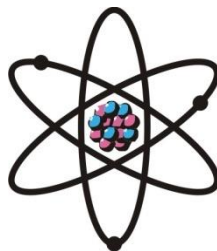


ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Журнал основан
в январе 1952 г.



№ 2 (171)
2018 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Х.Х.Муминов – главный редактор, академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Г.И.Кохирова** – зам.главного редактора, член-корреспондент, доктор физико-математических наук; **Н.Г.Сапожников** – ответственный секретарь; **Х.М.Ахмедов** – академик, доктор химических наук; **П.Б.Бабаджанов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.В.Кобулиев** – член-корреспондент, доктор технических наук, профессор; **Р.М.Марупов** – академик, доктор технических наук, профессор; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **С.О.Одинаев** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Ф.Рахими** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Д.Усманов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

М.О.Акобиршоев, В.Д.Сайнаков. Значения квазипоперечников некоторых классов периодических функций двух переменных в L_2	7
С.А.Исхоков, Б.А.Рахмонов. Вариационная задача Дирихле, связанная с некоэрцитивной формой во всем пространстве.....	17
Н.Н.Усмонзода. Об одном классе нелинейных сингулярных интегральных уравнений.....	26

ФИЗИКА

- Т.А.Тошов, Х.Х.Муминов, А.Т.Максудов.** К теории магнитоупругих волн в $S=1$ ферромагнетиках с сильной одноионной анизотропией..... 35
- Т.Х.Салихов, Н.Меликхуджа, А.Махмалатиф.** Вклад поглощения подложки на формирование нелинейного фотоакустического отклика: математическая модель и температурное поле..... 44
- С.Одинаев, Д.М.Акдодов, Х.И.Идибегзода.** Частотная дисперсия модуля электроупругости водного раствора хлорида натрия 52
- Х.Х.Муминов, Ш.Ф.Мухамедова, М.Асгари-Ларими.** Численное моделирование многосолитонного решения векторного нелинейного уравнения шредингера с самосогласованным потенциалом $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$ 62

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Д.Х.Мирзоев, С.М.Гафорзода, Ш.Д.Отаев, Ш.Б.Назаров.** Водно-солянокислотное выщелачивание зелёных глин месторождения Чашма-Санг Таджикистана с предварительным спеканием с хлористым кальцием 77

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Ш.Х.Халиков, Ж.Олифтаева, М.Умархон.** Выделение и структурно-функциональное исследование гуминовых кислот из бурого угля месторождения «Шуроб» 80

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- М.М.Тагоев, Ш.Б.Назаров, Ж.А.Мисратов, У.М.Мирсаидов.** Кинетика процесса спекания боросиликатного сырья и его концентрата с сульфатом натрия..... 86

ГЕОЛОГИЯ

- С.С.Саидрахмонзода.** Учёт особенностей технологии бурения в интервалах, характеризующихся наличием АВПД, при составлении технического проекта строительства скважин на площади «Махрам»..... 91

ЭКОЛОГИЯ

- Д.А.Абдушукуров, Д.Абдусамадзода, А.С.Кодиров.** Первоначальное засоление рек в верховьях реки Вахш..... 98

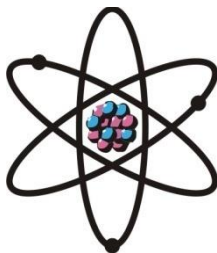
- ХРОНИКА**..... 107

ЮБИЛЕЙ УЧЕНОГО

- К 70-летию академика Академии наук Республики Таджикистан Мамадшо Илолова** 109
- Саттарову Малику Абдусатторовичу 80 лет**..... 113

ШҮЪБАИ
ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,
ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА

Маҷалла аз моҳи
январ соли 1952
нашр мешавад



№ 2 (171)
с. 2018

ҲАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:

Ҳ.Ҳ.Муминов – сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Кохирова Г.И.** – муовини сармуҳаррир, узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Г.Сапожников** – котиби масъул; **Ҳ.М.Аҳмедов** – академик, доктори илми химия; **П.Б.Бобочонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **И.Н.Ғаниев** – академик, доктори илми химия, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.В.Кобулиев** – узви вобаста, доктори илмҳои техникӣ, профессор; **Р.М.Марупов** – академик, доктори илмҳои техникӣ, профессор; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор; **С.Х.Неъматуллоев** – академик, доктори илмҳои техникӣ; **С.О.Одинаев** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Ф.Раҳимӣ** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҳ.Раҳмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Рачабов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҷ.Усмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **А.Р.Ғайзиев** – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва минералогия, профессор; **Ҷ.Х.Холиқов** – академик, доктори илми химия, профессор.

МУНДАРИҶА

МАТЕМАТИКА

- М.О.Ақобиршоев, В.Д.Сайнаков.** Қимати квазикутрҳои баъзе синфҳои функсияҳои даврии дутағйирёбанда дар L_2 7
- С.А.Исҳоқов, Б.А.Раҳмонов.** Масъалаи вариатсионии дирихлеи бо шакли ғайрикоэрситивӣ алоқаманд дар тамоми фазо..... 17
- Н.Н.Усмонозада.** Дар бораи як синфи муодилаҳои интегралӣ сингулярии ғайрихаттӣ..... 26

ФИЗИКА

- Т.А.Тошов, Ҳ.Ҳ.Муминов, А.Т.Мақсудов.** Оид ба назарияи мавҷҳои магниточандирӣ дар ферромагнетикҳои $S = 1$ бо анизотропияи қавии як-ионӣ 35

Т.Х.Салихов, Н.Меликхуча, А.Махмалатиф. Саҳми фурубарии таҷағоҳ дар ташақули пажвоки ғайрихаттии фотоакустикӣ: Модели математикӣ ва майдони хароратӣ.....	44
С.Одинаев, Д.М.Ақлодов, Х.И.Идибегзода. Дисперсияи басомадии модули чандирии электрикии маҳлули обии хлориди натрий.....	52
Х.Х.Мӯминов, Ш.Ф.Мухамедова, М.Асғарӣ-Ларимӣ. Амсиласозии ададии халлҳои бисёрсолитонии муодилаи вектории ғайрихаттии Шредингер бо потенциали $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$	62

ХИМИЯИ ҒАЙРИОРГАНИКӢ

Д.Х.Мирзоев, С.М.Гаффорзода, Ш.Д.Отаев, Ш.Б.Назаров. Коркарди гилҳои сабзи Чашма-Санг Тоҷикистон бо об ва кислотаи хлорид бо пешаки тайёр намудани гудозиши хлориди калтсий	77
--	-----------

ХИМИЯИ ОРГАНИКӢ

Ш.Х.Холиқов, Ж.А.Олифгаева, М.Умархон. Экстракция ва таҳқиқи сохтори-функционалии кислотаҳои гуминӣ аз ангишти бури кони «Шуроб»	80
---	-----------

ХИМИЯИ ФИЗИКАВӢ

М.М.Тағоев, Ш.Б.Назаров, Ҷ.А.Мисратов, У.М.Мирсаидов. Кинетикаи раванди гудохтани ашёи хоми боросиликатӣ ва концентрати он бо сульфати натрий.....	86
---	-----------

ГЕОЛОГИЯ

С.С.Саидрахмонзода. Баназаргирии хусусиятҳои технологияи пармакуни дар фосилаи таснифоти фишори баланди аномалии байни қабатҳо, ҳангоми тартиб додани лоиҳаи техники сохтмони пармачоҳҳо дар майдони Маҳрам	91
--	-----------

ЭКОЛОГИЯ

Д.А.Абдушукуров, Д.Абдусамадзода, А.С.Кодиров. Намакдоршавии аввалияи дарёҳо дар болооби дарёи Вахш.....	98
---	-----------

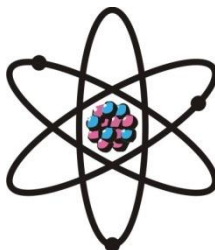
ХРОНИКА.....	107
---------------------	------------

ҶАШНИ ОЛИМОН

М.Илолов - 70 сол.....	109
М.А.Сагтаров - 80 сол	113

**DEPARTMENT OF
PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES**

The journal was established
in January 1952



№ 2 (171)
2018

EDITORIAL BOARD

Prof. **Kh.Kh.Muminov**, Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; **G.I.Kokhirova**, Doctor of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **N.G.Sapozhnikov**, Secretary; **Kh.M.Akhmedov**, Doctor of Chemistry; Prof. **P.B.Babadzhanov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **A.R.Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **M.I.Iolov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **I.N.Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **D.Kh.Khalikov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Z.V.Kobuliev**, Doctor of Engineering; Prof. **R.M.Marupov**, Doctor of Engineering; Prof. **U.M.Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; **S.Kh.Negmatullaev**, Doctor of Engineering; Prof. **S.O.Odinaev**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **N.R.Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **F.Rakhimi**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.Kh.Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.D.Usmanov**, Doctor of Physical and Mathematical.

CONTENTS

MATHEMATICS

- M.O.Akobirshoev, V.D.Sainakov.** The value of quasiwidths of the some class of periodical functions with two variables in L_2 7
- S.A.Iskhokov, B.A.Rakhmonov.** Variational Dirichlet problem associated with noncoercive form in the whole space..... 17
- N.N.Usmonzoda.** About one class of nonlinear singular integral equations..... 26

PHYSICS

- T.A.Toshov, Kh.Kh.Muminov, A.T.Maksudov.** To the theory of magnetoelastic waves in $S = 1$ ferromagnets with strong single-ion anisotropy 35
- T.Kh.Salikhov, N.Melikkhudza, A.Mahmalatif.** The contribution of absorbing substrate to the formation of the nonlinear photoacoustic response: mathematical model and temperature field 44

S.Odinaev, D.M.Akdodov, Kh.I.Idibegzoda. Frequency dispersion of electric elasticity modulus of aqueous solution of sodium chloride..... **52**

Kh.Kh.Muminov, Sh.F.Muhamedova, M.Asghari-Larimi. Numerical simulation of multi-soliton solution of the vector nonlinear Schrödinger equation with a self-consistent potential $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$ **62**

INORGANIC CHEMISTRY

D.Kh.Mirzoev, S.M.Gaforzoda, Sh.D.Otaev, Sh.B.Nazarov. Aqueous-hydrochloric acid leaching of green clays of Chashma-Sang of Republic of Tajikistan deposit with preliminary sintering with calcium chloride **77**

ORGANIC CHEMISTRY

Sh.H.Halikov, J.A.Oliftaeva, M.Umarhon. Release of humic acids in the form of the complex from coal of «Shurob»..... **80**

PHYSICAL CHEMISTRY

M.M.Tagoev, Sh.B.Nazarov, Zh.A.Misratov, U.M.Mirsaidov. Kinetics of the sintering process of borosilicate raw material and its concentrate with sodium sulphate **86**

GEOLOGY

S.S.Saidrahmonzoda. The accounting features of drilling technology in intervals, characterized by the presence of anomalously high seampressure in drawing up of the technical project of construction of wells at the square of a Mahram..... **91**

ECOLOGY

D.A.Abdushukurov, D.Abdusamadzoda, A.S.Kodirov. Initial salinization of rivers in the upper of the Vakhsh river **98**

CHRONICLE..... **107**

JUBILEE OF SCIENTIST

M.Ilolov - 70 year old..... **109**

M.A.Sattarov - 80 year old..... **113**

УДК 517.5

М.О.АКОБИРШОЕВ, В.Д.САЙНАКОВ

**ЗНАЧЕНИЯ КВАЗИПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В L_2**

Технологический университет Таджикистана

Поступила в редакцию 08.01.2018 г.

В гильбертовом пространстве суммируемых с квадратом периодических по каждой из переменных функций найдены точные оценки квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых функций, у которых усредненные модули непрерывности высших порядков частных производных мажорируются заданными функциями.

Ключевые слова: наилучшие приближения, модуль непрерывности, периодическая функция, нормированное пространство, линейные и колмогоровские квазипоперечники.

Рассмотрим экстремальную задачу нахождения точных значений колмогоровских и линейных квазипоперечников для классов дифференцируемых 2π -периодических функций двух переменных в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$, $Q = \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ с нормой

$$\|f\|_{L_2(Q)} = \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} |f(x, y)|^2 dx dy \right\}^{1/2} < \infty.$$

Напомним необходимые понятия и определения, нужные нам в дальнейшем (см. напр. [1-5]). Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m = \text{span}\{u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)\}, \quad V_n = \text{span}\{v_0(y), v_1(y), \dots, v_n(y)\}$$

– их конечномерные подпространства, $U_m \subset X, V_n \subset Y$. Выражение вида

Адрес для корреспонденции: Ақобиршоев Муҳиддин Отамошович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Н. Карабаева, 63/2, Технологический университет Таджикистана. E-mail: muhididdin_ao@mail.ru

$$\mathcal{G}_{m,n}(x, y) = \sum_{v=0}^m u_v(x) \cdot \psi_v(y) + \sum_{\mu=0}^n v_\mu(y) \cdot \varphi_\mu(x), \quad (1)$$

где $\{\varphi_\mu(x)\}_{\mu=0}^n$ и $\{\psi_v(y)\}_{v=0}^m$ – наборы произвольных функций из пространств X и Y , назовём обобщенным полиномом, порожденным подпространствами U_m и V_n . Указанные обобщенные полиномы образуют подпространство

$$G(U_m, V_n) \stackrel{\text{def}}{=} U_m \otimes Y + V_n \otimes X,$$

где операции " \otimes " и "+" обозначают, соответственно, операции декартова произведения и прямой суммы множеств. Обозначим

$$\mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \|f - \mathcal{G}_{m,n}(f)\|_Z : \mathcal{G}_{m,n}(f) \in G(U_m, V_n) \}, \quad (2)$$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z : f \in \mathfrak{M} \}.$$

Величина (2) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in$ множеством $G(U_m, V_n)$, а $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n))_Z$ – отклонение множества \mathfrak{M} от подпространства $G(U_m, V_n)$ в нормированном пространстве $(Z, \|\cdot\|_Z)$. Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset Z$ величину

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) = \inf \{ \mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z : U_m \subset X, V_n \subset Y \} \quad (3)$$

называют квазипоперечником множества \mathfrak{M} по Колмогорову [1–4].

Пусть \mathcal{L} – линейный оператор, действующий на функцию $f \in \mathfrak{M}$, образ которого принадлежит множеству $G(U_m, V_n)$. Положим

$$e(\mathfrak{M}, \mathcal{L})_Z = \sup \{ \|f - \mathcal{L}(f)\|_Z : f \in \mathfrak{M} \},$$

$$e(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n))_Z = \inf \{ e(\mathfrak{M}, \mathcal{L})_Z : \mathcal{L}(f) \in G(U_m, V_n) \}.$$

Следуя [5], величину

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) = \inf \{ e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z : U_m \subset X, V_n \subset Y \} \quad (4)$$

назовем линейным квазипоперечником множества \mathfrak{M} в пространстве Z . Непосредственно из приведенных определений следуют неравенства

$$e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z \geq \mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z, \quad d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) \geq d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z).$$

В задачах (3) и (4) наибольший интерес представляет отыскание экстремальных подпространств $U_m^0 \subset X, V_n^0 \subset Y$, для которых выполняется равенство

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, G(U_m^0, V_n^0))_Z = e(\mathfrak{M}, G(U_m^0, V_n^0))_Z = d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) = d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z).$$

Далее всюду полагаем $X = Y = L_2[0, 2\pi]$ – пространство суммируемых с квадратом 2π -периодических функций $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$, $Z = L_2(Q)$.

В этой работе для некоторых центрально-симметричных множеств периодических функций $\mathfrak{M} \subset L_2(Q)$ вычисляются величины

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}, L_2(Q)) = \inf \left\{ \mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_{L_2(Q)} : U_m, V_n \subset L_2[0, 2\pi] \right\},$$

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, L_2(Q)) = \inf \left\{ e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_{L_2(Q)} : U_m, V_n \subset L_2[0, 2\pi] \right\}.$$

Для произвольной функции $f \in L_2(Q)$ запишем ее формальное разложение в виде ряда Фурье

$$f(x, y) \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{jl}(f) e^{i(jx+ly)}, \quad (5)$$

где

$$c_{jl}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) e^{-i(jx+ly)} dx dy$$

– коэффициенты Фурье. Частную сумму ряда (5) порядка m по x и порядка n по y обозначим через

$$S_{m,n}(f; x, y) = \sum_{|j| \leq m-1} \sum_{|l| \leq n-1} c_{jl}(f) e^{i(jx+ly)}.$$

Символами $S_{m,\infty}$ и $S_{\infty,n}$ обозначим отрезки ряда (5) функции $f \in L_2(Q)$ порядка m по x и порядка n по y соответственно, то есть имеют место равенства

$$S_{m,\infty}(f; x, y) = \sum_{|j| \leq m-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{jl}(f) e^{i(jx+ly)}, \quad (6)$$

$$S_{\infty,n}(f; x, y) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{|l| \leq n-1} c_{jl}(f) e^{i(jx+ly)}, \quad (7)$$

в смысле сходимости рядов, стоящих в правых частях равенств (6) и (7) в пространстве $L_2(Q)$. Функцию

$$\begin{aligned}
S_{m,n}^*(f; x, y) &:= S_{m,\infty}(f; x, y) + S_{\infty,n}(f; x, y) - S_{m,n}(f; x, y) = \\
&= \sum_{|j| \leq m-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{jl}(f) e^{i(jx+ly)} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{|l| \leq n-1} c_{jl}(f) e^{i(jx+ly)} - \\
&\quad - \sum_{|j| \leq m-1} \sum_{|l| \leq n-1} c_{jl}(f) e^{i(jx+ly)} \tag{8}
\end{aligned}$$

будем называть обобщенным полиномом Фурье функции $f \in L_2(Q)$ порядка m по x и порядка n по y . Очевидно, что функция (8) может быть представлена в виде элемента $\mathcal{G}_{m-1,n-1}(x, y)$, принадлежащего подпространству $G(U_m, V_n)$.

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$ и $f \in L_2(Q)$. Среди всех функций $\mathcal{G}_{m-1,n-1}$ вида (1), принадлежащих подпространству $G(U_m, V_n)$, наилучшее приближение функции f доставляет ее обобщенный полином Фурье (8) порядка m по x и порядка n по y . При этом

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f) &:= \inf \left\{ \|f - \mathcal{G}_{m-1,n-1}\| : \mathcal{G}_{m-1,n-1} \in G(U_m, V_n) \right\} = \\
&= \|f - S_{m-1,n-1}^*(f)\| = \left\{ \sum_{|j| \geq m} \sum_{|l| \geq n} |c_{jl}(f)|^2 \right\}^{1/2}. \tag{9}
\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $\mathcal{G}_{m-1,n-1} \in G(U_m, V_n)$ вида (8). Так как $\{\psi_\nu(y)\}_{\nu=0}^{m-1} \in L_2[0, 2\pi]$, $\{\varphi_\mu(x)\}_{\mu=0}^{n-1} \in L_2[0, 2\pi]$, то в смысле сходимости в $L_2[0, 2\pi]$ имеют место равенства

$$\psi_\nu(y) := \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l(\psi_\nu) e^{ily}, \quad \nu = \overline{0, m-1}, \tag{10}$$

$$\varphi_\mu(x) := \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j(\varphi_\mu) e^{ijx}, \quad \mu = \overline{0, n-1}. \tag{11}$$

Из равенств (8), (10) и (11) в смысле сходимости в $L_2[0, 2\pi]$ получаем соотношение

$$\mathcal{G}_{m-1,n-1}(x, y) = \sum_{|j| \leq m-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l(\psi_j) e^{i(jx+ly)} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{|l| \leq n-1} c_j(\varphi_l) e^{i(jx+ly)}, \tag{12}$$

так как

$$f(x, y) - \mathcal{G}_{m-1,n-1}(x, y) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{jl}(f) e^{i(jx+ly)} - \sum_{|j| \leq m-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l(\psi_j) e^{i(jx+ly)} - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{|l| \leq n-1} c_j(\varphi_l) e^{i(jx+ly)} = \\
&= \left(\sum_{|j| \leq m-1} + \sum_{|j| \geq m} \right) \cdot \left(\sum_{|l| \leq n-1} + \sum_{|l| \geq n} \right) c_{jl}(f) e^{i(jx+ly)} - \\
&- \sum_{|j| \leq m-1} \left(\sum_{|l| \leq n-1} + \sum_{|l| \geq n} \right) c_l(\psi_j) e^{i(jx+ly)} - \sum_{|l| \leq n-1} \left(\sum_{|j| \leq m-1} + \sum_{|j| \geq m} \right) c_j(\varphi_l) e^{i(jx+ly)} = \\
&= \sum_{|j| \leq m-1} \sum_{|l| \leq n-1} (c_{jl}(f) - c_j(\varphi_l) - c_l(\psi_j)) e^{i(jx+ly)} + \sum_{|j| \leq m-1} \sum_{|l| \geq n} (c_{jl}(f) - c_l(\psi_j)) e^{i(jx+ly)} + \\
&+ \sum_{|j| \geq m} \sum_{|l| \leq n-1} (c_{jl}(f) - c_j(\varphi_l)) e^{i(jx+ly)} + \sum_{|j| \geq m} \sum_{|l| \geq n} c_{jl}(f) e^{i(jx+ly)}.
\end{aligned}$$

Применяя равенство Парсеваля к полученному равенству, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
&\|f - \mathcal{G}_{m-1, n-1}\|^2 = \\
&= \sum_{|j| \leq m-1} \sum_{|l| \leq n-1} |c_{jl}(f) - c_j(\varphi_l) - c_l(\psi_j)|^2 + \sum_{|j| \leq m-1} \sum_{|l| \geq n} |c_{jl}(f) - c_l(\psi_j)|^2 + \\
&+ \sum_{|j| \geq m} \sum_{|l| \leq n-1} |c_{jl}(f) - c_j(\varphi_l)|^2 + \sum_{|j| \geq m} \sum_{|l| \geq n} |c_{jl}(f)|^2. \tag{13}
\end{aligned}$$

Из равенства (13) следует, что нижняя грань в соотношении (9) достигается в единственном случае, когда

$$c_{lj}(f) = c_j(\varphi_l) + c_l(\psi_j), \quad |j| = \overline{0, m-1}, \quad |l| = \overline{0, n-1},$$

$$c_{lj}(f) = c_l(\psi_j), \quad |j| = \overline{0, m-1}, \quad |l| = n, n+1, n+2, \dots$$

$$c_{lj}(f) = c_j(\varphi_l), \quad |j| = m, m+1, m+2, \dots, \quad |l| = \overline{0, n-1}.$$

При этом имеем:

$$\mathcal{E}_{m-1, n-1}(f) := \mathcal{E}(f; G(U_{m-1}, V_{n-1})) = \left\{ \sum_{|j| \geq m} \sum_{|l| \geq n} |c_{jl}(f)|^2 \right\}^{1/2}.$$

Выразив коэффициенты $c_l(\psi_j)$ ($|j| = \overline{0, m-1}$, $|l| = n, n+1, \dots$), $c_j(\varphi_l)$ ($|l| = \overline{0, n-1}$, $|j| = m, m+1, \dots$) через коэффициенты Фурье $c_{jl}(f)$ ($i, j \in \mathbb{Z}_+$) и подставляя в формулу (12), получаем обобщенный полином Фурье $\mathcal{S}_{m-1, n-1}^*(f)$ для рассматриваемой функции $f \in L_2(Q)$, причем согласно (13) будем иметь

$$\mathcal{E}(f, G(U_{m-1}, V_{n-1})) = \|f - S_{m-1, n-1}^*(f)\| = \left\{ \sum_{|j| \geq m} \sum_{|l| \geq n} |c_{jl}(f)|^2 \right\}^{1/2},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.

В частности, из (9) и (5) следует, что если $f(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f)_{L_Q} &:= \mathcal{E}(f; G(U_{m-1}, V_{n-1}))_{L_2(Q)} = \\ &= \mathcal{E}(\varphi; U_{m-1})_{L_2[0, 2\pi]} \cdot \mathcal{E}(\psi; V_{n-1})_{L_2[0, 2\pi]} = \mathcal{E}_{m-1}(\varphi)_{L_2[0, 2\pi]} \cdot \mathcal{E}_{n-1}(\psi)_{L_2[0, 2\pi]}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\mathcal{E}_{p-1}(\varphi)_{L_2[0, 2\pi]} = \inf \left\{ \|g - T_p(g)\|, T_p(g) \in G_{2p-1} \right\}$$

– величина наилучшего среднеквадратического приближения функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами из G_{2p-1} в пространстве $L_2[0, 2\pi]$.

Для произвольной функции $f \in L_2(Q)$ определим смешанный модуль непрерывности равенством

$$\begin{aligned} \omega_{k,p}(f; t, \tau) &:= \omega_{k,p}(f; t, \tau)_{L_2(Q)} = \\ &= \sup \left\{ \|\Delta_{u,v}^{k,p} f(x, y)\|_{L_2(Q)} : |u| \leq t, |v| \leq \tau \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\Delta_{u,v}^{k,p} f(x, y) = \sum_{\nu=0}^k \sum_{\mu=0}^p (-1)^{\nu+\mu} \binom{k}{\nu} \binom{p}{\mu} f(x + \nu u, y + \mu v)$$

– конечная разность m -го порядка с шагом u по переменной x и n -го порядка с шагом v по переменной y функции $f(x, y) \in L_2(Q)$. Используя равенство Парсеваля, величину (15) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \omega_{k,p}^2(f; t, \tau)_{L_2(Q)} &= \\ &= 2^{k+p} \sup \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_{jl}(f)|^2 (1 - \cos ju)^k (1 - \cos lv)^p : |u| \leq t, |v| \leq \tau \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

В частности, для функции $f_0(x, y) = \cos mx \cos ny$ из (16) имеем:

$$\omega_{k,p}^2(f_0; t, \tau)_{L_2(Q)} = 2^{k+p} (1 - \cos mt)^k (1 - \cos n\tau)^p.$$

Понимая под \mathbb{N} множество натуральных чисел, обозначим через $C^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ – множество функций $f(x, y)$, имеющих в квадрате Q непрерывные частные производные $f^{(\nu, \mu)}(x, y) = \partial^{\mu+\nu} f / \partial x^\nu \partial y^\mu$, $\nu \leq r, \mu \leq s$, а через $L_2^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ – множество функций $f(x, y) \in C^{(r-1, s-1)}(Q)$, $r, s \geq 1$, у которых частные производные $f^{(r, \mu)}(x, y)$, $\mu = \overline{0, s-1}$, $f^{(\nu, s)}(x, y)$, $\nu = \overline{0, r-1}$ существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования и $f^{(r,s)}(x, y) \in L_2(Q)$. Легко проверить, что для произвольной функции $f(x, y) \in L_2^{(r,s)}(Q)$ выполняется неравенство

$$\mathcal{E}(f; G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)} \leq m^{-r} n^{-s} \mathcal{E}(f^{(r,s)}; G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)},$$

которое является точным в том смысле, что для функции

$$f_0(x, y) = \cos mx \cos ny \in L_2^{(r,s)}(Q), \quad r, s \in \mathbb{N}$$

обращается в равенство. С нашей точки зрения, определённый интерес представляет изучение экстремальной характеристики

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\varphi; h, \eta) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{K}_{m,n,r,s,k,p,q}(\varphi; h, \eta) = \\ &= \sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{2^{(k+p)/2} \mathcal{E}(f; G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)}}{\left(\int_0^h \int_0^\eta \omega_{k,p}^q(f^{(r,s)}; t, \tau) \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{1/q}}, \end{aligned}$$

где $m, n, k, p \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $q \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $0 < h \leq \pi/m$, $0 < \eta \leq \pi/n$, $\varphi(t, \tau)$ – неотрицательная суммируемая на $[0, h] \times [0, \eta]$ функция, не эквивалентная нулю. Имеет место следующее общее утверждение

Теорема 2. Пусть $m, n, k, p \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, $0 < \eta \leq \pi/n$, $\varphi(t, \tau)$ – неотрицательная измеримая суммируемая в прямоугольнике $[0, h] \times [0, \eta]$ функция, не эквивалентная нулю. Тогда справедливы неравенства

$$\{A_{k,p}(\varphi)\}^{-1} \leq \mathcal{K}(\varphi; h, \eta) \leq \left\{ \inf_{\substack{k \leq \nu < \infty \\ p \leq \mu < \infty}} A_{\nu, \mu}(\varphi) \right\}^{-1},$$

где

$$A_{\nu, \mu}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} A_{\nu, \mu}(\varphi; r, s, q, k, p) =$$

$$= \left(\nu^{rq} \mu^{sq} \int_0^h \int_0^\eta (1 - \cos \nu t)^{kq/2} (1 - \cos \mu \tau)^{pq/2} \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{1/q}.$$

Следствие. Пусть выполняются все условия теоремы 1 и $\varphi(t, \tau) \equiv g(t)\psi(\tau)$, причем функции $g(t)$ и $\psi(\tau)$ соответственно на отрезках $[0, h]$ и $[0, \eta]$ являются неотрицательными и дифференцируемыми. Если при некоторых $r, s \in \mathbb{N}$ и любых $t \in (0, h)$ и $\tau \in (0, \eta)$ выполнены дифференциальные неравенства

$$(rq - 1)g(t) - tg'(t) \geq 0, \quad (sq - 1)\psi(\tau) - \tau\psi'(\tau) \geq 0,$$

то имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_2^{(r,s)}(\mathcal{Q})} \frac{2^{k+p} m^r n^s \mathcal{E}(f; G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*))_{L_2(\mathcal{Q})}}{\left(\int_0^h \int_0^\eta \omega_{k,p}^q(f^{(r,s)}; t, \tau) g(t)\psi(\tau) dt d\tau \right)^{1/q}} = \\ & = \left(\int_0^h \int_0^\eta \left(\sin \frac{mt}{2} \right)^{kq} \left(\sin \frac{n\tau}{2} \right)^{pq} g(t)\psi(\tau) dt d\tau \right)^{-1/q} = \\ & = \left\{ \left(\int_0^h \left(\sin \frac{mt}{2} \right)^{kq} g(t) dt \right) \left(\int_0^\eta \left(\sin \frac{n\tau}{2} \right)^{pq} \psi(\tau) d\tau \right) \right\}^{-1/q}. \end{aligned} \quad (17)$$

Существует функция $f_0 \in L_2^{(r,s)}(\mathcal{Q})$, для которой верхняя грань в соотношении (17) достигается.

В частности, из (17) при $g(t) = \psi(t) = 1$, $h = \pi/m$, $\eta = \pi/n$, $m, n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_2^{(r,s)}(\mathcal{Q})} \frac{\mathcal{E}(f; G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*))_{L_2(\mathcal{Q})}}{\left(\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \omega_{k,p}^q(f^{(r,s)}; t, \tau) dt d\tau \right)^{1/2}} = \\ & = \frac{1}{2^{k+p} m^r n^s \sqrt[q]{\pi mn}} \cdot \left\{ \frac{\Gamma(kq+1)\Gamma(pq+1)}{\Gamma\left(\frac{kq}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{pq}{2}+1\right)} \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Пусть $\Phi_j(u)$ ($j=1, 2$) – произвольные непрерывные возрастающие при $u \geq 0$ функции, причём $\Phi_j(0) = 0$ ($j=1, 2$). Через $W_{k,p,q}^{(r,s)}(\Phi_{1,2}) \stackrel{\text{def}}{=} W_q^{(r,s)}(\Phi_{1,2}; \omega_{k,p}; h, \eta)$

обозначим множество функций $f(x, y) \in L_2^{(r,s)}(Q)$, которые при любых $k, p, r, s \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq 2$ и произвольных $h, \eta \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условию

$$\int_0^h \int_0^\eta \omega_{k,p}^q(f^{(r,s)}; t, \tau) dt d\tau \leq \Phi_1^q(h) \Phi_2^q(\eta).$$

Далее воспользуемся обозначением

$$(\sin t)_*^{\alpha q} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\sin t)^{\alpha q}, \text{ если } 0 < t \leq \pi/2; 1, \text{ если } t > \pi/2\}.$$

Результат следствия, в частности при $g(t) = \psi(\tau) \equiv 1$, позволяет при выполнении некоторых ограничений относительно мажорант $\Phi_j(u)$ ($j = 1, 2$) сформулировать следующее утверждение

Теорема 3. Пусть при всех $\mu \in \mathbb{R}_+$, $k, p \in \mathbb{N}$, $0 < u \leq \pi$, $0 < q \leq 2$ функции $\Phi_j(u)$ ($j = 1, 2$) удовлетворяют условиям

$$\Phi_1^q(u) \int_0^{\mu\pi} \left(\sin \frac{t}{2}\right)_*^{kq} dt \leq \Phi_1^q(\mu u) \int_0^\pi \left(\sin \frac{t}{2}\right)_*^{kq} dt,$$

$$\Phi_2^q(u) \int_0^{\mu\pi} \left(\sin \frac{\tau}{2}\right)_*^{pq} d\tau \leq \Phi_2^q(\mu u) \int_0^\pi \left(\sin \frac{\tau}{2}\right)_*^{pq} d\tau.$$

Тогда при любых $m, n, k, p, r, s \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq 2$ и $h, \eta \in \mathbb{R}_+$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} d_{2m-1, 2n-1}(W_{k,p,q}^{(r,s)}(\Phi_{1,2}); L_2(Q)) &= d'_{2m-1, 2n-1}(W_{k,p,q}^{(r,s)}(\Phi_{1,2}); L_2(Q)) = \\ &= 2^{(k+p)-(m+n)} m^{-r+1/q} n^{-s+1/q} \left\{ \frac{\Gamma(kq+1)\Gamma(pq+1)}{\Gamma\left(\frac{kq+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{pq+1}{2}\right)} \right\}^{1/q} \Phi_1\left(\frac{\pi}{m}\right) \Phi_2\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов. – Укр. мат. журнал, 1996, т.48, №3, с.301-308.
2. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. Квазипоперечники и оптимизация методов смешанной аппроксимации многомерных сингулярных интегралов с ядрами типа Гильберта. – Укр. мат. журнал, 1996, т.48, №6, с.753-770.
3. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных. – ДАН России, 2005, т.404, №4, с.460-464.

4. Шабозов М.Ш., Ақобиршоев М.О. О точных значениях квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных. – Укр. мат. журнал, 2009, т.61, №6, с.855-864.
5. Шабозов М.Ш., Ақобиршоев М.О. Точные значения квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных. – Analysis Mathematica, 2009, т.35, с.61-72.

М.О.АҚОБИРШОЕВ, В.Д.САЙНАКОВ

**ҚИМАТИ КВАЗИҚУТРҲОИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ ФУНКСИЯҲОИ
ДАВРИИ ДУТАҒЙИРЁБАНДА ДАР L_2**

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,
Донишгоҳи технологияи Тоҷикистон*

Дар фазои гилбертии функцияҳои бо квадрат суммиронидашаванда, ки бо ҳар яке аз тағйирёбандаҳои даврӣ мебошанд, қимати аниқи квазиқутрҳои баъзе синфҳои функцияҳои дифференсиронидашаванда, ки модули бефосилагии тартиби оилашон ба воситаи функцияҳои мажорантӣ маҳдуданд, ёфта шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: наздиққунии беҳтарин, модули бефосилагӣ, функцияи даврӣ, фазои нормиронидашаванда, квазиқутрҳои ҳаттӣ ва колмогоровӣ.

M.O.AKOBIRSHOEV, V.D.SAINAKOV

**THE VALUE OF QUASIWIDTHS OF THE SOME CLASS OF PERIODICAL
FUNCTIONS WITH TWO VARIABLES IN L_2**

*Tajik National University,
Technological University of Tajikistan*

In the Hilbert space of square-integrable periodic in each variable functions accurate estimates of quasiwidths of certain classes of differentiable functions are found whose averaged moduli of continuity of higher-order partial derivatives are majorized by given functions.

Key words: best approximation, modulus of continuity, periodical function, normalized space, liner and Kolmogorovs quasiwidths.

УДК 517.957

С.А.ИСХОКОВ, Б.А.РАХМОНОВ

**ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ, СВЯЗАННАЯ
С НЕКОЭРЦИТИВНОЙ ФОРМОЙ ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ**

*Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан
Поступила в редакцию 28.04.2018 г.*

В работе изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле для одного класса эллиптических операторов высшего порядка во всем n -мерном евклидовом пространстве в случае несогласованности вырождения коэффициентов на бесконечности. Постановка исследуемой задачи связана с интегро-дифференциальной полуторалинейной формой, которая может не удовлетворять условию коэрцитивности. Вводится понятие старшей формы и в соответствии с поведением коэффициентов старших форм определяется основное весовое нормированное пространство, в котором ищется решение основной задачи работы. Доказывается теорема об однозначной разрешимости этой задачи и устанавливается оценка нормы решения через норму правой части уравнения.

Ключевые слова: вариационная задача Дирихле, эллиптический оператор, степенное вырождение, некоэрцитивная форма, несогласованное вырождение.

1. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов хорошо изучена в случае, когда полуторалинейные формы, связанные с исследуемыми операторами, удовлетворяют условию коэрцитивности (см. [1]-[6] и имеющуюся в них библиографию). Случай, когда соответствующие формы могут не удовлетворять условию коэрцитивности, в основном, изучен для ограниченной области (см. [7]-[12] и имеющуюся в них библиографию). Неограниченность рассматриваемой области допускалась лишь в работе [10], однако рассмотренные там неограниченные области были очень близки к ограниченным (например, предельно-цилиндрическая область с нулевым диаметром в бесконечности). Случай всего пространства рассмотрен лишь в работах авторов [13,14].

Адрес для корреспонденции: Исхоков Сулаймон Абунасрович, Рахмонов Бахтовар Абдуганиевич, 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Институт математики АН РТ, E-mail: sulaimon@mail.ru, Bakhtovar-1989@mail.ru

Настоящая работа является продолжением работ авторов [13,14]. В ней рассматривается разрешимость вариационной задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического оператора произвольного четного порядка во всем пространстве R^n , ассоциированного с некоэрцитивной полуторалинейной интегро-дифференциальной формой. Предполагается, что коэффициенты исследуемого оператора имеют несогласованное вырождение на бесконечности. Применяется метод, основанный на теории вложения пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных во всем пространстве со степенными весами и на специальном бесконечном разбиении единицы пространства R^n конечной кратности.

Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов во внешности ограниченной области с несогласованным вырождением на бесконечности ранее изучалась в работе [15] в случае коэрцитивности соответствующих форм.

2. Пусть R^n – n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ – длина мультииндекса k . Обозначим через $u^{(k)}(x)$ обобщенную в смысле С.Л.Соболева производную функции $u(x)$ мультииндекса k . Пусть r – натуральное, α, p – вещественные числа и $1 \leq p < \infty$. Символом $V_{p,\alpha}^r(R^n)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных во всем пространстве R^n , имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные порядка r с конечной нормой

$$\|u; V_{p,\alpha}^r(R^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int d^{p\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx + \int d^{p(\alpha+r)}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

где $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$. Здесь и далее все интегралы берутся по всему пространству R^n .

3. Пусть r – натуральное число и J – некоторое подмножество множества $\{0, 1, \dots, r\}$, причем $r \in J$. Пусть $\alpha_j, j \in J$, – вещественные числа. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u] = \sum_{|k|=|l|=j \in J} (-1)^j \left(d(x)^{2\alpha_j} a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)}, \quad (1)$$

который понимается в смысле теории распределений на R^n . Предполагается, что коэффициенты $a_{kl}(x), x \in R^n$, являются ограниченными комплекснозначными функциями.

Определение 1. Вырождение коэффициентов оператора (1) называется **согласованным**, если существует число α такое, что $\alpha_j = \alpha - j + r$ при всех $j \in J$. В противном случае оно называется **несогласованным**.

Постановка вариационной задачи Дирихле для оператора (1) связана со следующей интегро-дифференциальной полуторалинейной формой

$$B[u, v] = \sum_{|k|=|l|=j \in J} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \quad (2)$$

В настоящей работе исследуется разрешимость вариационной задачи Дирихле, связанной с оператором (1) в случае несогласованности вырождения его коэффициентов и некоэрцитивности формы (2). Здесь и далее понятие коэрцитивности формы понимается в смысле определения 2.0.1 работы [1]: если H_0 – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$, H_+ – другое гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_+$, плотно вложенное в H_0 , то определенная в H_+ полуторалинейная форма $P[u, v]$ называется H_+ -коэрцитивной относительно H_0 , если найдутся числа $\mu_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} P[u, u] + \mu_0 \|u\|_0^2 \geq \delta_0 \|u\|_+^2$$

для всех $u \in H_+$.

Форму (2) представим в виде

$$B[u, v] = \sum_{j \in J} B_j[u, v], \quad \text{где } B_j[u, v] = \sum_{|k|=|l|=j} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx$$

и дадим следующее определение

Определение 2. Форму $B_r[u, v]$ назовем **старшей**. Далее обозначим для удобства r через j_1 . Другие старшие формы определим по индукции. Пусть уже указаны старшие формы $B_{j_1}[u, v], \dots, B_{j_{m-1}}[u, v]$ и пусть j_m наибольшее число из множества J , меньше j_{m-1} , для которого выполняется неравенство

$$\alpha_{j_m} + j_m < \min_{1 \leq h \leq m-1} (\alpha_{j_h} + j_h).$$

Тогда форму $B_{j_m}[u, v]$ также назовем **старшей**. Если же такого j_m не найдется, то **старшими** будем называть только формы $B_{j_1}[u, v], \dots, B_{j_{m-1}}[u, v]$, при этом $m-1$ обозначим через m .

Пусть

$$\delta = \min_{1 \leq h \leq m} \{\alpha_{j_h} + j_h\},$$

и $L_{2, \delta}(R^n)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_\delta = \int d^{2\delta}(x) u(x) \overline{v(x)} dx. \quad (3)$$

Обозначим через $\|f; L_{2,\delta}(R^n)\|$ норму пространства $L_{2,\delta}(R^n)$, порожденную скалярным произведением (3).

Вводим пространство \mathbb{H}_+ комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in R^n$, с конечной нормой

$$\|u; \mathbb{H}_+\| = \left\{ \sum_{h=1}^m \left\| u; V_{2;\alpha_{j_h}}^{j_h}(R^n) \right\|^2 \right\}^{1/2}.$$

Из свойства пространства $V_{p,\alpha}^r(R^n)$ (см., например, [16]) следует, что множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в пространстве \mathbb{H}_+ и

$$\|f; L_{2,\delta}(R^n)\| \leq \|u; \mathbb{H}_+\| \quad \forall u \in \mathbb{H}_+.$$

Символом \mathbb{H}_- обозначим пополнение пространства $L_{2,\delta}(R^n)$ по норме

$$\|f; \mathbb{H}_-\| = \sup \frac{|(f, u)_\delta|}{\|u; \mathbb{H}_+\|},$$

где верхняя грань берется по всем $u \in \mathbb{H}_+$ таким, что $\|u; \mathbb{H}_+\| = 1$. Элементы из \mathbb{H}_- отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над \mathbb{H}_+ . Действие функционала $F \in \mathbb{H}_-$ на функцию $u \in \mathbb{H}_+$ будем обозначать символом $\langle F, v \rangle$.

Рассмотрим вариационную задачу Дирихле для оператора (1).

Задача D_λ . Для заданного функционала $F \in \mathbb{H}_-$ требуется найти решение $u(x)$ уравнения

$$B[u, v] + \lambda(u, v)_\delta = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(R^n),$$

принадлежащего пространству \mathbb{H}_+ .

Прежде чем сформулировать основной результат нашей работы о разрешимости задачи D_λ для каждого $h = \overline{1, m}$ вводим функцию

$$A_h(x, \zeta) = \sum_{|k|=|l|=j_h} a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l},$$

где $x \in R^n$ и $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|=j_h}$ – набор комплексных чисел.

Далее будем предполагать, что функция $\operatorname{arg} z$ принимает значения на отрезке $(-\pi, \pi]$.

Теорема 1. Пусть для каждого $h \in \{1, \dots, m\}$ найдутся числа $\varphi_h \in (0, \pi)$, $M > 0$ и отличная от нуля комплекснозначная всюду непрерывная функция $\gamma_h(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \leq r} \subset \mathbb{C}$ выполняются следующие неравенства

$$|\operatorname{arg} A_h(x, \zeta)| < \varphi_h,$$

$$\sum_{|k|=j_h} |\zeta_k|^2 \leq M \operatorname{Re}\{\gamma_h(x) A_h(x, \zeta)\}.$$

Пусть для любого числа $\nu > 0$ существует число $R_\nu > 0$ такое, что $|\gamma_h(x) - \gamma_h(y)| < \nu$ для любого $h = \overline{1, m}$ и всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$.

Тогда существует число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что если $\lambda \geq \lambda_0$, то для любого заданного функционала $F \in \mathbb{H}_-$ задача D_λ имеет единственное решение и при этом справедлива оценка

$$\|u; \mathbb{H}_+\| \leq M_0 \|F; \mathbb{H}_-\|,$$

где число $M_0 > 0$ не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ и функционала F .

4. Наметим схему доказательства теоремы 1. Оно основано на специальном бесконечном разбиении единицы всего пространства \mathbb{R}^n , которое имеет конечную кратность и учитывает поведение коэффициентов оператора L на бесконечности.

Лемма 1. Пусть функция $\gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, такая же, как в теореме 1, и пусть ν - достаточно малое положительное число. Тогда существуют неотрицательные функции $\varphi_m(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta_m(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $m = 1, 2, \dots$, такие, что:

а) система функций $\{\varphi_m^2(x)\}_{m=1}^\infty$ образует разбиение единицы пространства \mathbb{R}^n с конечной кратностью, то есть

$$\sum_{m=1}^\infty \varphi_m^2(x) \equiv 1, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

и если $\chi_m(x)$ - характеристическая функция множества $\operatorname{supp} \varphi_m$, то существует конечное число Λ_n , зависящее только от n , такое, что

$$1 \leq \sum_{m=1}^\infty \chi_m(x) \leq \Lambda_n \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n;$$

б) функция $\eta_m(x)$ обращается в единицу в некоторой окрестности множества $\text{supp}\varphi_m(x)$ и $0 \leq \eta_m(x) \leq 1$ для всех $x \in R^n$;

в) производные функций $\varphi_m(x)$, $\eta_m(x)$, $m = 1, 2, \dots$, удовлетворяют следующим неравенствам

$$|\varphi_m^{(k)}(x)| \leq C_1 d^{|k|}(x), \quad |\eta_m^{(k)}(x)| \leq C_2 d^{|k|}(x), \quad |k| \leq r,$$

где положительные числа C_1, C_2 не зависят от m и r ;

г) $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ для всех $x, y \in \text{supp}\eta_m$, $m = 1, 2, \dots$

В каждом множестве $\text{supp}\varphi_m$, $m = 1, 2, \dots$, фиксируем точку x_m и рассмотрим форму

$$B_{\lambda, m}^{(0)}[u, v] = \sum_{|k|=|l|=j \in J} \int d^{2\alpha_j}(x) a_{klm}^{(0)}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx + \lambda \int d^{2\delta}(x) u(x) \overline{v(x)} dx,$$

где

$$a_{klm}^{(0)}(x) = (1 - \eta_m(x)) \gamma(x_m) a_{kl}(x_m) + \eta_m(x) \gamma(x) a_{kl}(x).$$

С помощью вспомогательных весовых интегральных неравенств, а также неравенства (см. [5, лемма 2.2])

$$\begin{aligned} & \sum_{|l|=r_1} \int (d^{\alpha+r-|l|}(x) |u^{(l)}(x)|)^2 dx \leq \\ & \leq \tau \sum_{|k|=r} \int (d^\alpha(x) |u^{(k)}(x)|)^2 dx + c_0 \tau^{-\mu} \int (d^{\alpha+r}(x) |u^{(l)}(x)|)^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(R^n), \end{aligned}$$

где $r_1 < r$, $\mu = r_1 / (r - r_1)$, $\tau > 0$, доказывается, что

$$|B_{\lambda, m}^{(0)}[u, v]| \leq M_0 \|u; \mathbb{H}_+\| \|u; \mathbb{H}_+\|$$

$$\text{Re} B_{\lambda, m}^{(0)}[u, u] \geq \delta_0 \|u; \mathbb{H}_+\|^2$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(R^n)$.

На основе этих неравенств с помощью теоремы Лакса-Мильграмма доказывается, что оператор $\mathcal{R}_m(\lambda)$, определенный равенством

$$B_{\lambda, m}^{(0)}[\mathcal{R}_m(\lambda)F, v] = \langle F, v \rangle \quad v \in C_0^\infty(R^n),$$

действует из \mathbb{H}_- в \mathbb{H}_+ и имеет непрерывный обратный оператор.

Обозначим

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\theta_m) \varphi_m \mathcal{R}_m(\lambda) \varphi_m,$$

где $\theta_m = \min\{\varphi - \pi/2, |\arg \gamma(x_m)|\} (\text{sign } \arg \gamma(x_m))$.

Далее строится оператор $\mathbb{R}(\lambda): \mathbb{H}_- \rightarrow \mathbb{H}_+$:

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v \rangle = B_\lambda[\mathcal{R}(\lambda)F, v] \quad (\forall v \in \mathbb{H}_+),$$

и доказывается, что

$$|\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v \rangle - \langle F, v \rangle| \leq \omega_1(\lambda) \|F; \mathbb{H}_-\| \cdot \|v; \mathbb{H}_+\| \quad (4)$$

где $\omega_1(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Из оценки (4) следует, что при $\lambda > \lambda_0$ оператор $\mathbb{G}(\lambda) = \mathbb{R}(\lambda) - E$, действующий из \mathbb{H}_- в \mathbb{H}_+ , является ограниченным, и его норма не превосходит $1/2$.

Поэтому оператор $\mathbb{R}(\lambda): \mathbb{H}_- \rightarrow \mathbb{H}_-$ при $\lambda > \lambda_0$ непрерывно обратим и $\mathbb{R}^{-1}(\lambda) = (E + \mathbb{G}(\lambda))^{-1}$.

Далее доказывается, что оператор $\mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)$, $\lambda > \lambda_0$, является обратным относительно дифференциального оператора

$$L_\lambda[u] = \sum_{|k|=|l| \in J} (-1)^{|l|} \left(d^{2\alpha_j}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)} + \lambda d^{2\delta}(x) u(x)$$

и для любого $F \in \mathbb{H}_-$ функция $u = \mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F$ будет решением задачи D_λ .

Таким образом, существование решения задачи D_λ доказано. Единственность решения задачи D_λ доказывается стандартным образом (см., например, [8]). Изучается разрешимость соответствующей сопряженной задачи и доказывается, что задача D_λ в случае $F = 0$ имеет только нулевое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М., Лирозкин П.И., Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. – Известия вузов. Математика, 1988, №8, с. 4-30.
2. Искоков С.А. О гладкости решения вырождающихся эллиптических уравнений. – Дифференциальные уравнения, 1995, т. 31, №4, с. 641-653.
3. Мирошин Н.В. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением. – Труды математического института РАН, 1992, т. 194, с. 179-195.
4. Искоков С.А., Куджмуродов А.Я. О вариационной задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов. – Доклады Академии наук России, 2005, т. 403, №2, с. 165-168.

5. Исмоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением. – Математические заметки, 2010, т. 87, №2, с. 201-216.
6. Исмоков С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением и его приложения. – Уфимский математический журнал, 2016, т. 8, №1, с. 54-71.
7. Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле, связанная с некоэрцитивной билинейной формой. – Доклады Академии наук России, 1993, т. 330, №3, с. 285-290.
8. Бойматов К.Х., Исмоков С.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой. – Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 1997, т. 214. с. 107-134.
9. Исмоков С.А. О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами. – Доклады Академии наук России, 1995, т. 342, №1, с. 20-22.
10. Исмоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными формами. – Доклады Академии наук России, 2003, т. 392, №5, с. 606-609.
11. Исмоков С.А., Гадоев М.Г., Константинова Т.П. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами. – Доклады Академии наук России, 2015, т. 462, №1, с. 7-10.
12. Гадоев М.Г., Константинова Т.П. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов. – Математические заметки СВФУ, 2014, т. 21, №2, с. 8-21.
13. Исмоков С.А., Рахмонов Б.А. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов второго порядка во всем пространстве. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2017, т. 60, 11-12, с. 555-559.
14. Исмоков С.А., Рахмонов Б.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2018, т. 61, №3, с. 224-230.
15. Мирошин Н.В. Внешняя задача Дирихле для вырождающегося эллиптического оператора. – Труды математического института АН СССР, 1979, т. 150, с. 198-211.
16. Бойматов К.Х. О плотности финитных функций в весовых пространствах. – Доклады Академии наук СССР, 1989, т. 307, №6, с. 1296-1299.

С.А.ИСХОҚОВ, Б.А.РАҲМОНОВ

МАСЪАЛАИ ВАРИАТСИОНИИ ДИРИХЛЕИ БО ШАКЛИ ҒАЙРИКОЭРСИТИВӢ АЛОҚАМАНД ДАР ТАМОМИ ФАЗО

*Институти математикаи ба номи А.Чӯраеви
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мақола ҳалшавандагии масъалаи вариатсионии Дирихле барои як синфи операторҳои эллиптикии тартиби оӣ дар тамоми фазои n -ченакаи евклидӣ дар ҳолати ҳаммувофиқа набудани таназзулӯбии коэффитсиентҳо дар беохирӣ омӯхта мешавад. Гузориши масъалаи тадқиқшаванда бо шакли интегро-дифференсиалии якунимхаттие вобаста аст, ки метавонад шартҳои коэрситивиро қаноат накунад. Мафҳуми шакли калон ворид карда шуда, вобаста ба рафтори коэффитсиентҳои

шаклҳои калон фазои вазндори асосӣ муайян карда мешавад, ки дар он ҳалли масъалаи асосии кор ҷустуҷӯ карда мешавад. Теорема оиди ҳалшавандагии якқимматаи ин масъала исбот карда шуда, баҳои нормаи ҳал бо воситаи нормаи тарафи ростӣ муодила ба даст оварда мешавад.

Калимаҳои калидӣ: масъалаи вариатсионии Дирихле, оператори эллиптикӣ, таназзулҳои дараҷагӣ, шакли ғайрикоэрсивӣ, таназзулҳои номувофик.

S.A.ISKHOKOV, B.A.RAKHMONOV

**VARIATIONAL DIRICHLET PROBLEM ASSOCIATED
WITH NONCOERCIVE FORM IN THE WHOLE SPACE**

*A.Dzhuraev Institute of Mathematics,
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

We study the solvability of the Dirichlet variational problem for one class of higher order elliptic operators in the whole n -dimensional Euclidean space in the case of uncoordinated degeneration of coefficients at infinity. The formulation of the problem under consideration is connected with the integro-differential sesquilinear form, which may not satisfy the coercivity condition. The notion of an leading form is introduced, and in accordance with the behavior of the coefficients of the leading forms, the basic weighted normed space is defined in which the solution of the main problem of the work is searched. A theorem on the unique solvability of this problem is proved and an estimate of the norm of the solution is established through the norm of the righthand side of the equation.

Key words: variational Dirichlet problem, elliptic operator, power degeneration, noncoercive form, uncoordinated degeneration.

УДК 517.55

Н.Н.УСМОНЗОДА

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ

Таджикский государственный финансово-экономический университет

Поступила в редакцию 05.04.2018 г.

В работе изучаются нелинейные сингулярные интегральные уравнения. Установлено, что число решений интегрального уравнения в классе функций, ограниченных на контуре, не изменяется от наличия нулей у коэффициентов интегрального уравнения и уменьшается на суммарный порядок всех полюсов.

Ключевые слова: интегральные уравнения, условия Гёльдера, сингулярные случаи, каноническая функция, интеграл типа Коши, интерполяционный многочлен, нуль-полюс.

Особые интегральные уравнения с ядром Коши имеют тесную связь с краевой задачей Римана

$$\varphi^+(t) = G(t)\varphi^-(t) + g(t).$$

Её исследование и многочисленная литература по вопросам, связанным с ней, даны в монографиях Ф.Д.Гахова [1] и Н.И.Мухселешвили [2]. Решение характеристического уравнения

$$K^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} = f(t)$$

в предположении, что функции $a(t) - b(t)$ и $a(t) + b(t)$ имеют на контуре нули соответственно в точках $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ целых порядков и, следовательно, представлено в виде

Адрес для корреспонденции: Усмонзода Некруз, 734067, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Нахимова, 64/14, Таджикский государственный финансово-экономический университет. E-mail: sbb-1971@rambrel.ru

$$a(t) - b(t) = \prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k} r(t),$$

$$a(t) + b(t) = \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j} s(t),$$

где $r(t)$ и $s(t)$ нигде не обращается в нуль. Все α_k, β_j предполагаются различными и изучены в [1].

Обобщение характеристического сингулярного интегрального уравнения изучено Л.Г.Михайловым в [3].

Там рассматривается уравнение вида

$$\alpha_1(t)\mu(t) + \beta_1(t) \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} + \alpha_2(t) \overline{\mu(t)} + \beta_2(t) \overline{\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t}} = f(t).$$

Особые случаи (сингулярные случаи) этого уравнения изучены Н.У.Усмановым.

Нами будут рассмотрены нелинейные сингулярные интегральные уравнения следующего вида:

$$\alpha(t)\mu(t) + \beta(t)S\mu + \gamma(t) \overline{[-\mu + S\mu]^r} = f(t), \quad (1)$$

где $S\mu = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau$, r – целое положительной число, $\alpha(t), \beta(t), f(t)$ – заданные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера на Γ .

Введём кусочно-аналитическую функцию, заданную интегралом типа Коши, плотностью которой служит искомое решение уравнение (1)

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Согласно формулам Сохоцкого

$$\varphi^+(t) = \frac{1}{2} \mu(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad \varphi^-(t) = -\frac{1}{2} \mu(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = \mu(t), \quad \varphi^+(t) + \varphi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Внося значения $\varphi(t), \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau$ в уравнение (1) и решая его относительно

$\varphi^+(t)$, получим, что кусочно-аналитическая функция $\varphi(z)$ должна являться решением краевой задачи:

$$\varphi^+(t) = \frac{\alpha(t) - \beta(t)}{\alpha(t) + \beta(t)} \varphi^-(t) - \frac{2^r \gamma(t)}{\alpha(t) + \beta(t)} [\overline{\varphi^-(t)}]^r + \frac{f(t)}{\alpha(t) + \beta(t)}$$

или

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)[\overline{\varphi^-(t)}]^r + c(t), \quad (2)$$

$$\text{где } a(t) = \frac{\alpha(t) - \beta(t)}{\alpha(t) + \beta(t)}, \quad b(t) = \frac{2^r \gamma(t)}{\alpha(t) + \beta(t)}, \quad c(t) = \frac{f(t)}{\alpha(t) + \beta(t)}.$$

В силу того, что искомая функция $\varphi(z)$ представлена интегралом типа Коши, она должна удовлетворять дополнительному условию $\varphi^-(\infty) = 0$.

Индекс коэффициента $a(t) = \frac{\alpha(t) - \beta(t)}{\alpha(t) + \beta(t)}$ задачи (2) будем называть индексом интегрального уравнения (1).

Решив краевую задачу (2), по формуле $\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = \mu(t)$ найдём решение уравнения (1).

Постановка задачи. Пусть D^+ – многосвязная область, ограниченная контуром Γ , содержащим непересекающиеся замкнутые контуры Ляпунова $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Из них Γ_0 охватывает все остальные, и эти последние не охватывают друг друга; D^- – дополнение $D^+ + \Gamma$ до всей плоскости.

Теорема. Пусть $a(t), b(t), c(t) \in H(\Gamma)$ (пространству функций, удовлетворяющих на Γ условию Гёльдера) $a(t) \neq 0$, $\varkappa = \text{Ind}_\Gamma a(t)$, r – целое положительное число;

$$\left\| \frac{b(t)}{a(t)} \right\|_H \cdot \|\chi^-(t)\|_H^{r-1} r \cdot h^{r-1} < \left| \frac{2}{1+SH} \right|, \quad (3)$$

h – радиус шара с нулевым центром пространства $H(\Gamma)$, $\chi^\pm(t)$ – каноническая функция коэффициента $a(t)$.

Тогда: 1) если $\varkappa \geq 0$, то однородная и неоднородная задача (2), безусловно, разрешима в шаре пространства $H(\Gamma)$ радиуса h с нулевым центром и её общее решение содержит $2\varkappa$ вещественных произвольных постоянных;

2) если $\varkappa < 0$, то однородная задача в шаре пространства $H(\Gamma)$ радиуса h с нулевым центром имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной задачи (2) необходимо и достаточно выполнения $2|\varkappa|$ условий.

Доказательство. Пусть $\varkappa \geq 0$. Положим

$$\varphi^+(z) = z^\varkappa \Pi^{-1}(z) \psi^+(z) + P_{\varkappa-1}(z), \quad (4)$$

(см.[5] стр.144), где полином $P_{\varkappa-1}(z)$ степени $\varkappa-1$ подобран так, чтобы функция $\psi^\pm(z)$, определяемая из (4), не имела полюс в точке $z=0$;

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{\varkappa_k}, \quad z_k \in D^-, \quad \varkappa_k = \varkappa = \text{Ind}_{\Gamma_k} a(t).$$

Тогда (2) преобразуем к виду

$$\psi^+(t) = a_1(t)\varphi^-(t) + b_1(t)\overline{[\varphi^-(t)]^r} + c_1(t), \quad (5)$$

где $a_1(t) = t^{-\varkappa}\Pi(t)a(t)$, $b_1(t) = t^{-\varkappa}\Pi(t)b(t)$, $c_1(t) = t^{-\varkappa}\Pi(t)[c(t) - P_{\varkappa-1}(t)]$.

Так как $\text{Ind} a_1(t) = 0$, то $a_1(t)$ можно представить в виде

$$a_1(t) = \frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)}. \quad (6)$$

Теперь, подставляя (6) в (5) и представляя $\frac{\psi^+(t)}{\chi^+(t)}$ и $\frac{\varphi^-(t)}{\chi^-(t)}$ через интеграл типа Коши с плотностью $\mu(\tau) \in H(\Gamma)$, получим

$$\mu(\tau) = \frac{b_1(t)}{\chi^+(t)} \left\{ \chi^- \frac{1}{2} \overline{[-\mu + S\mu]^r} \right\} + \frac{c(t) - P_{\varkappa-1}(t)}{a(t)\chi^+(t)} \equiv T_\mu. \quad (7)$$

Оценим следующую норму разности операторов:

$$\begin{aligned} & \left\| \overline{(-\mu_1 + S\mu_1)^r} - \overline{(-\mu_2 + S\mu_2)^r} \right\|_H \leq \left\| \overline{(-\mu_1 + S\mu_1)} - \overline{(-\mu_2 + S\mu_2)} \right\|_H \cdot \\ & \cdot \left\| \overline{(-\mu_1 + S\mu_1)^{r-1}} + \overline{(-\mu_1 + S\mu_1)^{r-2}}(-\mu_2 + S\mu_2) + \dots + \right. \\ & \quad \left. + \overline{(-\mu_1 + S\mu_1)} - \overline{(-\mu_2 + S\mu_2)^{r-2}} + \right. \\ & \quad \left. (-\mu_2 + S\mu_2)^{r-2} \right\| \leq \|(-j + S)\| \cdot \|\mu_1 - \mu_2\| \cdot \left[\| -j + S \|^{r-1} \cdot \|\mu_1\|^{r-1} + \right. \\ & \quad \left. + \| -j + S \|^{r-1} \|\mu_1\|^{r-2} \|\mu_2\| + \dots + \| -j + S \|^{r-2} \|\mu_1\| \cdot \|\mu_2\|^{r-2} + \right. \\ & \quad \left. + \| -j + S \|^{r-1} \|\mu_2\|^{r-1} \right] \leq rh^{r-1} \| -j + S \|_H^r \|\mu_1 - \mu_2\|_H \leq \\ & \leq rh^{r-1} (1 + S_H)^r \|\mu_1 - \mu_2\|_H. \end{aligned}$$

Здесь $\|\mu\|_H < h$, так как решения ищутся в шаре радиуса h с нулевым центром банахова пространства $H(\Gamma)$.

$$\text{Итак, } \|T_{\mu_1} - T_{\mu_2}\|_H \leq \left\| \frac{b(t)}{a(t)} \right\| \cdot \|\chi^-(t)\|^{r-1} \cdot r \left[\frac{1+S_H}{2} \right]^r \cdot h^{r-1} \|\mu_1 - \mu_2\|_H.$$

Если имеет место неравенство (3), то интегральное уравнение (7) имеет единственное решение при каждом свободном члене.

Пусть $c(t) \equiv 0$. Тогда, найдя из уравнения (7) $\mu(t)$ и подставляя последнее в интеграл типа Коши $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau-t} d\tau$, найдём $\frac{\psi^+(t)}{\chi^+(t)}$ и $\frac{\varphi^-(t)}{\chi^-(t)}$, которые содержат 2α вещественных произвольных постоянных. Из формулы (4) найдём $\varphi^+(z)$. Полагая $P_{\alpha-1}(t) \equiv 0$, $c(t) \neq 0$, строим частное решение неоднородной задачи.

Пусть теперь $\alpha < 0$. В этом случае всё сказанное верно и для $\psi^+(z)$, но функция $\varphi^+(z)$, найденная из (4), будет иметь полюс в точке $z=0$. Для регулярности $\varphi^+(z)$ в точке $z=0$ необходимо и достаточно наложить дополнительные условия, чтобы $\psi^+(z)$ имела нуль порядка $|\alpha|$ в точке $z=0$, что и приводит к условиям вида:

$$\int_{\Gamma} t^{-S} Q[c(t)] dt = 0, \quad S = 1, 2, \dots, |\alpha|,$$

где $Q[c(t)]$ – оператор обращения уравнения (7) при $P_{\alpha-1}(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Пусть функции $\alpha(t) - \beta(t)$ и $\alpha(t) + \beta(t)$ имеют на контуре нули любого порядков и, следовательно, представимы в виде

$$\alpha(t) - \beta(t) = |t - \tau|^{\rho_1} a_1(t), \quad \alpha(t) + \beta(t) = |t - \xi|^{\rho_2} b_1(t),$$

где $a_1(t)$ и $b_1(t)$ нигде не обращаются в нуль. τ и ξ – несовпадающие точки контура.

Уравнение (1) приводится к задаче (2) следующего вида:

$$\varphi^+(t) = \frac{|t - \tau|^{\rho_1}}{|t - \xi|^{\rho_2}} a_1(t) \varphi^-(t) + \frac{|t - \tau|^{\rho_1}}{|t - \xi|^{\rho_2}} b_1(t) [\overline{\varphi^-(t)}]^r + c(t). \quad (8)$$

Пусть ρ_1 и ρ_2 – произвольные положительные вещественные числа, $\rho_1 = S_1 - \nu_1$, $\rho_2 = S_2 - \nu_2$, где S_1, S_2 – целые числа, ν_1, ν_2 – соответственно их дробная часть, то есть $0 < \nu_1 < 1$, $0 < \nu_2 < 1$.

Класс допустимых функций здесь может быть расширен. В качестве допустимого класса функций будем брать функции, которые в отдельных точках контура обращаются в бесконечность порядка меньше единицы. Значение искомой функции на бесконечности будем считать равным нулю.

Поскольку $|t - \tau|^{\rho_1} = (t - \tau)^{\rho_1} e^{-iQ_1\rho_1}$, $|t - \xi|^{\rho_2} = (t - \xi)^{\rho_2} e^{-iQ_2\rho_2}$, где $Q_1 = \arg(t - \tau)$, $Q_2 = \arg(t - \xi)$.

Перепишем (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) &= \frac{(t - \tau)^{\rho_1} e^{-iQ_1\rho_1}}{(t - \xi)^{\rho_2} e^{-iQ_2\rho_2}} a_1(t) \varphi^-(t) + \frac{(t - \tau)^{\rho_1} e^{-iQ_1\rho_1}}{(t - \xi)^{\rho_2} e^{-iQ_2\rho_2}} b_1(t) \overline{[\varphi^-(t)]^r} + c(t) \\ \varphi^+(t) &= \frac{(t - \tau)^{S_1 - \nu_1}}{(t - \xi)^{S_2 - \nu_2}} e^{-i(Q_2\rho_2 - Q_1\rho_1)} a_1(t) \varphi^-(t) + \\ &+ \frac{(t - \tau)^{S_1 - \nu_1}}{(t - \xi)^{S_2 - \nu_2}} e^{-i(Q_2\rho_2 - Q_1\rho_1)} b_1(t) \overline{[\varphi^-(t)]^r} + c(t) \end{aligned}$$

или

$$\varphi^+(t) = \frac{(t - \tau)^{S_1}}{(t - \xi)^{S_2}} a_2(t) \varphi^-(t) + \frac{(t - \tau)^{S_1}}{(t - \xi)^{S_2}} b_2(t) \overline{[\varphi^-(t)]^r} + c(t), \quad (9)$$

где $a_2(t) = (t - \xi)^{\nu_2} (t - \tau)^{\nu_1} e^{-i(Q_2\rho_2 - Q_1\rho_1)} a_1(t)$,
 $b_2(t) = (t - \xi)^{\nu_2} (t - \tau)^{\nu_1} e^{-i(Q_2\rho_2 - Q_1\rho_1)} b_1(t)$.

Для применимости дальнейшей теории нужно потребовать, чтобы функция $c(t)$ в окрестности точки $t = \tau$ была дифференцируема достаточное число раз.

Построим интерполяционный многочлен $T(t)$ так, чтобы он удовлетворял следующим условиям:

$$c_1^{(j)}(\tau) = T^{(j)}(\tau), \quad (j = 0, 1, 2, \dots, S_{i-1}). \quad (10)$$

Такой многочлен определяется единственным образом и в дальнейшем понадобится для приведения (9) к задаче, коэффициент которой не обращается в нуль. При помощи (10) краевое условие (9) принимает следующий вид:

$$\varphi^+(t) - T(t) = \frac{(t - \tau)^{S_1}}{(t - \xi)^{S_2}} a_2(t) \varphi^-(t) + \frac{(t - \tau)^{S_1}}{(t - \xi)^{S_2}} b_2(t) \overline{[\varphi^-(t)]^r} + c(t) - T(t),$$

или

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) - T(t) &= \frac{(t - \tau)^{S_1}}{(t - \xi)^{S_2}} a_2(t) \varphi^-(t) + \\ &+ \frac{(t - \tau)^{S_1}}{(t - \xi)^{S_2}} b_2(t) \overline{[\varphi^-(t)]^r} + (t - \tau)^{S_1} c_1(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Разделив краевое условие (11) на $(t - \tau)^{S_1}$, получим

$$\varphi^+(t) - T(t) = \frac{a_2(t)}{(t-\xi)^{S_2}} \varphi^-(t) + \frac{b_2(t)}{(t-\xi)^{S_2}} \overline{[\varphi^-(t)]}^r + (t-\tau)^{S_1} c_1(t), \quad (12)$$

$$\frac{\varphi^+(t) - T(t)}{(t-\tau)^{S_1}} = \frac{a_2(t)}{(t-\xi)^{S_2}} \varphi^-(t) + \frac{b_2(t)}{(t-\xi)^{S_2}} \overline{[\varphi^-(t)]}^r + c_1(t),$$

где $\varphi_1^+(t) = \frac{\varphi^+(t) - T(t)}{(t-\xi)^{S_1}}$.

Поскольку из краевого условия (12) видно, что $\varphi^-(z)$ имеет нуль порядка S_2 в точке ξ , то, полагая в (12) $\varphi^-(z) = (z-\xi)^{S_2} \cdot z^{-S_2} \varphi_1^-(z)$, получим

$$\overline{\varphi^-(t)} = \overline{(z-\xi)^{S_2} \cdot z^{-S_2} \varphi_1^-(z)} = (z-\xi)^{S_2} \cdot e^{-i\theta S_2} \overline{z^{-S_2} \varphi_1^-(z)}, \quad \theta = \arg(t-\xi).$$

$$\varphi_1^-(t) = t^{-S_2} a_2(t) \varphi_1^-(t) + (z-\xi)^{S_2(r-1)} b_2(t) [t^{-S_2} e^{-2i\theta S_2} \overline{\varphi_1^-(t)}]^r + c_1(t). \quad (13)$$

Функции $a_2(t)$ и $b_2(t)$ есть краевое условие (13) многозначной функции. Рассмотрим многозначную аналитическую функцию соответствующим образом разрезанной плоскости как однозначную аналитическую.

Введём аналитические функции:

$$(z-z_0)^{\nu_1}, (z-z_0)^{\nu_2}, (z-\xi)^{\nu_2}, (z-\tau)^{\nu_1},$$

где z_0 – некоторая точка в области D^+ , ξ, τ – точки контура, $0 < \nu_1 < 1$, $0 < \nu_2 < 1$. Точки разветвления этих функций будут соответственно z_0, ∞ и ξ, τ, ∞ .

Проведём в плоскости Z разрез из точки z_0 через точки ξ, τ до бесконечности. В разрезанной таким образом плоскости обе функции будут однозначными, причём разрез будет для них линией разрыва. Условимся, что участок разреза $z_0 t_1$ лежит целиком в D^+ , и рассмотрим функции

$$\omega^+(z) = (z-\tau)^{\nu_1} (z-\xi)^{\nu_2}, \quad \omega^-(z) = \left(\frac{z-\tau}{z-z_0} \right)^{\nu_1} \left(\frac{z-\xi}{z-z_0} \right)^{\nu_2}.$$

При выбранном способе разреза функция $\omega^+(z)$ будет аналитической в D^+ , а $\omega^-(z)$ в D^- . На контуре обе функции будут непрерывны.

Вводя новые функции

$$\varphi_1^+(z) = (z-\tau)^{\nu_1} (z-\xi)^{\nu_2} \varphi_2^+(z), \quad \varphi_1^-(z) = \left(\frac{z-\tau}{z-z_0} \right)^{\nu_1} \left(\frac{z-\xi}{z-z_0} \right)^{\nu_2} \varphi_2^-(z),$$

краевое условие (13) приведём к виду

$$\begin{aligned}
\varphi_2^+(z) &= (t-z_0)^{-\nu_1} (t-z_0)^{-\nu_2} t^{-S_2} a_2(t) \varphi_2^-(t) + \\
&+ (t-z_0)^{-\nu_1} (t-z_0)^{-\nu_2} (t-\xi)^{S_2(r-1)} b_2(t) \cdot \\
&[t^{-S} e^{-2i\theta S_2} e - 4i(Q_1\nu_1 - Q_2\nu_2)(z-z_0)^{-\nu_1-\nu_2} \cdot \overline{\varphi_2^-(t)}] + \\
&+ (t-\tau)^{-\nu_1} (t-\xi)^{-\nu_2} c_1(t).
\end{aligned} \tag{14}$$

Нетрудно вычислить индекс коэффициента

$$a_3(t) = (t-z_0)^{-\nu_1} (t-z_0)^{-\nu_2} t^{-S_2} a_2(t).$$

Взяв приращение аргумента $(t-z_0)^{-\nu_1} (t-z_0)^{-\nu_2} t^{-S_2} a_2(t)$ по всему контуру Γ как сумму приращения аргумента по участкам между точками разрыва и учитывая, что каждый бином $(t-z_0)^{-\nu_1}$, $(t-z_0)^{-\nu_2}$ удовлетворяет в точке τ , ξ условию

$$\frac{(\tau-0-z_0)^{\nu_1}}{(\tau+0-z_0)^{\nu_1}} = e^{2\pi i\nu_1}, \quad \frac{(\xi-0-z_0)^{\nu_2}}{(\xi+0-z_0)^{\nu_2}} = e^{2\pi i\nu_2},$$

получим

$$\begin{aligned}
Ind a_3(t) &= \frac{1}{2\pi i} \{ \ln a_3(t) \}_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{a_2(\tau-0)(\tau-0-z_0)^{-\nu_1}}{a_2(\tau+0)(\tau+0-z_0)^{-\nu_1}} \right] + \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{a_2(\xi-0)(\xi-0-z_0)^{-\nu_2}}{a_2(\xi+0)(\xi+0-z_0)^{-\nu_2}} \right] = \alpha_1 + \alpha_2.
\end{aligned}$$

Последнюю величину будем называть индексом исходной задачи (8).

Так как в задаче (14) все коэффициенты являются непрерывными функциями, поэтому для неё справедлива доказанная теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М., 1977, 640 с.
2. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М., 1968, 511с.
3. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. – Душанбе, 1963, 183 с.
4. Усманов Н.У. Обобщённое характеристическое сингулярное интегральное уравнение в особом случае. – Изв. АН ТаджССР. Отд. физ.-мат., хим. и геол.н., 1978, №1, с.11-19.

Н.Н.УСМОНЗОДА

ДАР БОРАИ ЯК СИНФИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРАЛИИ СИНГУЛЯРИИ ҒАЙРИХАТӢ

Донишгоҳи молия ва иқтисоди Тоҷикистон

Дар мақола як синфи муодилаҳои интегралӣ сингулярии ғайрихатӣ тадқиқ карда мешавад. Аз тадқиқот чунин хулоса бармеояд: шумораи ҳалҳои масъала дар синфи функсияҳои дар контур маҳдуд, аз нулҳои коэффисиент тағйир намеёбад, аммо ба суммаи қутбҳо кам мешавад. Дар ҳолати хусусӣ, агар индекс аз суммаи қутбҳо кам бошад, масъала ҳалнашаванда мебошад.

Калимаҳои калидӣ: муодилаи интегралӣ, шарти Гёлдер, ҳолати сингулярӣ, функсияи канонокӣ, интегралҳои намуди Коши, бисёрраъзгии интерполясионӣ, нол, қутб.

N.N.USMONZODA

ABOUT ONE CLASS OF NONLINEAR SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS

The Tajik state of financial-economic university

In the paper a class of nonlinear singular integral equations is studied. It is established that number of solutions of the integral equation in the class of functions, limited on a contour, do not change due to presence of zeroes of coefficients of the integral equation and decrease by total order of all pole.

Key words: integral equations, condition of Hölderr, singular case, canonical function, Cauchi type integral, interpolation polynomial, zero and pole.

УДК 531+539.2

Т.А.ТОШОВ, Х.Х.МУМИНОВ, А.Т.МАКСУДОВ*

**К ТЕОРИИ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН В $S=1$ ФЕРРОМАГНЕТИКАХ
С СИЛЬНОЙ ОДНОИОННОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ**

Физико-технический институт им. С.У.Умарова АН Республики Таджикистан,

**Худжандский научный центр АН Республики Таджикистан*

Поступила в редакцию 25.12.2017 г.

Проведены исследования негејзенберговских ферромагнетиков со спином $S=1$ при наличии связи с фононной подсистемой посредством модуляции обменного интеграла. Проведены исследования основного состояния и получено солитонное решение системы уравнений, описывающих связанную спин-квадрупольную волну и волну деформации в $S=1$ ферромагнетиках с одноионной анизотропией типа «легкая плоскость».

Ключевые слова: негејзенберговский ферромагнетик, одноионная анизотропия, спин-фононное взаимодействие, магнитоупругие волны, спин-квадрупольные волны.

Одним из актуальных вопросов теории ферромагнетизма является изучение связи магнотных возбуждений магнитных систем с высокими значениями спина с фононными возбуждениями, иначе говоря, с упругими колебаниями ионов в кристаллические решетки магнетика. Наиболее слабо изученными остаются механизмы связи спин-квадрупольной подсистемы с фононной и их вклад в динамику нелинейных волн. Следует отметить, что ранее нелинейные спин-фононные возбуждения в ферромагнетиках рассматривались в работах Х.Х.Муминова, В.К.Федянина, Р.Марзакулова и других авторов в случае $S=1/2$ спиновых систем [1,2]. В частности, для описания нелинейных магнитоупругих волн было получено уравнение Ландау – Лифшица для волн намагниченности, связанное с уравнением Буссинеска для нелинейного звука [1].

Как было показано ранее [1], в линейном приближении по звуку уравнение Буссинеска можно свести к волновому уравнению.

Адрес для корреспонденции: Муминов Хикмат Халимович. 734069, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/1, Физико-технический институт АН РТ. E-mail: muminov.khikmat@mail.ru

В предыдущей работе авторов [3] был рассмотрен квазиодномерный ферромагнетик, то есть цепочка спинов $S=1$ при наличии обменного взаимодействия, в котором проводился последовательный учет колебаний магнитных ионов вблизи их положения равновесия в магнитной кристаллической решетке. Была получена система уравнений, состоящая из обобщенного уравнения Ландау-Лифшица, описывающего спин-квадрупольные волны, связанного с волновым уравнением для звука в линейном приближении. При этом было выявлено, что вследствие отсутствия одноионного взаимодействия квадрупольная динамика остается замороженной.

В данной работе квадрупольные возбуждения учитываются введением одноионной анизотропии в гамильтониан, рассмотренный ранее в работе [1]. Как известно, именно наличие одноионной анизотропии в негеизенберговских ферромагнетиках приводит к возбуждению квадрупольных степеней свободы спиновой динамики, в отличие от систем с исключительно обменной анизотропией.

Исследование связи между спин-квадрупольной и фононной подсистемами в нелинейных возбуждениях в ферромагнетиках с высоким значением спина при наличии одноионной анизотропии представляет особый интерес именно вследствие возбуждения квадрупольных степеней свободы спиновой динамики.

Рассмотрим гамильтониан одномерного негеизенберговского ферромагнетика при наличии как обменной, в приближении ближайших соседей, так и одноионной анизотропии следующего вида

$$\hat{H} = -J_0 \sum_j \left\{ \hat{S}_j^x \hat{S}_{j+1}^x + \delta \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+1}^z + \tilde{\delta} \hat{S}_j^z \hat{S}_j^z \right\}, \quad (1)$$

здесь \hat{S}_j^n – операторы $S=1$ спина, представляющие собой операторы группы $SU(3)$, j – номер узла кристаллической решетки, $n = x, y, z$, $\delta = J_3 / J_0 \ll 1$ – постоянная обменной анизотропии, $\tilde{\delta} = \frac{\tilde{J}_3}{J_0}$ – постоянная одноионной анизотропии, J_0 – обменный интеграл.

Как видно из формулы (1), взаимодействия между магнитными ионами, которые чувствуют относительные их смещения, могут быть учтены только лишь обменным членом в приближении даже ближайших соседей, поскольку одноионная анизотропия учитывает анизотропию в одном магнитном ионе и модуляция вследствие колебаний узлов кристаллической решетки в постоянной одноионной анизотропии $\tilde{\delta}$ отсутствует.

Таким образом мы видим, что в моделях вида (1) фононная подсистема связана только с обменной частью гамильтониана и, очевидно, что непосредственная связь между квадрупольной и фононной подсистемами возможна только лишь при наличии квадрупольного обмена, то есть при учете взаимодействия между квадрупольными моментами, связанными с отдельными магнитными ионами, то есть при наличии в гамильтониане

членов вида $J_{i,i+1}^{mn} \hat{Q}_i^m \hat{Q}_{i+1}^n$ где \hat{Q}_i^m – квадрупольные моменты, $J_{i,i+1}^{mn}$ интеграл одноионного (квадрупольного) обмена, m, n принимают значения x, y, z , а i – номер узла кристаллической решетки.

Однако в нашем исследовании мы ограничимся гамильтонианом вида (1), где связь между спин-квадрупольной и фононной подсистемами обусловлена только спиновым обменом. Причем, для простоты будем полагать обменную анизотропию слабой, $|\delta| \ll |\tilde{\delta}|$, то есть обменная анизотропия вносит вклад только во взаимодействие между спиновой и фононной подсистемами, не влияя на основные состояния магнетика. Стандартная процедура перехода к квазиклассическому описанию с помощью обобщенных когерентных состояний в параметризации действительных функций, построенных на операторах группы SU(3), (см.[4,5]), приводит к следующему классическому гамильтониану

$$\hat{H} = H_{s-q} + H_{sp} + H_p, \quad (2)$$

где спин-квадрупольный гамильтониан имеет следующий вид

$$H_{s-q} = s^2 J_0 \int \frac{dx}{a_0} \left[\begin{array}{l} \cos^2 2g + \delta \cos^2 \theta \cos^2 2g + \frac{\tilde{\delta}}{2} (\cos^2 \theta + \sin^2 g \cos 2\gamma \sin^2 \theta) - \\ - \frac{a_0^2}{2} ((\theta_x^2 + \varphi_x^2 \sin^2 \theta) \cos^2 2g + 4g_x^2 \sin^2 2g) \end{array} \right], \quad (3.a)$$

здесь a_0 – период кристаллической решетки, θ и φ – Эйлеравы углы ротационной динамики вектора классического спина, g и γ – параметры квадрупольной динамики (см. [4]), s – значение спина, J_0 – обменный интеграл гамильтониан фононной подсистемы имеет вид

$$H_p = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{a_0} \left(\frac{p^2}{m} + a_0^2 k y_x^2 \right), \quad (3.б)$$

где p и m – масса и импульс магнитного иона, k – коэффициент упругости Гука, гамильтониан спин-фононного взаимодействия имеет вид

$$H_{sp} = -s^2 J^0 \chi \int \frac{dx}{a_0} y_x (S^z)^2. \quad (3.в)$$

В выражении (3.в) использовано следующее разложение в ряд Тейлора вследствие малости смещения магнитных ионов вблизи положения равновесия (узлов кристаллической решетки)

$$J^z = J_0 + J^3 |y_{j+1} - y_j| = J_0 + \chi J_0 \frac{|y_{j+1} - y_j|}{a_0},$$

где $\chi = \overline{J^3} a_0 / J_0$ ($\gamma = 2\chi / a_0^2$) безразмерная константа спин-фононного взаимодействия.

Для получения уравнений, описывающих магнитоупругие волны, используем следующие уравнения динамики на группе SU(3) для спин-квадрупольной подсистемы (см. напр., [4])

$$\hbar \varphi_t = -\frac{1}{\cos 2g \sin \theta} \frac{\delta H}{\delta \theta}, \quad (4.a)$$

$$\hbar \theta_t = \frac{1}{\cos 2g \sin \theta} \left(\frac{\delta H}{\delta \varphi} - \cos \theta \frac{\delta H}{\delta \gamma} \right), \quad (4.б)$$

$$\hbar g_t = \frac{1}{2 \sin 2g} \frac{\delta H}{\delta \gamma}, \quad (4.в)$$

$$\hbar \gamma_t = -\frac{1}{2 \sin 2g} \frac{\delta H}{\delta g} + \frac{\cos \theta}{\cos 2g \sin \theta} \frac{\delta H}{\delta \theta}, \quad (4.г)$$

которые дополним следующими очевидными уравнениями Гамильтона

$$y_t = -\frac{\delta H}{\delta p} = -\frac{p}{m}, \quad (4.д)$$

$$p_t = -\frac{\delta H}{\delta y}, \quad (4.е)$$

Варьируя гамильтониан (2) с учетом выражений (3) и используя уравнения движения (4) получаем следующую систему уравнений

$$\frac{1}{\omega_0} \varphi_t = \tilde{\delta} \cos \theta (\sec 2g - \cos 2g + \tan 2g) + a_0^2 \cos 2g (\theta_{xx} \operatorname{cosec} \theta + \varphi_x^2 \cos \theta), \quad (5.a)$$

$$\frac{1}{\omega_0} \theta_t = \frac{\tilde{\delta}}{2} \sin 2\theta \sin 2\gamma \tan 2g - a_0^2 \varphi_{xx} \cos 2g \sin \theta, \quad (5.б)$$

$$\frac{1}{\omega_0} g_t = \frac{\tilde{\delta}}{2} \sin 2g \sin^2 \theta, \quad (5.в)$$

$$\frac{1}{\omega_0} \gamma_t = 4 \cos 2g - \tilde{\delta} \left(\cos 2\gamma (\cot 4g - \cos 2\theta \operatorname{cosec} 4g) + \cos^2 \theta \sec 2g \right) +$$

$$+ a_0^2 \left(\cos 2g \left(8g_x^2 - 2\theta_x^2 + \frac{1}{2} \varphi_x^2 (-3 + \cos 2g) - \theta_{xx} \cot \theta \right) + 4g_{xx} \sin 2g \right) 4 \sin g, \quad (5.г)$$

$$u_{tt} - \frac{ka_0^2}{m} u_{xx} - \chi \frac{s^2 J^0}{m} (\cos^2 \theta)_{xx} = 0, \quad (5.д)$$

где $u = y_x$, а нижние индексы t и x обозначают частные производные по соответствующей переменной.

Система уравнений (5) имеет наиболее общий вид, независимо от типа анизотропии. Однако для изучения конкретных физических систем необходимо конкретизировать основное состояние системы, которое определяется типом анизотропии и вычисляется минимизацией классического гамильтониана.

Рассмотрим отдельно случаи одноионной анизотропии типа оси легкого намагничивания ($\tilde{\delta} > 0$) и плоскости легкого намагничивания ($\tilde{\delta} < 0$). Обменная анизотропия вследствие малости ($|\delta| \ll |\tilde{\delta}|$) не влияет на основное состояние и играет роль только в связи с фононной подсистемой

Для исследования анизотропных магнетиков нам нужно найти классическое вакуумное состояние, то есть минимум гамильтониана (3). Для этого в гамильтониане (3) учтем только бездеривативную часть. Тогда гамильтониан (3) примет следующий вид:

$$H_0 = s^2 J^0 \int \frac{dx}{a_0} \left[\cos^2 2g + \tilde{\delta} \cos^2 \theta \cos^2 2g + \frac{\tilde{\delta}}{2} (\cos^2 \theta + \sin^2 g \cos 2\gamma \sin^2 \theta) \right] \quad (6)$$

а) в случае легкой оси ($\tilde{\delta} > 0$) видно, что гамильтониан (6) достигает минимума при $g = 0$. По параметру θ вакуумное состояние дважды вырождено: гамильтониан достигает минимума при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. Ротационный параметр γ квадрупольного момента может быть произвольным. Из этого следует, что вакуум в случае легкоосной модели достигается при

$$g = 0, \theta = 0 \text{ или } \theta = \pi,$$

тогда как квадрупольный момент $q = \sin 2g = 0$, а вектор спина ориентирован вдоль оси OZ

$$\hat{S}^+ = \hat{S}^- = 0, \hat{S}^z = 1 \text{ или } \hat{S}^z = -1.$$

Как видно, вакуум выбранной нами модели совпадает с классическими вакуумами когерентных состояний групп SU (2) и SU (3).

б) в случае легкой плоскости ($\tilde{\delta} < 0$) при варьировании по всем параметрам гамильтониана (6) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -4\cos 2g \sin 2g + \delta \cos 2g \cos 2\gamma \sin^2 \theta &= 0 \\ -\cos \theta \sin \theta + \sin 2g \cos 2\gamma \sin \theta \cos \theta &= 0 \\ \sin 2g \sin 2\gamma \sin^2 \theta &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что минимум гамильтониана (6) достигается при

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \sin 2g_0 = \frac{|\tilde{\delta}|}{4}, \quad |\tilde{\delta}| < 4. \quad (7)$$

Как и в случае легкой оси намагничивания, ротационный параметр γ может быть произвольным. Квадрупольный момент $q = \sin 2g$, в отличие от случая легкой оси, оказывается не равным нулю (7). При этом средние значения вектора спина равны

$$\hat{S}^+ = \hat{S}^- = e^{i\varphi} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{16}}, \quad \hat{S}^z = 0, \quad (8)$$

а гамильтониан принимает значение

$$H_0 = -\frac{J_0}{a_0} \left(1 - \frac{3\tilde{\delta}^2}{16} \right).$$

Как видно, наличие одноионной анизотропии и возбуждение квадрупольной динамики в случае легкой плоскости приводит к тому, что классические вакуумы когерентных состояний в группах $SU(2)$ и $SU(3)$ не совпадают. Даже в основном состоянии длина вектора классического спина оказывается сокращенной

Перейдем теперь к исследованию нелинейных возбуждений в легкоплоскостном магнетике.

Проведем разложение в ряд уравнения системы (5) вблизи основного состояния (7)

$$\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2} + \theta, \quad (9.a)$$

$$\tilde{g} = g_0 + g \quad (9.б)$$

и, взяв производные по времени в уравнениях (5.б) и (5.в), после преобразований получим

$$\frac{1}{\omega_0} \dot{\varphi}_i = \tilde{\delta} (\sec g_0 + \tan g_0) \tilde{\theta} + a_0^2 \cos g_0 \tilde{\theta}, \quad (10.a)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} \tilde{\theta}_{tt} = -a_0^2 \cos g_0 \left(\tilde{\delta} (\sec g_0 + \tan g_0) \tilde{\theta}_{xx} + a_0^2 \cos g_0 \tilde{\theta}_{xxx} \right), \quad (10.6)$$

$$-\frac{2}{\delta \omega_0^2} \tilde{g}_{tt} = -2 \left(2 \sin g_0 + \frac{\tilde{\delta}}{2 \cos g_0} \right) g + 4 \tilde{g}_{xx} \sin g_0 a_0^2, \quad (10.в)$$

$$\frac{1}{\omega_0} \gamma_t = -2 \left(2 \sin g_0 + \frac{\tilde{\delta}}{2 \cos g_0} \right) g + 4 g_{xx} \sin g_0 a_0^2, \quad (10.г)$$

$$u_{tt} - \frac{ka_0^2}{m} u_{xx} - \chi \frac{s^2 J^0}{m} (\cos^2 \theta)_{xx} = 0. \quad (10.д)$$

Ищем решения системы (10) в виде бегущей волны, полагая $\eta = x - \mathcal{G}t$. Уравнение (10.б) примет вид

$$\left(\frac{v^2}{\omega_0^2} + \delta a_0^2 (1 + \sin g) \right) \tilde{\theta}_\eta + (a_0^2 \cos 2g)^2 \tilde{\theta}_{\eta\eta\eta} = 0 \quad (11)$$

Уравнение (10.д) после интегрирования, с учетом граничных условий дает связь между фоновой и спин-квадрупольной системами

$$u = \chi \frac{s^2 J^0}{ka_0^2} \frac{\sin^2 \theta}{v^2 - v_s^2}, \quad (12)$$

где $\mathcal{G}_s = a_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$ – скорость звука.

При малых $\tilde{\theta}$ в линейном приближении из уравнения (11) имеем

$$\tilde{\theta} = A \sin \left((x - \mathcal{G}t) \left(\frac{(a_0^2 \cos g)^2}{\left(\frac{\mathcal{G}^2}{\omega_0^2} + \delta a_0^2 (1 + \sin g) \right)} \right)^{1/2} \right), \quad (13)$$

где A – постоянная.

Учитывая малость $\tilde{\theta}$ для деформационной волны, получим

$$u = \chi \frac{s^2 J^0}{ka_0^2} \frac{A^2}{v^2 - v_s^2} \sin^2 \left((x - \mathcal{G}t) \left(\frac{(a_0^2 \cos g)^2}{\left(\frac{\mathcal{G}^2}{\omega_0^2} + \delta a_0^2 (1 + \sin g) \right)} \right)^{1/2} \right). \quad (14)$$

Уравнение (10.в) полученной системы уравнений (10) является нелинейным уравнением Клейна-Гордона для квадрупольных возбуждений. Для данной квадрупольной волны солитонные решения можно найти в виде так называемых хиломорфных солитонов. Эти солитоны являются нетопологическими солитонами, так как их граничные значения на бесконечностях с топологической точки зрения одинаковы и выходят на вакуум g_0 . Нелинейное уравнение Клейна-Гордона (10.в) можно переписать в следующем виде

$$g_{tt} = \alpha g_{xx} + \beta g, \quad (15)$$

где

$$\alpha = -\delta\omega_0 \sin g a_0^2, \quad \beta = \frac{\delta\omega_0^2 (4 \sin 2g + \tilde{\delta})}{2 \cos g}$$

Аналитическое решение полученного выше уравнения Клейна-Гордона (15) имеет следующий вид:

$$g(x, t) = B \sinh \left[(x - \mathcal{G}t) \sqrt{\frac{-\omega_0 (4 \sin 2g + \delta)}{\cos g (\mathcal{G}^2 + \delta\omega_0 \sin g a_0^2)}} \right], \quad (16)$$

где B – постоянная.

Таким образом, солитонное решение (9) в слабонелинейном приближении описывает связанную спин-квадрупольную волну (13), (16) с волной деформации (14) в $S=I$ ферромагнетиках с сильной одноионной анизотропией типа «легкая плоскость».

Как видно, непосредственная связь между квадрупольной и фононной подсистемами отсутствует, поскольку одноионная анизотропия не может характеризовать смещения магнитных ионов относительно положения равновесия. Эта связь опосредована спиновой системой. Солитонное решение для квадрупольной волны (16) получено в слабонелинейном приближении, однако даже этой нелинейности оказывается достаточно для реализации магнитного солитона.

Полученное решение (9), (13), (14), (16) представляет собой сложный объект, состоящий из независимого квадрупольного солитона и связанной с ним спиновой (магнитной) нелинейной волны и волны деформации, то есть по аналогии с магнитным солитоном его можно назвать спин-квадрупольным поляроном. Из решения (14) для фононной подсистемы видно, что при скоростях движения полярона, близких к скорости звука, возможно явление резонанса, то есть перекачки энергии из квадрупольной подсистемы посредством магнитной в фононную.

ЛИТЕРАТУРА

1. Muminov Kh.Kh., Fedyanin V.K. Magnetoelastic Interaction in the Heisenberg Magnet Model. – Physica Scripta 2000, v. 62, № 1, pp. 23-30.

2. Мырзакулов Р. – Модель бозе-газа с внутренней симметрией и их связь со спиновыми и псевдоспиновыми моделями: Автореф. дисс... к.ф.-м.н. - М., 1988.
3. Муминов Х.Х., Максудов А.Т., Тошов Т.А. К теории магнитоупругих взаимодействий в ферромагнетиках с высокими значениями спина при учете обменной анизотропии. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2017, №2 (167), с.62-73.
4. Muminov Kh. Kh., Yousefi Y. Semi-classical description of anisotropic magnets for spin $S=1$. – Advances in Condensed Matter Physics, 2012, v. 2012, pp. 1-3.
5. Yousefi Y., Muminov Kh. Kh. Semi-classical description of anisotropic Non-Heisenberg magnets for spin $S=1$ and linear quadrupole excitation dynamics. – Iranian Modern Physics, 2013, №1, pp. 17-25.

Т.А.ТОШОВ, Х.Х.МУМИНОВ, А.Т.МАКСУДОВ*

ОИД БА НАЗАРИЯИ МАВҶҶОИ МАГНИТОЧАНДИРӢ ДАР ФЕРРОМАГНЕТИКҶОИ $S = 1$ БО АНИЗОТРОПИЯИ ҚАВИИ ЯК-ИОНӢ

Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,

**Маркази илмии Хуҷанди Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Тадқиқоти ферромагнетикҳои бо спина $S = 1$ бо мавҷудияти алоқа бо зерсистемаи фонони тавассути модулятсияи интегралҳои ивазгузаронида шудааст. Ҳолати асосӣ ва ҳалли солитонии системаи муодилаҳои мавҷҳои бо ҳам алоқаманди спин-квадруполӣ ва деформатсионӣ ифодакунандаро дар ферромагнетикҳои бо спина $S = 1$ бо анизотропияи як-ионии навъи “сафи сабук” ҳосил карда шуданд.

Калимаҳои калидӣ: ферромагнетики ғайриҳейзенберги, анизотропияи як-иона, ҳамтаъсири спин-фононӣ, мавҷҳои магнитоҷандирӣ, мавҷҳои спин-квадруполӣ.

T.A.TOSHOV, Kh.Kh.MUMINOV, A.T.MAKSUDOV*

TO THE THEORY OF MAGNETOELASTIC WAVES IN $S = 1$ FERROMAGNETS WITH STRONG SINGLE-ION ANISOTROPY

S.U.Umarov Physical-Technical Institute, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,

**Khujand Scientific Center of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

Investigations of non-Heisenberg ferromagnets with spin $S = 1$ were carried out in the presence of a connection with the phonon subsystem by modulating the exchange integral. The ground state is found and a soliton solution is obtained for the system of equations describing the coupled spin-quadrupole wave with the deformation one in $S = 1$ ferromagnets with single-ion anisotropy of the "easy plane" type.

Key words: non-Heisenberg ferromagnet, single-ion anisotropy, spin-phonon interaction, magnetoelastic waves, spin-quadrupole waves.

УДК 534.16:535.341

Т.Х.САЛИХОВ, Н.МЕЛИКХУДЖА, А.МАХМАЛАТИФ

**ВКЛАД ПОГЛОЩЕНИЯ ПОДЛОЖКИ НА ФОРМИРОВАНИЕ
НЕЛИНЕЙНОГО ФОТОАКУСТИЧЕСКОГО
ОТКЛИКА: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ**

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 28.05.2018 г.

Предложена математическая модель теории генерации нелинейного фотоакустического (ФА) отклика для случая, когда подложка, наряду с образцом, является поглощающей. Исходили из системы нелинейных уравнений теплопроводности для газового слоя, образца и подложки. Приращения температуры представлены в виде суммы локально-равновесной и колебательной частей, а колебательная, в свою очередь, складывается из линейной и нелинейной составляющих. Получена необходимая система дифференциальных уравнений для основной и второй гармоники нелинейного ФА-сигнала. Подробно исследованы особенности формирования температурного поля в ФА-камере.

Ключевые слова: фотоакустика, тепловая нелинейность, оптоакустика.

Различные аспекты теории возбуждения нелинейного фотоакустического (ФА) отклика для одно- и двухслойных образцов, когда подложка является прозрачной, подробно исследованы в [1-8]. Между тем, очевидно, что при выполнении условия $\beta_s l_s < 1$, где β_s и l_s оптический коэффициент поглощения и толщина образца соответственно, определенная часть светового потока падает на подложку. С другой стороны, если подложка для падающего луча является поглощающей с оптическим коэффициентом поглощения β_b , тогда в ней, также как в образце, генерируется колебание температуры, которое по диффузионному закону передается посредством образца газовому слою и, в результате, появляется дополнительный вклад в ФА-сигнал, детектируемый микрофоном. В [9,10] была

Адрес для корреспонденции: Салихов Тагаймурод Хаитович, Меликхуджа Навруз. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: tsalikhov@mail.ru, mnavrutz93@mail.ru.

предложен линейная теория этого вклада для одно- и двухслойных образцов. Случай, когда однослойный образец является прозрачным, рассмотрен в [11].

Математическая модель задачи. Исходим из следующей системы нелинейных уравнений теплопроводности для ФА-камеры, состоящей из газового слоя (g), образца (s) и поглощающей подложки (b):

$$C_{pg}(T_g) \frac{\partial T'_g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_g(T_g) \frac{\partial T'_g}{\partial x}), \quad 0 \leq x \leq l_g \quad (1)$$

$$C_{ps}(T_s) \frac{\partial T'_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_s(T_s) \frac{\partial T'_s}{\partial x}) + 0.5 A_s(T) \beta_s I_0 (1 + e^{i\omega t}) \exp(\beta_s x), \quad -l \leq x \leq 0 \quad (2)$$

$$C_{pb}(T_b) \frac{\partial T'_b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_b(T_b) \frac{\partial T'_b}{\partial x}) + \frac{I_1 \beta_b A_b(T) e^{\beta_b(x+l_s)}}{2} (1 + e^{i\omega t}), \quad -(l_b + l) \leq x \leq -l. \quad (3)$$

В (1)-(3) величины C_{pi} , κ_{pi} , A_i , R_i - теплоемкость единицы объема, коэффициент теплопроводности, поглощательная способность и коэффициент отражения соответствующих слоев, а $I_1 = (1 - R_s) I_0 \exp(-\beta_s l_s)$.

Шестью граничными условиями, необходимыми для решения системы (1)-(3), являются равенства

$$T'_g(t, l_g) = 0; \quad T'_b[t, -(l_b + l_s)] = 0; \quad T'_g(t, 0) = T'_s(t, 0); \quad T'_s(t, -l_s) = T'_b(t, -l_s),$$

$$[k_s(T_s) \frac{dT'_s}{dx}]_{x=0} = [k_g(T_g) \frac{dT'_g}{dx}]_{x=0}; \quad [k_s(T'_s) \frac{dT'_{s(2)}}{dx}]_{x=-l} = [k_b(T'_b) \frac{dT'_b}{dx}]_{x=-l},$$

соответствующие условиям непрерывности температур и потоков тепла на границах газ-образец, образец-подложка и подложка-газ.

Система нелинейных уравнений теплопроводности (1)-(3) совместно с граничными условиями являются исходными для исследования особенностей возбуждения нелинейного ФА-отклика, когда подложка в ФА-камере является поглощающей.

Температурную зависимость величин κ_{pi} , и A_i примем в линейном виде $\kappa_i(T) = \kappa_i^{(0)} (1 + \delta_{2i} T'_i)$, $A_i(T) = A_i^{(0)} (1 + \delta_{3i} T'_s)$, где δ_{2i} и δ_{3i} являются термическими коэффициентами этих величин. Также примем во внимание тот факт, что величина A_i характеризует оптические свойства поверхности образца. Представим возмущение температуры в виде суммы локально-равновесной $T_{0i}(x)$, линейных $\Phi_i(x, t)$ и нелинейных акустических частей $\Phi_{Ni}(x, t)$, то есть в виде

$$T'_i(x, t) = T_{0i}(x) + \Phi_{Li}(x, t) + \Phi_{1Ni}(x, t) + \Phi_{2Ni}(x, t). \quad (4)$$

Тогда система уравнений (1)-(3) распадается на следующие три системы уравнений для $T_{0i}(x)$, $\Phi_{1Ni}(x,t)$ и $\Phi_{2Ni}(x,t)$:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dT_{0g}(x)}{dx} + 0.5\delta_{2g} \frac{dT_{0g}^2(x)}{dx} \right] = 0, \quad 0 \leq x \leq l_g, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{dT_{0s}(x)}{dx} + 0.5\delta_{2s} \frac{T_{0s}^2(x)}{dx} \right] + \frac{0.5\beta_s A_s^{(0)} I_0 \delta_{3s} T_{0s}(0) e^{\beta x}}{k_s^{(0)}} = \\ = -\frac{0.5\beta_s A_s^{(0)} I_0 e^{\beta x}}{k_s^{(0)}}, \quad -l \leq x \leq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{dT_{0b}(x)}{dx} + 0.5\delta_{2b} \frac{dT_{0b}^2(x)}{dx} \right] + 0.5I_1 \delta_{3b} \beta_b A_b^{(0)} T_{0s}(0) e^{\beta_b(x+l_s)} = 0.5\beta_b A_b^{(0)} I_1 e^{\beta_b(x+l_s)}, \\ -(l+l_b) \leq x \leq -l, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1Ng}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_{i0}} \frac{\partial \Phi_{1Ng}}{\partial t} = -\left(\delta_{2g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1g}}{\chi_{g0}} \frac{\partial}{\partial t} \right) (T_{0g}(x) \Phi_{Lg}(x,t)), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_{1Ns}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_{s0}} \frac{\partial \Phi_{1Ns}}{\partial t} = -\left(\delta_{2s} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1s}}{\chi_{s0}} \frac{\partial}{\partial t} \right) (T_{0i}(x) \Phi_{Ls}(x,t)) - \\ - \frac{A^{(0)} \beta_s I_0 \delta_{3s}}{2} [T_{0s}(0) e^{i\omega t} + \Phi_L(0,t)] e^{\beta_s x} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_{1Nb}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_{i0}} \frac{\partial \Phi_{1Nb}}{\partial t} = -\left(\delta_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{1b}}{\chi_{b0}} \frac{\partial}{\partial t} \right) (T_{0b}(x) \Phi_{Lb}(x,t)) - \\ - \frac{A_b^{(0)} \beta_b I_1 \delta_{3b}}{2} [T_{0b}(-l) e^{i\omega t} + \Phi_{lb}(-l,t)] e^{\beta_b(x+l)} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2Ng}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2Ng}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\delta_{2g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_g}{\chi_g^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\Phi_{Lg}^2(x,t)), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_{2Ns}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_s^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2Ns}}{\partial t} = \\ = -\frac{1}{2} \left(\delta_{2s} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_s}{\chi_s^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\Phi_{Ls}(x,t))^2 - \frac{A_s^{(0)} \beta_s I_0 \delta_{3s}}{2} \Phi_L(0,t) e^{i\omega t} e^{\beta_s x} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Phi_{2Nb}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2Nb}}{\partial t} = \\ & = -\frac{1}{2} \left(\delta_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_b}{\chi_b^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\Phi_{Lb}^2(x, t)) - \frac{A_b^{(0)} \beta_b I_1 \delta_{3b}}{2} \Phi_b(-l, t) e^{i\omega t} e^{\beta_b(x+l)} \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что выражение для $\Phi_{Li}(x, t)$ в рассматриваемой геометрии ФА- эксперимента получено в [12].

Учитывая, что в правых частях уравнений (8)-(13) источники изменяются по гармоническому закону, представим временную зависимость колебательных частей возмущения температур в виде $\Phi_L(x, t) = \Phi_L(x, \omega) \exp(i\omega t)$. Тогда для функций $\Psi_{1i}(x, \omega) = \Phi_{1Ni}(x, \omega) + \delta_{2i} T_{0i}(x) \Phi_{Li}(x, \omega)$, $\Psi_{2i}(t, \omega) = \Phi_{2Ni}(\omega, x) + 0,5 \delta_{2i} \Phi_{Li}^2(\omega, x)$ получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2 \Psi_{1g}}{dx^2} - \sigma_g^2 \Psi_{1g} = \sigma_g^2 (\delta_g - \delta_{2g}) T_{0g}(x) \Phi_{Lg}(x, \omega), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Psi_{1s}}{dx^2} - \sigma_s^2 \Psi_{1s} = \\ & = \sigma_s^2 (\delta_s - \delta_{2s}) T_{0s}(x) \Phi_{Ls}(x, \omega) - \frac{A_s^{(0)} \beta_s I_0 \delta_{3s}}{2} [T_{0s}(0) + \Phi_{Ls}(0, \omega)] e^{\beta_s x} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Psi_{1b}}{dx^2} - \sigma_b^2 \Psi_{1b} = \sigma_b^2 (\delta_b - \delta_{2b}) T_{0b}(x) \Phi_{Lb}(x, \omega) - \\ & - \frac{A_b^{(0)} \beta_b I_1 \delta_{3b}}{2} [T_{0b}(-l) e^{i\omega t} + \Phi_{1b}(-l, t)] e^{\beta_b(x+l)} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{d^2 \Psi_{2g}}{dx^2} - \sigma_{2g}^2 \Psi_{2g} = \frac{(\delta_g - \delta_{2g})}{2} \sigma_{2g}^2 \Phi_{Lg}^2(\omega, x), \quad (17)$$

$$\frac{d^2 \Psi_{2s}}{dx^2} - \sigma_{2s}^2 \Psi_{2s} = \frac{(\delta_s - \delta_{2s})}{2} \sigma_{2s}^2 \Phi_{Ls}^2(\omega, x) - 0,5 A_s^{(0)} \beta_s I_0 \delta_{3s} \Phi_{Ls}(0, \omega) e^{\beta_s x}, \quad (18)$$

$$\frac{d^2 \Psi_{2b}}{dx^2} - \sigma_{2b}^2 \Psi_{2b} = \frac{(\delta_b - \delta_{2b})}{2} \sigma_{2b}^2 \Phi_{Lb}^2(\omega, x) - 0,5 A_b^{(0)} \beta_b I_1 \delta_{3b} \Phi_{Lb}(0, \omega) e^{\beta_b(x+l)}, \quad (19)$$

Системы уравнений (5)-(7) и (14)-(19) представляют собой математическую модель рассматриваемой проблемы и позволяют детально исследовать вклад тепловой нелинейности оптических параметров подложки на характеристики возбуждаемого нелинейного ФА-сигнала.

В рамках настоящей работы будет оценен вклад тепловой нелинейности оптических параметров подложки в формирование температурного поля в ФА-камере.

Стационарное поле температуры. Система уравнения (5)-(7) позволяет найти стационарное поле температуры в ФА-камере. Для этого, как и в [1,2], введем безразмерные функции $g_i(x) = \delta_{2i} T_{0i}(x)$ и учтем, что $T_{0s}(0) = T_{0g} = \Theta_0$, $T_{0b}(-l) = T_{0s}(-l) = W_0$. Тогда решение системы (5)-(7) можно представить в следующем виде:

$$g_g(x) = [1 + \delta_{2g} \Theta_0 (2 + \delta_{2g} \Theta_0) (1 - \frac{x}{l_g})]^{1/2} - 1, \quad (20)$$

$$g_s(x) = \{1 + \delta_{2s} \Theta_0 (2 + \delta_{2s} \Theta_0) (1 + \frac{x}{l_s}) - \delta_{2s} W_0 (2 + \delta_{2s} W_0) \frac{x}{l_s} + \frac{A_s^{(0)} I_0 \delta_{2s} (1 + \delta_{3s} \Theta_0)}{\beta_s \kappa_s^{(0)}} [1 + \frac{x}{l_s} - (e^{\beta_s x} + E_0 \frac{x}{l_s})] \}^{1/2} - 1, \quad (21)$$

$$g_b(x) = \{1 + [\frac{A_b^{(0)} \delta_{2b} I_1 (1 + \delta_{3b} W_0)}{\beta_b \kappa_b^{(0)}} [1 + (1 - E_b) \frac{x+l}{l_b} - \exp(\beta_b (x+l_s))] + W_0 \delta_{2b} (2 + \delta_{2b} W_0) (1 + \frac{x+l_s}{l_b})] \}^{1/2} - 1, \quad (22)$$

где $E_0 = \exp(-\beta_s l_s)$, $E_b = \exp(-\beta_b l_b)$. Используя условия непрерывности потока тепла на границе газ-образец и образец-подложка, получим следующую систему нелинейных алгебраических уравнений для определения величин Θ_0 , W_0 :

$$\Theta_0^2 (\delta_{2s} + d \delta_{2g}) + \Theta_0 (2 + 2d + U \delta_{3s}) - W_0^2 \delta_{2s} - 2W_0 + U = 0 \quad (23)$$

$$\Theta_0^2 \delta_{2s} + \Theta_0 (2 + U_1 \delta_{3s}) - W_0^2 (\delta_{2s} + d_1 \delta_{2b}) - W_0 (2 + 2d_1 + U_2 \delta_{3b}) + U_3 = 0. \quad (24)$$

Здесь использованы обозначения

$$d = \frac{\kappa_g^{(0)} l_s}{\kappa_s^{(0)} l_g}, \quad d_1 = \frac{\kappa_b^{(0)} l_s}{\kappa_s^{(0)} l_b}, \quad U = \frac{A_s^{(0)} I_0}{\beta_s^{(0)} \kappa_s^{(0)}} (1 - E_0 - \beta_s^{(0)} l_s),$$

$$U_1 = \frac{A_s^{(0)} I_0}{\beta_s^{(0)} \kappa_s^{(0)}} [1 - E_0 (1 + \beta_s^{(0)} l_s)], \quad U_2 = \frac{A_b^{(0)} I_1}{\beta_b \kappa_b^{(0)}} [1 - E_b - \beta_b^{(0)} l_b], \quad U_3 = U_1 - U_2.$$

Выражения (20)-(22) совместно с полученной системой алгебраических уравнений (23)-(24) и является решением сформулированной задачи, то есть позволяет определить вклад температурной зависимости теплофизических и оптических параметров подложки на формирование температурного поля в ФА-камере. Очевидно, что нелинейная система уравнения (23)-(24) может быть решена только численно. Нами получены эти решения для случая, когда образец - кварцевое стекло, а роль подложки играет нержавеющей сталь. Результаты представлены на рис. Теплофизические и оптические параметры

имеют следующие значения: $l_g = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $l_b = 10^{-3} \text{ м}$, $l_s = 10^{-3} \text{ м}$, $\kappa_g^{(0)} = 0.025 \text{ Вт/мК}$, $\kappa_s^{(0)} = 1.36 \text{ Вт/мК}$, $\kappa_b^{(0)} = 14.9 \text{ Вт/мК}$, $A_s^{(0)} = 0.26$, $A_b^{(0)} = 0.72$, $\beta_s^{(0)} = 32 \text{ см}^{-1}$, $\beta_b^{(0)} = 16 \text{ см}^{-1}$, $\delta_{2g} = 2.39 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, $\delta_{2s} = 0.58 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, $\delta_{2b} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, $\delta_{3s} = -1,2 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, $\delta_{3b} = 0.19 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$.

Из рисунка видно, что при прозрачности образца также происходит нагрев ее облучаемой поверхности, что обусловлено переносом тепла из контактирующей поверхности образца и подложки и малостью коэффициента теплопроводности подложки. В дальнейшем поглощение образца приводит к росту величин Θ_0 и W_0 и постепенному переходу зависимости этих величин от интенсивности луча от линейности к нелинейности.

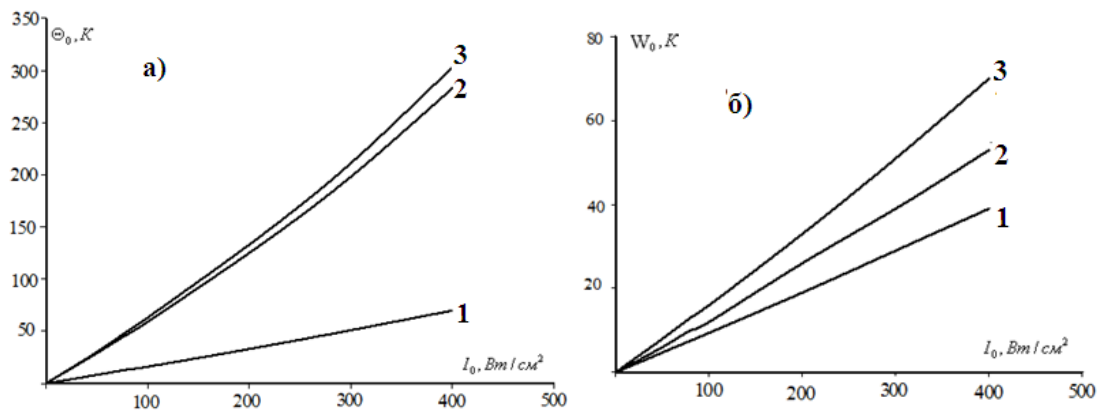


Рис. Зависимость величин Θ_0 (а) и W_0 (б) от интенсивности падающего луча для системы кварцевое стекло – нержавеющая сталь при $\beta_s^{(0)} = 0$, $\beta_b^{(0)} = 16 \text{ см}^{-1}$ (кривая 1), $\beta_s^{(0)} = 32 \text{ см}^{-1}$, $\beta_b^{(0)} = 0$ (кривая 2) и $\beta_s^{(0)} = 32 \text{ см}^{-1}$, $\beta_b^{(0)} = 16 \text{ см}^{-1}$ (кривая 3).

Таким образом, в настоящей работе предложена математическая модель теории генерации нелинейного ФА-сигнала для случая поглощающей подложки. Получены выражения, описывающие пространственное распределение поля температуры в ФА-камере и система нелинейных алгебраических уравнений для температур облучаемой поверхности образца и её обратной стороны (опорные температуры). Получено численное решение этой системы уравнений для случая, когда образцом является кварцевое стекло, а подложкой - нержавеющая сталь. Обнаружено, что с ростом интенсивности падающего луча зависимость опорных температур от интенсивности луча переходит от линейной к нелинейной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мадвалиев У., Салихов Т.Х., Шарифов Д.М., Хан Н.А. Нелинейный фотоакустический отклик непрозрачных сред при газомикрофонной регистрации сигнала. – ЖПС, 2006, т. 73, № 2, с. 170-176.
2. Мадвалиев У., Салихов Т.Х., Шарифов Д.М. Влияние тепловой нелинейности сильнопоглощающих сред на параметры фотоакустического сигнала при газомикрофонной регистрации. Основная и вторая гармоники. – ЖТФ, 2006, т. 76, № 6, с. 87-97.
3. Салихов Т.Х., Шарипов Д.М., Гуйчиев Х.Ш. Влияние температурной зависимости оптических величин на характеристики основной гармоники нелинейного фотоакустического сигнала твёрдых тел с объёмным поглощением луча. – ДАН РТ, 2011, т. 54, №6, с. 465-472.
4. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П. Теория генерации основной гармоники нелинейного фотоакустического сигнала двухслойными твердотельными образцами с оптически непрозрачным первым слоем. – ДАН РТ, 2012, т.55, № 2, с.132-140.
5. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П. Теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала двухслойными твердотельными образцами с оптически непрозрачным первым слоем. – ДАН РТ, 2011, т.54, № 9, с.737-745.
6. Салихов Т.Х. Тепловая нелинейность в оптоакустике (обзор). Ч III. Тепловая нелинейность в фотоакустике твердых тел. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2012, №2(147), с.51-63.
7. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала оптически неоднородными твердыми телами. – ДАН РТ, 2015, т.58, №9, с.804-812.
8. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Особенности возбуждения основной гармоники нелинейного фотоакустического отклика в оптически неоднородных твердотельных образцах. – Изв. АН РТ. Отд. физ.мат., хим., геол. и техн. н., 2017, № 1(166), с. 58-69.
9. Салихов Т.Х., Меликхужа Н., Ходжаев Ю.П. К теории генерации фотоакустического сигнала твердотельными образцами. – ДАН РТ, 2018, т.60, №11-12, с.410-417.
10. Салихов Т.Х., Меликхужа Н., Ходжаев Ю.П. Теории генерации фотоакустического сигнала двухслойными твердотельными образцами. – Вестник ТНУ. Сер. естеств. наук, 2018, №1, с.137-141.
11. Barros Melo W.L., Faria R.M. Photoacoustic procedure for measuring thermal parameters of transparent solids.– Appl. Phys. Lett., 1995, v.67, № 26, pp. 3892-3894.
12. Rosenzweig A., Gersho A. Theory of the photoacoustic effect with solids. – J. Appl. Phys., 1976, v.47, № 1, pp. 64-69.

Т.Х.САЛИХОВ, Н.МЕЛИКХУҶА, А.МАҲМАЛАТИФ

САҲМИ ФУРҶУБАРИИ ТАКЯГОҶ ДАР ТАШАКУЛИ ПАЖВОКИ ҒАЙРИХАТИИ ФОТОАКУСТИКӢ: МОДЕЛИ МАТЕМАТИКӢ ВА МАЙДОНИ ҲАРОРАТӢ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Моделҳои математикӣ ва ангезиши пажвоки ғайрихаттии фотоакустикӣ барои мавриди мисли намунаи фурӯбаранда будани такягоҳи пешниҳод карда шудааст. Аз системаи муодилаҳои ғайрихаттии гармигузаронӣ барои қабатҳои газӣ, намуна ва

такаягоҳ ибтидо карда шудааст. Афзоиши температура ба намуди суммаи қисмҳои мувозинатӣ ва лапанда ифода карда шуд, ки дар навбати худ ин қисм ба намуди суммаҳои қисмҳои хаттӣ ва ғайрихаттӣ тасвир карда шудааст. Барои гармоникаҳои асосӣ ва дуум муодилаҳои дифференсиалии зарурӣ ҳосил карда шуд. Ба таври муфассал хусусияти ташақули майдони ҳароратӣ омехта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: фотоакустика, ғайрихаттӣ ҳароратӣ, оптоакустика.

T.Kh.SALIKHOV, N.MELIKKHUZH, A.MAHMALATIF

**THE CONTRIBUTION OF ABSORBING SUBSTRATE TO THE FORMATION
OF THE NONLINEAR PHOTOACOUSTIC RESPONSE:
MATHEMATICAL MODEL AND TEMPERATURE FIELD**

Tajik National University

A mathematical model for the generation of a nonlinear photoacoustic (PA) response is proposed for the case when the substrate, along with the sample, is absorbing. The system of nonlinear heat conduction equations for the gas layer, the sample and the substrate has been used. The temperature increments are represented as the sum of the locally equilibrium and oscillatory parts, and the oscillatory ones as the sum of the linear and nonlinear parts. The necessary system of differential equations for the fundamental and second harmonics of a nonlinear PA signal is obtained. The features of the formation of the temperature field in the PA chambers are studied in detail.

Key words: photoacoustic, optoacoustic, thermal nonlinearity.

УДК 537.266

С.ОДИНАЕВ, Д.М.АКДОДОВ*, Х.И.ИДИБЕГЗОДА

ЧАСТОТНАЯ ДИСПЕРСИЯ МОДУЛЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ВОДНОГО РАСТВОРА ХЛОРИДА НАТРИЯ

Физико-технический институт им. С.У.Умарова АН Республики Таджикистан,

**Таджикский национальный университет*

Поступила в редакцию 14.05.2018 г.

На основе ранее полученного аналитического выражения для модуля электроупругости $\epsilon(\omega)$, когда релаксирующие потоки затухают по экспоненциальному закону, для определенной модели раствора и явных выражений для потенциала межмолекулярного взаимодействия $\Phi_{ab}(|\vec{r}|)$ и радиальной функции распределения $g_{ab}(|\vec{r}|)$, а также соответствующих значений концентраций C и температур T , проведен численный расчет динамического модуля электроупругости $\epsilon(\omega)$ водного раствора $NaCl$. Результаты численных расчётов находятся в удовлетворительном согласии с экспериментом.

Ключевые слова: модуль электроупругости, коэффициент трения, время релаксации, потенциал межчастичного взаимодействия, радиальная функция распределения.

Если жидкости находятся под медленным воздействием внешних сил, то вследствие свойства текучести жидкостей они имеют только адиабатический объёмный модуль упругости (коэффициент объёмного всестороннего сжатия) и коэффициент сдвиговой вязкости. Изменение модуля объёмной упругости жидкости под действием внешних сил, которые приводят к изменению среднего расстояния между структурными единицами жидкости, определяется характером потенциальной энергии взаимодействия частиц. Согласно [1], объёмная деформация нарушает термодинамическое равновесие и вследствие этого всегда сопровождается процессом восстановления равновесия, а модуль объёмной упругости жидкости зависит от скорости деформации. При наличии быстрых внешних воздействий в жидкостях, по аналогии с законом Гука для твердых тел, тензор напряжений со-

Адрес для корреспонденции: Одинаев Саидмухамед. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/1, Физико-технический институт АН РТ. E-mail: odsb42@mail.ru

гласно [2] содержит коэффициенты объёмной и сдвиговой вязкости и соответствующие им модули объёмной и сдвиговой упругости.

Согласно [3,4], в высокочастотном режиме жидкость ведет себя как изотропное твердое тело, в котором возможны два набора продольных возбуждений, в отсутствие вязкости эти возбуждения определяются только флуктуациями энергии и её производной. Там же отмечено, что с увеличением частоты процесса, модули объёмной и сдвиговой упругости жидкостей растут, а в высокочастотном режиме эти модули остаются постоянными и не зависят от частоты. В [4] также исследованы определения высокочастотных упругих и термических модулей, которые связаны с соответствующими комплексными аналитическими выражениями коэффициентов переноса (объёмной и сдвиговой вязкости, и теплопроводности). Жидкости и растворы, наряду с вязко- и термоупругими свойствами, имеют электропроводящие и диэлектрические свойства, которые, при наличии градиента электрического потенциала, определяются посредством коэффициентов удельной электропроводности и диэлектрической проницаемости, а также модулем электроупругости.

Теоретическое исследование электропроводящих свойств сильно разбавленных растворов электролитов дается теорией Дебая-Хюккеля [5-7]. При равновесии в растворах имеет место как ионная, так и дипольная атмосфера [5]. Согласно [7], приложенное внешнее электрическое поле или какое-либо другое атомное поле ионов прежде всего изменяет эти атмосферы, а значит и структуру растворителя, одновременно связывая молекулы растворителя с упорядоченными ионами. Кроме того, в водных растворах электролитов на гидратацию, кроме фактора взаимодействия между постоянными дипольными моментами полярных молекул воды и ионами, влияет также поляризация (наведенный дипольный момент) молекул и дисперсионный эффект. А именно, взаимодействие между этими полями в растворах приводит к явлению электроупругости.

На основе кинетических уравнений для одно- и двухчастичной функции распределения в [8-10] исследованы вязкоупругие и термоупругие свойства классических жидкостей и растворов электролитов. При определенном выборе модели раствора, то есть потенциальной энергии взаимодействия между структурными единицами раствора $\Phi_{ab}(r)$ и радиальной функции распределения $g_{ab}^0(r)$, проведены численные расчеты этих физических параметров водных растворов электролитов, результаты которых находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными. Поэтому, наряду с этими видами явлений переноса и упругих свойств растворов электролитов, представляет интерес проведение численных расчётов частотной дисперсии модуля электроупругости водных растворов электролитов в зависимости от концентрации и температуры.

В качестве исходного воспользуемся аналитическим выражением динамического модуля электроупругости растворов электролитов $\epsilon(\omega)$, когда релаксирующие потоки

затухают по экспоненциальному закону, то есть формулой (14), полученной в [11], которая имеет следующий вид:

$$\epsilon(\omega) = \sum_a \frac{(\omega\tau_a)^2 \epsilon_a^0}{1 + (\omega\tau_a)^2} \left[1 + \sum_b \frac{(1 + \tau_{ab}/\tau_a) G_0^{ab}(r)}{1 + (\omega\tau_a)^2 (\tau_{ab}/\tau_a)^2} \right], \quad (1)$$

где

$$G_0^{ab}(r) = 2\pi n_b^* q_{ab} \int_0^\infty \frac{\partial \Phi_{ab}^*(r)}{\partial r} \frac{\partial g_{ab}^0(r)}{\partial r} r^2 dr, \quad (2)$$

$$\epsilon_a^0 = \sigma_a^0 / \tau_a = n_a^0 e^2 / m_a, \quad \sigma_a^0 = (n_a e_a^2 \tau_a) / m_a, \quad \tau_a = \frac{m_a}{2\beta_a}, \quad \tau_{ab} = \frac{d_{ab}^2}{kT} \frac{\beta_a \beta_b}{\beta_a + \beta_b},$$

$$q_{ab} = \frac{4}{\pi} \frac{e_a \beta_b - e_b \beta_a}{e_a (\beta_a + \beta_b)}, \quad n_b^* = \frac{\pi}{6} d_{ab}^3 n_b^0 - \text{приведенная плотность ионов сорта } b, \quad e_a = z_a e,$$

$$e_b = z_b e, \quad e - \text{элементарный заряд, } \Phi_{ab}^*(r) = \frac{\Phi_{ab}(r)}{kT_0} - \text{приведенная потенциальная энергия}$$

между структурными единицами раствора, $d_{ab} = (d_{aa} + d_{bb})/2$ – средний диаметр частиц, $r = |\vec{r}| = |\vec{q}_b - \vec{q}_a|/d_{ab}$ – приведенное расстояние между частицами a и b , $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота, ν – частота процесса, $m_a, m_b, n_a^0 = N_a/V, \beta_a, \beta_b, z_a$ и z_b – массы, числовая плотность, коэффициенты трения и валентность ионов сорта a и b , τ_a – время релаксации вектора плотности тока проводимости $j_a^\alpha(\omega)$ в импульсном, а τ_{ab} – время релаксации этого вектора в конфигурационном пространстве, $g_{ab}(r)$ – равновесная радиальная функция распределения. Выражение (1) с учетом (2) описывает динамические электроупругие свойства растворов электролитов в зависимости от термодинамических параметров состояния (концентрации c , плотности ρ и температуры T). Выражение (1) содержит вклады времён трансляционных τ_a, τ_b и структурных τ_{ab} релаксационных процессов, определяющиеся массой и коэффициентом трения ионов сорта a и b , а функция $G_0^{ab}(r)$ под интегралом содержит $\Phi_{ab}(r)$ и $g_{ab}^0(r)$.

Следует отметить, что для проведения численных расчетов динамического модуля электроупругости $\epsilon(\omega)$, а также исследования частотной дисперсии последнего, согласно выражению (1), требуется определение коэффициентов трения β_a и β_b в зависимости от термодинамических параметров c, ρ и T , а следовательно, и времён релаксации $\tau_a, \tau_b, \tau_{ab}$. Все эти параметры определяются потенциальной энергией взаимодействия между

структурными элементами раствора $\Phi_{ab}(r)$, а также радиальной функцией распределения $g_{ab}^0(r)$, которые зависят от выбора модели раствора.

Динамический модуль электроупругости $\in(\omega)$, согласно (1) и (2), определяется потенциальной энергией взаимодействия $\Phi_{ab}(r)$ и радиальной функцией распределения $g_{ab}^0(r)$, а также временами трансляционной τ_a , τ_b и структурной τ_{ab} релаксации. Последние определяются коэффициентами трения ионов β_a и β_b , которые, в свою очередь, зависят как от структуры раствора, так и от концентрации c , плотности ρ и температуры T раствора. В работе [12] для учета этих зависимостей в β_a и β_b были использованы аналитические выражения в виде:

$$\begin{aligned}\beta_a^2 &= \sum_a \frac{4\pi}{3} \rho_a kT \sum_b d_{ab} \int_0^\infty \nabla^2 \Phi_{ab}^*(r) g_{ab}^0(r) r^2 dr, \\ \beta_b^2 &= \sum_b \frac{4\pi}{3} \rho_b kT \sum_a d_{ab} \int_0^\infty \nabla^2 \Phi_{ab}^*(r) g_{ab}^0(r) r^2 dr,\end{aligned}\quad (3)$$

где $\rho_a = m_a n_a$ – массовая плотность частиц сортов a и b , $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$ – радиальная часть оператора Лапласа, k – постоянная Больцмана.

Для исследования электроупругих свойств растворов электролитов и проведения численных расчетов β_a , β_b , τ_a , τ_b , τ_{ab} и $\in(\omega)$ согласно [12] в приближении теории Мак-Миллана-Майера для $\Phi_{ab}(r)$ и $g_{ab}^0(r)$ были выбраны следующие модели.

Для $\Phi_{ab}(r)$ принято выражение, состоящее из суммы потенциальной энергии Леннарда-Джонса и обобщенного потенциала Дебая с учетом конфигурации размеров ионов, которое имеет вид

$$\Phi_{ab}(r) = 4\varepsilon_{ab} (r^{-12} - r^{-6}) + \frac{R_{ab}}{r} e^{-\chi^* r}, \quad (4)$$

где $\varepsilon_{ab} = \sqrt{\varepsilon_{aa} \varepsilon_{bb}}$, $d_{ab} = (d_a + d_b) / 2$ – параметры потенциала Леннарда-Джонса, которые

приведены в [13], $R_{ab} = \frac{f z_a z_b e^2}{kT \varepsilon_{SS} d_{ab}} \frac{\exp(\chi^*)}{1 + \chi^*}$; $f = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$; ε_0 – электрическая

постоянная, ε_{SS} – коэффициент диэлектрической проницаемости растворителя, e – элементарный заряд, z_a, z_b – валентность ионов сортов a и b ; $\chi^* = d_{ab} \chi_a$ – приведенный обратный дебаевский радиус экранировки, который согласно [14] имеет следующий вид

$\chi^2 = \frac{\sum n_a e_a^2}{\varepsilon \varepsilon_0 kT}$, где $n_a = \frac{N_a}{V}$. Следуя [15], радиальную функцию распределения ионной

подсистемы запишем следующим образом:

$$g_{ab}(r) = y(\rho^*) e^{-\frac{\Phi_{ab}(r)}{kT}}, \quad (5)$$

где $\Phi_{ab}(r)$ – потенциал взаимодействия базисной системы в виде (4), $y(\rho^*)$ – бинарная функция распределения двух полостей, которая, согласно [15], на расстоянии $r=1$ ($r_{ab}=d_{ab}$) имеет вид

$$y(\rho^*) = \frac{(2-\rho^*)}{2(1-\rho^*)^3}, \quad (6)$$

где $\rho^* = \frac{\pi}{6} n d_{ab}^3 = \frac{\pi}{6} \rho \frac{d_{ab}^3 N_0}{M}$ – приведенная плотность, ρ – плотность раствора, N_0 – число Авогадро, M – молярная масса.

Полуфеноменологическая модель в виде (4) – (6) позволяет провести численный расчёт коэффициентов β_a, β_b , времён релаксации $\tau_a, \tau_b, \tau_{ab}$ и $\epsilon(\omega)$ растворов электролитов в широком интервале изменения термодинамических параметров состояния и частот.

Результаты численных расчетов приведены в табл. 1, 2 и на рис. 1-3. Согласно данным табл. 1 с увеличением температуры для соответствующих плотностей наблюдается незначительное уменьшение $\beta_1, \beta_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ и увеличение времён τ_1, τ_2 .

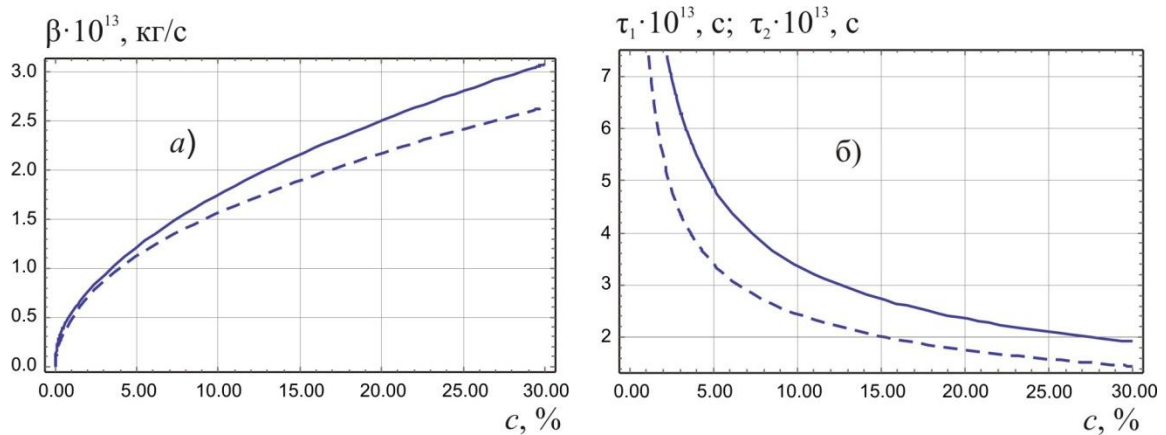


Рис.1. Зависимость коэффициентов трения и времён релаксации от концентрации водного раствора NaCl, при $t=20^\circ\text{C}$:

а) — — — — — β_1 , ————— β_2 , б) — — — — — τ_1 , ————— τ_2 .

Таблица 1

Зависимость коэффициентов трения β_1 , β_2 , времён релаксации τ_1 , τ_2 , τ_{11} , $\tau_{12} = \tau_{21}$, τ_{22}
от концентрации, плотности и температуры водного раствора NaCl

T, K	ρ , кг/м ³	$\beta_1 \cdot 10^{13}$, кг/с	$\beta_2 \cdot 10^{13}$, кг/с	$\tau_1 \cdot 10^{13}$, с	$\tau_2 \cdot 10^{13}$, с	$\tau_{11} \cdot 10^{12}$, с	$\tau_{12} \cdot 10^{12}$, с	$\tau_{22} \cdot 10^{12}$, с
c=10.5%								
15	1025.9	1.712	1.937	1.116	1.522	1.605	3.293	5.756
20	1072.1	1.707	1.929	1.119	1.529	1.573	3.225	5.633
30	1070.1	1.706	1.924	1.120	1.533	1.520	3.114	5.433
35	1067.9	1.703	1.919	1.122	1.537	1.493	3.057	5.331
55	1058.3	1.692	1.897	1.129	1.554	1.393	2.846	4.950
80	1042.2	1.672	1.863	1.142	1.583	1.279	2.605	4.515
90	1035.8	1.665	1.849	1.148	1.595	1.238	2.518	4.359
c=14.9%								
15	1109.8	2.088	2.401	0.915	1.228	1.958	4.048	7.136
20	1105.4	2.080	2.390	0.918	1.234	1.917	3.962	6.981
30	1103.2	2.078	2.384	0.919	1.237	1.852	3.824	6.733
35	1100.9	2.074	2.378	0.921	1.240	1.818	3.754	6.607
55	1090.8	2.058	2.352	0.928	1.254	1.694	3.492	6.136
80	1074.6	2.031	2.311	0.941	1.276	1.553	3.195	5.602
90	1068.1	2.020	2.294	0.946	1.285	1.503	3.088	5.409
c=19%								
15	1141.6	2.420	2.808	0.790	1.050	2.269	4.710	8.344
20	1137.0	2.410	2.795	0.793	1.055	2.221	4.609	8.163
30	1134.6	2.405	2.787	0.794	1.058	2.144	4.447	7.872
35	1132.3	2.401	2.781	0.796	1.060	2.105	4.366	7.726
55	1121.6	2.379	2.749	0.803	1.073	1.959	4.058	7.173
80	1105.3	2.346	2.702	0.814	1.091	1.795	3.713	6.551
90	1098.8	2.333	2.684	0.819	1.099	1.736	3.588	6.327
c=22.6%								
15	1171.0	2.707	3.160	0.706	0.933	2.538	5.283	9.389
20	1166.1	2.695	3.144	0.709	0.938	2.484	5.168	9.182
30	1163.5	2.689	3.135	0.710	0.940	2.397	4.986	8.855
35	1160.9	2.683	3.127	0.712	0.943	2.352	4.893	8.688
55	1109.9	2.557	2.968	0.747	0.993	2.105	4.371	7.745
80	1093.7	2.521	2.919	0.758	1.010	1.929	3.999	7.076
90	1087.1	2.506	2.899	0.762	1.017	1.864	3.864	6.833

Таблица 2

Частотная зависимость модуля электроупругости $\epsilon(\omega)$ при соответствующей концентрации, плотности и температуры для водного раствора NaCl

T, K	ρ , кг/м ³	ϵ ,	ϵ , 10 ²	ϵ , 10 ⁴	ϵ , 10 ⁶	ϵ , 10 ⁸	ϵ , 10 ¹⁰	ϵ , 10 ¹²
		См/м·с $\nu^*=10^{-6}$	См/м·с $\nu^*=10^{-5}$	См/м·с $\nu^*=10^{-4}$	См/м·с $\nu^*=10^{-3}$	См/м·с $\nu^*=10^{-2}$	См/м·с $\nu^*=10^{-1}$	См/м·с $\nu^*=1$
c=10.5%								
15	1025.9	20.105	20.105	20.105	20.105	20.102	19.811	8.366
20	1072.1	21.405	21.405	21.405	21.405	21.402	21.095	8.933
30	1070.1	22.408	22.408	22.408	22.408	22.405	22.082	9.337
35	1067.9	22.904	22.904	22.904	22.904	22.901	22.570	9.535
55	1058.3	24.979	24.979	24.979	24.979	24.975	24.612	10.361
80	1042.2	27.753	27.753	27.753	27.753	27.749	27.341	11.451
90	1035.8	28.953	28.953	28.953	28.953	28.949	28.521	11.920
c=14.9%								
15	1109.8	30.158	30.158	30.158	30.158	30.154	29.733	12.755
20	1105.4	30.758	30.758	30.758	30.758	30.753	30.323	13.000
30	1103.2	32.170	32.170	32.170	32.170	32.165	31.715	13.583
35	1100.9	32.867	32.867	32.867	32.867	32.863	32.402	13.870
55	1090.8	35.775	35.775	35.775	35.775	35.770	35.266	15.061
80	1074.6	39.660	39.660	39.660	39.660	39.655	39.092	16.641
90	1068.1	41.335	41.335	41.335	41.335	41.329	40.740	17.319
c=19%								
15	1141.6	39.167	39.167	39.167	39.167	39.161	38.623	16.680
20	1137.0	39.933	39.933	39.933	39.933	39.927	39.378	16.999
30	1134.6	41.744	41.744	41.744	41.744	41.738	41.163	17.757
35	1132.3	42.642	42.642	42.642	42.642	42.636	42.047	18.132
55	1121.6	46.357	46.357	46.357	46.357	46.351	45.709	19.678
80	1105.3	51.337	51.337	51.337	51.337	51.330	50.615	21.740
90	1098.8	53.482	53.482	53.482	53.482	53.474	52.728	22.627
c=22.6%								
15	1171.0	47.498	47.498	47.498	47.498	47.492	46.844	20.314
20	1166.1	48.413	48.413	48.413	48.413	48.406	47.746	20.697
30	1163.5	50.590	50.590	50.590	50.590	50.583	49.892	21.617
35	1160.9	51.661	51.661	51.661	51.661	51.653	50.947	22.067
55	1109.9	54.301	54.301	54.301	54.301	54.294	53.547	23.128
80	1093.7	60.096	60.096	60.096	60.096	60.088	59.258	25.546
90	1087.1	62.582	62.582	62.582	62.582	62.574	61.708	26.582

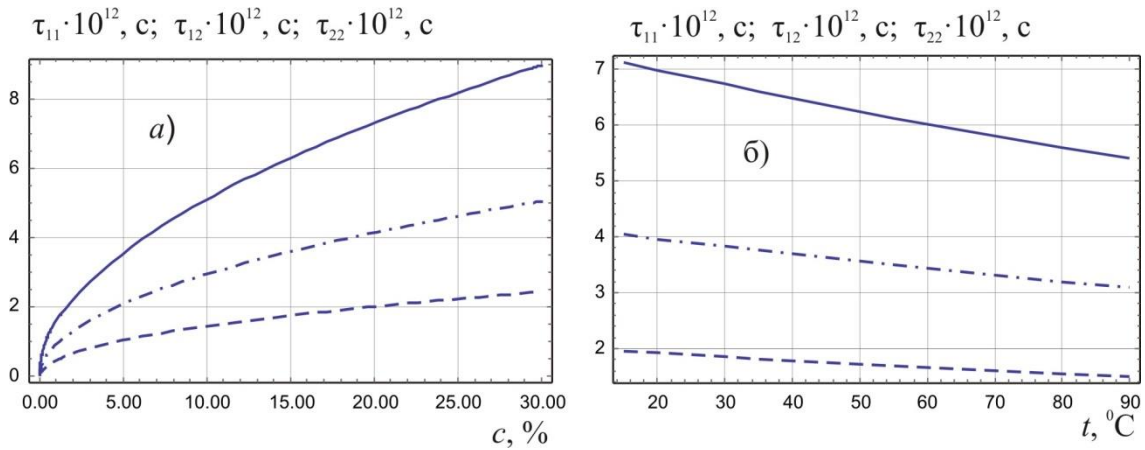


Рис.2. Зависимость времён релаксации от концентрации (а) при $t=20^{\circ}\text{C}$ и температуры (б) при $c=14,9\%$ водного раствора NaCl: — — — τ_{11} , — · — · — τ_{12} , — τ_{22} .

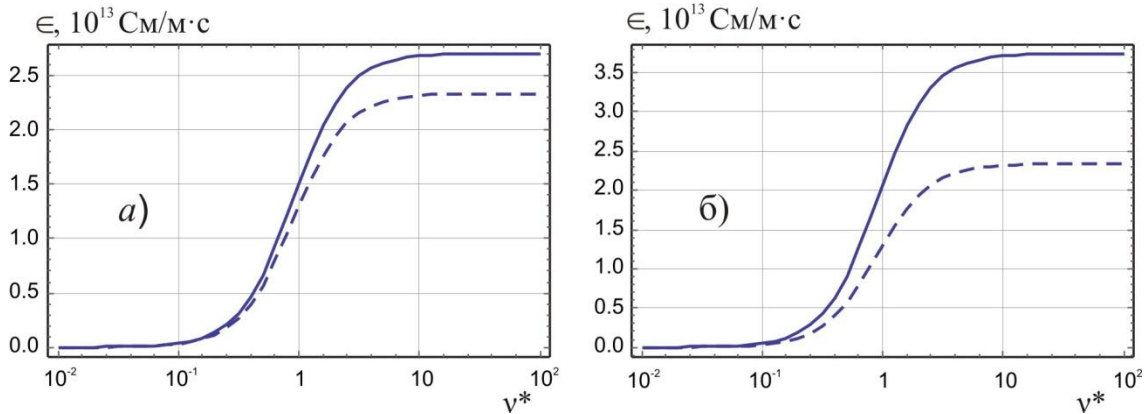


Рис.3. Зависимость динамического модуля электроупругости от частоты водного раствора NaCl: а) при $c=14,9\%$ и $t_1=20^{\circ}\text{C}$ (— — —), $t_2=25^{\circ}\text{C}$ (—); б) при постоянной температуре $t=20^{\circ}\text{C}$ и концентрациях $c_1=14,9\%$ (— — —), $c_2=22,6\%$ (—).

А с увеличением концентрации для соответствующих постоянных значений температуры и плотности для β_1 , β_2 , τ_{11} , τ_{12} , τ_{22} наблюдается увеличение, а для τ_1 , τ_2 имеет место незначительное уменьшение. Для наглядности на рис. 1(а, б) приведен концентрационный рост коэффициентов трения β_1 и β_2 , уменьшение времён релаксации τ_1 , τ_2 , а также изменения τ_{11} , τ_{12} и τ_{22} в зависимости от этих параметров на рис. 2(а, б), соответственно. Известно, что учёт изменения этих параметров приводит к наиболее точному определению зависимости модуля электроупругости от частоты при соответствующей концентрации, плотности и температуре [16]. В табл. 2 приведены результаты численных расчётов частотной зависимости модуля электроупругости $\epsilon(\omega)$ водного раствора NaCl для четырёх концентраций и соответствующих значений плотности и температуры. Видно, что при фиксированных частотах, с увеличением концентрации и температуры изочастотный модуль электроупругости водного раствора NaCl растёт. Согласно

рис. 3(а, б), частотная дисперсия модуля электроупругости $\epsilon(\omega)$ наблюдается в интервале приведенных частот $10^{-1} \leq \nu^* \leq 10$, что соответствуют частотам $10^{10} \text{ Гц} \leq \nu \leq 10^{12} \text{ Гц}$. Данная область частотной дисперсии составляет 10^2 Гц , что характерно для релаксационных процессов, затухающих по экспоненциальному закону, и совпадает с результатами общей релаксационной теории [17, 18]. При частотах $\nu^* > 10$, то есть при высоких частотах, значение модуля электроупругости ϵ_∞ остаётся постоянным, что совпадает с результатами работы [3]. Таким образом, результаты вычислений, полученные в работе, находятся в удовлетворительном согласии с имеющимися экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнфельд М. Упругость и прочность жидкостей. – М.Л.: Гостехиздат технико-теоретической литературы, 1951, 107 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988, 733 с.
3. Zwanzig R., Mountain R.D. High frequency elastic moduli of simple fluids. – J. Chem. phys., 1965, v.43, №12, pp.4464-4471.
4. Nossal R. Collective motion in simple classical fluids – Phys. Rev., 1968, v.166, №1, pp.81-88.
5. Семенченко В.К. Физическая теория растворов. – М.Л.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1941, 382 с.
6. Харнед Г., Оуэн Б. Физическая химия растворов электролитов. – М.: Изд. Иностранной литературы, 1952, 628 с.
7. Эрдей-Груз Т. Явления переноса в водных растворах. – М.: Мир, 1976, 595 с.
8. Одинаев С., Адхамов А.А. Молекулярная теория структурной релаксации и явлений переноса в жидкостях. – Душанбе: Дониш, 1998, 230 с.
9. Одинаев С., Акдодов Д.М., Шарифов Н.Ш., Мирзоаминов Х. О частотной дисперсии вязкоупругих свойств растворов электролитов. – Журнал физической химии, 2010, т.84, № 6, с.1063-1068.
10. Одинаев С., Акдодов Д., Шарифов Н. Структурная релаксация и термоупругие свойства растворов электролитов. – Украинский физический журнал, 2007, т.52, №1, с.22-29.
11. Одинаев С., Идибег Х. К статистической теории электропроводящих свойств растворов электролитов. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2017, т.60, №7-8, с.320-328.
12. Одинаев С., Акдодов Д.М. Области частотной дисперсии коэффициента сдвиговой вязкости водных растворов электролитов. – Журнал физической химии, 2013, т.87, №7, с.1154–1159.
13. Richard J., Fries P.H., Krienke H. – Journal of Chemical Physics, 1998, v.108, №10, pp.4079.
14. Krienke H., Barthel J. Equations of State for Fluids and Fluids Mixtures. Ch. 16: Ionic Fluids/Ed. By J.V. Sengers et al. Amsterdam: Elsevier, 2000, pp.751.
15. Юхновский И.Р., Головкин М.Ф. Статистическая теория классических равновесных систем. – Киев: Наукова думка, 1980, 372 с.
16. Максимова Н.И., Пак Ч.С., Правдин Н.Н. и др. Свойства электролитов. – М.: Металлургия, 1987, 128 с.
17. Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П. Основы молекулярной акустики. – М.: Наука, 1964, 514 с.
18. Физическая акустика. / Под ред. У.Мэзона. – М.: Мир, 1968, т.2, ч.А, Свойства газов, жидкостей и растворов, 487 с.

С.ОДИНАЕВ, Д.М.АҚДОДОВ*, Х.И.ИДИБЕГЗОДА

ДИСПЕРСИЯИ БАСОМАДИИ МОДУЛИ ЧАНДИРИИ ЭЛЕКТРИКИИ МАҲЛУЛИ ОБИИ ХЛОРИДИ НАТРИЙ

*Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,
Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар асоси ифодаҳои аналитикии модули чандирии электрикӣ $\in(\omega)$ қаблан ҳосилкарда ҳангоми ҳомӯшшавии селҳои релаксационӣ аз рӯи қонуни экспоненсиалӣ, барои модели муайяни маҳлул бо дарназардошти намуди муайяни энергияи потенциалии мутақобила $\Phi_{ab}(|\vec{r}|)$ ва функсияи радиалии тақсимот $g_{ab}(|\vec{r}|)$, ҳисобкунии ададӣ барои маҳлули обии NaCl гузаронида шуд. Натиҷаи ҳисоби ададӣ бо натиҷаҳои таҷрибавӣ мувофиқат менамоянд.

Калимаҳои калидӣ: модули электрочандирӣ, коэффитсиентҳои соиш, вақтҳои релаксатсия, энергияи потенциалӣ, функсияи радиалии тақсимот.

S.ODINAEV, D.M.AKDODOV*, Kh.I.IDIBEGZODA

FREQUENCY DISPERSION OF ELECTRIC ELASTICITY MODULUS OF AQUEOUS SOLUTION OF SODIUM CHLORIDE

*S.U.Umarov Physical-Technical Institute, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,
Tajik National University

Based on the previously obtained analytical expression for the modulus of electroelasticity $\in(\omega)$, when the relaxing flows are dumped exponentially, for a certain solution model and explicit expressions for the potential of intermolecular interaction $\Phi_{ab}(|\vec{r}|)$ and the radial distribution function $g_{ab}(|\vec{r}|)$, as well as the corresponding values of concentrations C and temperatures T , the dynamic modulus of electroelasticity $\in(\omega)$ of NaCl aqueous solution is calculated. The results of numerical calculations are in satisfactory agreement with the experiment.

Key words: the modulus of electroelasticity, friction coefficients, relaxation time, potential energy of interaction, radial distribution function.

УДК 541.123

Х.Х.МУМИНОВ, Ш.Ф.МУХАМЕДОВА, М.АСГАРИ-ЛАРИМИ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ
ВЕКТОРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА
С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$**

*Физико-технический институт им. С.У.Умарова АН Республики Таджикистан
Поступило в редакцию 21.05.2018 г.*

Проведено численное моделирование эволюции многосолитонного решения векторного нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным потенциалом $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$, описывающего двухкомпонентный бозе-газ в теоретико-полевых моделях физики конденсированного состояния. Анализ динамики эволюции многосолитонных решений показывает отсутствие существенной бризерной динамики неподвижного солитона. Подвижный солитон проявляет существенную бризерную динамику на трёх основных частотах временной модуляции, вместе с тем демонстрирует высокую степень устойчивости при сохранении интегралов движения с точностью порядка 10^{-4} - 10^{-5} .

Ключевые слова: n-солитонное решение, тривиальные граничные условия, векторное нелинейное уравнение Шредингера, бризер.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений Шредингера

$$\begin{aligned}i \varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x,t)\varphi_1 &= 0 \\i \varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x,t)\varphi_2 &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

с самосогласованным потенциалом

$$u(x,t) = \bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2.\tag{2}$$

Адрес для корреспонденции: Муминов Хикмат Халимович, Мухамедова Шоира Файзуллоевна, Мохаммад Асгари-Ларими. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Физико-технический институт АН РТ. E-mail: muminov.khikmat@mail.ru, shoira74@mail.ru, asghari@gmail.com

Подобные системы нелинейных уравнений Шредингера (1), называемые векторным нелинейным уравнением Шрёдингера (ВНУШ), возникают при квазиклассическом теоретико-полеом описании двухкомпонентного бозе-газа в физике конденсированного состояния [1], при описании двухкомпонентной плазмы [2,3], а в нелинейной оптике – для описания распространения лазерного пучка на двух несущих частотах в световодах [4,5]. Также ВНУШ (1) может быть получено при квазиклассическом описании ферромагнетика Гейзенберга с легкоосной анизотропией со спином $S=1$, при наличии одноионного обмена, то есть возбуждении квадрупольных степеней свободы спиновой динамики в подходе $SU(3)$ обобщенных когерентных состояний [6,7].

Многосолитонное решение ВНУШ (1) с самосогласованным потенциалом (2) было получено методом конечнозонного алгебро-геометрического интегрирования [8] в виде

$$\varphi_i = A_i e^{i(q_1 x + w_1 t)} \cosh(\beta_1(x + v_1 t) + b_i) + B_i e^{i(q_2 x + w_2 t)} \cosh(\beta_2(x + v_2 t) + a_i) - (B_1 \cosh(\beta^+(x + v^+ t) + h_1) + \cosh(\beta^-(x + v^- t) + h_2) + B_3 \cos(qx + wt + w_{01})), \quad (3)$$

где

$$W_1(x, t) = \alpha_1 t + (\alpha_1^2 - \beta_1^2)t, \quad W_2(x, t) = \alpha_2 t + (\alpha_2^2 - \beta_2^2)t$$

$$P_1(x, t) = \beta_1(x + 2\alpha_1 t), \quad P_2(x, t) = \beta_2(x + 2\alpha_2 t)$$

$$\kappa_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \kappa_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \kappa_{ij} = \kappa_i - \bar{\kappa}_j, \quad \bar{\kappa}_{ij} = \bar{\kappa}_i - \kappa_j$$

$$\beta^+ = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta^- = \beta_2 - \beta_1, \quad v^\pm = \frac{2(\alpha_2 \beta_2 \pm \alpha_1 \beta_1)}{\beta_2 \pm \beta_1}, \quad i, j = 1, 2.$$

$$q = \alpha_2 - \alpha_1, \quad w = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + (\beta_2^2 - \beta_1^2), \quad w_{01} = -\frac{i}{2} \ln \left| \frac{C_{12} \kappa_{12}}{C_{21} \kappa_{21}} \right|,$$

$$A_1 = -\left[\frac{\gamma_1 \bar{\kappa}_{12} (\gamma_1 C_{12} - \gamma_2 C_{11})}{\kappa_{21} \kappa_{11}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad B_1 = -\left[\frac{\gamma_1 \bar{\kappa}_{21} (\gamma_2 C_{21} - \gamma_1 C_{22})}{\kappa_{11} \kappa_{22}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$A_2 = -\left[\frac{\bar{\beta}_1 \bar{\kappa}_{12} (\bar{\beta}_1 C_{12} - \bar{\beta}_2 C_{11})}{\kappa_{21} \kappa_{11}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad B_2 = -\left[\frac{\bar{\beta}_1 \bar{\kappa}_{21} (\bar{\beta}_2 C_{21} - \bar{\beta}_1 C_{22})}{\kappa_{11} \kappa_{22}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$B_3 = \left[\frac{C_{11} C_{22}}{(k - \kappa_1)(k - \kappa_2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\overline{\gamma_2 \kappa_{12}}}{\kappa_{21} \kappa_{11} (\gamma_1 C_{12} - \gamma_2 C_{11})} \right|, \quad a_1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\overline{\gamma_1 \kappa_{21}}}{\kappa_{12} \kappa_{22} (\gamma_2 C_{21} - \gamma_1 C_{22})} \right|,$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\overline{\beta_2 \kappa_{12}}}{\kappa_{21} \kappa_{22} (\beta_1 C_{12} - \beta_2 C_{22})} \right|, \quad a_2 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\overline{\beta_1 \kappa_{21}}}{\kappa_{12} \kappa_{22} (\beta_2 C_{21} - \beta_1 C_{22})} \right|.$$

$$h_1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\kappa_{21}}{\kappa_{11} \kappa_{22} C_{22}} \right|, \quad h_2 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{C_{11} \kappa_{11}}{\kappa_{22} C_{22}} \right|$$

с тривиальными граничными условиями [9-12].

Анализ динамики многосолитонного решения (3) до сих пор не проведён, хотя и представляет достаточно значительный интерес. Он может быть проведён с использованием численного моделирования. На этой задаче мы и сосредоточимся в данной статье.

Для проведения численного моделирования и анализа эволюции многосолитонных решений (3) модели ВНУШ (1) на основе теории разностных схем разработан комплекс компьютерных программ. Используется трехслойная разностная схема на пятиточном шаблоне с весами явного типа, второго порядка точности, как по времени, так и по координате, с условием устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$, где τ и h шаги, соответственно по времени и по координате.

В ходе численного моделирования мы использовали интегралы числа частиц и полной энергии для контроля консервативности численной схемы

$$N = \int (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) dx,$$

$$E = \int \frac{1}{2} (|\psi_{2x}|^2 + |\psi_{1x}|^2) + u(x,t) (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) dx. \quad (4)$$

В тестовых решениях интеграл энергии сохранялся с точностью $\Delta E / E \approx 10^{-3} - 10^{-4}$ и интеграл числа частиц с точностью $\Delta N / N \approx 10^{-4} - 10^{-5}$.

В первой серии численных экспериментов многосолитонное решение (3) задавалось неподвижным, то есть скорость солитона $v=0$. Отметим, что многосолитонное решение (3) в случае неподвижного нелинейного возбуждения, то есть при $v=0$, сохраняло свой вид во всей области интегрирования $t=0:20$, при этом бризерная динамика внутренних степеней свободы не наблюдалась. На рис. 1 и 2 приведены соответствующие компоненты этого решения при следующих параметрах $k_1 = 1$, $\alpha_1 = 0.49$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 0.086$, $\beta_2 = 0.087$, $\lambda = 1$, $\gamma_1 = 1.84$, $\gamma_2 = 1.84$.

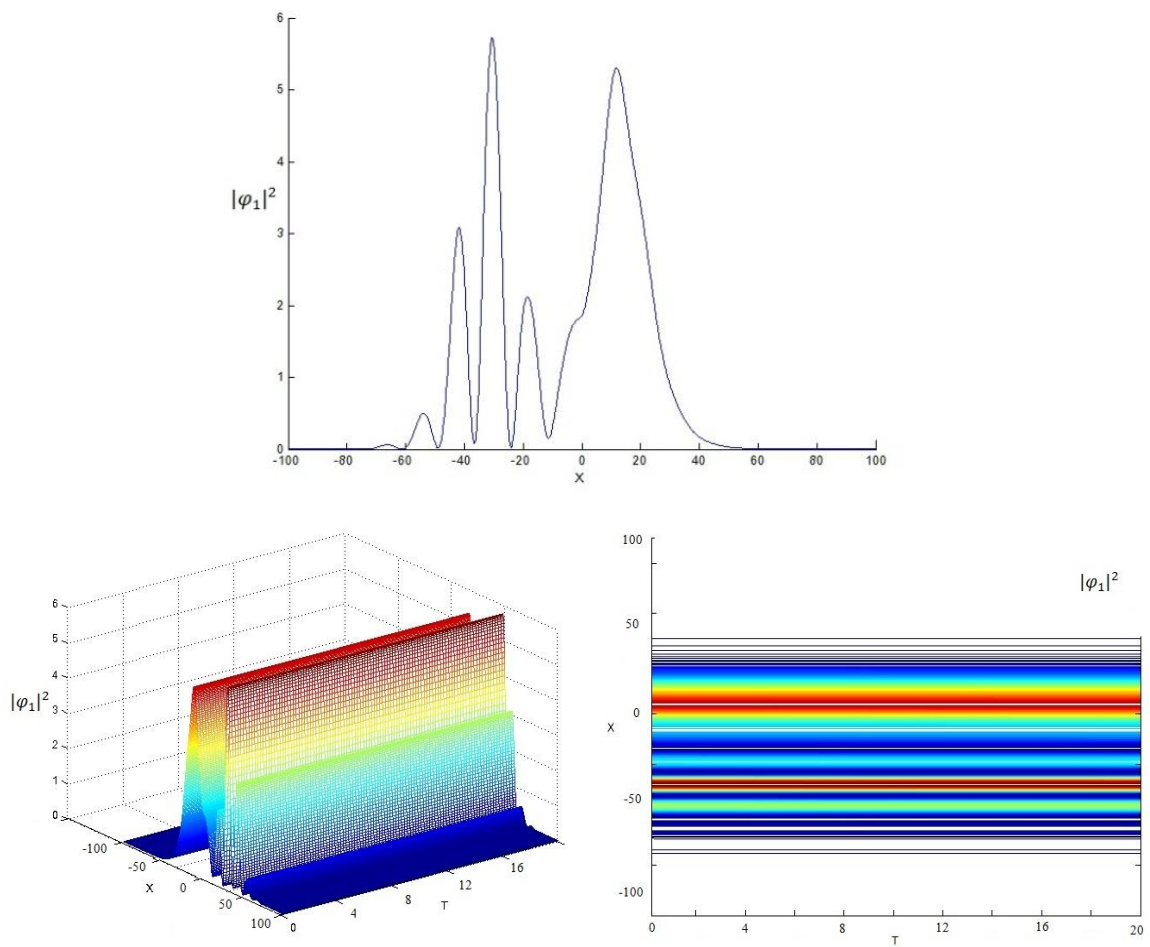
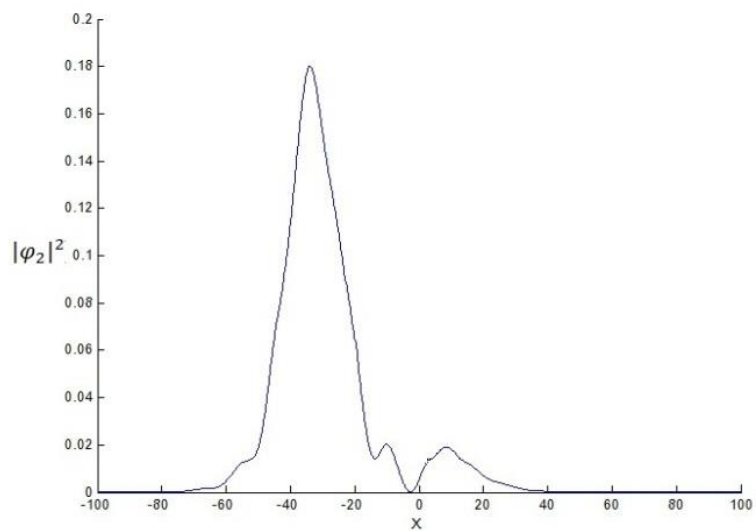


Рис. 1. График эволюции плотности числа частиц первой компоненты ($|\varphi_1|^2$).



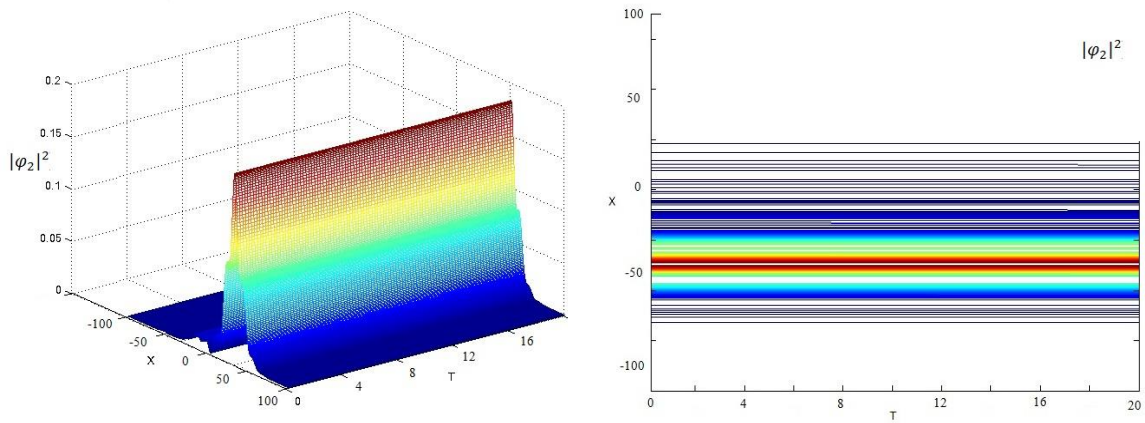
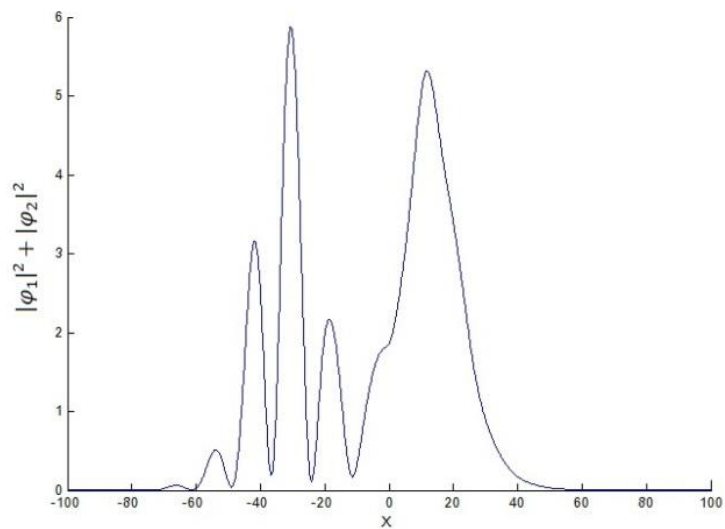


Рис.2. График эволюции плотности числа частиц второй компоненты ($|\varphi_2|^2$).

Распределение плотности числа частиц (см. рис. 3) и распределение плотности интеграла энергии (см. рис. 4) в пространстве сохранялись в неизменном виде в течение времени численного моделирования.



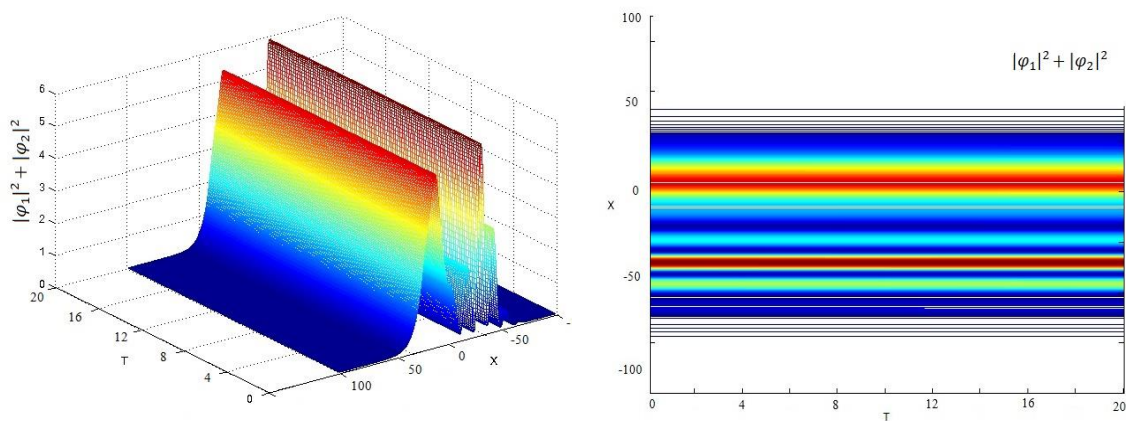


Рис. 3. График эволюции плотности числа частиц ($|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2$).

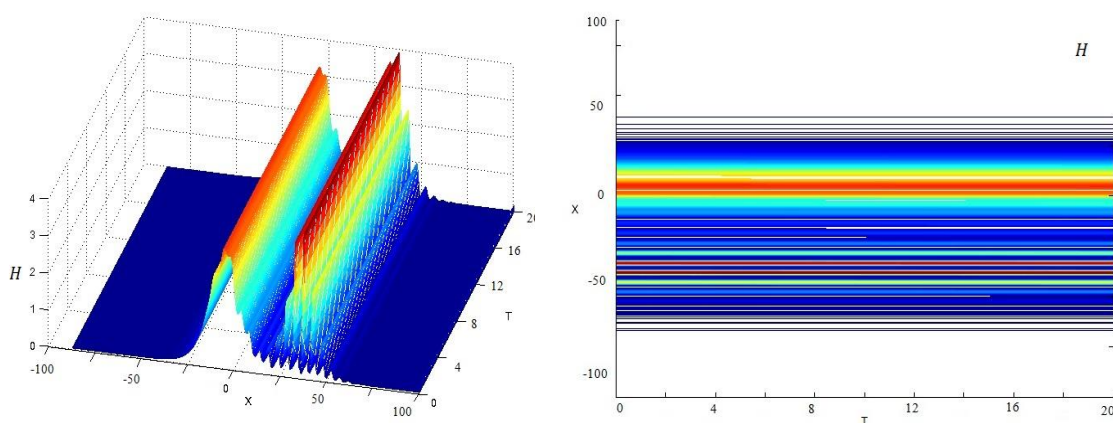
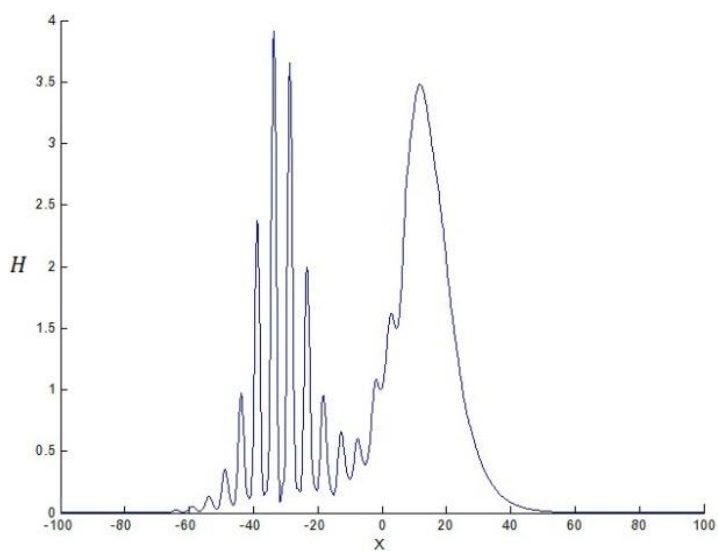


Рис. 4. График эволюции плотности энергии солитона.

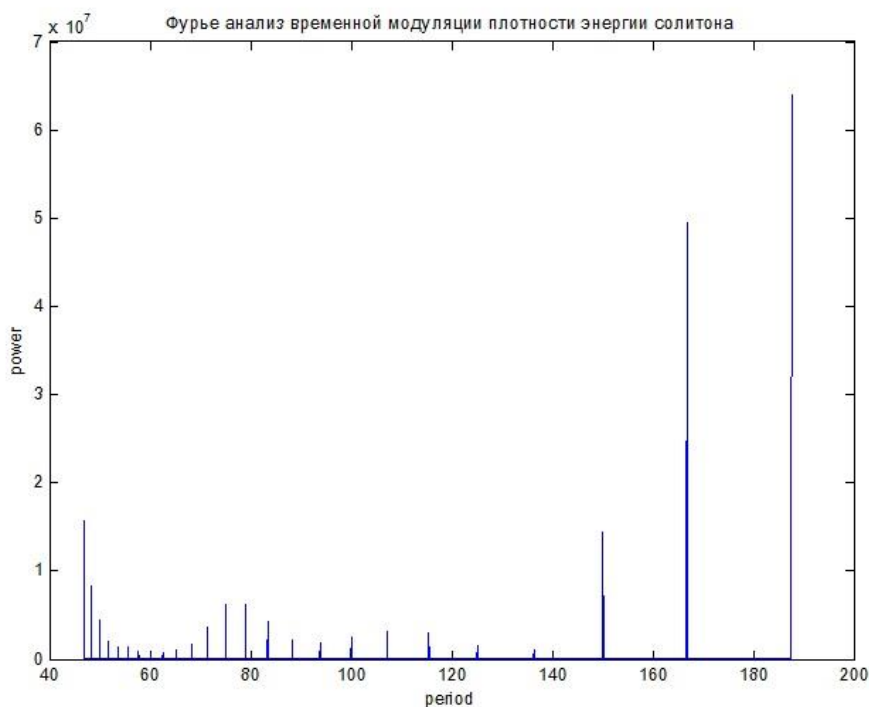
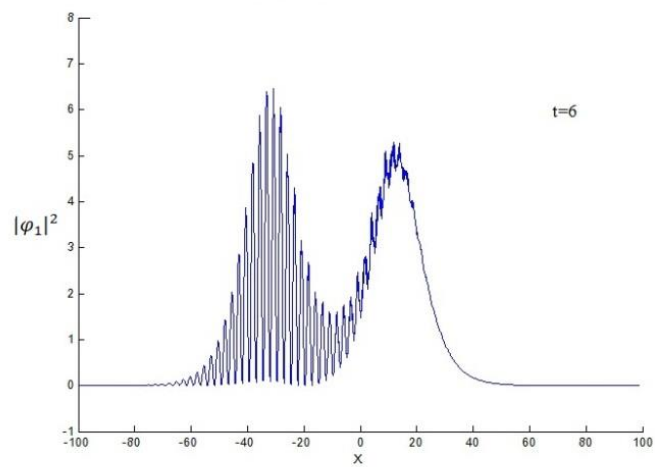
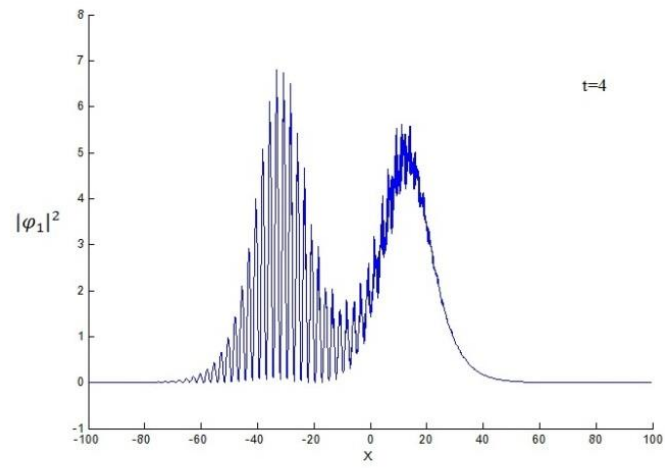
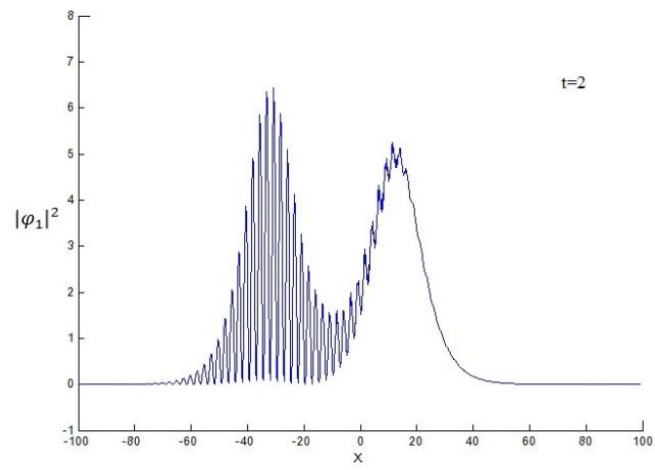


Рис. 5. Фурье-анализ пространственной модуляции плотности энергии солитона

Фурье-анализ временной модуляции плотности энергии солитона (см. рис. 5) показывает, что, несмотря на кажущуюся стационарность решения при скорости $v=0$, тем не менее, присутствуют определённые гармоники колебательной динамики внутренних степеней свободы многосолитонного, бризерного решения, причём преобладают низкочастотные моды.

Во второй серии экспериментов проводилось численное моделирование с целью анализа динамики многосолитонного возбуждения (3) при наличии ненулевой групповой скорости нелинейного возбуждения. Поведение многосолитонного решения (3) при наличии ненулевой скорости движения разительным образом отличается от динамики неподвижного многосолитонного возбуждения. Если при нулевой скорости решение практически неизменно, то при ненулевой скорости начинает существенно проявляться бризерный характер поведения солитона. При этом интеграл энергии и интеграл числа частиц сохраняется достаточно с высокой степенью точности, а энергия связи компонент бризера оценивается в 15%.

Усиливается пространственная модуляция многосолитонного решения (3), в частности, частота пространственной модуляции левой составляющей первой компоненты φ_1 бризера усиливается (см. рис.6), а для правой составляющей компоненты φ_1 и второй компоненты φ_2 начинает проявляться дополнительная модуляция (см. рис. 7).



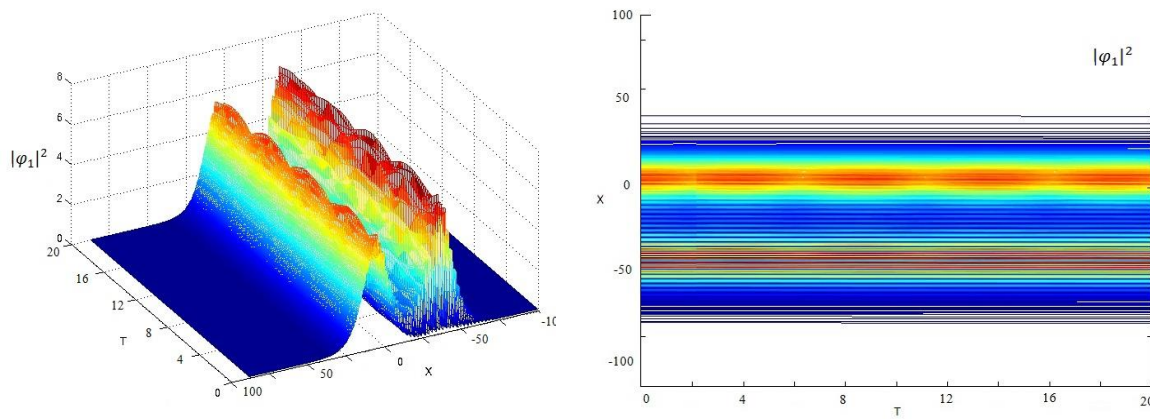
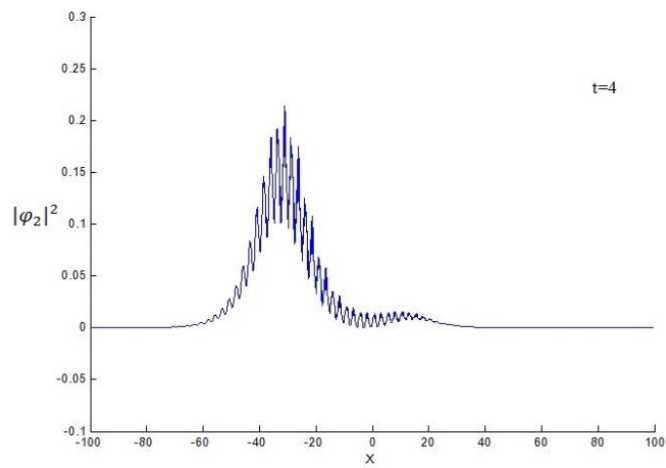
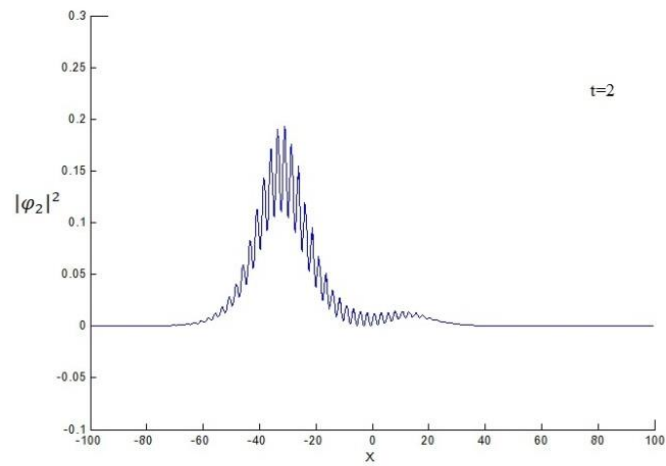


Рис. 6. График эволюции плотности числа частиц первой компоненты движущегося солитона ($v=0.24$).



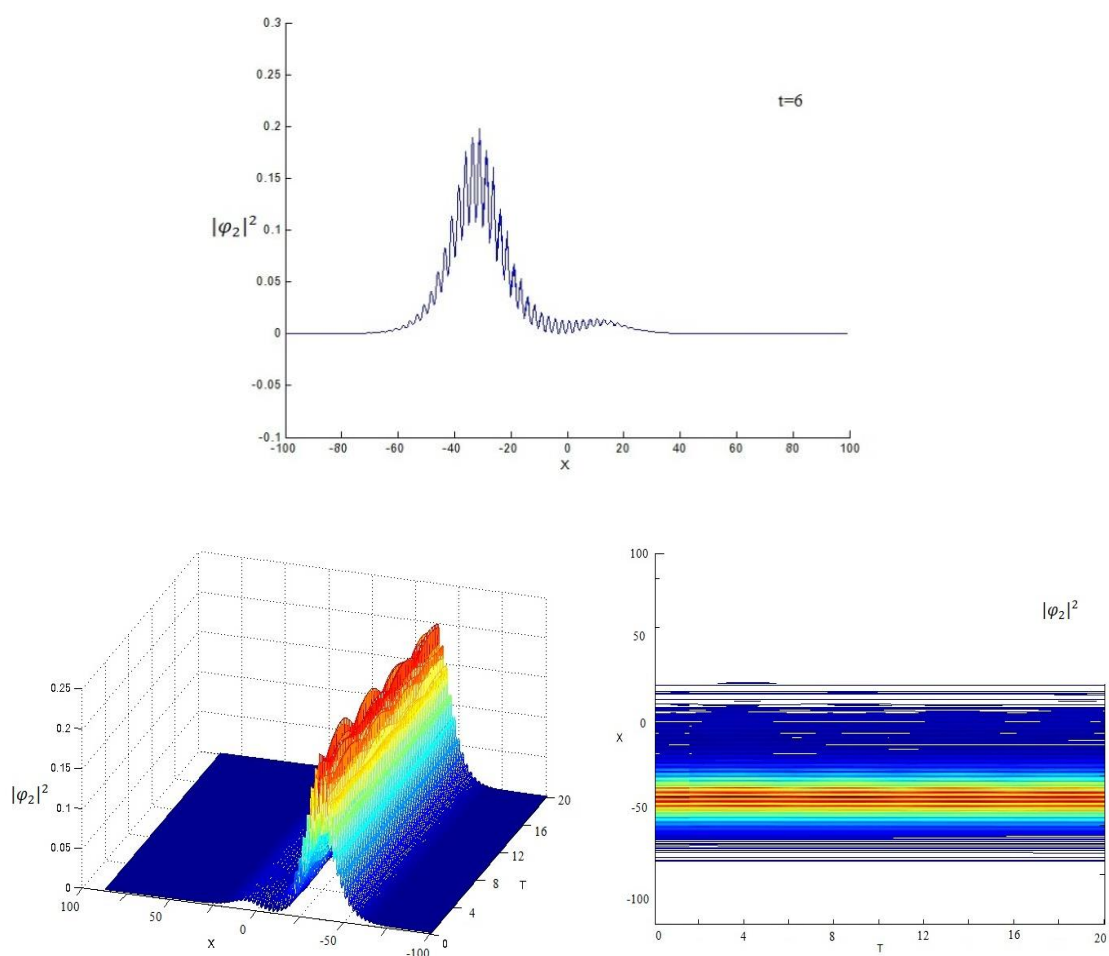
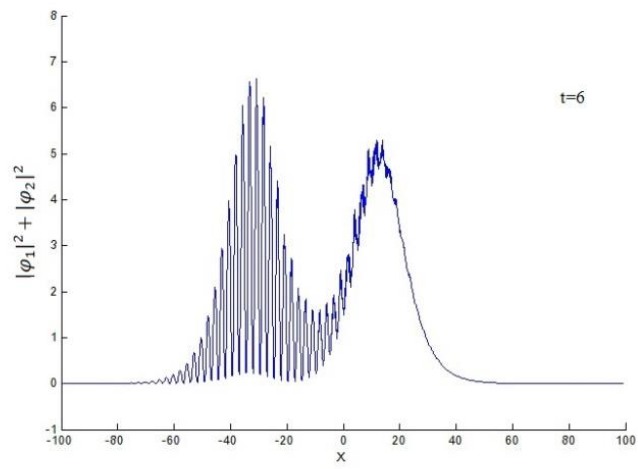
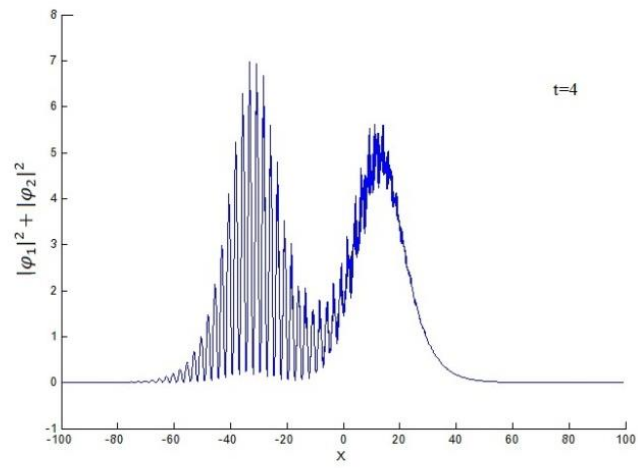
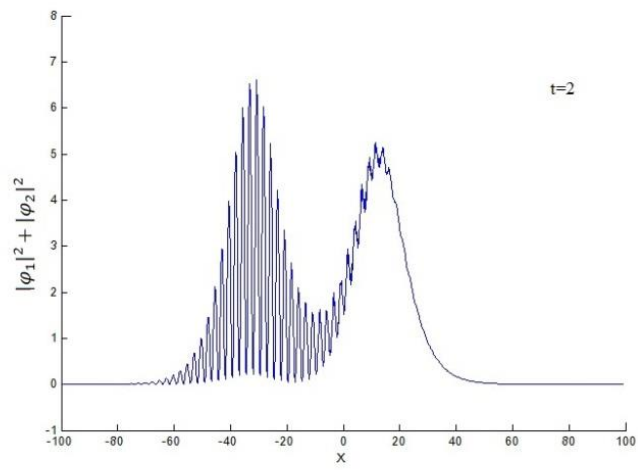


Рис. 7. График эволюции плотности числа частиц второй компоненты при ненулевой скорости $(|\varphi_2|^2)$.

Эволюция распределения плотности числа частиц (рис.8) и динамика распределения плотности энергии движущегося солитона (рис.9) также существенным образом отличаются от таковых неподвижного солитона. Видно, что многосолитонное решение превращается в динамический бризер, обладающий весьма богатой динамикой внутренних степеней свободы. Причём эта динамика внутренних степеней свободы происходит на нескольких частотах колебаний с различными мощностями, что можно проанализировать с помощью разложения Фурье, представленного на рис.10.



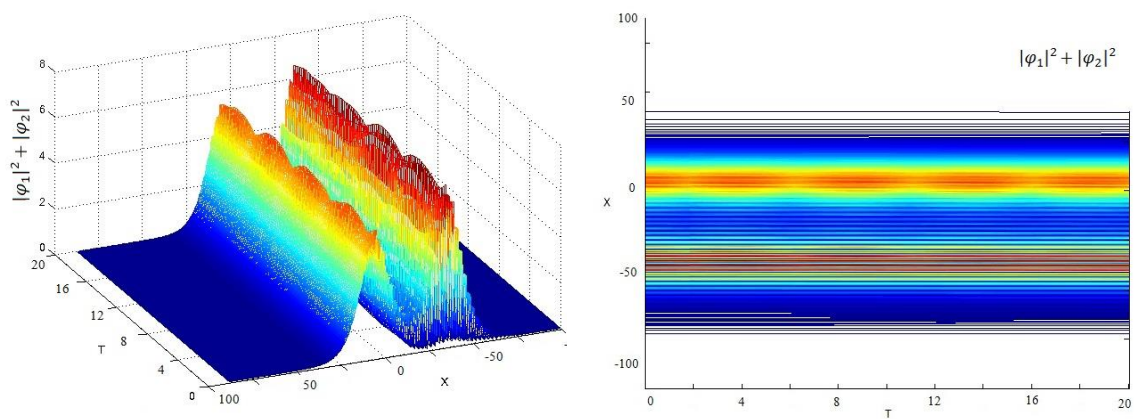
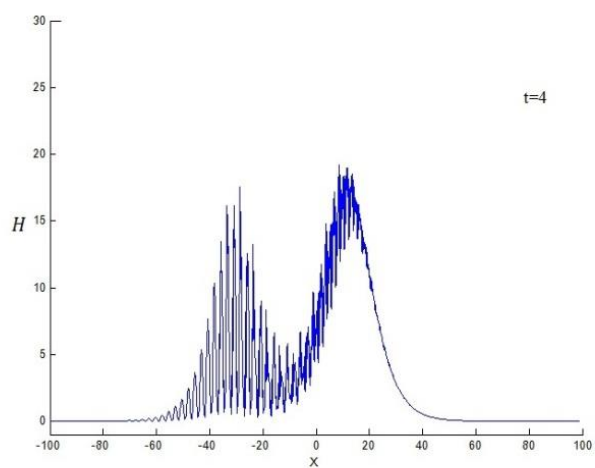
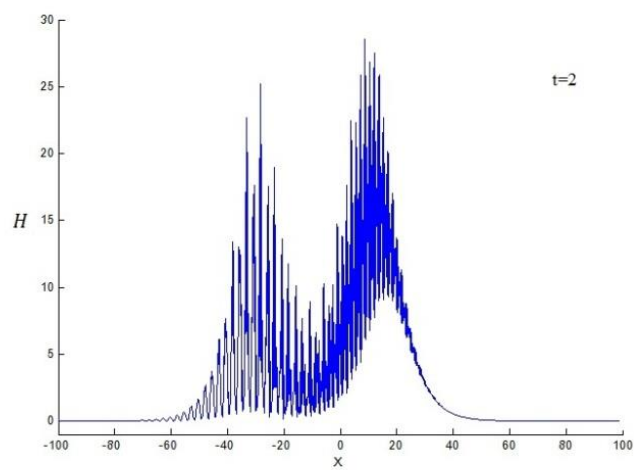


Рис. 8. График эволюции плотности числа частиц при скорости $v=0.24$. ($|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2$)



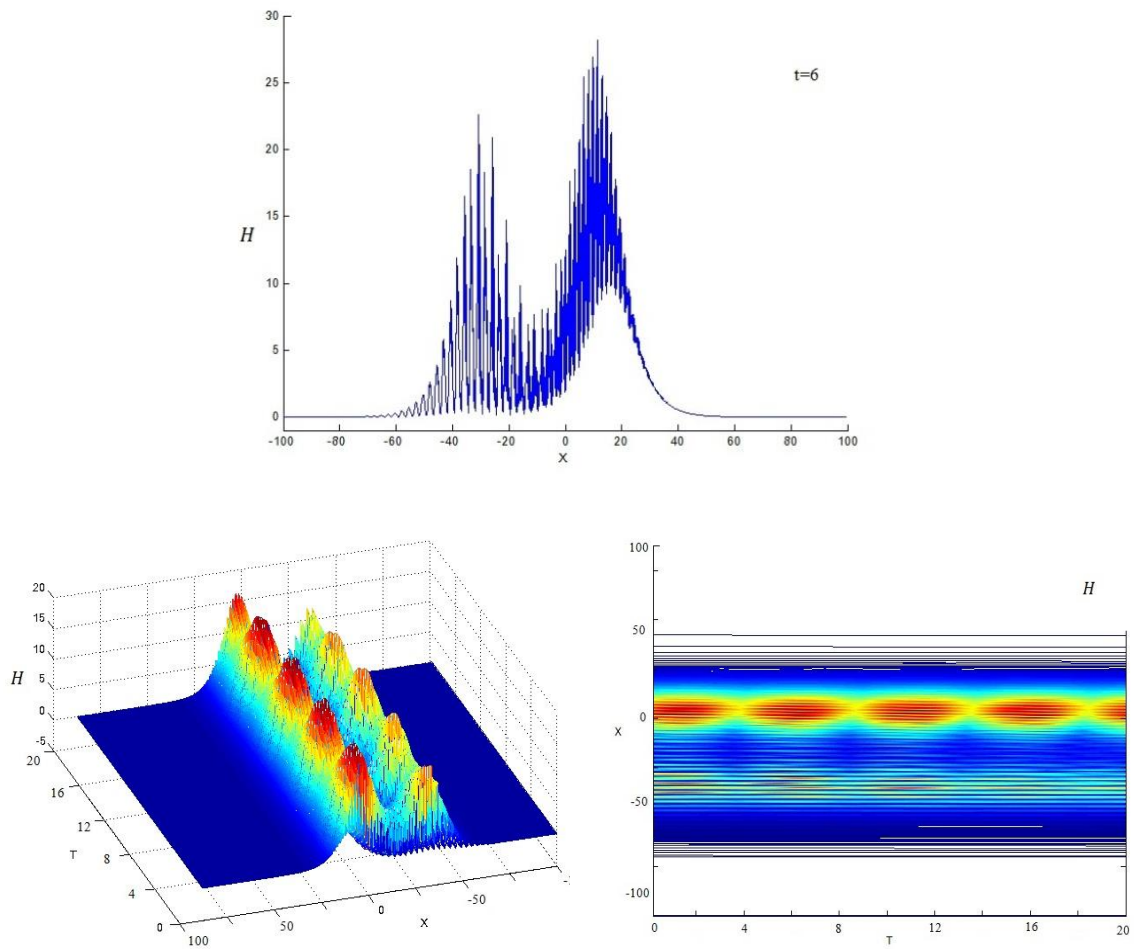


Рис. 9. График эволюции плотности энергии движущегося солитона.

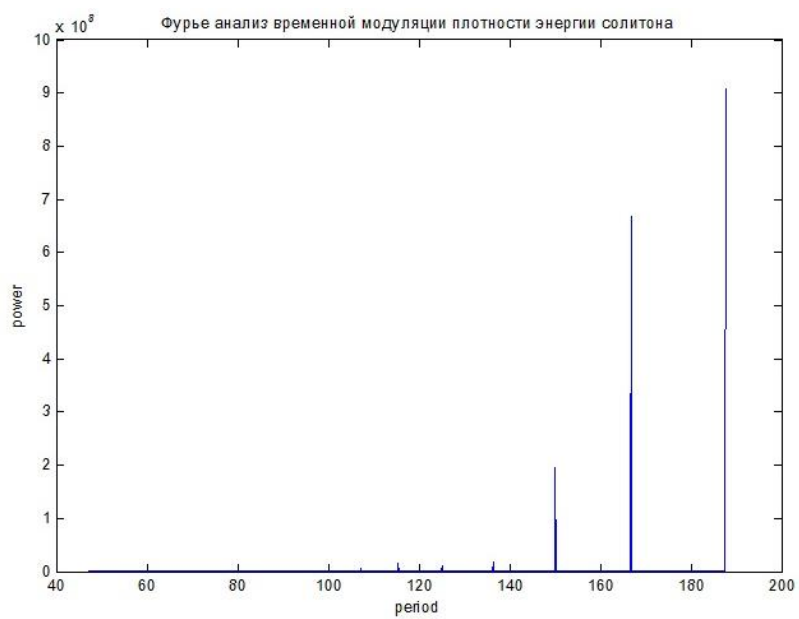


Рис. 10. Фурье-анализ временной модуляции плотности энергии движущегося солитона.

Из Фурье-анализа временной модуляции плотности энергии движущегося солитона (см. рис.10) видно, что мощность низких частот увеличивается, по крайней мере, на порядок, по сравнению с неподвижным солитоном (см. рис. 5), при этом мощность высокочастотных колебаний увеличивается также в разы.

Таким образом, численное моделирование многосолитонного решения (3) ВНУШ (1) с самосогласованным потенциалом (2) демонстрирует отсутствие бризерной динамики неподвижного решения. При движении солитона усиливается как пространственная, так и временная модуляция, проявляется бризерная динамика внутренних степеней свободы многосолитонного решения, в основном на трёх выделенных частотах. При этом солитон демонстрирует свою устойчивость, интегралы движения сохраняются с высокой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Славнов Н.А. Одномерный двухкомпонентный бозе-газ и алгебраический анзац Бете. – ТМФ, т. 183, №3, с. 409-433.
2. Khanh N.Q. Magnetoplasma oscillations of a two-dimensional, two-component plasma. – Modern Physics Letters B, 1996, V. 10, №16, 1996, pp. 737-744.
3. Bandrauk A.D., Yu H.T. Laser control of molecular ionization with intense short laser pulses. – International Journal of Mass Spectrometry, 1999, v. 192, № 1-3, pp. 379-386.
4. Salamin Y.I. Covariant electron dynamics in two interfering laser beams: analysis of the vacuum beat wave accelerator. – Physics Letters A, 2000, v. 270, № 3-4, pp. 115-121.
5. Colin T., Nkongla B. A numerical model for light interaction with a two-level atom medium. – Physica D: Nonlinear Phenomena, 2004, v. 188, № 1-2, pp. 92-118.
6. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х. Системы уравнений для ферромагнетиков с обменной и одноионной анизотропией. – Физика твердого тела, СПб., 1992, т.34, в.2, с.544-547.
7. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х. Общие динамические уравнения в пространстве $SU(2S+1)/SU(2S) \times U(1)$ и легкоосный магнетик со спином $S=3/2$. – Физика твердого тела, 1992, в.2, с. 429.
8. Дубровин Б.А., Маланюк Т.М., Кричевер И.М., Маханьков В.Г. Точные решения нестационарного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами. – ЭЧАЯ, 1988, т. 19, в. 3, с. 579-621.
9. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Курбониён М.С. Решение нелинейного уравнения Шредингера с учётом самосогласованных потенциалов – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2017, т. 60, №1-2, с. 50-56.
10. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х., Рахимов Ф.К., Маханьков В.Г. Двухсолитонные решения скалярного нелинейного уравнения Шредингера с конденсатными граничными условиями. – ЖТФ, СПб., 1995, т. 65, в. 6, с. 191-196.
11. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х. Новый тип двухсолитонных решений векторного нелинейного уравнения Шредингера со смешанными граничными условиями. – ЖТФ, СПб., 1993, т.63, №3, с.18-185.
12. Муминов Х.Х. – Вопросы теории нелинейных явлений в анизотропном магнетике с учётом мультипольных моментов: Автореф. дисс....д.физ.-мат. н. - Душанбе, 1996.

Ҳ.Ҳ.МҮМИНОВ, Ш.Ф.МУҲАМЕДОВА, М.АСҒАРӢ-ЛАРИМӢ
АМСИЛАСОЗИИ АДАДИИ ҲАЛЛҲОИ БИСӢРСОЛИТОНИИ
МУОДИЛАИ ВЕКТОРИИ ҒАЙРИХАТТИИ ШРЕДИНГЕР
БО ПОТЕНСИАЛИ $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$

*Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Амсиласозии ададии динамикаи эволютсияи ҳаллҳои бисёрсолитонии муодилаи вектории ғайрихаттии Шрёдингер бо потенциали худмухтори $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$, ки бо зе-гази дукомпонентаи модели назарияи майдони физикаи муҳитҳои конденсиро тасвир мекунад, гузаронида шудааст. Таҳлили динамикаи эволютсияи ҳалли бисёрсолитона нишон медиҳад, ки дар солитони беҳаракат динамикаи бризерӣ мушоҳида намешавад. Солитони ҳаракаткунанда бошад, дорои динамикаи бризерӣ буда, аз рӯи се басомади асосӣ ва модулятсияи вақтӣ муаррифӣ карда мешавад. Солитон ҳангоми нигоҳдории интегралҳои ҳаракат бо саҳеҳияти баланд худро устувор нигоҳ медорад.

Калимаҳои калидӣ: n -солитон, шартҳои сарҳадии тривиалӣ, муодилаи вектории ғайрихаттии Шрёдингер, бризер.

Kh.Kh.MUMINOV, Sh.F.MUHAMEDOVA, M.ASGHARI-LARIMI
NUMERICAL SIMULATION OF MULTI-SOLITONIC SOLUTION
OF THE VECTOR NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION
WITH A SELF-CONSISTENT POTENTIAL $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$

S.U.Umarov Physical-Technical Institute, Academy of the Republic of Tajikistan

Numerical simulation of the evolution of the multisoliton solution of the vector nonlinear Schrödinger equation with a self-consistent potential $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$, describing a two-component Bose-gas in field-theoretical models of physics of condensed matter is carried out. Analysis of the dynamics of the evolution of multisoliton solutions shows that there is no significant breather dynamics of the motionless soliton. The mobile soliton exhibits substantial breather dynamics at three fundamental frequencies of time modulation. Soliton demonstrates stability while retaining the integral of motion with high accuracy.

Key words: n -soliton solution, trivial boundary conditions, vector nonlinear Schrödinger equation, breather.

УДК 546.273-521.633

Д.Х.МИРЗОЕВ, С.М.ГАФОРЗОДА, Ш.Д.ОТАЕВ, Ш.Б.НАЗАРОВ

**ВОДНО-СОЛЯНОКИСЛОТНОЕ ВЫЩЕЛАЧИВАНИЕ ЗЕЛЁНЫХ ГЛИН
МЕСТОРОЖДЕНИЯ ЧАШМА-САНГ ТАДЖИКИСТАНА
С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ СПЕКАНИЕМ С ХЛОРИСТЫМ КАЛЬЦИЕМ**

Институт химии им.В.И.Никитина АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 18.07.2018 г.

Приведены результаты изучения двухстадийного водно-солянокислотного выщелачивания зелёной глины месторождения Чашма-Санг с предварительным спеканием с хлористым кальцием. Найдены оптимальные условия выделения полезных компонентов из руды.

Ключевые слова: зелёная глина, водно-солянокислотное выщелачивание, спекание, хлористый кальций.

В работах [1,2] было изучено разложение зелёных и каолиновых глин месторождения Чашма-Санг серной, соляной и азотной кислотами. В [3-5] изучены спекательные способы разложения алюмосиликатных руд различными реагентами.

Целью настоящей работы явилось изучение условий разложения зелёных глин. На первой стадии при спекании зелёной глины с хлористым кальцием при температуре 800°C и продолжительности 1 час, с дальнейшим растворением в воде в раствор переходит 10-12% Al_2O_3 , а выделения Fe_2O_3 не происходит. На второй стадии при солянокислотном разложении в раствор переходит от 85 до 87% Al_2O_3 и от 45 до 47% Fe_2O_3 .

Как видно из рис.а, максимальная степень извлечения компонентов достигается при температуре 98°C и составляет: для Al_2O_3 – 87%, для Fe_2O_3 – 47%.

Адрес для корреспонденции: Мирзоев Давлатмурод Хайруллоевич. 734063, Республики Таджикистан, г.Душанбе, ул.Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: davlatmurod.mirzoev.71@mail.ru

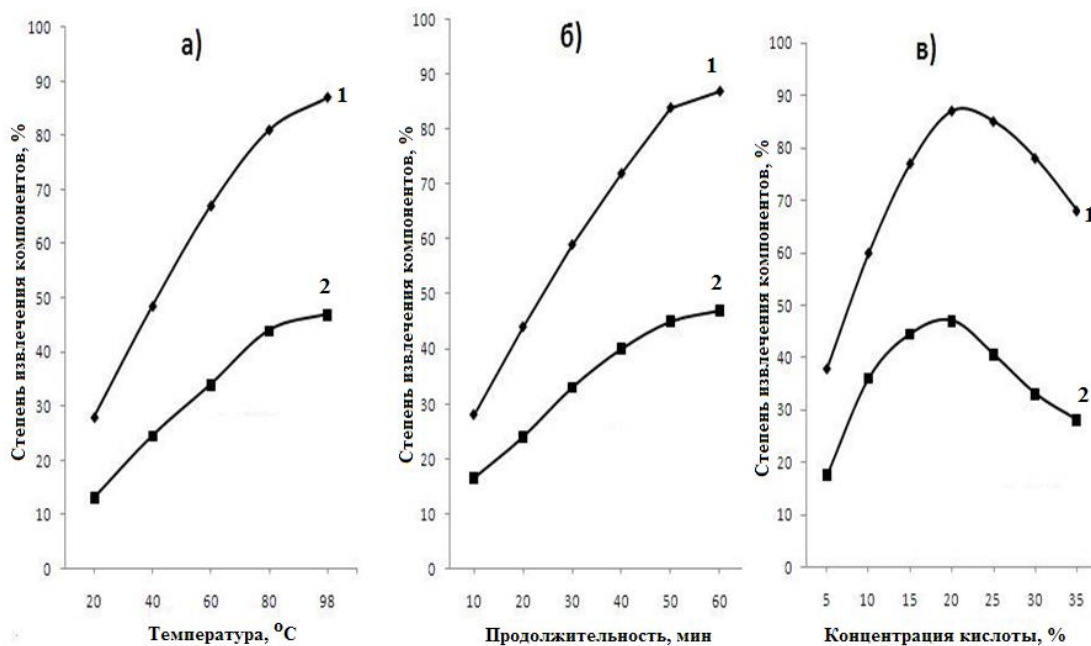


Рис. Зависимость степени извлечения оксидов алюминия и железа в раствор от: температуры (а), продолжительности процесса (б) и концентрации соляной кислоты (в).

Зависимости степени извлечения оксидов алюминия и железа от продолжительности соляно-кислотной обработки изучали в интервале 10-60 мин (рис.б). Максимальная степень извлечения оксидов достигается при обработке зелёной глины 20% HCl в течение 60 мин.

Влияние концентрации HCl на разложение руды изучали в интервале 5-35%, неизменными факторами процесса являлись: температура – 98°C, продолжительность водной обработки в первой стадии – 30-60 мин, во второй стадии при соляно-кислотной обработке – 60 мин.

Из рис.в видно, что максимальное извлечение оксидов достигается при обработке руды 20% соляной кислотой.

Таким образом, можно рекомендовать следующие условия разложения зелёной глины месторождения Чашма-Санг: спекание при температуре 800°C, соотношение руды и хлористого кальция = 1:1, продолжительность спекания - 1 час, температура водно- и солянокислотного разложения – 98°C, продолжительность обработки водой 30 мин, а соляной кислотой – 60 мин, концентрация соляной кислоты 20%, размер частиц – 0.1мм. При этих условиях извлечение Al₂O₃ составляет 87%, Fe₂O₃ – 47%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирсаидов У.М., Мирзоев Д.Х., Бобоев Х.Э. Комплексная переработка аргиллитов и каолиновых глин Таджикистана.- Душанбе: Дониш, 2016, 92 с.
2. Мирзоев Д.Х., Бобоев Х.Э., Пулатов М.С., Мирсаидов У.М. Сернокислотное разложение зелёных глин месторождения Чашма-Санг. –ДАН РТ, 2005, т.48, №4, с36-42.

3. Назаров Ш.Б., Баротов А.М., Курбонов А.С., Мисратов Ж.А., Мирсаидов У.М. Изучение особенностей разложения бор- и алюмосиликатных руд спеканием с CaCl_2 . – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат, хим., геол. и техн. н., 2017, №2(167), с.95-100.
4. Назаров Ш.Б., Сафиев Х.С., Мирсаидов У.М. Селективные методы разложения высококремнистых алюминиевых руд минеральными кислотами. – Душанбе: Дониш, 2008, 237 с.
5. Назаров Ш.Б., Запольский А.К., Сафиев Х.С., Мирсаидов У.М. Использование промышленных отходов при переработке алюминиевого сырья. – Комплексное использование минерального сырья. – Алма-Ата, 1992, №5, с.72-75.

Д.Х.МИРЗОЕВ, С.М.ГАФОРЗОДА, Ш.Д.ОТАЕВ, Ш.Б.НАЗАРОВ

**КОРКАРДИ ГИЛХОКИ САБЗИ ЧАШМА-САНГ ТОЧИКИСТОН БО ОБ
ВА КИСЛОТАИ ХЛОРИД БО ПЕШАКИ ТАЙЁР НАМУДАНИ
ГУДОЗИШИ ХЛОРИДИ КАЛТСИЙ**

Институти кимиёи ба номи В.И.Никитини Академия илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақолаи зерин омӯзиши коркарди гилхоки сабзи Чашма-Санг дар дузина: якум бо об вазианаи дуюм бо кислотаи хлорид бо пешаки тайёр намудани гудозиш бо хлориди калтсий омукта шудааст. Шароитҳои қулай барои чудошавии модаҳои зарури аз чинси кӯҳии гилхоки сабз дар ёфт карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: гилхоки сабз, коркарди ду зинаги бо об ва кислотаи хлорид, гудозиш бо хлориди калтсий.

D.Kh.MIRZOEV, S.M.GAFORZODA, Sh.D.OTAEV, Sh.B.NAZAROV

**AQUEOUS-HYDROCHLORIC ACID LEACHING OF GREEN CLAYS
OF CHASHMA-SANG OF REPUBLIC OF TAJIKISTAN DEPOSIT
WITH PRELIMINARY SINTERING WITH CALCIUM CHLORIDE**

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

The results of study of aqueous-hydrochloric acid leaching of green clays of Chashma-Sang Deposit with preliminary sintering with calcium chloride are considered in the paper. The optimal conditions of extraction of valuable components from the ore are defined.

Key words: green clay, aqueous-hydrochloric acid leaching, sintering, calcium chloride.

УДК 547.1 (075.8)

Ш.Х.ХАЛИКОВ, Ж.ОЛИФТАЕВА*, М.УМАРХОН

**ВЫДЕЛЕНИЕ И СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ГУМИНОВЫХ КИСЛОТ ИЗ БУРОГО УГЛЯ МЕСТОРОЖДЕНИЯ
«ШУРОБ»**

Таджикский национальный университет,

**Хорогский государственный университет им. М. Назаршоева*

В статье рассматривается выделение гуминовых кислот из бурого угля месторождения «Шуроб» Республики Таджикистан. Путём спектрального и элементного анализа определён характеристический структурно-групповой состав гуминовых кислот. Выявлено, что в буром угле «Шуроб» присутствие гуминовых кислот связано с детерминацией генезиса гумусовых кислот в природных условиях.

Ключевые слова: щелочь, уголь, гуминовые кислоты, гумусы, гуматы, зола, экстракция.

Гуминовые кислоты (Г.к.) широко распространены в природе и являются существенным компонентом бурых и каменных углей. В составе комплексов Г.к. содержатся биологические основные органические соединения, в том числе природные полисахариды, стеринны, белки, пептиды, до 20 аминокислот, витамины, минералы, жирные кислоты, полифенолы, флавоноиды, катехины, дубильные вещества, токоферолы, хиноны и конечно до 20 химических элементов.

Наличие в этих соединениях таких функциональных групп, как карбоксильная, гидроксильная, карбонильная, аминная и др. в сочетании с присутствием ароматических структур обеспечивает способность Г.к. вступать в ионные и донорно-акцепторное взаимодействия [1], способствующие образования гипотетической структуры разного уровня с нерегулярной последовательностью [2-4]. Постоянное присутствие химических элементов в золах угля и Г.к., обнаруженных после обжига свидетельствует о том, что в некоторых случаях комплексообразующими агентами с органическими лигандами являются ионы некоторых переходных металлов, как Fe, Mn, Al, Mo.

Адрес для корреспонденции: Халиков Ширинбек Халикович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: Xalikov1941@mail.ru.

Основной метод, при помощи которого выделяют гуминовые кислоты из состава бурых углей, – щелочная экстракция растворами аммиака и гидроксидами калия или натрия. Такая обработка переводит их в водорастворимые соли-гуматы калия или натрия, обладающие высокой биологической активностью. Метод практически безотходный. Можно также экстрагировать Г.к. диметилсульфоксидом.

В Таджикистане имеется более 30-ти малоизученных месторождений бурого и каменного угля, среди которых важное место занимает широко используемые залежи угля «Шуроб». Целью данной работы является экстракция гуминовых кислот из состава бурого угля месторождения «Шуроб» и изучение структурно-функциональной особенности Г.к. с помощью ИК- и ЯМР¹³C спектроскопии. Нами осуществлена экстракция гуминовых кислот из состава бурого угля данного месторождения. Первый этап нашей работы заключался в определении влаги данного угля [5]. Для определения влажности также был использован метод Хоффмана (1985), заключающийся в высушивании образца угля при повышенной температуре над P₂O₅ до постоянного веса. Для освобождения угля от битумных соединений, содержимое обрабатывали толуолом [6]. Для определения общей золы использовали метод определения по весу несгораемого остатка после полного сжигания на воздухе [7] и взвешивания остатка после обжига. Для определения общего выхода гуминовых кислот использовали пирофосфатный метод (Na₄P₂O₇) [8]. Общую массовую долю гуминовых кислот и выход свободных гуминовых кислот в пересчёте на сухое беззольное или сухое беззольное и безбитумное состояние в процентах вычисляли по формуле:

$$m_x = \frac{100 \cdot V \cdot (m_1 - m_2)}{V_1 \cdot m}, \quad (1)$$

где m_1 – масса сухих гуминовых кислот (г); m_2 – масса золы гуминовых кислот г.; V – общий объём щелочного раствора (см³); V_1 – общий объём аликвоты щелочного раствора, взятой для осаждения гуминовых кислот (см³).

Масса навески угля (m_y) в расчёте на сухое беззольное состояние (г), вычисляли по формуле:

$$m_y = m_3 \frac{100 - (W^a + A^a)}{100}, \quad (2)$$

где m_3 – масса навески угля (г); W^a – массовая доля аналитической влаги в угле, (%); A^a – зольность аналитической пробы угля (%).

Выделенные гуминовые кислоты представляют собой темно-коричневую массу, не имеющую четкого значения температуры плавления.

Зольные элементы бурого угля (А) и гуминовых кислот (Б) определяли по методу атомно-эмиссионного спектрографического анализа на приборе ДФС-452. Концентрации элементов выражены в массовых долях % и соответственно равны: (А) Mn (0.096), Zn

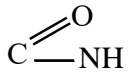
(0.00021), Al (11.437), Fe (0.508), Pb (0.00038), Ni (0.03), Ca (9.351), Sn (0.000237), V(0.001995), Cu (0.00513), Ag (0.00013), Si (26.885), Ti (0.2337), Mo (0,00011), B (0.0023), Mg (0.943), Na (0.126).

(Б) Mn (0.155), Zn (0.632), Al (31.153), Fe (17.71), Pb (0.277), Ni (0.006), Ca (6.462), Sn (0.022), V (0.0027), Cu (0.019), Ag (0.000176), Si (16.442), Ti (1.527), Mo (0.0018), B (до 0.01), Mg (до 3), Na (0.756).

В табл. 1 приведены типичные диапазоны ИК-спектров, обнаруженные в экстракте Г.к.

Таблица 1

ИК-спектры экстракта гуминовых кислот бурого угля «Шуроб» (ν , см^{-1})

Отнесение	Диапазон, см^{-1} (обнаружено)	Примечание
N–H, O–H	3394–3348	слабая
N–H в NH_2	3259–3223	слабая
	3300	слабая
O–H связанная H – связью	2864	слабая
C–H связь в аминах	2880–2835	слабая
ОН кислоты связана H–связью	2922	слабая
NH, связанная H–связью в пирроле	2852	слабая
Алифатические нитросоединения C–NO ₂ (C–N)	1380–1350	сильная
C–OH	1170–1155	слабая
Высшие алифатические сложные эфиры	1185–1155	слабая
C = O	1700	
NH ₂ и NH	850–700	средняя
CH – аромат.	770–761	средняя
C–O	1093–1060	слабая
CO – C (гетероцикл.)	1184	слабая
Многоядерные ароматические соединения	3037	
Фенолы	1927–1764	слабые полосы

Характерная особенность ИК-спектров экстракта гуминовых кислот заключается в присутствии слабой широкой полосы поглощения в области $3500\text{--}3300\text{ см}^{-1}$, соответствующей валентным колебаниям связи N–H в NH_2 . Водородная связь сдвигает поглощение амина в сторону низких частот, но вследствие того, что связь NH–N слабее, чем водородная связь OH...O, этот сдвиг имеет меньшую величину и полосы менее интенсивны, чем в случае OH–группы, связанной водородной связью в спиртах. Отнесение полос поглощения, обусловленного колебаниями C–N, представляет большую трудность из-за агрегации разнообразных молекул, исключение составляют ароматические амины, которые довольно сильно поглощают в области $1400\text{--}1300\text{ см}^{-1}$. Спектр поглощения в области $3350\text{--}3348\text{ см}^{-1}$, находящийся в широкой полосе, характерной для OH–группы, зависит от водородной связи. Сдвиг частоты приблизительно на $200\text{--}100\text{ см}^{-1}$ зависит от того, что водородная связь ослабляет связь O–H, поэтому поглощение должно происходить при более низкой частоте. Широкая полоса обусловлена тем, что OH–группы ассоциированы в агре-

гаты различного размера и формы, вследствие различных типов ассоциации, особенно COOH группы. Существует большое разнообразие видов водородной связи и поглощение приводит к спектру, состоящему из тесно расположенных полос, обусловленных OH, CO, NH, NO₂ – (углеводы) группами, образующими внутримолекулярные водородные связи, дающие близкие спектры в области 3700-3450 см⁻¹ в виде накладки. Такая же картина наблюдается в области 2000-1500 см⁻¹ за счёт тесно расположенных спектров из-за богатого состава исследуемого экстракта.

В этой сложной многокомпонентной смеси Г.к. имеются полосы мешающих примесей для точного и четкого проявления спектров поглощения. Например, пары воды проявляются в виде многочисленных узких полос между 2000 и 1280 см⁻¹. CO₂ может образовывать с аминами и водой карбонаты, дающие неожиданные полосы протонированных N-содержащих групп.

В табл. 2 приводятся основные результаты ЯМР¹³C спектров выделенного экстракта гуминовых кислот при 60 МГц. Химические сдвиги представлены в м.д. относительно ТМС с корректировкой на различие в величине объёмной восприимчивости раствора в стандарте. Сравнения спектров ЯМР¹³C различных групп подтверждает многокомпонентность состава Г.к. с разнообразной структурой.

Таблица 2

Химические сдвиги ядер ¹³C в различных комплексных соединениях Г.к. с незначительным диапазоном в спектрах ЯМР¹³C

Диапазон, м.д.	Отнесение сигналов
20,5-30,1	группа CH ₃
26,5-56	группа CH ₂
39-60	группа CH
22-38	C в COOH
44-75	CH ₂ группы в сложных радикалах
42-180	CH ₂ группы в α - положении к COOH группе.
59-80	C в CH ₂ OH группе
76-90	C в CH(OH) группе.
118,5-135	Углерод бензольного кольца о – положении
134-160	Углерод алкильных групп в бензольном кольце.
120-151	O и N замещенный углерод ароматических колец.
160-167	Углерод в COOH, сложных эфиров и амидов
190-215	C в C = O и CNO групп

Экспериментальная часть

Экстракция битумов из угля толуолом (I). Экстракцию проводили на аппарате Сокслета толуолом с выходом 11.1% от количество взятого до экстракции угля [6].

Определение влаги в испытуемом угле (II). Влагу определяли после экстракции битумов толуолом и высушиванием в сушильном шкафу при температуре 100-110°C в течение 2 часов согласно [5]. Содержащаяся в нем влага составляла 11.59%. Это средний результат после трёх последовательных измерений.

Определение зольности угля (III) проводили путем сжигания угля в муфельной печи при 700°C в течение 3 часов, которая после трёх последовательных измерений составляло 15.36% от взятого количества угля.

Выделение гуминовых кислот из бурого угля (IV) [8]. 2 г сухого угля помещают в коническую колбу вместимостью 0.5 л (колба А), приливают 100 мл щелочного раствора пирофосфата натрия ($\text{Na}_4\text{P}_2\text{O}_7$) (11.8 г $\text{Na}_4\text{P}_2\text{O}_7$ + +1 г NaOH + 250 мл H_2O) и интенсивно перемешивают с помощью механической мешалки в течение 1.5-2 часов, затем содержимое в виде суспензии центрифугируют 15-20 мин. и водную часть, декантируя, переносят в другую колбу (колба Б). Оставшийся осадок промывают 100 мл 1%-ным раствором NaOH и центрифугируют. Водную часть, декантируя, собирают и приливают в колбу Б, а осадок повторно промывают 1%-ным раствором NaOH . Осадок переносят в колбу А и содержимое нагревают в течение 2 часов на водяной бане, затем центрифугируют. Водную часть декантируют в колбу В, оставшийся осадок промывают еще два раза по 100 мл 10%-ным раствором NaOH и центрифугируют, водную часть декантируют и приливают в колбу Б. Содержимое в колбе Б фильтруют бумажным фильтром и переносят в мерную колбу на 1 л (колба В) и доводят объём дистиллированной водой до метки. Из этого объёма берут 100 мл раствора в коническую колбу и к нему добавляют 60 мл 5%-го раствора HCl , через некоторое время из раствора начинается выпадение гуминовых кислот. Выпавший осадок составлял 1.75% от массы взятого угля. Вес золы 0.035 г гуминовых кислот после обжига в прокаленном до постоянной массы тигля составляет 0.0022 г (6.28%).

Используя формулу (1), определяют массу угля в расчете угля на сухое беззольное состояние получают 1.7305 г.

Применяя формулу (2), определяют выход свободных гуминовых кислот в пересчёте на сухое беззольное или сухое беззольное и безбитумное состояние; усредненный результат трех опытов по содержанию составляет 20.34%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов Д.С. Гумусовые кислоты почв и общая теория гумификации. – М.: Изд-во МГУ, 1991, 324 с.
2. Кухаренко Т.А. О молекулярной структуре гуминовых кислот. – В сб. Гуминовые вещества в биосфере. – М.: Наука, 1993, 31 с.
3. Schulten H.R. A state of the art structural concert for humis substances. – М.: Naturwissenschaften, 1993, v. 80, pp. 29-30.
4. Schulten H.R., Schnitzer M. Chemical model structures for soft organic matter and soils. – Soil Science, 1997, № 2, pp. 115-130.
5. ГОСТ 27314-91(ИСО 589-81): Топливо твердое минеральное. Методы определения влаги.
6. ГОСТ 10969-91: Угли бурые и лигниты.
7. ГОСТ 9517-76: Угли бурые и каменные.
8. ГОСТ 11022-95: Топливо твердое минеральное. Методы определения зольности.

Ш.Х.ХОЛИҚОВ, Ж.А.ОЛИФТАЕВА*, М.УМАРХОН

ЭКСТРАКЦИЯ ВА ТАХИКИКИ СОХТОРИ-ФУНКЦИОНАЛИИ КИСЛОТАҲОИ ГУМИНӢ АЗ АНГИШТИ БУРИ КОНИ «ШУРОБ»

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,

**Донишгоҳи давлатии Хоруг ба номи М.Назаршоев*

Дар мақолаи мазкур тарзи чудо намудани кислотаҳои гумини аз ангишти бўри кони «Шуроб»-и Ҷумҳурии Тоҷикистон оварда шудааст. Тавассути таҳлили спектралӣ ва таркибӣ, тавсифи сохтори гурӯҳҳои кислотаҳои гуминӣ оварда шудааст. Дар ангишти бўри кони «Шуроб» мавҷудияти кислотаҳои гуминӣ ба детерминатсияи генезиси кислотаҳои гумусӣ дар шароити табиӣ вобаста мебошад.

Калимаҳои калидӣ: ишқор, ангишт, кислотаи гуминӣ, гумат, битум, хокистар, экстраксия.

SH.H.HALIKOV, J.A.OLIFTAEVA*, M.UMARHON

RELEASE OF HUMIC ACIDS IN THE FORM OF THE COMPLEX FROM COAL OF «SHUROB»

Tajik national university,

**M.Nazarshoyev Horogsky state university*

In the paper the release of humic acids from brown coal of the Shurob field of the Republic of Tajikistan is considered. By the spectral and composition analysis the characteristic structurally – group composition of humic acids is defined. It is revealed that in brown Shurob coal presence of humic acids is connected with determination of genesis of humic acids in nature.

Key words: alkali, coal, humic acids, humuses, humates, ashes, extraction.

УДК 546.273÷661.833.532

М.М.ТАГОЕВ, Ш.Б.НАЗАРОВ, Ж.А.МИСРАТОВ, У.М.МИРСАИДОВ

**КИНЕТИКА ПРОЦЕССА СПЕКАНИЯ БОРОСИЛИКАТНОГО СЫРЬЯ И
ЕГО КОНЦЕНТРАТА С СУЛЬФАТОМ НАТРИЯ**

Институт химии им. В.И.Никитина АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 08.02.2018 г.

Представлены результаты изучения разложения боросиликатного сырья месторождения Ак-Архар и его концентрата спекательным способом с сульфатом натрия. Определены механизмы протекающих реакций и изучена кинетика процесса.

Ключевые слова: боросиликатная руда, концентрат, спекание, кинетика, сульфат натрия.

Ранее в работах [1-4] были изучены процессы разложения боросиликатных руд с различными минеральными кислотами, включая кинетику этих процессов. Вследствие трудности разложения боросиликатных руд, содержащих много трудно-вскрываемых минералов, нами выбран способ спекания сырья в присутствии активирующего агента с последующей обработкой полученного спека раствором серной кислоты.

В качестве активатора использовали сульфат натрия. В процессе спекания руды с сульфатом натрия происходит разрушение внутренних конструкций упорных минералов, при этом образуются легко растворяющиеся в минеральных кислотах соединения.

Целью данной работы является исследование кинетики процесса совместного спекания исходного боросиликатного сырья, а также концентрата руды с сульфатом натрия, определение механизмов протекающих реакций и установление кинетических параметров процесса термохимического разложения сырья.

Боросиликатную руду смешивали с безводным сульфатом натрия в массовых соотношениях 1:2, и полученную смесь прокаливали в интервале температур от 600 до 950°C в течение одного часа. Полученный спек измельчали и обрабатывали раствором 20% серной кислоты при температуре 90°C.

Адрес для корреспонденции: Тагоев Муродбек Махмадалиевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: murodbek.tagoev@mail.ru

Кинетику процесса спекания боросиликатного сырья с сульфатом натрия исследовали в интервале температур 600-950°C и при продолжительности процесса от 10 до 60 минут. На основе полученных результатов построили кинетические кривые, которые показаны на рис.1.

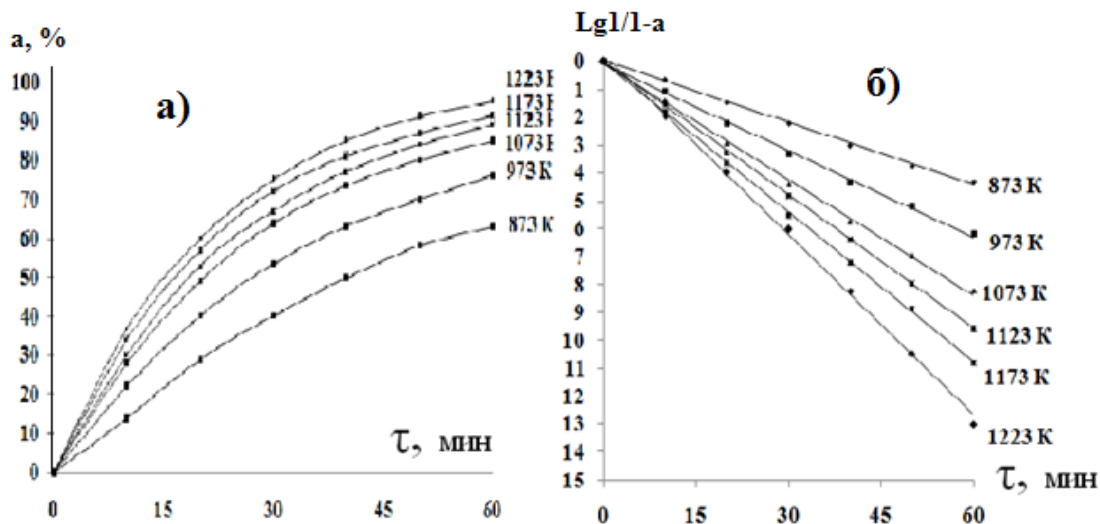


Рис.1. Зависимость степени извлечения оксида бора от времени (а) и $\lg \frac{1}{1-\alpha}$ от времени (б) при спекании исходного сырья с сульфатом натрия.

Из рис.1а видно, что с увеличением температуры и продолжительности процесса спекания степень извлечения оксида бора из состава боросиликатного сырья значительно возрастает. Максимальное извлечение B_2O_3 наблюдается при продолжительности спекания 60 мин. Кинетические кривые хорошо описываются уравнением первого порядка:

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = K \cdot (1-\alpha),$$

где: α – степень извлечения B_2O_3 ; τ – время, мин; K – константа скорости разложения, мин^{-1} .

После несложных математических преобразований получим выражение в виде:

$$\lg(1-\alpha) = -\frac{K \cdot \tau}{2,303}.$$

На графике зависимости $\lg \frac{1}{1-\alpha}$ от времени (рис.1б) полученные прямые имеют отрицательный наклон, равный $\frac{K}{2,303}$. Величину кажущейся энергии активации (E) и предэкспоненциальный множитель (K_0) определяли графическим методом с использова-

нием уравнения Аррениуса: $K=K_0 \cdot e^{-E/RT}$ или $\lg K = -\lg K_0 - \frac{E}{2,303RT}$, где: R – универсальная газовая постоянная, кДж/моль·град, T – абсолютная температура, К.

Для нахождения энергии активации и более точного определения области протекания процесса спекания построили график зависимости логарифма средних значений констант скоростей реакции от обратной абсолютной температуры (рис.2), он даёт прямую линию, по тангенсу угла наклона рассчитывали значение энергии активации по формуле:

$$E = 2.3 \cdot R / \text{tg} \alpha / \xi,$$

где: R - универсальная газовая постоянная, α - угол наклона прямой линии, ξ – отношение масштаба по оси абсцисс к масштабу по оси ординат.

Как видно из рис.2, точки удовлетворительно укладываются на прямую линию Аррениуса, по наклону которой вычислена величина кажущейся энергии активации, равная 26.4 кДж/моль. Численное значение энергии активации и зависимость скорости реакции от температуры и продолжительности процесса спекания исходного боросиликатного сырья свидетельствуют о его протекании в диффузионной области.

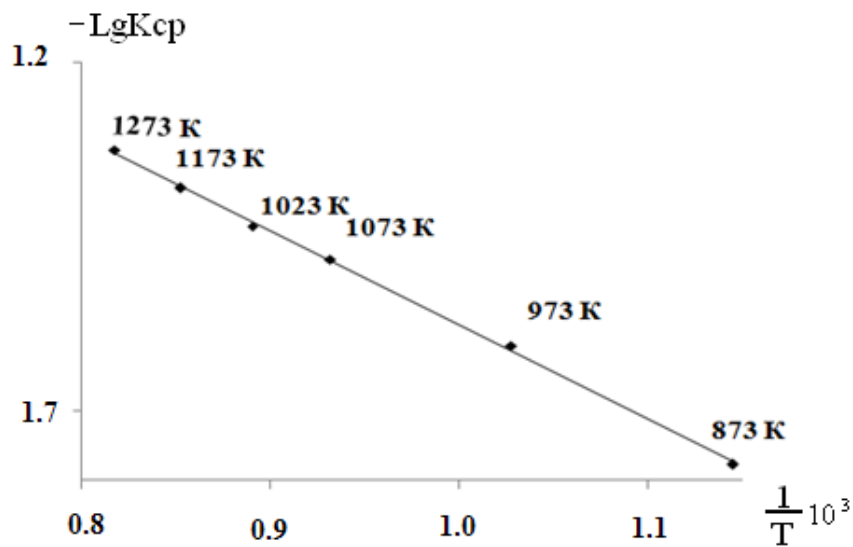


Рис.2. Зависимость $\lg K$ от обратной абсолютной температуры при спекании исходной боросиликатной руды с сульфатом натрия.

Далее нами была изучена кинетика процесса спекания боросиликатного концентрата с сульфатом натрия. Экспериментальные данные зависимости сернокислотного разложения спёка при извлечении оксида бора, изученные в интервале температур 600-850°C и при продолжительности процесса от 15 до 60 мин., представлены на рис.3а, из которого видно, что при повышении температуры извлечение оксида бора из состава концентрата

боросиликатного сырья значительно возрастает. В изученном интервале температур степень извлечения оксида бора увеличивается от 24.1 до 97.8%

Константы скорости разложения борного сырья рассчитывали по кинетическому уравнению первого порядка. Построенные графики зависимости $\lg 1/(1-\alpha) \cdot 10$ от времени удовлетворительно укладываются на прямую линию, имеющую отрицательный наклон (рис.3б).

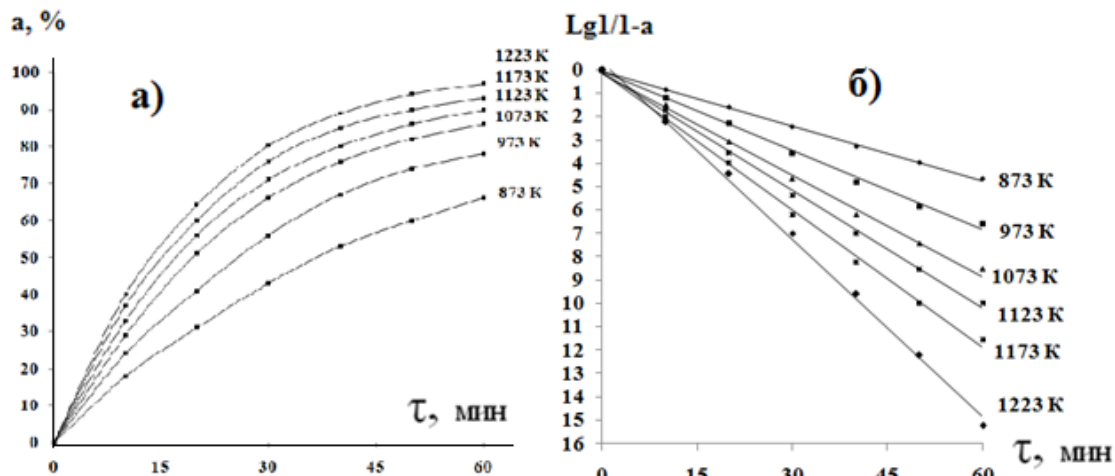


Рис.3. Зависимость степени извлечения оксида бора от времени (а) и $\lg \frac{1}{1-\alpha}$ от времени (б) при спекании концентрата боросиликатного сырья с сульфатом натрия.

На рис.4 приведена зависимость логарифма константы скорости процесса спекания боросиликатного концентрата с сульфатом натрия от величины обратной абсолютной температуры.

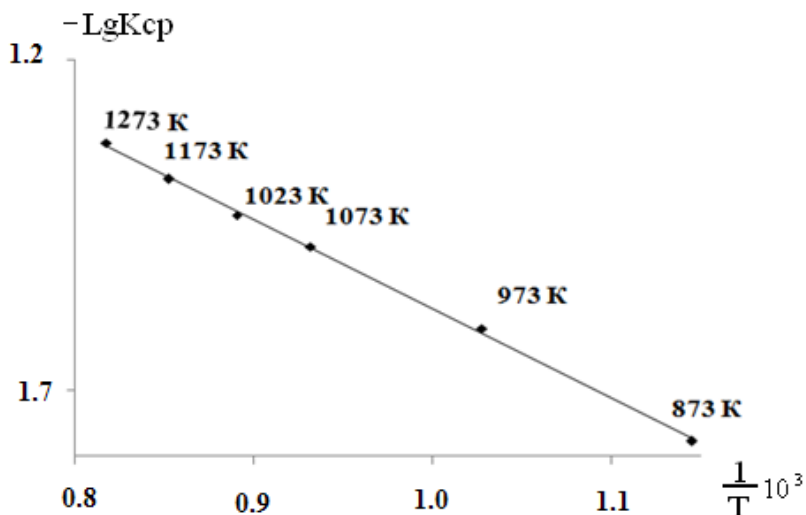


Рис.4. Зависимость $\lg K$ от обратной абсолютной температуры при спекании боросиликатного концентрата с сульфатом натрия.

Точки удовлетворительно укладываются на прямую линию Аррениуса, по наклону которой вычислена величина кажущейся энергии активации, равная 29.19 кДж/моль. Численное значение энергии активации процесса спекания боросиликатного концентрата с сульфатом натрия также свидетельствует о его протекании в диффузионной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маматов Э.Д., Курбонов А.С., Ашуров Н.А. и др. Выщелачивание концентрата данбурита азотной кислотой. - Известия вузов. Прикладная химия и технология. – Иркутск, 2012, №2, с.173-176.
2. Ашуров Н.А., Маматов Э.Д., Ятимов П., Мирсаидов У.М. Кинетика сернокислотного разложения данбурита месторождения Ак-Архар Таджикистана. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2008, №4(133), с.43-47.
3. Маматов Э.Д., Ашуров Н.А., Курбонов А.С. и др. Солянокислотное разложение предварительно обожжённого данбурита месторождения Ак-Архар. – ДАН РТ, 2008, т.51, №5, с.356-361.
4. Курбонов А.С., Баротов А.М., Якубов З.Т., Назаров Ф.А., Мирсаидов У.М. Кинетика уксуснокислотного разложения обожжённого данбуритового концентрата. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2014, №4(157), с.829-833.

М.М.ТАҒОЕВ, Ш.Б.НАЗАРОВ, Ҷ.А.МИСРАТОВ, У.М.МИРСАИДОВ

КИНЕТИКАИ РАВАНДИ ГУДОХТАНИ АШЌИ ХОМИ БОРОСИЛИКАТЌИ ВА КОНСЕНТРАТИ ОН БО СУЛФАТИ НАТРИЙ

Институту химияи ба номи В.И.Никитини Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Натиҷаҳои таҳқиқи таъзияи ашӯи хоми боросиликати кони Ак-Архар ва концентрати он бо сулфати натрий бо усули пухтан пешниҳод шудаанд. Механизми таомулҳои ба амал омада муайян карда шудаанд ва кинетикаи раванд омӯхта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: маъдани боросиликати, концентрат, пухтан, кинетика, сулфати натрий.

M.M.TAGOEV, Sh.B.NAZAROV, Zh.A.MISRATOV, U.M.MIRSAIDOV

KINETICS OF THE SINTERING PROCESS OF BOROSILICATE RAW MATERIAL AND ITS CONCENTRATE WITH SODIUM SULPHATE

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

The results of the studies of borosilicate raw materials of the Ak-Arkhar field and its concentrate decomposition by the sintering method with sodium sulfate are presented. The mechanisms of the reactions are determined and the kinetics of the process is studied.

Key words: borosilicate ore, concentrate, sintering, kinetics, sodium sulfate.

УДК 550.812.14

С.С.САИДРАХМОНЗОДА

**УЧЁТ ОСОБЕННОСТЕЙ ТЕХНОЛОГИИ БУРЕНИЯ В ИНТЕРВАЛАХ,
ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХСЯ НАЛИЧИЕМ АВПД, ПРИ СОСТАВЛЕНИИ
ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОЕКТА СТРОИТЕЛЬСТВА СКВАЖИН
НА ПЛОЩАДИ «МАХРАМ»**

ОАО «Нафту газ» Республика Таджикистан

Поступила в редакцию 30.04.2018 г.

На основании данных предыдущих исследований и результатов бурения скважин на площади нефтяного месторождения Мархам подготовлены рекомендации для составления проектов новых поисково-разведочных скважин с учетом особенностей технологии бурения в интервалах, характеризующихся наличием АВПД.

Ключевые слова: аномальное, пласт, гидростатика, бурение, репрессия, площадь, литологический разрез, поиск, разведка, давление.

Аномальное пластовое давление (Abnormal reservoir pressure) - давление, действующее на флюиды (воду, нефть, газ), содержащиеся в поровом пространстве породы, величина которого отличается от нормального (гидростатического). Пластовые давления, превышающие гидростатическое, называют аномально высокими (АВПД), меньше гидростатического - аномально низкими (АНПД). Аномальное пластовое давление существует в изолированных системах. Генезис аномального пластового давления не до конца изучен.

Основной характеристикой АВПД является коэффициент аномальности (K_a). Коэффициент аномальности - отношение пластового давления к условному гидростатическому давлению, определенное для данной глубины замера (величина безразмерная). АВПД отвечает условиям: $R_{пл/у. гидр.} \geq 1.30$, а повышенные пластовые давления (ППД) отвечают условиям: $1.30 \geq R_{пл/у. гидр.} \geq 1.10$ [1].

Адрес для корреспонденции: Саидрахмонзода Саиджон Саидбурхон. 734018, Республика Таджикистан. г. Душанбе, ул. Мушфики 77, Открытое акционерное общество «Нафту газ». E-mail: saidjon0205@mail.ru

Аномально пластовые давления установлены бурением многочисленных скважин на суше и в акваториях при поисках, разведке и разработке нефтяных и газовых залежей в различных отложениях по геохронологической шкале в широком интервале глубин. АВПД встречается чаще, особенно на глубинах более 4 км.

С конца 70^х до 90^х гг. прошлого столетия вопросу изучения АВПД уделялось пристальное внимание. Были изучены геологические особенности, закономерности, механизмы формирования АВПД, а также разработаны различные приемы и способы оценки пластовых давлений как до бурения скважин, так и в процессе их проходки. Многие исследователи отмечали связь АВПД с крупными залежами нефти и газа [1,2].

Несмотря на довольно большой объем проведенных исследований, существующая проблема связи АВПД с нефтегазоносностью далека от окончательного решения. На сегодняшний день можно говорить о том, что большинство исследователей не отрицают «полигенную» природу АВПД и придерживаются точки зрения, что АВПД могут рассматриваться в качестве положительного фактора при формировании скоплений углеводородов. Так как площадь Махрам разбита на отдельные блоки, в пределах которых перспективные пласты характеризуются различными величинами фильтрационно-емкостных показателей и пластового давления, то геолого-технические условия проходки проектируемых скважин будут различны.

Так аномально высокое пластовое давление в верхнем пласте II (сумсарские слои) установлено в скважинах №№1, 2, 6 ($K_a = 2.09$), а в скважине №5 величина $K_a = 1.28$. Во всех нижезалегающих пластах аномалия $P_{пл}$ небольшая, но величина K_a в одноименных пластах разная [3,4].

Перспективная площадь Махрам располагается в Центрально-Ферганской горстовой зоне складок и представляет собой локальную складку антиклинального типа, простирающуюся в субширотном направлении, размером $[25\div 30] \times [4.5\div 5.0] \times [0.25\div 0.3]$ км, крылья пологие $[8-10^\circ]$ и кулисообразно сочленяющуюся с Ниязбекской посредством надвига с амплитудой более 500 м. В геологическом отношении разрез представлен осадочным комплексом пород четвертичных, неогеновых и палеогеновых отложений [3].

Литологический разрез представлен песчаниками, глинами, алевролитами, ангидритами и известняками. Породы в основном средней твердости, способствующие самопроизвольному искривлению ствола скважины.

Поисково-разведочные работы на площади Махрам начаты в 1980 г. В настоящее время бурение поисковых и разведочных скважин ведётся на восточной её переклинила в пределах изогипсы -3700 м, охватывающей сводовую часть структуры.

На основании анализа результатов бурения скважин на площади Махрам отмечены возможные осложнения:

- в четвертичных отложениях возможны осыпи и обвалы, сужение стенок скважины, поглощение бурового раствора;

- в бактрийских отложениях - водопроявления, кавернообразование стенок скважины;
- в массагетских отложениях – водопроявления, кавернообразования стенок скважины;
- в палеогеновых отложениях - нефтегазопроявления и текучесть «зелёных» глин.

Бурение скважин проектируется с целью вскрытия палеогеновых отложений Махрамской складки для оценки и подсчёта запасов углеводородного сырья. Проектирование технологии бурения в зонах АВПД должно быть подчинено достижению максимальных значений механической скорости бурения и проходки на долото, не допуская возникновения осложнений.

Добиться этого можно за счет применения оптимального сочетания параметров режима бурения, повышения скоростей истечения из насадок гидромониторных долот при тщательной двухступенчатой очистке бурового раствора. Максимальный выигрыш от этих мероприятий может быть получен лишь при условии использования преимущества метода регулирования дифференциального давления (РДД) путём поддержания минимально допустимой величины репрессии на проходимые пласты. В соответствии с «Едиными техническими правилами ведения работ при строительстве скважин на нефтяных, газовых, газоконденсатных месторождениях» (Москва, 1983г.) величина репрессии должна составлять 4-7% от величины пластового давления на глубине более 2500 м. Практически плотность бурового раствора должна выбираться таким образом, чтобы величина статической репрессии на коллекторы, насыщенные пластовым флюидом, всегда превышала снижение давления в скважине, возникающее за счет эффекта свабиrowания при подъёме бурильной колонны на некоторую величину, регламентируемую коэффициентом запаса против возникновения пластовых проявлений от случайных факторов:

$$\rho = \frac{10^5 (P_{пл} + K_{зп} \times P_{дин})}{H} \text{ кг/м}^3 \quad (1)$$

где ρ – необходимая плотность бурового раствора, кг/м³;

$P_{пл}$ – коэффициент запаса, выбирается проектировщиком в пределах от 1.05 до 2.0;

$K_{зп}$ – коэффициент запаса, выбирается проектировщиком в пределах от 1.05 до 2.00;

$K_{зп} = 1.05 \div 1.30$ – при вскрытии водоносных горизонтов (большему значению градиента пластового давления соответствует большее значение $K_{зп}$);

$K_{зп} = 1.5-2.0$ – при вскрытии газонефтеносных горизонтов, а также в условиях ненадежного прогноза пластового давления;

$P_{дин}$ – снижение давления в скважине за счет эффекта свабиrowания.

На стадии проектирования принимается по результатам замеров в скважинах-аналогах, а при отсутствии таких замеров рассчитывается по формуле:

$$P_{ди} = 10^{-6} \left[4 \frac{\bar{\rho} \sum li}{D_{срв}^2 - d_{срв}^2} + \rho c \left(V - V_0 \frac{d_{срв}^2 - d_{всрв}^2}{D_{срв}^2 - d_{срв}^2} \right) \right] \quad (2)$$

где: $\bar{\rho}$ – СНС бурового раствора, Па;

li – длина одномерных (по наружному диаметру) секций бурильных труб, м;

$D_{срв}$, $d_{срв}$, $d_{в.срв}$ – соответственно средневзвешенные диаметры скважины, наружный и внутренний бурильных труб (м), определяются по выражению:

$$d_{срв} = \frac{\sum (di \times li)}{\sum li} \quad (3)$$

где: C – скорость распространения ударной волны по затрубному пространству, м/с:

$C=1100$ м/с – для обсаженного ствола, заполненного буровым раствором;

$C=800$ м/с – для не обсаженного ствола, заполненного буровым раствором;

V_0 – начальная скорость движения бурильной колонны, м/с;

V – достигнутая скорость движения бурильной колонны за время распространения ударной волны от забоя до устья скважины, определяется по характеристике буровой установки, м/с.

Для осуществления технологии бурения с минимальной репрессией на пласт (МРП) в зонах АВПД необходимо иметь достоверную информацию о величине пластовых давлений во избежание ошибок в выборе плотности бурового раствора.

Так как в настоящее время прогнозные величины пластовых давлений для технических проектов определяются путём расчета по плотности, применявшихся на предшествующих скважинах буровых растворов, или по величине противодействия на устье во время газоводонефтепроявлений, что неизбежно связано с определенными погрешностями, а одиночные замеры глубинными манометрами осуществляются только в отдельных интервалах, целесообразно до начала проектирования скважины на площади Махрам уточнять величины пластовых давлений в ожидаемых зонах АВПД при проходке скважин на этой площади.

Определение величины дифференциального давления (репрессии на пласт) и пластовых давлений проводится беспакерным способом согласно РД 39-4-710-82 «Комплексная технология определения и прогнозирования поровых, пластовых давлений и зон АВПД по геолого-геофизическим данным при бурении скважин глубиной до 7000 м».

В Рабочий проект строительства скважин также необходимо включить контроль за величиной пластовых давлений в зонах АВПД, на основе чего будет проводиться корректировка плотности бурового раствора по фактическим данным.

Для обеспечения безаварийной работы и безопасных условий труда при реализации технологии бурения с МРП необходимо заложить в Проект соответствующее оборудование и КИП. Оборудование устья скважины и обвязка стволовой части осуществляются в соответствии со схемой №2-3 ГОСТ 13862-80. Максимальная величина внутреннего

рабочего давления на устье определяется в соответствии с действующей инструкцией по расчету обсадных колонн для нефтяных и газовых скважин (г. Куйбышев, 1987) и дополнений к ней.

В соответствии с этим после спуска 426 мм колонны устье скважины оборудуется установкой ОП2-425х21 ГОСТ 13862-80, после спуска 324 мм колонны – установкой ОП2-350х35 ГОСТ 13862-80 и после спуска 245 мм колонны – установкой ОП3-230х70 ГОСТ 13862-80. В комплекте со всеми установками целесообразно устанавливать один и тот же тип манифольда МПБ3-8070 с регулируемыми дросселями на давление 70МПа. Целесообразно также установить сепаратор бурового раствора ТП-10, выпускаемый заводом «Красный молот» [3].

Высота основания буровой установки определяется технологически необходимой высотой стволовой части ОП3-230х70. С учетом выхода клинового захвата из-под основания ротора, зазора, оставляемого между верхней точкой стволовой части противовыбросового оборудования (ПВО) и клиновым захватом, равного 300 мм, и возвышения фланца колонной головки над землей на 500 мм (согласно п.п. «Правил безопасности в нефтегазодобывающей промышленности») высота от уровня земли до основания ротора составляет 5.7 м.

При использовании буровых установок типа «Уралмаш-4Э» для бурения скважин глубиной порядка 5000 м необходимо их комплектовать талевой системой с допускаемой нагрузкой на крюке 300 тс. Это требование должно быть отражено в проектах на бурение скважин. При строительстве буровой необходимо предусмотреть установку на ней пульта контроля процесса бурения для измерения и регистрации не менее четырех параметров: нагрузки на крюке, давления на насосах, расхода бурового раствора, механической скорости бурения (или продолжительности бурения одного метра). Для предотвращения пластовых проявлений или выброса по каналу бурильных труб в бурильной колонне предусматривается установка обратного управляемого клапана (над долотом) и шарового крана (под рабочей трубой). При определении пластового давления беспакерным способом, наряду с приведенным в РД 39-4-710-82 устройством, может быть использовано другое устройство для отсечки столба бурового раствора в бурильных трубах, которое может быть установлено в любом замковом соединении. На период определения пластового давления беспакерным способом обратный клапан в компоновку бурильной колонны не включается.

С уменьшением дифференциального давления повышается выигрыш от оптимизации параметров режима бурения, поэтому при бурении с МРП особенно важно поддерживать оптимальное их сочетание. С этой целью необходимо в каждом из интервалов одинаковой буримости провести поиски оптимальных значений режимных показателей в соответствии с РД-2-642-81 «Методика проходки опорно-технологических скважин», М. ВНИИБТ, 1981.

С целью повышения скоростей бурения за счет использования гидромониторного эффекта необходимо диаметр насадок долота подбирать таким образом, чтобы скорость истечения бурового раствора из них в процессе бурения роторным способом была не менее 100 м/с при плотности бурового раствора до 1300 кг/м³ (до глубины 2600 м); не менее 80 м/с при плотности бурового раствора до 1820 кг/м³ (в интервале 2600-4400 м). Для обеспечения таких скоростей истечения при необходимом расходе промывочной жидкости целесообразно установить на буровой третий насос.

Учитывая, что геологический разрез площади Махрам содержит большой процент песчаников и других пород, которые при разбурировании насыщают буровой раствор мелкозернистым песком, регулирование репрессии на проницаемые пласты должно сочетаться с тщательной двухступенчатой очисткой промывочной жидкости, для чего необходимо предусмотреть оснащение вибросит ВС-1 с нержавеющей металлической сеткой с размером ячеек не более 0.5 мм.

Меры по контролю за возможным притоком пластовых флюидов планируются в соответствии с требованиями «Инструкции по раннему обнаружению газодонефтепроявлений» (Краснодар, ВНИИКР нефть, 1983). Ликвидация пластовых проявлений и выбросов из скважин при необходимости осуществляется в соответствии с «Методикой глушения скважин при газодонефтепроявлениях» (Краснодар, ВНИИКРнефть, 1979).

В тех случаях, когда из-за низкого гидростатического давления в скважине начнутся обвалы и осыпи глин, несмотря на то, что водоотдача и геологические показатели бурового раствора выдерживаются в соответствии с техническим проектом, необходимо приступить к поэтапному утяжелению раствора, наблюдая за состоянием скважины. Для осуществления контроля за исполнением проектных решений и проведения своевременной их корректировки, исходя из фактических горно-геологических условий, в смете планируются расходы на осуществление авторского надзора с привлечением работников головных институтов. Основной целью контроля со стороны НИИ является осуществление помощи УБР в нестандартных ситуациях (изменение прогнозного разреза, ликвидация газодонефтепроявлений, изменение конструкции скважины и т.д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фенин Г.И. Аномальные пластовые давления в зонах углеводородного накопления нефтегазовых бассейнов. – Нефтегазовая геология. Теория и практика, 2010, т.5, №4. http://www.ngtp.ru/rub/4/46_2010.pdf
2. Ишанов М.Х. и др. О природе аномально-высоком пластовом давлении (АВПД) в нефтегазовых месторождениях Таджикской депрессии. XII Международная научно-практическая конференция «Новые идеи в науках о Земле». – М.: МГРИ-РГГРУ, 2015, с.112-113.
3. Юнусов Ю.Ш., Соловьев А.Я. и др. Анализ и изучение состояния геолого-поисковых работ и выдача рекомендаций для проведения дальнейших геологоразведочных работ на площади Махрам. – Фонды ОАО «Нафту газ»: – Душанбе, 2014, 234 с.

4. Саидрахмонзода С.С., Валиев Ш.Ф., Юнусов Ю.Ш. Усовершенствование углубления скважин с применением современной техники и технологии поиска и разведки углеводородов в зоне акватории Кайраккумского водохранилища. – Душанбе: Наука и инновация, 2018, с.208-216.

С.С.САИДРАҲМОНЗОДА

**БАНАЗАРГИРИИ ХУСУСИЯТҲОИ ТЕХНОЛОГИЯИ ПАРМАКУНИ ДАР
ФОСИЛАИ ТАСНИФОТИ ФИШОРИ БАЛАНДИ АНОМАЛИИ БАЙНИ
ҚАБАТҲО, ҲАНГОМИ ТАРТИБ ДОДАНИ ЛОИҲАИ ТЕХНИКИ
СОХТМОНИ ПАРМАЧОҲҶО ДАР МАЙДОНИ МАҲРАМ**

Дар асоси маълумоти тадқиқотҳои пешин ва натиҷаи пармакунии ҷоҳҳо, ҷо-рабинҳои омодагардида ҳангоми тартиб додани лоиҳаи техниकीи ҷоҳҳои нави ҷустуҷӯӣ ва иқтишофӣ ба эътибор гирифтани технологияи махсуси пармакунии дар фосилаи таснифоти фишори баланди аномалӣ зарур аст.

Калимаҳои калидӣ: аномалӣ, қабат, гидростатика, пармакунии, фишороварӣ, майдон, буриши литологӣ, кофтуков, ҷустуҷӯ, фишор.

S.S.SAIDRAHMONZODA

**THE ACCOUNTING FEATURES OF DRILLING TECHNOLOGY
IN INTERVALS, CHARACTERIZED BY THE PRESENCE OF
ANOMALOUSLY HIGH SEAMPRESSURE IN DRAWING UP
OF THE TECHNICAL PROJECT OF CONSTRUCTION OF WELLS
AT THE SQUARE OF A MAHRAM**

OJSC "Naftu Gaz" Republic of Tajikistan

Based on data from previous studies and results of drilling wells recommendations are produced, when drafting new exploratory wells it is necessary to take into account the particularities of drilling technology in intervals characterized by the presence of anomalously high seam pressure.

Key words: abnormal, layer, hydrostatic, drilling, repression, area, lithological section, search, intelligence, pressure.

УДК 556.114

Д.А.АБДУШУКУРОВ, Д.АБДУСАМАДЗОДА, А.С.КОДИРОВ

ПЕРВОНАЧАЛЬНОЕ ЗАСОЛЕНИЕ РЕК В ВЕРХОВЬЯХ РЕКИ ВАХШ

Институт водных проблем, гидроэнергетики и экологии

АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 28.04.2018 г.

В статье исследуется первоначальное засоление рек в верховьях реки Вахш. Определено что в межень возрастает доля подземного питания рек, соответственно возрастает минерализация воды в реках. Разработаны мероприятия по уменьшению общей засоленности реки Вахш.

Ключевые слова: засоление, река Вахш, физико-химические свойства воды, мутность.

Летом 2017 г. были проведены экспедиционные работы в верховьях реки Вахш. Были исследованы реки Сурхоб, Оби Хингоу, Ярхыч, Явансу, Вахш и их притоки (рис. 1). На указанных реках были отобраны 28 образцов воды, измерен радиоактивный фон и собраны образцы растительности. Полученные образцы растительности еще находятся на стадии обработки.

Река Вахш является правым притоком и совместно с рекой Пяндж образуют самую мощную реку Центральной Азии Амударью. Протяженность реки Вахш составляет 524 км, а площадь водосборного бассейна 39100 км².

Исток реки образуется после слияния рек Кызылсу и Муксу и под названием Сурхоб течет вниз, а после слияния с рекой Обихингоу, начинает называться Вахш [6, 7].

В верхнем течении Вахш течёт в узкой долине, местами в глубоком ущелье; примерно в 170 км от устья река выходит в широкую Вахшскую долину. Питание реки преимущественно ледниково-снеговое, и в незначительной части дождевое. Половодье происходит в период интенсивного таяния ледников: примерно с мая по сентябрь, а межень наблюдается в ноябре-апреле. Средний расход реки примерно 660 м³/сек, наибольший расход (в июле) – 3120 м³/сек, наименьший расход (в феврале) – 130 м³/сек. Водам Вахша, как и другим притокам Амударьи, характерна большая мутность (4.16 кг/м³), однако по-

Адрес для корреспонденции: Кодиров Анвар Саидкулович. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 14а, Институт водных проблем, гидроэнергетики и экологии АН РТ.
E-mail: as.kodirov@gmail.com

сле строительства плотины Нурекской ГЭС воды стали прозрачными, голубого цвета. На Вахше был построен каскад Вахшских ГЭС. У устья, при образовании Амударьи, река имеет ширину 305 м и глубину примерно 3.5 м [1-3].

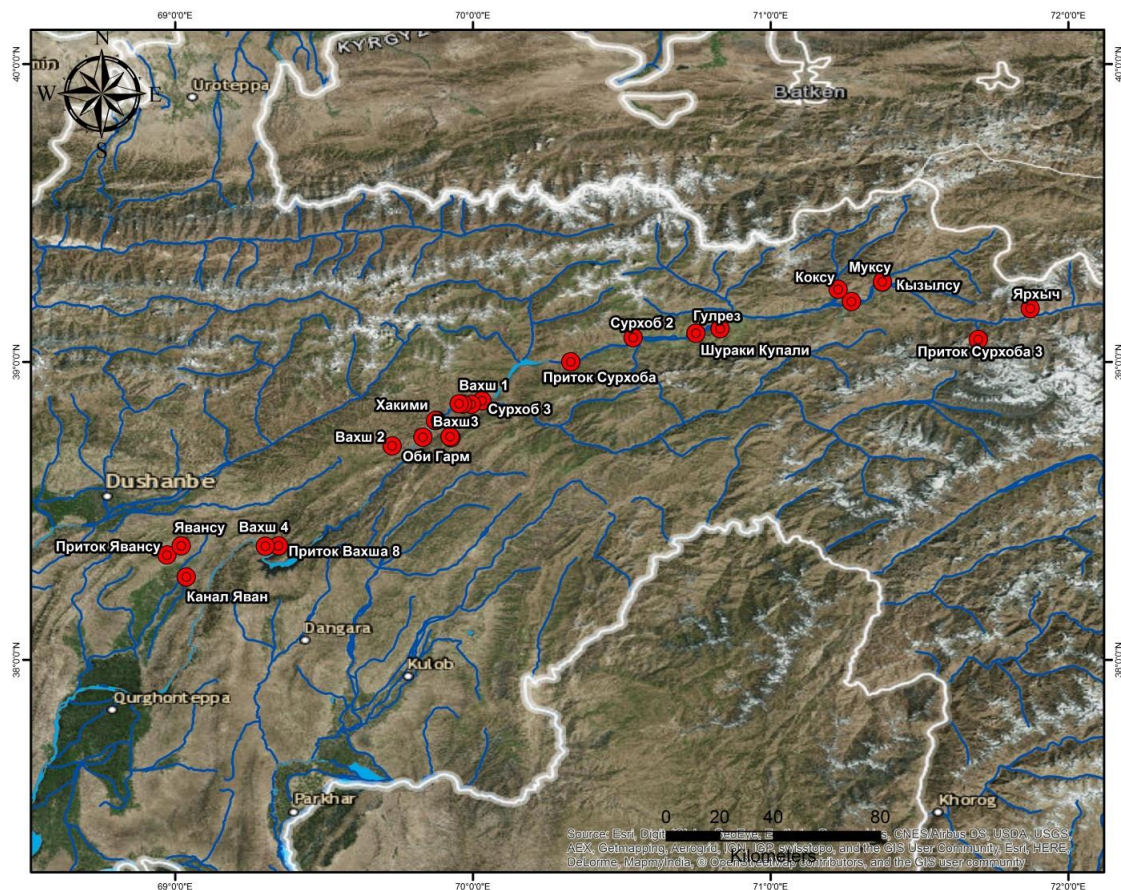


Рис. 1. Карта точек отбора образцов.

Река Кзылсу имеет площадь водосборного бассейна равную 8380 км² и длину 254 км. Практически весь сток реки Кзылсу формируется на территории Кыргызстана на южных склонах Алайского и северных склонах Заалайского хребтов, питание Кзылсу происходит за счёт ледникового (12%) и снегового (13%) таяния. Большая часть стока формируется за счёт подземных вод (75%), которые образуются в результате повышенной фильтрации поверхностного стока в водопроницаемых породах, слагающих бассейн реки (известняки, сланцы, пески, конгломераты, галечники, крупнообломочные ледниковые отложения).

Река Муксу является второй составляющей реки Сурхоб. Длина реки 88 км с площадью водосборного бассейна 7070 км². Бассейн реки расположен в наиболее возвышенной части бассейна Вахша, при средней высоте бассейна 4540 м образуется Муксу при слиянии рек Сельдары и Саукся. Река Сельдара берёт начало у самого большого в Центральной Азии ледника Федченко.

Явансу – сравнительно небольшая река, но она подвержена большому антропогенному воздействию. В Яван проведен туннель из реки Вахш в районе водохранилища Байпазинской ГЭС. Поступающая вода в основном используется для нужд сельского хозяйства. Дренажные воды зачастую поступают обратно в реку. В бассейне реки функционируют несколько крупных предприятий: Яванская ТЭЦ, Солевой комбинат, Химкомбинат, Цементный завод и др. В районе расположено крупное месторождение соли, которая добывается в промышленном масштабе.

Названия рек, координаты точек отбора образцов, их высота над уровнем моря приведены в табл. 1.

Физико-химические свойства воды были изучены в Институте водных проблем, гидроэнергетики и экологии АН Республики Таджикистан. Основные измеренные параметры приведены в табл. 2.

Таблица 1

Названия рек, координаты точек отбора образцов (по GPS),
высота над уровнем моря и комментарии

Реки	Координаты		Высота над у.м.	Комментарии
	с.ш.	в.д.		
Муксу	39.267576	71.375550	1838	Перед слиянием
Кызылсу	39.269183	71.375250	1842	Перед слиянием
Сурхоб 1	39.202483	71.271650	1770	Выше слияния с Коксу
Коксу	39.243633	71.226500	1785	Приток Сурхоба
Ярхыч	39.179083	71.872383	1559	Выше п. Хаит
Шураки Купали	39.111633	70.830200	1597	Приток Сурхоба
Гулрез	39.096150	70.749083	1502	Приток Сурхоба
Приток Сурхоба 3	39.075133	71.697633	1491	
Сурхоб 2	39.081550	70.538200	1401	Между Гарм и Таджикобадом
Приток Сурхоба 4	39.000400	70.328467	1312	
Сурхоб 3	38.869617	70.030417	1154	выше слияния с Оби Хингоу
Оби Хингоу	38.869617	70.030417	1154	выше слияния с Сурхоб
Вахш 1	38.857850	69.994217	1132	Гидропост Яхч
Приток Вахша 1	38.858567	69.965700	1154	
Приток Вахша 2	38.859433	69.953867	1135	
Вахш 2	38.804433	69.877467	1140	Выше Чорсада
Даръей намак 1	38.745083	69.926917		Рогуни Боло
Даръей намак 2	38.748917	69.923317		Рогуни Боло
Приток Вахша 5	38.804433	69.877467	1097	
Хакими	38.803000	69.873767	1100	Пр. приток Вахш
Вахш3	38.746783	69.832267	1060	Выше притока 7
Приток Вахш 7	38.746783	69.832267	1056	Пр. приток
Оби Гарм	38.718250	69.728950	1256	Ниже п. Оби Гарм
Приток Вахша 8	38.382600	69.347250	670	Ниже плотины правостор.
Вахш 4	38.381083	69.302833	647	Мост Нурек
Канал Яван	38.278067	69.037583	600	Парчисай, начало канала
Приток Явансу	38.351617	68.972037	776	Дагана
Явансу	38.382600	69.019967	603	В Яванском районе

Таблица 2

Точки отбора, потенциал Редокса, фактор рН, насыщенность кислородом, электропроводность и концентрация солей

Реки	Потенциал Редокса	рН	Насыщенность кислородом, мг/л	Насыщенность кислородом, %	Электропроводность воды, мкС/см	Концентрация солей, мг/л
Муксу	-58.7	7.8	4.97	78.1	572	301
Кызылсу	-46.8	7.6	5.63	85.3	1711	934
Сурхоб 1	-55.6	7.76	4.85	76.4	1031	556
Кокеу	-67.2	7.95	5.09	78.8	307	154
Ярхыч	-52.2	7.69	6.39	98.6	272	134
Шураки Купали	-41.8	7.52	4.77	74.6	2840	1561
Гулрез	-49.3	7.64	4.52	69.8	4410	2433
Приток Сурхоба 3	-41.8	7.52	5.59	87.2	8500	4705
Сурхоб 2	-58.3	7.8	4.86	75.2	1016	548
Приток Сурхоб 4	-42.2	7.52	4.31	67.1	2620	1439
Сурхоб 3	-56.6	7.75	4.82	75.1	892	479
Оби Хингоу	-54.2	7.72	5.28	82.8	851	456
Вахш 1	-59.4	7.83	5.18	82.2	956	514
Приток Вахша 1	-75.1	8.08	4.41	68.6	564	296
Приток Вахша 2	-81.7	8.2	4.1	64.1	610	322
Вахш 2	-57.7	7.79	4.76	74.1	948	510
Даръен намак 1	-42.8	7.53	4.55	64.5	1299	705
Даръен намак 2	-49.5	7.66	4.51	65.4	9550	5289
Приток Вахша 5	-70.2	8.01	4.83	74.8	461	239
Хакими	-63.1	7.88	4.91	74.7	647	343
Вахш 3	-62.5	7.87	5.06	78.3	1011	545
Приток Вахш 7	-79.8	8.15	4.84	75.6	604	319
Оби Гарм	-71.5	8.02	4.88	78.4	981	528
Приток Вахша 7	-52.3	7.63	4.24	65.2	3660	2016
Вахш 4	-67.6	7.96	5.21	77.2	993	534
Канал Яван	-67.4	7.56	4.96	76.6	1029	554
Приток Явансу	-66.5	7.91	5.25	81.8	5280	2916
Явансу	-71.7	8.03	4.28	64.3	2050	1121

Вода во всех измеренных точках оказалась слабощелочной, с наибольшим показателем в точке «Приток Вахша 2» и с наименьшим в точке «Шураки Купали» (рис. 2).

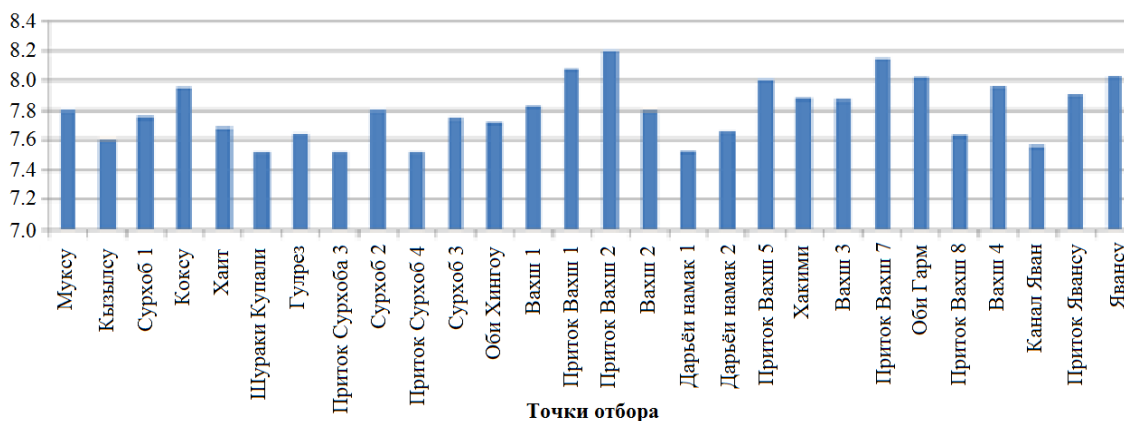


Рис. 2. рН фактор воды в реках.

Воды во всех реках недостаточно насыщены кислородом, за исключением реки Ярхыч. Река Ярхыч (Хаит), скорее всего, является наиболее чистой рекой в регионе (рис. 3).

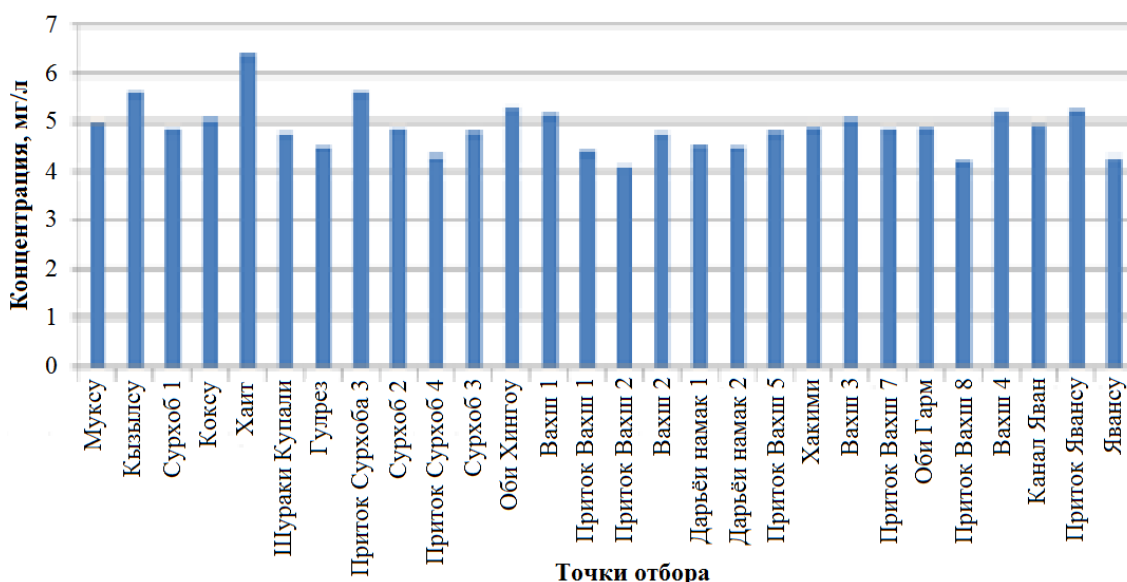


Рис. 3. Концентрация насыщенного кислорода.

Обычно вода, проходя через турбины ГЭС, насыщается кислородом, однако подобное не произошло в точке Вахш 4 (ниже плотины Нурекской ГЭС). К сожалению, нам не удалось измерить параметры воды в самом водохранилище, так как доступ к плотине ГЭС ограничен. Подобный феномен может быть объяснен тем, что вода в водохранилище накапливается в течение нескольких лет. За это время, благодаря био- и геохимическим реакциям, происходит уменьшение кислорода. В то же время при прохождении воды через турбины ГЭС концентрация кислорода увеличивается.

Важным фактором является электропроводность воды, которая напрямую зависит от концентрации растворенных в воде солей и повторяет картину распределения солей в водах (рис. 4).

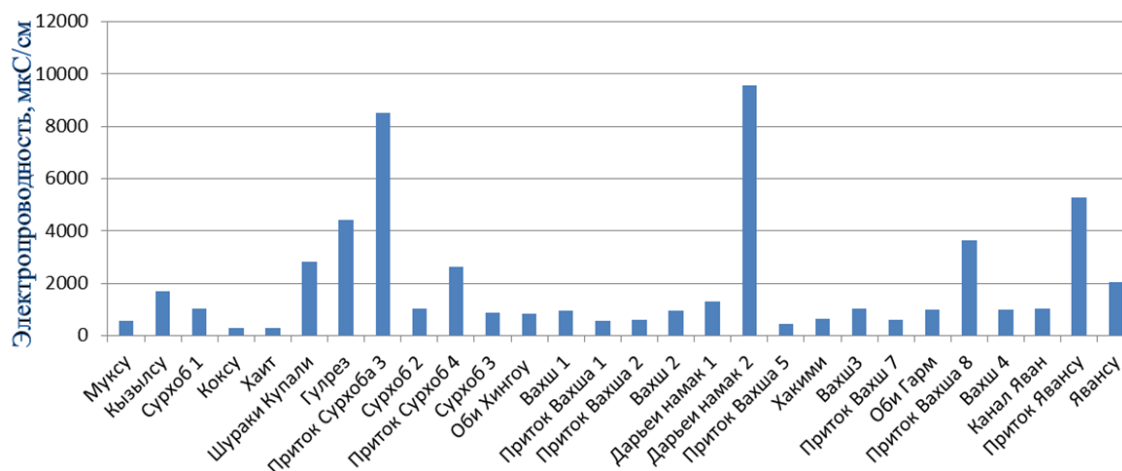


Рис. 4. Электропроводность воды в точках измерения.

Концентрация солей в реках распределена крайне неравномерно. Считается, что верхней границей пресной воды является концентрация 1 г/л (1000 мг/л).

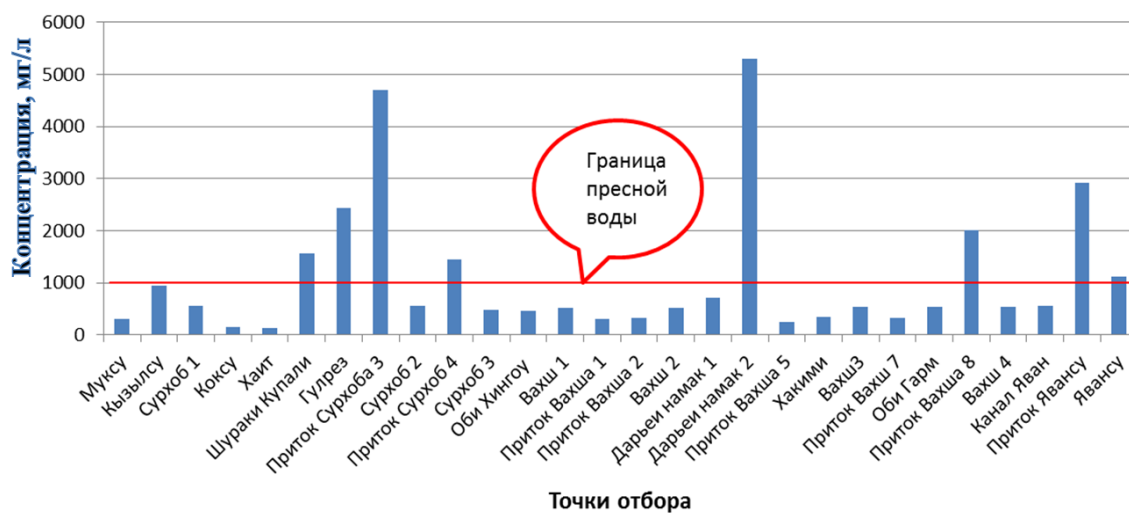


Рис. 5. Распределение солей в реках.

Обсуждение полученных результатов

Все ручьи по левому борту рек Сурхоб и Вахш обладают повышенной мутностью, по сравнению с ручьями текущими с правого борта, что, очевидно, связано с различным геологическим строением гор.

Вода реки Кызылсу до слияния с Мукусу обладает повышенной минерализацией и практически непригодна для питьевого водоснабжения. Концентрация солей в ней практически равна 1 г/л.

После слияния с рекой Муксу концентрация солей падает практически в два раза (точка Сурхоб 1).

В левый борт рек Сурхоб и Вахш втекают несколько ручьев с повышенной концентрацией солей. Это реки Даръеи Намак, Дашти Намак, Шураки Купали, Гулрез, Явансу и др. Нами выявлено 8 притоков с концентрацией солей более 1 г/л. Максимальная концентрация солей (5.3г/л) обнаружена в левобережном притоке Вахша – Даръеи Намак. Некоторые ручьи непосредственно проходят сквозь месторождения солей юрского периода. В качестве примера приведены картины солевых месторождений, расположенных над ручьем Даръеи Намак (к. Рогуни Боло) (рис. 6, 7).



Рис. 6. Фрагмент солевого месторождения выше кишлака Рогуни Боло.



Рис. 7. Выход ручьев воды из солевого месторождения Рогуни Боло.

Подобное засоление рек является уникальным, так как происходит изначальное (первичное) засоление горных рек

В процессе работы оказались неисследованными около 10 труднодоступных рек. Для их изучения были необходимы длительные пешие маршруты. В то же время отсутствие населенных пунктов на некоторых реках подталкивает к мысли о непригодности воды для использования.

Выводы

Изучение физико-химических свойств вод рек бассейна Вахш необходимо провести еще раз в период маловодия (межень). В межень возрастает доля подземного питания рек, соответственно возрастает минерализация воды в реках. Можно ожидать, что концентрация солей в реках значительно возрастет. Изучение свойств воды в два сезона позволит получить более объективную картину о чистоте воды в реках.

Проблема первоначального засоления горных рек Таджикистана является весьма актуальной. Зачастую засоленность небольших рек можно значительно уменьшить путем провода воды, в сильно минерализованных зонах, через водоводы (трубы и каналы). Подобные мероприятия позволят уменьшить общую засоленность реки Вахш, соответственно и Амударьи и лежат в сфере заинтересованности многих стран Центральной Азии.

В настоящее время проводятся мероприятия по уменьшению вторичного засоления рек Центральной Азии. Строятся дренажные сооружения и испарительные озера. Но проблеме первичного засоления рек не уделяется никакого внимания.

Актуальным также является изучение гидрохимии вод рек, наличия примесей радиоактивных элементов и тяжелых металлов на площадях, прилегающих к Оби-Гарму и поселку Хаит (оба района густо заселены). В верховьях р. Ярхыч расположен промышленный объект, где ведется добыча угля-антрацита, также содержащего вредные примеси тяжелых и радиоактивных элементов. Также требует ревизии площадь минералогического заповедника Дарай-Пиёз с повышенным радиоактивным фоном, преимущественно ториевой природы, хотя при дальнейшем изучении могут быть обнаружены и проявления урановой минерализации. В последнем случае изучение водной геохимии может послужить основным поисковым признаком или опровергнуть предположение - тем более что склоны долины Дарай Пиёз труднодоступны и наземная геохимия затруднена, вследствие чего площадь территории заповедника вообще слабо изучена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abdushukurov D.A., Salibaeva Z.N. Hydrogeochemical parameters of water quality in the rivers of Tajikistan, Academic Publishing, Lambert, Germany, 2014, 130 p.
2. Abdushukurov D.A. Heavy metals in the waters of Tajikistan's Rivers. – International Journal of Scientific & Engineering Research, USA, 2016, v.7, №10, pp. 63-73.
3. Abdushukurov D.A, Kobuliev Z.V., Salibaeva Z.N. Study of the composition and quality of water in the Amudarya river tributaries. – Journal of Science and New Technologies, Bishkek, 2013, №7, pp. 47-51.
4. Abdushukurov, D.A., Kobuliev Z.V., Mamadaliev B. Elemental composition of sediments and surrounding soils of the main tributaries of the Amu Darya. – Journal of Science and New Technologies, Bishkek, 2014, №6, pp. 29-33.
5. Big Soviet Encyclopedia, Vahksh River, 3-edition, Chief Editor, Prohorov A.V. - Moscow, 1978.
6. Lerche I., O'Brien J.J. Dynamical Geology of Salt and Related Structures – Academic Press Inc., 1987, p. 335.
7. Muksu River [Electronic resource] / Link: https://en.wikipedia.org/wiki/Muksu_River, (accessed 30.12.2017).
8. Surkhob River [Electronic resource] / Link: https://www.revolvy.com/main/index.php?s=Surkhob%20River&item_type=topic (accessed 30.12.2017).
9. Topography and Drainage in Tajikistan: a Country Study – Washington: Library of Congress, 1996.
10. Toderich K.N., Tsukatani T., Petukhov O.F., Gruthinov V.A., Khujanazarov T., Juylova E.A. Risk assessment of Environmental contaminants of Asiatic Deserts Ecosystems in relation to plant distribution and structure – Journal Arid Land Studies, 2004, №14, pp. 33-36.

11. United State Geological Survey Minerals Yearbook [Electronic resource], Link: <https://minerals.usgs.gov/minerals/pubs/country/2013/myb3-2013-ti.pdf> (accessed 30.12.2017).

Д.А.АБДУШУКУРОВ, Д.АБДУСАМАДЗОДА, А.С.КОДИРОВ

НАМАҚДОРШАВИИ АВВАЛИЯИ ДАРЁҲО ДАР БОЛООБИ ДАРЁИ ВАХШ

*Институту масъалҳои об, гидроэнергетика ва экология
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мақолаи мазкур намақдоршавии дарёҳои болооби дарёи Вахш омӯхта шудааст. Муайян карда шуд, ки дар вақти миёнабӣ ҳаҷми обҳои зеризаминӣ афзӯда, дар баробари ин миқдори минералнокии дарёҳо низ меафзояд. Чорабиниҳо оид ба кам намудани намақнокии умумии дарёи Вахш коркард шудааст.

Калимаҳои калидӣ: намақдоршавӣ, дарёи Вахш, хусусиятҳои физико-химиявии об, ғализӣ.

D.A.ABDUSHUKUROV, D.ABDUSAMADZODA, A.S.KODIROV

INITIAL SALINIZATION OF RIVERS IN THE UPPER OF THE VAKHSH RIVER

*Institute of Waterproblems, Hydropover and Ekology,
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

The article deals with the initial salinization of rivers in the upper reaches of the Vakhsh river. It is determined that the share of underground feeding of rivers increases in the middle river formation, correspondingly the mineralization of water in the rivers increases. Measures have been developed to reduce the overall salinity of the Vakhsh river.

Key words: salinization, Vakhsh river, physical and chemical properties of water, turbidity.

**О МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ»**

С 14 по 15-ое марта 2018 года в городе Душанбе была проведена Международная научная конференция «Современные проблемы математики и её приложений», посвященная 70-летию со дня рождения академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо. Конференция была организована Академией наук Республики Таджикистан совместно с Таджикским национальным университетом.

В работе конференции приняли участие 157 человек, в том числе ученые-математики из Германии, Кыргызстана, Российской Федерации, Турции, Украины, Швеции и Японии.

14-го марта в зале заседаний АН РТ состоялось открытие конференции. С приветственным словом выступил президент Академии наук Республики Таджикистан, академик АН РТ Ф.Рахими. Далее под председательством академика АН РТ Х.Х.Муминова прошло первое пленарное заседание, на котором были представлены следующие доклады:

1. Усманов З.Д. Моделирование восприятия мозгом анаграммно искаженного текста.
2. Abdullaev F.G., Ozgatepe P., Abdullaev G.A. Uniform Convergence of the Extremal Polynomials in Regions with Simultaneously Cups.
3. Раджабов Н.Р. Об одном классе трехмерного сингулярного интегрального уравнения по слоевой области.
4. Berdysheva E.E. Bernstein-Durmeier Operators with Respect to a Collection of Measures.
5. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Некоторые вопросы приближения классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 .

2-ое пленарное заседание прошло под председательством академика АН РТ З.Х.Рахмонова. Были заслушаны следующие доклады:

1. Гликлик Ю.Е. Уравнения и включения с производными в среднем и их приложения.
2. Исхоков С.А., Рахмонов Б.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле во всем пространстве.
3. Рейнов О.И. Операторы с ядерными сопряженными.
4. Гадоев М.Г. Теоремы делимости и спектральные свойства некоторых классов эллиптических операторов.
5. Илолов М., Кучакшоев Х.С., Эльназаров А.А. О корректности задачи Коши для абстрактных уравнений с вольтерровыми операторами.

15-го марта 2018 года конференция продолжила свою работу в секциях. Все три секционные заседания прошли в Институте математики им.А.Джураева АН РТ.

1-ая секция «Функциональный анализ и теория функций» прошла под председательством академика АН РТ Шабозова М.Ш. – представлен 31 доклад. Доклады были посвящены актуальным проблемам теории линейных операторов в гильбертовом и банаховом пространствах, теории квадратных и кубатурных формул, теории аппроксимации функций, алгебры и теории чисел.

Во 2-ой секции «Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных», которая прошла под председательством академика АН РТ Ражабова Н.Р. были заслушаны 49 докладов. Рассматривался широкий спектр задач по общей, асимптотической и качественной теории дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных уравнений. Ряд докладов был посвящен линейным и нелинейным уравнениям в банаховом пространстве.

В 3-ей секции «Смежные проблемы прикладной и инженерной математики: методы математического моделирования» под председательством академика АН РТ Ахмедова Х.М. был представлен 21 доклад. Доклады были посвящены математическому моделированию различных взаимодействующих физических процессов в современной промышленности и сельском хозяйстве. На основе представленных в докладах моделей могут быть созданы комплексы компьютерных программ для численного исследования различных физических, химических и биологических процессов.

Результаты, доложенные на пленарных и секционных заседаниях, могут быть использованы в учебном процессе на математических, физических и химических факультетах университетов Республики Таджикистан и за рубежом в качестве вспомогательного материала при разработке специальных курсов и семинаров. Материалы конференции опубликованы.

Р.А.Бухоризода , Дж.Ш.Рахматов

К 70-ЛЕТИЮ

АКАДЕМИКА АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
МАМАДШО ИЛОЛОВА

ученый-математик, педагог, государственный и общественный деятель



14 марта 2018 г. исполнилось 70 лет доктору физико-математических наук, профессору, академику АН РТ Мамадшо Илолову.

М.Илолов родился в кишлаке Манем Шугнанского района Горно-Бадахшанской автономной области. Окончив с золотой медалью среднюю школу №20 Шугнанского района в 1965 г. Илолов М. поступает на вновь созданный механико-математический факультет Таджикского государственного университета. С 1967 г. продолжает учебу на математико-механическом факультете Воронежского государственного университета, полный курс которого закончил в 1970 г. Именно в Воронеже М.Илолов опубликовал свои первые научные работы. В те годы в Воронеже работали крупные ученые М.А.Красносельский и С.Г.Крейн,

внесшие существенный вклад в разработку основ современного функционального анализа. В 1970 г. М.Илолов начинает свою трудовую деятельность в Таджикском государственном университете. В 1973 г. поступает в аспирантуру ВГУ под руководством известного таджикского математика Тимура Сабирова. Кандидатская диссертация М.Илолова посвящена теории возмущения периодических решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Исследуются как не критические случаи продолжения решений по малому параметру, так и критические случаи ветвления малых решений. После безвременной кончины Тимура Сабирова руководство научной работой М.Илолова осуществляют сначала доцент В.Ф.Субботин, а затем академик НАН Украины А.М.Самойленко. После окончания аспирантуры М.Илолов возвращается в ТГУ и работает в должности ассистента, старшего преподавателя, доцента, вплоть до 1989 г. В 1989

г. он поступил в докторантуру Института математики НАН Украины и в 1992 г. там же защитил докторскую диссертацию. Его докторская диссертация посвящена теории эволюционных уравнений с импульсными воздействиями и с отклонением временного аргумента и её приложений. Основные результаты диссертации были опубликованы в самом престижном научном журнале того времени, в Докладах АН СССР (ныне Доклады РАН). Уже в те годы М.Илолов показывал пример успешной научно-организационной работы. Так в 1987 г. он проводит Всесоюзную конференцию по теории функционально-дифференциальных уравнений и её приложений, в работе которой принимали участие более 200 ученых из различных республик бывшего Советского Союза. Были выпущены материалы конференции в двух томах.

В 1990 г. М.Илолов был назначен на должность начальника научно-исследовательской части ТГУ, а в 1991 г. начальником отдела науки и изданий Министерства образования РТ. В 1992 г. Кабинет Министров РТ направляет М.Илолова в г. Хорог в качестве ректора-организатора вновь образованного там университета. Несмотря на невероятные трудности 90-ых годов, ему удается организовать учебно-педагогическую и научно-исследовательскую работу в этом новом вузе. За очень короткий срок он налаживает выпуск научного журнала "Вестник Хорогского университета". В 1994 г. М.Илолов выступает с докладом на Международном конгрессе математиков (Цюрих, Швейцария).

В 1995 г. М.Илолов был избран народным депутатом Республики Таджикистан и Председателем Комитета Маджлиси Оли РТ по науке, образованию и молодежной политике. На этой должности он проработал до 2003 г. Ему удалось за эти годы принять ряд основополагающих законодательных актов в сфере науки, культуры и образования. Одновременно М.Илолов продолжает вести научную и педагогическую деятельность. Читает лекции на мехмате ТГУ, выступает с научным докладом на очередном Международном конгрессе математиков (Берлин, Германия). В 1997 г. его избирают членом-корреспондентом Академии наук РТ. В 2001 г. вышла в свет монография М.Илолова «Задача Коши для некоторых классов абстрактных эволюционных уравнений». В 2002 г. на Международном конгрессе математиков в Пекине выступает с научным докладом. В 2003 г. М.Илолов указом Президента РТ назначается на должность Министра труда и социальной защиты населения. На этом новом для себя поприще ему удается выполнить ряд поручений Правительства по налаживанию процесса трудовой миграции граждан Таджикистана в зарубежные страны, по развитию сотрудничества с такими институтами ООН, как Международная Организация Труда и Международная Организация Миграции. Учитывая значительный организационный потенциал М.Илолова, в 2005 г. высшее руководство страны назначает его и.о. президента АН РТ. Очень скоро общее собрание АН РТ избирает его действительным членом (академиком), а затем и президентом АН РТ. На этой высокой должности ему удается развернуть работу по восстановлению кадрового потенциала и материально-технической базы АН РТ. М.Илолов делает очень многое, для того чтобы Академия наук РТ вошла в международные и региональные научные объединения (Меж-

дународный Совет научных организаций, Ассоциация академий наук Азии, Межгосударственная Ассоциация академий наук стран СНГ и др.).

При М.Илолове была проведена организационная и управленческая реформа Академии наук, направленная на подъем науки и образования в стране.

Будучи председателем Комитета Маджлиси Милли Маджлиси Оли РТ, М.Илолов продолжает вести работу по развитию законодательной базы в сфере науки и технологий. Пользуясь своей законодательной инициативой, он представил в парламент законы Республики Таджикистан "Об Академии наук", "Об интеллектуальной собственности", "О научной и научно-технической экспертизе" и другие.

С 2013 г. М.Илолов работает на должности директора Центра инновационного развития науки и новых технологий АН РТ. Новый Центр был образован в 2012 г. Постановлением Правительства РТ и его основной миссией является создание научных основ реализации Национальной программы инновационного развития Республики Таджикистан. Конкретнее, Центр осуществляет научно-исследовательскую работу по возобновляемым источникам энергии и их использованию. За последние 2-3 года сотрудники Центра оформили 8 патентов на изобретение новых приборов, тестирование и анализ новых перспективных материалов для получения кремния солнечного качества. М.Илолов ведет активную исследовательскую работу по теории корректности начальных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Он получил ряд первоклассных результатов по теории аналитических полугрупп линейных ограниченных операторов. Указаны применения этих результатов к различным задачам механики вязкоупругих сред с памятью, в электрохимии, в теории электрических цепей и т.д.

Академик М.Илолов считает науку мощной производительной силой и уверен в том, что будущее процветание независимого Таджикистана немислимо без развитой науки и новых технологий.

Он сделал очень многое для подготовки молодых ученых-математиков. В течение ряда лет был председателем Диссертационного совета при Институте математики АН РТ, главным редактором журналов "Доклады АН РТ" и "Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук".

М.Илолов достойно представляет таджикскую науку за рубежом. Он выступал с научными докладами на Международных конгрессах математиков, читал лекции в американских университетах в Денвере, Блумингтоне, Индианаполисе, в Московском, Киевском и Казахском университетах.

Он награжден золотой медалью НАН Казахстана, медалью "100-летие академика И.Н.Боголюбова медалью "80-летие Казахского госуниверситета". М.Илолов является иностранным членом НАН Казахстана и Академии наук ИРИ.

М.Илолов имеет государственные награды Республики Таджикистан (Орден "Шараф" 1-ой степени) и Российской Федерации (медаль Пушкина).

Поздравляем Мамадшо Илолова с замечательным юбилеем, желаем ему доброго здоровья, счастья, новых больших успехов в науке.

Рахими Ф.К., Имомзода М.С., Ахмедов Х.М., Мирсаидов У.М.,
Муминов Х.Х., Одинаев С.Р., Раджабов Н.Р., Рахмонов З.Х.,
Усманов З.Д., Шабозов М.Ш., Кучакшоев Х.С., Эльназаров

ЮБИЛЕЙ УЧЕНОГО

САТТАРОВУ МАЛИКУ АБДУСАТТОРОВИЧУ 80 ЛЕТ



8 марта 2018 года известному ученому в области механики жидкости и газа, крупному специалисту по теории фильтрации и турбулентному потоку и их приложений в вопросах мелиоративной гидрогеологии, гидрологии почв и русловых процессов доктору технических наук, профессору, члену-корреспонденту Инженерной академии Республики Таджикистан, заслуженному деятелю науки и техники Таджикистана исполнилось 80 лет.

Малик Абдусатторович Саттаров родился в семье сельского бухгалтера в кишлаке Мугелон (Мугиен) Сармиджанского сельского совета Гиждуванского района Бухарской области Узбекистана.

В 1961 году закончил Самаркандский государственный университет и был направлен на работу в Отдел физики и математики АН РТ.

Научная жизнь Малика Абдусатторовича тесно связана с Институтом гидродинамики СО РАН, где он в Отделе прикладной гидродинамики, руководимый академиком П.Я.Полубариновой-Кочиной, стажировался и, будучи аспирантом АН Республики Таджикистан, был туда прикомандирован.

В 1967 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

М.А.Саттаров вел не только научную работу, но и активно участвовал во многих начинаниях - он организатор и директор первой Республиканской летней физико-математической и химической школы школьников Таджикистана, победителей олимпиад по математике, физике и химии, вел изобретательскую деятельность и был награжден знаком «Изобретатель СССР».

М.А.Саттаров награжден Почетной Грамотой Президиума Верховного Совета Таджикистана за плодотворную научную работу и подготовку кадров в области математических наук.

М.А.Саттаров. являлся членом Регионального ученого совета САНИИРИ (г. Ташкент) по присуждению ученых степеней доктора технических наук по специальности 06.01.02 – Мелиорация, рекультивация и охрана земель.

В 1980 г. в г. Киеве защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.02.05 - Механика жидкости, газа и плазмы.

Малик Абдусатторович является одним из основоположников нового научного направления механики – теории аномальной (нелинейной) фильтрации жидкостей при низких градиентах давления, а также аналитических основ теории турбулентности в пограничных слоях, естественных и искусственных руслах. Он разработал теоретические и экспериментальные основы классификации течения жидкостей, введя понятия «обобщенные ньютоновские жидкости (ОНЖ)» и «обобщенные бингамовские жидкости (ОБЖ)» в капиллярно-пористых телах и открытых и напорных каналах.

М.А.Саттаров разработал ряд математических моделей теории динамики полива по борозде на территориях с просадочными грунтами. Он предложил интегрально-осредненный метод решения обратной гидродинамической задачи бороздкового и капельного полива. При его непосредственном участии эти модели использованы для определения параметров взаимодействия инфильтрации и просадки, для обоснования и расчета оптимальных параметров техники бороздкового полива на землях с легко размываемыми структурно-неустойчивыми и просадочными грунтами в условиях Таджикистана, где сосредоточено более 70% просадочных лессовых грунтов СНГ.

Научная деятельность М.А.Саттарова, в основном, проходила в Институте математики Академии наук РТ, где он долгие годы заведовал отделом математической реологии и фильтрации, а также в Институте водных проблем, гидроэнергетики и экологии АН РТ, где он по настоящее время заведует лабораторией моделирования и информационного обеспечения.

М.А.Саттаровым опубликовано около 200 научных статей и докладов, написано 3 монографии, около 20 научно-популярных статей, изобретено 2 гидравлических стенда и выполнено более 30 заказных и хозяйственных работ, которые нашли свое приложение при решении конкретных задач техники и технологии, имеющих важное значение для народного хозяйства республик Центрально-Азиатского региона.

М.А.Саттаров является активным организатором науки в Таджикистане.

Желаем профессору Малику Абдусатторичу Саттарову крепкого здоровья, дальнейших творческих успехов.

З.Х.Рахмонов, З.В.Кобулиев

Редакция и корректура – Н.Г.Сапожников

Сдано в набор 15.06.2018 г. Подписано в печать 29.06.2018 г.
Печать офсетная. Формат 70×100 1/16. Гарнитура Times. Усл. печ. л.8. Заказ № ____.
Тираж 300 экз.

*Адрес редколлегии: 734025, Душанбе, пр.Рудаки, 33, каб. 47.
Тел.:2-21-62-64. E-mail: danrt@mail.ru
Издательство «Дониш»: 734029, Душанбе, ул.Айни, 121, корп.2.*
