однокамерных фораминифер зоны *P. dagmarae*, практически совпадающая с основанием конодонтовой зоны Средняя *triangularis* [12]. Такая же резкая смена фораминиферных комплексов на этом уровне наблюдается и в других разрезах Центрального и Северного Таджикистана.

В схеме биостратиграфического расчленения фаменского яруса Таджикистана, основанного, в первую очередь, на изучении профилей шишкатского разреза, выделено 7 фораминиферных зон, совокупность которых вполне сопоставима с наиболее дробными схемами Франко-Бельгийского бассейна, Восточно-Европейской платформы, Урала и других регионов, с некоторыми отличиями (см. схему).

В нижнем фамене выделяется одна фораминиферная зона, соответствующая нижней части баульского горизонта или конодонтовым зонам *triangularis*, *crepida* и *rhomboida*. Здесь еще совершенно отсутствуют многокамерные формы и повсеместно широко распространен общий для Таджикистана, Урала и ряда других регионов вид-индекс *Parathuramina dagmarae*. Кроме того, в Таджикистане характерен сопутствующий вид-индекс зоны – *Saltovskajina scitula* (Tchuv.), а род-индекс *Neoarchaesphaera* представлен видами *N. polipora* (Antr.) и *N. parvispinosa* Sabir. Фораминиферы в отложениях нижнего фамена известны из двух десятков местонахождений на территории Центрального и Северного Таджикистана, а также Восточного Памира и насчитывают 88 видов и подвидов из 28 родов, причем только для этого стратона характерными являются 14 видов и один род – *Saltovskajina* [13].

В среднем фамене выделяются 3 фораминиферные зоны. Нижняя характеризуется появлением и широким развитием вида-индекса *Septaglomospiranella primaeva* (Raus.) и соответствует верхней части баульского горизонта или конодонтовой зоне *marginifera*. Сопоставление её с зонами Франко-Бельгийского бассейна, запада России, Урала приведено на схеме (см.).

Вышележащие зоны фаменского яруса выделяются на основе закономерностей эволюции фораминифер семейства квазиэндоитрид, в развитии которых наблюдаются пять фаз развития, позволивших выделить пять фораминиферных зон. Все они в сумме соответствуют зеравшанскому горизонту региональной стратиграфической шкалы или конодонтовым зонам от *trachytera* до *praesulcata* включительно.

Средняя зона среднего фамена выделяется на основании первого появления и широкого развития вида-индекса *Eoquasiendothyra bella* N. Tschern. Верхняя её граница проводится по первому появлению вида индекса следующей фораминиферной зоны. Обе нижние зоны соответствуют зоне *Septaglomospiranella primaeva*-*Tournayella rauserae* Урала и, приблизительно, – зоне *Quasiendothyra bella* Франко-Бельгийского бассейна и Восточно-Европейской платформы. Верхняя зона в объеме конодонтовой зоны *postera* устанавливается по появлению вида-индекса *Q. (Eoendothyra) communis* (Raus.) и соответствует одноимённой зоне всех перечисленных регионов. Средняя и верхняя зоны среднего фамена занимают нижнюю часть зеравшанского горизонта.

В верхнем фамене также выделяются три фораминиферовые зоны, две нижние из которых соответствуют конодонтовой зоне *expansa*, а верхняя – зоне *praesulcata*. Они в сумме занимают верхнюю часть зеравшанского горизонта. Нижняя зона *Q. (E.) regularis* полностью соответствует одноименным зонам Франко-Бельгийского бассейна и Восточно-Европейской платформы и нижней части зоны *Q. kobeitusana* Урала, а средняя – *Q. kobeitusana-Endoglomospiranella imminuta* – соответствует зонам *Q. radiata* и *Q. kobeitusana* первых двух регионов. Форма, морфологически аналогичная *Q. radiata* Reitl., в Таджикистане единично встречена только в одном разрезе Бель-Кудук на северном склоне Туркестанского хребта и не может претендовать на статус зональной формы. При этом у нее не наблюдался второй радиально-лучистый слой стенки, что, по автору вида, является его главным таксономическим признаком, отличающим от других фораминифер группы *Q. communis* (Raus.). Если этот слой непостоянен или имеет вторичное происхождение, то и обоснованность выделения вида *Q. radiata*, а значит и одноименной зоны становится сомнительной.

Верхняя зона *Q. konensis-Endoglomospiranella nigra* завершает разрез фаменского яруса и соответствует зоне *Q. dentata* Восточно-Европейской платформы. Вид *Q. dentata* Durkina также является редким и на территории Таджикистана единично встречен на этом уровне только в Шишкатском разрезе. Он не может выступать в качестве вида-индекса зоны. Здесь же с ним ассоциируют *Q. smekhovi* (Leb.), *Q. klubovi* (Leb.) и ряд других, характерных для данной зоны. Что касается видов *Q. konensis* (Leb.) и *E. nigra* (Conil et Lys), то они в нашем регионе впервые появляются в основании зоны *praesulcata* и в большом количестве присутствуют во всех разрезах, включающих верхи фамена, исчезая у верхней границы зоны. Эта граница и принимается нами за верхнюю границу фаменского яруса и всего девона в Таджикистане. На этом уровне полностью исчезают все многокамерные формы (более 100 видов и подвидов турнейеллид, эндогломоспиранелл, квазиэндоптирид и эндоптирид из общего количества 189 видов и подвидов из 39 родов и подро́дов, распространенных в отложениях среднего и верхнего фамена Таджикистана) [13].

Выше – в конодонтовой зоне *sulcata* – остаются немногочисленные однокамерные формы, в большинстве своем перешедшие из нижележащих отложений, характеризующие зону *Bisphaera malevkensis-Earlandia minima* нижнего турне. Это *Kukhistanella mikhnoae* (Sabir.), *Salpingothurammia radiosphaerica* (Bog. et Jufer.), *Kolongella astrum* (Sabir.), *Bisphaera malevkensis* Bir., *Eotuberitina reitlingerai piriformis* Sabir., *Earlandia minima* Bir. и др. Ни *Tournayellina beata* (Malakh.), ни *S. njumylga* Durk., ни *S. potensa* Durk., приведенные для этого уровня в Тимано-Печорской провинции [7], как и любые другие многокамерные формы, в нашем регионе в основании турне (зона *sulcata*) не найдены. Первый из этих видов, который также принят как зональный для низов турне Франко-Бельгийского бассейна, в Таджикистане встречается выше зоны *sulcata*, в верхней части нижнего турне, вместе с примитивными чернышинеллами. Следует отметить, что зона *Bisphaera malevkensis-Earlandia minima* устанавливается не по первому появлению этих видов-индексов, а по полному вымиранию всех многокамерных форм в кровле предыдущей зоны. Эти ши-

роко распространенные однокамерные фораминиферы единично встречаются и в подстилающих верхнедевонских отложениях, но в пределах самой зоны наблюдается массовое развитие (эпиболь) вида *Bisphaera malevkensis* Birina, 1948. Кроме того, в этой зоне широко распространены крупные бисферы *Bisphaera gigantea* (Conil et Lys), 1964 и *Bisphaera malevkensis magna* Brazh. et Rost., 1966, которые в нижележащих отложениях не встречаются. Эту зону с полным основанием можно называть «бисферовыми слоями», как впервые было предложено по материалам Восточно-Европейской платформы еще в середине прошлого столетия [14]. Сопутствуют бисферам в этих слоях более редко встречающиеся *Earlandia minima* (Birina), 1948. При этом обычно в основании зоны кроме видов-индексов полностью отсутствуют виды из других родов фораминифер.

В распределении сопутствующих квазиэндотирам многокамерных форм в разрезе фаменского яруса наблюдается определенная закономерность. От основания зоны *S. primaeva* вверх по разрезу отмечается первое появление и постепенное увеличение видового разнообразия и биомассы септаглоспиранелл, септатурнелл и септабрунзиин. Приблизительно с середины зоны *Q. regularis* начинается их постепенный упадок и уменьшение биомассы, сопровождающееся появлением в основании следующей зоны и постепенным увеличением разнообразия и биомассы эндоглоспиранелл, также исчезающих на границе конодонтовых зон *praesulcata* и *sulcata*.

Таким образом, в пограничных отложениях девона и карбона Таджикистана наиболее четким является уровень смены фауны многокамерных фораминифер, в том числе, квазиэндотир, примитивными однокамерными фораминиферами. Резкое вымирание всех многокамерных форм наблюдается практически одновременно во всех карбонатных разрезах в кровле зоны *Quasiendothyra konensis-Endoglomospiranella nigra*.

Это качественное изменение в сообществе фораминифер наблюдается внутри однородной пачки известняков, что свидетельствует о событийной границе, отражающей границу между крупными этапами в развитии фораминифер. Эта граница в Шишкатском и в других разрезах с переходными отложениями (Барактынтау, Бель-Кудук, Хаузиерам и др.) практически совпадает с нижней границей зоны *sulcata*, что соответствует положению верхней границы фаменского яруса или границе девона и карбона, рекомендованной Международной рабочей группой по границе девона и карбона (1979) и расширенным пленумом комиссий МСК СССР по девонской и каменноугольной системам (Минск, 1986).

Схема сопоставления зональных подразделений фауны по фораминиферам

ОСШ				Региональные стратиграфические подразделения Таджикистана	Франко-Бельгийский бассейн	Восточно-Европейская платформа	Урал	Киргизия				
Система	Отдел	Ярус	П/ярус	Конодонтовые зоны И.А.Бардашев, 2006, 2012	Горизонт	Фораминиферовые зоны и подзоны						
						А.А.Сабиров, 2013	К.В.Симаков et al, 1983 R.Conil et al, 1986	Е.А.Рейтлингер, А.В.Дуркина, 1988	Б.И.Чувашов, А.Л.Анфимов, 2008	Б.В.Поляков, 1969		
карбон	нижний	турнейский	нижний	sulcata	уречский	B. malevkensis- E. minima	T. beata	B. malevkensis- E. minima		Q. kobeitusana и Q. konensis		
								T. beata				
								S. njumylga S. potensa				
девонская	верхний	фаменский	верхний	praesulcata	зеравшанский	Q. (Q.) konensis- Endogl. nigra	?	kobeitusana	Q. dentata	Q. kobeitusana	Q. communis, Septaglomospiranella grozdilovae и Parathuramina vasiljevae	
				expansa		Q. (Q.) kobeitusana- Endogl. imminuta			Q. kobeitusana			Q. kobeitusana
						Q. radiata			Q. radiata			
			средний	postera		Q.(E.) regularis	Q. regularis	Q. regularis				
				trachytera		Q. (E.) communis	Q. communis	Q. communis				
				marginifera		Q. (Eoq.) bella	Q. bella	Q. bella				
		нижний	rhomboidea	баульский	S. primaeva	Septatournayella	Septaglomospiranella и однокамерные фораминиферы	Q. bella	S. primaeva Tournayella rauserae			
			crepida		P. dagmarae-S.scitula- Neoarchaesphaera					P. dagmarae		
			triangularis									
		франский	верхний		linguiformis	игаролдин- ский	Nanicella	?	Eonodosaria- Eogeinitzina- Juferevella M.corallina Cornuspira jubrae Tikhinella pirula			
					rhenana							
					nasuta					Eonodosaria- Eogeinitzina devonica		

ЛИТЕРАТУРА

1. Бардашев И.А. Конодонты и детальная стратиграфия фаменского яруса верхнего девона Таджикистана – Проблемы геологии, сейсмологии сейсмостойкого строительства Таджикистана. – Душанбе: Садои калб, 2016, с. 22-56.
2. Марковский А.П. Бассейн р. Кштут (средняя часть Зеравшанского хребта). – Геология УзССР, т. 2. – Л.-М.: ОНТИ. НКТП, 1937, с. 175-195.
3. Виноградов П.Д. и др. Новые данные по стратиграфии среднепалеозойских отложений Центрального Таджикистана. – Геология Средней Азии. – Л.: ЛГУ, 1961, с. 172-181.
4. Голиков А.Н., Посохова М.М. Описание разреза силурийских и девонских отложений по левому борту Шишкат-сая (бассейн р. Кштут, северный склон Зеравшанского хребта). – Путеводитель экскурсии по типовым разрезам ордовика, силура и девона Средней Азии – Ташкент, 1966, с. 67-75.
5. Шевченко Т.В. Описание разрезов в левобережье сая Шишкат. – Там же, с. 41-64.
6. Сабиров А.А. Фаменские отложения Шишкатского разреза (Центральный Таджикистан). – Докл. АН ТаджССР, 1974, т. XVII, № 10, с. 46-48.
7. Рейтлингер Е.А., Дуркина А.В. Эволюция фораминифер фамена-раннего турне и проблема границы девона и карбона. – Граница девона и карбона на территории СССР. – Минск: Наука и техника, 1988, с. 254-262.
8. Simakov K.V. and all. Upper Famennian and Tournaisian deposits of the Omolon region (NE-USSR). – Ann. Soc. Geol. Belg., 1983, 106, pp. 335-399.
9. Conil R. et all. The Devonian-Carboniferous transition in the Franco-Belgian basin with reference to Foraminifera and Brachiopods. – Ann. Soc. Geol. Belg., 1986, 109, p. 19-26.
10. Чувашов Б.И., Анфимов А.Л. Фораминиферовая шкала девонской системы Урала – состояние изученности и корреляционный потенциал. – Глобальная корреляция нижнедевонских карбонатных и кластических разрезов (Проект 499/ Международная подкомиссия по стратиграфии девона). Китабский гос. геол. заповедник, Узбекистан. – Мат-лы международ. конф. – Ташкент, 2008, с. 119-123.
11. Поярков Б.В. Стратиграфия и фораминиферы девонских отложений Тянь-Шаня. – Фрунзе: Илим, 1969, 169 с.
12. Бардашев И.А., Сабиров А.А. Франские отложения разреза Шишкат (Южный Тянь-Шань, Таджикистан) и их микропалеонтологическая характеристика. – Палеонтология и стратиграфия фанерозоя Таджикистана. Вып. 1. – Душанбе: Дониш, 1997, с. 21-34.
13. Сабиров А.А. Девонские фораминиферы Тянь-Шаня и Памира: состояние изученности и биостратиграфический потенциал. – Проблемы геологии, сейсмологии и сейсмостойкого строительства Таджикистана. – Душанбе: Садои калб, 2016, с. 90-106.
14. Бирин Л.М. Схема детальной стратиграфии и условия отложения пограничных слоев девона и карбона (этрень) в южном Подмосковье. – Советская геология, 1948, № 28, с. 146-153.

А.А.СОБИРОВ

**САРҲАДҲО ВА БИОСТРАТИГРАФИЯИ ЯРУСИ ФАМЕНИ ТОЧИКИ-
СТОН ДАР АСОСИ ФОРАМИНИФЕРАҲО**

*Институти геология, сохтмони ба заминҷунбӣ тобовар ва сейсмологияи
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар асоси омӯзиши фораминифераҳо аз буришҳои карбонати Тоҷикистон мавқеи сарҳадҳо ва ҳаҷми яруси фамен дар ин минтақа муайян карда шудааст ва тақсимои биостратиграфии он гузаронида шудааст. Дар дохили ярус 7 зонаҳои фораминиферӣ ҷудо карда шудааст, ки, онҳо ба зонаҳои дигар минтақаҳо муқоиса карда шудааст.

Калимаҳои калиди: фораминифераҳо, яруси фамен, биостратиграфия, Тоҷикистон.

A.A.SABIROV

**THE BOUNDARIES AND BIOSTRATIGRAPHY OF THE FAMENNIAN STAGE
BY FORAMINIFERS IN TAJIKISTAN**

*Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology,
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

On the basis of study of foraminifers in carbonate sections of Tajikistan the boundaries' location and scope of the famennian stage in this region have been ascertained and its biostratigraphical sequence has been carried out. Within this stage limit 7 foraminiferal zones are sorted out, which were compared with the zones of other regions.

Key words: foraminifers, famennian stage, biostratigraphy, Tajikistan.

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

МУЗАФФАР НУСРАТУЛЛАЕВИЧ МАКСУМОВ
(К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)



18 мая текущего года исполнилось бы 80 лет со дня рождения Музаффар Нусратуллаевича Максумова, члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук. М.Н.Максумов активно занимался теоретическими изысканиями в области внегалактической астрономии. Одним из важных достижений его научной работы является применение кинетической теории плазмы и асимптотической теории нелинейных колебаний для исследования эволюции звездных систем галактик и выявление гравитационной неустойчивости в динамике галактик.

М.Н.Максумов родился 18 мая 1937 г. в г. Москве. После окончания средней школы в 1954 г., в семнадцатилетнем возрасте поступил на физико-математический факультет Таджикского государственного университета им. В.И.Ленина (ныне Таджикский национальный университет). После 3 курса, как отличившийся студент, был переведен для продолжения учебы на физический факультет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова. В 1961 г. после завершения обучения на кафедре квантовой теории и физики высоких энергий МГУ получил специальность физик.

Свою научную деятельность Музаффар Нусратуллаевич начал в Физико-техническом институте Академии наук Таджикистана в 1964 г. В 1965 г. в Институте астрофизики был создан отдел теоретической астрофизики, которым руководил к.ф.-м.н. Марочник Леонид Самойлович. В 1966 г. Музаффар Нусратуллаевич Максумов стал сотрудником этого отдела и с этого момента и до конца жизни его научно-организаторская деятельность неразрывно связана с Институтом астрофизики АН РТ. М.Н.Максумов под-

готовил под руководством Л.С.Марочника кандидатскую диссертацию, которую в 1967 г. защитил в диссертационном совете физического факультета Таджикского государственного университета и получил ученую степень кандидата физико-математических наук. В 1970 г. Аттестационной комиссией ВАК СССР М.Н.Максумову присуждено ученое звание «Старший научный сотрудник» по специальности «Астрофизика». В том же году он возглавил Отдел структуры и динамики звездных систем Института астрофизики АН РТ, созданного на базе отдела теоретической астрофизики. Музаффар Нусратуллаевич являлся бессменным руководителем Отдела вплоть до реструктуризации отдела в группу в 2005 г. и в последующем его слиянии с Группой переменных звезд в 2010 г.

В 1977 г. Музаффар Нусратуллаевич Максумов был избран директором Института астрофизики Академии наук Таджикистана и руководил Институтом до 1992 г.

Степень доктора физико-математических наук ему была присуждена ВАК СССР в феврале 1988 г. на основе публичной защиты диссертации в Ленинградском госуниверситете 15 октября 1987 г.

За исследования в области звездной динамики и её приложений к физике галактик М.Н.Максумов в 1993 г. был выбран членом-корреспондентом Академии наук Республики Таджикистан.

Предметом исследований Института в эти годы являются метеорное вещество, кометы и астероиды, галактики, звезды, ионосфера Земли, а также астрометрия и небесная механика. По галактикам исследования сосредоточены на их динамике, структуре и эволюции. Отметим важнейшие результаты исследований, выполненных в те годы в области внегалактической астрономии. М.Н.Максумовым показана динамическая общность классификаций Хаббла и Ван-ден-Берга для спиральных галактик, их параметризация по величине относительной массы дисковой компоненты, полной массы галактики, линейным размерам и скоростям вращения.

Характер распределения полной массы нормальных спиральных галактик и корреляционные зависимости между их общими параметрами, обнаруженные американскими астрономами, феноменологически интерпретированы на основе понятия компактности (измеряемой потенциальной энергией сжатия на единицу массы галактики или ее средней плотностью), представлений о физическом подобии и с учетом космогонических сценариев формирования и эволюции дисковых галактик Ю.Н.Ефремова и А.Д.Чернина.

Исследовались поля скоростей межзвездного газа в спиральных галактиках для определения параметров спиральной структуры.

Начаты исследования комплексов звездообразования (КЗО) в спиральных галактиках. Их интегральные цвета инвертированы в параметры звездообразования. Построены спектры масс КЗО и интегральная начальная функция масс рождающихся звезд для ряда галактик.

Решен ряд динамических задач для дисков, состоящих из звезд. У самогравитирующих бесстолкновительных звездных дисков в маргинальном состоянии обнаружены

свойства, присущие термодинамическим системам, испытывающим фазовый переход 2 рода.

Одним из ярких моментов деятельности А.Н.Масумова во время руководства Институтом является решение и начало строительства астрономической обсерватории на горе Санглох Дангаринского района Республики Таджикистан. Строительство обсерватории Санглох было завершено в конце 70-х гг. прошлого века, и в 1980 г. в обсерватории введен в эксплуатацию телескоп Цейсс-1000, оснащенный кроме штатного оборудования также фотометром-поляриметром и фотографической камерой.



Первый «кольшек» Международной астрономической обсерватории Санглох Института астрофизики Академии наук Республики Таджикистан (в центре – М.И.Максумов).

Научная деятельность М.Н.Максумова была плодотворной и отражена в 60 статьях. Большая часть исследований относится к звездной динамике и её приложениям к физике галактик.

Сердце ученого остановилось 19 сентября 2013 года в возрасте 76 лет в г. Душанбе. Светлая память о Музаффаре Нусратуллаевиче Максумове навсегда останется в наших сердцах.

Г.И.Кохирова, А.А.Ибрагимов

К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Ф.Х.ХАКИМОВА

(1937-2017)



Член-корреспондент АН Республики Таджикистан, доктор-физико-математических наук, профессор Ф.Х.Хакимов родился 20 апреля 1937 года в г. Душанбе в семье заслуженного учителя химии Халика Хакимова.

Имя Фотеха Халиковича Хакимова по достоинству занимает заслуженное место в истории становления и развития физической науки в Таджикистане. Ф.Х.Хакимов создал хорошо известную не только в Советском Союзе, но и широко за его пределами, таджикскую школу физиков-теоретиков. Достижения этой школы лежат в основном в области нелинейной и статистической теории плазмы, включая вопросы сильно турбулентной и пылевой плазмы, а также в области физики конденсированного состояния.

Ф.Х.Хакимов был учеником выдающегося русского учёного, классика в области статистической физики, физика-теоретика А.А.Власова. Непосредственно под руководством профессора А.А.Власова он проходил аспирантуру в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, были написаны его первые труды, лёгшие в дальнейшем в основу его кандидатской диссертации, защищённой досрочно в Московском государственном университете. Кандидатская диссертация Ф.Х.Хакимова была посвящена исследованию околоземной плазмы, что представляло значительный интерес в связи с запуском первых искусственных спутников Земли, первыми космическими полетами и началом освоения околоземного пространства.

После возвращения из аспирантуры Ф.Х.Хакимов был избран в 1965 году деканом физико-математического факультета, и именно в период его работы в качестве декана фи-

зический факультет был выделен в отдельное структурное подразделение Таджикского государственного университета.

Затем в течение нескольких лет Ф.Х.Хакимов работает в Кабульском политехническом институте, являясь, фактически, одним из организаторов научно-исследовательской и преподавательской работы Кабульского политехнического института, где им был опубликован ряд учебников и методических пособий на языке дари.

По возвращению в Таджикистан Ф.Х.Хакимов продолжает активно заниматься научно-исследовательской деятельностью, и область его исследований переключается в область нелинейной и сильнотурбулентной плазмы. Это направление было весьма актуально в те годы, когда во всех ведущих странах мира начались активные работы в области управляемого термоядерного синтеза. И здесь надо отметить, что Ф.Х.Хакимов, молодой и энергичный ученый, уже на посту заведующего кафедрой теоретической физики, объединяет вокруг себя молодой коллектив кафедры на решение актуальных задач теоретической физики плазмы. Его интерес привлекают нелинейные явления, в связи с этим закладывается его плодотворное сотрудничество с профессором В.Г.Маханьковым - известным физиком-теоретиком, специалистом в области нелинейных явлений, и другими учеными Объединённого института ядерных исследований (г.Дубна Московской области), а также с профессором В.Н.Цытовичем, сотрудниками ФИАН и ИОФАН, закладывается тесное сотрудничество с ведущими учёными и специалистами, ведущими школами советской и российской физической науки, начинается активная его работа по актуальным направлениям современной физики со специалистами Института космических исследований, Института физики Земли, а также с украинской физической школой. Именно в области физики плазмы лежат основные достижения Ф.Х.Хакимова. Возглавляемая им физическая школа оставила неизгладимый след в области физики плазмы.

В становлении и признании Ф.Х.Хакимова как физика-теоретика, специализирующегося в области физики плазмы, большая заслуга принадлежит профессорам Силину В.П., Горбунову Л.М., Рухадзе А.М. (ФИ АН СССР, Москва), Рудакову Л.И. (Институт атомной энергии), Ерохину Н.С. (Институт космических исследований АН СССР), Бучельниковой Н.С., Рубенчику А.М. (Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО АН СССР, Новосибирск), Литваку А.Г. (Научно-исследовательский радиофизический институт, Горький), Степанову К.Н. (Харьковский физико-технический институт, Харьков), Кондратенко А.Н. (Харьковский госуниверситет, Харьков), академику Ситенко А.Г. (Институт теоретической физики, Киев), члену-корреспонденту АН Грузинской ССР Диниадзе Н.Я. (Институт физики, Тбилиси) и их школам. В 1980 г. Ф.Х.Хакимов защищает докторскую диссертацию на тему «Вопросы теории сильнотурбулентной плазмы» в Научно-исследовательском институте ядерной физики Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова. Работа получила высокую оценку ведущих физиков страны, ведущей организации - Института теоретической физики АН ССР (возглавляемого акаде-

миком Ситенко А.Е.), официальных оппонентов профессоров Рудакова Л.И., Моисеева С.С., Рухадзе А.А.

В 1986 году Ф.Х.Хакимов вновь был избран деканом физического факультета. На этом поприще ему удалось сделать немало, и самое главное его детище – это диссертационный совет, поскольку до его создания соискателям учёных степеней в области физики из Республики Таджикистан необходимо было защищаться в других научных центрах. В 1988 г. на Всесоюзном совещании по физике плазмы в г. Киеве Ф.Х.Хакимов остро почувствовал, что в дальнейшем связи будут ослабевать, что и произошло с объявлением независимости стран СНГ, и для успешного развития физической науки и воспитания кадров в Таджикистане появится необходимость создания диссертационного совета. Созданию этого диссертационного совета, с учётом малого числа докторов физико-математических наук в республике, способствовал авторитет Ф.Х.Хакимова и признание его научных заслуг российскими физиками. В 1991 г. он создает диссертационный совет по защите кандидатских диссертаций, а затем и по защите докторских диссертаций (1993 г.). За прошедшие годы на этом диссертационном совете более 20 человек защитили докторские диссертации и более 50 человек защитили кандидатские диссертации. И в этом огромная заслуга Ф.Х.Хакимова.

Высокий уровень экспертизы, обеспеченный его диссертационным советом, позволил нашим соотечественникам и иностранным гражданам, обучавшимся в Таджикистане, представить и защитить свои работы на очень высоком уровне. Позиция Ф.Х.Хакимова всегда была принципиальной, и здесь надо отдать должное его личностным качествам. Ф.Х.Хакимов был известен среди учёных Советского Союза и за его пределами как принципиальный учёный высокого уровня, добивающийся высокого уровня научного результата, и, соответственно, понимая его уровень требований, эксперты ВАК Российской Федерации всегда с высоким уровнем доверия относились к диссертационным работам, защищённым на совете Ф.Х.Хакимова.

В 1995 году Ф.Х.Хакимов в соавторстве с С.В.Владимировым, В.Н.Цытовичем и С.И.Попелем издаёт монументальный труд «Модуляционные взаимодействия в плазме» в серии Шпрингер, издательство Клувер, Нидерланды, объемом более 500 страниц (“Modulational Interactions in Plasmas”, Springer Science, Kluwer Academic Publ., Netherlands), который подвел определенный итог многолетним исследованиям в области модуляционных неустойчивостей в плазме.

Большая заслуга профессора Ф.Х.Хакимова в том, что после достижения независимости в Республике Таджикистан продолжают жить и развиваться традиции, заложенные С.У.Умаровым и А.А.Адхамовым, поддерживается высокий уровень научных исследований и подготовки специалистов в области физики.

Как настоящий учёный, физик-теоретик, он не замыкался одной лишь областью. Следует отметить, что труды Ф.Х.Хакимова лежат не только в области физики плазмы, но также и в области физики конденсированного состояния. Известны его труды по изуче-

нию ионосферных предвестников землетрясений, по нелинейным спиновым волнам, метеорологии и другим областям современной физики.

Светлая память о профессоре Фотехе Халиковиче Хакимове всегда будет с нами.

*Академик Р.М.Марупов,
академик С.О.Одинаев,
академик Х.Х.Муминов,
член-корреспондент Т.Х.Салихов*

Редакция и корректура – Н.Г.Сапожников

Сдано в набор 03.07.2017 г. Подписано в печать 17.07.2017 г.
Печать офсетная. Формат 70×100 1/16. Гарнитура Times. Усл. печ. л.8. Заказ № ____.
Тираж 300 экз.

*Адрес редколлегии: 734025, Душанбе, пр.Рудаки, 33, каб. 47.
Тел.:2-21-62-64. E-mail: danrt@mail.ru
Издательство «Дониш»: 734029, Душанбе, ул.Айни, 121, корп.2.*
