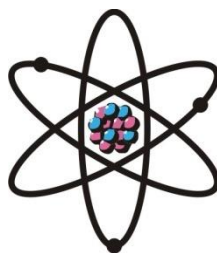


ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Журнал основан
в январе 1952 г.



№ 4 (173)
2018 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Х.Х.Муминов – главный редактор, академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Г.И.Кохирова** – зам.главного редактора, член-корреспондент, доктор физико-математических наук; **Н.Г.Сапожников** – ответственный секретарь; **Х.М.Ахмедов** – академик, доктор химических наук; **П.Б.Бабаджанов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.В.Кобулиев** – член-корреспондент, доктор технических наук, профессор; **Р.М.Марупов** – академик, доктор технических наук, профессор; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **С.О.Одинаев** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Д.Усманов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор.

СОДЕРЖАНИЕ

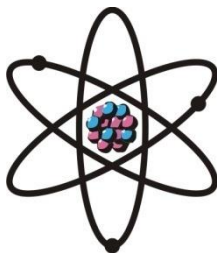
Математика

Ш.А.Хайруллоев. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлера произведения.....	7
М.Азизов, А.Мухлис. Восстановление и кодирование решения краевой задачи Неймана с помощью тригонометрических полиномов и по заданной информации о граничных функциях.....	26
В.Д.Сайнаков. Среднеквадратическое приближение функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами	37

Ф.Раимзода. Точные неравенства, содержащие наилучшие приближения функций и нормы разности в L_2	44
Э.Х.Сафарзода. Об условиях зависимости степени суммируемости функций Степанова и коэффициентов Фурье	54
Р.Мустафокулов. Исследование одного линейного неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера	63
О.Х.Каримов. О коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве	73
Информатика	
К.С.Бахтеев. О распознавании авторства по усечённым цифровым портретам текста	84
Г.З.Рустамов. О гибридном методе автоматического представления таджикской словоформы в персидской графике	92
Физика	
Х.Б.Шарипов, К.Кабутов, И.Х.Джуракулов, А.Сафаров, Ф.Султанов. Синтез наночастиц диоксида титана из трехлористого титана и исследование их фотокаталитических свойств	97
Неорганическая химия	
Д.О.Давлатов, Ш.Б.Назаров, Ж.А.Мисратов, У.М.Мирсаидов. Технология совместной переработки нефелиновых сиенитов Турпи и данбуритов Ак-Архарского месторождения Таджикистана методом спекания	103
О.А.Азизов, С.И.Бакум, А.Бадалов, У.М.Мирсаидов. Особенности выделения и очистки алюмогидридов калия, рубидия и цезия	112
Органическая химия	
М.Д.Исобаев, Э.Х.Пулатов, Б.Г.Мавлонов, Т.Х.Абдуллаев, М.И.Джумаева, И.Ф.Рахимов. Амидо- и сульфамиды 1,3,4-тиадиазинов	117
Физическая химия	
З.Х.Гайбуллаева, Г.Т.Насымов. Полнофакториальное планирование процесса гидрометаллургического извлечения свинца из галенитсодержащего концентрата Бали (Турция)	125
Э.Н.Сиродждинов, И.Н.Ганиев, З.Р.Обидов. Высокотемпературное окисление сплава Zn55Al, легированного индием, в твёрдом состоянии	132
Металлургия	
И.Ш.Ахмадшоев, Н.П.Мухамедиев, А.Х.Сафиев, Р.С.Рафиев, Дж.Р.Рузиев, Ш.С.Джумаев, Х.Сафиев. Технология производства флюса с применением электролитного оборота	138
Геохимия	
Дж.Н.Фозилов, Б.А.Алидодов. Микроэлементный состав углей месторождения Шишкат (Центральный Таджикистан)	145
Геология	
С.С.Саидрахмонзода. Особенности глубинного строения и выбор оптимальной конструкции поисково-разведочных скважин с целью доразведки нефтегазоносной площади Махрам	152
Метеорология	
М.С.Сафаров, А.Р.Фазылов. Риски стихийных бедствий, связанные с водой, и дистанционные методы их мониторинга	160

ШҮЪБАИ
ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,
ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА

Маҷалла аз моҳи
январии соли 1952
нашр мешавад



№ 4 (173)
с. 2018

ХАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:

Ҳ.Ҳ.Муминов – сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Кохирова Г.И.** – муовини сармуҳаррир, узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Г.Сапожников** – котиби масъул; **Ҳ.М.Аҳмедов** – академик, доктори илми химия; **П.Б.Бобочонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **И.Н.Ғаниев** – академик, доктори илми химия, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.В.Кобулиев** – узви вобаста, доктори илмҳои техникӣ, профессор; **Р.М.Марупов** – академик, доктори илмҳои техникӣ, профессор; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор; **С.Х.Неъматуллоев** – академик, доктори илмҳои техникӣ; **С.О.Одинаев** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Ф.Раҳимӣ** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҳ.Раҳмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Раҷабов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҷ.Усмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **А.Р.Ғайзиев** – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва минералогия, профессор; **Ҷ.Х.Холиков** – академик, доктори илми химия, профессор.

МУНДАРИҶА

Математика

Ш.А.Хайруллоев. Оиди нулҳои қаторҳои арифметикии Дирихле, ки ҳосилзиарбҳои эйлерӣ надоранд.....	7
М.Азизов, А.Мухлис. Барқароркунӣ ва кодиронии масъалаи канории ҳалли Нейман бо ёрии бисёрраъзогиҳои тригонометрӣ ва аз рӯи иттилоот оиди функсияҳои сарҳадӣ.....	26
В.Д.Сайнаков. Дар бораи беҳтарин формулаҳои квадратурии вазндор аз рӯи коэффисиентҳо барои синфи функсияҳо, ки ба воситаи модулиҳои бефосилагӣ дода мешаванд.....	37
Ф.Раимзода. Нобаробари аниқ, ки наздиккунии беҳтарин ва нормаи фарқиятҳоро дар фазои L_2 дар бар доранд.....	44
Э.Ҳ.Сафарзода. Оид ба шартҳои вобастагии дараҷаи суммиронии функсияҳои Степанов ва коэффисиентҳои Фурйе.....	54
Р.Мустафоқулов. Тадкики як муодилаи дифференсиалии хаттии ғайриҷақинсаи типии Эйлер.....	63
О.Х.Каримов. Оид ба ҳалшавандагии коэрситивии муодилаи ғайрихаттии Лаплас-Бельтрам дар фазои Гилбертӣ.....	73

ИНФОРМАТИКА

- К.С.Бахтеев.** Дар бораи муайян намудани муаллифи матн тавассути портретҳои рақамии ҷудошуда **84**
Г.З.Рустамов. Оиди методи омехтаи баргардонии автомати калимаҳои тоҷикӣ ба хати форсӣ..... **92**

ФИЗИКА

- Х.Б.Шарипов, Қ.Кабутов, И.Х.Чурақулов, А.Сафаров, Ф.Султонов.** Синтези нанозарраҳои диоксиди титан аз хлориди титан (III) ва таҳқиқи хосиятҳои фотокаталитикии онҳо..... **97**

ХИМИЯИ ҒАЙРИОРГАНИКӢ

- Д.О.Давлатов, Ш.Б.Назаров, Ж.А.Мисратов, У.М.Мирсаидов.** Технологияи коркарди муштаракӣ нефелинҳои сиенити Турпи ва данбуритҳои кони Ак-Архари Тоҷикистон бо усули гудозиш **103**
О.А.Азизов, С.И.Бақум, А.Бадалов, У.М.Мирсаидов. Хусусиятҳои ҷудо ва тоза кардани алюмогидридҳои калий, рубидий ва сезий **112**

ХИМИЯ ОРГАНИКӢ

- М.Д.Исобеаев, Э.Х.Пулатов, Б.Г.Мавлонов, Т.Х.Абдуллаев, М.И.Джумаева, И.Ф.Рахимов.** Амид- ва сулфамидҳои 1,3,4-тиадиазинҳо **117**

ХИМИЯИ ФИЗИКАВӢ

- З.Х.Ғайбуллоева, Г.Т.Насымов.** Ба нақшагирии пурафакториалии раванди гидрометаллургии ҷудокунии сурб аз хоқаҳои чавхаронидашудаи галенитдори Бали (Туркия) **125**
Э.Н.Сироджидинов, И.Н.Ғаниев, З.Р.Обидов. Оксидшавии баландҳароратии хӯлаи $Zn55Al$, ки бо индӣ чавхаронида шудааст, дар ҳолати сахт **132**

МЕТАЛЛУРГИЯ

- И.Ш.Аҳмадшоев, Н.П.Мухамедиев, А.Ҳ.Сафиев, Р.С.Рафиев, Ҷ.Р.Рузиев, Ш.С.Ҷумаев, Ҳ.Сафиев.** Технологияи истеҳсоли флюс бо истифода аз электролити бозгардонӣ..... **138**

ГЕОХИМИЯ

- Ҷ.Н.Ғозилов, Б.А.Алидодов.** Тақриби микроэлементи ангиштсанги кони Шишкат **145**

ГЕОЛОГИЯ

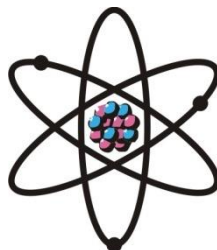
- С.С.Саидрахмонзода.** Хусусиятҳои сохти қарӣ ва интиҳоби муносиби конструксияи ҷоҳҳои ҷустуҷӯи-инкишофӣ бо мақсади бозиктишофӣ дар майдони нафтугаздори Маҳрам **152**

МЕТЕОРОЛОГИЯ

- М.С.Сафаров, А.Р.Ғазилов.** Хавфи офатҳои табиӣ марбут ба об ва усулҳои зондронии фосолавии мониторинги онҳо **160**

**DEPARTMENT OF
PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES**

The journal was established
in January 1952



№ 4 (173)
2018

EDITORIAL BOARD

Prof. **Kh.Kh.Muminov**, Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; **G.I.Kokhirova**, Doctor of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **N.G.Sapozhnikov**, Secretary; **Kh.M.Akhmedov**, Doctor of Chemistry; Prof. **P.B.Babadzhanov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **A.R.Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **M.I.Iolov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **I.N.Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **D.Kh.Khalikov**, Doctor of Chemistry; Prof. **Z.V.Kobuliev**, Doctor of Engineering; Prof. **R.M.Marupov**, Doctor of Engineering; Prof. **U.M.Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; **S.Kh.Negmatullaev**, Doctor of Engineering; Prof. **S.O.Odinaev**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **N.R.Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **F.Rakhimi**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.Kh.Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.D.Usmanov**, Doctor of Physical and Mathematical.

CONTENTS

MATHEMATICS

Sh.A.Khayrulloev. On the zeros of arithmetic dirichlet series without Euler product	7
M.Azizov, A.Mukhlis. Reconstruction and coding the solution of the Neyman's task using trigonometrical polynomials and given information about boundary function	26
V.D.Saynakov. Mean squared approximation of two variables functions with averaged trigonometric polynomials	37
F.Raimzoda. Exact inequalities containing best approximations and norm of differences in L_2	44
E.Kh.Safarzoda. Conditions for the dependence of the degree of summability of Stepanov functions and Fourier coefficients	54
R.Mustafokulov. Analysis of one linear nonhomogeneous differential equation of Euler's type.	63
O.Kh.Karimov. On the coercitive solvability of the non-linear Laplace-Beltrami equation in Hilbert space	73

INFORMATICS

K.S.Bachteev. Author identification by truncated text digital portraits	84
Z.Rustamov. About the hybrid method of automatic representation of the tajik word form in persian graphical letter systems	92

PHYSICS

Kh.B.Sharipov, K.Kabutov, I.H.Juraqulov, A.Safarov, F.Sultonov. The synthesis of titanium dioxide nanoparticles from titanium trichloride and research of its photocatalytic properties 97

INORGANIC CHEMISTRY

D.O.Davlatov, Sh.B.Nazarov, Zh.A.Misratov, U.M.Mirsaidov. Technology joint processing of nepheline syenites of Turpi and damburites of the Ak-Arkhar deposits of Tajikistan by sintering with sodium sulfate..... 103

O.A.Azizov, S.I.Bakum, A.Badalov, U.M.Mirsaidov. Specific of isolation and cleaning alumohydrides of potassium, rubidium and cesium 112

ORGANIC CHEMISTRY

M.J.Isobaev, E.Kh.Pulatov, B.G.Mavlonov, T.Kh.Abdullaev, M.H.Djumaeva, I.F.Rakhimov. Amides and sulfamides of 1,3,4-thiadiazines 117

PHYSICAL CHEMISTRY

Z.H.Gaibullaeva, G.T.Nasimov. Full-factorial planning of the process of hydrometallurgical extraction of lead from the galenite-containing Bali concentrate (Turkey) 125

E.N.Sirodjidinov, I.N.Ganiev, Z.R.Obidov. High-temperature oxidation of Zn55Al alloy, doped with indium, in the firm condition 132

METALURGY

I.Sh.Ahmadshoev, N.P.Moukhamediev, A.H.Safiev, R.S.Rafiev, J.R.Ruziev, Sh.S.Jumaev, H.Safiev. Technology for producing flux with application of electrolyt turnover 138

GEOCHEMISTRY

Dj.N.Fozilov, B.A.Alidodov. Trace element composition of coal deposits Shishkat 145

GEOLOGY

S.S.Saidrahmonzoda. Features of the deep structure and the choice of the optimal design of exploration wells with the aim of further exploration of the Mahram oil and gas area..... 152

METEOROLOGY

M.S.Safarov, A.R.Fazilov. The risks of natural disasters related to water and remote methods of their monitoring 160

УДК 511.325

Ш.А.ХАЙРУЛЛОЕВ

О НУЛЯХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ, НЕ ИМЕЮЩИХ
ЭЙЛЕРОВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 23.11.2018 г.

Доказано неравенство А.А.Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой, когда промежуток имеет более короткую длину.

Ключевые слова: функция Дэвенпорта-Хейльбронна, экспоненциальная пара, критическая прямая, характер Дирихле, тригонометрическая сумма.

Функция Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ при $Res > 0$ задаётся равенством

$$f(s) = \frac{1 - i\alpha}{2} L(s, \chi) + \frac{1 + i\alpha}{2} L(s, \bar{\chi}), \quad \alpha = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1},$$

$L(s, \chi)$ – функция Дирихле, $\chi = \chi(n)$ – характер Дирихле по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$.

Функция $f(s)$ удовлетворяет уравнению риманова типа:

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{-s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{-(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s), \quad (1)$$

но $f(s)$ не имеет эйлерова произведения.

В 1936 г. Г.Дэвенпорт и Г.Хейльбронн [1] доказали, что для функции $f(s)$ при $Res > 1$, $0 < Im s \leq T$ выполняется соотношение $N_0(1, T) \geq c_1 T$, где $c_1 > 0$ – абсолютная

Адрес для корреспонденции: Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики АН РТ. E-mail: shamsullo@rambler.ru

постоянная. С.М.Воронин [2] в 1984 г. доказал, что при $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ справедливо неравенство

$$N(\sigma_2, T) - N(\sigma_1, T) \geq c_2 T, \quad c_2 = c_2(\sigma_1, \sigma_2) > 0.$$

Он также доказал [3], что для $N_0(T)$ – число нулей функции $f(s)$ в области $Res > 1$, $0 < Im s \leq T$ имеет место оценка

$$N_0(T) \geq c_3 T \exp(0.05 \sqrt{\log \log \log \log T}),$$

где $c_3 > 0$ – абсолютная постоянная, $T \geq T_0 > 0$.

А.А.Карацуба [4] в 1989 г. разработал новый метод, с помощью которого получил более точную оценку. Он доказал: при $H = T^{\frac{27}{82} + \varepsilon}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое фиксированное число, справедливо неравенство

$$N_0(T) \geq T(\log T)^{0.5 - \varepsilon}.$$

В 1993 г. А.А.Карацуба [5], развивая свой метод, получил более точную оценку, а именно доказал: при $H = T^{\frac{27}{82} + \varepsilon}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое фиксированное число, выполняется соотношение

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq H(\log T)^{0.5} \exp(-c_4 \sqrt{\log \log T}), \quad (2)$$

где c_4 – положительное абсолютное постоянное.

Целью настоящей статьи является доказательство неравенства (2) для промежутков, имеющих более короткую длину.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема. Пусть $N_0(T)$ – количество нулей $f(s)$ на отрезке $Res = \frac{1}{2}$, $0 < Im s \leq T$. Если ε – произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01, тогда при $H = T^{\frac{131}{416} + \varepsilon}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$ выполняется соотношение

$$N_0(T + H) - N_0(T) \geq H \sqrt{\log T} \exp(-c_8 \sqrt{\log \log T}),$$

где $c_8 > 0$ – абсолютная постоянная.

Доказательство. Эта теорема доказывается методом работы [5] в соединении с идеями и методами работ [6-8].

Возьмём $X = T^{0.01\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 0.01$ и рассмотрим при $T \leq t \leq T + H$ функцию $F(t)$

$$F(t) = e^{i\theta(t)} f\left(\frac{1}{2} + it\right) \left| \varphi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2,$$

где

$$e^{i\theta(t)} = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{it}{2}\right)}{\left| \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{it}{2}\right) \right|}, \quad \varphi(s) = \sum_{\nu < X} \frac{\beta(\nu)\chi(\nu)}{\nu^s} = \sum_{\nu < X} \frac{h(\nu)}{\nu^s},$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu) \left(1 - \frac{\ln \nu}{\ln X}\right), & 1 \leq \nu < X, \\ 0, & \nu \geq X, \end{cases}$$

а вещественные числа $\alpha(\nu)$ находятся из соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p \equiv \pm 1 \pmod{5}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{Res} > 1.$$

Отметим, что значение характера $\chi(p)$ для простых чисел вида $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$ является вещественным числом и

$$\chi(p^k) = (\chi(p))^k = (\chi(\pm 1))^k = \left(e\left(\frac{\text{ind}(\pm 1)}{4}\right) \right)^k = (\pm 1)^k. \quad (3)$$

Из формулы

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)} \cdot \frac{1}{p^{ks}} = 1 - \frac{1}{2p^s} - \frac{1}{8p^{2s}} - \frac{1}{162p^{3s}} - \frac{5}{128p^{4s}} - \dots,$$

где $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)$ и определения чисел $\alpha(\nu)$, именно, из того, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p \equiv \pm 1 \pmod{5}} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)} \cdot \frac{1}{p^{ks}}\right) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(p^k)}{p^{ks}},$$

$$\alpha(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0; \\ -\frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \equiv \pm 1 \pmod{5}, \\ 0, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \not\equiv \pm 1 \pmod{5}, \end{cases}$$

следует мультипликативность функции $\alpha(\nu)$ и $|\alpha(\nu)| < 1$ при любом $\nu > 1$. Отсюда и из (3) также следует равенство

$$\alpha(p^k)\chi(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0; \\ -\frac{(\pm 1)^k (2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \equiv \pm 1 \pmod{5}, \\ 0, & \text{если } k \geq 1 \text{ и } p \not\equiv \pm 1 \pmod{5}, \end{cases}$$

то есть $\alpha(p^k)\chi(p^k)$ принимает только вещественные значения, поэтому

$$\alpha(p^k)\chi(p^k) = \alpha(p^k)\bar{\chi}(p^k).$$

Отсюда и из мультипликативности функции $\alpha(v)\chi(v)$ находим

$$\alpha(v)\chi(v) = \alpha(v)\bar{\chi}(v), \quad |\alpha(v)\chi(v)| \leq 1.$$

Из определения $\beta(v)$ найдём

$$\beta(v)\chi(v) = \beta(v)\bar{\chi}(v) \equiv h(v), \quad |h(v)| \leq 1,$$

то есть далее всюду, не ограничивая общности, имеем $\bar{h}(v) = h(v)$.

Из функционального уравнения (1) для $f(s)$ и определения $F(t)$ следует, что функция $F(t)$ при вещественных t принимает вещественные значения и вещественные нули $F(t)$ нечётного порядка являются нулями $f(s)$ нечётного порядка, лежащими на критической прямой.

Пусть R – количество нулей $F(t)$ на $(T, T+H)$. Оценим R снизу. Не ограничивая общности, можно считать, что $T = \frac{\pi}{4} + 4\pi r$, r – целое число. Тогда для функции $F(t)$, $T \leq t \leq T+H$ справедлива формула [4]:

$$F(t) = 2 \sum_{\lambda \leq P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \ln \frac{P}{\lambda} + O(T^{-0.01}),$$

где λ – положительные рациональные числа, знаменатель которых не превосходит X ,

$$A(\lambda) = \sum_{\substack{nv_1 = \lambda \\ v_2}} \frac{h(v_1)h(v_2)r(n)}{v_2}, \quad P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}}.$$

Возьмём $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, таким, что $0 < \alpha < 1/2$, $0 < h < h_1 < 1$.

Рассмотрим два интеграла $I_1(t)$ и $I_2(t)$:

$$I_1(t) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} |F(t+u)| du, \quad I_2(t) = \left| \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} F(t+u) du \right|.$$

Обозначая буквой E подмножество интервала $(T, T+H)$, состоящее из чисел t таких, что $I_1(t) > I_2(t)$, вводим следующие интегралы

$$I_1 = \int_T^{T+H} I_1^2(t) dt, \quad I_2 = \int_T^{T+H} I_2^\alpha(t) dt, \quad I_3 = \int_T^{T+H} I_1^\alpha(t) dt,$$

и, имея в виду, что в подмножество $[T, T+H] \setminus E$ выполняется $I_1(t) = I_2(t)$, получим неравенство

$$\int_E I_1^\alpha(t) dt = I_3 - \int_{[T, T+H] \setminus E} I_2^\alpha(t) dt \geq I_3 - I_2. \quad (4)$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера, оценим сверху левую часть последнего неравенства (4):

$$\left(\int_E I_1^\alpha(t) dt \right)^{\frac{2}{\alpha}} \leq (\mu(E_1))^\alpha \int_E I_1^2(t) dt \leq (\mu(E_1))^\alpha I_1.$$

Отсюда и из (4) найдем

$$\mu(E) \geq \left(\frac{(I_3 - I_2)^\alpha}{I_1} \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}. \quad (5)$$

Таким образом, для оценки снизу функции $\mu(E)$ достаточно оценить интеграл I_3 снизу, а интегралы I_1 и I_2 сверху.

Оценка сверху интеграла I_1 . В интеграле $I_1(t)$, сделав замену переменных, воспользовавшись соотношением $0 < h_1 < h$ и теоремой о среднем значении интеграла, имеем

$$I_1(t) = h \int_{\frac{h_1}{h}}^{\frac{h_1}{h}} e^{-u^2} |F(t+uh)| du \leq h \int_{-1}^1 e^{-u^2} |F(t+uh)| du \leq 2h |F(t+\theta)|, \quad |\theta| \leq 1.$$

Следовательно,

$$I_1 = \int_T^{T+H} I_1^2(t) dt \leq 4h^2 \int_{T-1}^{T+H+1} |F(t)|^2 dt = 4h^2 J(T, H). \quad (6)$$

Согласно приближенному функциональному уравнению для функции Дэвенпорта-Хейльбронна, имеем

$$J(T, H) = \int_{T-1}^{T+H+1} |F(t)|^2 dt = \int_{T-1}^{T+H+1} \left| 2 \sum_{\lambda \leq P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \ln \frac{P}{\lambda} + O(T^{-0.01}) \right|^2 dt.$$

Для оценки $J(T, H)$, используя функциональное уравнение функции Дзвенпорта-Хейльбронна и леммы 2, 3 из работы [9], имеем

$$J(T, H) \ll \frac{H \mathcal{L}}{\sqrt{\ln X}}, \quad \mathcal{L} = \ln P, \quad P = \sqrt{5T(2\pi)^{-1}}.$$

Подставляя оценку интеграла $J(T, H)$ в (6), получаем оценку сверху для интеграла I_1 :

$$I_1 \leq c_4 h^2 H \frac{\log T}{\sqrt{\log X}}.$$

Оценка снизу I_3 . В интеграле $I_1(t)$, сделав замену переменных и воспользовавшись соотношением $0 < h_1 < h$, имеем

$$I_1(t) = h \int_{-\frac{h_1}{h}}^{\frac{h_1}{h}} e^{-v^2} |F(t+vh)| dv \geq h \int_{-1}^1 e^{-v^2} |F(t+vh)| dv \geq h e^{-1} \int_{-1}^1 |F(t+vh)| dv.$$

Таким образом,

$$I_3 = \int_T^{T+H} I_1^\alpha(t) dt \geq h^\alpha \cdot e^{-\alpha} \int_T^{T+H} \left(\int_{-1}^1 |F(t+vh)| dv \right)^\alpha dt.$$

Для внутреннего интеграла, применяя неравенство Гёльдера, находим

$$I_3 \geq \frac{1}{2} h^\alpha \cdot e^{-\alpha} \int_T^{T+H} \int_{-1}^1 |F(t+vh)|^\alpha dv dt \geq \frac{1}{2} h^\alpha \cdot e^{-\alpha} \int_{T+1}^{T+H-1} |F(t)|^\alpha dt = \frac{1}{2} h^\alpha \cdot e^{-\alpha} I_4,$$

где

$$I_4 = \int_{T+1}^{T+H-1} |F(t)|^\alpha dt.$$

Применяя лемму Р.Гэбриэла для оценки интеграла I_4 , находим

$$I_4 \geq \frac{1}{5^{2-a} c_g^2} H.$$

Таким образом, для интеграла I_3 получим следующую оценку снизу:

$$I_3 \geq c_3 h^\alpha H,$$

где $c_3 > 0$ – абсолютная постоянная.

Оценка сверху интеграла I_2 . Применяя неравенство Гёльдера для интеграла I_2 , найдём

$$I_2^\alpha \leq H^\alpha J_2, \quad J_2 = \int_T^{T+H} I_2^2(t) dt.$$

Из приближенной формулы для $F(t)$ следует, что

$$\begin{aligned} I_2(t) &\ll \left| \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} \sum_{\lambda < P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(t+u)} du \right| + hT^{-0.01} = \\ &= \left| \sum_{\lambda < P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu} du \right| + hT^{-0.01} = \\ &= \left| \sum_{\lambda < P} \frac{A(\lambda)d(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} \right| + hT^{-0.01}, \end{aligned}$$

где $d(\lambda)$ определяется следующим образом:

$$d(\lambda) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu} du.$$

Для оценки интеграла J_2 , пользуясь известным приемом, находим

$$\begin{aligned} J_2 &\ll \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{H}\right)^2} \left| \sum_{\lambda < P} \frac{A(\lambda)d(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-iT} \lambda^{-it} \right|^2 + Hh^2 T^{-0.02} \ll \\ &\ll H(W_1 + W_2) + Hh^2 T^{-0.02}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{\lambda < P} \frac{|A(\lambda)|^2 |d(\lambda)|^2}{\lambda}, \\ W_2 &= \left| \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P} \frac{A(\lambda_1)d(\lambda_1)\bar{A}(\lambda_2)\bar{d}(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) \right|. \end{aligned}$$

Оценим кратную тригонометрическую сумму W_2 . Справедлива

Лемма 1. Пусть ε - произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01, (κ, λ) — произвольная экспоненциальная пара

$$\theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2}, \quad \sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathcal{L}}{(\kappa + 1) \ln T}, \quad \mathcal{L} = \ln P.$$

Тогда при $H = T^{\theta(\kappa, \lambda) + \varepsilon + \sigma(\kappa)}$ справедлива оценка:

$$W_2(T) \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.$$

Показатель $\theta(\kappa; \lambda)$ также появляется в оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xu \leq N$, $x > 0$, $y > 0$ и в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2 + y^2 \leq R$. Наилучшая оценка сверху для $\theta(\kappa; \lambda)$ принадлежит М.Хаксли [10]. Из работ [10] следует, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa, \lambda} \theta(\kappa, \lambda) = \min_{\kappa, \lambda} \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2} \leq \frac{131}{416} = \frac{1}{3} - \frac{23}{3 \cdot 416} \approx 0.31490.$$

Отсюда и из леммы 1 получаем

Следствие. Пусть ε — произвольное малое фиксированное положительное число не превосходящее 0.01. Тогда при $H = T^{\frac{131}{416} + \varepsilon}$ справедлива оценка:

$$W_2(T) \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.$$

Доказательство леммы 1 для удобства разобьём на этапы.

1. Оценка части суммы $W_2(T)$ с условием $\lambda_2 > \lambda_1(1 + \mathcal{L}H^{-1})$. Если в сумме $W_2(T)$ выполняется условие $\lambda_2 > \lambda_1(1 + \mathcal{L}H^{-1})$, то воспользовавшись известным неравенством $\ln(1+x) > 0,5x$, $0 < x \leq 0,5$, имеем

$$\exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) < \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln\left(1 + \frac{\mathcal{L}}{H}\right)\right)^2\right) < \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{16}\right).$$

Из определения чисел $d(\lambda)$ следует, что $|d(\lambda)| \leq \sqrt{\pi h}$.

Обозначая соответствующую часть суммы $W_2(T)$, для которой выполняется условие $\lambda_2 - \lambda_1 > \mathcal{L}H^{-1}$ через $W_2'(T)$, имеем

$$|W_2'(T)| < \pi h^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{16}\right) \left(\sum_{\lambda < P} \frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\right)^2.$$

Далее, воспользовавшись определением суммы $a(\lambda)$ и соотношениями $|r(m)| \leq 1$ и $|h(v)| \leq 1$, имеем

$$\sum_{\lambda < P} \frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \leq \sum_{\lambda < P} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{\substack{nv_1 = \lambda \\ v_2 \\ v_1, v_2 < X}} \frac{|h(v_1)| |h(v_2)| |r(n)|}{v_2} \ll P^{\frac{1}{2}} X \ln X.$$

Следовательно,

$$W_2'(T) \ll h^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{16}\right) PX^2 \ln^2 X.$$

Осталось рассмотреть слагаемые с условием $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_1(1 + \mathcal{L}H^{-1})$. Промежуток $0 < \lambda_1 < P$ в $W_2(T)$ разобьём целыми числами Λ на $\ll \mathcal{L}$ промежутков вида $\Lambda < \lambda_1 \leq \Lambda_1 \leq 2\Lambda$. Обозначая через $W_2(\Lambda)$ максимальную из получившихся таким образом сумм, приходим к неравенствам

$$W_2(T) \ll \mathcal{L} |W_2(\Lambda)| + h^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{16}\right) PX^2 \ln^2 X. \quad (7)$$

2. Оценка $W_2(\Lambda)$ с условием $\Lambda \leq HX^{-2}\mathcal{L}^{-1}$. Если $\Lambda \leq HX^{-2}\mathcal{L}^{-1}$, то в силу того, что рациональные числа λ_1 и λ_2 имеют вид

$$\lambda_1 < \lambda_2, \quad \lambda_1 = \frac{n_1 v_1}{v_2}, \quad \lambda_2 = \frac{n_2 v_3}{v_4}, \quad v_i < X, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

находим

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \geq 1 + \frac{\mathcal{L}}{2H},$$

поэтому

$$\exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) < \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln\left(1 + \frac{\mathcal{L}}{2H}\right)\right)^2\right) < \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{64}\right).$$

Оценивая суммы $W_2(\Lambda)$, при $\Lambda \leq HX^{-2}\mathcal{L}^{-1}$, аналогично как суммы W_2' , находим, что

$$W_2(\Lambda) \ll h^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{64}\right) PX^2 \ln^2 X. \quad (8)$$

3. Выражение $W_2(\Lambda)$ с условием $\Lambda > HX^{-2}\mathcal{L}^{-1}$ через $C(u, h)$ и $F_j(h, \nu)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Lambda > HX^{-2}\mathcal{L}^{-1}$, тогда

$$W_2(\Lambda) = \sum_{\Lambda < \lambda_1 \leq \Lambda_1} \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_1(1+\mathcal{L}H^{-1})} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{-iT} \times \\ \times d(\lambda_1)\bar{d}(\lambda_2) \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

где $HX^{-2}\mathcal{L}^{-1} < \Lambda < \Lambda_1 \leq 2\Lambda < P$. Воспользовавшись определением $A(\lambda)$ и обозначением $\frac{\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_3} = \frac{a}{b}$, $(a, b) = 1$, представим сумму $W_2(\Lambda)$ в виде

$$W_2(\Lambda) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 < X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} W_2(\Lambda, \nu); \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4), \quad (9)$$

где

$$W_2(\Lambda, \nu) = \sum_{\substack{\Lambda\nu_2 < n_1 \leq \frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1} \\ \frac{\nu_1}{\nu_1} < n_1 \leq \frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}}} \sum_{\substack{n_1 a < n_2 \leq \frac{n_1 a}{b}(1+\mathcal{L}H^{-1}) \\ \frac{n_1 a}{b} < n_2 \leq \frac{n_1 a}{b}}} r(n_1)r(n_2)\Phi_2(n_1, n_2, \nu) \left(\frac{n_1 a}{n_2 b} \right)^{-iT}, \\ \Phi_2(n_1, n_2, \nu) = \frac{\exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{n_1 a}{n_2 b}\right)^2\right)}{\sqrt{n_1 n_2}} d(\lambda_1)\bar{d}(\lambda_2).$$

Записав n_1 и n_2 в виде членов арифметических прогрессий соответственно с разностями $5a$, и $5b$, то есть

$$n_1 = 5bm + b_1, \quad 0 \leq b_1 < 5b, \quad \frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b} < m \leq \frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b}, \quad n_2 = 5am_1 + a_1, \\ 0 \leq a_1 < 5a, \quad m + \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a} < m_1 \leq m + \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a} + \left(m + \frac{b_1}{5b}\right) \frac{\mathcal{L}}{H},$$

вводя обозначения

$$N = \frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b}, \quad N_1 = \frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b}, \quad \alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a}, \quad \omega(m) = \left(m + \frac{b_1}{5b}\right) \frac{\mathcal{L}}{H},$$

делая суммирование по b_1 , a_1 внешним и имея в виду, что $r(5bm + b_1) = r(b_1)$ и $r(5am_1 + a_1) = r(a_1)$, приходим к следующему соотношению:

$$W_2(\Lambda, \nu) = \sum_{0 \leq b_1 < 5b} r(b_1) \sum_{0 \leq a_1 < 5a} r(a_1) W_2(\Lambda, \nu, m, m_1), \quad (10)$$

$$W_2(\Lambda, \nu, m, m_1) = \sum_{N < m \leq N_1} \sum_{\alpha < h \leq \alpha + \omega(m)} \Phi_2(5bm + b_1, 5a(m+h) + a_1, \nu) \times$$

$$\times \left(\frac{m + \frac{b_1}{5b}}{(m+h) + \frac{a_1}{5a}} \right)^{iT}.$$

Переменная суммирования m_1 принимает все значения целых чисел из полуинтервала $m + \alpha < m_1 \leq m + \alpha + \omega(m)$, поэтому заменяя m_1 на $m + h$, то есть полагая $m_1 = m + h$, где h принимает значения из полуинтервала $\alpha < h \leq \alpha + \omega(m)$, представим сумму $W_2(\Lambda, \nu, m, m_1)$ в виде

$$W_2(\Lambda, \nu, m, m_1) = \sum_{N < m \leq N_1} \sum_{\alpha < h \leq \alpha + \omega(m)} \Phi_2(5bm + b_1, 5a(m+h) + a_1, \nu) \times$$

$$\times \left(\frac{m + \frac{b_1}{5b}}{(m+h) + \frac{a_1}{5a}} \right)^{iT}.$$

Заметим, что $h \geq 0$ и это следует из соотношения

$$-1 < -1 + \frac{1}{5a} \leq \alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a} \leq 1 - \frac{1}{5b} < 1.$$

Меняя порядки суммирования по h и m , имея в виду, что условия $h \leq \alpha + \omega(m)$ и

$m \geq (h - \alpha) \frac{H}{\mathcal{L}} - \frac{b_1}{5b}$ равносильны и с учётом обозначения

$N_2 = \max \left(N, \frac{H}{\mathcal{L}} (h - \alpha) - \frac{b_1}{5b} \right)$, получим

$$W_2(\Lambda, \nu, m, m_1) = \sum_{\alpha < h \leq \alpha + \omega(N_1)} \sum_{N_2 < m \leq N_1} \Phi_2(5bm + b_1, 5a(m+h) + a_1, \nu) \times$$

$$\times \left(\frac{m + \frac{b_1}{5b}}{m + h + \frac{a_1}{5a}} \right)^{iT}.$$

К сумме по m применим преобразование Абеля, получаем

$$W_2(\Lambda, \nu, m, m_1) = \sum_{\alpha < h \leq \alpha + \omega(N_1)} \left(- \int_{N_2}^{N_1} C(u, h) f_2(u, h) du + C(N_1, h) f_2(N_1, h) \right),$$

$$f_2(u, h) = \Phi_2(5bu + b_1, 5a(u + h) + a_1, \nu), \quad C(u, h) = \sum_{N_2 < m \leq u} \left(\frac{m + \frac{b_1}{5b}}{m + h + \frac{a_1}{5a}} \right)^{iT}.$$

Подставляя правую часть полученной формулы в (10), а затем в (9) и переходя к оценкам, найдём

$$W_2(\Lambda) \leq \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 < X} \frac{1}{\sqrt{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}} \sum_{0 \leq b_1 < 5b} \sum_{0 \leq a_1 < 5a} \sum_{\alpha < h \leq \alpha + \omega(N_1)} F_2(h, \nu) \max_{N_2 < u \leq N_1} |C(u, h)|, \quad (11)$$

$$F_2(h, \nu) = \int_{N_2}^{N_1} |f_2(u, h)| du + |f_2(N_1, h)|.$$

Оценим теперь $F_2(h, \nu)$.

4. Оценка $F_2(h, \nu)$. Воспользовавшись введенными при определении суммы $W_2(T)$ функциями $d(\lambda_1)$ и $\bar{d}(\lambda_2)$ и представляя функцию $f_2(u, h) = \Phi_2(5bu + b_1, 5a(u + h) + a_1, \nu)$ в виде

$$f_2(u, h) = \frac{\exp \left(- \left(\frac{H}{2} \ln \frac{u + \frac{b_1}{5b}}{u + h + \frac{a_1}{5a}} \right)^2 \right)}{5\sqrt{ab} \sqrt{\left(u + \frac{b_1}{5b} \right) \left(u + h + \frac{a_1}{5a} \right)}} \cdot d(\lambda_1) \bar{d}(\lambda_2) = f_1(u, h) \left(d(\lambda_1) \bar{d}(\lambda_2) \right),$$

находим её производную по переменной u :

$$f_2'(u, h) = f_1'(u, h) \left(d(\lambda_1) \bar{d}(\lambda_2) \right).$$

Имея в виду, что $f_1(u, h) = \Phi_1(5bu + b_1, 5a(u + h) + a_1, \nu)$, находим

$$f_1'(u, h) = \frac{\left(\exp \left[- \left(\frac{H}{2} \ln \frac{u + \frac{b_1}{5b}}{u + h + \frac{a_1}{5a}} \right)^2 \right] \right)'}{5\sqrt{ab} \sqrt{\left(u + \frac{b_1}{5b} \right) \left(u + h + \frac{a_1}{5a} \right)}} =$$

$$= \frac{\exp \left[- \left(\frac{H}{2} \ln \frac{u + \frac{b_1}{5b}}{u + h + \frac{a_1}{5a}} \right)^2 \right]}{5\sqrt{ab}} \cdot \frac{2H \ln \left(1 + \frac{h - \frac{b_1}{5b} + \frac{a_1}{5a}}{u + \frac{b_1}{5b}} \right) \left(h - \frac{b_1}{5b} + \frac{a_1}{5a} \right) - 2u - h - \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a}}{2 \left(u + \frac{b_1}{5b} \right)^{\frac{3}{2}} \left(u + h + \frac{a_1}{5a} \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Знак $f_1'(u, h)$ совпадает со знаком числителя последней дроби, для определения которой пользуясь последовательно границами изменения переменных $N_2 < m \leq N_1$ и $\alpha < h \leq \alpha + \omega(N_1)$, то есть соотношениями

$$N_2 = \max \left(N, \frac{H}{\mathcal{L}} (h - \alpha) - \frac{b_1}{5b} \right) = \max \left(\frac{\frac{\Lambda v_2}{v_1} - b_1}{5b}, \frac{H}{\mathcal{L}} \left(h - \frac{b_1}{5b} + \frac{a_1}{5a} \right) - \frac{b_1}{5b} \right),$$

$$\alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a}, \quad \omega(N_1) = \left(N_1 + \frac{b_1}{5b} \right) \frac{\mathcal{L}}{H} = \frac{\Lambda_1 v_2}{v_1} \cdot \frac{\mathcal{L}}{5bH},$$

имеем

$$2H \ln \left(1 + \frac{h - \frac{b_1}{5b} + \frac{a_1}{5a}}{u + \frac{b_1}{5b}} \right) \left(h - \frac{b_1}{5b} + \frac{a_1}{5a} \right) - 2u - h - \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a} <$$

$$< \frac{2\Lambda v_2}{5v_1 b} \left(\left(1 + \frac{\delta}{H} \right) \ln \left(1 + \frac{\mathcal{L}}{H} \right) \mathcal{L} - 1 \right) < \left(\frac{2\mathcal{L}^2}{H} - 1 \right) \frac{2\Lambda v_2}{5v_1 b} < 0.$$

Следовательно $f_1'(u, h) < 0$, поэтому с учётом $f_1(u, h) > 0$ найдем

$$F_2(h, \nu) = - \int_{N_2}^{N_1} f_2(u, h) du + f_2(N_1, h) \leq f_2(N_2, h).$$

Для оценки сверху $f_2(u, h)$, возвращаясь к переменным n_1 и n_2 , затем к λ_1 и λ_2 , далее пользуясь соотношением $\Lambda < \lambda_1 < \lambda_2$, $|d(\lambda)| \leq \sqrt{\pi h}$, имеем

$$\begin{aligned} F_2(h, \nu) &= |f_2(u, N_2)| = \\ &= \sqrt{\frac{\nu_1 \nu_3}{\nu_2 \nu_4}} \cdot \frac{\left| \exp \left(- \left(\frac{H}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \right) \right|}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} |d(\lambda_1)| |\bar{d}(\lambda_2)| \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{\nu_1 \nu_3}{\nu_2 \nu_4}} \cdot \frac{\pi h^2}{\Lambda}. \end{aligned} \quad (12)$$

5. Сведение оценки $W_2(\Lambda)$ к оценке $C(u, h)$. Подставляя оценку (12) в формулу (11), получим

$$W_2(\Lambda) \ll \frac{h^2}{\Lambda} \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 < X} \frac{1}{\nu_2 \nu_4} \sum_{0 \leq b_1 < 5b} \sum_{0 \leq a_1 < 5a} \sum_{\alpha < h \leq \alpha + \omega(N_1)} \max_{N_2 < u \leq N_1} |C(u, h)|. \quad (13)$$

Для оценки внутренней суммы

$$C(u, h) = \sum_{N_2 < m \leq u} e \left(\frac{T}{2\pi} \ln \frac{m + h + \frac{a_1}{5a}}{m + \frac{b_1}{5b}} \right),$$

$$N_2 = \max \left(\frac{\Lambda \nu_2}{5b \nu_1} - \frac{b_1}{5b}, \frac{H}{\mathcal{L}} (h - \alpha) - \frac{b_1}{5b} \right), \quad u \leq \frac{\Lambda_1 \nu_2}{5b \nu_1} - \frac{b_1}{5b}$$

воспользуемся методом экспоненциальных пар. Положим,

$$f(y) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{y + h + \frac{a_1}{5a}}{y + \frac{b_1}{5b}}, \quad A = \frac{T |h - \alpha|}{N_2^2} \ll \frac{T |h - \alpha| b^2 \nu_1^2}{\Lambda^2 \nu_2^2},$$

$$B = u - N_2 \leq N_1 - N_2 = \frac{\Lambda_1 \nu_2}{5b \nu_1} - \frac{b_1}{5b} - \max \left(\frac{\Lambda \nu_2}{5b \nu_1} - \frac{b_1}{5b}, \frac{H}{\mathcal{L}} (h - \alpha) - \frac{b_1}{5b} \right) \ll \frac{\Lambda \nu_2}{b \nu_1}.$$

Для нахождения производных порядка s , $s = 1, 2, \dots$ функции $f(u)$, представляя её производную первого порядка в виде

$$f'(y) = -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi} \cdot f_1(y)f_2(y), f_1(y) = \frac{1}{y+h+\frac{a_1}{5a}}, f_2(y) = \frac{1}{y+\frac{b_1}{5b}}, \alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a}$$

и имея в виду, что

$$f_1^{(s-1-j)}(y) = \frac{(-1)^{s-1-j}(s-1-j)!}{\left(y+h+\frac{a_1}{5a}\right)^{s-j}}, \quad f_2^{(j)}(y) = \frac{(-1)^j j!}{\left(y+\frac{b_1}{5b}\right)^{j+1}},$$

воспользуемся формулой Лейбница для $s-1$ -ой производной произведения двух функций:

$$\begin{aligned} f^{(s)}(y) &= -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi} (f_1(y)f_2(y))^{(s-1)} = -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi} \sum_{j=0}^{s-1} C_{s-1}^j f_1^{(s-1-j)}(y) f_2^{(j)}(y) = \\ &= \frac{(-1)^s s T(h-\alpha)}{2\pi} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{\left(y+h+\frac{a_1}{5a}\right)^{s-j} \left(y+\frac{b_1}{5b}\right)^{j+1}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$AB^{1-s} \ll f^{(s)}(u) \ll AB^{1-s}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Следовательно, для экспоненциальной пары (κ, λ) имеем

$$|C(u, h)| \ll \left(\frac{T(h-\alpha)b^2v_1^2}{\Lambda^2v_2^2} \right)^\kappa \left(\frac{\Lambda v_2}{bv_1} \right)^\lambda = \frac{T^\kappa b^{2\kappa-\lambda} v_1^{2\kappa-\lambda}}{\Lambda^{2\kappa-\lambda} v_2^{2\kappa-\lambda}} (h-\alpha)^\kappa.$$

Подставляя оценку для $|C(u, h)|$ в (13), имеем

$$\begin{aligned} W_2(\Lambda) &\ll \frac{h^2 T^\kappa}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}} \sum_{v_1, v_2, v_3, v_4 < X} \frac{v_1^{2\kappa-\lambda} b^{2\kappa-\lambda}}{v_2^{1+2\kappa-\lambda} v_4} \sum_{0 \leq b_1 < 5b} \sum_{0 \leq a_1 < 5a} \sum_{\alpha < h \leq \alpha + \omega(N_1)} (h-\alpha)^\kappa \ll \\ &\ll \frac{h^2 T^\kappa}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}} \sum_{v_1, v_2, v_3, v_4 < X} \frac{v_1^{2\kappa-\lambda} ab^{1+2\kappa-\lambda}}{v_2^{1+2\kappa-\lambda} v_4} (\omega(N_1))^{\kappa+1}. \end{aligned}$$

Отсюда имея в виду, что

$$\omega(N_1) = \left(N_1 + \frac{b_1}{5b} \right) \frac{\mathcal{L}}{H} = \frac{\Lambda_1 v_2 \mathcal{L}}{5H b v_1}, \quad a = \frac{v_1 v_4}{(v_1 v_4, v_2 v_3)}, \quad b = \frac{v_2 v_3}{(v_1 v_4, v_2 v_3)},$$

получим

$$\begin{aligned}
W_2(\Lambda) &\ll \frac{h^2 T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}} \sum_{v_1, v_2, v_3, v_4 < X} \frac{(v_1 v_3)^{\kappa-\lambda}}{(v_1 v_4, v_2 v_3)^{1+\kappa-\lambda}} \leq \\
&\leq \frac{h^2 T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}} \sum_{v_1, v_2, v_3, v_4 < X} (v_1 v_3)^{\kappa-\lambda} \ll h^2 \frac{T^\kappa \Lambda^{\lambda-\kappa} X^{4+2\kappa-2\lambda}}{H^{\kappa+1}}.
\end{aligned}$$

Отсюда, ввиду $0 \leq \lambda - \kappa \leq 1$, $0 \leq \kappa \leq 0.5$ и воспользовавшись соотношением

$2\Lambda < P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}$, а затем подставляя значение параметра $X = T^{0.01\varepsilon}$ и

$H = T^{\frac{\kappa+\lambda}{2} + \varepsilon + \sigma(\kappa)}$, где $\sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathcal{L}}{(\kappa+1) \ln T}$, найдем

$$\begin{aligned}
W_2(\Lambda) &\ll h^2 \frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2}} X^{4-2(\lambda-\kappa)}}{H^{\kappa+1}} \leq h^2 \frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2}} X^2}{H^{\kappa+1}} = h^2 \left(\frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2} + 0.01\varepsilon \cdot \frac{2}{\kappa+1}}}{H} \right)^{\kappa+1} = \\
&= h^2 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} + \frac{0.02\varepsilon}{\kappa+1} + \sigma(\kappa)}}{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} + \varepsilon + \sigma(\kappa)}} \right)^{\kappa+1} = h^2 \mathcal{L}^{-1} \left(T^{-(\kappa+1)\varepsilon + 0.02\varepsilon} \right) = \\
&= h^2 \mathcal{L}^{-1} T^{-\varepsilon + \varepsilon(0.02 - \kappa)} \leq h^2 \mathcal{L}^{-1} T^{-\varepsilon + 0.02\varepsilon} = h^2 \mathcal{L}^{-1} T^{-0.98\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что

$$W_2(\Lambda) \ll h^2 \mathcal{L}^{-1} T^{-0.98\varepsilon}.$$

Подставляя эту оценку и оценку (8) в (7), получим

$$\begin{aligned}
W_2(T) &\ll \mathcal{L} \left(h^2 \mathcal{L}^{-1} T^{-0.98\varepsilon} + h^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{16}\right) P X^2 \ln^2 X \right) + \\
&+ h^2 \exp\left(-\frac{\mathcal{L}^2}{64}\right) P X^2 \ln^2 X \ll h^2 T^{-0.98\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для суммы W_1 находим следующую оценку: $W_1 \ll h^2 \Delta$, где

$$\Delta = \frac{\log T}{\sqrt{\log X}} \left(c + (ch \log T)^{-2} \exp(-2(h_1 h^{-1})^2) + \exp(-2(hc \log T)^2) \right). \quad (14)$$

Таким образом, для интегралов J_2 и I_2 получаем следующие оценки:

$$J_2 \leq c_5 H h^2 \Delta; \quad I_2^{\frac{2}{\alpha}} \leq c_5 H^{\frac{2}{\alpha}} h^2 \Delta; \quad I_2 \leq c_5^{\frac{\alpha}{2}} H h^{\alpha} \Delta^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Подставляя полученные оценки интегралов I_1, I_2, I_3 в (?), находим

$$\mu(E) \geq \frac{\left(c_3 H h^{\alpha} - c_5^{\frac{\alpha}{2}} H h^{\alpha} \Delta^{\frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\left(h^2 H \frac{\log T}{\sqrt{\log X}} \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}} = \frac{H \left(c_3 - c_5^{\frac{\alpha}{2}} \Delta^{\frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{2}{2-\alpha}}}{\left(\frac{\log T}{\sqrt{\log X}} \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}.$$

В формуле (14), подставляя значения $X = T^{0.01\varepsilon}$ и параметра c , имеем

$$\Delta \leq \frac{30}{\sqrt{\varepsilon}} \exp(-\sqrt{\log \log T}), \quad (c_5 \Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \leq \exp\left(-\frac{c_1}{4}\right).$$

Выберем постоянную $c_1 > 1$ такой, чтобы выполнялось неравенство

$$c_3 e^{-1} \geq \exp\left(-\frac{c_1}{4}\right).$$

Тогда находим

$$\mu(E) \geq c_6 H \left(\frac{\log T}{\sqrt{\log X}} \right)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}} \geq c_6 H \left(\frac{\log T}{\sqrt{\log X}} \right)^{-\alpha}.$$

Таким образом, из определения множества E и оценки снизу меры этого множества $\mu(E)$ следует, что количество нулей нечетного порядка функции $F(t)$ на промежутке $(T, T+H)$ не меньше, чем

$$c_7 H h_1^{-1} \left(\frac{\log T}{\sqrt{\log X}} \right)^{-\alpha}, \quad (15)$$

где $c_7 > 0$ – абсолютная постоянная. Вводя параметры

$$h = \frac{1}{c \log T} \sqrt{\log \frac{1}{c}}, \quad \frac{1}{c} = \sqrt{\log T} \exp \sqrt{\log \log T},$$

$$h_1 = h \sqrt{\log \frac{1}{c}}, \quad \alpha = \frac{c_1}{\sqrt{\log \log T}},$$

из (15) получаем утверждение теоремы:

$$R \geq H \sqrt{\log T} \exp(-c_8 \sqrt{\log \log T});$$

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H \sqrt{\log T} \exp(-c_8 \sqrt{\log \log T}),$$

где $c_8 > 0$ – абсолютная постоянная.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series. – J. Lond. Math. Soc, 1936, v. 11, pp. 181-185 and 307-312.
2. Воронин С.М. О распределении нулей некоторых рядов Дирихле. – Труды МИАН, 1984, т. 163, с. 74-77.
3. Воронин С.М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой. – Известия АН СССР. Серия математическая, 1980, т. 44, №1, с. 63-91.
4. Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой. – Известия АН СССР. Серия математическая, 1990, т. 54, №2, с. 303-315.
5. Карацуба А.А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлера произведения. – Известия РАН. Серия математическая, 1993, т. 57, №5, с. 3-14.
6. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой. – ДАН РТ, 2009, т. 52, №5, с. 331-337.
7. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями производной j -го порядка функции Харди. – ДАН РТ, 2016, т. 59, №5-6, с. 185-187.
8. Хайруллоев Ш.А. О соседних нулях производной n -го порядка функции Харди. – ДАН РТ, 2019, т. 62, №3-4, с. 145-149.
9. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А., Аминов А.С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой. – Чебышевский сборник, 2019, т. 20, №4(72), с. 271-293.
10. Huxley M.N. Sums and Lattice Points III. – Proceedings of the London Mathematical Society, 2003, v. 87. Is. 3, pp. 591-609.

Ш.А.ХАЙРУЛЛОЕВ

ОИДИ НУЛҲОИ ҚАТОРҲОИ АРИФМЕТИКИИ ДИРИХЛЕ, КИ

ҲОСИЛИЗАРБҲОИ ЭЙЛЕРИ НАДОРАНД

Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Нобаробарии А.А.Каратсуба барои миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ, ҳангоми кӯтоҳ будани дарозии порча исбот карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн, чуфтҳои экспоненсиалӣ, хати рости критикӣ, характери Дирихле, суммаи тригонометрӣ.

Sh.A.KHAYRULLOEV

**ON THE ZEROS OF ARITHMETIC DIRICHLET SERIES
WITHOUT EULER PRODUCT**

A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences the Republic of Tajikistan

Inequalities A.A.Karatsuba for the number of zeros of the Davenport-Heilbronn function in the short intervals of the critical line when the space has a shorter length has been proven.

Key words: Davenport-Heilbronn function, exponential pair, critical line, Dirichlet character, trigonometric sum.

УДК 517.5

М.АЗИЗОВ, А.МУХЛИС

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ И КОДИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
НЕЙМАНА С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ И
ПО ЗАДАННОЙ ИНФОРМАЦИИ О ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЯХ**

*Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни
Поступила в редакцию 01.10.2018 г.*

В работе решена задача восстановления и кодирования решения краевой задачи Неймана по заданной информации о граничной функции.

Ключевые слова: восстановление, кодирование, краевая задача Неймана, граничная функция, тригонометрический полином, информационный вектор, наилучшее приближение.

1. В статье рассматривается оптимизационная задача восстановления значений операторов в постановке Н.П.Корнейчука [1] на примере оптимального восстановления решения краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа в единичном круге в следующей формулировке: найти гармоническую функцию $U(\rho, t) (0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi)$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(\rho, t) = 0 \quad (1)$$

и двум граничным условиям

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = g(t), \quad \int_0^{2\pi} g(t) dt = 0. \quad (2)$$

Решение задачи (1)-(2) существует, определяется с точностью до постоянной и задаётся формулой [2]:

Адрес для корреспонденции: Азизов Музафар. Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121, Таджикский государственный педагогический университет, E-mail: azizov.muz@gmail.com.

$$U(\rho, t) := U(g; \rho, t) = C_1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_\rho(t - \tau) g(\tau) d\tau, \quad C_1 = \text{const}, \quad (3)$$

где

$$\Phi_\rho(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \cos kt, \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (4)$$

Функцию $\Phi_\rho(t)$ называют ядром Неймана.

Отметим, что в [2] задача (1)-(2) исследована в связи с выяснением дифференциальных свойств гармонических в единичном круге функций $U(\rho, t)$ в зависимости от известных дифференциальных свойств граничных функций, а в [3] найдено точное значение наилучших приближений ядра $\Phi_\rho(t)$ тригонометрическими полиномами. В настоящей статье, продолжая исследование в этом направлении, рассмотрим вопросы кодирования решения задачи (1)-(2) и ее оптимального восстановления по заданной информации о граничных функциях.

2. Рассмотрим задачу восстановления решения краевой задачи Неймана (1)-(2), когда известны значения первых $2n-1$ коэффициентов Фурье $\{a_k(g)\}_{k=0}^{n-1}$, $\{b_k(g)\}_{k=1}^{n-1}$ граничной функции $g(t)$. С помощью набора числовых коэффициентов $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$, находящихся в нашем распоряжении, решению $U(g; \rho, t)$ задачи Неймана сопоставим тригонометрический полином общего вида

$$T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \lambda, t) = \frac{a_0 \lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (a_k(g) \cos kt + b_k(g) \sin kt). \quad (5)$$

Тем самым набор $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ задает некоторый метод восстановления функции $U(g; \rho, t)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$, и оптимальный выбор набора коэффициентов λ будет связан с ядром $\Phi_\rho(t)$ решения задачи (1)-(2). Если вместо коэффициентов $a_k(g)$ и $b_k(g)$ подставить

$$a_k(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos ktdt, \quad b_k(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin ktdt,$$

то полином (5) представляется в виде свертки

$$T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \lambda, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_{n-1}^*(t - \tau, \lambda) g(\tau) d\tau, \quad (6)$$

где

$$T_{n-1}^*(t, \lambda) = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \cos kt.$$

Теорема 1. Для погрешности восстановления решения $U(\rho, t)$ задачи (1)-(2) тригонометрическим полиномом (6) в метрике L_p ($1 \leq p \leq \infty$) имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \sup_{\|g\|_p \leq 1} \inf_{\lambda} \|U(g; \rho, \cdot) - T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \lambda)\|_p = \\ & = \sup_{\|g\|_p \leq 1} \|U(g; \rho, \cdot) - T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \mu)\|_p \leq \\ & \leq E_n(\Phi_\rho)_{L_1} = 4 \cdot \int_0^\rho \frac{r^n}{r} d\rho, \quad 0 \leq \rho < 1, \end{aligned} \quad (7)$$

где набор коэффициентов $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})$ определён равенством

$$\Phi_\rho \left(\frac{2j-1}{2n} \pi \right) = T_{n-1}^* \left(\frac{2j-1}{2n} \pi, \mu \right) \quad (j = \overline{1, n}).$$

Неравенство (7) неулучшаемо при $p = 1$ и $p = \infty$.

Доказательство. Используя равенство (2) и представление (6) полинома $T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \lambda, t)$, запишем

$$\begin{aligned} U(g; \rho, t) - T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \lambda, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi_\rho(t-\tau) - T_{n-1}^*(t-\tau, \lambda)) \cdot g(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi_\rho(\tau) - T_{n-1}^*(\tau, \lambda)) \cdot g(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу общих неравенств для сверток (см., например, [4, с.71]) получаем:

$$\begin{aligned} & \|U(g; \rho, \cdot) - T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \lambda)\|_{L_p} \leq \\ & \leq \frac{1}{\pi} \|\Phi_\rho(\cdot) - T_{n-1}^*(\lambda)\|_{L_1} \cdot \|g\|_p \quad (1 \leq p \leq \infty). \end{aligned} \quad (8)$$

Неравенство (8) даёт общую оценку погрешности восстановления решения задачи в метрике L_p ($1 \leq p \leq \infty$) полиномами (6) с произвольным набором $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$. Из

(8) следует, что

$$\inf_{\lambda} \|U(g; \rho, \cdot) - T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \lambda)\|_{L_p} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \inf_{\lambda} \|\Phi_{\rho} - T_{n-1}^*(\lambda)\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_p} \quad (1 \leq p \leq \infty). \quad (9)$$

Выберем набор λ так, чтобы правая часть (9) принимала наименьшее значение. Очевидно, что это возможно только в том случае, если $\lambda = \mu$, то есть если $\lambda_k = \mu_k (k = \overline{0, n-1})$, где μ_k – коэффициенты полинома $T_{n-1}(\Phi_{\rho}, t)$ наилучшего приближения ядра $\Phi_{\rho}(t)$ в метрике L_1 . Эти коэффициенты определяются из условия (см., [3])

$$\Phi_{\rho} \left(\frac{2j-1}{2n} \pi \right) = T_{n-1}^0 \left(\Phi_{\rho}, \frac{2j-1}{2n} \pi \right), \quad (j = \overline{1, n}). \quad (10)$$

Из равенства (10) легко определить наилучшие коэффициенты μ_k^0 :

$$\begin{aligned} \mu_0^0 &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \cdot \frac{\rho^{2sn}}{sn} = \frac{1}{n} \ln(1 + \rho^{2n}), \quad 0 \leq \rho \leq 1. \\ \mu_k^0 &= \frac{1}{k} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\rho^{2sn+k}}{2sn+k} + \frac{\rho^{2sn-k}}{2sn-k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (11)$$

В этом случае полином $T_{n-1}^*(\lambda)$ тождественно совпадает с полиномом $T_{n-1}(\mathcal{X}_{\rho}, t)$. Поэтому из неравенства (9) с учётом результатов работы [3] вытекает, что

$$\begin{aligned} \inf_{\lambda} \|U(g; \rho, \cdot) - T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \lambda)\|_p &= \|U(g; \rho, \cdot) - T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \mu)\|_p \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} E_n(\mathcal{X}_{\rho})_1 \cdot \|g\|_p = \left(\frac{4}{\pi} \int_0^{\rho} \frac{r^n}{r} dr \right) \cdot E_n(g)_p. \end{aligned} \quad (12)$$

Переходя в (12) в верхней грани по всем функциям $g \in L_p$ с нормой $\|g\|_p \leq 1$, получаем (7). Неулучшаемость соотношения (7) при $p = 1$ и $p = \infty$ вытекает из того, что при этих значениях в работе [3] доказано, что

$$\sup_{\|g\|_p \leq 1} E_n(U(g; \rho, \cdot))_p = \frac{4}{\pi} \int_0^{\rho} \frac{r^n}{r} dr.$$

Этим теорема 1 полностью доказана.

Заметим, что из схемы доказательства теоремы 1 следует, что полином $T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \mu, t)$ является наилучшим линейным методом восстановления решения $U(g; \rho, t)$ краевой задачи (1)-(2) среди всех полиномов вида (5) в метрике L_p при $p = 1$ и $p = \infty$ и реализует наилучшее приближение $U(g; \rho, t)$ в этих случаях.

Использование полинома $T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \mu, t)$, в котором $\mu := \{\mu_0^0, \mu_1^0, \dots, \mu_{n-1}^0\}$ определены равенствами (11), позволяет доказать следующее утверждение

Теорема 2. Для наилучшего приближения решения $U(g; \rho, t)$ краевой задачи (1)-(2) тригонометрическими полиномами в метрике L_p ($1 \leq p \leq \infty$) справедлива оценка

$$E_n(U(g; \rho, \cdot))_p \leq \left(\frac{4}{\pi} \int_0^\rho \frac{r^n}{r} dr \right) \cdot E_n(g)_p, \quad (0 \leq \rho < 1). \quad (13)$$

Существует функция $g_0(t) \in L_p$ с нормой $\|g_0\|_p \leq 1$, для которой в (13) при $p = 1$ и $p = \infty$ имеет место знак равенства.

Доказательство. Пусть $T_{n-1}^{**}(t)$ – произвольный тригонометрический полином степени $n-1$, а $T_{n-1}(t) := T_{n-1}(\Phi_\rho, t)$ – полином наилучшего приближения ядра $\Phi_\rho(t)$ в метрике L_1 . Тогда функция

$$Q(\rho, t) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi_\rho(\tau) - T_{n-1}(t)) T_{n-1}^{**}(t - \tau) d\tau \quad (14)$$

также является тригонометрическим полиномом степени $\leq n-1$. Из (3), (6) и (14) следует, что

$$\begin{aligned} U(g; \rho, t) - T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \mu, t) - Q(\rho, t) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi_\rho(t - \tau) - T_{n-1}(t - \tau))(g(\tau) - T_{n-1}^{**}(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

Если полагать, что $T_{n-1}^{**}(t)$ является полиномом наилучшего приближения функции $g(t)$ в метрике L_p ($1 \leq p \leq \infty$), то из (15) в силу общих неравенств для сверток вытекает, что

$$\begin{aligned} E_n(U(g; \rho, \cdot)) &\leq \| (U(g; \rho, \cdot)) - T_{n-1}(U(g; \rho, \cdot), \mu, \cdot) - Q(\rho, \cdot) \|_p \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} E_n(\Phi_\rho)_1 \cdot \|g - T_{n-1}^{**}\|_p = \frac{1}{\pi} E_n(\Phi_\rho)_1 \cdot E_n(g)_p = \frac{1}{\pi} \int_0^\rho \frac{r^n}{r} dr \cdot E_n(g)_p. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $p = 1$ и $p = \infty$ в равенстве (13) имеет место знак равенства для функции $g(t) = \text{sgn} \sin nt$, откуда и следует утверждения теоремы 2.

3. В этом пункте рассмотрим задачу оптимального кодирования и восстановления оператора решения краевой задачи Неймана (1)-(2) по заданной информации о граничной функции. Указанную задачу будем рассматривать в том виде, как она сформулирована в

работах Н.П.Корнейчука [5, 6], где, в частности, приведены решения сформулированных задач для некоторых конкретно заданных операторов в функциональных пространствах. При этом наиболее полно исследована задача кодирования интеграла Пуассона и оператора дифференцирования порядка m на классе r – раз дифференцируемых функций ($0 \leq m < r$, $m, r \in \mathbb{N}$) в метрике L_p ($1 \leq p \leq \infty$).

Приведем общую постановку задачи.

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства, A – линейный непрерывный оператор из X в Y . M_N – набор заданных на X^* линейных непрерывных функционалов $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$, где X^* – пространство, сопряженное к X . Каждому $x \in X$ сопоставим вектор информации

$$T(x, M_N) := \{\mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_N(x)\}, \quad (16)$$

которую можно рассматривать как кодирование элемента x точкой из N -мерного пространства \mathbb{R}^N . Если \mathfrak{M} – некоторое ограниченное множество в X , то положим

$$G(\mathfrak{M}; A, M_N)_Y = \sup\{\|Ax - Ay\|_Y : x, y \in \mathfrak{M}, T(x, M_N) = T(y, M_N)\}.$$

Величина

$$\gamma_N(\mathfrak{M}, A, Y) = \inf\{G(\mathfrak{M}, A, M_N)_Y : M_N \subset X^*\}$$

дает минимально возможную гарантированную для всех $x \in \mathfrak{M}$ погрешность восстановления элемента Ax по информации (16) и называется информационным N – поперечником множества \mathfrak{M} в пространстве Y . Если же \mathfrak{M} – выпуклое центрально–симметричное множество в нормированном пространстве X , то согласно следствию 1 из работы [1]:

$$G(\mathfrak{M}; A, M_N)_Y = 2 \sup\{\|Ax\|_Y : x \in \mathfrak{M}, T(x, M_N) = 0\}, \quad (17)$$

и в этом случае

$$\gamma_N(\mathfrak{M}, A, Y) = 2 \inf\{\sup\{\|Ax\|_Y : x \in \mathfrak{M}, T(x, M_N) = 0\} : M_N \subset X^*\}. \quad (18)$$

Соотношение (17) может служить основным инструментом кодирования и восстановления конкретных операторов решения краевой задачи Неймана, рассмотренной в предыдущем пункте.

Пусть $A := A_{\Phi_\rho}$ – оператор свертки с 2π -периодическим ядром $\Phi_\rho(t)$, где $\Phi_\rho(t)$ ядро Неймана (4). Для $\Phi_\rho \in L_1$ функцию $g(t)$ кодируем информационным вектором

$$T(g, M'_N) := \{\mu_1(g), \mu_2(g), \dots, \mu_N(g)\},$$

где $g(t) \in C_{[0, 2\pi]}$ и $M'_N = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$ – множество линейных ограниченных функционалов, определенных на $C_{[0, 2\pi]}$. Как правило, априорная информация о граничной функции $g(t)$ задается классом

$$\mathcal{M}_p(\mathcal{K}) := \{\varphi: \varphi = \mathcal{K} * g, \|g\|_p \leq 1\},$$

где \mathcal{K} – некоторое другое ядро. Очевидно, что $\mathcal{M}_p(\mathcal{K})$ – выпуклое центрально-симметричное множество. Пусть $M'_N = M_{2n-1}^F$ – множество функционалов μ_k , заданных в виде первых $2n-1$ коэффициентов Фурье функции $g(t): a_0(g), a_k(g), b_k(g)$ ($k = \overline{1, n-1}$), то есть вектор информации (??) имеет вид

$$T(g, M_{2n-1}^F) := \{a_0(g), a_1(g), \dots, a_{n-1}(g), b_1(g), \dots, b_{n-1}(g)\}.$$

Пусть, как и раньше, \mathfrak{M}_{2n-1}^T означает множество тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$, тогда согласно соотношению (17) имеем:

$$\begin{aligned} G(\mathcal{M}_p(\mathcal{K}), A_{\Phi_\rho}, M_{2n-1}^F) := \\ = \frac{2}{\pi} \sup \left\{ \left\| \int_0^{2\pi} \Phi_\rho(\cdot - \tau) g(\tau) d\tau \right\|_p : g \in \mathcal{M}_p(\mathcal{K}), g \perp \mathfrak{M}_{2n-1}^T \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Значение величины (19) в случае $p = 1$ и $p = \infty$ можно точно вычислить, если каждое из ядер $\Phi_\rho(t)$ и $\mathcal{K}(t)$ является ядром типа Б.Надя (см., например [7] или [2]), то есть ряды Фурье этих ядер представимы в виде ряда либо только по косинусам

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt, \quad a_k > 0, \quad (20)$$

либо только по синусам

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt, \quad b_k > 0, \quad (21)$$

а коэффициенты a_k и b_k этих рядов удовлетворяют следующим условиям: разности $\Delta^i a_k \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$), $\Delta^i b_k \geq 0$ ($i = 1, 2$) образуют кратно монотонно сходящиеся к нулю последовательности, где, как обычно,

$$\Delta c_k = c_k - c_{k+1}, \Delta^i c_k = \Delta^{i-1} c_k - \Delta^{i-1} c_{k+1} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Так как в нашем случае ядро $\Phi_\rho(t)$ имеет вид

$$\Phi_\rho(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k} \cos kt,$$

то $a_k(\Phi_\rho) = \rho^k / k$ ($k = 1, 2, \dots$), и нужно лишь задавать коэффициенты $a_k(\mathcal{K}_1)$ и $b_k(\mathcal{K}_1)$ в зависимости от того ядро $\mathcal{K}_1(t)$ имеет вид (20) или (21).

Если эти коэффициенты рядов Фурье ядер $\mathcal{K}(t)$ и $\mathcal{K}_1(t)$ трижды монотонны и стремятся к нулю, то есть удовлетворяют условию Нады [7], то точное значение величины

$$\frac{1}{8} G(\mathcal{M}_p(\mathcal{K}_1), A_{\Phi_\rho}, M_{2n-1}^F)_p$$

равно сумме одного из следующих числовых рядов

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{a_{(2\nu+1)n}(\Phi_\rho) \cdot a_{(2\nu+1)n}(\mathcal{K}_1)}{2\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{\rho^{(2\nu+1)n} \cdot a_{(2\nu+1)n}(\mathcal{K}_1)}{(2\nu+1)^2 \cdot n}, \quad (22)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{a_{(2\nu+1)n}(\Phi_\rho) \cdot b_{(2\nu+1)n}(\mathcal{K}_1)}{2\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{\rho^{(2\nu+1)n} \cdot b_{(2\nu+1)n}(\mathcal{K}_1)}{(2\nu+1)^2 \cdot n}. \quad (23)$$

Взяв в качестве $\mathcal{K}_1(t)$ -ядро Бернулли

$$\mathcal{B}_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - r\pi/2)}{k^r}, \quad (24)$$

представим функцию $g(t)$ в следующем виде

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{B}_r(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad \|\varphi\|_p \leq 1. \quad (25)$$

Множество функций $g(t)$, представимых в виде (25), совпадает с классом $W_p^{(r)}$ (см., например, [8]), и в этом случае

$$\mathcal{M}_p(\mathcal{K}_1) = \mathcal{M}_p(\mathcal{B}_r) = W_p^{(r)} \quad (r = 1, 2, \dots; 1 \leq p \leq \infty).$$

Легко проверить, что условие Нады для последовательностей коэффициентов $\{\rho^k / k\}_{k=1}^{\infty}$ ядро Φ_ρ и коэффициентов $\{k^{-r}\}_{k=1}^{\infty}$ ($r = 1, 2, \dots$) ядро \mathcal{B}_r рядов (4) и (24) выполняется.

Проверим это. Имеем:

$$a_k(\Phi_\rho) := \frac{\rho^k}{k}, \quad 0 \leq \rho < 1,$$

$$\Delta a_k = a_k - a_{k+1} = \frac{\rho^k}{k} \left(1 - \rho + \frac{\rho}{k+1} \right) \geq 0.$$

$$\Delta^2 a_k = \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = (1-\rho) \left(\frac{\rho^k}{k} - \frac{\rho^{k+1}}{k+1} \right) + \frac{\rho^{k+1}}{k+1} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{\rho}{k+2} \right) \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 a_k &= \Delta^2 a_k - \Delta^2 a_{k+1} = (1-\rho)^2 \cdot \rho^k \left(\frac{1}{k} - \frac{\rho}{k+1} \right) + \\ &+ \frac{\rho^{k+1}}{k+1} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{\rho}{k+2} \right) \left(1 - \frac{\rho^{k+1}}{k+2} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом для коэффициентов $a_k(\mathcal{A}_r) = k^{-r}$ простая проверка показывает, что

$$\Delta a_k(\mathcal{A}_r) = a_k(\mathcal{A}_r) - a_{k+1}(\mathcal{A}_r) = k^{-r} - (k+1)^{-r} = \frac{(k+1)^r - k^r}{[k(k+1)]^r} \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 a_k(\mathcal{A}_r) &= \Delta a_k(\mathcal{A}_r) - \Delta a_{k+1}(\mathcal{A}_r) = \\ &= \frac{1}{(k+1)^r} \left[\left(1 + \frac{1}{k} \right)^r + \left(1 - \frac{1}{k+2} \right)^r - 2 \right] \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 a_k(\mathcal{A}_r) &= \Delta^2 a_k(\mathcal{A}_r) - \Delta^2 a_{k+1}(\mathcal{A}_r) \geq \frac{1}{(k+1)^r} \left\{ \left[\left(1 + \frac{1}{k} \right)^r - \right. \right. \\ &\left. \left. - \left(1 + \frac{1}{k+1} \right)^r \right] - \left[\left(1 - \frac{1}{k+2} \right)^r - \left(1 - \frac{1}{k+3} \right)^r \right] \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

Теорема 3. Для всех $r \in \mathbb{N}$, $\rho \in [0,1)$ при $p = 1$, $p = \infty$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \gamma_{2n-1} \left(W_p^{(r)}, A_{\Phi_\rho}, L_p \right) &= G \left(W_p^{(r)}, A_{\Phi_\rho}, M_{2n-1}^F \right)_p = \\ &= \frac{8}{\pi^2 \cdot n^{r+1}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu(r+1)} \frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)^{r+2}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Доказательство. Для доказательства равенства (26) в соотношении (22) полагаем $\mathcal{K}_1(t) \equiv \mathcal{B}_r(t)$. Так как при $r = 2j$ ($j = 1, 2, \dots$)

$$\mathcal{B}_{2j} = (-1)^j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^{2j}},$$

а при $r = 2j - 1$ ($j = 1, 2, \dots$)

$$\mathcal{B}_{2j-1}(t) = (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^{2j-1}},$$

то при четных r и $p = 1, \infty$, согласно (22), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} \cdot G\left(W_p^{(2j)}, A_{\Phi_\rho}, M_{2n-1}^F\right)_p &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{\rho^{(2\nu+1)n} \cdot a_{(2\nu+1)n}(\mathcal{B}_{2j})}{(2\nu+1)^2 \cdot n} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)^2 \cdot n \cdot [(2\nu+1)n]^{2j}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)^{2j+2} \cdot n^{2j+1}}. \end{aligned} \quad (27)$$

При r - нечетном из (23) следует, что

$$\frac{\pi^2}{8} \cdot G\left(W_p^{(2j-1)}, A_{\Phi_\rho}, M_{2n-1}^F\right)_p = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)^{2j+1} \cdot n^{2j}}. \quad (28)$$

Объединяя равенства (27) и (28), получаем

$$G\left(W_p^{(r)}, A_{\Phi_\rho}, M_{2n-1}^F\right) = \frac{8}{\pi^2 \cdot n^{r+1}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu(r+1)} \frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)^{r+2}},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Следствие. В условиях теоремы 3 при $\rho \rightarrow 1$ имеет место равенство

$$\gamma_{2n-1}\left(W_p^{(r)}, A_{\Phi_1}, L_p\right)_p = G\left(W_p^{(r)}, A_{\Phi_1}, M_{2n-1}^F\right)_p = \frac{8\mathcal{K}_{r+1}}{\pi^2 \cdot n^{r+1}},$$

где

$$\mathcal{K}_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+2}}$$

– константа Фавара-Ахизера-Крейна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнейчук Н.П. Об оптимальном восстановлении значений операторов. – Украинский математический журнал, 1994, т.46, №10, с.1375-1381.
2. Korneichuk N.P. Encoding and recovery of operator values. – Journal of Computation, 1992, №8, pp.79-81.
3. Shabozov M.Sh. On recovery solution of boundary problem of Neyman. – East Journal on Approximation, 1996, v.2, №3, pp.415-425.
4. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976, 320 с.

5. Корнейчук Н.П. Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальное восстановление функций и их производных. – Изв. АН СССР, сер. матем., 1981, т.45, №2, с.266-290.
6. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987, 424 с.
7. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. – Изв. АН СССР, сер. матем., 1946, т.10, №3, с.207-256.
8. Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наукова думка, 1982, 252 с.

М.АЗИЗОВ, А.МУХЛИС

**БАРҚАРОРКУНӢ ВА КОДИРОНИИ МАСЪАЛАИ КАНОРИИ ҲАЛЛИ
НЕЙМАН БО ЁРИИ БИСЁРАЪЗОГИҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ ВА АЗ РУӢИ
ИТТИЛООТ ОИДИ ФУНКСИЯҲОИ САРҲАДӢ**

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Дар кори мазкур масъалаи барқароркунӣ ва кодиронии ҳалли масъалаи канорӣ Нейман аз руӣи иттилоот оиди функцияҳои сарҳадӣ ҳал карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: барқароркунӣ, кодиронӣ, масъалаи канорӣ Нейман, функцияи сарҳадӣ, бисёраъзогии тригонометрӣ, вектори информатсионӣ, наздиккунии бехтарин.

M.AZIZOV, A.MUKHLIS

**RECONSTRUCTION AND CODING THE SOLUTION OF THE NEYMAN'S
TASK USING TRIGONOMETRICAL POLYNOMIALS AND GIVEN
INFORMATION ABOUT BOUNDARY FUNCTION**

S.Ayni Teacher training State University of Tajikistan

In the paper the problem of restoring and coding solutions of the Neuman's boundary value problem for given information about the boundary function is solved.

Key words: reconstruction, coding, Neyman's marginal task, marginal function, trigonometrical polynomial, information vector, optimal approximation.

УДК 517.5

В.Д.САЙНАКОВ

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ
ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ОБОБЩЕННЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ
ПОЛИНОМАМИ

Технологический университет Таджикистана

Поступила в редакцию 17.08.2018 г.

В работе излагаются некоторые вопросы среднеквадратического приближения дифференцируемых периодических функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами.

Ключевые слова: наилучшие среднеквадратические приближения, обобщенные тригонометрические полиномы.

Всюду далее символами $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, \mathbb{Z} и \mathbb{R} будут обозначаться соответственно множества натуральных, целых неотрицательных, целых и вещественных чисел. Через $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ обозначим гильбертово пространство периодических функций двух переменных $f(x, y)$, суммируемых с квадратом в области Q с конечной нормой

$$\|f\|_{L_2} := \|f\|_{L_2(Q)} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} |f(x, y)|^2 dx dy \right\}^{1/2} < \infty.$$

Символом $C^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ обозначим множество периодических функций $f(x, y)$, имеющих в квадрате Q непрерывные частные производные

Адрес для корреспонденции: Сайнаков Восиф Додхудоёвич. 734061, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Н.Карабаева, 63/3, Технологический университет Таджикистана. E-mail: vosifvoiz@mail.ru

$$f^{(\mu,\nu)}(x,y) := \frac{\partial^{\nu+\mu} f}{\partial x^\nu \partial y^\mu}, \quad \mu \leq r, \nu \leq s, \mu, \nu, r, s \in \mathbb{N},$$

а через $L_2^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ обозначим множество функций $f(x,y) \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$, у которых частные производные $f^{(r,\nu)}(x,y)$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu = \overline{0, s-1}$, $f^{(\mu,s)}(x,y)$, $\mu = \overline{0, r-1}$, $s \in \mathbb{N}$ существуют, кусочно-непрерывны, допускают переменную порядка дифференцирования и $f^{(r,s)}(x,y) \in L_2(Q)$, то есть норма

$$\|f^{(r,s)}\|_{L_2} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} |f^{(r,s)}(x,y)|^2 dx dy \right\}^{1/2} < \infty. \quad (1)$$

Предположим, что функция $f \in L_2(Q)$ имеет формальное разложение в двойной ряд Фурье следующего вида

$$f(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)}, \quad (2)$$

где

$$c_{k,l}(f) := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x,y) e^{-i(kx+ly)} dx dy$$

– коэффициенты Фурье ряда (2). Если $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, то

$$\|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} k^{2r} l^{2s} |\rho_{k,l}(f)|^2, \quad (3)$$

где

$$\rho_{k,l}^2(f) = |c_{-k,-l}(f)|^2 + |c_{k,-l}(f)|^2 + |c_{-k,l}(f)|^2 + |c_{k,l}(f)|^2. \quad (4)$$

Таким образом, конечность нормы (1) означает, что двойной числовой ряд в правой части равенства (3) является сходящимся.

Далее рассмотрим задачу отыскания точных значений величины наилучшего приближения периодических функций двух переменных тригонометрическими “углами”, пользуясь некоторыми сведениями из работ [1-4].

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – два линейных нормированных пространства функций одной переменной, а

$$U_m := \text{span}\{u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)\}, \quad V_n := \text{span}\{v_0(y), v_1(y), \dots, v_n(y)\}$$

– их конечномерные подпространства, то есть $U_m \subset X$, $V_n \subset Y$. Выражение вида

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{k=0}^m u_k(x) \psi_k(y) + \sum_{l=0}^n v_l(y) \varphi_l(x),$$

где $\{\varphi_l(x)\}_{l=0}^n$ и $\{\psi_k(y)\}_{k=0}^m$ – наборы произвольных функций, соответственно из пространств X и Y , назовём обобщённым полиномом (квазиполиномом), порождённым подпространствами пространств U_m и V_n . Указанные обобщённые полиномы образуют подпространство Z , которое обозначим

$$G(U_m, V_n) := U_m \otimes Y \oplus V_n \otimes X,$$

где операции “ \otimes ” и “ \oplus ” обозначают соответственно операции декартова произведения и прямой суммы множеств. Обозначим

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_Z := \mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z = \inf \{ \|f - g_{m,n}\|_Z : g_{m,n} \in G(U_m, V_n) \} \quad (5)$$

и если \mathfrak{M} – некоторый класс функций, принадлежащий пространству Z , то положим

$$\mathcal{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z := \sup \{ \mathcal{E}_{m,n}(f)_Z : f \in \mathfrak{M} \} = \sup \{ \mathcal{E}(f, G(U_m, V_n))_Z : f \in \mathfrak{M} \}. \quad (6)$$

Величина (5) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $G(U_m, V_n)$, а величина (6) – отклонение множества \mathfrak{M} от $G(U_m, V_n)$ в нормированном пространстве $(Z, \|\cdot\|_Z)$.

При вычислении величины (6) всюду далее полагаем $X = Y = L_2[0, 2\pi]$ – пространства суммируемых с квадратом 2π -периодических функций f на отрезке $[0, 2\pi]$, а $Z := L_2(Q)$, $Q = \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$.

Пусть теперь $U_{2m+1}^* \subset L_2[0, 2\pi]$, $V_{2n+1}^* \subset L_2[0, 2\pi]$ – два конечномерных подпространства тригонометрических полиномов соответственно порядка $2m+1$ по переменной x и $2n+1$ – по переменной y , то есть

$$U_{2m+1}^* := \text{span} \{ e^{ikx} \}_{k=-m}^m, V_{2n+1}^* := \text{span} \{ e^{ily} \}_{l=-n}^n.$$

Очевидно, что каждый элемент $g_{m,n}(x, y) \in G(U_{2m+1}^*, V_{2n+1}^*)$ представим в виде

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{|k| \leq m} \psi_k(y) e^{ikx} + \sum_{|l| \leq n} \varphi_l(x) e^{ily}, \quad (7)$$

где последовательности $\{\psi_k(y)\}_{k=-m}^m \subset L_2[0, 2\pi]$, $\{\varphi_l(x)\}_{l=-n}^n \subset L_2[0, 2\pi]$ – произвольные наборы функций. Функции вида (7) называют квазиполиномами [5] или тригонометрическими “углами” [6]. Положим

$$Z = L_2(Q) := L_2[0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

Очевидно, что множество $G(U_{2m+1}^*, V_{2n+1}^*) \subset L_2(Q)$. Для произвольной функции $f \in L_2(Q)$ равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m,n}(f)_{L_2(Q)} &:= \mathcal{E}(f; G(U_{2m+1}^*, V_{2n+1}^*)) = \\ &= \inf \left\{ \|f - g_{m,n}\|_{L_2(Q)} : g_{m,n} \in G(U_{2m+1}^*, V_{2n+1}^*) \right\} \end{aligned}$$

определим величину наилучшего приближения функции f элементами (тригонометрическими “углами”) из множества $G(U_{2m+1}^*, V_{2n+1}^*)$.

Для функции $f \in L_2(Q)$ с формальным разложением в двойной ряд Фурье (2) квазиполиномом Фурье порядка (m, n) , $m, n \in \mathbb{N}$ называют выражение

$$\mathcal{F}_{m,n}(f; x, y) = \left(\sum_{|k| \leq m} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{|l| \leq n} - \sum_{|k| \leq m} \sum_{|l| \leq n} \right) c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)}.$$

Имеет место следующая основная

Лемма 1. Среди всех обобщенных полиномов вида (7), принадлежащих множеству $G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)$, наилучшее приближение функции $f \in L_2(Q)$ доставляет ее квазиполином Фурье порядка $(m-1, n-1)$. При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{L_2(Q)} &= \inf \left\{ \|f - g_{m-1,n-1}\|_{L_2(Q)}^2 : g_{m-1,n-1} \in G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*) \right\} = \\ &= \|f - \mathcal{F}_{m-1,n-1}(f)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{|k| \geq m} \sum_{|l| \geq n} |c_{k,l}(f)|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Принимая во внимание обозначение (4), формулу (8) запишем в виде

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{L_2(Q)} = \sum_{|k| \geq m} \sum_{|l| \geq n} |c_{k,l}(f)|^2 = \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \rho_{k,l}^2(f), \quad (9)$$

более удобном в приложении. В частности, из (8) в силу (9) следует, что если $F(x, y) = \varphi(x)g(y)$, то имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(F)_{L_2(Q)} &= \mathcal{E}^2(F; G(U_{2m-1}^*, U_{2n-1}^*))_{L_2(Q)} = \\ &= \mathcal{E}^2(\varphi; U_{2m-1}^*)_{L_2[0,2\pi]} \cdot \mathcal{E}^2(g; V_{2n-1}^*)_{L_2[0,2\pi]} = \mathcal{E}_{2m-1}^2(\varphi)_{L_2[0,2\pi]} \cdot \mathcal{E}_{2n-1}^2(g)_{L_2[0,2\pi]}, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{E}_{2\nu-1}(\psi)_{L_2[0,2\pi]} := \inf \left\{ \|\psi - T_{\nu-1}(\psi)\|_{L_2[0,2\pi]} ; T_{\nu-1} \subset G_{2\nu-1} \right\}.$$

Имеет место также следующая важная

Лемма 2. Для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ имеет место неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} \leq m^{-r} n^{-s} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_{L_2(Q)},$$

которое является точным в том смысле, что для функции

$$f_0(x, y) = \cos mx \cdot \cos ny \in L_2^{(r,s)}(Q)$$

обращается в равенство.

Из этой леммы непосредственно вытекает

Следствие 1. Справедливо экстремальное равенство

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_{L_2(Q)}} = \\ & = \sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f; G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)}; G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)}} = \frac{1}{m^r n^s}. \end{aligned}$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1. Пусть $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($0 \leq \mu \leq r$, $0 \leq \nu \leq s$). Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_{L_2(Q)}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_{L_2(Q)}} = \\ & = \sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)}; G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)}; G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)}} = \frac{1}{m^{r-\mu} n^{s-\nu}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Существует функция $f_0 \in L_2^{(r,s)}(Q)$, которая реализует знак равенства в соотношении (10).

Далее через $W^{(r,s)}L_2(Q)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, для которых при всех $r, s \in \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство

$$\|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} |f^{(r,s)}(x, y)|^2 dx dy \right\}^{1/2} \leq 1.$$

Теорема 2. При любых $m, n \in \mathbb{N}$, для произвольных чисел $r, s \in \mathbb{Z}_+$ имеют место экстремальные равенства

$$\sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)} L_2(Q) \right\} = \frac{1}{m^r n^s},$$

$$\sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1, n-1} \left(f^{(r,0)} \right)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)} L_2(Q) \right\} = \frac{1}{n^s},$$

$$\sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1, n-1} \left(f^{(0,s)} \right)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)} L_2(Q) \right\} = \frac{1}{m^r}.$$

Из теоремы 2 в качестве следствия вытекает более сильное утверждение

Теорема 3. При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq \mu \leq r$, $0 \leq \nu \leq s$ имеет место экстремальное равенство

$$\sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1, n-1} \left(f^{(\mu, \nu)} \right)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)} L_2(Q) \right\} = \frac{1}{m^{r-\mu} n^{s-\nu}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов. – Укр. матем. журнал, 1996, т.48, №3, с.301-308.
2. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных. – Доклады РАН, 2005, т.404, №4, с.406-464.
3. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. О точных значениях квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных. – Укр. матем. журнал, 2009, т.61, №6, с.855-864.
4. Акобиршоев М.О., Сайнаков В.Д. Значение квазипоперечников некоторых классов периодических функций двух переменных в L_2 . – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2018, №2(171), с.7-15.
5. Брудный Ю.А. Приближение функций n переменных квазимногочленами. – Изв. АН СССР, серия Математика, 1970, т.34, №3, с.564-583.
6. Потапов М.К. Изучение некоторых классов функций при помощи приближения «углами». – Труды Матем. ин-та. АН СССР, 1972, т.117, с.256-300.

В.Д.САЙНАКОВ

**ДАР БОРАИ БЕҲТАРИН ФОРМУЛАҶОИ КВАДРАТУРИИ ВАЗНДОР АЗ
РЀИ КОЭФФИЦИЕНТҶО БАРОИ СИНФИ ФУНКСИЯҶОЕ, КИ БА
ВОСИТАИ МОДУЛҶОИ БЕФОСИЛАГӢ ДОДА МЕШАВАНД**

Донишгоҳи технологии Тоҷикистон

Дар мақола баъзе масъалаҳои наздиккунии миёнакватратии функсияҳои даврии дифференсиронидашавандаи ду тағйирёбанда ба воситаи полиномҳои умумикардасудай тригонометрӣ оварда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарини миёнакватратӣ, полиномҳои умумикардасудай тригонометрӣ.

V.D.SAYNAKOV

**MEAN SQUARED APPROXIMATION OF TWO VARIABLES FUNCTIONS
WITH AVERAGED TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS**

Tajik National University

In this paper are described some problems of mean-squared approximation of differentiable functions of two variables by averaged “trigonometric polynomials”.

Key words: best mean squared approximation, generalized trigonometric polynomials.

УДК 517.5

Ф.РАИМЗОДА

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ НАИЛУЧШИЕ
ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ И НОРМЫ РАЗНОСТИ В L_2

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 23.11.2018 г.

В работе найдены точные неравенства между величиной наилучшего среднеквадратичного приближения функций и усредненное значение нормы разностей функций. Для некоторых классов функций, задаваемых указанными разностями, решена задача одновременного приближения функций и ее последовательных производных тригонометрическими полиномами в метрике пространства L_2 .

Ключевые слова: наилучшее приближение, периодическая функция, тригонометрический полином, модуль непрерывности, разность m -го порядка, совместное приближение.

1. Обозначим через $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ пространство суммируемых по Лебегу 2π -периодических и интегрируемых с квадратом функций, у которых норма

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0, 2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Через \mathfrak{T}_{2n-1} обозначим множество тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$:

$$T_{n-1}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

Адрес для корреспонденции: Раимзода Фарахноз. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: farahnoz@mail.ru

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx), \quad (1)$$

величина ее наилучшего приближения элементами подпространства \mathfrak{T}_{2n-1} равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &= \inf \{ \|f - T_{n-1}\|; T_{n-1}(x) \in \mathfrak{T}_{2n-1} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

– частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье (1) функции f , а $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $a_k(f), b_k(f)$ — коэффициенты Фурье.

Модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$ обозначим через

$$\omega_m(f, t) := \sup \{ \Delta_h^m f(x) : |h| \leq t \}, \quad (3)$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + kh) \quad (4)$$

– разность m -го порядка функции f в точке x с шагом h .

При решении экстремальных задач теории аппроксимации функции $f \in L_2$ часто используют различные модификации классического модуля непрерывности (3) (см., например, [1-14] и приведенную в них литературу).

Модуль непрерывности более тонко учитывает гладкостные характеристики функций по сравнению с нормой функции. Решение многих экстремальных задач в цитированных работах приводится либо для классов функций, задаваемых модулем непрерывности (3), либо для классов функций, задаваемых какой-нибудь модификацией модуля непрерывности (3).

Представляет интерес получить аналогичные результаты для классов функций, определяемых разностями (4) порядка m функций $f \in L_2$.

Через $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ ($r \in \mathbb{N}$, $L_2^{(0)} = L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производная $f^{(r)} \in L_2$, то есть

$$\|f^{(r)}\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Для произвольной $f \in L_2^{(r)}$ при любом $s \in [1, r]$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ имеет место точное неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq n^{-(r-s)} E_{n-1}(f^{(r)})_2. \quad (5)$$

Неравенство (5) точно в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Доказательство. Дифференцируя ряд (1) почленно s ($1 \leq s \leq r$) раз, будем иметь

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^s \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{s\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{s\pi}{2}\right) \right). \quad (6)$$

Применяя к равенству (6) тождество Парсеваля и учитывая, что $a_k^2(f) + b_k^2(f) = \rho_k^2(f)$, получим

$$\|f^{(s)}\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f), \quad \|f^{(r)}\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f).$$

Простые вычисления приводят к равенствам

$$E_{n-1}^2(f^{(s)})_2 := \|f^{(s)} - S(f^{(s)})\|_2^2 = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f), \quad (7)$$

$$E_{n-1}^2(f^{(r)})_2 := \|f^{(r)} - S(f^{(r)})\|_2^2 = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f). \quad (8)$$

Пользуясь равенствами (7) и (8), будем иметь

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2 &= \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} k^{-2(r-s)} k^{2r} \rho_k^2(f) \leq \\ &\leq n^{-2(r-s)} \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) = n^{-2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(r)})_2, \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (5). Докажем точность неравенства (5). Очевидно, что функция $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$. Для этой функции

$$f_0^{(s)}(x) = n^s \cos\left(nx + \frac{s\pi}{2}\right), \quad f_0^{(r)}(x) = n^r \cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right),$$

$$E_{n-1}(f_0^{(s)})_2 = n^s, \quad E_{n-1}(f_0^{(r)})_2 = n^r, \quad (9)$$

а потому имеем:

$$E_{n-1}(f_0^{(s)})_2 = n^s = n^{-(r-s)} n^r = n^{-(r-s)} E_{n-1}(f_0^{(r)})_2,$$

откуда и следует точность неравенства (5) и тем самым теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-1}(f^{(r)})_2} = \frac{1}{n^{r-s}} \quad (0 \leq s \leq r). \quad (10)$$

Доказательство. Так как неравенство (5) имеет место для любой функции $f \in L_2^{(r)}$, то из него следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенство (10)

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-1}(f^{(r)})_2} \leq \frac{1}{n^{r-s}}. \quad (11)$$

С другой стороны, для функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$ в силу равенств (9) запишем оценку снизу

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-1}(f^{(r)})_2} \geq \frac{E_{n-1}(f_0^{(s)})_2}{E_{n-1}(f_0^{(r)})_2} = \frac{n^s}{n^r} = \frac{1}{n^{r-s}}, \quad r > s. \quad (12)$$

Утверждение следствия 1 следует из сравнения оценки сверху (11) с оценкой снизу (12). Через $W^{(r)}L_2 := W^{(r)}L_2[0, 2\pi]$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых $\|f^{(r)}\| \leq 1$. Так как для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ все ее промежуточные производные $f^{(s)}$ ($1 \leq s \leq r-1$, $r \geq 2$, $r \in \mathbb{N}$) тоже принадлежат классу L_2 , то для величины $E_{n-1}(f^{(s)})_2$ имеет смысл найти точную верхнюю грань

$$E_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}L_2)_2 := \sup\{E_{n-1}(f^{(s)})_2 : f \in W^{(r)}L_2\}. \quad (13)$$

В этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 2. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ имеет место равенство*

$$E_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}L_2)_2 = n^{-(r-s)}. \quad (14)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что равенство (14) верно, также при $s = 0$. В самом деле, в этом случае оно является следствием равенства

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{E_{n-1}(f^{(r)})_2} = \frac{1}{n^r}, \quad (15)$$

доказанного Н.И.Черных [1]. В самом деле, если предполагать, что функция $f \in W^{(r)}L_2$, то из (15) легко вывести равенство

$$E_{n-1}(W^{(r)}L_2)_2 = n^{-r},$$

которое формально получается из (14) при $s = 0$. Переходим к доказательству (14). Из неравенства (11) в предположении $f \in W^{(r)}L_2$ получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{1}{n^{r-s}} E_{n-1}(f^{(r)})_2 \leq \frac{1}{n^{r-s}} \|f^{(r)}\|_2 \leq \frac{1}{n^{r-s}},$$

откуда

$$E_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}L_2)_2 \leq \frac{1}{n^{r-s}}, \quad (16)$$

и, так как для функции $f_1(x) = \frac{1}{n^r} \cos nx \in W^{(r)}L_2$,

$$f_1^{(s)}(x) = \frac{1}{n^{r-s}} \cos\left(nx + \frac{s\pi}{2}\right), \quad E_{n-1}(f_1^{(s)})_2 = \frac{1}{n^{r-s}},$$

то запишем

$$E_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}L_2)_2 \geq E_{n-1}(f_1^{(s)})_2 = \frac{1}{n^{r-s}}. \quad (17)$$

Требуемое равенство (14) следует из неравенств (16) и (17), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Теорема 3. При любых $n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\frac{1}{2t} \int_0^t \|\Delta_h(f^{(r)})\|_2^2 dh} = \frac{nt}{nt - \sin nt}, \quad 0 < nt \leq \frac{\pi}{2}. \quad (18)$$

В частности, при $t = \pi / (2n)$ из (18) следует, что

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/(2n)} \|\Delta_h(f^{(r)})\|_2^2 dh} = \frac{\pi}{\pi-2}. \quad (19)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_h(f)\|_2^2 &= \|f(x+h) - f(x)\|_2^2 = \\ &= 2 \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) (1 - \cos kx) = 2E_{n-1}^2(f)_2 - 2 \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cos kx. \end{aligned} \quad (20)$$

Интегрируя равенство (20) по h от $h=0$ до $h=t$, получим

$$2tE_{n-1}^2(f)_2 = 2 \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \frac{\sin kt}{k} + \int_0^t \|\Delta_h(f)\|_2^2 dh$$

и, поделив полученное равенство на $2t$, будем иметь

$$E_{n-1}^2(f)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \frac{\sin kt}{kt} + \frac{1}{2t} \int_0^t \|\Delta_h(f)\|_2^2 dh.$$

Так как при $nt \leq \pi/2$ $\max_{u \geq nt} |\sin u / u| = \sin(nt) / (nt)$, то из последнего равенства следует, что

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{\sin nt}{nt} \cdot E_{n-1}^2(f)_2 + \frac{1}{2t} \int_0^t \|\Delta_h(f)\|_2^2 dh.$$

Таким образом

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{nt}{nt - \sin nt} \cdot \frac{1}{2t} \int_0^t \|\Delta_h(f)\|_2^2 dh. \quad (21)$$

Заменяя в (21) f на $f^{(r)}$ и пользуясь неравенством (11), запишем

$$E_{n-1}^2(f^{(s)})_2 \leq \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \frac{nt}{nt - \sin nt} \cdot \frac{1}{2t} \int_0^t \|\Delta_h(f^{(r)})\|_2^2 dh,$$

откуда сразу получаем оценку сверху

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\frac{1}{2t} \int_0^t \|\Delta_h(f^{(r)})\|_2^2 dh} \leq \frac{nt}{nt - \sin nt}, \quad 0 < nt \leq \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

С целью получения соответствующей оценки снизу для рассмотренной нами в теореме 1 функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$, для которой

$$\begin{aligned} \|\Delta_h(f_0^{(r)})\|_2^2 &= 2n^{2r}(1 - \cos nh), \quad 0 < nh \leq \pi/2, \\ \frac{1}{2t} \int_0^t \|\Delta_h(f_0^{(r)})\|_2^2 dh &= n^{2r} \cdot \frac{nt - \sin nt}{nt}, \quad 0 < nt \leq \pi/2, \end{aligned}$$

запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\frac{1}{2t} \int_0^t \|\Delta_h(f^{(r)})\|_2^2 dh} &\geq \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f_0^{(s)})_2}{\frac{1}{2t} \int_0^t \|\Delta_h(f_0^{(r)})\|_2^2 dh} = \\ &= \frac{n^{2(r-s)} \cdot n^{2s}}{n^{2r}(nt - \sin nt)/nt} = \frac{nt}{nt - \sin nt}, \quad 0 < nt \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует равенство (18), из которого непосредственным вычислением при $t = \pi/(2n)$ получаем (19). Теорема 3 доказана.

Неубывающая на $[0, \infty)$ функция Φ называется k -мажорантой [14, с.152], если функция $t^{-k}\Phi(t)$ не возрастает на $[0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. При $k = 1$ функцию Φ называют просто мажорантой.

Через $W_2^{(r)}(\|\Delta_h\|_2, \Phi)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные r -го порядка $f^{(r)}$ при любом $t \in [0, 2\pi]$ удовлетворяют условию

$$\left(\frac{1}{2t} \int_0^t \|\Delta_h(f^{(r)})\|_2^2 dh \right)^{1/2} \leq \Phi(t).$$

При любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$, $0 \leq s \leq r-1$, $r \geq 2$ положим

$$E_{n-1}^{(s)}(W_2^{(r)}(\|\Delta_h\|_2, \Phi))_2 := \sup\{E_{n-1}(f^{(s)})_2 : f \in W_2^{(r)}(\|\Delta_h\|_2, \Phi)\}.$$

В принятых обозначениях имеет место следующая

Теорема 4. *Справедливо равенство*

$$E_{n-1}^{(s)}(W_2^{(r)}(\|\Delta_h\|_2, \Phi))_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^{1/2} \Phi(t), \quad 0 < nt \leq \frac{\pi}{2}. \quad (24)$$

В частности, из (24) при $t = \pi/(2n)$ вытекает равенство

$$E_{n-1}^{(s)}(W_2^{(r)}(\|\Delta_h\|_2, \Phi))_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \left\{ \frac{\pi}{\pi-2} \right\}^{1/2} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right), \quad 0 < nt \leq \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Оценка сверху величины, стоящей в левой части (24), следует из неравенства (22), из которой для произвольной функции $f \in W_2^{(r)}(\|\Delta_h\|_2, \Phi)$ имеем:

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f^{(s)})_2 &\leq \frac{1}{n^{r-s}} \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^{1/2} \left(\frac{1}{2t} \int_0^t \|\Delta_h(f^{(r)})\|_2^2 dh \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{n^{r-s}} \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^{1/2} \Phi(t). \end{aligned} \quad (25)$$

Для получения оценки снизу указанной величины вводим в рассмотрение функцию

$$g_0(x) = \frac{1}{n^r} \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^{1/2} \Phi(t) \cos nx \quad (26)$$

и покажем, что $g_0 \in W_2^{(r)}(\|\Delta_h\|_2, \Phi)$. Дифференцируя r -раз функцию g_0 , будем иметь

$$g_0^{(r)}(x) = \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^{1/2} \Phi(t) \cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right).$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2t} \int_0^t \|\Delta_h(g_0^{(r)})\|_2^2 dh \right)^{1/2} = \\ &= \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \cdot \Phi^2(t) \cdot \frac{1}{2t} \int_0^t 2(1 - \cos nh) dh \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \cdot \Phi^2(t) \cdot \frac{nt - \sin nt}{nt} \right\}^{1/2} = \Phi(t), \end{aligned}$$

и таким образом включение $g_0 \in W_2^{(r)}(\|\Delta_h\|_2, \Phi)$ доказано.

Так как для $s \in [1, r]$, $r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g_0^{(s)}(x) &= \frac{1}{n^{r-s}} \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^{1/2} \Phi(t) \cos\left(nx + \frac{s\pi}{2}\right), \\ E_{n-1}(g_0^{(s)})_2 &= \frac{1}{n^{r-s}} \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^{1/2} \Phi(t), \end{aligned} \quad (27)$$

то, пользуясь равенством (27), запишем оценку снизу

$$E_{n-1}^{(s)}(W_2^{(r)}(\|\Delta_h\|_2, \Phi))_2 \geq E_{n-1}(g_0^{(s)})_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^{1/2} \Phi(t). \quad (28)$$

Требуемое равенство (24) получаем из сопоставления неравенств (25) и (28), чем и завершаем доказательство теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

11. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967, т.2, №5, с.513-522.
12. Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 – Мат. заметки, 1977, т.22, №4, с.535-542.
13. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 – Мат. заметки, 1979, т.25, №2, с.217-223.
14. Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона. — Мат. заметки, 1999, т.65, №6, с.816-820.
15. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p – Тула: ТулГУ, 1995, 192 с.
16. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 – Мат. заметки, 1978, т.24, №6, с.785-792.
17. Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 – Мат. заметки, 1988, т.43, №6, с.757-769.
18. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 – Мат. заметки, 2005, т.78, №5, с.792-796.
19. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 – Мат. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.
20. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$ – Мат. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.
21. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Неравенства между наилучшими приближениями и усреднениями модулей непрерывности в пространстве L_2 – ДАН России, 2010, т.435, №2, с.178-181.
22. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников. – Мат. заметки, 2011, т.90, №5, с.764-775.
23. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 – Сибир. матем. журнал, 2011, т.52, №6, с.1414-1427.
24. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 – Analysis Mathem, 2012, т.38, с.147-159.

Ф.РАИМЗОДА

**НОБАРОБАРИ АНИҚ, КИ НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИН ВА НОРМАИ
ФАРҚИЯТҲОРО ДАР ФАЗОИ L_2 ДАР БАР ДОРАНД**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола нобаробари аниқ байни бузургии наздиккунии миёнакватратии функсия ва қимати миёнаи нормаи фарқиятҳои функсияҳо ёфта шудаанд. Барои баъзе синфҳои функсияҳо, ки ба воситаи чунин фарқиятҳо дода шудаанд, масъалаи яқбора наздиккунии функсия ва ҳосилаҳои пайдарпаи он ба воситаи бисёрраъзогиҳои тригонометрӣ дар метрикаи фазои L_2 карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин, функсияи даврӣ, бисёрраъзогии тригонометрӣ, модули бефосилагӣ, фарқи тартиби m -ум, наздиккунии муштарак.

F.RAIMZODA

**EXACT INEQUALITIES CONTAINING BEST APPROXIMATIONS AND
NORM OF DIFFERENCES IN L_2**

Tajik National University

The exact inequalities between the value of the best mean-square approximation of functions and the average value of the norm of differences of functions are found. For some classes of functions defined by the indicated differences, the problem of simultaneous approximation of functions and its successive derivatives by trigonometric polynomials in the metric of the space L_2 is solved.

Key words: best approximation, periodic of functions, trigonometric polynomial, modulus of continuity, difference of the m th order, joint approximation.

УДК 517.518.68

Э.Х.САФАРЗОДА

ОБ УСЛОВИЯХ ЗАВИСИМОСТИ СТЕПЕНИ СУММИРУЕМОСТИ
ФУНКЦИЙ СТЕПАНОВА И КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни

Поступила в редакцию 21.05.2018 г.

В работе получены результаты, которые устанавливают зависимости между степенью суммируемости почти периодических функций Степанова и коэффициентов Фурье. В качестве характеристики структурных свойств функции использован модуль непрерывности рассматриваемой функции высшего порядка.

Ключевые слова: почти периодическая функция Степанова, ряд Фурье, коэффициенты Фурье, ортонормированная система, тригонометрические суммы, степень суммируемости.

Пусть, как обычно, L_p ($1 < p < \infty$) означает пространство измеримых периодических периода 2π функций $f(x)$, для которых

$$f(x)_{L_p} = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(inx) \tag{1}$$

являются рядом Фурье функции $f(x) \in L_p$, где $\{C_n\}$ – коэффициенты Фурье по ортонормированной системе функций $\{\varphi_n(x)\}$. Если c_1, c_2, \dots – любая последовательность чисел (действительных или комплексных), то будем обозначать через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$

Адрес для корреспонденции: Сафарзода Эшмат Хатам. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, просп. Рудаки, 121, ТГПУ. E-mail: ashmat@mail.ru

числа $|c_1|, |c_2|, \dots, |c_n|, \dots$, расположенные в порядке убывания. Если на отрезке $[a, b]$ для ортонормированной системы функций $\{\varphi_n(x)\}$ выполняется условие $|\varphi_n(x)| \leq M, n=1, 2, \dots, a \leq x \leq b$, то Р.Пэли доказал, что (см. [1], с.217) имеет место асимптотическая оценка

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^p n^{p-2} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq A_p \left\{ \int_a^b |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где константа A_p зависит только от p и M . Кроме того, если же $p \geq 2$ и $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ – последовательность чисел, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^p n^{p-2} < \infty,$$

то существует функция $f(x) \in L_p(a, b)$, для которой числа $c_n (n=1, 2, \dots)$ являются коэффициентами Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$ и справедливо неравенство

$$\left\{ \int_a^b |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^p n^{p-2} \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где константа B_p зависит от p и M .

В работе [2] установлено следующее утверждение, которое обобщает теорему Пэли в случае, когда рассматриваемая функция принадлежит классу почти периодических функций Безиковича, то есть $f(x) \in B_p (p \geq 2)$.

Теорема [2]. Пусть задан тригонометрический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(i\lambda_k x), \tag{2}$$

где $A_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{-i\lambda_k x} dx$ – коэффициенты Фурье, а $\Lambda \{\lambda_k\}$ – показатели Фурье.

Если при $p \geq 2$ ряд

$$\sigma_p = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^p n^{p-2}$$

сходится, то в пространстве B_p найдется функция $f(x)$, для которой ряд (2) будет ее рядом Фурье и выполняется соотношение

$$D_{B_p} \{f(x)\} \leq C_p \sigma_p^{1/p},$$

где $D_{B_p} \{f(x)\} = \left\{ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$, а C – константа, зависящая от p .

В настоящей работе нами устанавливается результат, который является аналогом результата работы [2] для почти периодических в смысле Степанова функций.

С определениями и основными свойствами функций Степанова можно ознакомиться в работе [3].

Определение. Под S_p – пространством, или пространством почти периодических функций Степанова, понимается совокупность функций, с нормой

$$D_{S_p} \{f(x)\} = \sup_x \left(\frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (p \geq 2),$$

и существует последовательность тригонометрических сумм $\{P_n(x)\}$ вида

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n C_k \exp(i\lambda_k x), \quad (3)$$

для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_{S_p} \{f(x) - P_n(x)\} \rightarrow 0.$$

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение

Теорема. Пусть функция $f(x) \in S_p$ ($p \geq 2$) и ее ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(i\lambda_n x), \quad (4)$$

где $A_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{-i\lambda_n x} dx$ – коэффициенты Фурье, $\Lambda \{\lambda_n\}$ – показатели Фурье,

которые для всех n удовлетворяют условию

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \alpha \quad (\alpha > 0). \quad (5)$$

Если ряд

$$\sigma_p = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^p n^{p-2} \quad (6)$$

сходится, то найдется функция $f(x) \in S_p$, для которой величины $\{A_n\}$ будут ее коэффициентами Фурье и имеет место

$$D_{S_p} \{f(x)\} \leq C_p \sigma_p^{1/p}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы сначала докажем, что для любого полинома вида (3) при выполнении условия (5) имеет место

$$D_{S_p} \{P_n(x)\} \leq Kn^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (p > 2), \quad (7)$$

где K – независимая константа.

Пусть $|x-u| \leq \frac{1}{2}$, тогда $1-|x-u| \geq \frac{1}{2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} |P_n(x)|^p dx &\leq \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} (1-|x-u|) |P_n(x)|^p dx \leq \\ &\leq \max_x |P_n(x)|^{p-2} \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} (1-|x-u|) |P_n(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью неравенства

$$\max_x |P_n(x)| \leq n^{\frac{1}{2}} \left(M \left\{ |P_n(x)|^2 \right\} \right)^{1/2},$$

где

$$M \{f(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt$$

закключаем, что

$$D_{S_p} \{P_n(x)\} \leq n^{\frac{p-2}{2}} \left(M \left\{ |P_n(x)|^2 \right\} \right)^{\frac{p-2}{2}} \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} (1-|x-u|) |P_n(x)|^2 dx.$$

В работе [3, с. 214] для функции $f(x) \in S_p$ доказано, что

$$\int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} (1-|x-u|)|P_n(x)|^2 dx \leq K \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = KM \left\{ |P_n(x)|^2 \right\}.$$

Поэтому, используя это неравенство, получим

$$D_{S_p} \{P_n(x)\} \leq Kn^{\frac{p-2}{2}} \left(M \left\{ |P_n(x)|^2 \right\} \right)^{\frac{p-2}{2}} \cdot M \left\{ |P_n(x)|^2 \right\} = Kn^{\frac{p-2}{2}} \left(M \left\{ |P_n(x)|^2 \right\} \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Отсюда вытекает неравенство (7).

Поступая так же, как в работе [2], покажем, что если $f(x) \in S_p$, то

$$D_{S_p} \{f(x)\} \leq C_p \sigma_p^{1/p}.$$

Для любого натурального N рассмотрим частную сумму ряда (4)

$$S_{2^{N+1}}(x) = \sum_{k=1}^{2^{N+1}} A_k \exp(i\lambda_k x) = \sum_{n=1}^N \Delta_n,$$

где

$$\Delta_n = \Delta_n(x) = \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} A_\nu \exp(i\lambda_\nu x).$$

Поскольку $f(x) \in S_p$ ($p \geq 2$), то, интегрируя по переменному x , получим

$$\int_x^{x+1} S_{2^{N+1}}(x) dx = \int_x^{x+1} \sum_{n=1}^N \Delta_n dx.$$

Пусть $r = [p] + 1$, $R = \frac{r(r-1)}{2}$ и $\delta_\nu = |\Delta_\nu|^{\frac{p}{r}}$. Тогда для последнего равенства

имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} |S_{2^{N+1}}(x)|^p dx &= \int_x^{x+1} \left| \sum_{\nu=1}^N \Delta_\nu \right|^p dx \leq \int_x^{x+1} \left\{ \sum_{\nu=1}^N |\Delta_\nu|^{\frac{p}{r}} \right\}^r dx = \int_x^{x+1} \left\{ \sum_{\nu=1}^N \delta_\nu \right\}^r dx = \\ &= \sum_{\nu_1=1}^N \cdots \sum_{\nu_r=1}^N \int_x^{x+1} \delta_{\nu_1} \cdots \delta_{\nu_r} dx = \sum_{\nu_1=1}^N \cdots \sum_{\nu_r=1}^N \int_x^{x+1} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \delta_{\nu_i}^{\frac{1}{r-1}} \delta_{\nu_j}^{\frac{1}{r-1}} dx. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\int_x^{x+1} |S_{2^{N+1}}(x)|^p dx \leq \sum_{v_1=1}^N \cdots \sum_{v_r=11 \leq i < j \leq r}^N \prod \left\{ \int_x^{x+1} \delta_{v_i}^2 \delta_{v_j}^2 dx \right\}^{\frac{1}{R}} =$$

$$= \sum_{v_1=1}^N \cdots \sum_{v_r=11 \leq i < j \leq r}^N \prod \left\{ \int_x^{x+1} |\Delta_{v_i} \Delta_{v_j}|^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{R}} \left(R = \frac{r(r-1)}{2} \right). \quad (8)$$

Если еще раз использовать интегральное неравенство Гёльдера

$$\int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right),$$

то при $x(t) = \Delta_\mu^{\frac{p}{2}}$, $y(t) = \Delta_v^{\frac{p}{2}}$ и $\alpha = \frac{p+2}{2}$, $\alpha' = \frac{p+2}{p}$ интеграл в правой части (8)

будет удовлетворять неравенству

$$\int_x^{x+1} |\Delta_\mu \Delta_v|^{\frac{p}{2}} dx \leq \left\{ \int_x^{x+1} |\Delta_\mu|^{\frac{p\alpha}{2}} dx \right\}^{\frac{2}{p\alpha} \cdot \frac{p}{2}} \left\{ \int_x^{x+1} |\Delta_v|^{\frac{p+2}{2}} dx \right\}^{\frac{2}{p+2} \cdot \frac{p}{2}}.$$

Следовательно, при $l=1$ это неравенство принимает вид

$$\sup_x \left\{ \int_x^{x+1} |\Delta_\mu \Delta_v|^{\frac{p}{2}} dx \right\} \leq \sup_x \left\{ \int_x^{x+1} |\Delta_\mu|^{\frac{p\alpha}{2}} dx \right\}^{\frac{2}{p\alpha} \cdot \frac{p}{2}} \sup_x \left\{ \int_x^{x+1} |\Delta_v|^{\frac{p+2}{2}} dx \right\}^{\frac{2}{p+2} \cdot \frac{p}{2}},$$

или

$$M \left\{ |\Delta_\mu \Delta_v|^{\frac{p}{2}} \right\} \leq \left(M \left\{ |\Delta_\mu|^{\frac{p\alpha}{2}} \right\} \right)^{\frac{2}{p\alpha} \cdot \frac{p}{2}} \left(M \left\{ |\Delta_v|^{\frac{p+2}{2}} \right\} \right)^{\frac{2}{p+2} \cdot \frac{p}{2}}. \quad (9)$$

Применяя к правой части (9) неравенство (7), получим, что

$$M \left\{ |\Delta_\mu \Delta_v|^{\frac{p}{2}} \right\} \leq 2^{(\mu+1)(1/2-1/\alpha)} \gamma_\mu^{1/2} 2^{(v+1)(1/2-1/\alpha')} \gamma_v^{1/2} =$$

$$= 2^{(\mu+1)(1/2-1/\alpha)} \left(2^{(\mu+1)(p/2-1)} \left(M \left\{ |\Delta_\mu|^2 \right\} \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot 2^{(v+1)(1/2-1/\alpha')} \left(2^{(v+1)(p/2-1)} \left(M \left\{ |\Delta_v|^2 \right\} \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{(\mu+1)(p/4-1/\alpha)} \left(M \left\{ |\Delta_\mu|^2 \right\} \right)^{\frac{p}{4}} 2^{(v+1)(p/4-1/\alpha')} \left(M \left\{ |\Delta_v|^2 \right\} \right)^{\frac{p}{4}}, \quad (10)$$

где

$$\gamma_v = 2^{(v+1)(p/2-1)} \left(M \left\{ |\Delta_v|^2 \right\} \right)^{\frac{p}{2}} = 2^{(v+1)(p/2-1)} \left(A \sum_{k=2^v}^{2^{v+1}-1} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$, то $\frac{1}{\alpha'} = 1 - \frac{1}{\alpha}$. Тогда из неравенства (10) вытекает, что

$$\begin{aligned} M \left\{ \left| \Delta_\mu \Delta_v \right|^{\frac{p}{2}} \right\} &\leq 2^{(\mu+1)(1/2-1/\alpha)} \gamma_\mu^{1/2} 2^{(v+1)(1/2-1/\alpha')} \gamma_v^{1/2} = \\ &= 2^{-|\mu-v|(1/2-1/\alpha)} \gamma_\mu^{1/2} \gamma_v^{1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу неравенств (8), (9) и (11) имеем

$$M \left\{ |S_{2^{N+1}}(x)|^p \right\} \leq \sum_{v_1=1}^N \cdots \sum_{v_r=11 \leq i < j \leq r} \prod \left\{ \gamma_{v_i}^{1/2} \gamma_{v_j}^{1/2} 2^{-|v_i-v_j|(1/2-1/\alpha)} \right\}^{\frac{1}{R}}.$$

Далее, поступая так же, как и в работе [2], находим, что

$$M \left\{ |S_{2^{N+1}}(x)|^p \right\} \leq C_p \sum_{n=1}^N \gamma_n = C_p \sum_{n=1}^N 2^{n(p/2-1)} \left(K \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |c_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}}. \quad (12)$$

Теперь покажем, что из сходимости ряда (6) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^N 2^{n(p/2-1)} \left(K \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |c_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

Сходимость последнего эквивалента сходимости суммы

$$\sum_{n=1}^N n^{\frac{p}{2}-2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |A_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

Действительно, используя неравенство (см. [4, с. 308])

$$\sum_{n=1}^N n^{-c} \left(\sum_{k=n}^{\infty} d_k \right)^\delta \leq K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} (nd_n)^\delta,$$

при $c = \left(2 - \frac{p}{2}\right) < 1$, $\delta = \frac{p}{2} > 1$, $d_n = |A_n|^2$, будем иметь

$$\sum_{n=1}^N n^{-(2-p/2)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |A_k|^2 \right)^{p/2} \leq K \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^p n^{p-2} .$$

Следовательно, в силу условия (6) заключаем, что

$$M \left\{ |S_{2^{n+1}}(x)|^p \right\} \leq C_p \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^p n^{p-2} < \infty.$$

Из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(p/2-1)} \left(K \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |c_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

следует, что для любых $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ ($m > n$)

$$\sum_{k=n}^m 2^{k(p/2-1)} \left(\sum_{v=2^k}^{2^{k+1}-1} |A_v|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \rightarrow 0.$$

Так как неравенство (12) верно для любого полинома и, в частности, для $S_{2^{m+1}}(x) - S_{2^{n+1}}(x)$, то при $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$

$$D_{S_p} \left\{ S_{2^{m+1}}(x) - S_{2^{n+1}}(x) \right\} \rightarrow 0.$$

В силу полноты пространства Степанова [3], найдется функция $f(x) \in S_p$, для которой при $n \rightarrow \infty$

$$D_{S_p} \left\{ f(x) - S_{2^{n+1}}(x) \right\} \rightarrow 0,$$

поэтому для этой функции справедливо неравенство

$$D_{S_p} \left\{ f(x) \right\} \leq C_p \sigma_p^{1/p}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: ГНФМЛ, 1961, 936 с.
2. Хасанов Ю.Х. О связи между степенью суммируемости почти периодических функций и коэффициентов Фурье. – Владикавказский мат. журнал, 2014, т.16, вып. 3, с. 47–54.
3. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1947, 396 с.
4. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Поля Г. Неравенства. – М.: ГИИЛ, 1948, 456 с.

Э.Ҳ.САФАРЗОДА

**ОИД БА ШАРТҲОИ ВОБАСТАГИИ ДАРАЧАИ СУММИРОНИИ
ФУНКСИЯҲОИ СТЕПАНОВ ВА КОЭФФИТСИЕНТҲОИ ФУРЬЕ**

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Дар мақола натиҷаҳо оварда шудаанд, ки вобастагии байни дараҷаи суммиронии функсияи қариб даврии Степанов ва коэффитсиентҳои Фурьеро муайян мекунад. Ба сифати характеристикаи муайянкунандаи суфтагии функсия модули бефосилагии тартиби олии истифода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: функсияҳои қариб даврии Степанов, қатори Фурье, системаи ортонормиридашуда, коэффитсиентҳои Фурье, суммаҳои тригонометрӣ, суммиронии дараҷагӣ.

E.Kh.SAFARZODA

**CONDITIONS FOR THE DEPENDENCE OF THE DEGREE
OF SUMMABILITY OF STEPANOV FUNCTIONS AND
FOURIER COEFFICIENTS**

S.Aini Tajik State Pedagogical University

In this work, results are obtained that establish the dependences between the degree of summability of the almost periodic Stepanov functions and Fourier coefficients. As a characteristic of the structural properties of the function, the modulus of continuity of the considered function of higher order is used.

Key words: almost periodic functions of Stepanov, Fourier series, Fourier coefficients, orthonormal system, trigonometric sums, degree of summability.

УДК 517.55

Р.МУСТАФОКУЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 19.06.2018 г.

В работе рассматривается одно линейное неоднородное дифференциальное уравнение типа Эйлера n -го порядка. Указывается формула замены переменной, приводящая данное уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами. Приводятся формулы интегрального представления решения в зависимости от корней соответствующего характеристического уравнения.

Ключевые слова: линейное уравнение типа Эйлера, модельное уравнение, характеристики уравнения, функция Коши, определитель типа Вандермонды.

Рассмотрим на отрезке (a, b) линейное дифференциальное уравнение вида

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + A_1(x)[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x)\omega(x)y' + A_n(x)y = F(x), \quad (1)$$

где коэффициенты $A_k(x)$ ($k = \overline{1, n}$) и правая часть $F(x)$ являются непрерывными в (a, b) функциями, $\omega(x)$ предполагается n -раз непрерывно дифференцируемой и $\omega(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$.

Уравнение (1) при $\omega(x) = x - a$ является линейным уравнением Эйлера [1], поэтому мы называем *уравнением типа Эйлера* и попытаемся решить его так же, как и уравнения Эйлера, путём сведения его к уравнению с постоянными коэффициентами.

Уравнения типа Эйлера и соответствующие им интегральные уравнения вольтерровского типа при $\omega(x) = (x - a)^\alpha$ ($\alpha > 0$) были рассмотрены также в работах академика Н.Раджабова и его учеников (см., напр., [2,3] и их библиогр.), где при некоторых условиях на коэффициенты уравнения и на параметр α было получено интегральное представление для решения.

Адрес для корреспонденции: Мустафокулов Рахмонкул. 734019, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, ТНУ. E-mail: rmustaf@list.ru

В работе [4] была найдена формула замены переменной

$$t = \mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)}, \quad (2)$$

приводящая (1) к уравнению с постоянными коэффициентами, при этом был указан класс уравнений, к которым применима формула (2), и этот класс определялся условиями на коэффициенты уравнения:

$$\begin{cases} A_k(x) = a_k - \sum_{i=0}^{k-1} A_i(x) [\omega(x)]^{n-i} P_{n-i}^{n-k}(x) & (k = \overline{1, n-1}), \\ A_0(x) \equiv 1, \quad A_k(x) \equiv a_n, \end{cases} \quad (3)$$

где a_k ($k = \overline{1, n}$) – постоянные числа, а функции $P_k^i(x) = P_k^i[\mu'(x), \dots, \mu^{(k)}(x)]$ для каждого $k = \overline{1, n}$ и $i = \overline{1, k-1}$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} P_k^i(x) &= \mu'(x) P_{k-1}^{i-1} + (P_{k-1}^i(x))' \quad (i = \overline{2, k-1}), \\ P_k^1(x) &= \mu^{(k)}(x), \quad P_k^k(x) = [\mu'(x)]^k. \end{aligned}$$

Уравнение (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (3), называется *модельным уравнением*.

В настоящей работе для неоднородного модельного уравнения (1) определены явные выражения для решений в зависимости от корней характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (4)$$

Модельное уравнение (1) заменой переменной (2) приводится к уравнению

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = f(t), \quad (5)$$

где $z(t) = z[\mu(x)] = y(x)$, $f(t) = f[\mu(x)] = F(x)$, $t_0 = \mu(a) < t < \mu(b) = T$, а коэффициенты a_k определены из условий (3). Поэтому для нахождения решения $y(x)$ модельного уравнения (1) нам достаточно найти решение $z(t)$ уравнения (5) и в нём положить $t = \mu(x)$.

Общее решение $z(t)$ уравнения (5) определяется как сумма общего решения $z_0(t)$ однородного уравнения

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 0 \quad (6)$$

и какого-то частного решения $\bar{z}(t)$ неоднородного уравнения (5).

Ниже мы для нахождения $\bar{z}(t)$ используем метод Коши (см. [5]), то есть в качестве $\bar{z}(t)$ возьмем решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{z}(t_0) = \bar{z}'(t_0) = \dots = \bar{z}^{(n-1)}(t_0) = 0. \quad (7)$$

Определение. Решение $\mathbb{Z}(t)$ уравнения (6), удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathbb{Z}(s) = \mathbb{Z}'(s) = \dots = \mathbb{Z}^{(n-2)}(s) = 0, \quad \mathbb{Z}^{(n-1)}(s) = 1, \quad (8)$$

где $t = s$ любая заданная точка из интервала (t_0, T) , называется *функцией Коши* этого уравнения.

Функция Коши зависит от независимой переменной t и от параметра s . Обозначим её через $\mathbb{Z}(t) = \mathbb{Z}(t, s)$, где функция $\mathbb{Z}(t, s)$ определена и непрерывна в области $t_0 < t, s < T$. Функция $\mathbb{Z}(t - s) = \mathbb{Z}(t - s, 0)$ также является решением однородного уравнения (6) и при $t = s$ удовлетворяет условиям

$$\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}'(0) = \dots = \mathbb{Z}^{(n-2)}(0) = 0, \quad \mathbb{Z}^{(n-1)}(0) = 1. \quad (9)$$

Лемма. *Решение $\bar{z}(t)$ неоднородного уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям (7), определяется формулой*

$$\bar{z}(t) = \int_{t_0}^t \mathbb{Z}(t-s) f(s) ds. \quad (10)$$

Доказательство. Дифференцируя (10) и принимая во внимание условия (9), получаем

$$\bar{z}'(t) = \int_{t_0}^t \mathbb{Z}'(t-s) f(s) ds + \mathbb{Z}(0) f(t) = \int_{t_0}^t \mathbb{Z}'(t-s) f(s) ds,$$

$$\bar{z}''(t) = \int_{t_0}^t \mathbb{Z}''(t-s) f(s) ds, \dots, \bar{z}^{(n-1)}(t) = \int_{t_0}^t \mathbb{Z}^{(n-1)}(t-s) f(s) ds,$$

$$\bar{z}^{(n)}(t) = \int_{t_0}^t \mathbb{Z}^{(n)}(t-s) f(s) ds + \mathbb{Z}^{(n-1)}(0) f(t) = \int_{t_0}^t \mathbb{Z}^{(n)}(t-s) f(s) ds + f(t).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (5), получаем

$$\begin{aligned} \bar{z}^{(n)} + a_1 \bar{z}^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \bar{z}' + a_n \bar{z} &= \int_{t_0}^t \left[\mathbb{Z}^{(n)}(t-s) + a_1 \mathbb{Z}^{(n-1)}(t-s) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + a_{n-1} \mathbb{Z}'(t-s) + a_n \mathbb{Z}(t-s) \right] f(s) ds + f(t) \equiv f(t), \end{aligned}$$

так как $\mathbb{Z}(t - s)$ является решением однородного уравнения (6) и, следовательно, выражение в скобках равно нулю.

Легко также увидеть, что $\bar{z}(t)$, определенная равенством (10), удовлетворяет начальным условиям (7) при $t = t_0$. Лемма доказана.

Пусть $\{z_i(t)\}_1^n$ – некоторая фундаментальная система решений уравнения (6). Функция Коши $\mathbb{Z}(t)$ этого уравнения может быть выделена из общего решения

$$\mathbb{Z}(t) = \sum_{i=1}^n c_i z_i(t), \quad (11)$$

если выбрать произвольные постоянные c_i так, чтобы удовлетворялись условия (8). Имеем

$$\mathbb{Z}^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^n c_i z_i^{(k)}(t) \quad (k = \overline{1, n-1}).$$

В силу условий (8), получаем

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i z_i^{(k)}(s) = 0 & (k = \overline{0, 1, \dots, n-2}), \\ \sum_{i=1}^n c_i z_i^{(n-1)}(s) = 1, \end{cases}$$

где s – некоторая заданная точка из интервала (t_0, T) .

Решая эту систему методом Крамера, находим

$$c_i = c_i(s) = (-1)^{n+i} \frac{W_{ni}(s)}{W(s)} \quad (i = \overline{1, n}),$$

где $W(s)$ – определитель Вронского:

$$W(s) = \begin{vmatrix} z_1(s) & z_2(s) & \dots & z_n(s) \\ z_1'(s) & z_2'(s) & \dots & z_n'(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)}(s) & z_2^{(n-1)}(s) & \dots & z_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix},$$

а $W_{ni}(s)$ ($i = \overline{1, n}$) – дополнительные миноры элементов n -й строки определителя $W(s)$.

Подставляя значения c_i в равенство (11), получаем

$$\mathbb{Z}(t) = \mathbb{Z}(t, s) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \frac{W_{ni}(s)}{W(s)} z_i(t).$$

Отсюда

$$\mathbb{Z}(t-s) = \mathbb{Z}(t-s, 0) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} z_i(t-s).$$

Из леммы 1 следует теперь, что функция

$$\bar{z}(t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} \int_{t_0}^t z_i(t-s) f(s) ds$$

является частным решением неоднородного уравнения (5), а его общее решение имеет вид

$$z(t) = z_0(t) + \bar{z}(t) = \sum_{i=1}^n c_i z_i(t) + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} \int_{t_0}^t z_i(t-s) f(s) ds, \quad (12)$$

где c_i ($i = \overline{1, n}$) – произвольные постоянные.

Чтобы получить теперь общее решение $y(x)$ модельного уравнения (1), нужно в (12) произвести замену переменной $t = \mu(x)$. Тогда $s = \mu(\tau)$, $a < \tau < x$ и $ds = \mu'(\tau)d\tau$, следовательно,

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i z_i[\mu(x)] + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} \int_a^x z_i[\mu(x) - \mu(\tau)] \mu'(\tau) F(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Таким образом, если функция $\omega(x)$, коэффициенты и правая часть модельного уравнения (1) такие, что интегралы в правой части равенства (13) существуют, то решение этого уравнения может быть представлено в виде (13).

Всюду в дальнейшем предполагается существование этих интегралов.

Формула (13) приобретет конкретный вид, если известны корни характеристического уравнения (4).

1⁰. Рассмотрим сначала случай, когда все корни характеристического уравнения (4) являются простыми.

Теорема 1. Пусть характеристическое уравнение (4) имеет p вещественных λ_k ($k = \overline{1, p}$) и q комплексно-сопряженных $\theta_l = \alpha_l + i\beta_l$, $\bar{\theta}_l = \alpha_l - i\beta_l$, ($l = \overline{1, q}$) корней, причём $p + 2q = n$. Тогда общее решение модельного уравнения (1) определяется равенством

$$\begin{aligned} y(x) = & \sum_{k=1}^p c_k e^{\lambda_k \mu(x)} + \sum_{l=1}^q e^{\alpha_l \mu(x)} \left[c_l^1 \cos(\beta_l \mu(x)) + c_l^2 \sin(\beta_l \mu(x)) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{n+1}}{A_k} \int_a^x e^{\lambda_k [\mu(x) - \mu(\tau)]} \mu'(\tau) F(\tau) d\tau + \\ & + \sum_{l=1}^q \frac{(-1)^n}{\beta_l |B_l|^2} \int_a^x e^{\alpha_l [\mu(x) - \mu(\tau)]} \left\{ \operatorname{Re} B_l \sin(\beta_l [\mu(x) - \mu(\tau)]) - \right. \\ & \left. - \operatorname{Im} B_l \cos(\beta_l [\mu(x) - \mu(\tau)]) \right\} \mu'(\tau) F(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (14)$$

где обозначены

$$A_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p (\lambda_j - \lambda_k) \prod_{r=1}^q |\theta_r - \lambda_k|^2 \quad (1 \leq k \leq p),$$

$$B_k = \prod_{j=1}^p (\lambda_j - \theta_l) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^q [(\theta_r - \theta_l)(\bar{\theta}_r - \theta_l)] \quad (1 \leq l \leq p),$$

а c_k ($k = \overline{1, p}$); c_l^1, c_l^2 ($l = \overline{1, q}$) – произвольные постоянные.

Доказательство. В условиях теоремы 1 функции

$$\varphi_k(t) = e^{\lambda_k t} \quad (k = \overline{1, p}),$$

$$\psi_{1l}(t) = e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, \psi_{2l}(t) = e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t \quad (l = \overline{1, q}) \quad (15)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (6). Для каждого $m = 1, 2, \dots, n-1$ имеем

$$\varphi_k^{(m)}(t) = \lambda_k^m e^{\lambda_k t},$$

$$\psi_{1l}^{(m)}(t) = e^{\alpha_l t} (a_l^{m-1} \cos \beta_l t - b_l^{m-1} \sin \beta_l t),$$

$$\psi_{2l}^{(m)}(t) = e^{\alpha_l t} (a_l^{m-1} \sin \beta_l t + b_l^{m-1} \cos \beta_l t),$$

где $a_l^{m-1} = \operatorname{Re} \theta_l^m$, $b_l^{m-1} = \operatorname{Im} \theta_l^m$ ($a_l^0 = \alpha_l, b_l^0 = \beta_l$). Отсюда $\varphi_k^{(m)}(0) = \lambda_k^m$, $\psi_{1l}^{(m)}(0) = a_l^{m-1}$, $\psi_{2l}^{(m)}(0) = b_l^{m-1}$ и определитель $W(0)$ имеет вид

$$W = W(0) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_p & \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \alpha_q & \beta_q \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_p^2 & a_1 & b_1 & \dots & a_q & b_q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_p^{n-1} & a_1^{n-2} & b_1^{n-2} & \dots & a_q^{n-2} & b_q^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Рассматривая W как определитель типа Вандермонды, нетрудно показать, что

$$W = (-1)^{k+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p (\lambda_j - \lambda_k) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^q [(\theta_r - \lambda_k)(\bar{\theta}_r - \lambda_k)] W_{nk}, \quad k = 1, 2, \dots, p;$$

$$W = (-1)^p \beta_l \prod_{j=1}^p (\lambda_j - \theta_l) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^q [(\theta_r - \theta_l)(\bar{\theta}_r - \theta_l)] (W_{n,p+2l} + iW_{n,p+2l-1}),$$

$$W = (-1)^p \beta_l \prod_{j=1}^p (\lambda_j - \bar{\theta}_l) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^q [(\theta_r - \bar{\theta}_l)(\bar{\theta}_r - \bar{\theta}_l)] (W_{n,p+2l} + iW_{n,p+2l-1}),$$

$l = 1, 2, \dots, q$. Из этих равенств определяем $\frac{W_{nk}}{W}$ при $k = \overline{1, p}$; $\frac{W_{n,p+2l}}{W}$ и $\frac{W_{n,p+2l-1}}{W}$ при $l = \overline{1, q}$ и подставляя их, а также функции (15) в формулу (13), получаем для общего решения $y(x)$ модельного уравнения (1) представления (14).

Замечание. Если в условиях теоремы 1, в частности, все корни характеристического уравнения (4) являются вещественными и различными, то в формуле (14), подставляя $q = 0$ и $p = n$, получаем

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k \mu(x)} + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{n+1}}{A_k} \int_a^x e^{\lambda_k [\mu(x) - \mu(\tau)]} \mu'(\tau) F(\tau) d\tau, \quad (16)$$

где $A_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\lambda_j - \lambda_k)$.

Отметим, что утверждение теоремы 1 было анонсировано ранее в [6].

2^o. Рассмотрим теперь случай, когда среди корней характеристического уравнения (4) имеются кратные.

Теорема 2. Пусть характеристическое уравнение (4) имеет p вещественных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ и один k - кратный ($k > 1$) вещественные корни ($p + k = n$). Тогда общее решение модельного уравнения (1) определяется равенством

$$y(x) = \sum_{i=1}^p c_i e^{\lambda_i \mu(x)} + e^{\lambda_0 \mu(x)} \sum_{j=1}^k c_{p+j} [\mu(x)]^{j-1} + (-1)^p \int_a^x \sum_{i=1}^p \frac{1}{A_i} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_0)^k} \left[e^{\lambda_i [\mu(x) - \mu(\tau)]} - \left(\sum_{j=1}^k \frac{(\lambda_i - \lambda_0)^{j-1}}{(j-1)!} [\mu(x) - \mu(\tau)]^{j-1} \right) e^{\lambda_0 [\mu(x) - \mu(\tau)]} \right] \mu'(\tau) F(\tau) d\tau, \quad (17)$$

где c_m ($m = \overline{1, n}$) произвольные постоянные, $A_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_j - \lambda_i)$.

Доказательство. В условиях этой теоремы функции

$$\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t} \quad (i = \overline{1, p}), \quad \psi_j(t) = t^{j-1} e^{\lambda_0 t} \quad (j = \overline{1, k}) \quad (18)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (6). Находим

$$\varphi_i^{(m)}(t) = \lambda_i^m e^{\lambda_i t}, \quad \psi_j^{(m)}(t) = e^{\lambda_0 t} \sum_{r=0}^{j-1} c_m^r \lambda_0^{m-r} (t^{j-1})^{(r)} \quad (m = \overline{1, n-1}).$$

Отсюда $\varphi_i^{(m)}(0) = \lambda_i^m$ и

$$\psi_j^{(m)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } m = \overline{0, j-2}, \\ (j-1)! c_m^{j-1} \lambda_0^{m-(j-1)} & \text{при } m = \overline{j-1, n-1}. \end{cases}$$

Поэтому определитель Вронского $W = W(0)$ в этом случае имеет вид

$$W = \prod_{r=1}^{k-1} r! \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_p & \lambda_0 & c_1^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \dots & \lambda_p^{k-1} & \lambda_0^{k-1} & c_{k-1}^1 \lambda_0^{k-2} & \dots & c_{k-1}^{k-1} \\ \lambda_1^k & \dots & \lambda_p^k & \lambda_0^k & c_k^1 \lambda_0^{k-1} & \dots & c_k^{k-1} \lambda_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_p^{n-1} & \lambda_0^{n-1} & c_{n-1}^1 \lambda_0^{n-2} & \dots & c_{n-1}^{k-1} \lambda_0^{n-k} \end{vmatrix} = \prod_{r=1}^{k-1} r! \cdot V.$$

Формула (13) общего решения модельного уравнения (1) в нашем случае имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{i=1}^p c_i e^{\lambda_i \mu(x)} + e^{\lambda_0 \mu(x)} \sum_{j=1}^k c_{p+j} [\mu(x)]^{j-1} + \\ &+ \sum_{i=1}^p (-1)^{n+i} \frac{V_{ni}}{V} \int_a^x e^{\lambda_i [\mu(x) - \mu(\tau)]} \mu'(\tau) F(\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \frac{V_{n,p+j}}{(j-1)! V} \int_a^x e^{\lambda_0 [\mu(x) - \mu(\tau)]} [\mu(x) - \mu(\tau)]^{j-1} \mu'(\tau) F(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (19)$$

где V_{nl} ($l = \overline{1, n}$) – дополнительные миноры элементов n -й строки определителя V .

Определитель V также является определителем типа Вандермонды. Можно показать, что

$$\begin{aligned} V &= (-1)^{kp} \prod_{r=1}^p (\lambda_r - \lambda_0)^k V_p = (-1)^{kp} A_0^k V_p, \\ V_{ni} &= (-1)^{k(p+1)} \frac{A_0^k}{(\lambda_i - \lambda_0)^k} V_{pi} \quad (i = \overline{1, p}), \\ V_{n,p+j} &= (-1)^{kp+n+j} \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \frac{A_0^k}{(\lambda_i - \lambda_0)^{k-j+1}} V_{pi} \quad (j = \overline{1, k}), \end{aligned}$$

где V_p – определитель Вандермонды порядка p , а V_{pi} – дополнительные миноры элементов p -й строки этого определителя.

Так как $V_p = (-1)^{i+1} \prod_{j=1}^p (\lambda_j - \lambda_i) V_{pi} = (-1)^{i+1} A_i V_{pi}$ ($i = \overline{1, p}$), то

$$\frac{V_{ni}}{V} = \frac{(-1)^{k-i-1}}{A_i (\lambda_i - \lambda_0)^k} \quad (i = \overline{1, p}), \quad \frac{V_{n,p+j}}{V} = (-1)^{n+j} \sum_{i=1}^p \frac{1}{A_i (\lambda_i - \lambda_0)^{k-j+1}} \quad (j = \overline{1, k}).$$

Подставляя эти выражения в (19), получаем что для решения $y(x)$ модельного уравнения (1) справедливо представление (17).

Замечание. Если в условиях теоремы 2 кратность k характеристического числа λ_0 равна 1, то мы окажемся в условиях теоремы 1 и формула (17) в этом случае совпадает с формулой (16). А если $k = n$, то определитель V имеет диагональный вид с единицами на

главной диагонали. Поэтому в этом случае $V = 1$, $V_{ni} = 0$ при $i = 1, 2, \dots, n - 1$ и $V_{nn} = 1$. Следовательно формула (17) примет следующий вид:

$$y(x) = e^{\lambda_0 \mu(x)} \sum_{i=1}^n c_i [\mu(x)]^{i-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x e^{\lambda_0 [\mu(x) - \mu(\tau)]} [\mu(x) - \mu(\tau)]^{n-1} \mu'(\tau) F(\tau) d\tau.$$

Отметим, что частный случай теоремы 2, когда $\omega(x) = x^\alpha$, был рассмотрен также в [7].

Уравнения типа Эйлера дробного порядка производной рассматриваются в работе [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. 18-е изд. – М.: Физматгиз, 1959, 468 с.
2. Radjabov N. Integral representation of the manifold solution for new class of the Volterra type integral equations with boundary singularity in case, when kernel contain logarithmic singularity and its power. – Journal of mathematics and system science, 2016, v. 6, 2016, pp. 23-37.
3. Radjabov N. Volterra type integral equations with super singular kernel. – Functional analysis in interdisciplinary applications, Springer, 2017, pp. 312-319.
4. Мустафокулов Р. Модельное уравнение для одного линейного однородного уравнения типа Эйлера n -го порядка. – ДАН РТ, 2018, т. 61, №3, с. 216-223.
5. Матвеев Н.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – СПб, 1996, 370 с.
6. Мустафокулов Р. Интегральное представление решения одного линейного уравнения типа Эйлера в случае простых характеристик. – Современные методы теории краевых задач. – Мат-лы междунар. конф. Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения – XXX”. – Воронеж, 2019, с. 211-212.
7. Мустафокулов Р. Об одном линейном уравнении типа Эйлера с кратной характеристикой. – Междунар. научн. конф., посвящ. 100-летию проф. С.Г.Крейна. – Сб. мат-лов, г. Воронеж, 2017, с. 140-143.
8. Илолов М., Кучакшоев Х.С., Гулджонов Д.Н. О дробных линейных уравнениях в банаховых пространствах. – ДАН РТ, 2018, 61, №2, с. 113-119.

Р.МУСТАФОКУЛОВ

ТАДҚИҚИ ЯК МУОДИЛАИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ХАТТИИ ҒАЙРИЯКЧИНСАИ ТИПИ ЭЙЛЕР

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола як муодилаи дифференсиалии хаттии ғайриякчинсаи типии Эйлер тартиби n -ум дида баромада шудааст. Формулаи ивази тағйирёбанда, ки муодилаи додасударо ба муодила бо коэффисидентҳои доимӣ меорад, нишон дода шудааст. Барои

ҳалли чунин муодилаҳо тасвири интегралӣ, вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикӣ, оварда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: муодилаи хаттии типии Эйлер, муодилаи моделӣ, характеристикаҳои муодила, функцияи Коши, муайянкунандаи типии Вандермонда.

R.MUSTAFOKULOV

**ANALYSIS OF ONE LINEAR NONHOMOGENEOUS DIFFERENTIAL
EQUATION OF EULER'S TYPE.**

Tajik National University

In this work a linear nonhomogeneous differential equation of Euler's type of n - th order is considered. For equations of this class the formula reducibility to equation with constant coefficients is indicated. The formula of integral representation of solution depending on root of an characteristic equation is presented.

Key words: linear equation type of Euler, model equation, characteristics of equation, Cauchy function, determinant type Vandermonde

УДК 517.948

О.Х.КАРИМОВ

**О КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 23.11.2018 г.

В работе получены коэрцитивные оценки нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве $L_2(R^n)$ и на основе коэрцитивных оценок доказана его разделимость. Исследована коэрцитивная разрешимость нелинейного уравнения Лапласа-Бельтрами в пространстве $L_2(R^n)$.

Ключевые слова: оператор Лапласа-Бельтрами, коэрцитивные неравенства, нелинейность, разделимость, разрешимость, гильбертово пространство.

1. В настоящей работе исследуется разделимость нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right] + V(x,u)u(x) = f(x),$$

где $g(x) = (g_{ij}(x))$ – эрмитова матрица, а $V(x, z)$ – положительная функция.

Фундаментальные результаты по теории разделимости дифференциальных операторов принадлежат В.Н.Эверитту и М.Гирцу. В работах [1-4] они получили ряд важных результатов относительно проблемы разделимости оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Ими был рассмотрен также многомерный случай оператора Шрёдингера. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[5-10] и имеющиеся там ссылки). Условия разрешимости нелинейных уравнений Шрёдингера и Дирака рассмотрены в [6]. Разделимость нелинейного оператора Шрёдингера изучена в работе [10]. Коэрцитивная разрешимость

Адрес для корреспонденции: Каримов Олимджон Худойбердиевич. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики АН РТ. E-mail: karimov_olim@mail.ru

дифференциального уравнения нечетного порядка рассматривалась в [11], а также для линейных операторов Гельмгольца, бигармонического и трижды гармонического операторов в работах [12-14]. Разделимость и коэрцитивные свойства строго нелинейных операторов рассматривались в работах [5], [16-19].

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными впервые исследовалась в работе К.Х.Бойматова [5]. Разделимость линейного оператора Лапласа-Бельтрами

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + V(x)u(x)$$

ранее изучалась в работе [15]. Данная работа обобщает результаты работы [15] для нелинейного случая.

2. В пространстве $L_2(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + V(x,u)u(x) = f(x),$$

$$u(x) \in W_{2,loc}^2(R^n), \quad (1)$$

где $g(x) = (g_{ij}(x))$ – эрмитова матрица, а $V(x, z)$ – положительная функция.

Определение 1. Уравнение () (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называется разделимым в $L_2(R^n)$, если

$$\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right],$$

$V(x,u(x))u(x) \in L_2(R^n)$ для всех $u(x) \in L_2(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ таких, что $f(x) \in L_2(R^n)$.

В дальнейшем предположим, что $V(x, z) \in C^1(R^n \times \mathbb{C})$. Для формулировки основного результата введем функции

$$F(x, \xi, \eta) = V^{\frac{1}{2}}(x, z), \quad \xi = \operatorname{Re} z, \quad \eta = \operatorname{Im} z,$$

$$Q(x, \xi, \eta) = V(x, z), \quad \xi = \operatorname{Re} z, \quad \eta = \operatorname{Im} z.$$

Предположим, что для всех $x \in R^n, \omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}, \Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ функция $F(x, \xi, \eta)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))]; \mathbb{C} \right\|^2 \leq \sigma_1, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial x_i} F^{-\frac{3}{2}}; \mathbb{C} \right\|^2 \leq \sigma_2, \quad (3)$$

$$\left\| g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \mu + \nu \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \omega; \mathbb{C} \right\| \leq \delta_1 \left\| F^{\frac{1}{2}} \Omega; \mathbb{C} \right\|. \quad (4)$$

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}} F \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))]; \mathbb{C} \right\|^2 \leq \sigma_3, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x_i} F^{-2}; \mathbb{C} \right\|^2 \leq \sigma_4, \quad (6)$$

$$\left\| g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} \mu + \nu \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) \omega; \mathbb{C} \right\| \leq \delta_2 \|F\Omega; \mathbb{C}\|. \quad (7)$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2)-(7), и пусть числа σ_j, δ_j ($j = \overline{1, 4}$) такие, что

$$n\sigma_1 + 2n\sigma_2 < 4, \quad \sigma_1 + 2\sigma_2 + 4\delta_1 < 4, \quad n\sigma_3 + 2n\sigma_4 < 4, \quad \sigma_3 + 2\sigma_4 + 4\delta_2 < 4. \quad (8)$$

Тогда уравнение (1) разделяется в $L_2(R^n)$, и для всех функций $u(x) \in L_2(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ таких, что $f(x) \in L_2(R^n)$ справедливы включения

$$\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right],$$

$$V(x, u)u, \quad g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(R^n), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

При этом имеет место коэцизитивное неравенство

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right]; L_2(R^n) \right\| + \|V(x, u)u; L_2(R^n)\| +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_2(R^n) \right\| \leq M \|f(x); L_2(R^n)\|, \quad (9)$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

Далее остановимся на основных моментах доказательства этой теоремы. Сначала сформулируем без доказательства две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть в уравнении (1) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^n)$, и функция $u(x)$ принадлежит классу $L_2(\mathbb{R}^n) \cap W_{2,loc}^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда функции $V^{\frac{1}{2}}u(x)$, $g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\mathbb{R}^n)$ ($j=1,2,\dots,n$) принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (2)-(4), и пусть функция $u(x)$ из класса $L_2(\mathbb{R}^n) \cap W_{2,loc}^2(\mathbb{R}^n)$ является решением уравнения (1) с правой частью $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда функции $F^{\frac{3}{2}}(x,u(x))u(x)$, $g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j=1,\dots,n$, принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R}^n)$.

3. Теперь переходим к доказательству теоремы 1. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε принимаем $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta)u \rangle &= \left\langle -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right], \varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta)u \right\rangle + \\ &+ \langle V(x, u)u, \varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta)u \rangle. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получим

$$\langle f, \varphi_\varepsilon Qu \rangle = \frac{1}{2} B_1^\varepsilon(u) + B_2^\varepsilon(u) + B_3^\varepsilon(u) + B_4^\varepsilon(u) + B_5^\varepsilon(u) + \langle Vu, \varphi_\varepsilon Qu \rangle, \quad (10)$$

где

$$B_1^\varepsilon(u) = -\sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] \varphi_\varepsilon Qu \right\rangle,$$

$$B_2^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} Qu \right\rangle,$$

$$B_3^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial x_i} u \right\rangle,$$

$$B_4^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial \xi} \operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial x_i} u \rangle,$$

$$B_5^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon Q \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle.$$

Здесь и далее значения Q , $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$, $\frac{\partial Q}{\partial \xi}$, $\frac{\partial Q}{\partial \eta}$ взяты в точке $(x_1, \dots, x_n, \operatorname{Re} u(x), \operatorname{Im} u(x))$.

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $B_j^\varepsilon(u)$, $j = \overline{1,5}$, находим, что функционал $B_2^\varepsilon(u)$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Относительно функционалов $B_m^\varepsilon(u)$, $m = 1, 3, 4, 5$ получаем следующие оценки:

$$|B_1^\varepsilon(u)| \geq -\frac{n\alpha_1}{2} \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 - \frac{n\sigma_3}{2\alpha_1} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} V u\|^2,$$

$$|B_3^\varepsilon(u)| \leq \frac{n\beta_1}{2} \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n\sigma_4}{2\beta_1} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} V u\|^2,$$

$$|B_4^\varepsilon(u)| \leq n \cdot \delta_2 \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2,$$

$$|B_5^\varepsilon(u)| = \left| \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon Q \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle \right| \leq n \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.$$

Здесь α_1 , β_1 – произвольные положительные числа, а σ_3 , σ_4 и δ_2 – константы из условий (5)-(7).

На основе полученных оценок из равенства (10) имеем

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi_\varepsilon V u \rangle| &\geq \left(1 - \frac{n\sigma_3}{4\alpha_1} - \frac{n\sigma_4}{2\beta_1} \right) \cdot \langle V u, \varphi_\varepsilon V u \rangle - |B_2^\varepsilon(u)| + \\ &+ n \cdot \left(1 - \frac{\alpha_1 \sigma_3}{4} - \frac{\beta_1 \sigma_4}{2} - \delta_2 \right) \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и затем переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим неравенство

$$\begin{aligned} & \|f; L_2(R^n)\| \|Vu; L_2(R^n)\| \geq |(f, Vu)| \geq \left(1 - \frac{n\sigma_3}{4\alpha_1} - \frac{n\sigma_4}{2\beta_1}\right) \cdot (Vu, Vu) + \\ & + n \cdot \left(1 - \frac{\alpha_1\sigma_3}{4} - \frac{\beta_1\sigma_4}{2} - \delta_2\right) \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее подбираем положительные числа α_1, β_1 так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{n\sigma_3}{4\alpha_1} + \frac{n\sigma_4}{2\beta_1} < 1, \quad \frac{\alpha_1\sigma_3}{4} + \frac{\beta_1\sigma_4}{2} + \delta_2 < 1.$$

Теперь из полученных неравенств после несложных преобразований имеем коэрцитивное неравенство (9). Разделимость нелинейного оператора (1) в пространстве $L_2(R^n)$ следует из коэрцитивного неравенства (9). Теорема 1 доказана.

4. С помощью теоремы 1 докажем следующий результат о коэрцитивной разрешимости уравнения (1).

Теорема 2. Пусть дифференциальный оператор

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + Vu$$

разделяется в пространстве $L_2(R^n)$ и пусть положительная функция $\phi(x)$, принадлежащая в $C^1(R^n)$, удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{i=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] Q^{-\frac{1}{2}} \right\|^2 \leq \gamma_1, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|^2 \leq \gamma_2, \quad (13)$$

где $0 < \gamma_1 + 2\gamma_2 < 4$. Тогда уравнение (1) для всех $f \in L_2(R^n)$ имеет единственное решение в пространстве $L_2(R^n)$.

Доказательство. Сначала докажем, что дифференциальное уравнение

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + Vu = 0 \quad (14)$$

имеет нулевое решение $u(x) = 0$ для всех $x \in R^n$. Пусть $\psi(x)$ – произвольная положительная функция из $C^2(R^n)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned}
\langle Vu, \phi\psi u \rangle &= -\left\langle \sum_{i,j=1}^n \sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \right] \phi\psi u \right\rangle - \\
&- \sum_{i,j=1}^n \left\langle \sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi u \right\rangle - \\
&- \sum_{i,j=1}^n \left\langle \sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u \right\rangle - \\
&- \sum_{i,j=1}^n \left\langle \sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \phi \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle. \tag{15}
\end{aligned}$$

Теперь находим реальную часть скалярного произведения

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \langle Vu, \psi u \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] \phi \psi u \right\rangle - \\
&- \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u \right\rangle - \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} u \right\rangle - \\
&- \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle. \tag{16}
\end{aligned}$$

Имея в виду

$$\begin{aligned}
&2 \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \phi u \right\rangle \leq \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \left\| \left[\frac{\partial g^{-1}}{\partial x_j} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + g^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + g^{-1} \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \right]^{\frac{1}{2}} u; L_2(\mathbb{R}^n) \right\|^2 \tag{17}
\end{aligned}$$

и применяя неравенства Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned}
&- \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u \right\rangle \leq \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\| \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \left(g^{-\frac{1}{2}} \phi^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \phi^{-\frac{1}{2}} u \right\|, \tag{18} \\
&\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] \phi \psi u \right\rangle \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}}(x) \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\| \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \left(g^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] Q^{-\frac{1}{2}} \right) Q^{\frac{1}{2}} u \right\|. \quad (19)$$

Учитывая неравенство (12), имеем

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [\ln(\det g(x))] \phi \psi u \right\rangle \leq \\ & \leq \frac{\alpha_1}{2} \sum_{j=1}^n \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n\gamma_1}{2\alpha_1} \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} u \right\|^2, \end{aligned} \quad (20)$$

$$-\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \left\langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi u \right\rangle \leq \frac{n\alpha_2}{2} \sum_{j=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n\gamma_2}{2\alpha_2} \left\| \psi^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} u \right\|^2. \quad (21)$$

Далее для равенства (16), применяя неравенства (20)-(21), получим

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{n\gamma_1}{4\alpha_1} - \frac{n\gamma_2}{2\alpha_2} \right) \left\| \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\| \left[\frac{\partial g^{-1}}{\partial x_j} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + g^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + g^{-1} \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \right]^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \\ & + \left(\frac{n\alpha_1}{4} + \frac{n\alpha_2}{2} \right) \sum_{j=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 - n \cdot \sum_{j=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть $\psi(x) \equiv 1$ для любых $x \in R^n$ и $n\gamma_1 + 2n\gamma_2 < 4\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1$, тогда имеем

$$0 < \left(1 - \frac{n\gamma_1 + 2n\gamma_2}{4\alpha_1\alpha_2} \right) \left\| \phi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u; L_2(R^n) \right\|^2 \leq 0. \quad (23)$$

Следовательно, получим

$$0 < \left(1 - \frac{n\gamma_1 + 2n\gamma_2}{4\alpha_1\alpha_2} \right) \int_{R^n} \left| \phi^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} u \right|^2 dx \leq 0. \quad (24)$$

Последнее неравенство имеет место только при $u(x) \equiv 0$. Это доказывает, что $u(x) = 0$ является единственным решением уравнения (14).

Далее пусть $u(x) \in L_2(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ – решение уравнения

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + Vu = f(x) \quad (25)$$

с правой частью $f(x) \in L_2(R^n)$. Теперь выберем последовательность функций $f_1, f_2, \dots, f_n \in C_0^\infty(R^n)$, сходящихся к f в $L_2(R^n)$. Положим $\mathcal{G}_p = A^{-1}f_p$, где A – означает замыкание оператора $A' = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] + V$, $D(A' = C_0^\infty(R^n))$ в $L_2(R^n)$. Функция $\mathcal{G}_p \in C^1(R^n)$ и является решением уравнения

$$-\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial x_j} \right] + V \mathcal{G}_p = f_i$$

Используя коэрцитивное неравенство (9), находим

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial (\mathcal{G}_p - \mathcal{G}_k)}{\partial x_j} \right] \right\| + \|V(x)(\mathcal{G}_p - \mathcal{G}_k)\| + \\ & + \sum_{j=1}^n \left\| g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial (\mathcal{G}_p - \mathcal{G}_k)}{\partial x_j} \right\| \leq M \|f_p - f_k\|, \end{aligned} \quad (26)$$

Переходя к пределу $p, k \rightarrow \infty$, заключаем, что последовательности $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, V \mathcal{G}_1, V \mathcal{G}_2, \dots,$

$$\begin{aligned} & g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x_j}, g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial x_j}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x_j} \right], \\ & \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial x_j} \right], \dots \text{ будучи фундаментальными, сходятся в } L_2(R^n) \end{aligned}$$

соответственно к некоторым элементам $\mathcal{G}, \mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}, \mathcal{G}^{(3)} \in L_2(R^n)$. Легко проверить, что

$$\mathcal{G} \in W_{2,loc}^2(R^n), \quad \mathcal{G}^{(1)} = V \mathcal{G}, \quad \mathcal{G}^{(2)} = g^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_j},$$

$$\mathcal{G}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{\det g(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_j} \right].$$

Переходя в неравенстве (23) к пределу при $p, k \rightarrow \infty$, получим $\mathcal{G}_p = \mathcal{G}_k = \mathcal{G}$. Следовательно, для $f \in R^n$ таких, что $u \in L_2(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$, $Au = f$. Пусть u_1 тоже является решением уравнения $Au = f$. Тогда имеем

$$A(u - u_1) = 0.$$

Так как уравнение $Au = 0$ имеет единственное решение $u = 0$, то отсюда следует, что $u = u_1$, то есть теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Everitt W.N., Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators. – Proc. London Math. Soc., 1971, v.23, pp.301-324.
2. Everitt W.N., Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions. – Proc. London Math. Soc., 1972, v.24, pp.149-170.
3. Everitt W.N., Gierz M. Some inequalities associated with certain differential operators. – Math. Z., 1972, v.126, pp.308-326.
4. Everitt W.N., Gierz M. Inequalities and separation for Schrodinger-type operators in $L_2(R^n)$. – Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect A, 1977, v.79 pp.149-170.
5. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости. – ДАН СССР, 1973, т. 213, №5, с. 1009-1011.
6. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения. – Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР, 1984, т.170, с.37-76.
7. Бойматов К.Х., Шарипов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака. – Доклады Академии наук России, 1992, т.326, №3, с.393-398.
8. Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка. – Математические заметки, 1989, т.46, №6, с.110-112.
9. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n . – Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР, 1983, т.161, с.195-217.
10. Муратбеков М.Б., Отелбаев М. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера. – Изв. вузов. Матем., 1989, №3, с.44-48.
11. Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Оспанов К.Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения. – Доклады Академии наук России, 2010, т.435, №3, с.310-313.
12. Salem Omram and Khaled A.Gepreel Separation of the Helmholtz Partial Differential Equation in Hilbert Space. – Adv. Studies Theor. Phys., v.6, 2012, №9, pp.399-410.
13. Zayed E.M.E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem. – J. Math. Anal. Appl. v.337(2008), pp.659-666.
14. Zayed E.M.E., Salem Omram. Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert. – International J. Math. Combin. v.4(2010), pp.13-23.
15. Zayed E.M.E., Mohamed A.S., Atia H.A. Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces. – J. Math. Anal. Appl. v.336 (2007), pp.81-92.
16. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами. – Изв. АН РТ. Отд. физ.мат., хим., геол. и техн. н. 2014, №3(157), с.42-50.

17. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015, №8(58), с.665-673.
18. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом. – Уфимский математический журнал, 2017, №1(9), с.55-62.
19. Каримов О.Х. Коэрцитивная оценка и теорема разделимости для одного класса нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве. – Чебышевский сборник, 2017, №4(18), с.245-254.

О.Х.КАРИМОВ

ОИД БА ҲАЛШАВАНДАГИИ КОЭРСИТИВИИ МУОДИЛАИ ҒАЙРИХАТТИИ ЛАПЛАС-БЕЛЬТРАМ ДАР ФАЗОИ ГИЛБЕРТӢ

Институтуи математикаи ба номи А. Ҷӯраеви

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақола баҳоҳои коэрцитивии оператори ғайрихаттии Лаплас-Белтрами дар фазои $L_2(R^n)$ татқиқ карда шуда, дар асоси баҳои коэрцитивӣ ҷудошавандагии ин оператор исбот шудааст. Ҳалшавандагии оператори ғайрихаттии Лаплас-Белтрами дар фазои $L_2(R^n)$ омӯхта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: оператори Лапласа-Бельтрам, нобаробариҳои коэрцитивӣ, ғайрихаттӣ, ҷудошавандагӣ, ҳалшавандагӣ, фазои Гилбертӣ.

O.Kh.KARIMOV

ON THE COERCITIVE SOLVABILITY OF THE NON-LINEAR LAPLACE-BELTRAMI EQUATION IN HILBERT SPACE

A.Juraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

In this paper we obtain coercive estimates the non-linear operator of Laplace-Beltrami flow in Hilbert space $L_2(R^n)$ and on the basis of the coercive estimates its separability is proven. The coercive solvability of nonlinear equations of the Laplace-Beltrami in the space $L_2(R^n)$ is investigated.

Key words: Laplace-Beltrami operator, coercitive inequalities, nonlinearity, separability, solvability, Hilbert space.

УДК 81'322+519.25+491.550

К.С.БАХТЕЕВ

**О РАСПОЗНАВАНИИ АВТОРСТВА ПО УСЕЧЁННЫМ ЦИФРОВЫМ
ПОРТРЕТАМ ТЕКСТА**

Российско-Таджикский (Славянский) университет

Поступила в редакцию 01.08.2018 г.

Произвольному тексту на таджикском языке сопоставляются два цифровых портрета, учитывающих распределение высокочастотных и низкочастотных длин предложений. На примере трёх модельных коллекций произведений устанавливается возможность определения в девяти случаях из десяти автора печатного текста по отдельности с помощью разных цифровых портретов.

Ключевые слова: текст, предложение, идентификация.

Настоящая статья посвящена изучению вопросов, связанных с использованием цифрового портрета печатного текста, представляемого частотностью длин содержащихся в нём предложений. В качестве инструмента для идентификации автора по цифровым портретам его произведений используется γ -классификатор, предложенный в [1,2].

В данной статье для количественного описания текстов тестируются два “усеченных” цифровых портрета, которые характеризуют распределения, с одной стороны, высокочастотных и, с другой стороны, низкочастотных текстовых длин предложений. Такими двумя портретами описываются все произведения, вошедшие в состав модельной коллекции, составленной из трёх частей:

из классической поэзии взяты произведения

- А.Рӯдакӣ: “Адабиёти пароканда” (АР, АП), “Қасоид” (АР, Қ);
- А.Фирдавӣ: “Достони Рустам ва Сӯҳроб” (АФ, Р&С), “Достони Бежан бо Манижа” (АФ, Б&М);
- С.Шероӣ: “Ғазалиёт, қисми 1” (СШ, F1), “Ғазалиёт, қисми 2” (СШ, F2);
- Ҳ.Шероӣ: “Ғазалиёт, қисми 1” (ХШ, F1), “Ғазалиёт, қисми 2” (ХШ, F2)

Адрес для корреспонденции: Бахтеев Камил Саидович. 734000, г. Душанбе, ул. М. Турсун-заде, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: kamilb@mail.ru

– Ч.Румӣ: “Маснавии Маънавӣ, Дафтари Аввал” (ЧР, ММ1), “Маснавии Маънавӣ, Дафтари Дуввум” (ЧР, ММ2);

из современной поэзии

– А.Суруш: “Дафтари 1” (АС, Д1), “Дафтари 2” (АС, Д2);

– А.Шукӯҳӣ: “Баргҳои тиллоӣ” (АШ, БТ), “Шоҳаи райҳон” (АШ, ШР);

– Г.Сафиева: “Офтоб дар соя” (ГС, О), “Шӯъла дар санг” (ГС, Ш);

– И.Фарзона: “101-Ғазал” (ИФ, 101Ғ), “Мӯҳри гули мино” (ИФ, МГМ);

– М.Турсунзода: “Қиссаи Ҳиндустон” (МТ, ҚҲ), “Ҳасани аробакаш” (МТ, ҲА);

из современной прозы

– А.Зоҳир: “Бозгашт” (АЗ, Б), “Завол” (АЗ, З);

– Г.Муҳаммадиева: “Бӯи модар” (ГМ, БМ), “Сафинаи муҳаббат” (ГМ, СМ);

– М.Шакурӣ: “Садри Бухоро” (МШ, СБ), “Хуросон аст ин чо” (МШ, Х);

– С.Турсун: “Нисфирӯзӣ” (СТ, Н), “Повести Камони Рустам” (СТ, ПКР);

– С.Айнӣ: “Дохунда” (СА, Д), “Марги судхӯр” (СА, МС).

Для авторов и их произведений приняты обозначения, указываемые в скобках: первые две буквы – это инициалы авторов, вторые – шифры текстов.

1. “Усечённые” цифровые портреты произведений. Для описания цифровых портретов требуется, прежде всего, определить единый алфавит, то есть список тех элементов, распределение частотностей которых определяет цифровой портрет текста. В нашем случае такими элементами являются длины предложений, иными словами, числа натурального ряда $1, 2, \dots, m$, в котором m – число слов в наибольшем по длине предложении из модельной коллекции текстов. В этой связи в качестве цифровых портретов произведений выступает таблица

$$\begin{array}{l} \bar{N}: 1 \quad 2 \quad \dots \quad m \\ P: p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_m \end{array}$$

где первая строка – перечень длин предложений, исчисляемых количеством слов; вторая строка – относительные частоты p_i встречаемости в пределах произведений предложений длины i ($i = 1, 2, \dots, m$), причём

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1$$

Поскольку классическая и современная поэзии, а также современная проза будут в дальнейшем рассматриваться по отдельности, нам понадобятся необходимые сведения, приводимые в таблице 1.

Таблица 1

Предварительные данные

Части коллекции	Диапазон длин предложений	Диапазон высокочастотных длин	% покрытия текста	Диапазон низкочастотных длин	% покрытия текста
Классическая поэзия	1 - 108	1 - 12	57	13 - 108	43
Современная поэзия	1 - 139	1 - 12	58	13 - 139	42
Современная проза	1 - 234	1 - 10	52	11 - 234	48

Данные таблицы получены путём обработки трех частей модельной коллекции текстов, названия которых даны в столбце 1 и для которых во втором столбце указаны пределы изменений длин предложений. В классической поэзии предложение наибольшей длины в 108 слов было обнаружено у Ҳ.Шерозӣ в “Ғазалиёт” 2, в современной поэзии – у А.Шукӯҳӣ в “Баргҳои тиллоӣ” (139 слов) и в современной прозе – у М.Шакурӣ в “Хурсон аст ин чо” (234 слов). Диапазоны изменения длин разбиты на два интервала: длины 1-го интервала – высокочастотные, совместно покрывающие 57%, 58% и 52% текстов соответственно в классической и современной поэзиях и современной прозе, см. столбец 4; длины 2-го интервала – низкочастотные, совместно покрывающие 43%, 42% и 48% текстов, см. столбец 6.

Определение. *Цифровые портреты, описываемые распределениями либо только высокочастотных, либо только низкочастотных длин предложений, назовём усеченными цифровыми портретами трёх различных частей коллекции произведений.*

Обозначения. Цифровой портрет на основе высокочастотных длин предложений обозначим через ЦП(в), а на основе низкочастотных – через ЦП(н).

Следующие два пункта посвящаются исследованию эффективности применения усеченных цифровых портретов для идентификации авторов произведений. Все вычисления, завершающиеся получением каждой из шести последующих таблиц, реализуются по однотипной схеме, состоящей из 2-х процедур:

- вычисляются усеченные цифровые портреты произведений, учитывающие частотности длин предложений;
- подсчитываются расстояния между усеченными цифровыми портретами по формулам статьи [1].

2. Распознавания авторства произведений на основе ЦП(в).

2.1. Для классической поэзии получены следующие результаты.

Таблица 2.1

Таблица расстояний между ЦП(в) произведений классической поэзии

Автор (произвед)		АР		АФ		СШ		ХШ		ЧР	
		АП	К	P&C	Б&М	F1	F2	F1	F2	ММ1	ММ2
АР	(АП)										
	(К)	0.2628									
АФ	(РС)	0.4906	0.6050								
	(БМ)	0.4424	0.5567	0.0663							
СШ	(F1)	0.6367	0.5224	1.1273	1.0791						
	(F2)	0.6484	0.5341	1.1391	1.0908	0.0691					
ХШ	(F1)	0.6785	0.5642	1.1692	1.1209	0.0473	0.0330				
	(F2)	0.5574	0.4430	1.0480	0.9997	0.0805	0.0911	0.1212			
ЧР	(ММ1)	0.4511	0.5654	0.2574	0.2820	1.0878	1.0995	1.1296	1.0084		
	(ММ2)	0.4846	0.5989	0.2905	0.3241	1.1213	1.1330	1.1631	1.0419	0.0421	

2.2. Для современной поэзии имеем

Таблица 2.2

2.2. Таблица расстояний между ЦП(в) произведений современной поэзии

Автор (произвед)		АС		АШ		ГС		ИФ		МТ	
		Д1	Д2	БТ	ШР	О	Ш	101Г	МГМ	КХ	ХА
АС	Д1										
	Д2	0.1260									
АШ	БТ	1.0530	1.0688								
	ШР	0.9923	1.0071	0.3942							
ГС	О	1.0248	1.0396	0.1068	0.2950						
	Ш	0.7337	0.7735	0.3963	0.3730	0.2911					
ИФ	101Г	1.1000	1.1210	0.2702	0.1631	0.2075	0.4883				
	МГМ	0.7184	0.7688	0.4880	0.6091	0.4247	0.2539	0.6322			
МТ	КХ	0.8842	0.9172	0.4324	0.6330	0.4609	0.2648	0.6472	0.2568		
	ХА	0.9914	1.0062	0.4435	0.1940	0.3443	0.4044	0.3204	0.6583	0.6693	

2.3. Для современной прозы имеем

Таблица 2.3

2.3. Таблица расстояний между ЦП(в) произведений современной прозы

Автор (произвед)	АЗ		ГМ		МШ		СТ		СА	
	Б	З	БМ	СМ	СБ	Х	Н	ПКР	Д	МС
АЗ	Б									
	З	0.2551								
ГМ	БМ	0.5891	0.3401							
	СМ	0.5200	0.2761	0.0849						
МШ	СБ	0.7073	0.4987	0.3002	0.2940					
	Х	0.9367	0.7281	0.3943	0.4792	0.2294				
СТ	Н	0.2044	0.1452	0.4402	0.3738	0.5029	0.7324			
	ПКР	0.2809	0.1111	0.4220	0.3647	0.4264	0.6558	0.0814		
СА	Д	0.9149	0.7063	0.3725	0.4574	0.2076	0.0893	0.7105	0.6339	
	МС	0.9374	0.7288	0.3950	0.4799	0.2396	0.1618	0.7330	0.6565	0.0866

3. Распознавания авторства произведений на основе ЦП(н)

3.1. Для классической поэзии имеем

Таблица 3.1

Таблица расстояний между ЦП(н) произведений классической поэзии

Автор (произвед)	АР		АФ		СШ		ХШ		ЧР	
	АП	К	Р&С	Б&М	F1	F2	F1	F2	ММ1	ММ2
АР	АП									
	К	0.3234								
АФ	Р&С	1.8883	1.8735							
	Б&М	1.6892	1.7126	0.2323						
СШ	F1	1.8470	1.8333	3.6720	3.4817					
	F2	1.8917	1.8742	3.7130	3.5226	0.1958				
ХШ	F1	1.9192	1.8471	3.6858	3.4955	0.1321	0.1340			
	F2	1.5764	1.4966	3.3503	3.1544	0.3532	0.3937	0.3584		
ЧР	ММ1	1.3739	1.6072	0.5345	0.3277	3.1741	3.2151	3.2129	2.8611	
	ММ2	1.4144	1.6940	0.5080	0.2891	3.2147	3.2556	3.2898	2.9470	0.0947

3.2. Для современной поэзии имеем

Таблица 3.2

Таблица расстояний между ЦП(н) произведений современной поэзии

Автор (произвед)	АС		АШ		ГС		ИФ		МТ	
	Д1	Д2	БТ	ШР	О	Ш	101Г	МГМ	КХ	ХА
АС	Д1									
	Д2	0.2021								
АШ	БТ	0.9189	1.0518							
	ШР	1.8457	1.9093	1.2859						
ГС	О	2.2167	2.3279	1.7173	1.3756					
	Ш	1.2216	1.3595	0.6999	1.1627	1.0896				
ИФ	101Г	2.9299	3.0379	2.4273	2.0263	0.7132	1.7940			
	МГМ	1.2524	1.3605	0.7499	1.9814	1.0323	0.8259	1.6844		
МТ	КХ	0.3364	0.2577	0.8559	2.0950	2.2391	1.1835	2.9491	1.2717	
	ХА	2.9283	2.9968	2.1550	1.6768	2.0843	1.7144	2.5553	2.1606	2.7713

3.3. Для современной прозы имеем

Таблица 3.3

Таблица расстояний между ЦП(н) произведений современной прозы

Автор (произвед)	АЗ		ГМ		МШ		СТ		СА	
	Б	З	БМ	СМ	СБ	Х	Н	ПКР	Д	МС
АЗ	Б									
	З	0.9912								
ГМ	БМ	2.5670	1.5798							
	СМ	2.1652	1.1793	0.4018						
МШ	СБ	3.3475	2.3604	0.7805	1.1823					
	Х	4.4333	3.4462	1.8663	2.2681	1.0858				
СТ	Н	0.9672	0.6563	1.6925	1.3828	2.3804	3.4662			
	ПКР	1.3384	0.5110	1.3697	1.1144	2.0179	3.1037	0.4347		
СА	Д	4.3300	3.3428	1.7630	2.1648	0.9825	0.8575	3.3628	3.0004	
	МС	4.4366	3.4494	1.8696	2.2714	1.0890	0.3699	3.4694	3.1069	0.5744

4. Выводы

Взаимные расстояния между 10 произведениями 5 авторов, указанные в шести предшествующих таблицах, используются для определения шести значений величины γ - вещественного параметра так называемого классификатора. Для каждой таблицы с помощью программно реализованного алгоритма значение γ выбирается так, чтобы максимальным образом удовлетворялась гипотеза: произведения одного автора должны быть -однородными, а разных авторов – γ -неоднородными, см. [2].

Оценка эффективности γ -классификатора выполняется по формуле

$$\pi = 1 - \tau / L ,$$

где $\tau = \tau(\gamma)$ – число нарушений гипотезы однородности и L – число пар взаимных расстояний между элементами коллекции, для всех таблиц $L = 45$.

Результаты вычислений далее представляются в табличном виде.

Таблица 4

Эффективность распознавания авторов по усечённым цифровым портретам.

Поэзия классическая	Поэзия современная	Проза современная
диапазон 1 - 12 (57%) $\pi = 0.91$ [0.0692; 0.0804]	диапазон 1 - 12 (58%) $\pi = 0.89$ [0.1261; 0.1630]	диапазон 1 - 10 (52%) $\pi = 0.96$ [0.0867; 0.0892]
от 13 до 108 (43%) $\pi = 0.91$ $\gamma \in [0.2324; 0.2890]$	от 13 до 139 (42%) $\pi = 0.91$ $\gamma \in [0.2022; 0.2576]$	от 11 до 234 (48%) $\pi = 0.91$ $\gamma \in [0.5745; 0.6562]$

В этой таблице – три столбца. Первый содержит сведения по произведениям классической поэзии, второй – по современной и третий – по современной прозе.

В таблице – шесть ячеек, в каждой ячейке – 3 строки. В 1-й строке приводятся данные о цифровом портрете произведений. Во 2-й строке показано значение эффектив-

ности γ -классификатора (вероятность правильного определения автора произведения по цифровому портрету). В третьей строке указывается полуинтервал оптимального значения γ , при котором достигается максимальная эффективность определения автора произведения.

Правило применения сведений о γ следующее:

- если расстояние между парой каких-либо произведений меньше или равно значению левой границы интервала, то произведения – однородны, то есть принадлежат одному и тому же автору;
- если же расстояние строго больше значения правой границы интервала, то произведения – не однородны, то есть принадлежат различным авторам;
- если же значение расстояние принадлежит внутренности полуинтервала, то ситуация – неопределенная и произведения не классифицируются.

Три возможных варианта принятия решений для любых пар произведений позволяют вычислить величину $\tau(\gamma)$ - число ошибок, допускаемых классификатором.

Результаты таблицы 4 показывают, что как по высокочастотным, так и по низкочастотным усеченным портретам распознавание авторства производится на удовлетворительном уровне, приблизительно в 90 случаях из 100.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усманов З.Д. Классификатор дискретных случайных величин. – ДАН РТ, 2017, т. 60, № 7-8, с. 291-300.
2. Усманов З.Д. Алгоритм настройки кластеризатора дискретных случайных величин. – ДАН РТ, 2017, т. 60, № 9, с. 392-397

К.С.БАХТЕЕВ

ДАР БОРАИ МУАЙЯН НАМУДАНИ МУАЛЛИФИ МАТН ТАВАССУТИ ПОРТРЕТҲОИ РАҚАМИИ ЧУДОШУДА

Донишгоҳи славянии Русияву Тоҷикистон

Ба матни дилхоҳ дар забони тоҷикӣ ду портрети рақамӣ, ки басомади зиёд ва ками дарозии чумларо ба эътибор мегирад, мувофиқ гузошта мешавад. Дар мисоли се маҷмӯи моделии асарҳо аз 10 асар барои 9-тоаш муайян намудани асолати муаллифи матни ҷопӣ тавассути портретҳои рақамии гуногун имконпазир гардидааст.

Калимаҳои калидӣ: матн, чумла, ташхис, таснифгар, портрети рақамии.

K.S.BACHTEEV

AUTHOR IDENTIFICATION BY TRUNCATED TEXT DIGITAL PORTRAITS

Russian-Tajik Slavonic University

Free text in Tajik is matched with two digital portraits taking into account the distribution of high-frequency and low-frequency sentence lengths. On the example of three model collections of works, make it possible to determine individually the author of the printed text in nine cases of ten using different digital portraits.

Key words: text, sentence, identification, identifier, digital portrait.

УДК 811.22 + 81'33 + 811.222.8

Г.З.РУСТАМОВ

О ГИБРИДНОМ МЕТОДЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТАДЖИКСКОЙ СЛОВОФОРМЫ В ПЕРСИДСКОЙ ГРАФИКЕ

Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 23.11.2018 г.

На основе разработанной концептуальной модели намечена программа исследований статистических закономерностей, лежащих в основе исправления грамматических ошибок, допускаемых при формальном конструировании таджикских словоформ в персидской графике из тех же словоформ, заданных в кириллице.

Ключевые слова: язык, таджикский, персидский, графика, конверсия.

При общности языковых систем таджики и иранцы пользуются ныне различными системами письма: первые – на основе кириллического алфавита, вторые – на основе арабской графики. Преобразование текстов с одного языка на другой далеко не очевидная процедура, не сводимая к простой транслитерации. Более того, возникающие при этом проблемы оказываются принципиально различными при отображениях таджикской словоформы в персидскую и персидской – в таджикскую.

Вопросы автоматической межъязыковой конверсии систем письма для таджикско-персидской языковой пары разрабатывались коллективом авторов под руководством академика З.Дж.Усманова в 2008-2010 гг. В частности, в работе [1] было показано, что точное и полное преобразование таджикских текстов в персидскую запись сложнее, чем простая транслитерация. При этом последовательное сравнение словоформ двух языков позволило установить границы вариативности отображений таджикских графем в персидские [2]. Показано, что неоднозначность касается в основном корневых морфем и их сопряжений с другими морфемами, тогда как префиксы и постфиксы (приставки, суффиксы

Адрес для корреспонденции: Рустамов Гетигурд Зафарович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/1, Институт математики АН РТ. E-mail: getigurd@gmail.com

и окончания) легко могут переписываться в персидскую графику в соответствии с относительно небольшим и простым набором правил [3].

Поэтому реализованное на практике решение в области таджикско-персидской конверсии основывалось на наличии вероятностного морфологического анализатора, оперирующего ограниченным набором слов-исключений и базами аффиксов [4]. Такое решение минимизировало требуемый объем словарных баз и, следовательно, адаптировалось к непрекращающемуся изменению лексики таджикского языка, однако при этом потребовало сложные процедуры обработки, основанные на вероятностных моделях. Как следствие, точность конверсии хоть и достигла 93%, всё же не удалось избежать ошибок в определении границ корневых морфем [5].

Таким образом, при реализации практических систем таджикско-персидской конверсии систем письма сохраняется потенциал использования моделей морфологического анализа, основанных на полных базах корней и аффиксах таджикского и персидского языков.

В настоящей работе излагается концепция гибридного подхода к реализации конверсии графических систем письма, основанного на использовании, с одной стороны, таджикско-персидского словаря для высокочастотных таджикских словоформ и, с другой стороны, практически исчерпывающей коллекции аффиксов таджикского языка. Такая коллекция, впервые представленная в монографиях [6,7], содержит 82 префикса и 128760 постфиксов. В неё включены также 76539 корней, извлеченных из текстовой коллекции объемом в 59 344 883 словоупотреблений, см. соответствующие ссылки в монографии [6].

Обозначения, используемые в дальнейшем:

t – таджикский язык,

p – персидский язык (фарси),

WF – словоформа

WF_t – словоформа таджикская в кириллице,

WF_p – словоформа таджикская в персидской графике,

R – корень словоформы

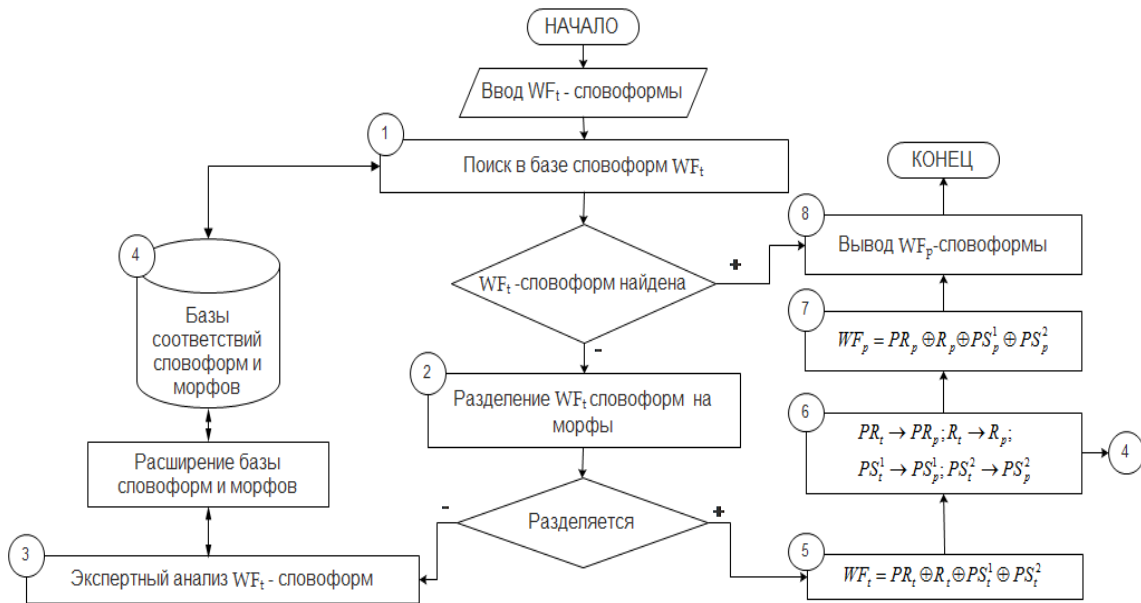
PR – префикс,

PS^1 – суффикс,

PS^2 – окончание.

Последние четыре обозначения с приписанными к ним внизу индексами t и p будут указывать на принадлежность аффиксов соответствующим языкам.

Концептуальная модель автоматизированного написания таджикской словоформы на персидской графике представляется в виде блок-схемы на рисунке.



Процесс конвертирования начинается с ввода таджикской словоформы WF_t . В блоке 1 происходит обращение к базе соответствий словоформ и морфов, которая представляет собой набор соответствий $WF_t \rightarrow WF_p$ между таджикскими словоформами в кириллическом алфавите и теми же самыми словоформами, записанными в персидской графике. Список таджикских словоформ составлен из 3300 первых высокочастотных элементов, покрывающих 75% упомянутой ранее коллекции текстов. Каждой высокочастотной словоформе экспертным путём сопоставлена её запись в персидской графике.

Если поступившая для конвертирования очередная WF_t – словоформа содержится в базе соответствий словоформ и морфов, то из неё извлекается соответствующая WF_p – словоформа, которая отправляется в блок 8, и процесс конвертирования на этом завершается.

Если же WF_t – словоформа в базе соответствий словоформ и морфов отсутствует, то в блоке 2 решается вопрос о возможности её автоматического разделения на морфы в соответствии с алгоритмами автоматического морфологического анализа, предложенными в [7].

Если это не удаётся сделать, то в блоке 3 производится экспертный анализ WF_t – словоформы, который сопровождается, с одной стороны, её расщеплением на морфы и отправкой полученных данных в базу соответствий словоформ и морфов для её пополнения и, с другой стороны, сопоставлением ей соответствующей WF_p – словоформы.

Если же в блоке 2 разделение на морфы совершается, то в блоке 5 словоформа представляется в разложенном на морфы виде. Далее в блоке 6 происходит обращение к базе соответствий словоформ и морфов, которая представляет собой список соответствий

между таджикскими морфами в кириллическом алфавите и теми же самыми морфами, записанными в персидской графике.

Затем с помощью данных базы соответствий словоформ и морфов в блоке 7 формальным образом путём замещения морфов в кириллическом алфавите соответствующими им морфами в персидской графике формируется образ WF_p словоформы WF_t . На этом искомая конверсия завершается.

Замечание 1. Итак, суть предложенного нами гибридного способа заключается в последовательной реализации двух этапов:

- если поступившая на конверсию таджикская словоформа WF_t оказалась среди высокочастотных элементов базы соответствий словоформ и морфов, то её образ в персидской графике WF_p автоматически, без всяких сложностей извлекается из той же базы;

- если же она не содержится в базе соответствий словоформ и морфов, то её образ формируется путем конкатенации образов соответствующих морфов в персидской графике.

Замечание 2. Второй этап – чисто формальный. Не исключено, что словоформа, сформированная путем конкатенации морфов, может оказаться ошибочной в рамках персидской грамматики. Следовательно, итоговый результат нуждается в проверке на обширном статистическом материале.

Как отмечено в [3], ошибки ожидаются в окрестностях сопряжения корней с аффиксами.

Замечание 3. Предложенный в настоящей статье подход следует рассматривать, главным образом, как конкретную программу для проведения исследований по пунктам возникновения ошибок при формальном построении персидской словоформы, выявления закономерностей их появления и разработки правил их устранения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усманов З.Д., Гращенко Л.А., Фомин А.Ю. Информационные основы автоматизированной таджикско-персидской транслитерации. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2008, № 1 (130), с. 20-26.
2. Гращенко Л.А. Алгоритм формирования словаря соответствий таджикских и персидских словоформ. – ДАН РТ, 2008, т.51, № 5, с. 339-345.
3. Гращенко Л.А., Фомин А.Ю. Опыт реализации средств таджикско-персидской конверсии графических систем письма. – ДАН РТ, 2008, т.51, № 8, с. 580-583.
4. Гращенко Л.А. Концептуальная модель таджикско-персидской конверсии графических систем письма. – ДАН РТ, 2009, т. 52, № 2, с. 111-115.
5. Гращенко Л.А. Математические основы автоматизированной таджикско-персидской конверсии графических систем письма: Дисс. ... к. физ.-мат. н.13.18 / Институт математики Академии наук Республики Таджикистан. – Душанбе, 2010, 115 с.
6. Усманов З.Д., Довудов Г.М. Формирование базы морфов таджикского языка. – Душанбе: Дошиш, 2014, 110 с.

7. Усманов З.Д., Довудов Г.М. Морфологический анализ словоформ таджикского языка. – Душанбе: Дониш, 2015, 132 с.

Г.З.РУСТАМОВ

**ОИДИ МЕТОДИ ОМЕХТАИ БАРГАРДОНИИ АВТОМАТИИ КАЛИМАҲОИ
ТОЧИКӢ БА ХАТИ ФОРСӢ**

Институти математика ба номи А. Ҷӯраев

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар асоси модели концептуалии пешниҳодшуда, барномаи тадқиқи қонуниятҳои омории ислоҳи ҳатогиҳои грамматикӣ, ки ҳангоми ба таври формалӣ баргардонидани калимаҳои забони тоҷикӣ ба хати кириллӣ пешниҳодшуда ба хати форсӣ пайдо мешаванд, ба нақша гирифта шуда аст.

Калимаҳои калидӣ: забон, тоҷикӣ, форсӣ, хат, баргардон.

Z.RUSTAMOV

**ABOUT THE HYBRID METHOD OF AUTOMATIC REPRESENTATION
OF THE TAJIK WORD FORM IN PERSIAN GRAPHICAL LETTER SYSTEMS**

A.Dzhuraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

A program of studies of regularities has been outlined on the basis of the developed conceptual model underlying the correction of grammatical errors, made in the formal conversion of Tajik words form in Persian graphical letter systems from the same word forms specified in Cyrillic.

Key words: language, Tajik, Persian, graphics, conversion.

УДК 66.04/.08.

Х.Б.ШАРИПОВ, К.КАБУТОВ, И.Х.ДЖУРАКУЛОВ, А.САФАРОВ, Ф.СУЛТАНОВ
**СИНТЕЗ НАНОЧАСТИЦ ДИОКСИДА ТИТАНА ИЗ ТРЕХХЛОРИСТОГО
ТИТАНА И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ ФОТОКАТАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ**

*Физико-технический институт им. С.У.Умарова АН Республики Таджикистан
Поступила в редакцию 24.10.2018 г.*

В исследовании использован треххлористый титан для получения различных полиморфных модификаций диоксида титана (анатаз, рутил). Наночастицы TiO_2 получали термическим разложением аморфного $TiO_2 \cdot nH_2O$ при различных температурах: 300, 400, 500 и 600°C. Выявлено влияние условий термической обработки на микроморфологию и фазовый состав наночастиц TiO_2 . Проведено изучение фотокаatalитических свойств наночастиц TiO_2 .

Ключевые слова: наночастицы диоксида титана, анатаз, рутил, треххлористый титан, термическая обработка, фотокаatalитические свойства, адсорбция.

В настоящее время нанокристаллические материалы на основе диоксида титана находят широкое применение в составе источников тока, керамических и биологически активных материалов. Кроме того, синтез фотокаatalизаторов на основе нанокристаллического TiO_2 ввиду их более высокой, по сравнению с крупнокристаллическими материалами, активностью в ряде практически важных применений является перспективной областью изучения кatalитических технологий [1-3]. Наночастицы TiO_2 могут быть получены в виде целого ряда полиморфных модификаций (анатаз, рутил, брукит и т.д.), многие из которых стабилизированы молекулами воды и ионами металлов, находящимися в туннелях или между слоями, образованными октаэдрами $[TiO_6]$. Функциональные характеристики материалов на основе TiO_2 прежде всего зависят от кристаллических структур этих модификаций.

Фотокаatalитические процессы на поверхности диоксида титана происходят под действием света с энергией больше или равной ширине запрещенной зоны

Адрес для корреспонденции: Шарипов Хуршед Бадридинович. 734069, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/1, Физико-технический институт АН РТ.
E-mail: sh_khurshed_94@mail.ru

полупроводника (с длиной волны <390 нм). При этом происходит переход электрона из валентной зоны в зону проводимости, с образованием электронно-дырочной пары. Образованные электронно-дырочные пары являются подвижными частицами и могут рекомбинировать или быть захвачены поверхностью. Вероятность вступления носителей зарядов в окислительно-восстановительных реакциях зависит от скорости рекомбинации этих частиц. Электроны на поверхности полупроводника TiO_2 захватываются атомами титана взаимодействуют с O_2 , образуя радикал $\bullet\text{O}^-$, а дырки поверхностными - OH^- группами, дают радикал $\bullet\text{OH}$. Эти радикалы окисляют любые органические молекулы, адсорбированные на поверхности TiO_2 [4,5]. Продуктами окислительно-восстановительных реакций являются CO_2 и H_2O .

В последнее время процессы формирования метастабильных модификаций TiO_2 на основе треххлористого титана изучены недостаточно. Поэтому в рамках настоящей работы предполагается провести исследования высокотемпературного разложения треххлористого титана при температурах $300\text{--}600^\circ\text{C}$ в достаточно широком интервале концентраций, что могло привести к получению принципиально новых результатов.

Экспериментальная часть

В качестве исходных соединений были использованы 15%-ный раствор треххлористого титана (в приблизительно 10% хлористоводородной кислоте), 10%-ный раствор аммиака и дистиллированная вода.

Образцы диоксида титана были синтезированы по следующей методике: 21.28 мл ($\rho = 1.21$ г/мл) 15%-ного раствора TiCl_3 (2.5 ммоль) смешивали с 27.41 мл ($\rho = 0.957$ г/мл) 10%-ным раствором NH_4OH при комнатной температуре в соотношении 1:3. Затем при постоянном перемешивании в течение 1ч добавляли 0.45 мл дистиллированной воды.

Полученный осадок промывали дистиллированной водой и высушивали в сушильном шкафу. По данной методике получали несколько образцов, которые затем подвергали термообработке при различных температурах (300, 400, 500 и 600°C), время выдержки 2 ч.

Рентгенофазовый анализ (РФА) образцов проводили на дифрактометре DRON 3 ($\text{CuK}\alpha$ -излучение) в диапазоне $10^\circ\text{--}70^\circ 2\theta$ при скорости вращения гониометра $3^\circ 2\theta/\text{мин}$. Дифрактограммы индицировали с использованием базы данных PDF2 (2012).

ИК-спектры порошков в виде таблеток с KBr регистрировали на приборе Specord M-80 в области $400\text{--}4000$ cm^{-1} .

Спектрофотометрический анализ полученных образцов проводили на спектрофотометре КФК-3КМ в спектральном диапазоне длин волн от 350 до 600 нм.

Растровую электронную микроскопию (РЭМ) и рентгеноспектральный микроанализ (РСМА) образцов проводили с использованием микроскопа Carl Zeiss NVision 40, оснащенного анализатором Oxford Instruments X-Max, при ускоряющих напряжениях 3-20 кВ.

Результаты и их обсуждение

При добавлении раствора аммиака в $TiCl_3$ наблюдается выпадение осадка серо-фиолетовой окраски. Осадок представляет собой неустойчивый гидроксид титана (III), который при постоянном перемешивании в течение 1ч в воздухе окисляется до Ti^{+4} и окраска раствора изменяется от синего до белого цвета.

Полученный при окислении продукт представлял собой аморфное вещество $TiO_2 \cdot 2H_2O$. Образцы TiO_2 были получены термическим разложением аморфного $TiO_2 \cdot nH_2O$ при различных температурах (300, 400, 500 и 600°C). Рентгенограмма полученных образцов представлена на рис.1.

По данным рентгенофазового анализа обнаружено, что при температуре 300°C наблюдается формирование кристаллической фазы анатаз, но в низкой степени кристалличности. При дальнейшем увеличении температуры обжига TiO_2 полностью закристаллизуется в структуре анатаза. При температуре 600°C образуется анатаз с высокой степенью кристалличности, что согласуется с литературными данными [6-8]. Более интересное наблюдается при температуре 500°C. При этом образуется смесь двух модификаций TiO_2 : анатаз и рутил при концентрациях 87 и 13%, соответственно [9]. В большинстве случаев [10-12] более фотокаталитически активным является TiO_2 , образованный смесью модификаций анатаза и рутила. Механизм формирования кристаллической фазы анатаза из аморфного $TiO_2 \cdot nH_2O$ в зависимости от температуры можно представить в перестройке октаэдров $[TiO_6]$ аморфного TiO_2 к образованию анатаза. При более высоких температурах молекулы воды удаляются из структуры TiO_2 .

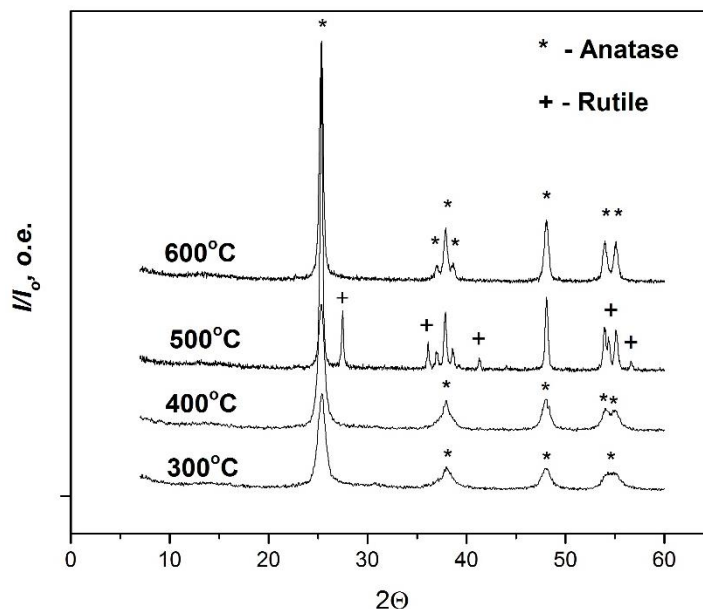


Рис. 1. Дифрактограммы образцов, полученных при различных температурах.

ИК-спектр образца, полученного при 500°C, еще раз свидетельствует о кристалличности TiO_2 . В области частот 400-1500 cm^{-1} проявляется пик, характерный деформаци-

онным колебаниям -ОН групп. Наличие -ОН групп в структуре образцов приводит к уменьшению скорости рекомбинации электронов и дырок. Процесс фотокаталитической реакции зависит от радикалов •ОН и •О, образованных на поверхности TiO₂. Поэтому чем больше -ОН группы и чем больше они захватывают электронов, тем больше образуются радикалы •ОН.

Сравнение адсорбционной емкости поверхности порошков TiO₂ проводили спектрофотометрическим методом в соответствии с работой [13]. Для этого 0.25 г порошка TiO₂ помещали в емкость с раствором красителя – метилоранжа (30 мг красителя на 100 мл воды), выдерживали 24 ч и отбирали пробы раствора для фотометрического определения убыли концентрации красителя в растворе за счет адсорбции на поверхности порошка оксида титана. Перед фотометрическим определением концентрации красителя раствор центрифугировали для отделения частиц TiO₂. Спектры красителя в фугате регистрировали с помощью спектрофотометра КФК-3КМ.

За изменением концентрации метилоранжа в растворе следили по уменьшению интенсивности полосы поглощения красителя с $\lambda_{\max} = 560$ нм. Изменение концентрации красителя рассчитывали по формуле [13]:

$$\Delta C_{Kp} = ((C_0 - C_{30}) / C_0) * 100\%,$$

где C_0 – исходная концентрация красителя в растворе, C_{30} – концентрация красителя в фугате после 30 мин адсорбции на порошке TiO₂.

Спектрофотометрическое исследование раствора красителя с частицами TiO₂ позволило выявить различие в адсорбционной способности порошков TiO₂.

Таблица 1

Изменение концентрации красителя в растворе за счет адсорбции на поверхности частиц TiO₂

t, °C	t, ч	C анатаза, %	ΔC красителя, %
300	24	99	72.6
400	24	99	48
500	24	87	26.6
600	24	99	41

В табл. 1 приведены результаты расчета изменения концентрации метилоранжа в растворе после 24 ч адсорбции на порошках TiO₂ полученных при различных температурах. Оказалось, что порошки TiO₂, полученные при низких температурах, имеют более высокую адсорбционную способность по отношению к метиловому оранжевому. Более интересно то, что образцы, полученные при температуре 500°C, имеют наименьшую адсорбцию по отношению к метиловому оранжевому, что противоречит работам [7,13]. Образцы, полученные при температуре 300°C, имеют наибольшую адсорбцию.

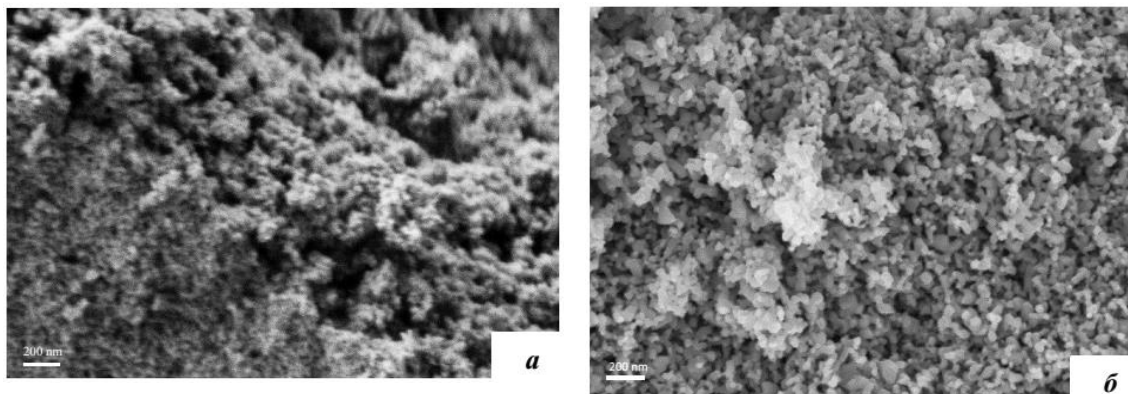


Рис. 2. Микроструктура образцов диоксида титана, полученного при температуре 300°C (а и б) и 500°C (в и г).

Данные электронной микроскопии (рис. 2) свидетельствуют, что наночастицы диоксида титана имеют сферическую форму с довольно узким распределением частиц по размерам 35-55 нм (приблизительно), что увеличивает их адсорбционные свойства [13].

Таблица 2

Относительное атомное (%) содержание хлора, титана и кислорода в образцах, полученных при различных температурах

Температура образования образца, °С	Фаза образца	O (%)	Cl (%)	Ti (%)
300	анатаз	73.86	0.96	25.18
500	анатаз + рутил	74.50	0.00	25.50

Результаты оценки относительного содержания хлора, титана и кислорода в образцах, определенные из данных РСМА с учетом коэффициентов элементной чувствительности, приведены в табл. 2. Можно видеть, что в структуре образца, полученного при температуре 300°C, содержатся ионы хлора, что является причиной увеличения адсорбционных свойств и уменьшения степени кристалличности данного материала. Ионы хлора могут быть анионы, модифицированные в анионные позиции диоксида титана [14].

Таким образом, в данной работе представлен наиболее дешевый метод получения частиц диоксида титана, используемый в качестве основного материала для солнечных элементов. Установлены пределы образования и структурные модификации диоксида титана (анатаз и рутил).

Исследуя фотокаталитические свойства полученных образцов, пришли к выводу, что образцы диоксида титана, образованные при температуре 300 и 500°C, согласно данной методике можно представить в качестве фотокаталитически активного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hewitt J. Cosmet. – Toiletries, 1999, v.114, pp.59-68.
2. Phillips L.G., Barbano D.M. – Journal Dairy Science, 1997, v.80, pp.2726-2731.
3. Guidi V., Carrota M.C., Ferroni M., Martinelli G. – Sens. Actuators B, 1999, v.57, pp.197-200.
4. Almquist C.B. – Journal of Catalysis, 2002, v.212, №2, pp.145-156.

5. Chen X. – Chem. Rev, 2007, v.107, №7, pp.2891-2959.
6. Deng X., Yue Y., Gao Z. – Applied Catalysis B: Environmental, 2002, v.39, №2, pp.135-147.
7. Zheng Y.Q., Shi E.W., Cui S.X. et al. – J. Am. Ceram. Soc., 2000, v.83, №10, pp.2634-2640.
8. Yanqing Z., Erwei S., Suxian C. et al. – J. Mater. Scien. Lett., 2000, v.19, pp.1445-1448.
9. Кузнецов В.А. – М.: Наука, 1970, с.43-54.
10. Ohno T., Sarukawa K., Tokieda K. et al. – Journal of Catalysis, 2001, v.203, №1, pp.82-86.
11. Zhao H., Jiang D., Zhang S. et al. – Analytical Chemistry, 2003, v.76, pp.155-160.
12. Zhao H., Zhang S., John R. – J. Physical Chemistry B, 2003, v.107, pp.12774-12780.
13. Степанов А.У., Владимиров А.А., Сотникова Л.В. и др. – Пол. Вестник, 2013, №1, pp.292-295.
14. Алиев С.А. – Вестник РУДН, 2016, №2, с.73-86.

Х.Б.ШАРИПОВ, Қ.КАБУТОВ, И.Х.ЧУРАҚУЛОВ, А.САФАРОВ, Ф.СУЛТОНОВ

СИНТЕЗИ НАНОЗАРРАҲОИ ДУОКСИДИ ТИТАН АЗ ХЛОРИДИ ТИТАН (III) ВА ТАҲҚИҚИ ХОСИЯТҲОИ ФОТОКАТАЛИТИКИИ ОНҲО

Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақола барои ҳосил намудани якчанд намуди модификатсияҳои полиморфии диоксида титан (анатаз, рутил) хлориди титан (III) истифода бурда шуд. Хоқаҳои TiO_2 – ро ҳангоми ҷудошавии ҳароратии $TiO_2 \cdot nH_2O$, ки сохти аморфӣ доранд, дар ҳароратҳои гуногуни 300, 400, 500 ва 600°C ҳосил намудем. Таъсири шартҳои коркарди ҳароратӣ ба микроморфология ва таркиби фазавии хоқаҳои TiO_2 ошкор шуд. Таҳқиқ ва омӯзиши хосиятҳои фотокаталитикии хоқаҳои TiO_2 гузаронида шуд.

Калимаҳои калидӣ: нанозарраҳои диоксида титан, анатаз, рутил, хлориди титан (III), коркарди ҳароратӣ, хосиятҳои фотокаталитикӣ, адсорбсия.

Kh.B.SHARIPOV, K.KABUTOV, I.H.JURAQULOV, A.SAFAROV, F.SULTONOV

THE SYNTHESIS OF TITANIUM DIOXIDE NANOPARTICLES FROM TITANIUM TRICHLORIDE AND RESEARCH OF ITS PHOTOCATALYTIC PROPERTIES

S.U.Umarov Physical-Technical Institute, Academy of Science of the Republic of Tajikistan

In the article, titanium trichloride was used to obtain various polymorphic modifications of titanium dioxide (anatase, rutile). TiO_2 powders were obtained by thermal decomposition of amorphous $TiO_2 \cdot nH_2O$ at various temperatures: 300, 400, 500 and 600°C. The influence of heat treatment conditions on the micromorphology and phase composition of TiO_2 powders has been revealed. A study was carried out on the photocatalytic properties of TiO_2 nanoparticles.

Key words: titanium dioxide nanoparticles, anatase, rutile, titanium trichloride (titanium (III) chloride), thermal treatment, photocatalytic properties, adsorption.

УДК 553.492 + 661.65(575.3)

Д.О.ДАВЛАТОВ, Ш.Б.НАЗАРОВ, Ж.А.МИСРАТОВ, У.М.МИРСАИДОВ

**ТЕХНОЛОГИЯ СОВМЕСТНОЙ ПЕРЕРАБОТКИ НЕФЕЛИНОВЫХ
СИЕНИТОВ ТУРПИ И ДАНБУРИТОВ АК-АРХАРСКОГО
МЕСТОРОЖДЕНИЯ ТАДЖИКИСТАНА МЕТОДОМ СПЕКАНИЯ**

Институт химии им. В.И.Никитина АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 07.02.2018 г.

Представлены результаты комплексной переработки нефелиновых сиенитов Турпи и данбуритов Ак-Архарского месторождения Таджикистана методом спекания с сульфатом натрия. Определены оптимальные условия протекания процесса спекания руд. Предложена принципиальная технологическая схема их комплексной переработки руд.

Ключевые слова: нефелиновые сиениты, данбурит, сульфат натрия, комплексная переработка, спекание, глинозем, борная кислота, технологическая схема.

Таджикистан располагает большими запасами борного и алюминиевого сырья, одними из которых являются борсодержащее Ак-Архарское месторождение на Памире и нефелиновые сиениты Турпи в Раштском регионе. Совместная комплексная переработка этих руд позволяет значительно расширить ассортимент получаемых товарных продуктов и является новым технологическим подходом в переработке этих руд, так как объединенная их переработка улучшает комплексность сырья, увеличивает безотходность производства, а также выгодна с точки зрения себестоимости продукции.

В литературе широко известны сведения о переработке боросиликатных, а также алюминийсодержащих руд различными способами, включая кислотные, щелочные, спекательные и комбинированные [1-5].

Экспериментальная часть

Цель данной работы – исследование совместной комплексной переработки нефелиновых сиенитов Турпи и данбуритов Ак-Архарского месторождения Таджикистана методом спекания с сульфатом натрия.

Адрес для корреспонденции: Назаров Шамс Бароталиевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: shams_63@list.ru

Боросиликатные руды месторождения Ак-Архар имеют сложный химический и минералогический состав: B_2O_3 - 10.4; SiO_2 - 59.8; Al_2O_3 -1.27; Fe_2O_3 -2.2; FeO – 1.39; CaO – 19.6; MgO – 0.75; TiO_2 -0.15; MnO – 0.29; K_2O – 0.1; Na_2O – 0.03; P_2O_5 – 0.11; примеси – 3.91%.

Нефелиновые сиениты Турпи, имеющие в своем составе, в %: Al_2O_3 – 22.4; Fe_2O_3 – 6.4; Na_2O – 6.5; K_2O – 6.6; CaO – 2.5; SiO_2 – 53.0, являются бедными по алюминию рудами, но содержание в них щелочных и редких металлов, а также полевошпатовых минералов создает перспективу их комплексного использования. Минералогический состав нефелиновых сиенитов и количественное содержание минералов в руде следующие, %: нефелин – 20.5; альбит – 4.1; микроклин -64.7; биотит – 6.4 и кальцит – 2.0.

Результаты РФА данбурита при температуре 950-980°C приведены на рис.1. Согласно данным рентгеноструктурного анализа исходного данбурита выявлено, что при температуре 950°C в составе данбурита происходит ряд изменений. В первую очередь удаляется механически и химически связанная вода, при этом руда не теряет кристаллическую структуру, а также при обезвоживании данбурита образуется соединение, обладающее большей реакционной способностью, чем в необожженной руде.

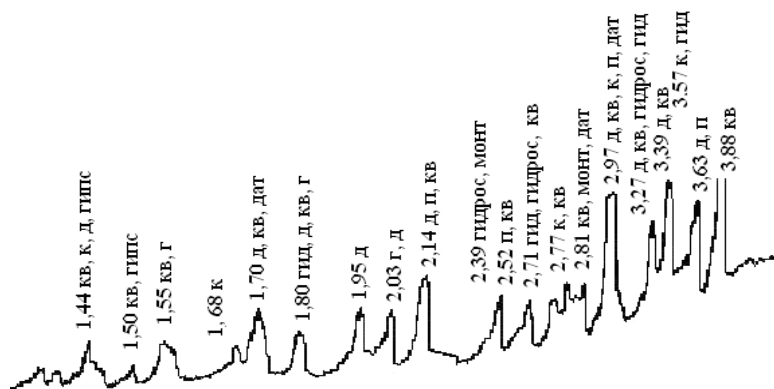


Рис.1. Рентгенограмма исходного данбурита месторождения Ак-Архар:
кв–кварц, к – кальцит, г – гранат, д – данburит, дат – датолит, п – пироксены,
г – гидрослюда, гид – гидроборатит, монтмориллонит.

При прокаливании данбуритового сырья происходит термодеструкция минералов и перестройка кристаллической структуры α -модификаций в β - или γ -формы, которые отличаются хорошей растворимостью. Эти явления особенно характерны для кварца, который при высоких температурах превращается в более активную форму – аморфную.

Согласно термограмме (рис.2), при температуре до 700°C данбурит не претерпевает никаких изменений. Выше этой температуры (первый эндотермический эффект) происходят изменения, связанные с удалением воды, которые полностью заканчиваются при 800°C. При температуре 950-980°C (второй эндотермический эффект) данбурит разлага-

ется с образованием дибората кальция $CaO \cdot B_2O_3$, силиката кальция $CaO \cdot SiO_2$, кварца $\alpha - SiO_2$.

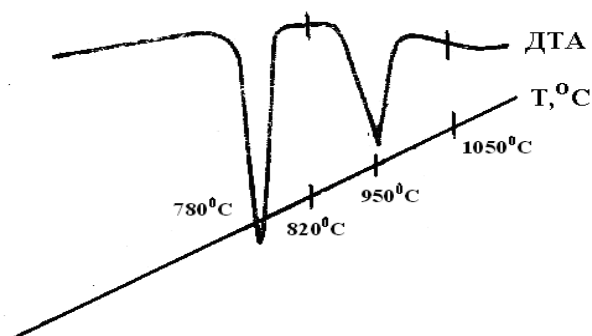


Рис. 2. Термограмма исходного данбурита.

На рис 3. представлена термограмма исходного нефелинового сырья, снятая на дериватографе марки Q-1500Д системы «Паулик-Паулик-Эрдей» до температуры 1500°C при скорости подъема температуры 7.5°/мин. На рисунке четко выражены два эндоэффекта при температурах до 230°C, соответствующие процессам испарения кристаллизационной воды минералов.

В интервале температур 500-700°C происходит процесс окисления железа (II) до железа (III), а эндоэффект при 975°C соответствует процессу термического разложения минерала кальцита. При температурах 1000-1100°C наблюдается переход низкотемпературного нефелина в высокотемпературный –карнегиит.

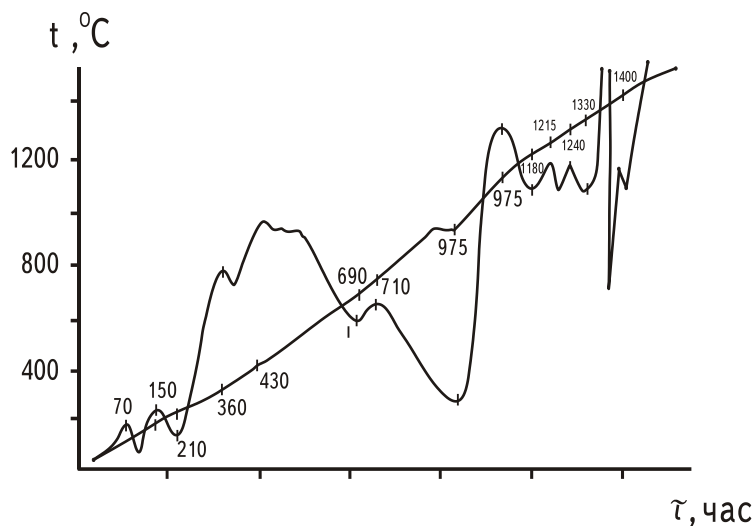


Рис. 3. Термограмма исходного нефелинового сырья.

Рентгенограмма исходного нефелинового сырья показана на рис. 4. На рентгенограмме четко наблюдаются линии, соответствующие минералам: биотит, альбит, нефелин, кальцит, ортоклаз и микроклин.

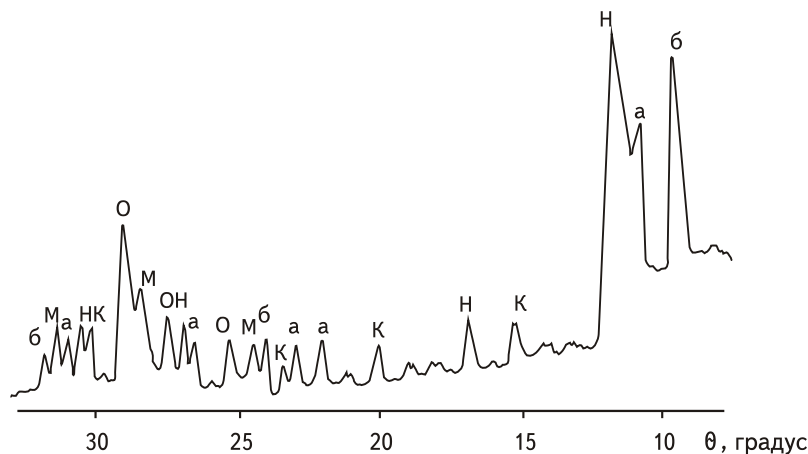


Рис.4. Рентгенограмма исходного нефелинового сырья:

б – биотит; а – альбит; н – нефелин; к – кальцит; о – ортоклаз; м – микроклин.

Выбор сульфата натрия как реагента, разрушающего каркасные структуры упорных бор и алюмосодержащих минералов, объясняется тем, что в природе он широко распространён и доступен. Кроме того, этот реагент в технологическом цикле не претерпевает значительного химического изменения, а после водной обработки спека на 80-90% возможно возвращать его обратно на стадию спекания руд, что уменьшает массу потока веществ в технологическом цикле.

Результаты исследования влияния различных физико-химических факторов на процесс совместного спекания и разложения данбуритовых и нефелиновых руд с сульфатом натрия представлены на рис. 5.

Влияние температуры спекания на степень разложения руд изучено в интервале от 600 до 1000°C (рис. 5а). При этом неизменными факторами являлись продолжительность процесса спекания - 40 мин.; массовое соотношение данбурит: нефелиновые сиениты к сульфату натрия = 1:1:3.5; крупность частиц сырья от 0.1 до 0.3 мм. По окончании спекания с целью перевода компонентов состава спека в растворимую форму твердый остаток подвергался вначале водной при 100°C и продолжительности 60 мин, а затем азотнокислотной обработкам при 100°C, продолжительности 60 мин и концентрации кислоты – 10-15%. В фильтраатах определяли количество извлеченных в раствор компонентов.

Начало заметного разложения минералов состава данбуритовой и нефелиновых руд наблюдается при температуре 700°C, где степень извлечения компонентов из состава сырья находится выше 55-75%. Однако при этом значении температуры упорные бор- и алюминийсодержащие минералы, такие как: данбурит, гидроборацит, альбит, микроклин и биотит не претерпевают полного химического изменения и степень извлечения оксидов

находится в пределе, %: V_2O_3 – 57.1; Al_2O_3 – 75.0; Fe_2O_3 – 81.2; CaO – 63.7. Степень извлечения оксидов натрия и калия достигает 58-68%. Оптимальной температурой спекания реакционной массы, обеспечивающей максимальную степень извлечения её составляющих, можно считать 950-1000°C. В этом пределе температуры происходит изменение структуры данбурита. В системе $\text{CaO} - \text{V}_2\text{O}_3 - \text{SiO}_2$ при массовом отношении $\text{CaO} : \text{SiO}_2 = 0.9-1.0$ происходит образование твердой фазы, состоящей из $\text{CaO} \cdot \text{V}_2\text{O}_3$, $\text{CaO} : \text{SiO}_2$ и SiO_2 . Доскональное исследование продуктов спекания данбурита подтвердило образование этих соединений в соответствие со следующим преобразованием: $\text{CaO} \cdot \text{V}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2 \rightarrow \text{CaO} \cdot \text{V}_2\text{O}_3 + 2\text{SiO}_2$. При данной температуре также практически полностью разлагаются все трудно вскрываемые минералы, включая полевые шпаты: альбит, микроклин (ортоклаз) и др.

При этих условиях в жидкую фазу практически полностью переходят основные компоненты сырья. Степень извлечения компонентов находится выше 97%, а точнее для V_2O_3 – 98.0; Al_2O_3 – 97.5; Fe_2O_3 – 99.8; CaO – 98.9%. Также степень извлечения щелочных составляющих сырья – Na_2O , K_2O и MgO достигает 95.7-98.4%, то есть практически все минералы подвергаются химическому изменению, а в твердом остатке остаются оксид кремния, имеющий аморфную структуру, и примеси геля кремниевой кислоты.

Важным фактором, влияющим на разложение минералов состава руд и определяющим массу потока сырьевых материалов в технологической ветви, является массовое соотношение нефелиновых сиенитов и данбурита к сульфату натрия (рис.3б). Влияние данного фактора исследовано в пределах массовых соотношений (данбурит : нефелин : сульфат натрия) от 1:1:1 до 1:1:5, то есть сырья: $\text{Na}_2\text{SO}_4 = 2:5$. Увеличение массовых соотношений сырья к сульфату натрия от 1:1:1 до 1:1:3 приводит к постепенному извлечению компонентов состава спека, где степень извлечения оксидов достигает, %: V_2O_3 – 82.0; Al_2O_3 – 84.5; Fe_2O_3 – 91.8; CaO – 85.9%. При значениях массовых соотношений сырья к Na_2SO_4 , равных 1:1:3 и 1:1:3.5, степень извлечения компонентов достигает максимума и находится на уровне 95-99.9%. Оптимальным массовым соотношением сырья к сульфату натрия является: 1:1:3.5, где степень извлечения оксидов составляет, %: V_2O_3 – 97.3; Al_2O_3 – 98.5; Fe_2O_3 – 99.9; CaO – 98.4.

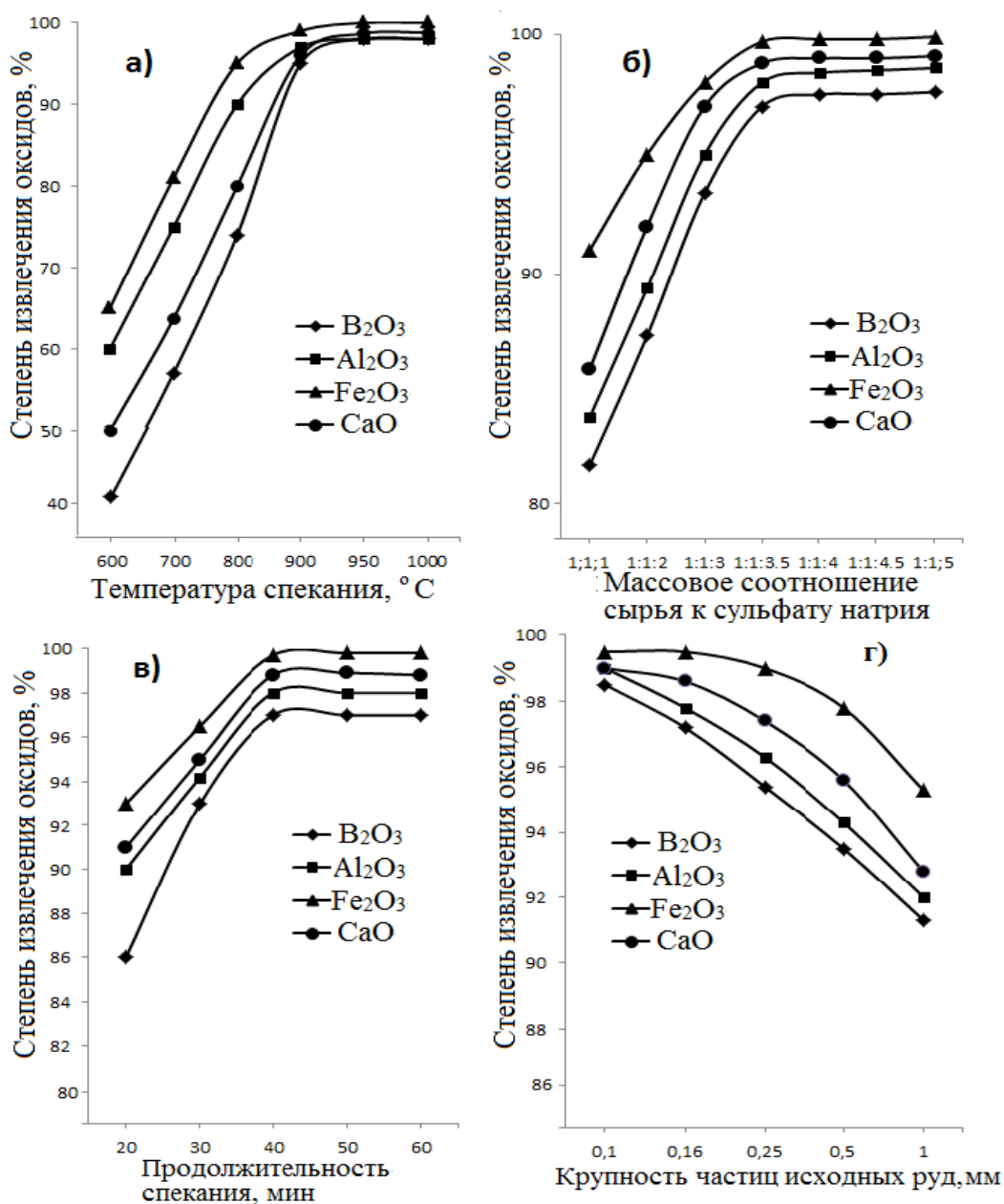


Рис 5. Зависимость степени извлечения оксидов бора, алюминия, железа и кальция от температуры спекания (а); массового соотношения руд к сульфату натрия (б); продолжительности спекания (в) и размера частиц исходной руды.

Продолжительность процесса спекания руд с сульфатом натрия исследована в интервале от 20 до 60 мин. (рис 5в). Длительность процесса спекания, равная 40 мин, обеспечивает достаточное разложение минералов из состава сырья. Степень извлечения компонентов из состава спека достигает значений от 96.5 до 99.9%, в частности: B₂O₃ – 97.4; Al₂O₃ – 98.6; Fe₂O₃ – 99.9; CaO – 98.8%. Минералы состава спека при соотношении жидкой к твердой фазе (Ж:Т), равной 1:12, имеют большую скорость разложения. Первыми в

течение 2 - 4 минут начала реакции взаимодействия разлагаются минералы кальцит, нефелин и гранат. Далее в течение 10 - 30 минут разлагаются датолит и гидроборцит на 60-70%. Такие минералы, как данбурит (обожжённый), амфибол, биотит, пироксены, монтмориллонит, глинистые минералы и др. разлагаются постепенно в течение 60 мин. и более.

Влияние размера частиц данбуритового и нефелинового сырья на степень извлечения их составляющих компонентов изучено в пределе от 0.1 до 1.0 мм (рис.5г). Массовое соотношение сырья к сульфату натрия 2:3.5. В интервале величин фактора диаметра частиц от 0.1 до 0.2 мм наблюдается максимальное разложение сырья с извлечением компонентов, составляющих спёк от 96 до 99%.

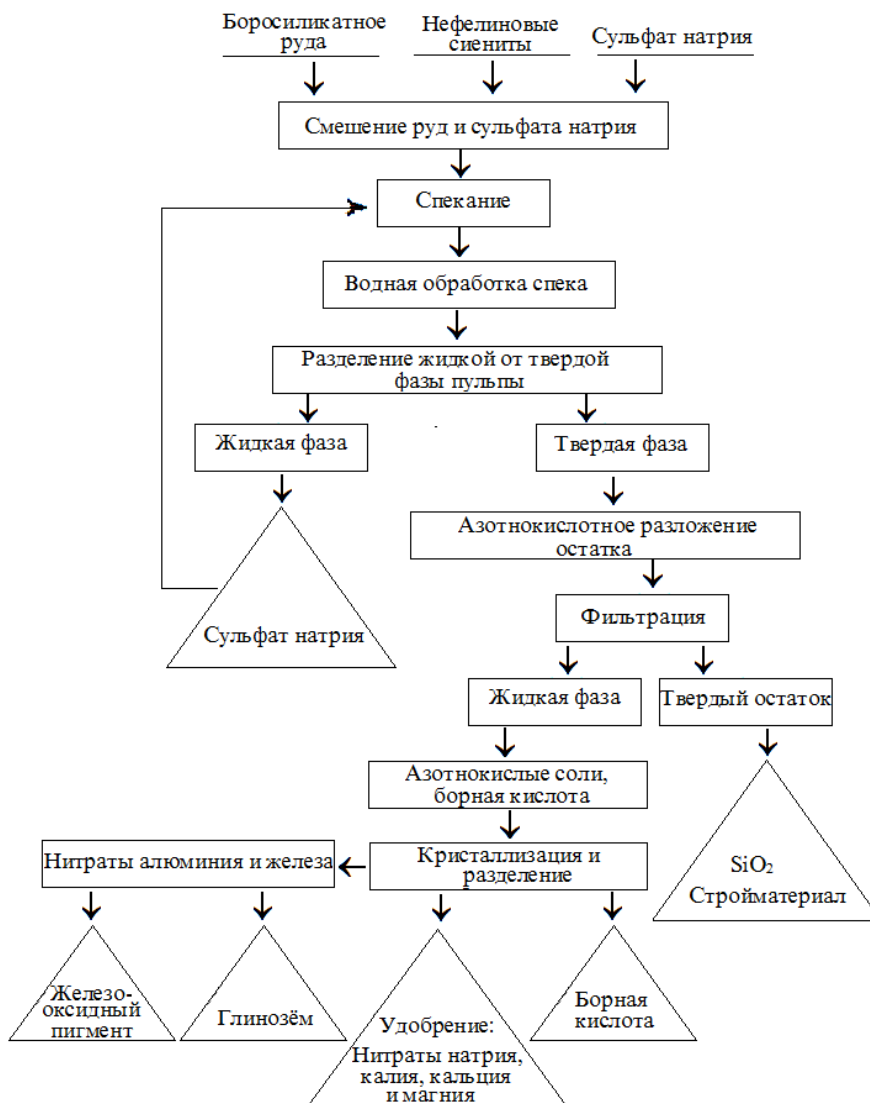


Рис. 6. Технологическая схема совместной комплексной переработки нефелиновых сиенитов и данбуритов методом спекания с сульфатом натрия

На основании проведённых исследований и полученных результатов предложена следующая принципиальная технологическая схема совместной комплексной переработки нефелиновых сиенитов Турпи и данбуритовых руд Ак-Архарского месторождения (рис. 6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Склярова Г.Ф. Минерально-сырьевой потенциал неметаллических полезных ископаемых Дальнего востока для обеспечения металлургического комплекса экономики. – Известия вузов. Горный журнал, 2014 №1, 33 с.
2. Мирсаидов У.М., Мирзоев Д.Х., Бобоев Х.Э. Комплексная переработка аргиллитов и каолиновых глин Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2016, 92 с. 3. Мирсаидов У.М., Курбонов А.С., Маматов Э.Д. Кислотное разложение боросиликатных руд. – Душанбе: Дониш, 2015, 90 с.
3. Курбонов А.С., Маматов Э.Д., Машаллах Сулаймони Б.А., Мирсаидов У.М. Разложение исходного данбурита азотной кислотой. – ДАН РТ, 2010, т.52, №12, с. 865-869.
4. Курбонов А.С., Баротов А.М., Якубов З.Т., Маматов Э.Д., Мирсаидов У.М. Уксуснокислотное разложение обожжённого данбуритового концентрата. – ДАН РТ, 2015, т.58, №5, с.395.

Д.О.ДАВЛАТОВ, Ш.Б.НАЗАРОВ, Ж.А.МИСРАТОВ, У.М.МИРСАИДОВ

ТЕХНОЛОГИЯ И КОРКАРДИ МУШТАРАКИ НЕФЕЛИНҲОИ СИЕНИТИИ ТУРПИ ВА ДАНБУРИТҲОИ КОНИ АК-АРХАРИ ТОҶИКИСТОН БО УСУЛИ ГУДОЗИШ

*Институти химияи ба номи В.И.Никитини
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Маълумот оид ба натиҷаҳои коркарди комплекси нефелинҳои сиенитии Турпи ва данбуритҳои кони Ак-Архари Тоҷикистон оварда шудааст. Шароити мусоиди гузариши протсессии гудохтани маъдан муайян карда шудааст. Нақшаи технологӣ коркарди комплекси маъдан бо бадаст овардани маҳсулот ба монанди нурии минералӣ, глинозем, кислотаи бор, пигменти оксидҳои оҳан, коагулянт ва маҳсулотҳои сохтумонӣ пешниҳод карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: нефелинҳои сиенитӣ, данбурит, сульфати натрий, коркарди комплекси, гудозиш, глинозем, кислотаи бор, нақшаи технологӣ.

D.O.DAVLATOV, Sh.B.NAZAROV, Zh.A.MISRATOV, U.M.MIRSAIDOV

**TECHNOLOGY JOINT PROCESSING OF NEPHELINE SYENITES OF TURPI
AND DAMBURITES OF THE AK-ARKHAR DEPOSITS OF TAJIKISTAN BY
SINTERING WITH SODIUM SULFATE**

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

The results of complex processing of nepheline syenites of Turpy and danburate of Ak-Arkhar fields of Tajikistan by the sintering method with sodium sulfate are presented. The optimal conditions for the ore sintering process are determined. The principal technological scheme of complex processing of ores with obtaining of such products as fertilizer, alumina, boric acid, iron oxide pigments, coagulants and building materials is offered.

Key words: nepheline syenites, danburate, sodium sulfate, complex processing, sintering, alumina, boric acid, technological scheme.

УДК 661.663÷661.665

О.А.АЗИЗОВ, С.И.БАКУМ, А.БАДАЛОВ, У.М.МИРСАИДОВ

**ОСОБЕННОСТИ ВЫДЕЛЕНИЯ И ОЧИСТКИ АЛЮМОГИДРИДОВ
КАЛИЯ, РУБИДИЯ И ЦЕЗИЯ**

*Агентство по ядерной и радиационной безопасности АН Республики Таджикистан
Поступила в редакцию 29.11.2018 г.*

Приведены результаты очистки алюмогидридов калия, рубидия и цезия. Найдены условия очистки и получения кристаллов с содержанием основного вещества более 99%.

Ключевые слова: алюмогидриды, калий, рубидий, цезий, очистка, кристаллизация.

Диглим (диметиловый эфир диэтиленгликоля) – единственный общий доступный растворитель для алюмогидридов калия, рубидия и цезия – $MAIH_4$ ($M = K, Rb, Cs$). Для очистки и выделения в индивидуальном состоянии $MAIH_4$ необходимо знать растворимость $MAIH_4$ в диглиме.

В работах [1-5] изучены растворимости алюмогидридов щелочных металлов в широком интервале температур. Используя данные по растворимости $MAIH_4$ и зная прочности сольватов алюмогидридов калия, рубидия и цезия в диглиме, можно найти условия выделения $MAIH_4$ в чистом виде.

Из диаграмм растворимости $MAIH_4$ -диглим [3-5] видно, что $KAIH_4$, $RbAlH_4$ и $CsAlH_4$ образуют сольваты при низких температурах. При высоких температурах $MAIH_4$ кристаллизуется в несольватированном виде.

Существование области кристаллизации несольватированных $MAIH_4$ позволяет обосновать наиболее рациональные условия кристаллизации тяжёлых тетрагидратов щелочных металлов высокой степени чистоты из растворов в диглиме.

Технические алюмогидриды калия, рубидия и цезия, полученные по методике [7] путём обмена алюмогидридов натрия с хлоридами калия, рубидия и цезия в условиях об-

Адрес для корреспонденции: Мирсаидов Улмас Мирсаидович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Рудаки, 25, Агентство по ядерной и радиационной безопасности АН РТ. E-mail: inf@nrta.tj

разования NaAlH_4 в расплаве, очищали от следов NaAlH_4 путём обработки тетрагидрофураном (ТГФ), затем промывали пентаном и сушили.

Методика получения чистых алюмогидридов калия, рубидия и цезия состояла в получении полностью осветлённых совершенно прозрачных диглимовых растворов и последующей высокотемпературной кристаллизацией с образованием крупных кристаллов. Кристаллы MAlH_4 получали в два этапа: I этап - получение прозрачных растворов алюмогидридов калия, рубидия и цезия; II этап – кристаллизация MAlH_4 .

Измельчённые в порошок технические алюмогидриды калия, рубидия или цезия растворяли в очищенном от перекисей и влаги диглиме из расчёта 10 г вещества на 100 мл растворителя. При этом порошки алюмогидридов калия, рубидия и цезия постепенно присыпали при энергичном перемешивании к диглиму в условиях, исключающих доступ воздуха.

Для растворения использовали снабжённую мешалкой трехгорловую колбу. После 20-25-минутного перемешивания содержимое колбы переводили в отстойник, где оставляли на 1-2 часа. При этом из смеси осаждаются лишь крупные частицы, а полного осветления раствора не наблюдается даже при длительном отстаивании. Поэтому раствор центрифугировали со скоростью 3-4 тыс. оборотов в минуту. При этом раствор осветляется за 15-20 минут и легко декантируется с хорошо уплотнённого осадка.

Совершенно прозрачный раствор алюмогидридов калия, рубидия или цезия подаётся в кристаллизатор, которым может служить соединённая с ловушкой и вакуум-насосом круглодонная колба. Колбу нагревали на масляной бане до 100°C , при охлаждении ловушки до -78°C . В системе создавали вакуум до 10^{-2} мм рт. ст.

Кристаллизацию прекращали после упаривания раствора до $1/4$ исходного объёма. Большая степень упаривания допустима лишь в случае чуть желтоватого прозрачного маточника.

По окончании кристаллизации содержимое колбы охлаждали, кристаллы отделяли от маточника декантацией и промывали их тетрагидрофураном при перемешивании. Вместе с тетрагидрофураном кристаллы переносили на неплотный стеклянный фильтр №1, отфильтровывали и трижды, при хорошем перемешивании, промывали тетрагидрофураном.

Полученные крупнокристаллические препараты алюмогидридов калия, рубидия или цезия сушили на фильтре 10-15 минут в вакууме до приобретения ими сыпучести и затем пересыпали в ёмкость для окончательной сушки. Сушку вели при постепенном повышении температуры до 120°C в течение 1-1.5 часов в вакууме. В полученном веществе определяли содержание гидридного водорода, алюминия и в отдельных случаях - щелочного металла. Выделенные крупнокристаллические препараты алюмогидридов калия, рубидия и цезия имеют высокую степень чистоты и представляют собой хорошо сформированные, блестящие кристаллы в виде ромбоэдров в случае KAlH_4 , RbAlH_4 или октаэдров в случае CsAlH_4 (рис.1-3)

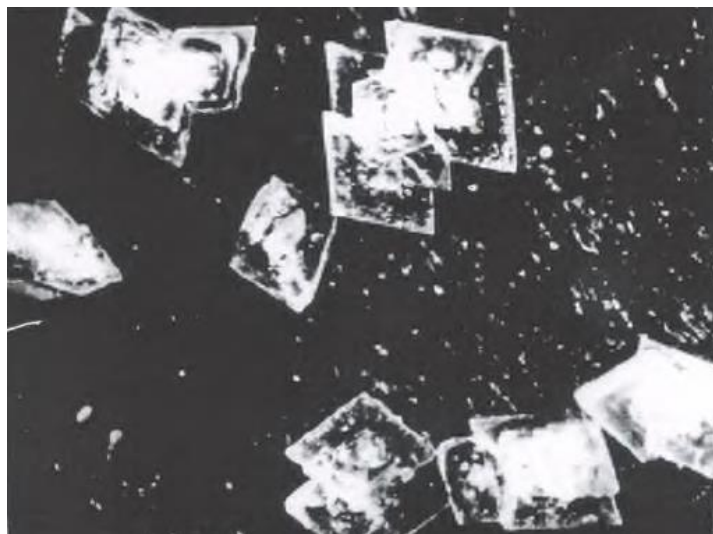


Рис.1. Вид кристаллов KAlH_4 в поле зрения микроскопа.



Рис.2. Вид кристаллов RbAlH_4 в поле зрения микроскопа.

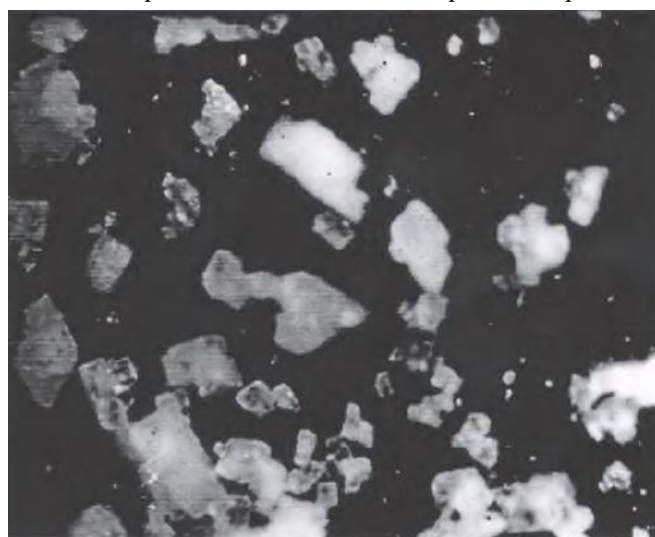


Рис.3. Вид кристаллов CsAlH_4 в поле зрения микроскопа.

По литературным данным, выделение и очистка технических алюмогидридов калия, рубидия, цезия из диглимовых растворов достигается высаливанием толуолом или эфиром [6, 7]. Такой способ приводит к осаждению мелкокристаллического вещества и образованию взвеси хлопьевидного белого вещества.

Предложенная методика очистки алюмогидридов калия, рубидия и цезия даёт возможность получить крупнокристаллические вещества высокой степени чистоты, более 99% (таблица).

Таблица

Опыты выделения и очистки т алюмогидридов калия, рубидия и цезия

МАИ ₄		КАИ ₄	КАИ ₄	КАИ ₄	КАИ ₄	RbAIH ₄	CsAIH ₄
Взято	МАИ ₄ техниче-ский, г	43.3	48.2	39.8	58.1	46.2	
	Диглим, мл	400	400	400	550	400	
Жидкость для промывания кристаллов МАИ ₄		эфир	бензол	ТГФ	ТГФ	ТГФ	
Вид кристаллов		непрозрачные кристаллы	полу-прозрачные кристаллы	прозрачные ромбоэдрические кристаллы	ромбоэдрические кристаллы	октаэдрические кристаллы	
Получено перекристаллизованного МАИ ₄ , г		22.8	21.1	20.6	28.3	26.2	
Анализ препаратов	H ₂	найдено	5.72	5.72	5.74	3.43	2.43
		вычислено	5.75	5.75	5.75	3.46	2.46
	Al	найдено	38.05	38.18	38.20	23.02	16.35
		вычислено	38.48	38.48	38.48	23.16	16.46
	M=K, Rb, Cs	найдено	55.38	55.32	55.46	-	-
		вычислено	55.77	55.77	55.77	73.38	81.08

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирсаидов У.М., Бакум С.И., Дымова Т.Н. Диаграмма растворимости системы LiAIH₄-диглим и изотерма растворимости в системе LiAIH₄-КАИ₄-диглим при 25°С. – Изв. АН СССР, сер. хим., 1973, №2, с.259-261.
2. Дымова Т.Н., Мирсаидов У.М., Бакум С.И. Диаграмма растворимости системы NaAIH₄-диметиловый эфир диэтиленгликоля. – Изв. АН СССР, сер. хим., 1972, с.2108-2110.
3. Бакум С.И., Мирсаидов У.М., Кост М.Е., Дымова Т.Н. Диаграмма растворимости системы КАИ₄-диметиловый эфир диэтиленгликоля. – Изв. АН СССР, сер. хим., 1972, с.2096-2098.
4. Бакум С.И., Мирсаидов У.М., Дымова Т.Н. Диаграмма растворимости системы RbAIH₄-диметиловый эфир диэтиленгликоля. – Изв. АН СССР, сер. хим., 1972, №11, с.2106-2107.
5. Бакум С.И., Мирсаидов У.М., Дымова Т.Н. Диаграмма растворимости системы CsAIH₄-диметиловый эфир диэтиленгликоля. – Изв. АН СССР, сер. хим., 1973, №2, с.440-441.
6. Жигач А.Ф., Станисевич Д.С. Химия гидридов. – Л.: Химия, 1969.
7. Бакум С.И., Ерешко С.Ф. Получение алюмо- и галогидридов тяжёлых щелочных металлов. – Изв. АН СССР, сер. хим., 1981, №10, с.2183-2185.

О.А.АЗИЗОВ, С.И.БАКУМ, А.БАДАЛОВ, У.М.МИРСАИДОВ

ХУСУСИЯТҲОИ ҶУДО ВА ТОЗА КАРДАНИ АЛЮМОГИДРИДҲОИ КАЛИЙ, РУБИДИЙ ВА СЕЗИЙ

Агентии амнияти ядрой ва радиатсионии

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақолаи мазкур натиҷаҳои тозакунии гидридҳои алюминии калий, рубидий ва сезий оварда шудаанд. Ҳангоми ҳосил намудани кристаллҳо бо миқдори таркибии бештар аз 99% ёфт шудааст.

Калимаҳои калидӣ: гидриди алюминий, калий, рубидид, сезий, тозашавӣ, кристаллизатсия.

O.A.AZIZOV, S.I.BAKUM, A.BADALOV, U.M.MIRSAIDOV

SPECIFIC OF ISOLATION AND CLEANING ALUMOHYDRIDES OF POTASSIUM, RUBIDIUM AND CESIUM

Nuclear and Radiation Safety Agency, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

The results of the purification of aluminum hydrides of potassium, rubidium, and cesium are presented. The conditions for cleaning and obtaining crystals with a basic substance content of more than 99% were found.

Key words: aluminum hydrides, potassium, rubidium, cesium, purification, crystallization.

УДК 541.63+547+789

М.Д.ИСОБАЕВ, Э.Х.ПУЛАТОВ, Б.Г.МАВЛОНОВ, Т.Х.АБДУЛЛАЕВ, М.И.ДЖУМАЕВА,
И.Ф.РАХИМОВ

АМИДО- И СУЛЬФАМИДЫ 1,3,4-ТИАДИАЗИНОВ

Институт химии им. В.И.Никитина АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 14.02.2018 г.

С целью выявления различия в фармакологической активности N-замещенных 5- и 6-членных гетероциклических соединений, проведен синтез ряда амидо- и сульфамидов 1,3,4-тиадиазинов. Взаимодействием тиосемикарбазона α -гидроксикетона с ангидридом уксусной кислоты в присутствии трифторуксусной кислоты получены амидотиадиазины. Сульфамидотиадиазины синтезированы путем взаимодействия аминотиадиазина с толуолсульфохлоридом. Проведена корреляция способности синтезированных веществ к агглютинации (антикоагулянтной способности) с данными квантовохимических расчетов синтезированных структур. Сделан вывод об энергетической, наиболее стабильной конфигурации промежуточных и конечных продуктов.

Ключевые слова: ацил- и сульфамидопроизводные, аминотиадиазины, тиосемикарбазоны, квантовохимический расчет.

Проблема связи в ряду «структура - активность» до настоящего времени остается одной из основных для фармацевтической и органической химии. В этом направлении проводятся целенаправленные исследования в Институте химии Академии наук Республики Таджикистан.

В наших предыдущих работах показано, что внутримолекулярные взаимодействия по типу водородных связей влияют на химические свойства и степень активности ацетиленовых производных посредством стабилизации одной из возможных конформаций [1, 2].

Адрес для корреспонденции: Исабаев Музафар Джумаевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: coordin@yandex.com

Характер распределения электронной плотности в молекулах может вносить существенный вклад в их фармакологическую активность, так как влияет на характер взаимодействия биологически активных соединений с рецептором.

Для изучения возможной связи фармакологической активности и электронного строения молекул, отмеченной выше, нами получены амидо- и сульфамиды 1,3,4-тиадиазинов 2, 3, которые являются аналогами синтезированных ранее амидов и сульфамидов тиазолидинов у которых выявлена бактерицидная активность [3, 4].

В работе [5] показано, что ряд производных аминотиадиазинового ряда обладают антиагрегационной активностью по отношению к тромбоцитам крови. В частности, установлено, что наличие тиенильного радикала в 5 положении молекулы 1,3,4-тиадиазина [6] сокращает начало действия препарата до 1 часа, тогда как активность известного препарата «Клопидогрела» начинает проявляться в пределах 48 часов.

В настоящей работе с целью получения новых биологически активных соединений проведена модификация аминотиадиазина 1б, представленного на схеме 1, путем введения амидной и сульфамидной функций к атому азота незамещенной аминогруппы. Конечными продуктами являются амиды и сульфамиды 1,3,4-тиадиазинов (схема 1).

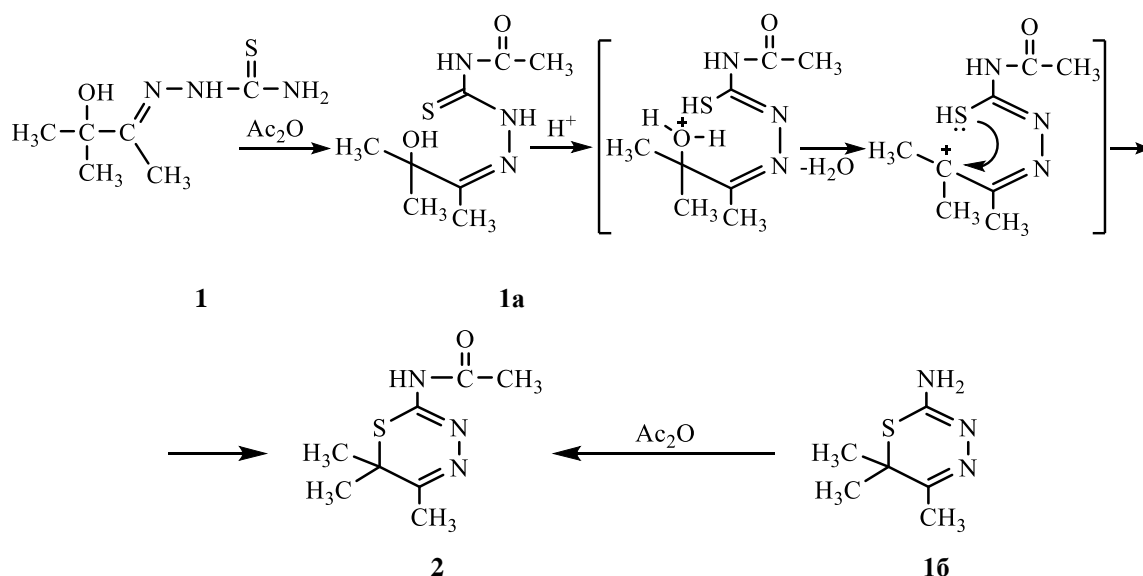


Схема 1. Встречный (альтернативный) синтез амида тиадиазина 2.

Первый путь включает взаимодействие 1,3,4-тиадиазина 1б с уксусным ангидридом или хлорангидридом. Данное направление реакции использовано также для доказательства механизма реакции циклообразования путем встречного синтеза.

Второй вариант синтеза амидотиадиазина включает две стадии, первой из которых является образование амида карбазона 1а исходя из гидроксикетонов, синтез которых описан в работе [7]. Далее проводится циклизация полученного амида карбазона. Следует

отметить, что инициирование этой стадии происходит лишь в присутствии каталитических количеств трифторуксусной кислоты (ТФУК).

Полученный двумя альтернативными путями амид тиадиазина имеет идентичные физико-химические константы, ИК- и ПМР-спектры.

Как было отмечено выше, взаимодействие тиосемикарбазона α -гидроксикетона 1 с хлорангидридом или ангидридом уксусной кислоты, реакция завершается ацилированием по свободной аминогруппе с образованием продукта 1а.

Доказательства строения 1а получены по данным спектров ПМР, где имеются сигналы при 5.0 и 5.5 м.д., соответствующие протонам ОН и NH (1) групп. Сигнал при 1.90 м.д. соответствует ацетильной группе.

Метильные группы при С-5 и С-6 атомах углерода находятся в области 1.40-2.25 м.д. Амидный протон проявляется при 10.6 м.д.

Очисткой на хроматографической колонке с Al_2O_3 получено 1.78 г (82%) кристаллической субстанции ацилтиосемикарбазида 1а, с т. пл. 186°C (из этанола).

Ацилтиосемикарбазид 1а при обработке трифторуксусной кислотой претерпевает циклизацию с образованием N-(5,6,6-триметил-6Н-1,3,4-тиадиазин-2-ил) ацетамида 2 с экзоциклической N-ацильной группой (схема 1). Получено 1.55 г (78%) кристаллической субстанции амидотиадиазина 2 с т. пл. 196°C.

Образование амидов в случае соединений 1а и 2 сопровождается появлением в ИК-спектрах новых полос поглощения при 1710 cm^{-1} , характерной для колебания карбонильной группы, и при 3000 cm^{-1} , отнесенной к колебаниям (-NH) группы.

При образовании ациламинотиадиазина 2 отмечено появление полос поглощения в области 1670-1610 cm^{-1} и 1575-1560 cm^{-1} , соответствующих эндоциклическим N=C и N-N связям.

В спектрах ПМР соединения 2 проявляется сигнал при 2.12 м.д., который отнесен к протонам ацетильной группы. Протоны CH_3 групп при С-5 и С-6 атомах углерода цикла проявляются в области 3.75 и 1.48 м.д. Сигналы при 9.5 м. д. отнесены к амидной NH группе.

Для сравнения степени влияния заместителя, связанного с экзоциклической аминогруппой на электронную конфигурацию и биологическую активность тиадиазинов, проведен синтез сульфида 5,6,6-триметил-1,3,4-тиадиазина 3. В качестве акцептора образующейся в процессе реакции соляной кислоты использован пиридин (схема 2). Получено 2.73 г (88%) сульфаминотиадиазина 3 с т. пл. 102°C (гексан-этанол 1:1).

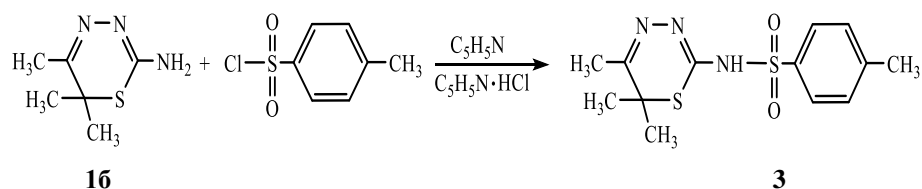


Схема 2. Синтез сульфаминотиадиазина 3.

Направление сульфогруппы по экзоциклической аминогруппе следует из данных ИК- и ПМР-спектров.

В ИК-спектре соединения 3, имеются полосы поглощения при 1360-1180 см^{-1} , характерные для колебаний сульфогруппы. Полоса поглощения, отвечающая колебаниям NH группы, проявляется при 3000 см^{-1} .

В ПМР-спектре сульфаминотиадиазина 3 наблюдаются два дублета с КССВ $J = 10$ Гц и химическими сдвигами 7.5 и 7.7 м.д., которые отнесены к двум парам неэквивалентных протонов фенильного кольца. Широкий синглетный сигнал при 10.2 м.д. отнесен к протону NH группы. Сигналы метильных групп при C-5 и C-6 атомах углерода проявляются при 1.46 и 2.11 м.д.

С целью изучения степени влияния природы экзоциклического заместителя тиадиазина на характер распределения электронной плотности в цикле проведен квантово-химический расчёт минимума энергии молекул 1, 1а,б, 2 и 3 с использованием гибридного метода теории функционала плотности DFT/B3LYP (базис 3-21G) программы квантово-химических расчётов «Gaussian».

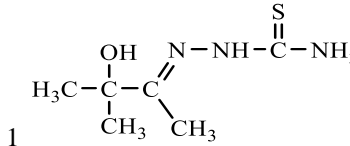
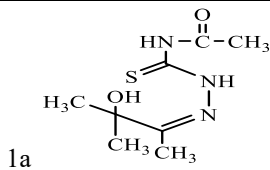
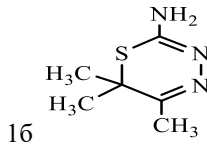
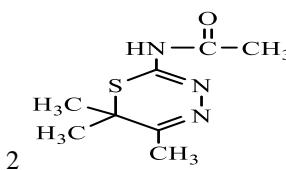
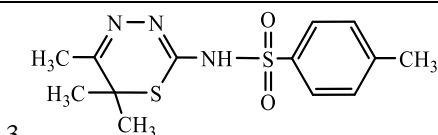
В качестве индикатора стабильности тиадиазинового цикла принят минимум энергии, данные о котором представлены в таблице. Наименьший показатель минимума энергии соответствует тиадиазину 1б, содержащему в качестве заместителя аминогруппу. Такое состояние благоприятно для сопряжения неподелённой электронной пары атома азота с π -электронами цикла.

В противоположность этому наибольшее значение минимума энергии соответствует соединению 1а, практически исключая конъюгацию. При введении заместителя к атому азота аминогруппы можно отметить в целом нарушение стабильности цикла, а так же больший эффект такого влияния в случае сульфамидов.

Предварительный фармакологический скрининг «in vitro» амидов тиадиазина 1а, 2 показал, что они противодействуют агглютинации, то есть коагуляции и седиментации тромбоцитов в кюветах с тромбоцитарной плазмой.

Соединение 1а замедляло выпадение в осадок тромбоцитов, индуцированных аспирином (концентрация 1 ммоль) в 1.2 раза в сравнении с контрольным образцом. Соединение 3 снижало тромбообразование в аналогичных условиях в 1.4 раза по сравнению с контрольным опытом.

Таблица 1

Соединение	Расчетный минимум энергии
 <p>1</p>	$E_{\min} = -54.2242$ кДж/моль
 <p>1a</p>	$E_{\min} = -266.9623$ кДж/моль
 <p>16</p>	$E_{\min} = -49.4889$ кДж/моль
 <p>2</p>	$E_{\min} = -62.4099$ кДж/моль
 <p>3</p>	$E_{\min} = -100.3094$ кДж/мол

Экспериментальная часть

Температура плавления определена на столике «Voetius» с температурным шагом $4^{\circ}\text{C}/\text{мин}^{-1}$.

Спектры ПМР получены на спектрометре «VARIAN MR-400» с рабочей частотой 400 МГц ^1H . Концентрация исследуемых образцов в растворе ДМСО составляла 5%, химические сдвиги определены относительно ТМС (внутренний стандарт).

ИК спектры сняты на приборе «Perkin-Elmer Spectrum-65». Чистоту полученных соединений контролировали тонкослойной хроматографией на стандартных пластинках «Silufol UV-254» в системах этанол и гексан-этанол (1:1). Элементный состав определен на приборе «Perkin-Elmer-2400».

Колоночную и тонкослойную хроматографию проводили на Al_2O_3 , элюент: гексан-этанол 1:1.

Эксперименты по изучению влияния 1,3,4-тиадиазинов на функциональную активность тромбоцитов *in vitro*, проводили с использованием венозной крови здоровых

кроликов ($n=8$), которую получали путём пункции внутренней ушной вены и стабилизировали раствором гепарина в соотношении 5:1. Объектом исследования в экспериментах явилась тромбоцитарная плазма, получаемая путём центрифугирования гепаринизированной венозной крови. Для приготовления тромбоцитарной плазмы, гепаринизированную кровь кролики центрифугировали в пластиковых пробирках в течение 10 мин при 1000 об/мин. Агрегацию тромбоцитов изучали методом светорассеяния на агрометрах («Viola» Россия). Агрегацию вызывали путём добавления проагрегантов (ацетилсалициловая кислота) в кювету с полученной тромбоцитарной плазмой.

Синтез N(4)-ацетил-N(1)-(3-гидрокси-3-метилбутан-2-илиден) тиогидразонокарбаминовой кислоты 1a. Растворяли 1.75 г (0.01 моль) тиосемикарбазона 3-гидрокси-3-метилбутан-2-она 1 в 30 мл ледяной уксусной кислоте, затем прибавили 1.12 г (0.011 моль) ангидрида уксусной кислоты и нагревали до 80-90°C в течение 6 ч. Растворитель удаляли под пониженным давлением, остаток растворяли в этаноле и пропускали через хроматографическую колонку с Al_2O_3 . Получено 1.78 г (82%), т. пл. 186°C.

Найдено (%): C 44.15, H 6.88, N 19.26, S 14.67. $C_8H_{15}N_3O_2S$ (217.27).

Вычислено (%): C 44.22, H 6.95, N 19.33, S 14.75.

ИК-спектры: ν , cm^{-1} 1320, 1165 (C-C), 1420 (C-N), 1515 (N-N), 1640 (C=N), 1700 (C=O), 750 (C-S), 3230-3050 (NH).

Спектры ПМР (ДМСО- d_6), δ , м.д. 1.40 (с. 6H, $(CH_3)_2$ от C(6)), 2.25 (с. 3H, CH_3 от C(5)), 1.90 (с. 3H, CH_3 от Ac), 5.07 (с. 1H, OH), 5.27 (с. 1H, NH), 10.6 (с. 1H, SH).

Синтез N-(5,6,6-триметил-6Н-1,3,4-тиадиазин-2-ил) ацетамида 2. Получены аналогично соединению 1a из 1.75 г (0.01 моль) 3-гидрокси-3-метилбутан-2-он тиосемикарбазона 1 в присутствии ТФУК. Получено 1.55 г (78%), т. пл. 196°C.

Найдено (%): C 48.19, H 6.45, N 25.02, S 16.01. $C_8H_{13}N_3OS$ (199.07).

Вычислено (%): C 48.26, H 6.53, N 21.09, S 16.07.

ИК-спектры: ν , cm^{-1} 1325, 1170 (C-C), 1425 (C-N), 1520 (N-N), 1650 (C=N), 1705 (C=O), 750 (C-S), 3240-3060 (NH).

ПМР (ДМСО- d_6), δ , м.д. 1.48 (с. 6H, $(CH_3)_2$ от C(6)), 3.75 (с. 3H, CH_3 от C(5)), 2.12 (с. 3H, CH_3 от Ac) 9.45 (с. 1H, NH).

Синтез 4-метил-N-(5,6,6-триметил-6Н-1,3,4-тиадиазин-2ил) толуолсульфамида 3. Получен аналогично соединению 2 из 1.57 г (0.01 моль) 2-амино-5,6,6-триметил-6Н-1,3,4-тиадиазина 1б и 1.90 г (0.01 моль) п-толуолсульфохлорида. Получено 2.73 г (88%), т.пл. 102°C.

Найдено (%): C 50.12, H 5.39, N 13.43, S 20.51. $C_{13}H_{17}O_2N_3S_2$ (311.11).

Вычислено (%): C 50.18, H 5.46, N 13.50, S 20.57.

ИК-спектры: ν , cm^{-1} 1360-1185 (SO_2), 830, 1620 ($=CH_2$), 1640 (C=N), 700, 1500 (C=C от Ph).

PMР (CCl₄), δ, м.д. 1.46 (с. 6H, (CH₃)₂ от C(6)), 2.11 (с. 3H, CH₃ от C(5)), 2.41 (с. 3H, CH₃ от Tz), 7.28 (д. 1H, =CH_A от Tz, ³J =1.0 Гц), 7.87 (д. 1H, =CH_B от Tz, ³J =1.0 Гц), 10.9 (с. 1H, NH).

ЯМР¹³C (DMCO-D₆), δ, м.д. 162.7 (C-5), 155.9 (C-2), 143.1 (C 1- C 4 от Tz), 130.0 (C 3- C 5 от Tz), 128.6 (C 2- C 6 от Tz), 41.9 (C-6), 25.0 (2 x CH₃ - 6), 21.5 (CH₃ от Tz), 18.7(C-5 CH₃).

ЛИТЕРАТУРА

1. Исобаев М.Д., Файзилов И.У., Собиров С.С., Конформация изомерных Z, E ениновых триолов и диоксиальдегидов. – Теоретическая и экспериментальная химия, 1990, № 6, с. 681-688.
2. Исобаев М.Д., Венгер Э.Х., Глазунова Е.М. ЯМР хиральных молекул. II. Внутримолекулярные взаимодействия в тиазолидинтионах. – ЖОрХ, 1986, т. 22, вып.5, с.978-9833.
3. Isobaev M.J., Pulatov E.Kh. N-Acyl and N-sulfonyl derivatives of thiazolidines. – Russ. Chem. Bull., 1996, v.45, №12, pp.2820-2822.
4. Исобаев М.Д., Абдуллаев Т.Х., Пулатов Э.Х., Хайдаров К.Х. Биологически активные производные ацетилена. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 1999, №1, с.43-45.
5. Васильева Т.М., Макаров В.А., Чупахин О.Н., Сидорова Л.П., Перова Н. М., Русинов В.Л. Антиагрегационные свойства соединений класса 1,3,4-тиадиазина. – Гематология и трансфузиология, 2008, № 4, т. 53, с. 12-15.
6. Чупахин О.Н., Сидорова Л.П., Перова Н.М., Чарушин В.Н., Русинов Л.В., Муляр А.Г. – Пат.2259371РФ. Замещенные 5R¹,6R²-1,3,4-тиадиазин-2-амины и содержащие их фармацевтические композиции в качестве фармакологически активных средств, обладающих антикоагулянтным и антиагрегатным действием. Заявл. 05.05.2003, опубл. 27.08.2005.
7. Pulatov E.Kh., Isobaev M.J., Mavlonov B.G. Hydroxyketones in the thiadiazine cycle formation. – Russ. Chem. Bull., 2016, v. 65, №11, pp. 2475-2478.

М.Д.ИСОБАЕВ, Э.Х.ПУЛАТОВ, Б.Г.МАВЛОНОВ, Т.Х.АБДУЛЛАЕВ, М.И.ДЖУМАЕВА,
И.Ф.РАХИМОВ

АМИД- ВА СУЛФАМИДҲОИ 1,3,4-ТИАДИАЗИНҲО

Институти кимиёи ба номи В.И.Никитини

Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Бо мақсади муайян намудани гуногунӣ дар фаолнокии фармакологии ҳосилаҳои гетеросиклии 5- ва 6-халқаги N-ҷойивазшуда як қатор амид- ва сулфамиди 1,3,4-тиадиазинҳо синтез карда шуд. Ҳангоми таъсиркунии тиосемикарбазони α-гидроксиетон ба ангидриди кислотаи сирко дар иштироки кислотаи сефторасетат амидотиадиазинҳо ҳосил карда шудаанд. Бо роҳи таъсиркунии аминотиадиазин бо толуолсулфохлорид сулфамиди тиадиазин синтез карда шудаанд. Сохти моддаҳои синтезкардашуда аз руи ҳисобкунии квантокимиёвӣ гузаронида шуд. Дар асоси ин маълумотҳо хулоса дар бораи шадидияти энергетикӣ конфигуратсионӣ маҳсулотҳои мобайни ва охира бароварда шуд.

Калимаҳои калидӣ: атсил- ва сулфамидҳосилаҳо, аминотиадиазинҳо, тиосемикарбазонҳо, ҳисоботи квантокимиёвӣ.

M.J.ISOBAEV, E.KH.PULATOV, B.G.MAVLONOV, T.KH.ABDULLAEV, M.И.DJUMAeva,
I.F.RAKHIMOV

AMIDES AND SULFAMIDES OF 1,3,4-THIADIAZINES

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, of the Academy of Sciences Republic of Tajikistan

By interaction of thiosemicarbazone α -hydroxyketone with the acetic anhydride which canalized by trifluoroacetic acid the amidothiadiazines were prepared. Sulfamidothiadiazines were synthesized by the reaction of aminothiadiazine with toluene sulfur chloride. The quantum-chemical calculation of synthesized compounds carried out and based on results of minimum energy calculations. The conclusion about stable configuration of the intermediate and final products was done.

Key words: acyl- and sulfamide derivatives, aminothiadiazines, thiosemicarbazones, quantum-chemical calculation.

УДК 001.89. 669.4+574

З.Х.ГАЙБУЛЛАЕВА, Г.Т.НАСЫМОВ

**ПОЛНОФАКТОРИАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА
ГИДРОМЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО ИЗВЛЕЧЕНИЯ СВИНЦА
ИЗ ГАЛЕНИТСОДЕРЖАЩЕГО КОНЦЕНТРАТА БАЛИ (ТУРЦИЯ)**

Таджикский технический университет им. академика М.С.Осими

Поступила в редакцию 31.11.2018 г.

В статье исследуется процесс гидрометаллургического извлечения свинца из галенитсодержащих концентратов месторождения Бали (Турция) в растворе азотной кислоты. Полученные данные экспериментов были проанализированы с использованием полнофакториального экспериментального метода расчёта и с помощью статистического программного обеспечения Minitab 15.0.

Ключевые слова: свинец, концентрат, гидрометаллургический способ, выщелачивание, экология.

Будучи широко распространённой в природе свинцовая руда в основном состоит из галенита (PbS) и его окисленных форм, таких как англезит (PbSO₄) и церуссит (PbCO₃). Наряду с этим, как правило, встречаются и другие сульфидные минералы, такие как сфалерит (ZnS), пирит (FeS₂) и халькопирит (CuFeS₂) [1]. Применение гидрометаллургических методов для извлечения свинца из концентратов считается целесообразным в свете последних достижений в этой области [2].

Азотная кислота является хорошим окислителем для сульфидных минералов с учетом высокой растворимости нитрата свинца. Для оценки влияния различных параметров на процесс растворения сульфидных минералов, были использованы статистические методы для определения степени и размера воздействия отдельных факторов и взаимодействия между различными факторами на процесс извлечения свинца. Данное исследование охватывает анализ процесса растворения галенитсодержащего концентрата в рас-

Адрес для корреспонденции: Гайбуллаева Зумрат Хабибовна. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. акад. Раджабовых, 10, Таджикский технический университет. E-mail: zumratihabib@rambler.ru

творе азотной кислоты с использованием полного факториального дизайна с помощью статистической программы Minitab 15.0 [3]. Влияния основных факторов (температуры, концентрации и времени) и эффектов взаимодействий между этими параметрами изучены путем применения вариативной техники ANOVA. Основным определяющим результатом является степень извлечения свинца из галенитсодержащего концентрата (см. табл. 1).

Таблица 1

Химический состав галенитсодержащего концентрата Бали

Концентрат Бали	
Элементный состав	Содержание, % масс.
Pb	50.613
S	16.426
Zn	16.233
Fe	4.849
Cu	2.687
Si	8.17
Al	0.866
K	-
Ca	0.703

Для анализа был применен полнофакториальный дизайн общего уровня $5^2 8^1$ с двумя повторениями. Факторы (температура, концентрация и время) и их взаимодействия указаны в табл. 2.

Таблица 2

Основные факторы и их взаимодействия

Основные факторы	Взаимодействие двух факторов	Взаимодействие трех факторов
Температура	Температура - Концентрация	Температура - Концентрация - Время
Концентрация	Температура - Время	
Время	Концентрация - Время	

Эксперименты проводились с частицами размером 63 мкм при постоянной скорости перемешивания в 400 оборотов в минуту. Дистиллированная вода и реагенты класса Merck были использованы для приготовления растворов. Растворение пробы концентрата проводилось в закрытом, перемешиваемом 1-литровом стеклянном реакторе с термостатом. В 500 мл раствора азотной кислоты с предварительно определенной концентрацией, после достижения желаемой температуры, добавляли 1 г концентрата. В определенные промежутки времени образцы раствора извлекали из реактора в течение 90 мин и разбавляли дистиллированной водой для определения концентрации свинца с использованием пламенного атомно-абсорбционного спектрометра. Каждый эксперимент проводился дважды, и среднее арифметическое полученных значений было использован для оценки результатов эксперимента.

Химический анализ состава проб концентрата проводили с РФС (Rigaku-ZSX Primus), элементарные и структурные анализы с SEM-EDX (Zeiss Supra 50 VP), фазового анализа с РДА (Rigaku Rint RAD 2000). Значения концентрации свинца в растворе для

выщелачивания были измерены с помощью пламенного атомно-абсорбционного спектрометра модели Spectra A.A. Измеренные значения отклика были проанализированы со статистическим программным обеспечением Minitab 15.0.

Для исследования основных факторов и их взаимодействия для галенитсодержащего концентрата Бали (Турция) был использован полнофакториальный дизайн общего уровня $5^2 8^1$. Экспериментальный дизайн включал в себя два переменных с пятью уровнями и одной переменной с восьмью уровнями. Таким образом, общее число экспериментов составляло 200 для каждой пробы галенитсодержащей пробы с двумя повторами. Основные параметры, их уровни и соответствующие коды, приведены в табл. 3.

Таблица 3

Факторы и их уровни с кодами

Фактор	Уровень								
	Коды	1	2	3	4	5	6	7	8
Температура, °C	x ₁	25	35	45	55	65	-	-	-
Концентрация, М	x ₂	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	-	-	-
Время, мин.	x ₃	5	10	15	20	30	50	70	90

Анализ параметров и их взаимодействий проводили с ANOVA для всех значений полученных результатов. Среднее значение двух определений степени выхода свинца из концентрата Бали с кодированными факторами и их уровнями приведены в табл. 4.

Таблица 4

Степень извлечения Pb и коды

Runs	Коды	Степень извлечения Pb из концентрата Бали, %
1	111	4.75
2	112	6.82
3	113	9.38
4	114	11.50
5	115	12.25
6	116	12.87
197	555	93.46
198	556	99.35
199	557	100.00
200	558	100.00
201	111	4.11
202	112	4.46
203	113	8.32
204	114	11.09
395	553	82.35
396	554	88.24
397	555	94.12
398	556	99.35
399	557	100.00
400	558	100.00

Обычно Таблица ANOVA используется для проверки равенства нескольких средних значений. Источник вариаций обозначает факторы и их взаимодействия, DF опреде-

ляет степень свободы, Seq SS означает сумму квадратов и MS среднее значение квадратов (AdjSS и Adj MS обозначают откорректированные значения SS и MS, соответственно). Распределение F используется для вывода о разнице между вариациями факторов. Таким образом, эффективность или неэффективность фактора может быть определена с помощью значения F в таблице ANOVA.

Значение P представляет собой статистическую вероятность тестов и является полезной для принятия решений. Ошибка включает в себя неэффективные параметры и их взаимодействия [3]. Таблица ANOVA, которая охватывает значимые эффективные факторы и их взаимодействия для степени извлечения Pb из концентрата месторождения Бали, приведена в табл. 5.

Таблица 5

Таблица ANOVA для значений выхода Pb для эффективных факторов галенитсодержащего концентрата месторождения Бали

Источник	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Температура	4	92985.2	92985.2	23246.3	5992.15	0.000
Концентрация	4	131075.1	131075.1	32768.8	8446.74	0.000
Время	7	85618.9	85618.9	12231.3	3152.83	0.000
Температура-Концентрация	16	8454.1	8454.1	528.4	136.20	0.000
Температура – Время	28	5263.9	5263.9	188,0	48.46	0.000
Концентрация – Время	28	3061.4	3061.4	109,3	28.18	0.000
Температура-Концентрация-Время	112	5780.0	5780.0	51.6	13.30	0.000
Ошибка	200	775.9	775.9	3.9		
Итого	399	333014.5				

Результаты этой таблицы показывают, что в дополнение к основным факторам, их взаимодействия (*температура и концентрация, температура и время, концентрация и время, температура, концентрация и время*) были эффективны в пределах 95% интервала уверенности. Несмотря на это, эффективность взаимодействий факторов на процесс остаётся в ограниченном диапазоне и не больше по величине по сравнению с основными факторами. Это показано на круговой диаграмме, изображающей эффективность основных факторов и взаимодействий между ними (рис.1).

Как видно из круговой диаграммы, тремя самыми большими факторами, действующими на значения выхода Pb, являются температура, концентрация и время в порядке убывания (42.8, 31.9 и 15.5% соответственно). Значение ошибки составляет 0.5%, что подтверждает правильность анализа. Проведенный регрессионный анализ дал уравнение регрессии, которое представляет процесс на 90.4% в пределах 95% интервала уверенности. Полученное уравнение выглядит следующим образом:

$$\text{Выход Pb} = - 20.7 + 0.528 x_1 + 9.03 x_2 - 0.384 x_3 + 0.217 x_1 \cdot x_2 + 0.0171 x_1 \cdot x_3 + 0.375 x_2 \cdot x_3 - 0.00717 x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, (1)$$

где: x_1 , x_2 , x_3 - температура (°C), концентрация кислоты (M) и время (мин.).

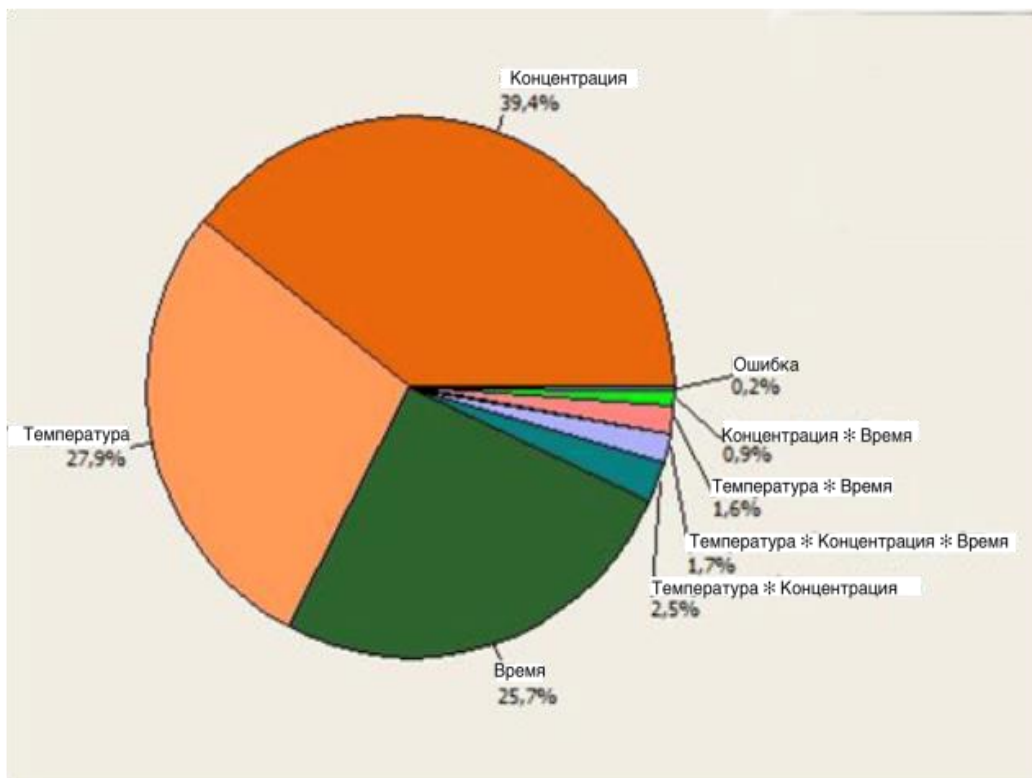


Рис. 1. Диаграмма значений выхода Рb для галенитного концентрата месторождения Бали

На рис. 2 приведены графики основных факторов, в которых показаны эффективность каждого фактора.

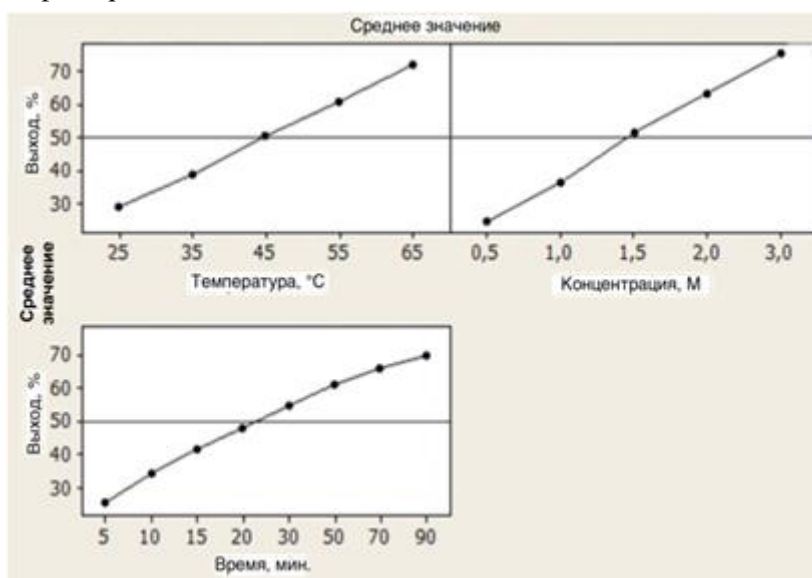


Рис.2. Влияние основных факторов на выход Рb для Балийского концентрата.

Взаимные взаимодействия между факторами приведены на рис. 3, где показывается зависимость одного фактора по отношению к другим факторам.

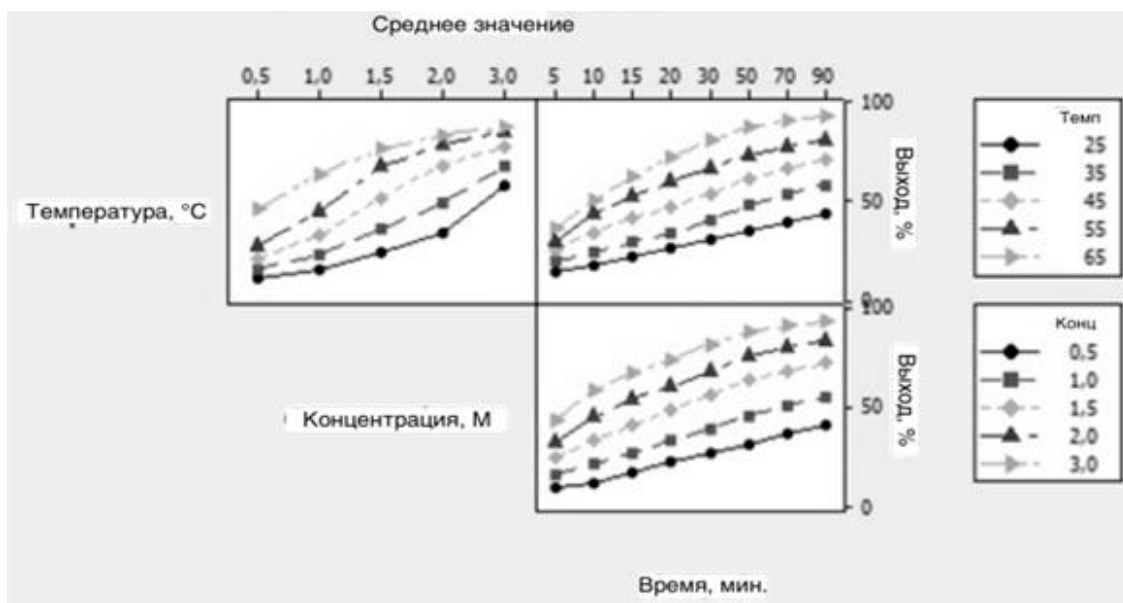


Рис. 3. Влияние взаимодействий факторов на выход Рb для Балийского концентрата.

Все факторы имеют почти линейный эффект на процесс выщелачивания с относительно близкими интенсивностями. Но все-таки некоторые незначительные отклонения могут наблюдаться при определении оптимальной точки для эффекта фактора в конкретном интервале.

В работе [4] утверждают, что процесс растворения галенита ускоряется с увеличением концентрации азотной кислоты до 0.75 М в присутствии перекиси водорода. Однако в работе [5] исследователи достигли полноты растворения при более высоких температурах (80-85°C) и концентрации 1.5 М кислоты.

В нашей работе скорость растворения Балийского галенита показал небольшой, но почти линейный рост для всех концентраций кислоты и процесс растворения концентрата заканчивается при концентрации кислоты 3.0 М и температуры 55°C. Наиболее эффективным фактором для Балийского галенита является концентрация кислоты из-за пассивации поверхности галенита, вызванного различием в его минералогическом составе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chenglong Z., Youchai Z., Cuixiang G., Xi H., Hongjiang L. Leaching of zinc sulfide in alkaline solution via chemical conversion with lead carbonate. – J. Hydrometallurgy, 2008, v. 90, pp.19-25.
2. Raghavan R., Mohanan P.K., Swarnkar S.R. Hydrometallurgical processing of lead-bearing materials for the recovery of lead and silver as lead concentrate and lead metal. – J. Hydrometallurgy, 2000, v. 58, pp.103-116.
3. Montgomery D.C. Design and analysis of experiments. – John Wiley and Sons, New York, 684 p.
4. Adebayo A.O., Ipinmoroti K.O., Ajayi O.O. Leaching of sphalerite with hydrogen peroxide and nitric acid solutions. – Journal of Minerals and Materials Characterization and Engineering, 2008, v. 5(2), pp.167-177.

5. Kholmogorov A.G., Pashkov G.L., Mikhlina E.V., Shashina L.V., Zhizhaev A.M. Activation of hydrometallurgical treatment of PbS in nitric solutions. – J. Chemistry for Sustainable Development, v. 11, pp.879–881

З.Х.ГАЙБУЛЛОЕВА, Г.Т.НАСЫМОВ

**БА НАҚШАГИРИИ ПУРАФАКТОРИАЛИИ РАВАНДИ
ГИДРОМЕТАЛЛУРГИИ ЧУДОКУНИИ СУРБ АЗ ХОКАҲОИ ЧАВҲАРО-
НИДАШУДАИ ГАЛЕНИТДОРИ БАЛИ (ТУРКИЯ)**

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ

Дар мақола раванди гидрометаллургии чудокунии сурб аз хокаҳои чавҳаронидашудаи галенитдори Кони Бали (Туркия) дар маҳлуи кислотаи нитрогенӣ оварда шудааст. Натиҷаҳои ба дастмадаи озмоишӣ бо усули ҳисоби пурафакториалӣ ва истифодаи барномаи Минитаб 15.0 таҳлил карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: сурб, хокаҳои чавҳаронидашуда, усули гидрометаллургия, ҳалкунӣ, экология.

Z.H.GAIBULLAEVA, G.T.NASIMOV

**FULL-FACTORIAL PLANNING OF THE PROCESS OF HYDROMETALLUR-
GICAL EXTRACTION OF LEAD FROM THE GALENITE-CONTAINING BA-
LI CONCENTRATE (TURKEY)**

M.S.Osimi Tajik Technical University

The article examines the process of hydrometallurgical extraction of lead from galena-containing concentrates from the Bali deposit (Turkey) in a solution of nitric acid. The obtained experimental data were analyzed using the full-factorial experimental method of calculation and using the statistical software Minitab 15.0.

Key words: lead, concentrate, hydrometallurgical method, leaching, ecology.

УДК 669.715:620.193

Э.Н.СИРОДЖИДИНОВ, И.Н.ГАНИЕВ, З.Р.ОБИДОВ

**ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЕ ОКИСЛЕНИЕ СПЛАВА Zn55Al,
ЛЕГИРОВАННОГО ИНДИЕМ, В ТВЁРДОМ СОСТОЯНИИ**

*Институт химии им. В.И.Никитина АН Республики Таджикистан
Поступила в редакцию 18.07.2018 г.*

Термогравиметрическим методом исследовано взаимодействие сплава Zn55Al, легированного индием, с кислородом воздуха в интервале температур 473-623 К, в твёрдом состоянии. Определены кинетические параметры процесса высокотемпературного окисления сплавов. Показано, что добавки индия в пределах 0.01-0.05 мас.% незначительно увеличивают окисляемость исходного сплава, а продуктами окисления сплавов являются оксиды Al₂O₃, ZnO, In₂O₃.

Ключевые слова: сплав Zn55Al, индий, термогравиметрический метод, высокотемпературное окисление, скорость окисления, энергия активации.

Сплавы цинка с алюминием используются как анодные материалы для защиты от коррозии стальных изделий, конструкций и сооружений. Известно, что для защиты стали от коррозии разработано несколько типов Zn-Al покрытий и протекторов [1-7]. В связи с этим актуальность исследования определяется необходимостью изучения процессов взаимодействия металлических сплавов с различными газообразными и агрессивными средами при высоких температурах. Для повышения коррозионной стойкости покрытий и коэффициента полезного действия протекторов из указанных сплавов при защите от коррозии часто используются металлы подгруппы галлия [8-10].

Цель работы заключалась в изучении влияния температуры и химического состава на окисляемость сплавов системы Zn-Al-In, в твёрдом состоянии. Для решения поставленной задачи применяли метод термогравиметрии с непрерывным взвешиванием образцов [11].

Адрес для корреспонденции: Сироджидинов Эркинджон Низомидинович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: z.r.obidov@rambler.ru

На рис. 1 приведены кинетические кривые изменения удельной массы образцы сплавов (g/s) в зависимости от времени взаимодействия (t) с кислородом газовой фазы и от температуры.

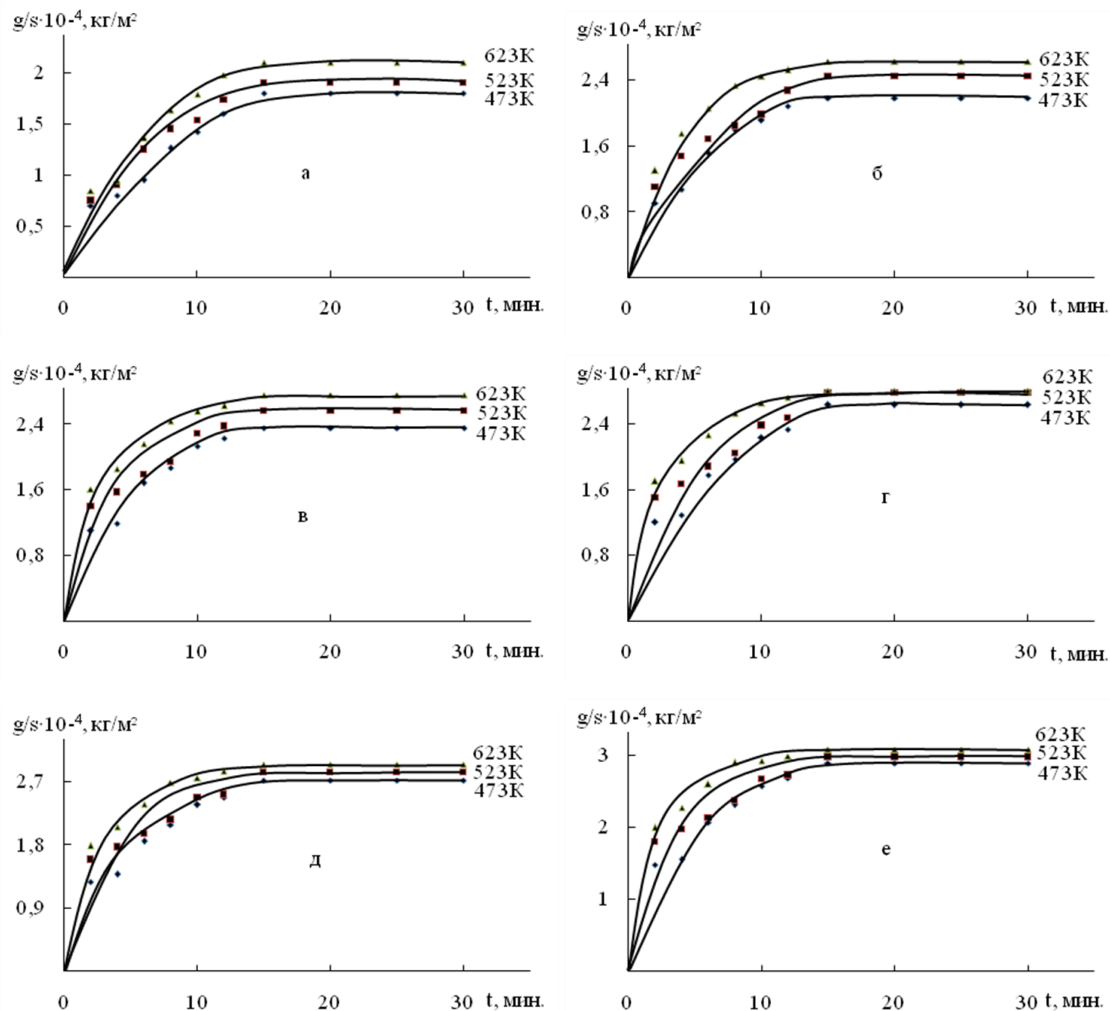


Рис. 1. Кинетические кривые процесса высокотемпературного окисления сплава Zn55Al (а), легированного индием, мас. %: 0.01 (б); 0.05 (в); 0.1 (г); 0.5 (д); 1.0 (е).

Сформировавшаяся оксидная плёнка в начальных стадиях процесса, по-видимому, не обладает достаточными защитными свойствами, о чём свидетельствует рост скорости окисления исследованных сплавов (рис. 1). Значение скорости окисления сплава Zn55Al при температурах 473, 523 и 623 К составляет $3.04, 3.32$ и $3.73 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, соответственно (таблица).

Таблица

Кинетические и энергетические параметры процесса высокотемпературного окисления сплава Zn55Al, легированного индием, в твёрдом состоянии

Содержание индия в сплаве, мас.%	Температура окисления, К	Истинная скорость окисления $K \cdot 10^{-4}$, $\text{кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$	Эффективная энергия активации окисления, кДж/моль
-	473	3.04	154.4
	523	3.32	
	623	3.73	
0.01	473	4.55	132.8
	523	4.81	
	623	5.07	
0.05	473	4.72	128.5
	523	5.00	
	623	5.35	
0.1	473	5.06	124.4
	523	5.38	
	623	5.65	
0.5	473	5.43	118.6
	523	5.79	
	623	6.03	
1.0	473	5.66	115.9
	523	5.91	
	623	6.41	

Взаимодействие сплава Zn55Al с индием различной концентрации с кислородом газовой фазы при исследованных температурах значительно отличается от окисления исходного сплава Zn55Al. Линейная зависимость сохраняется в течение 12-15 мин, далее по мере образования оксидной плёнки характер окислительного процесса переходит в гиперболический и формирование защитной оксидной поверхности заканчивается к 30 мин (рис. 1). Эффективная энергия активации процесса высокотемпературного окисления исследованных сплавов изменяется от 154.4 до 115.9 кДж/моль (таблица).

В координатах $\lg K - 1/T$ кривые процесса высокотемпературного окисления представляются прямыми линиями (рис. 2), по углу наклона которых рассчитана эффективная энергия активации сплавов. Среди легированных сплавов максимальной скоростью окисления обладает сплав Zn55Al с 1.0 мас.% индия, что соответствует энергии активации 115.9 кДж/моль, в то время как значение последнего для исходного сплава равно 154.4 кДж/моль (таблица).

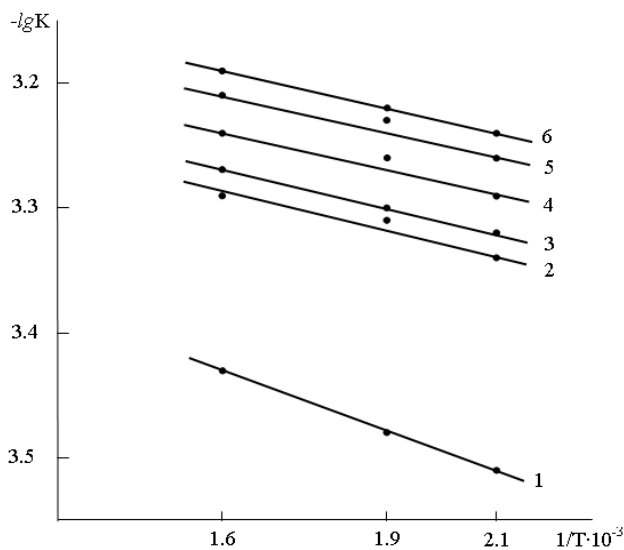


Рис. 2. Зависимость $\lg K$ от $1/T$ для сплава $Zn55Al(1)$, легированного индием, мас. %: 0.01(2), 0.05(3), 0.1(4), 0.5(5), 1.0(6).

Кинетические кривые процесса высокотемпературного окисления сплавов системы $Zn-Al-In$ характеризуются монотонным повышением истинной скорости окисления и снижением эффективной энергии активации при содержании легирующего компонента в исходном сплаве $Zn55Al$ до 0.1 мас.%. Однако добавки 0.5 и 1.0 мас.% индия несколько увеличивают окисляемость исходного сплава (рис. 3).

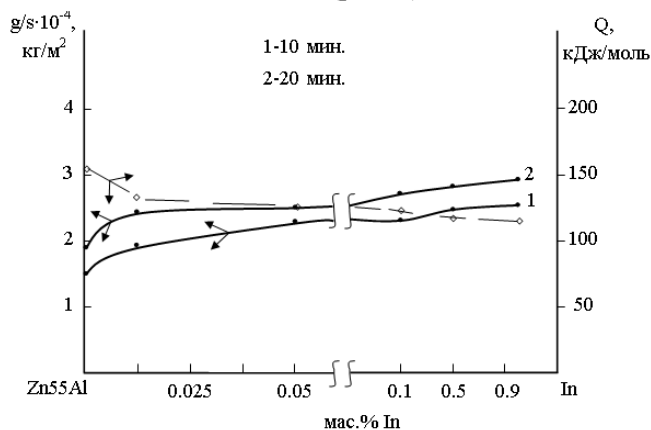


Рис. 3. Изохроны окисления (523 К) сплава $Zn55Al$, легированного индием.

Исследуя продукты окисления сплавов, в частности оксидную плёнку, которая формируется при нагреве на поверхности образцов, можно получить важную информацию об их механизме окисления. Оксидная плёнка – продукт взаимодействия металла с кислородом воздуха, образуется на поверхности металла, снижая его химическую активность.

Продукты окисления, образующиеся при окислении легированных индием сплавов, исследованы методом рентгенофазового анализа [12]. Видно, что продукты окисле-

ния изученных сплавов на примере легированного 0.05 мас.% индием сплава состоят из оксидов Al_2O_3 , ZnO и In_2O_3 (рис. 4).

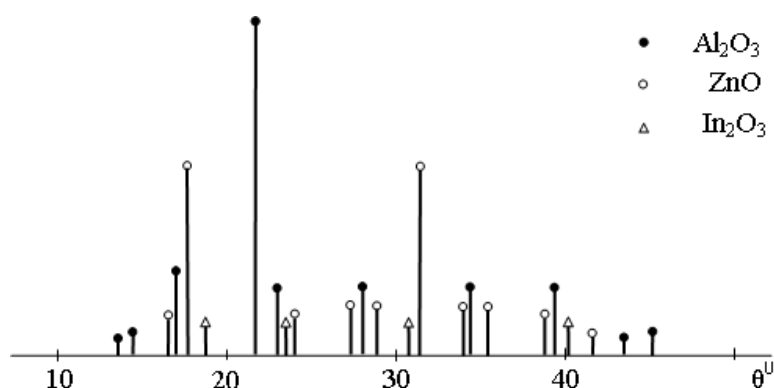


Рис. 4. Штрихдифрактограммы продуктов окисления сплава Zn55Al , содержащего 0.05 мас.% индия.

В целом, по данным экспериментальных исследований кинетики высокотемпературного окисления сплава Zn55Al , легированного индием, в твёрдом состоянии кислородом газовой фазы, установлено, что сплавы с 0.5 и 1.0 мас.% индия, по сравнению с низколегированными сплавами (0.01-0.1 мас.%), обладают наибольшим значением истинной скорости окисления и наименьшей величиной эффективной энергии активации. Выявлено, что легирующий компонент незначительно увеличивает окисляемость сплава Zn55Al в пределах 0.01-0.05 мас.% индия. Определено, что продукты окисления исследованных сплавов состоят из оксидов Al_2O_3 , ZnO и In_2O_3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Виткин А.И., Тейндл И.И. Металлические покрытия листовой и полосовой стали. – М.: Металлургия, 1971, 493 с.
2. Кечин В.А., Люблинский Е.Я. Цинковые сплавы. – М.: Металлургия, 1986, 247 с.
3. Алиханова С.Д., Ганиев И.Н., Обидов З.Р. Кинетика окисления сплавов Zn5Al и Zn55Al , легированного неодимом. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2012, №3(148), с. 92-97.
4. Обидов З.Р. Влияние pH среды на анодное поведение сплава Zn5Al , легированного бериллием и магнием. – Известия СПбГТИ (ТУ), 2015, №32(58), с. 52-55.
5. Амини Р.Н., Ганиев И.Н., Обидов З.Р., Ганиева Н.И. Анодное поведение сплава Zn55Al , легированного бериллием, в среде электролита NaCl . – ДАН РТ, 2010, т. 53, № 2, с. 131-134.
6. Обидов З.Р. Влияние pH среды на анодное поведение сплава Zn55Al , легированного бериллием и магнием. – Журнал прикладной химии, 2015, т. 88, № 9, с. 1306-1312.
7. Amini R.N., Irani M.B., Ganiev I.N., Obidov Z.R. Galfan I and Galfan II doped with calcium, corrosion resistant alloys. – Oriental Journal of Chemistry, 2014, v. 30, № 3, pp. 969-973.
8. Амини Р.Н., Ганиев И.Н., Обидов З.Р., Ганиева Н.И. Влияние добавок магния на анодное поведение сплава Zn55Al , в среде электролита NaCl . – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2009, №4(137), с. 78-82.

9. Обидов З.Р. Теплофизические свойства и термодинамические функции сплава Zn55Al, легированного бериллием, магнием и празеодимом. – Теплофизика высоких температур, 2017, т. 55, № 1, с. 146-149.
10. Одинаева Н.Б., Ганиев И.Н., Обидов З.Р., Амини Р.Н. Потенциодинамическое исследование сплава Zn+0.5% Al, легированного таллием. – ДАН РТ, 2014, т. 57, № 8, с. 686-689.
11. Обидов З.Р., Ганиев И.Н. Физикохимия цинк-алюминиевых сплавов с редкоземельными металлами. – Душанбе: ООО «Андалеб-Р», 2015, 334 с.
12. Васильев Е.К., Назмансов М.С. Качественный рентгеноструктурный анализ. – Новосибирск: Наука, 1986, 200 с.

Э.Н.СИРОДЖИДИНОВ, И.Н.ГАНИЕВ, З.Р.ОБИДОВ

ОКСИДШАВИИ БАЛАНДҲАРОРАТИИ ХҶЛАИ Zn55Al, КИ БО ИНДИЙ ЧАВҲАРОНИДА ШУДААСТ, ДАР ҲОЛАТИ САХТ

*Институти химияи ба номи В.И.Никитини
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Бо усули термогравиметрӣ таҳқиқоти баҳамтаъсироти хӯлаи Zn55Al, ки бо индий чавҳаронида шудааст, бо оксигени ҳаво дар ҳудуди ҳарорати 473-673 К, дар ҳолати сахт анҷом дода шудааст. Нишондиҳандаҳои кинетикии раванди оксидшавии баландҳарорати хӯлаҳо муайян карда шудааст. Нишон дода шудааст, ки иловаи индий дар ҳудуди 0.01-0.05%-и вазн оксидшавии хӯлаи аввалияро каме зиёд менамоянд ва маҳсули оксидшавии хӯлаҳо ин оксидҳои Al₂O₃, ZnO ва In₂O₃ мебошанд.

Калимаҳои калидӣ: хӯлаи Zn55Al, индий, усули термогравиметрӣ, оксидшавии баландҳароратӣ, суръати оксидшавӣ, энергияи фаъол.

E.N.SIRODJDINOV, I.N.GANIEV, Z.R.OBIDOV

HIGH-TEMPERATURE OXIDATION OF Zn55Al ALLOY, DOPED WITH INDIUM, IN THE FIRM CONDITION

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

The thermogravimetric method the interaction of Zn55Al alloy, doped with indium, with air oxygen in an interval to temperature 473-623K in the firm condition is investigated. Kinetic parameters of process of high-temperature oxidation of alloys are defined. It has been shown, that additives of indium within 0.01-0.05 wt.% slightly increase oxidability of an initial alloy, and products of oxidation of alloys are oxides Al₂O₃, ZnO ва In₂O₃.

Key words: Zn55Al alloy, indium, thermo gravimetric a method, high-temperature oxidation, speed of oxidation, energy of activation.

УДК 669.054:669.071

И.Ш.АХМАДШОЕВ*, Н.П.МУХАМЕДИЕВ, А.Х.САФИЕВ, Р.С.РАФИЕВ*, ДЖ.Р.РУЗИЕВ,
Ш.С.ДЖУМАЕВ**, Х.САФИЕВ

**ТЕХНОЛОГИЯ ПРОИЗВОДСТВА ФЛЮСА С ПРИМЕНЕНИЕМ
ЭЛЕКТРОЛИТНОГО ОБОРОТА**

ГУ «Научно-исследовательский институт металлургии» ГУП «ТалКо»,

**Таджикский национальный университет,*

*** Филиал Национального исследовательского технологического университета*

«МИСиС» в г. Душанбе

Поступила в редакцию 19.11.2018 г.

Изучена зависимость температуры плавления флюса от содержания компонентов шихты. Определен оптимальный состав шихты: промышленные отходы – 60%, флюоритовый концентрат ООО «ТалКо Флюорит» – 10% и электролитный оборот производства алюминия – 30%. По результатам проведенных исследований разработана принципиальная технологическая схема производства флюса на основе электролитного оборота производства алюминия.

Ключевые слова: флюоритовый концентрат, электролитный оборот, флюс, рафинирование, промышленные отходы.

Для защиты поверхности алюминиевого расплава от контакта и взаимодействия с окружающей средой применяют флюсы на основе хлоридов и фторидов щелочных металлов, функции которых заключаются в снижении потерь металла в составе шлака [1]. В связи с этим большое внимание со стороны исследователей [2,3] уделяется поиску новых высокоэффективных, экологически безвредных рафинирующих и рафинирующе-модифицирующих составов, обеспечивающих высокую стабильность получаемых результатов.

В данной статье рассмотрены технологические основы получения флюса с применением электролитного оборота производства алюминия. Для разработки новой рецептуры флюса были использованы отходы ОАО «Таджикхимпром», флюоритовый концентрат

Адрес для корреспонденции: Сафиев Хайдар. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Х.Хакимзаде, 17, ГУ «Научно-исследовательский институт металлургии» ГУП «ТалКо». E-mail: inmet.talco@mail.ru, h.safiev@mail.ru.

ООО «ТалКо Флюорит» и электролитный оборот ГУП «ТалКо». Химический состав основных сырьевых компонентов представлен в табл.1.

Таблица 1

Химический состав используемого сырья и флюса (мас.%)

№ п/п	Химический состав	Промышленные отходы	Флюоритовый концентрат	Оборотный электролит	Флюс
1	CaCO ₃	-	0.489	-	0.0489
2	Fe ₂ O ₃	0.018	0.051	0.053	0.0318
3	SiO ₂	1.83	0.329	0.011	1.1342
4	Al ₂ O ₃	-	-	1.37	0.411
5	P ₂ O ₅	-	-	0.086	0.0258
6	AlF ₃	-	-	13.2	3.96
7	CaCl ₂	7.6	-	-	4.56
8	Na ₃ AlF ₆	-	-	73.27	21.981
9	NaCl	89.43	-	-	53.658
10	CaF ₂	-	97.94	-	9.794
11	Na ₂ SO ₄	-	-	5.84	1.752
Температура плавления, °C		780	1360	1050	710

Как видно из табл. 1, в составе хлорсодержащих отходов ОАО «Таджикхимпром» содержится более 97% хлоридов натрия и кальция, способствующих рафинированию алюминия. В составе электролитного оборота содержится более 86% фтористых солей, что дает возможность понизить температуру плавления шихты.

Одной из основных характеристик флюса является температура его плавления, которая зависит от соотношения компонентов шихты. В табл. 2 приведены данные по зависимости температуры плавления флюса от содержания компонентов шихты.

Таблица 2

Состав и температура плавления шихты

№	Состав компонентов шихты, %			Температура плавления, °C
	отходы ОАО «Таджикхимпром»	оборотный электролит производства алюминия	флюоритовый концентрат	
1	80	10	10	780
2	75	15	10	780
3	70	15	15	740
4	70	20	10	720
5	70	10	20	750
6	60	25	15	730
7	60	30	10	710
8	60	20	20	740
9	60	10	30	770
10	60	15	25	770
11	50	25	25	750

№	Состав компонентов шихты, %			Температура плавления, °С
	отходы ОАО «Таджикхимпром»	оборотный электролит производства алюминия	флюоритовый концентрат	
12	50	40	10	710
13	50	30	20	720
14	50	20	30	780
15	50	15	35	805
16	50	35	15	700
17	40	40	20	700
18	40	50	10	680
19	40	40	20	730
20	40	30	30	790
21	40	20	40	820
22	30	50	20	740

В результате проведенных исследований подобран состав шихты, включающий: отходы ОАО «Таджикхимпром» – 60%, флюоритовый концентрат – 10% и электролитный оборот – 30%. Температура плавления составила 710°С, флюс обладает покровно-рафинирующими свойствами по отношению к первичному алюминию.

Для определения химического состава сырьевых компонентов шихты использован рентгенофазовый анализ (рис.1).

Как видно из рентгенограммы отходов ОАО «Таджикхимпром» (рис.1а), основные линии относятся к хлоридам натрия и кальция. Линии на рентгенограммах оборотного электролита и флюоритового концентрата (рис. 1 б,в) относятся к криолиту, фториду алюминия, глинозему и флюориту. Рентгенограммы шихты оптимального состава (рис. 1г) показывают содержание хлоридов натрия и кальция, а также фторидов натрия и алюминия, что подтверждает результаты химического анализа исходного вещества и конечного продукта.

В миксере №8 литейного отделения (ЛО-2) ГУП «ТАЛКО» с использованием 50 кг полученного флюса успешно проведены опытно-промышленные испытания. В ходе проведения испытаний были определены физико-химические показатели полученного флюса. Сопоставительные результаты анализов, включающие данные об использованных и используемых предприятием флюсов, представлены в сводной табл.4.

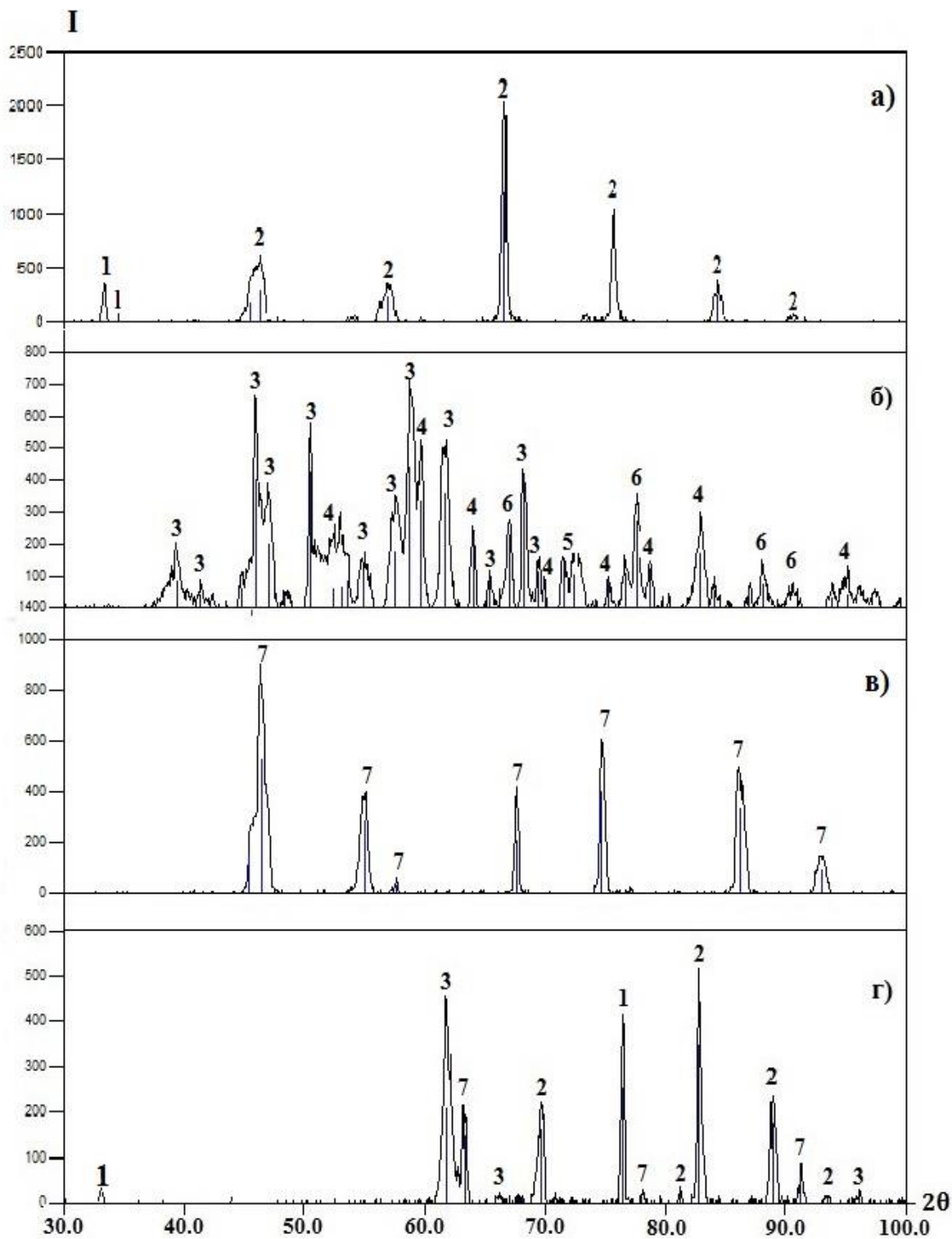


Рис. 1. Рентгенограммы: отходы ОАО «Таджикхимпром» (а), оборотный электролит производства алюминия (б), флюоритовый концентрат ООО «ТалКо Флюорит» (в), шихта (г).

1 – хлорид кальция ($CaCl_2$); 2 – хлорид натрия ($NaCl$); 3 – криолит (Na_3AlF_6);
4 – фторид алюминия (AlF_3); 5 – кварц (SiO_2); 6 – глинозем (Al_2O_3), 7 – флюорит.

Таблица 4

Физико-химические и экологические показатели флюсов разного состава

Марка флюса	Темп. Плав., °С	Уд. расход, кг/т Al	Содержание металла в шлаке, %	Содержание в рабочей зоне, мг/м ³		
				HF _{газ}	пыль	F _{тв}
Заводской	720	1.0	31.3	0.34	2.5	0.31
ФПР-23	690	0.96	27.9	0.41	2.8	0.33
Экспериментальный	710	0.91	29.5	0.041	1.33	0.07

Примечание: ПДК HF_{газ} = 0,5; Пыль = 6,0; F_{тв} = 0,5

Результаты опытно-промышленных испытаний свидетельствуют о том, что основные физико-химические характеристики и экологические показатели флюса с применением электролитного оборота производства алюминия – температура плавления, удельный расход, содержание металла в шлаке и содержание вредных веществ в рабочей зоне существенно не отличаются от аналогичных показателей традиционно применяемых флюсов и соответствуют нормативными показателями. Себестоимость полученного флюса значительно ниже себестоимости используемых флюсов. Результаты опытно-промышленных испытаний показали, что экспериментальный флюс с применением электролитного оборота производства алюминия можно рекомендовать к использованию в литейном производстве ГУП «ТАЛКО».

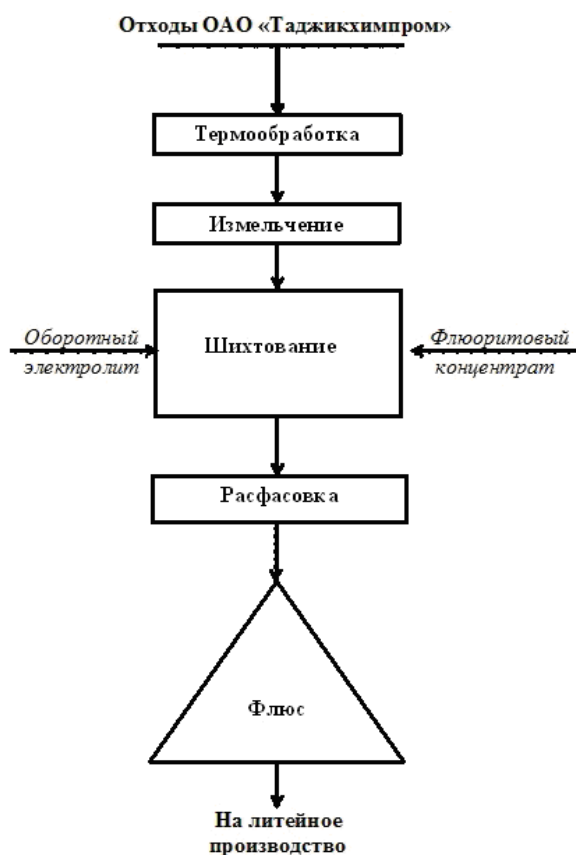


Рис. 2. Принципиальная технологическая схема производства флюса на основе электролитного оборота

По результатам проведенных исследований разработана принципиальная технологическая схема производства флюса на основе оборотного электролита, представленная на рис.2.

Технологический цикл включает следующие стадии: термообработку отходов ОАО «Таджикхимпром», измельчение, шихтование с флюоритовым концентратом ООО «ТАЛКО Флюорит» и оборотным электролитом, расфасовку.

Согласно технологическому циклу, отходы шламовых полей предварительно обезвоживают, подвергая термообработке при 250-300°С. Обезвоженную массу измельчают до размера

частиц менее 3-5 мм. Далее измельченные отходы шихтуют со смесью флюоритового концентрата и электролитного оборота.

Технологический процесс получения флюса не требует больших энергетических затрат и позволяет существенно снизить себестоимость флюса и выплавляемого алюминия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискарёв Д.В. Разработка технологии рафинирования алюминия от примесей щелочных и щёлочноземельных металлов. – Дисс. к.техн.н: – М., 2007, 25 с.
2. Петров С.М., Петрова С.Г. Флюсы для алюминиевых сплавов. – Современные литейные материалы и технологии получения отливок: Тез. докл. науч.-техн. конф. – Л.: Знание, 1991, с.54-55.
3. Белова С.В., Миляев А.Ф., Закомолдин, Ребезова Е.А. В.В. Выбор флюса для рафинирования сплавов группы АК. – Прогрессивные технологии изготовления форм и стержней для производства отливок: Тез. докл. науч. конф. – Челябинск, 1990, с. 80-81.

И.Ш.АҲМАДШОЕВ*, Н.П.МУХАМЕДИЕВ, А.Ҳ.САФИЕВ, Р.С.РАФИЕВ*, Ҷ.Р.РУЗИЕВ,
Ш.С.ҶУМАЕВ**, Ҳ.САФИЕВ

ТЕХНОЛОГИЯ ИСТЕҲСОЛИ ФЛЮС БО ИСТИФОДА АЗ ЭЛЕКТРОЛИТИ БОЗГАРДОНӢ

*Муассисаи давлатии «Пажӯҳишгоҳи илмию таҳқиқотии металлургия»-и,
КВД «Ширкати Алюминийи Тоҷик»,
*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,
**Филиали Донишгоҳи миллии таҳқиқотию технологии
«Институту пулод ва хулаи Москва» дар шаҳри Душанбе*

Вобастагии ҳарорати гӯдозиши флюс аз миқдори компонентҳои таркиби омехта омӯхта шуд. Таркиби оптималии омехта муайян карда шуд: партови саноатӣ – 60%, концентрати флюорити ҚДММ «ТАЛКО Флюорит» – 10% ва электролити бозгардони истеҳсоли алюминий – 30%. Аз рӯйи натиҷаи таҳқиқотҳои гузаронидашуда, схемаи принципалии технологияи истеҳсоли флюс дар асоси электролити бозгардони истеҳсоли алюминий таҳия карда шуд.

Калимаҳои калидӣ: концентрати флюорит, электролити бозгардон, флюс, тозақунӣ, партовҳои саноатӣ.

I.Sh.AHMADSHOEV*, N.P.MOUKHAMEDIEV, A.H.SAFIEV, R.S.RAFIEV*, J.R.RUZIEV,
Sh.S.JUMAEV**, H.SAFIEV

TECHNOLOGY FOR PRODUCING FLUX WITH APPLICATION OF ELECTROLYT TURNOVER

State Institution «Research Institute of Metallurgy» SUE «TAIco»,

**Tajik National University,*

***Branch of the National Research Technological university*

«Moscow Institute of Steel and alloys» in Dushanbe

The dependence of the melting temperature of the flux on the content of the components of the charge was studied. The optimal composition of the charge was revealed: waste – 60%, fluorite concentrate of Talco Fluorite LLC – 10% and electrolyte turnover of aluminum production – 30%. Based on the results of the studies, a basic technological scheme for the production of flux based on electrolyte turnover of aluminum production was developed.

Key words: fluorite concentrate, electrolyte turnover, flux, refining, industrial waste.

УДК 553:94(571.5):553.078

Дж.Н.ФОЗИЛОВ, Б.А.АЛИДОДОВ

**МИКРОЭЛЕМЕНТНЫЙ СОСТАВ УГЛЕЙ МЕСТОРОЖДЕНИЯ ШИШКАТ
(ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ТАДЖИКИСТАН)**

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 02.12.2016 г.

В угольных пластах месторождения Шишкат выявлены повышенные концентрации по сравнению с их кларковыми величинами вольфрама, ванадия, серебра, фосфора, мышьяка и германия, представляющие интерес в плане попутного извлечения при эксплуатации месторождения. Суммарная металлоносность углей, выраженная через аддитивный коэффициент концентрации, позволяет отнести их к группе весьма металлоносных.

Ключевые слова: месторождение, отложение, фация, кларк, концентрация, коэффициент, среднее содержание, аномалия, токсичность.

Месторождение Шишкат расположено на северном склоне Зеравшанского хребта и административно относится к Пенджикентскому району Согдийской области. В геологическом строении месторождения принимают участие осадочные породы палеозоя, мезозоя и кайнозоя. Отложения палеозойской группы обнажаются в центральной и восточной частях месторождения и характеризуются значительной мощностью. Преобладают среди них породы верхнего силура, девона и карбона, представленные геосинклинальными образованиями. Мезозойские отложения имеют широкое распространение на площади работ и представлены субплатформенными континентальными и прибрежно-морскими фациями. По возрасту они относятся к юрскому и меловому периодам. Кайнозойская группа отложений представлена породами палеогенового и неогенового возраста [1].

Металлоносность углей и вмещающих пород месторождения Шишкат изучена на фактическом материале 118 проб, отобранных в 5-ти врезках и 5-ти скважинах. Имеющийся фактический материал позволяет провести оценку уровня концентраций потенциально токсичных элементов, германиеносности и металлоносности угольного пласта месторождения.

Адрес для корреспонденции: Фозилов Дживонишо Нурович, Алидодов Бахшидод Алидодович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр.Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: fozilov.tj@mail.ru; aliba04@mail.ru

дения Шишкат. Для каждого элемента рассчитаны средние содержания по каждому пластопересечению.

При оценке уровня концентраций в углях потенциально опасных элементов учитывались требования «Инструкции по изучению токсичных компонентов», согласно которой к таковым относятся (г/т угля): фтор – при содержании более 500; мышьяк – более 300, бериллий – более 50 и ртуть – при содержании более 1 г/т угля; к потенциально токсичным относятся указанные элементы при более низких концентрациях, а также: ванадий (выше 100), кобальт (100), марганец (1000), никель (100), свинец (50), хром (100) и селен (свыше 1000 г/т угля).

В табл.1 приведено среднее содержание малых элементов приближенно-количественным спектральным анализом в угольных пластах месторождения Шишкат. Как видно, в угольных пластах месторождения содержание ванадия, кобальта, никеля и марганца, превышающее потенциально опасный уровень, не отмечается. Вместе с тем выявлены повышенные концентрации мышьяка, бериллия, свинца и хрома.

Таблица 1

Среднее содержание малых элементов в пластах угля месторождения Шишкат (г/т)

Пласты угля	Поверхность	Скважина	Среднее	
количество проб	50	21	71	
Содержание малых элементов в г/т угля	Mn	594.7	377	485.5 (670)
	Ni	22.4	48.4	35.4 (95)
	Co	1.8	37.2	19.5 (20)
	V	5.2	22.2	12.35 (130)
	Cr	5.96	40.8	276.7 (100)
	Mo	9	17	13 (2.0)
	W	-	209	209 (2.0)
	Zr	12	12	12 (200)
	Cu	46	112	79 (57)
	Pb	41.6	38	39.8 (20)
	Ag	1.3	6.6	3.95 (0.1)
	Sb	5	н/об	5 (2.0)
	Zn	8	109	58.5 (80)
	Ga	н/об	н/об	н/об
	Sn	1.9	2.7	2.3 (10)
	Ge	1.6	14.7	8.15 (2.0)
	Ba	1228	1254	1241 (800)
	Be	4.7	1.0	2.85 (3.0)
	Sr	135	60	97.5 (450)
	P	843	339	591 (77)
Y	4	4.4	4.2 (30)	
AS	68.5	32.4	50.45 (6.6)	

Примечание: в скобках приведены кларковые величины элементов в осадочных породах по А.П.Виноградову (1962).

При сравнении с кларковыми величинами явствует, что анализируемые элементы в основном характеризуются превышением содержания над кларковыми величинами от 1.5 до 100 раз. Значительно превышены содержания вольфрама (в 100 раз), ванадия (в

10 раз), серебра (в 40 раз), фосфора (в 7 раз), мышьяка (в 8 раз), германия (в 4 раза). В нижекларковых и околоскларковых содержаниях встречаются никель, кобальт, цирконий, сурьма, цинк, барий, бериллий, стронций, иттрий. Выявленные высокие содержания элементов представляют интерес в плане их попутного извлечения при эксплуатации месторождения Шишкат [2].

Аномальные концентрации мышьяка установлены в шести пластопересечениях. Аномалия располагается в центральной части участка, вытягиваясь узкой полосой в северо-западном направлении. Площадь её 0.24 км².

Повышенные концентрации бериллия отмечаются в двух поверхностных горных выработках (врезы 3 и 4). Содержание бериллия меняется от 0.7 до 17.8 г/т угля. Выявленная аномалия занимает 0.03 км² в юго-восточной части площади месторождения.

Содержание элементов в угольном пласте меняется от 7 до 1880 г/т угля. Повышенные концентрации хрома установлены одной скважиной (скв.3) и тремя врезами (2,3, 4). Аномалия хрома располагается в юго-восточной части пласта, вытягиваясь в северо-западном направлении. Площадь аномалии – 0.3 км².

Проведенные исследования по оценке уровня концентрации элементов, представляющих потенциальную опасность для окружающей среды, позволяют сделать вывод о том, что угольный пласт месторождения характеризуется низкой степенью концентрации таких потенциально опасных элементов, как бериллий, мышьяк, свинец и хром.

Оценка углей на германий проведена по установленным содержаниям спектральным приближенно-количественным методом (табл. 2) в пластопересечениях угольного пласта месторождения. В целом содержание металлов изменяется от 0.2 до 131 г/т угля. Среднее содержание по пласту колеблется в пределах 2.8-18.5 г/т при среднем его значении 10.65 г/т угля для всего участка.

Таблица 2

Среднее содержание основных элементов-индикаторов германиевого оруденения в углях месторождения Шишкат и значения прогнозных показателей

Место взятия проб	Элементы-индикаторы (в г/т угля)						Прогнозные показатели		
	Ge	W	Sr	Mn	Mo	Be	Ge*WxSrxMn	GexWxMo	GexWxBe
Врез -1	0.2	-	31	595	5	0.8	2x10 ³	-	-
Врез -2	0.6	-	44	344	6	25	7x10 ³	-	-
Врез -3	3.0	-	308	649	15	12	4x10 ⁵	3x10 ¹	3x10 ¹
Врез-4	4.0	-	266	791	10		1x10 ⁵	3x10 ¹	2x10 ¹
Врез -5	-	-	26	595	8	0.3	2x10 ³	-	-
Скважина 1	5	16	10	160	16	0.3	1x10 ⁵	1x10 ³	2x10 ¹
Скважина 2	30	580	60	160	27	2.0	1x10 ⁸	5x10 ⁵	3x10 ⁴
Скважина 3	3.0	44	87	160	9	1,4	2x10 ⁸	1x10 ³	2x10 ²
Скважина 6	5	371	-	160	10	0.3	3x10 ⁶	2x10 ⁴	5x10 ²
Скважина 9	29	33	7	160	22	-	1x10 ⁶	2x10 ⁴	5x10 ²

Изучение распределения германия в разрезе угольного пласта свидетельствует о преимущественной приуроченности повышенных содержаний металла к прикровленным и припочвенным частям пласта. Определение значений прогнозных показателей (табл. 2)

германиевого оруденения позволяет выделить участок, перспективный на обнаружение промышленных концентраций германия. Значения геохимических прогнозных показателей превышают на 1-3 порядка аналогичные для германия прогнозные показатели угольного месторождения Ангрэн [4].

В табл. 3 и на рис.1 приведены значения коэффициентов концентрации (КК) элементов по угольному пласту. Как видно, угольный пласт специализирован (КК>5) на вольфрам (263), серебро (33), барий (12), молибден (44), германий (10), олово (65), сурьму и медь (6,6). Минимальные концентрации (КК<2) характерны для титана, циркония, кобальта и сурьмы [2,3].

Таблица 3

Коэффициенты концентрации малых элементов в углях месторождения Шишкат (г/т)

Пласты угля	Поверхность	Скважина	В среднем
Mn	1.4	4.6	3
Ni	1.1	4.0	2.55
Co	1.9	1.2	1.55
V	9.5	1.25	5.3
Cr	4.1	40	4.24
Mo	6.2	22	14.1
W	2.5	522	263.8
Zr	-	0.9	0.9
Cu	6	7.2	6.6
Pb	5	5.6	5.3
Ag	16	50	33
Sb	6.5	125	65.7
Zn	4.6	2.6	3.6
Ga	3.2	н/об	3.2
Sn	53	77	65
Ge	2.8	18.5	10.65
Ba	2.9	22	12.45
Be	3.9	28	15.95
Sr	2.8	4.6	3.7
P	5.9	4,6	5.25
Y	0.8	0.6	0.7
As	0.8	2	1.4

Содержание малых элементов в г/т угля

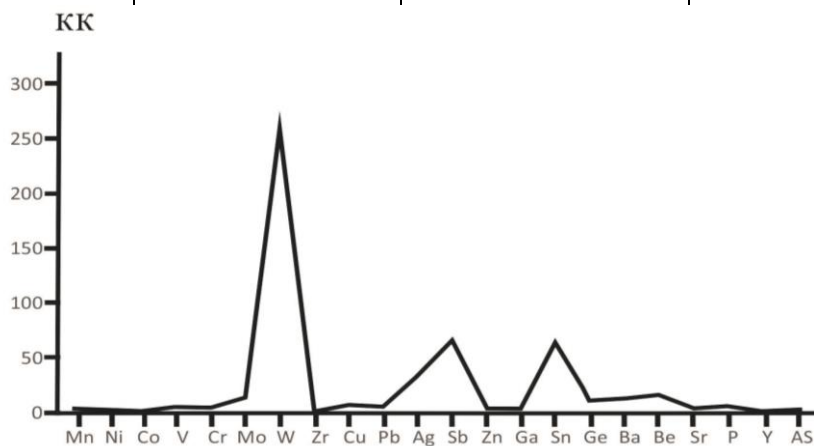


Рис. 1. График коэффициентов концентрации малых элементов в углях месторождения Шишкат.

По величине коэффициента, отражающего отношение содержания элемента в пласте, опробованном в скважине, к содержанию элемента в пласте, опробованном на поверхности, можно сделать следующее заключение.

В угольном пласте, перекрытом осадочными породами (неокисленном), выше уровень содержаний ($KK > 3$) кобальта (в 2 раза), ванадия (в 5.3), цинка (в 3.6) и германия (в 10). Содержание вольфрама изменяется от «не обнаружено» до 522 г/т угля и в среднем составляет 263 г/т угля, при полном его обнаружении во врезках. Низкие уровни содержаний ($KK < 1.0$) характерны для иттрия (0.7) и циркония (0.9) [4].

Полученные результаты позволяют заключить, что концентрации кобальта, ванадия, цинка, вольфрама и германия в окисленных углях «теряются», а для мышьяка, бериллия, хрома, свинца, марганца, серебра, стронция и фосфора характерно незначительное обогащение этими элементами окисленных углей.

В табл. 4 и графически на рис. 2 отражены результаты изучения закономерностей распределения содержаний микроэлементов в углях различной зольности. Элементы, на которые специализированы угли месторождения ($KK = 5-153$), концентрируются в высокозольных ($A > 40\%$) пачках угольного пласта (3). Это серебро, барий, молибден, германий, олово, медь и свинец. В малозольных углях ($A < 20\%$) преимущественно накапливаются бериллий, хром, сурьма и вольфрам.

Таблица 4

Содержание «малых» элементов в углях различной зольности месторождения Шишкат

Количество проб	15	40	16	5	
Зольность A, %	<20	20-40	40-60	60-80	
Содержание элементов в г/т угля	Mn	527	394	626	505
	Ni	17	35	49	46
	Co	13	10	15	7
	Ti	740	1906	2023	3605
	V	0.5	12	13	36
	Zr	8	12	15	58
	Cu	88	47	70	94
	Pb	10	45	106	166
	Ag	0.6	1.1	1.6	2.6
	As	26	44	129	2.2
	Zn	6	72	43	58
	Sn	3	3	3.6	7
	Ge	1.6	5	13	-
	Be	15	4	6	1.2
	Ba	1290	1031	2828	3144
	Sr	80	80	231	58
	P	735	670	888	-
	Y	4.5	4	4.2	1.4
	Mo	5.6	11	17	14
	Sb	4.6	-	-	14
Cr	2044	361	565	72	
W	57	52	30	4.3	
Hg	-	-	0.8	-	

Анализируя данные распределения малых элементов в углях в зависимости от их зольности, можно сделать предварительный вывод о том, что такие элементы, как бериллий, германий, хром и медь обнаруживают связь с органическими соединениями. Для свинца и ванадия характерна приуроченность к высокозольным углям, то есть они связаны с минеральной их частью.

Для остальных элементов четкой закономерности не устанавливается, но в целом общая тенденция увеличения накопления многих элементов с увеличением зольности углей сохраняется. Углевмещающие породы месторождения Шишкат характеризуются тем же комплексом микроэлементов, что и угольный пласт. Основная их масса присутствует в значениях на уровне фоновых. Исключение составляют: для глинистых пород мышьяк, для песчаных – кобальт.

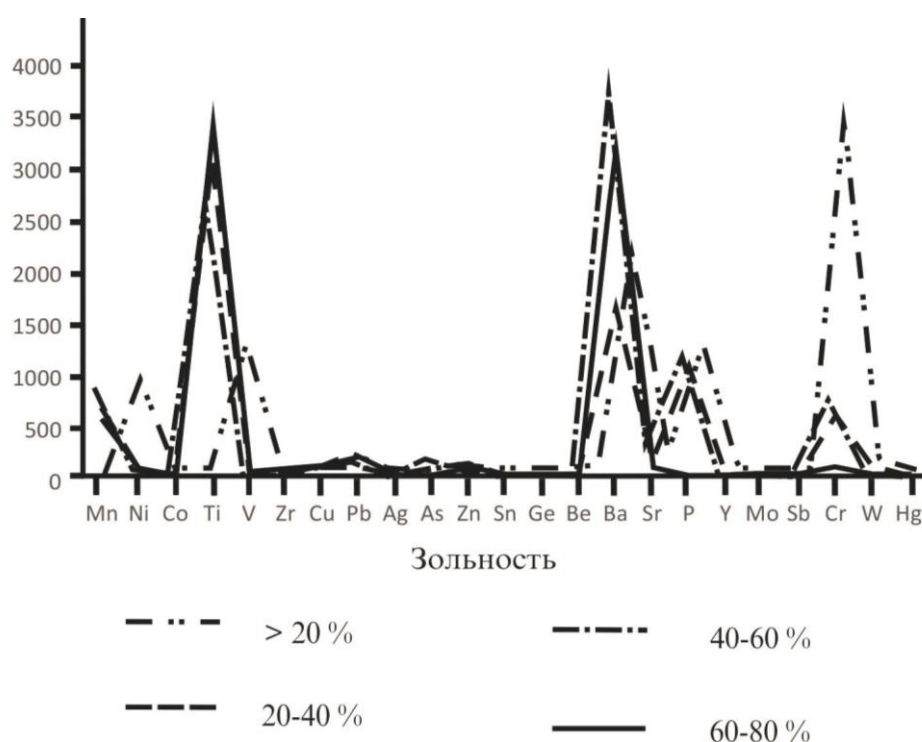


Рис. 2. Вариационные кривые содержания «малых» элементов в углях различной зольности месторождения Шишкат.

Содержание мышьяка в глинистых породах колеблется в пределах 9-132 г/т при среднем его значении 73 г/т, что в 5.5 раза превышает фоновые значения для этих проб. Кобальт в аномальных концентрациях присутствует в песчаных породах. Его содержания изменяются от 2 до 1000 г/т, при среднем значении 501 г/т. Ванадий присутствует в повышенных содержаниях во всех разновидностях пород при средних значениях по пласто-пересечениям от 390 до 2330 г/т.

В целом следует отметить, что суммарная металлоносность углей месторождения, выраженная через аддитивный коэффициент концентрации (Кадд = 715), позволяет отнести их к группе весьма металлоносных [2.3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Фозилов Дж.Н. Особенности геологического строения и угленосность каменноугольного месторождения Шишкат (Центральный Таджикистан. – Республ. науч.-практ. конф., посвящ. 10-летию Горно-металлургического института Таджикистана «Геология разведка». – Чкаловск, 2016, с. 66-68.
2. Геология месторождений угля и горючих сланцев СССР, т. 6. Угольные бассейны и месторождения Средней Азии. – М.: Недра, 1968.
3. Марковский А.П. Основные черты геологического строения средней части Центрального Таджикистана. – Тр. ТПЭ, вып.4 (Геология Центрального и Южного Таджикистана). – М.: Изд-во АН СССР, 1934, с.145-156.
4. Фозилов Дж.Н., Алидодов Б.А. Особенности геологического строения и металлоносность угольного месторождения Гузун (Зеравшанский хребет). – Вестник ТНУ «Душанбе, Сино», № 1\2 (160), 2015, с.300-306.

Ҷ.Н.ФОЗИЛОВ, Б.А.АЛИДОДОВ

ТАРКИБИ МИКРОЭЛЕМЕНТИ АНГИШТСАНГИ КОНИ ШИШКАТ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар қабати ангиштсангии кони Шишкат дар муқоиса бо бузургиҳои кларкӣ ғуншавии баланди волфрам, ванадий, нукра, фосфор, марги муш ва германий муайян карда шудааст, ки метавонанд ҳангоми истихроҷи кони ангишт ҳамчун компонентҳои фойданоки ҳамроҳ истифода карда шаванд. Аз ҷиҳати ҷамъи дороии металлнокӣ, ки аз рӯйи коэффисиенти аддитивӣ муайян карда шудааст, кони мазкурро ба гурӯҳи конҳои дорои металлнокии калон дохил кардан мумкин аст.

Калимаҳои калидӣ: конҳо, кларк, ғуншавӣ, коэффисиент, миқдори миёна, аномалия, захрнокӣ.

Dj.N.FOZILOV, B.A.ALIDODOV

TRACE ELEMENT COMPOSITION OF COAL DEPOSITS SHISHKAT

Tajik National University

It has been identified that deposits in coal seams Shishkat has higher concentration compared with their values clark tungsten, vanadium, silver, phosphorus, arsenic and germanium which are of interest in terms of the associated extraction of deposits during operation. The total metal content of coal, expressed in terms of an additive factor can be attributed to a group of highly metalliferous.

Key words: field, the deposition, facies, clark, the concentration, ratio, the average content of, the mean anomaly, toxicity.

УДК 550.812.14

С.С.САИДРАХМОНЗОДА

**ОСОБЕННОСТИ ГЛУБИННОГО СТРОЕНИЯ И ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОЙ
КОНСТРУКЦИИ ПОИСКОВО-РАЗВЕДОЧНЫХ СКВАЖИН С ЦЕЛЬЮ
ДОРАЗВЕДКИ НЕФТЕГАЗОНОСНОЙ ПЛОЩАДИ МАХРАМ**

ОАО «Нафту газ», Республика Таджикистан

Поступила в редакцию 02.07.2019 г.

В формировании залежей нефти и газа в западной части Ферганской впадины, в том числе на площади Махрам, немаловажную роль играют глубинные тектонические нарушения, которые разделяют структуру на блоки и служат путем для миграции углеводородов и их накопления в палеогеновых отложениях. Поэтому оптимальный выбор конструкции скважин по каждому блоку гарантирует снижение стоимости строительства и повышение возможности получения положительного результата.

Ключевые слова: тектоника, блоки, стоимость, конструкция, площадь, результат, нефть, газ, экономика.

Геологоразведочные работы на площади Махрам начаты в 1980 г. параметрической скважиной №1 с проектной глубиной 4450 м. Проектный горизонт кровли свиты «Гознау».

В последующие годы (до 1992 г.) с целью подтверждения продуктивности пластов палеогеновых отложений на площади пробурены скважины №№ 2, 2^а, 4-11, 13-15, 18 с проектной конструкцией:

- направление Ø 530 (630) мм до 7 м
- кондуктор Ø 426 мм до 100 м
- I-я промежуточная колонна Ø 323.7 мм до 2000 м
- II-я промежуточная колонна Ø 244.5 мм до 4440 м
- эксплуатационная колонна Ø 139.7 мм до 4800 м

Адрес для корреспонденции: Саидрахмонзода Саиджон Саидбурхон. 734018, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Мушфики, 77, ОАО «Нафту газ». E-mail: saidjon0205@mail.ru

в некоторых скважинах была предусмотрена резервная колонна – «хвостовик» Ø 193.7 мм с интервалом спуска 4340-4600 м, хотя ни разу не применялась [1,2].

Однако фактическая глубина спуска обсадных колонн в вышеуказанных скважинах, кроме глубины спуска кондуктора, существенно отличается от проектной конструкции и не совпадает между собой.

Для выяснения возникших проблем Патарской сейсморазведочной партией № 0991 в 1991-1992 гг. были проведены детализационные сейсморазведочные работы на восточной части Махрамской площади с целью составления кондиционной структурной карты по отложениям палеогена масштаба М 1:25000, которая поможет более точно выбирать место заложения дальнейших поисково-разведочных скважин.

Проведенные работы показали [3-5], что восточная часть Махрамской структуры имеет более сложное строение, чем ее западная часть. В западной части только одно тектоническое нарушение типа надвиг с наклоном плоскости разрыва в север-северо-западном направлении вертикальной амплитудой до 300 м и горизонтальным смещением на юг до 800 м. При этом Махрамская складка подвинута на Батыркурганскую.

В восточной части площади установлено три тектонических нарушения одной субширотной направленности, два из которых являются оперяющими, зарождаясь и затухая в пределах исследуемой площади. Появление двух дополнительных разрывных нарушений обусловлено сложным блоковым строением в восточной части Махрамской складки.

Изменился и характер разрыва с надвига на сдвиг с субвертикальной плоскости сместителя. Эти нарушения делят восточный участок, как бы на три блока, отличающиеся друг от друга [4] (рис. 1).

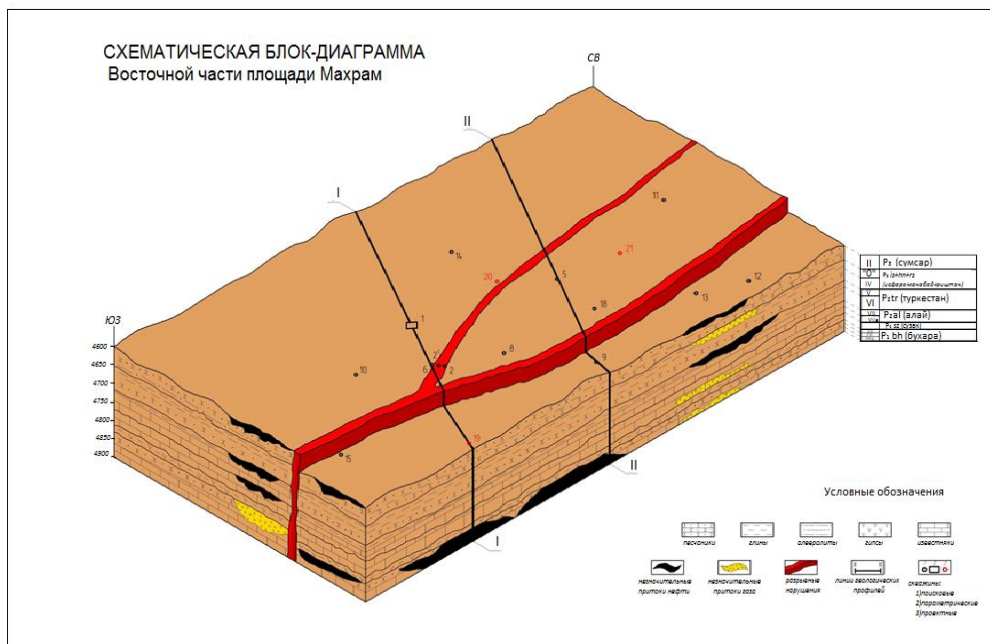


Рис. 1. Схематическая блок-диаграмма восточной части площади Махрам.

I. Северный блок, в пределах которого расположены скважины №№ 1, 2^а, 6, 10, 14.
 II. Центральный блок, в пределах которого расположены скважины №№ 2, 5, 8, 8^а, 11, 18.

III. Южный блок, в пределах которого расположены скважины №№ 9, 13, 16.

На основании анализа материалов глубокого бурения и сейсморазведки Патарской сейсморазведки № 0991 [3] выяснилось, что глубинное строение площади Махрам оказалось гораздо сложнее, чем предполагалось на стадии подготовки объекта к поисковому бурению. По нашему мнению, причиной произошедшего, то есть неудачный выбор и разработка конструкции скважин по площади, отсутствие достаточной информации по глубинному строению у исполнителей (по объективным причинам) того периода привели к неудачному выбору и разработки конструкции скважин на площади.

В результате глубокого бурения на месторождении вскрыты отложения от четвертичных до верхнемеловых включительно. Продуктивная часть разреза приурочена к сумсарским слоям (II пласт), туркестанским слоям (V, VI пласт), алайским слоям (VII, VII^а пласт), бухарским слоям (IX, IX^а) (рис. 2).

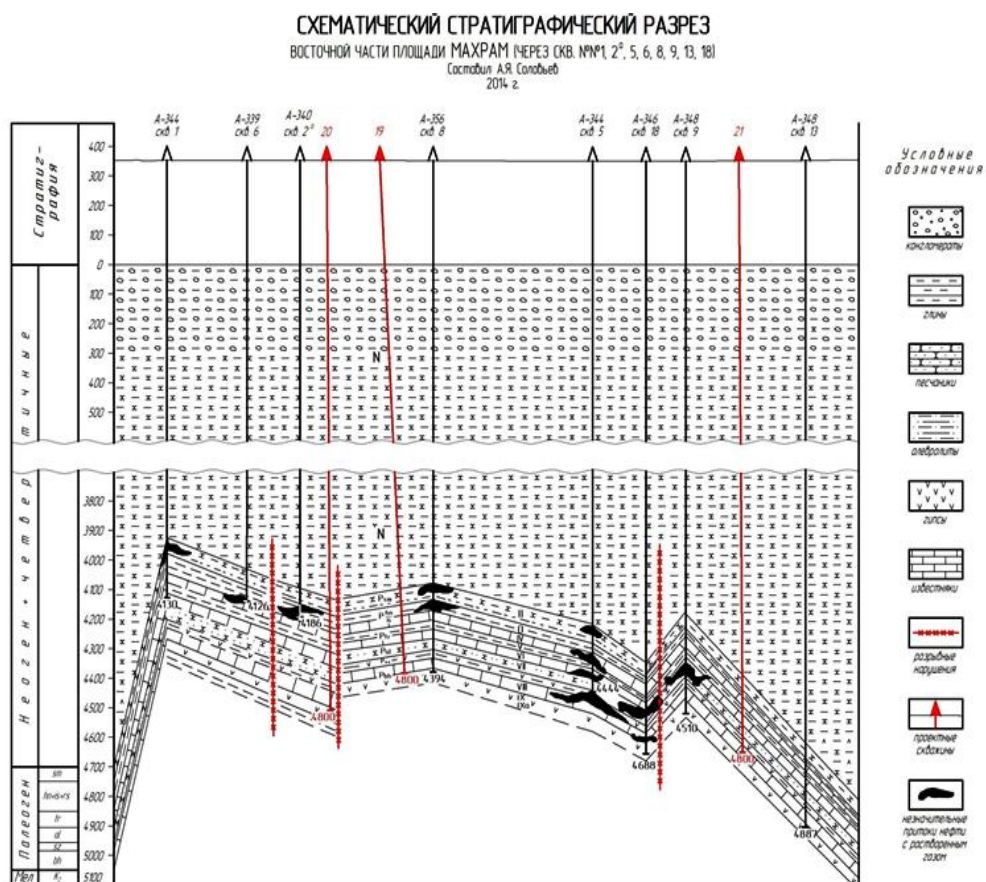


Рис. 2. Схематический стратиграфический разрез восточной части площади Махрам (через скв. №№ 1, 2^а, 5, 6, 8, 9, 13, 18)

Следует отметить, что, несмотря на большую возможность и необходимость, до настоящего времени не разрабатывалась оптимальная конструкция скважин, обеспечивающая разделение зон несовместимыми условиями бурения с учетом блокового строения. Ведь успешная проводка скважин на сложных (в геологическом отношении) структурах (площадях) в значительной степени зависит от правильного выбора конструкции скважин, обеспечивающей полное разделение несовместимых зон бурения и крепление обсадными трубами с необходимой высоты подъема цементного раствора за колонной при строительстве нефтегазовых скважин.

Исходя из вышеизложенного, нами предложена, с учетом блокового строения и ожидаемых зон несовместимости, для каждого блока индивидуально своя оптимальная конструкция скважин [4, 5].

Например, для южного блока при бурении поисковой скважины

№ 16, с учетом последних геолого-геофизических данных, предложено изменить традиционную конструкцию скважин для площади.

Проектная конструкция:

Направление Ø 530 мм глубина спуска 7 м.

Кондуктор Ø 426 мм глубина спуска 100 м.

I промежуточная колонна Ø 323.7 мм. глубина спуска 2000 м.

II промежуточная колонна Ø 244.5 мм. глубина спуска 4440 м.

Эксплуатационная колонна Ø 139.7 мм. глубина спуска 4800 м.

Все колонны цементируются на полную длину.

Предложенная конструкция:

Направление Ø 720 мм глубина спуска 7 м.

Кондуктор Ø 426 мм глубина спуска 100 м.

I промежуточная колонна Ø 323.7 мм глубина спуска 1500 м.

II промежуточная колонна Ø 244.5 мм глубина спуска 3500 м.

Эксплуатационная колонна глубина спуска 4800 м.

Высота подъема цемента, за исключением эксплуатационной колонны, до устья скважины.

Эксплуатационная колонна цементируется двумя способами.

I вариант - если в процессе бурения, при испытании предполагаемых продуктивных объектов, газопроявление не наблюдается, с целью создания минимальных депрессий на продуктивные пласты, эксплуатационная колонна цементируется в интервале 3300-4800 м, то есть с заходом на 200 м во II промежуточную колонну.

II вариант - в случае газопроявления при проведении испытания в процессе бурения, эксплуатационная колонна цементируется на полную длину с использованием муфты ступенчатого цементирования с установкой муфты в интервалах от 2800 м. до 3000 м. в зависимости от фактических геолого-технических условий.

В скважине № 16, исходя из геолого-технических условий, был выполнен **I вариант**.

Предложенный вариант позволил за счет уменьшения длины спуска

I-II - промежуточных(технических) колонн, объема цементирования и экономии химреагентов и так далее, сэкономить бюджетные средства до 15% от общего объема стоимости строительства скважины.

В находившейся в бурении поисковой скважине № 17 наше предложение учтено в процессе проектирования, то есть проектная конструкция разработана и принята по нашему предложению. По состоянию на 31.12.2018 г. забой скважины достигнут до глубины 4420 м. Проектная глубина составляет 4800 м.

ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ
по линии I-I
Масштаб 1:20 000

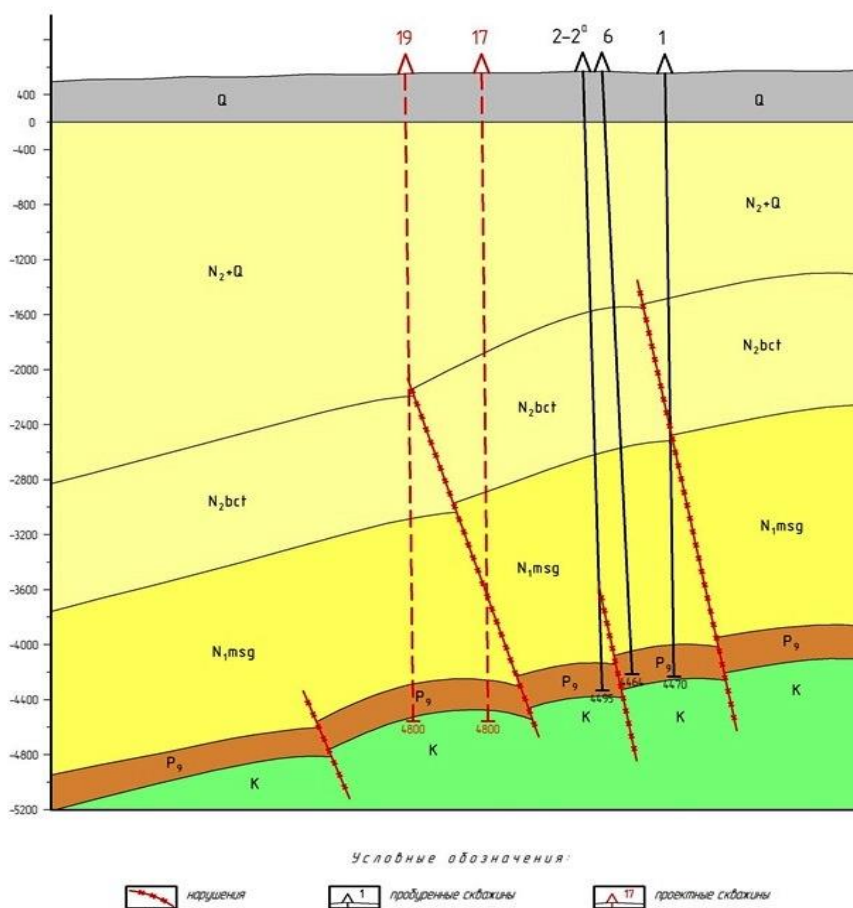


Рис. 3. Геологический профиль по линии I-I.

Площадь - Махрам

Номера скважин и их количество - 19

Геолого-технические условия и конструкция скважины

Цель бурения - поиск

Проектная глубина - 4800 м

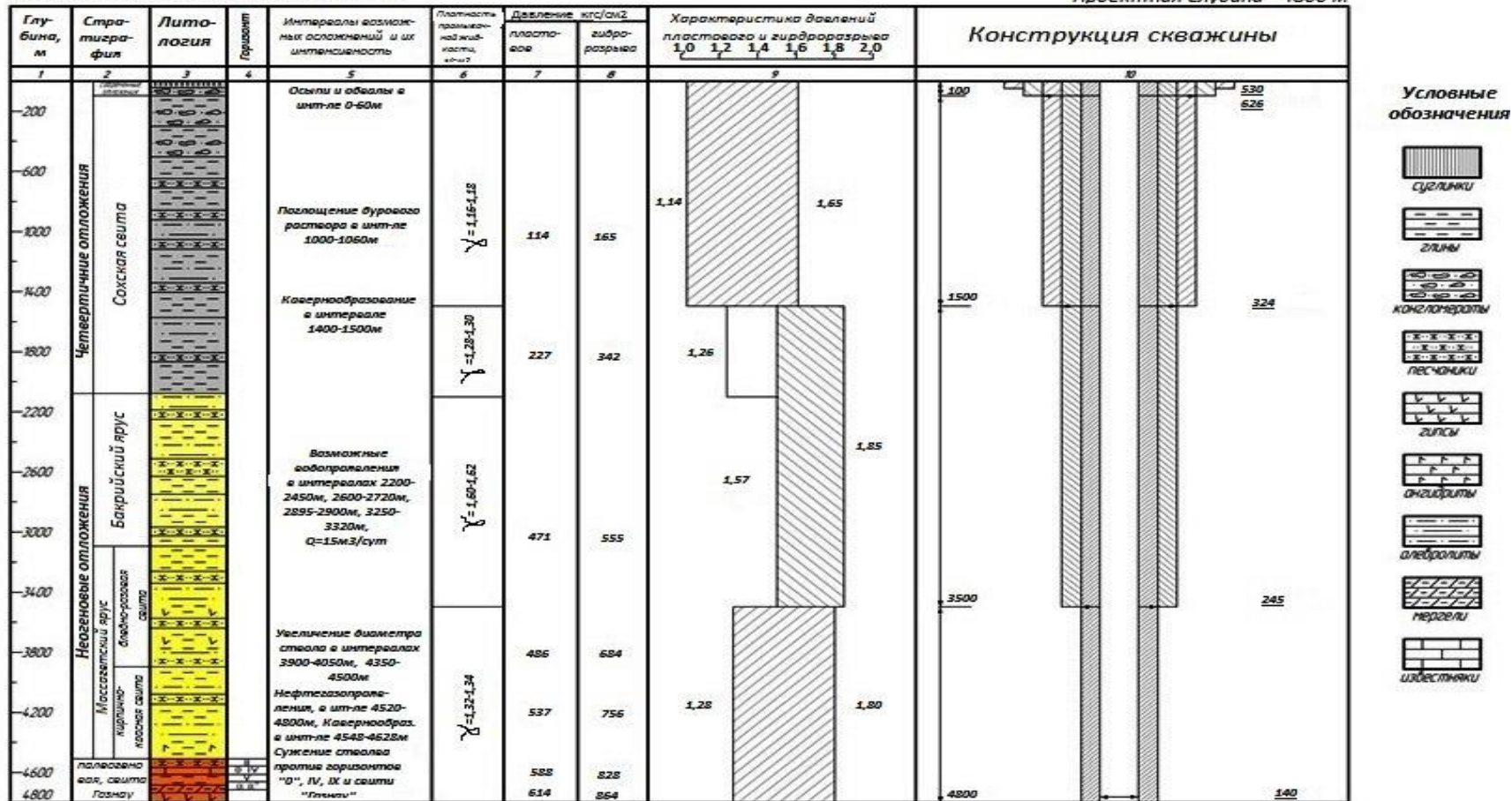


Рис. 4. Геолого-технические условия и конструкция скважины

Разработанные оптимальные конструкции скважин и точки заложения с учетом изучения последних результатов всего комплекса геолого-геофизических материалов и фактических данных бурения на площади Махрам, позволяет делать выводы и рекомендовать разработанные нами оптимальные конструкции скважин для перспективных на поиски нефти и газа скважин №№ 19 и 20 с проектной глубиной 4800 и 4700 м. Геологический профиль, геолого-технические условия и конструкция проектной поисковой скважины № 19 приведены на рис. 3, 4.

Проектный горизонт свиты «Гознау». Цель бурения: изучение глубинного геологического строения площади, проверка сейсмических данных (интервалов) выявление перспектив нефтегазоносности палеогеновых отложений на площади Махрам.

На основе вышеприведенных данных предлагается заложить разведочную скважину № 19 площади Махрам в одном профиле, в середине, между ранее пробуренной скважиной № 2 на юго-западе и №5 на северо-востоке на расстоянии 1075 м. от этих скважин (рис. 1). Рекомендованная скважина вскроет продуктивные пласты палеогена в лучших геологических условиях, чем скважина № 5, так как гипсометрическая отметка точки заложения позволяет на 250 м. выше вскрывать кровлю палеогена.

Скважину № 20 предполагается заложить на расстоянии 300 м. по азимуту 340° от ранее пробуренной поисковой скважины № 2 с аналогичными целями бурения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абидов А.А., Коломазов Р.У. и др. Новая схема тектонического районирования Ферганской впадины. Геология нефти и газа. № 11, 1992 г.
2. Карагодин Ю.Н., Малашенков Г.Н., Саиджоджаев Ш.Г. Цикличность и нефтегазоносность палеогена Северного Таджикистана. – Новосибирск: изд-во «Наука» Сибирское отделение, 1981 г.
3. Петрова Н.В., «Детализационные работы на восточной части Махрамского месторождения Ферганской впадины». Фонды ОАО «Нафту газ», Душанбе, 1992 г.
4. Юнусов Ю. Ш., Соловьев А.Я. и др. Анализ и изучение состояния геолого-поисковых работ и выдача рекомендации для проведения дальнейших геологоразведочных работ на площади Махрам. Фонды ОАО «Нафту газ», Душанбе, 2014 г.
5. Саидрахмонзода С.С., Валиев Ш.Ф., Юнусов Ю.Ш. Усовершенствование углубления скважин с применением современной техники и технологии поиска и разведки углеводородов в зоне акватории Кайраккумского водохранилища. – Душанбе: Наука и инновация, № 3, 2018 г.

С.С.САИДРАХМОНЗОДА

ХУСУСИЯТҲОИ СОҲТИ ҚАЪРӢ ВА ИНТИХОБИ МУНОСИБИ КОНСТРУКСИЯИ ЧОҲҲОИ ҚУСТУҚӢИ-ИНКИШОФӢ БО МАҚСАДИ БОЗИКТИШОФӢ ДАР МАЙДОНИ НАФТУГАЗДОРИ МАҲРАМ

Дар ташаккули конҳои нафту газ дар қисми ғарбии пастхамии Фарғона, аз он чумла дар майдони Махрам, нақши муҳимро вайронаҳои тектоникӣ, ки таркибро ба

блокҳо ҷудо мекунанд, барои муҳочирати карбогидратҳо роҳ мекушоянд ва барои чамъшавии онҳо дар қабатҳои палеоген мусоидат менамоянд. Барои ҳамин, интихоби муносиби конструксияи ҷох, дар ҳар як блок, ба паст гардидани нархи сохтмони ҷох ва баланд гардидани имконияти гирифтани натиҷаи мусбӣ кафолат медиҳад .

Калимаҳои калидӣ: тектоника, блокҳо, харочот, конструксия, майдон, натиҷа, нафт, газ, иқтисодиёт.

S.S.SAIDRAHMONZODA

**FEATURES OF THE DEEP STRUCTURE AND THE CHOICE
OF THE OPTIMAL DESIGN OF EXPLORATION WELLS WITH THE AIM
OF FURTHER EXPLORATION OF THE MAHRAM OIL AND GAS AREA**

In the formation of oil and gas deposits in the western part of the Fergana depression, including in the Mahram area, deep tectonic disturbances play an important role, which divide the structure into blocks and serve as a way for the migration of hydrocarbons and their accumulation in Paleogene sediments. Therefore, the optimal choice of well design for each block guarantees a reduction in the cost of construction and an increase in the possibility of obtaining a positive result.

Key words: tectonics, blocks, cost, construction, area, result, oil, gas, economy.

УДК 004.9

М.С.САФАРОВ, А.Р.ФАЗЫЛОВ*

**РИСКИ СТИХИЙНЫХ БЕДСТВИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ВОДОЙ,
И ДИСТАНЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИХ МОНИТОРИНГА**

Научно-исследовательский центр экологии и окружающей среды

Центральной Азии, Душанбе,

**Институт водных проблем, гидроэнергетики и экологии*

АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 21.06.2019 г.

Статья посвящена анализу оценки риска стихийных бедствий в Таджикистане и обоснованию возможности использования беспилотных летательных аппаратов для мониторинга и сбора информации.

Ключевые слова: стихийные бедствия, беспилотные летательные аппараты, аэрофотосъемка.

В Республике Таджикистан ежегодно происходят сотни опасных природных явлений, приводящих к серьезным ущербам, которые, к сожалению, нередко сопровождаются человеческими жертвами. Минимизация вероятного ущерба может быть достигнута за счет создания системы прогнозирования возможных проявлений стихийных бедствий. Следовательно, использование дистанционных методов наблюдений с применением автоматического сканирования окружающей среды является актуальным.

Климат Таджикистана – субтропический со значительными суточными и сезонными колебаниями температуры воздуха, малым количеством осадков, сухостью воздуха и малой облачностью. Абсолютный минимум температуры достигает -63°C на Памире (Булункуль). Абсолютный максимум температуры составляет $+48^{\circ}\text{C}$ (Нижний Пяндж). Крупнейшие озёра: Каракуль, Сарезское озеро, Искандеркуль и др. Рельеф страны разде-

Адрес для корреспонденции: Сафаров Мустафо Сулаймонович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Научно-исследовательский центр экологии и окружающей среды Центральной Азии (Душанбе). E-mail: mustafo-2010@mail.ru

ляет территорию Таджикистан на гидрографические области, формирующие крупные реки Сырдарья, Амударья и расположенную между ними реку Зеравшан.

Виды проявленных опасных природных явлений в Таджикистане приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Виды опасных природных явлений [1]

Опасные природные явления	
Класс	Вид
Гидрологические и метеорологические	наводнения; засуха; морозы и заморозки; снегопад; осадки; град; ветер; лавины; опустынивание; высокие грунтовые воды
Геологические	сели; оползни; землетрясения; камнепады.

По данным Комитета по чрезвычайным ситуациям и гражданской обороне при Правительстве Республики Таджикистан (КЧС и ГО ПРТ), угрозы создали риски, которые привели к различным стихийным бедствиям в Таджикистане (табл. 2). Количество потерь среди населения было относительно низким по сравнению с некоторыми странами региона. Однако количество пострадавших составляло более 3 миллиона человек [2].

Таблица 2

Количество пострадавших при чрезвычайных ситуациях в Таджикистане с 1993 по 2000 гг.

Бедствия	Дата	Кол-во пострадавших
Наводнение	7.05.1993	75 357
Засуха	05.1993	67 500
Наводнение	25.05.1993	63 500
Наводнение	5.07.1994	6 051
Наводнение	27.05.1996	180 000
Эпидемия	31.05.1996	7 516
Эпидемия	13.02.1997	15 618
Наводнение	24.04.1998	43 974
Наводнение	7.07.1999	9 392
Засуха	01.2000	000 000

По оперативным данным КЧС и ГО ПРТ за 11 месяцев 2018 г., на территории страны было зарегистрировано 165 чрезвычайных случаев и ситуаций. На рис. 1. приведено количество зарегистрированных ЧС в РТ в 2018 г. [3].

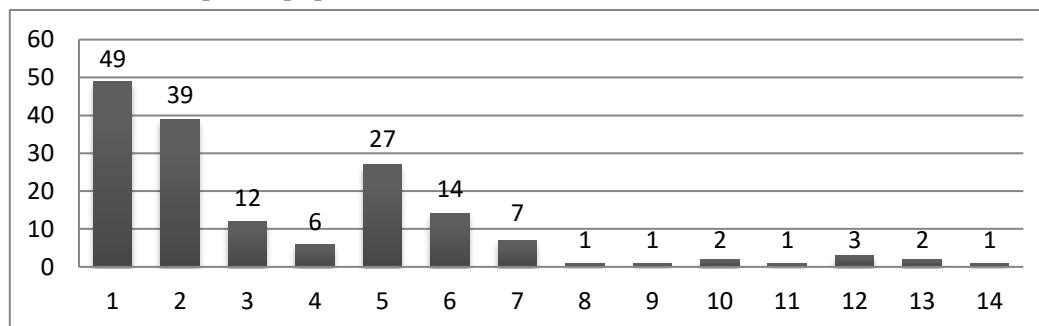


Рис. 1. Природные явления за одиннадцать месяцев 2018 г. (по данным КЧС):

Примечание: 1 – сель; 2 – лавины; 3 – повышение грунтовых вод; 4 – оползни; 5 – землетрясения; 6 – камнепады; 7 – сильные ветра; 8 – туман; 9 – заморозки; 10 – ливневые дожди; 11 – сильный снегопад; 12 – гром и молния; 13 – эрозия, провал земли; 14 – природный пожар.

Метеорологи подтверждают тот факт, что за последние 20 лет частота и интенсивность стихийных гидрометеорологических явлений в Таджикистане возросла. К 2030 г. число ежегодных селей, паводков, прорывов озер может увеличиться на 18% [4].

Таким образом, назрела острая необходимость мониторинга и разработки мер по предотвращению возможных проявлений рисков, а также мер по обеспечению защиты уязвимых регионов. Для оценки риска стихийных бедствий и выполнения задач по предотвращению и управлению стихийными бедствиями необходимо использовать современные геоинформационные технологии. В частности, использование фотограмметрии и дистанционного зондирования является эффективным, в общем, при управлении рисками стихийными бедствиями, а также, в частности, при мониторинге и картировании.

Инновации в области дистанционного зондирования и фотограмметрических изображений и их применения являются ключевыми инструментами в оценке уязвимости территорий и ущерба от стихийных бедствий [5, 6].

Одними из современных инструментариев данного процесса являются так называемые «беспилотные летательные аппараты (БПЛА)», то есть летательный аппарат без бортового пилота-человека. БПЛА, в основном, это самолеты с дистанционным управлением (например, пилотируемым пилотом из наземной станции) или самолеты, летающие автономно на основе заранее запрограммированных планов полета или более сложных систем динамической автоматизации.

Непрерывная тенденция в миниатюризации электроники для удобства и практичности позволяет производить меньшие по размеру БПЛА, одновременно оснащая их камерами и другими датчиками для поддержки сбора данных [7]. БПЛА управляются дистанционно или могут летать автономно с заранее заложенным в них маршрутным планом для различных целей (видеосъемки, аэрофотосъемки и др.). Использование этих систем дает приемлемые для прикладных задач ожидаемые результаты и предоставляет широкие возможности, которые раньше были недостижимы [8].

При выборе беспилотных систем для решения задач картографирования и мониторинга важным является выявление различий в конструкторских и технических решениях разных типов - самолетный, мультироторные (квадрокоптеры, октокоптеры и гексакоптеры) и вертолетные [9].

Существует также классификация, основанная на учёте производительности системы БПЛА, то есть на системе с открытым исходным кодом и на системы с ручным управлением (класс OM), а также системы Micro и Mini (класс M) и беспилотные летательные аппараты, обладающие большой грузоподъемностью (класс L). Табл. 3 характеризует БПЛА с точки зрения навигационных датчиков и качества географической привязки, а также сбора пространственных данных [10].

К основным параметрам, определяющим способ старта, посадку, грузоподъемность, процесс полёта и съемки, вне зависимости от типов и моделей, относят размер, вес и их форму.

Таблица 3

БПЛА с точки зрения лётных характеристик и навигации

Датчики и сенсоры	Геопривязка	Возможность	Требования	Категория БПЛА
Нет GPS/ INS	Post	0	низкая точность	OM –класс
GPS и INS потребительского класса	Post/direct	+	умеренная точность [дм-м]	M- & L-класс
DGPS/ навигация и тактический INS	Post/direct	++	высокая точность [см]	M- & L-класс

Примечание: 0 – минимальное значение; + – среднее значение; ++ – лучшее значение.

В табл. 4 приведены некоторые типы БПЛА с дополнительной информацией о весе полезной нагрузки и выносливости, обеспечивающие наибольший потенциал для недорогого картирования и использованные при картографировании и оценки риска стихийных бедствий.

Возможности применения БПЛА для целей мониторинга окружающей среды и водных ресурсов широкие, что позволяет существенно расширить возможности мониторинга с воздуха и сделать его более доступным в Таджикистане. В частности, БПЛА могут быть применены при исследовании ЧС, связанных со стихийными бедствиями, мониторинге природных ресурсов, в сельскохозяйственном производстве (наблюдение за посевами, пастбищами, и т. д.), а также при воздушном мониторинге крупных гидротехнических сооружений с водохранилищами.

Использование БПЛА при стихийных бедствиях и опасных природных явлениях позволяет осуществлять мониторинг опасных или труднодоступных районов. Платформы БПЛА с камерами могут обеспечивать картографирование и мониторинг землетрясения, оползней, эрозий, селей, наводнений, а также обнаружении пожаров и др.

Рассматриваемые технологии в Таджикистане позволили существенно расширить возможности мониторинга с воздуха и повысили его доступности. С этой целью были проведены полеты с использованием БПЛА в различных районах страны.

С целью углубленного мониторинга озера Сарез и Усойского завала проведением исследовательских работ по инженерной геологии, гидрографическому, геофизическому картированию были осуществлены полевые наблюдения с 29-30 июля 2017 г. Была выполнена аэросъемка с использованием БПЛА прилегающего к Усойскому завалу Сарезского озера территории, на площади 70 км² с разрешением снимков 20 см и собственно Усойского завала на площади 10 км² с разрешением снимков 10 см. Аэросъемка местности с помощью БПЛА проводилась в течение 2-х дней. Впервые в истории исследования озера Сарез были получены аэрофотоснимки этой территории с использованием БПЛА [11].

Таблица 4

БПЛА с возможностями аэрофотосъёмки и видеосъёмки

Название	Рисунок	Полезная нагрузка, г	Высота полета (м над ур. м.)	Время (мин)
Dji Phantom 4		400	6000	28-30
Dji Inspire 1 Pro		-	4500	15
DraganFlyer X4		250	2438	20
MD4-1000		800	5000	42
Геоскан 101 Геодезия		800	4000	60
QC-2 Micro UAV		500	5000	60-90

С целью проверки БПЛА в горных условиях были проведены аэрофотосъемки и мониторинг реки Лучоб. Были получены фотографии с разрешением 5 см и построена 2D- и 3D-карты местности.

Следует отметить, что аэрометод, меньше зависящий от облачности, так как съемка может вестись с высоты, меньшей высоты облаков, в зависимости от высоты полета позволяет получать изображения с разрешением до нескольких сантиметров, тогда как

при космосъемках самое высокое пространственное разрешение составляет 30 см (WorldView-3) [12].

На территории Рамитского ущелья также были проведены аэрофотосъемки и созданы карты местности, карты для определения перепада высоты и карты NDVI (Normalized Difference Vegetation Index). NDVI - Нормализованный относительный индекс растительности – вегетационный индекс – это показатель количества фотосинтетически активной биомассы, применяемый для решения задач, использующих количественные оценки растительного покрова.

Таким образом, применение и внедрение БПЛА является перспективным и высокотехнологическим направлением. Благодаря современным дистанционным методам исследования с помощью БПЛА, появляется возможность проведения мониторинга окружающей среды и водных ресурсов, независимо от их удаленности, дорожной доступности и сложным географическим рельефам, особенно в условиях горной местности Таджикистана. Снимки высокого разрешения, выполненные с помощью БПЛА позволяют быстро и эффективно отслеживать природные и антропогенные процессы, выявляют источники загрязнений, где можно планировать природоохранные мероприятия, а также проводить научные исследования местности. Дистанционные методы наблюдения и ГИС-технологии могут внести существенный вклад в исследование, предотвращение и смягчение последствий стихийных бедствий, исключение человеческих жертв при ЧС, а также предоставить данные для эффективного управления рисками стихийных бедствий, связанных с водой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Национальная стратегия Республики Таджикистан по управлению риском бедствий на 2010-2015 гг. (утв. Постановлением Правительства Республики Таджикистан 30 марта 2010 г. № 164).
2. Усмонов И.М., Латыпов Х.А., Кенджаев М.М., Халимова М.Т. - Чрезвычайные ситуации природного характера, возможные на территории Республики Таджикистан, и их последствия. Изд. Первое. – Душанбе, 2007.
3. Краткий анализ чрезвычайных ситуаций, зарегистрированных на территории Республики Таджикистан за 11 месяцев 2018 г., адрес доступа: <https://www.khf.tj/ru/node/862> Актуальность: 06.12.2018.
4. Фазылов А.Р., Фазылов В.А. Гидротехнические мероприятия и регулирование селей в условиях изменения климата. - Вестник Донского государственного аграрного университета, 2017, 2(24.1), ч. 1. с.105-112. http://www.dongau.ru/nauka-i-innovatsii/vestnik-universiteta/2017._24.1_2017.pdf
5. Shinozuka M., Rejaie A. Correlational analysis of remotely sensed pre- and post-disaster images. SPIE's 7th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials, 2000.
6. Yamazaki F., Corotis R., Schueller G., Shinozuka M. Applications of remote sensing and GIS for damage assessment. Structural Safety and Reliability (Proceedings of Icosar '01), 2001, Изд. Taylor & Francis Group.
7. Lemmens M. 2011. UAV. GIM International, v.25, n.2, p.11

8. R.Al-Tahir, M.Arthur, D.Davis, Low Cost Aerial Mapping Alternatives for Natural Disasters in the Caribbean, (Trinidad and Tobago 2011).
9. Смирнов А. [Электронный ресурс] - Как выбрать беспилотник для картографических задач. URL:<https://russiadrone.ru/publications/kak-vybrat-bespilotnik-dlya-kartograficheskikh-zadach/>
10. Eisenbeiß H. UAV Photogrammetry. PhD Thesis, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Zurich, 2009.
11. Мониторинг озера Сарез: [Электронный ресурс] – Отчет экспедиции по мониторингу озера Сарез в июле 2017 г., URL: <https://www.rceeca.tj/?p=812> /.
12. Космические снимки и аэрофотоснимки. [Электронный ресурс] URL: <https://sovzond.ru/learning/self-study/faq/#i522>

М.С.САФАРОВ, А.Р.ФАЗИЛОВ*

ХАВФИ ОФАТҲОИ ТАБИЙ МАРБУТ БА ОБ ВА УСУЛҲОИ ЗОНДРОНИИ ФОСИЛАВИИ МОНИТОРИНГИ ОНҲО

*Маркази илмӣ - таҳқиқотии экология ва муҳити зисти Осиёи Марказӣ (Душанбе),
*Институту масъалаҳои об, гидроэнергетика ва экологияи
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Мақола ба таҳлили баҳодихии хавфи офатҳои табиӣ дар Тоҷикистон ва асосноксозии имконияти истифодаи ҳавопаймоҳои бесарнишин барои мониторинг ва чамъоварии геомаводҳо бахшида шудааст.

Калимаҳои калидӣ: ҳолатҳои фавқуллода, ҳавопаймоҳои бесарнишин, расмгирӣ бо истифода аз ҲБС.

M.S.SAFAROV, A.R.FAZILOV

THE RISKS OF NATURAL DISASTERS RELATED TO WATER AND REMOTE METHODS OF THEIR MONITORING

*Research Center for Ecology and Environment of Central Asia (Dushanbe),
Institute of Water problems, hydropower and ecology,
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

The article is devoted to the analysis of the risk of natural disasters in Tajikistan and the justification of the possibility of using unmanned aerial vehicles for monitoring and data collection.

Key words: natural disasters, unmanned aerial vehicles, aerial photography.

Редакция и корректура – Н.Г.Сапожников

Сдано в набор 03.01.2019 г. Подписано в печать 17.01.2019 г.
Печать офсетная. Формат 70×100 1/16. Гарнитура Times. Усл. печ. л.8. Заказ № ____.
Тираж 300 экз.

*Адрес редколлегии: 734025, Душанбе, пр.Рудаки, 33, каб. 47.
Тел.:2-21-62-64. E-mail: danrt@mail.ru
Издательство «Дониш»: 734029, Душанбе, ул.Айни, 121, корп.2.*
