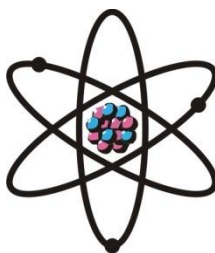


ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Журнал основан
в январе 1952 г.



№ 1 (178)
2020 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Х.Х.Муминов – главный редактор, академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Г.И.Кохирова** – зам.главного редактора, член-корреспондент; **С.Х.Абдулаева** – ответственный секретарь; **Х.М.Ахмедов** – академик, доктор химических наук; **П.Б.Бабаджанов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **С.А.Исхоков** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **З.В.Кобулиев** – член-корреспондент, доктор технических наук, профессор; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **С.О.Одинаев** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Ф.Рахими** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Д.Усманов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор; **Ф.Шокир** – кандидат физико-математических наук.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

С.А.Исхоков, О.А.Нематуллоев. О собственных значениях одного класса несамосопряженных вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области	7
О.А.Джурахонов. О точных неравенствах типа Джексона-Стечкина в гильбертовом весовом пространстве $L_{2,\mu}(Q)$	16
Ф.Раимзода. Об одновременном приближении функции и ее производных тригонометрическими полиномами в L_2	29

Н.Раджабов, С.Б.Зарипов. К теории одного класса двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сверхсингулярной линией, симметричных относительно одной из переменных 37

ФИЗИКА

Имом М.Ш., Муминов Х.Х., Ромоданов В.Л., Рахими Ф., Одинаев С.Ф. Исследование эффективности цифрового метода анализа загрузки нейтронного канала для различных сцинтилляционных счетчиков 44

А.А.Адхамов, Ф.Холмуродов. Объемное преломление двух пересекающихся лазерных пучков в сульфиде кадмия при низких температурах 50

Х.Гафуров, Х.А.Тошходжаев. Механизм высокой стабильности временной структуры лазера с синхронизацией мод 57

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Ш.Х.Раджабов, Д.А.Сайдалиев, Х.Алишер, Э.Абуали, А.С.Файзуллаев. Технология получения криолита, фторида алюминия и плавиковой кислоты из глинозем-, фторсодержащих отходов производства алюминия 65

П.Р.Иброхимов, И.Н.Ганиев, Ф.А.Рахимов, З.Р.Обидов. Влияние добавок хрома на анодное поведение сплава $Zn_{0.5}Al$ в щелочной среде 73

Р.С.Мирзоева, Д.С.Мухидинов, Х.Х.Авлоев, Д.Х.Халиков. Сорбции ионов металлов пектиновыми гидрогелями 78

М.Д.Бобоёров, Б.Б.Баротов, Ф.А.Хамидов, Ш.Р.Муродов, У.М.Мирсаидов. Термодинамический анализ протекающих процессов при сернокислотном выщелачивании руд месторождений «Западный Таджикистан» и «Центральный Таджикистан» 84

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Ё.К.Кудратуллоев, К.С.Мабаткадамзода. Комплексообразование серебра (I) с тиопирином в водно-спиртовых растворах 89

ГЕОЛОГИЯ

Ш.А.Файзуллоев. Оценка точности классификации данных дистанционного зондирования в ГИС-технологии на примере района каскада ГЭС на реке Вахш 96

ГЕОХИМИЯ

А.К.Ошурмамадов. Геохимические особенности и геодинамические условия формирования вулканоплутонических ассоциаций Южно-Гиссарской зоны 104

ГИДРОМЕХАНИКА

Ш.А.Мирзоев. Модификация системы уравнений Буссинеска для решения некоторых задач в напорных трубах и открытых каналах. 113

ЮБИЛЕЙ УЧЕНОГО

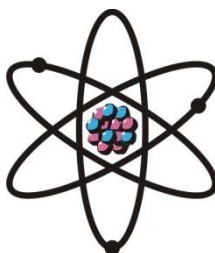
Краткий очерк научно-педагогической и организаторской деятельности академика Сафиева Хайдара (к 70-летию со дня рождения) 122

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

Академик Рахим Марупов (27.11.1936 - 12.01.2020) 128

ШҮЪБАИ
ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,
ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА

Маҷалла аз моҳи
январи соли 1952
нашр мешавад



№ 1 (178)
с. 2020

ХАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:

Ҳ.Ҳ.Муминов – сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Кохирова Г.И.** – муовини сармуҳаррир, узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **С.Ҳ.Абдулоева** – котиби масъул; **Ҳ.М.Аҳмедов** – академик, доктори илми химия; **П.Б.Бобочонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **И.Н.Ғаниев** – академик, доктори илми химия, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **С.А.Исҳоков** – узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.В.Кобулиев** – узви вобаста, доктори илмҳои техника, профессор; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор; **С.Х.Неъматуллоев** – академик, доктори илмҳои техника; **С.О.Одинаев** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Ф.Раҳимӣ** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҳ.Раҳмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Раҷабов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҷ.Усмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **А.Р.Ғайзиев** – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва минералогия, профессор; **Ҷ.Х.Ҳоликов** – академик, доктори илми химия, профессор; **Ф.Шоқир** – номзадӣ илмҳои физикаю математика.

МУНДАРИҶА

МАТЕМАТИКА

С.А.Исҳоков, О.А.Нематуллоев. Оид ба қимматҳои хоси як синфи операторҳои бахуҳамроҳнашудаи эллиптикии таназзулбанда дар соҳаи маҳдуд	7
О.А.Ҷураҳонов. Оид ба нобаробари аниқи намуди Ҷексон-Стечкин дар фазои вазнии гилбертии $L_{2,\mu}(Q)$	16
Ф.Раимзода. Оид ба якбора наздиккунии функсия ва ҳосилаҳои он ба воситаи бисераъзогиҳои тригонометрӣ дар L_2	29
Н.Раҷабов, С.Б.Зарипов. Дар бораи як синфи муодилаҳои интегралӣ дученакаи намуди волтерр бо хатҳои махсуси дараҷаи оӣ, ки нисбатан ба яке аз тағйирёбандаҳо симметрӣ мебошанд	37

ФИЗИКА

Имом М.Ш., Муминов Ҳ.Ҳ., Ромоданов В.Л., Ф.Раҳимӣ., Одинаев С.Ф. Тадқиқи самаранокии таҳлили усули ададии пурборкунии канали нейтронӣ барои ҳисобкунакҳои гуногуни синтиллятсионӣ	44
А.А.Адхамов, Ф.Холмуродов. Шикасти ҳаҷмии ду нурҳои ҳамдигарро буррандаи лазерӣ дар сулфати кадми дар ҳарорати паст.....	50
Ҳ.Ғафуров, Ҳ.А.Тошхӯчаев. Механизми устувории баланди сохти таркибии импульсҳои лазер бо синхронизатсияи модҳо	57

ХИМИЯИ ФИЗИКАВӢ

Ш.Х.Раджабов, Д.А.Сайдалиев, Х.Алишер, Э.Абуали, А.С.Файзуллаев. Технологияи ҳосил намудани криолит, фториди алюминий ва кислотаи гидрогенфторид аз партовҳои гилҳоку фтордори истеҳсолоти алюминий	65
П.Р.Иброҳимов, И.Н.Ғаниев, Ф.А.Раҳимов, З.Р.Обидов. Таъсири иловаҳои хром ба рафтори анодии хӯлаи $Zn_{0.5}Al$, дар муҳити ишқорӣ	73
Р.С.Мирзоева, Д.С.Муҳидинов, Х.Х.Авлоев, Ҷ.Х.Холиқов. Сорбтсияи иони металлҳо аз чониби пектини гидрогели	78
М.Д.Бобоев, Б.Б.Баротов, Ф.А.Ҳамидов, Ш.Р.Муродов, У.М.Мирсаидов. Таҳлили термодинамикии гузариши равандҳо ҳангоми ишқоронии кислотагии маъданҳои конҳои «Тоҷикистони Ғарбӣ» ва «Тоҷикистони Марказӣ»	84

ХИМИЯИ ҒАЙРИОРГАНИКИ

Ё.Қ.Қудратуллоев, К.С.Мабатқадамзода. Комплекси силикунии нукраи (I) бо тиопирин дар маҳлулҳои обию спиртӣ	89
---	-----------

ГЕОЛОГИЯ

Ш.А.Файзуллоев. Арзёбии дақиқии таснифоти маълумотҳои тадқиқоти масофавӣ бо истифода аз ГИС-технология дар мисоли минтақаи силсиланеруғоҳи дарёи Вахш	96
--	-----------

ГЕОХИМИЯ

А.К.Ошурмамадов. Хусусиятҳои геохимиявӣ ва шароитҳои геодинамики ассотсиатсияи вулкониҳою плутониҳою зонаи Ҳисори Чанубӣ	104
---	------------

ГИДРОМЕХАНИКА

Ш.А.Мирзоев. Тағирёбии системаи муодилаҳои Буссинеск ҳангоми ҳалли баъзе масъалаҳои доир ба ҳаракати фишурдашавандаи моеъ дар кубурҳо ва каналҳои кушод.	113
--	------------

ҶАШНИ ОЛИМОН

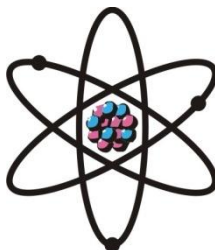
Сафиев Хайдар - 70 сол	122
------------------------------	------------

ЁДБУДИ ОЛИМ

Раҳим Марупов (27.11.1936 - 12.01.2020)	128
---	------------

**DEPARTMENT OF
PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES**

The journal was established
in January 1952



№ 1 (178)
2020

EDITORIAL BOARD

Prof. **Kh.Kh.Muminov**, Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; **G.I.Kokhirova**, Doctor of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **S.H.Abdulaeva**, Secretary; **Kh.M.Akhmedov**, Doctor of Chemistry; Prof. **P.B.Babadzhanov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **A.R.Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **M.I.Ilolov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **I.N.Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **D.Kh.Khalikov**, Doctor of Chemistry; Prof. **S.A.Iskhokov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.V.Kobuliev**, Doctor of Engineering; Prof. **U.M.Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; **S.Kh.Negmatullaev**, Doctor of Engineering; Prof. **S.O.Odinaev**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **N.R.Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **F.Rakhimi**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.Kh.Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.D.Usmanov**, Doctor of Physical and Mathematical; **F.Shokir**, Candidate of Physical and Mathematical.

CONTENTS

MATHEMATICS

- S.A.Iskhokov, O.A.Nematulloev.** On eigenvalues of a class of non-selfadjoint degenerate elliptic operators in a bounded domain **7**
- O.A.Jurakhonov.** On exact inequalities type of Jackson-Stechkin in hilbert weight space $L_{2,\mu}(Q)$ **16**
- F.Raimzoda.** About simultaneous approximation of functions and its derivatives by trigonometric polynomials in L_2 **29**
- N.Rajabov, S.B.Zaripov.** To theory one class of simmetrical two dimensional volterra type integral equation with one boundary and one interior supersingular lines..... **37**

PHYSICS

- M.Sh.Imom, Kh.Kh.Muminov, V.L.Romodanov, F.Rahimi, S.F.Odinaev.** Research of the efficiency of the digital analysis of loading a neutron channel for various scintillation counters **44**
- A.A.Adhamov, F.Kholmurodov.** Bulk refraktion of two intersecting lazer beams in cadmium sulfide at low temperatures **50**
- Kh.Gafurov, H.A.Toshhodzhaev.** Mechanism high stability of time structure in mode-locked laser..... **57**

PHYSICAL CHEMISTRY

- Sh.Kh.Rajabov, D.A.Saidaliev, H.Alisher, E.Abuali, A.S.Faizulloev.** The technology of reception cryolite, fluoride and fluid acid of aluminum from alumina-, fluorine containing aluminum production wastes **65**
- P.R.Ibrohimov, I.N.Ganiev, F.A.Rahimov, Z.R.Obidov.** Influence of additives of chrome on anode behaviour Zn_{0.5}Al alloy, in alkaline environment **73**
- R.S.Mirzoeva, D.S.Mukhiddinov, Kh.H.Avloev, D.Kh.Khalikov.** Sorption of metal ions by pectin hydrogels **78**
- M.D.Boboyorov, B.B.Barotov, F.A.Khamidov, Sh.R.Murodov, U.M.Mirsaidov.** Thermodynamic analysis of flowing processes during sulfuric acid leaching of the ores from “Western Tajikistan” and “Central Tajikistan” deposits..... **84**

INORGANIC CHEMISTRY

- Y.K.Kudratulloev, K.S.Mabatkadamzoda.** Complex formation of silver (I) with thiopirine in water-alcohol solutions..... **89**

GEOLOGY

- Sh.A.Faizulloev.** Accuracy assesment of classification of remotly sensed data in GIS technology, a case study of the HPP cascade area on the Vakhsh river **96**

GEOCHEMISTRY

- A.K.Oshurmamadov.** Geochemical features and geodynamic formation conditions volcano-plutonic association of the Southern Hissar zone **104**

HYDROMECHANICS

- Sh.A.Mirzoev.** Modification of the system of Boussinesq equations for solving some problems in pressure pipes and open channels. **113**

JUBILEE OF SCIENTIFIS

- Safiev Khaydar - 70 years old**..... **122**

MEMORY OF SCIENTIST

- Rakhim Marupov (27.11.1936 - 12.01.2020)**..... **128**

УДК 517.957

С.А.ИСХОКОВ, О.А.НЕМАТУЛЛОЕВ*

**О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА
НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
ОПЕРАТОРОВ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ**

Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан,

**Бохтарский Государственный университет им. Н.Хусрава*

Поступила в редакцию 05.03.2020 г.

В работе изучается класс эллиптических дифференциальных операторов высшего порядка в ограниченной области с измеримыми коэффициентами, вырождающихся степенным образом вдоль всей границы. Доказывается, что эти операторы имеют дискретный спектр и изучается асимптотика их собственных значений.

Ключевые слова: эллиптический оператор, степенное вырождение, собственное значение, ограниченная область.

1. Введение. Работа посвящена изучению некоторых спектральных свойств одного класса эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением коэффициентов вдоль всей границы. В работе доказывается, что исследуемые операторы имеют дискретный спектр и определена степень абсолютной суммируемости собственных значений этих операторов. По сравнению с известными результатами по рассматриваемой проблеме существенно ослаблены условие эллиптичности и условия на гладкости коэффициентов изучаемых операторов. Дифференциальные операторы связаны с полуторалинейными формами, коэффициенты которых принадлежат некоторым лебеговым пространствам со степенным весом и могут иметь интегрируемую сингулярность во внутренних точках области.

Адрес для корреспонденции: Исхоков Сулаймон Абунасович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Институт математики АН РТ, E-mail: sulaimon@mail.ru

2. Формулировка результатов. Пусть R^n – n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и пусть Ω – ограниченная область в R^n с $(n-1)$ -мерной границей $\partial\Omega$ из класса C^1 .

Символом $\rho(x)$ обозначим регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$, то есть достаточно гладкую функцию со следующими свойствами

$$c_1 d(x) \leq \rho(x) \leq c_2 d(x), \quad d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega),$$

$$|\rho^{(k)}(x)| \leq M_k \rho^{1-|k|}(x),$$

для всех $x \in \Omega$ и любого мультииндекса k ; положительные числа c_1, c_2, M_k не зависят от x . Если $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ – мультииндекс, то $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ – длина мультииндекса и

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

обобщенная в смысле С.Л.Соболева производная функции $u(x)$.

Пусть r – целое неотрицательное число, α, p – вещественные числа и $1 \leq p < +\infty$. Символом $W_{p;\alpha}^r(\Omega)$ обозначим пространство всех измеримых в Ω функций $u(x)$, определенных на Ω , имеющих в этой области все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $u^{(k)}(x)$ порядка $\leq r$ с конечной нормой

$$\|u; W_{p;\alpha}^r(\Omega)\| = \left\{ \|u; L_{p;\alpha}^r(\Omega)\|^p + \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad (1)$$

где

$$\|u; L_{p;\alpha}^r(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \rho^{\alpha p}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Классы $W_{p;\alpha}^r(\Omega)$ являются банаховыми пространствами с нормой (1) и при $\alpha = 0$ совпадают с обычными пространствами С.Л.Соболева $W_p^r(\Omega)$. Если $p = 2$, то класс $W_{2,\alpha}^r(\Omega)$ является гильбертовым пространством. При $r = 0$ класс $L_{p;\alpha}^r(\Omega)$ обозначим через $L_{p;\alpha}(\Omega)$.

Символом $C_0^\infty(\Omega)$ обозначим класс бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций.

Первый результат типа теорем вложения для пространств $W_{p;\alpha}^r(\Omega)$ был получен В.И. Кондрашовым [1]. Систематическое исследование пространств $W_{p;\alpha}^r(\Omega)$ принадлежит Л.Д. Кудрявцеву [2]. Оно развивалось и дополнялось работами многих математиков, среди которых С.М. Никольский, О.В. Бесов, Я. Кадлец, А. Куфнер, Х. Трибель и др. Более подробную библиографию по этому вопросу можно найти в обзорной работе С.М. Никольского, П.И. Лизоркина, Н.В. Мирошина [3].

Символом $\overset{\circ}{W}_{p;\alpha}^r(\Omega)$ обозначим замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ в норме (1) пространства $W_{p;\alpha}^r(\Omega)$.

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор

$$(Lu) = \sum_{|k|, |l| \leq r} (-1)^{|l|} (\rho^{2\alpha-2r+|k|+|l|}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x))^{(l)}, \quad (2)$$

где r – натуральное, α – вещественное числа, $k = (k_1, k_2, \dots, k_n), l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ – мультииндексы. Предполагается, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ являются комплекснозначными.

С оператором (2) связана следующая полуторалинейная форма

$$B[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad (3)$$

где $p_k(x) = \rho^{\alpha-r+|k|}(x)$.

Теорема 1. Пусть $0 \leq \alpha < r$, $\alpha + 1/2 \notin \{1, 2, \dots, r\}$ и

$$\int_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x) |v(x)|^2 dx \leq M_0 \operatorname{Re} B[v, v] \quad \text{для всех } v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Пусть также выполнены условия:

I) коэффициенты $a_{kl}(x)$ формы (3) при $|k|=|l|=r$ непрерывны в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ и удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \overline{\xi^l} \geq c_0 |\xi|^{2r}$$

для всех $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$ (c_0 – положительная постоянная, независящая от x, ξ);

II) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|, |l| \leq r$ и $|k| + |l| \leq 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}; -n/p_{kl}}(\Omega)$, где числа p_{kl} определяются соотношениями:

$$p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{r-|k|} + \varepsilon, |l|=r, n > 2(r-|k|), \\ \frac{n}{r-|l|} + \varepsilon, |k|=r, n > 2(r-|l|); \end{cases}$$

если $|k| \leq r-1, |l| \leq r-1$, то

$$p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{2r-|k|-|l|} + \varepsilon, n > 2(r-|k|), n > 2(r-|l|), \\ \frac{n}{r-|l|+\varepsilon}, n \leq 2(r-|k|), n > 2(r-|l|), \\ \frac{n}{r-|k|+\varepsilon}, n > 2(r-|k|), n \leq 2(r-|l|); \end{cases}$$

p_{kl} – любое конечное число больше 2 в оставшихся случаях. Здесь ε – достаточно малое положительное число.

Тогда оператор L имеет дискретный спектр, и для собственных значений λ_j оператора L выполняется следующее условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{-\gamma/2} < \infty, \quad (4)$$

где γ – любое число, удовлетворяющее неравенству $\gamma > n/(r-\alpha)$.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 собственные значения λ_j дифференциального оператора L удовлетворяют неравенству

$$j^{2/\gamma} < |\lambda_j| \quad (5)$$

при достаточно больших натуральных j . Здесь γ – такое же число, как в теореме 1.

Следующие разделы работы посвящены доказательству теоремы 1 и следствия 1.

3. Некоторые спектральные свойства вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы 1, в этом разделе сформулируем некоторые известные результаты о свойствах собственных значений и s -чисел операторов компактного вложения функциональных пространств.

Напомним, что (см., например, [4]) для оператора A , действующего из некоторого гильбертова пространства X в другое гильбертово пространство Y , сопряженный оператор A^* действует из Y в X . Следовательно, оператор A^*A действует из X в X и является неотрицательным оператором:

$$(A^*Au, u) = (Au, Au) = \|Au; X\|^2 \geq 0.$$

Если оператор A – вполне непрерывный, то оператор A^*A будет вполне непрерывным оператором в гильбертовом пространстве X и его спектр образует счетное множество неотрицательных чисел с единственной предельной точкой $\lambda = 0$. Занумеруем их в порядке убывания с учетом кратностей и обозначим через $\lambda_j(A^*A)$. Неотрицательные числа

$$s_j(A) = (\lambda_j(A^*A))^{1/2}, \quad j = 1, 2, \dots$$

называются s -числами оператора A .

Пусть $1 \leq p < \infty$. Символом $\mathfrak{G}_p(X, Y)$ обозначим пространство всех вполне непрерывных операторов A , действующих из пространства X в пространство Y со следующей нормой

$$\|A; \mathfrak{G}_p(X, Y)\| = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) \right\}^{1/p} < \infty.$$

Со свойствами этих пространств можно ознакомиться в монографии И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна [4].

Пусть H_0 – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot; \cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$, H_+ – другое гильбертово пространство, плотно вложенное в H_0 , со своим скалярным произведением $(\cdot; \cdot)_+$ и нормой $\|\cdot\|_+$. Обозначим через H_- пополнение пространства H_0 по норме

$$\|f; H_-\| = \sup_{u \in H_+} \frac{|(f, u)_0|}{\|u\|_+}, \quad f \in H_0.$$

Полученная тройка H_+, H_0, H_- плотно вложенных пространств называется (см., например, [3] и [5]) оснащенным гильбертовым пространством. Пространство H_+ называется позитивным пространством, а пространство H_- – негативным пространством.

Пусть $D \subseteq H_+$ – некоторое линейное множество, плотное в H_0 . Символом $\overset{\circ}{H}_+$ обозначим замыкание D в норме пространства H_+ , а символом $\overset{\circ}{H}_-$ – отвечающее ему негативное пространство.

Пусть $\mathcal{B}[u, v]$ – полуторалинейная форма, заданная на множестве D , удовлетворяющая условиям

$$|\mathcal{B}[u,v]| \leq C_0 \|u\|_+ \|v\|_+ \quad \forall u,v \in D = D(\mathcal{B}), \quad (6)$$

$$\operatorname{Re}\{\mathcal{B}[u,u] + \lambda_0 \|u\|_+^2\} \geq \delta_0 \|u\|_+^2 \quad \forall u \in \mathring{H}_+, \quad (7)$$

где C_0, λ_0, δ_0 – некоторые постоянные.

Справедливо следующее утверждение (см., например, [3] или [6])

Утверждение 1. Пусть билинейная форма $\mathcal{B}[u,v]$ удовлетворяет условиям (6),

(7) и пусть вложение \mathring{H}_+ в H_0 компактно. Тогда задача: найти решение $u \in \mathring{H}_+$

$$\mathcal{B}[u,v] + \mu(u,v) = 0 \quad \forall v \in \mathring{H}_+$$

имеет ненулевое решение для счетного числа значений параметра $\mu = \mu_j, j = 1, 2, \dots$, причем

$$\mu_j \sim s_j(\mathcal{O})^{-2} \quad \text{при } j \rightarrow \infty,$$

где \mathcal{O} – оператор вложения \mathring{H}_+ в H_0 и $s_j(\mathcal{O}), j = 1, 2, \dots$ – s -числа этого оператора.

4. Доказательство основных результатов. Действуя так же, как при доказательстве теоремы 4.1 работы [7] с помощью теорем вложения разных метрик для весовых пространств $W_{p,\alpha}^r(\Omega)$ доказывается, что форма (3) удовлетворяет неравенствам

$$\left| \mathcal{B}[u,v] + \varkappa_0 \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx \right| \leq M_0 \|u; W_{2,\alpha}^r(\Omega)\| \|v; W_{2,\alpha}^r(\Omega)\|, \quad \forall u, v \in C_0^\infty(\Omega), \quad (8)$$

$$\operatorname{Re} \mathcal{B}[u,u] + \varkappa_0 \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \geq \varkappa_1 \|u; W_{2,\alpha}^r(\Omega)\|^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \quad (9)$$

где $M_0, \varkappa_i, i = 0, 1,$ – положительные постоянные, независящие от $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Согласно теореме 1.1.3 работы [3] вложение $W_{2,\alpha}^r(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ компактно при $r - \alpha > 0$. Поэтому неравенства (8), (9) позволяют нам применить утверждение 1. В силу этого утверждения для собственных значений λ_j оператора L имеет место соотношение

$$\lambda_j \sim s_j(\mathcal{O})^{-2} \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где \mathcal{O} – оператор вложения $\mathring{W}_{2,\alpha}^r(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и $s_j(\mathcal{O}), j = 1, 2, \dots$ – s -числа оператора \mathcal{O} .

Лемма 1. Пусть \mathcal{O}_s – оператор вложения $W_2^s(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и пусть Ω – ограниченная область в R^n с гладкой границей.

Тогда

$$O_s \in \mathfrak{G}_p(W_2^s(\Omega), L_2(\Omega)), \quad (11)$$

где $p = \varepsilon + n/s$ и ε – произвольное положительное число.

Доказательство см. в [8].

Включение (11) означает, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(O_s)^{\frac{n+\varepsilon}{s}} < \infty. \quad (12)$$

Это оценка позволяет получить асимптотику чисел $s_j(O)$, если воспользоваться вложением (см., например, [8], [9])

$$W_{2;\alpha}^r(\Omega) \rightarrow \tilde{W}_2^{r-\alpha}(\Omega),$$

где $\tilde{W}_2^{r-\alpha}(\Omega) = W_2^{r-\alpha}(\Omega)$, если $r-\alpha > 0$ и $\tilde{W}_2^{r-\alpha}(\Omega) = L_2(\Omega)$ в противном случае.

Следовательно, можно представить оператор вложения $O: W_{2;\alpha}^r(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ при $r-\alpha > 0$ в виде

$$O = J \cdot O_{r-\alpha}, \quad (13)$$

где J – оператор вложения $W_{2;\alpha}^r(\Omega)$ в $W_2^{r-\alpha}(\Omega)$. В силу ограниченности оператора J и неравенства (12) из представления (13) следует, что $O \in \mathfrak{G}_{\varepsilon+n/(r-\alpha)}(W_{2;\alpha}^r(\Omega), L_2(\Omega))$, то есть

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(O)^\gamma < \infty,$$

где γ – любое число большее чем $\frac{n}{r-\alpha}$. Отсюда в силу асимптотического соотношения

(10) следует оценка (4).

Теорема 1 доказана.

Для доказательства следствия 1 заметим, что из сходимости ряда в левой части неравенства (4) и расходимости гармонического ряда следует, что

$$|\lambda_j|^{-\gamma/2} \leq \frac{1}{j}$$

при достаточно больших j . Отсюда следует неравенство (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондрашов В.И. Об одной оценке для семейств функций, удовлетворяющих некоторым интегральным неравенствам – ДАН СССР, 1938, т. 18. № 4-5, с. 253-254.
2. Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений – Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР, 1959, т. 55, с. 1-182.
3. Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений – Известия Вузов. Математика. 1988, №8, с. 4-30.
4. Гохберг И.Ц, Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965, 448 с.
5. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, Наукова думка. – 1965, 799 с.
6. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980, 664 с.
7. Исхоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением – Математические заметки, 2010, т. 87, № 2, с. 201-216.
8. Мирошин Н.В. Обобщенная задача Дирихле для одного класса эллиптических дифференциальных операторов, вырождающихся на границе области. некоторые спектральные свойства – Дифференциальные уравнения, 1976, т.12, №6, с.1099-1111.
9. Meyer R.D. Some embedding theorems for generalized Sobolev spaces and applications to degenerate elliptic differential operators. – Journal of Math. and Mech. 1967, v.16, № 7, pp. 739-760.

С.А.ИСХОКОВ, О.А.НЕМАТУЛЛОЕВ*

ОИД БА ҚИММАТҲОИ ХОСИ ЯК СИНФИ ОПЕРАТОРҲОИ БАХУДҲАМРОҲНАШУДАИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАНАЗЗУЛЁБАНДА ДАР СОҲАИ МАҲДУД

*Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,
Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н.Хусрав

Дар мақола як синфи операторҳои дифференсиалии навъи эллиптикии дараҷаи олӣ дар соҳаи маҳдуд бо коэффициентҳои ченшаванда омӯхта мешавад, ки дар тамоми сарҳад таназзулӯбии дараҷагӣ доранд. Исбот карда мешавад, ки ин операторҳо спектри дискретӣ доранд ва асимптотикаи қимматҳои хоси онҳо омӯхта мешавад.

Калимаҳои калиди: оператори эллиптикӣ, таназзулӯбии дараҷагӣ, қимматҳои хос, соҳаи маҳдуд.

S.A.ISKHOKOV, O.A.NEMATULLOEV*

**ON EIGENVALUES OF A CLASS OF NON-SELFADJOINT DEGENERATE
ELLIPTIC OPERATORS IN A BOUNDED DOMAIN**

*A.D.Dzhuraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,
* Bokhtar State University named after Nosiri Khusrav*

We study a class of higher-order elliptic differential operators with summable coefficients in a bounded domain with power-law degeneracy along the entire boundary of the domain. It is proved that these operators have a discrete spectrum and asymptotic of their eigenvalues is studied.

Key words: elliptic operator, power degeneration, eigenvalue, bounded domain.

УДК 517.5

О.А.ДЖУРАХОНОВ

**О ТОЧНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ДЖЕКСОНА-СТЕЧКИНА В
ГИЛЬБЕРТОВОМ ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $L_{2,\mu}(Q)$**

В статье получены точные неравенства типа Джексона-Стечкина между величиной наилучшего среднеквадратического приближения "углом", составленные из действительных ортогональных алгебраических полиномов и интегралами, содержащими обобщенный модуль непрерывности функций, порожденных конкретным оператором обобщенного сдвига в метрике пространства $L_{2,\mu}(Q)$ с весом $\mu(x, y) := \mu_1(x)\mu_2(y)$ на классах функций двух переменных f , интегрируемых с квадратом на прямоугольнике $Q := \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\mu} = \left(\iint_{(Q)} \mu(x, y) f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

Ключевые слова: ортогональные многочлены, обобщенный модуль непрерывности, оператор обобщенного сдвига, квазиполином, наилучшее приближение.

Введение. В работе исследуются вопросы разложения функций двух переменных в двойные ряды Фурье по классическим ортогональным многочленам в общей постановке и получены точные неравенства типа Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения "углами" [1] (или "квазиполиномами" [2]) и усредненными с весом значениями обобщенного модуля непрерывности функций в $L_{2,\mu}(Q)$. Основными инструментами исследования являются оператор обобщенного сдвига, обобщенный модуль непрерывности функций из $L_{2,\mu}(Q)$, аппарат "углов" (или "квазиполиномов").

Решается ряд экстремальных задач теории приближения функций двух переменных "углами", которые могут быть использованы для решения некоторых

Адрес для корреспонденции: Джурахонов Олимджон Акмалович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет.
E-mail: olim1974@mail.ru

практических задач. Статья является дальнейшим развитием и обобщением результатов работы [3].

1. Предварительно приведём нужные нам для дальнейшего определения и обозначения. Функция $\rho(x)$ называется весовой функцией на конечном интервале (a, b) , если на этом интервале она неотрицательна, интегрируема и её интеграл положителен, то есть если $\rho(x) \geq 0$ и выполняется условие

$$0 < \int_a^b \rho(x) dx < \infty.$$

Если же интервал (a, b) бесконечен, то, кроме того, должны абсолютно сходиться интегралы

$$\mu_n := \int_a^b x^n \rho(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

которые называются степенными моментами функции $\rho(x)$.

Обозначим через $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}(Q)$, где $Q = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ - пространство суммируемых с квадратом функций $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ с весом $\mu := \mu(x, y)$ и конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,\mu}} := \|f\|_{L_{2,\mu}(Q)} = \left(\iint_{(Q)} \mu(x, y) f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

Пусть $\{P_p(x)\}_{p=0}^\infty$ и $\{Q_q(y)\}_{q=0}^\infty$ две полные ортонормированные системы многочленов, соответственно с весовыми функциями $\mu_1(x)$ и $\mu_2(y)$. Рассмотрим двойной ряд Фурье функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$, $\mu(x, y) := \mu_1(x)\mu_2(y)$:

$$f(x, y) = \sum_{p=0}^\infty \sum_{q=0}^\infty a_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y), \quad (1)$$

где

$$a_{pq}(f) = \iint_{(Q)} \mu_1(x) \mu_2(y) f(x, y) P_p(x) Q_q(y) dx dy$$

– коэффициенты Фурье по системе многочленов $\{P_p(x)Q_q(y)\}_{p,q=0}^\infty$. Отметим, что знак равенства в (1) понимается в смысле сходимости двойного ряда, стоящего в правой части к функции $f(x, y)$ в смысле пространства $L_{2,\mu}(Q)$. При этом

$$\|f\|_{2,\mu}^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{pq}^2(f).$$

Введём в рассмотрение функцию

$$T(x,t; y, \tau; h) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} P_p(x) P_p(t) Q_q(y) Q_q(\tau) h^{p+q}. \quad (2)$$

И здесь знак равенства понимается в смысле сходимости двойного ряда, стоящего в правой части равенства (2) в пространстве $L_2(Q \times Q; \mu(x, y) \mu(t, \tau))$. Хорошо известно, что в ряде частных случаев, например для систем ортонормированных полиномов Эрмита, Чебышева, Лагерра, для функции $T(x, t; y, \tau; h)$ можно указать явные выражения (см., например, [4, с.102],[5],[6, с.190]).

В пространстве $L_{2,\mu}(Q)$ рассмотрим следующий оператор [3]

$$F_h f(x, y) = \iint_{(Q)} \mu_1(t) \mu_2(\tau) f(t, \tau) T(x, t; y, \tau; 1-h) dt d\tau, \quad (3)$$

который будем называть оператором обобщенного сдвига.

Отметим ряд простых свойств оператора (3):

- 1) $F_h(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F_h(f_1) + \beta F_h(f_2); \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
- 2) $F_h(\lambda f) = \lambda F_h(f), \lambda \in \mathbb{R};$
- 3) $\|F_h(f)\|_{2,\mu} \leq \|f\|_{2,\mu};$
- 4) $F_h P_p(x) Q_q(y) = (1-h)^{p+q} P_p(x) Q_q(y);$
- 5) $\|F_h(f) - f\|_{2,\mu} \rightarrow 0, h \rightarrow 0.$

Для функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$ определим конечные разности первых и высших порядков равенствами:

$$\begin{aligned} \Delta_h^1 f(x, y) &:= F_h f(x, y) - f(x, y) = (F_h - E) f(x, y), \\ \Delta_h^k f(x, y) &:= \Delta_h^1 (\Delta_h^{k-1} (f(x, y))) = \\ &= \Delta_h^1 ((F_h - E)^{k-1} f(x, y)) = (F_h - E)^{k-1} \Delta_h^1 f(x, y) = \\ &= (F_h - E)^k f(x, y) = \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \binom{k}{l} F_h^l f(x, y), k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \end{aligned}$$

где

$$F_h^0 f(x, y) = f(x, y), F_h^l f(x, y) = F_h(F_h^{l-1} f(x, y)), l = \overline{1, k}.$$

E – единичный оператор в пространстве $L_{2,\mu}(Q)$.

Величину

$$\Omega_k(f, t)_{2,\mu} := \sup \left\{ \|\Delta_h^k(f)\|_{2,\mu} : 0 < h \leq 1 \right\}, \quad (4)$$

где $0 < t \leq 1$, будем называть обобщенным модулем непрерывности k -го порядка функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$.

Используя формулу (2), представим оператора (3) в следующем виде

$$\begin{aligned} F_h f(x, y) &= \iint_{(Q)} \mu(t, \tau) f(t, \tau) \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} P_p(x) P_p(t) Q_q(y) Q_q(\tau) (1-h)^{p+q} \right\} dt d\tau = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \iint_{(Q)} \mu(t, \tau) f(t, \tau) P_p(t) Q_q(\tau) dt d\tau \right\} P_p(x) Q_q(y) (1-h)^{p+q} = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y) (1-h)^{p+q}, \end{aligned} \quad (5)$$

где знак равенства в полученном соотношении также понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\mu}(Q)$. Для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$ в силу (5) и (1) имеем:

$$\Delta_h^1 f(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y) \left\{ (1-h)^{p+q} - 1 \right\}. \quad (6)$$

На основании метода математической индукции и формулы (6) для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$\Delta_h^k f(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y) \left\{ (1-h)^{p+q} - 1 \right\}^k.$$

Отсюда, воспользовавшись тем, что система полиномов $\{P_p(x)\}_{p=0}^{\infty}$ ортонормирована в пространстве $f \in L_{2,\mu_1}[a, b]$, а система полиномов $\{Q_q(y)\}_{q=0}^{\infty}$ ортонормирована в $L_{2,\mu_2}[c, d]$, применяя равенство Парсеваля, получаем

$$\|\Delta_h^k f(x, y)\|_{2,\mu}^2 = \iint_{(Q)} \mu_1(x) \mu_2(y) |\Delta_h^k f(x, y)|^2 dx dy =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(1 - (1-h)^{p+q}\right)^{2k} c_{pq}^2(f), 0 < h < 1. \quad (7)$$

Из равенства (4) и (7) следует, что

$$\Omega_k^2(f, t)_{2,\mu} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(1 - (1-t)^{p+q}\right)^{2k} c_{pq}^2(f). \quad (8)$$

Символом $L_{2,\mu_1}[a, b]$ обозначим множество интегрируемых в квадрате с весом μ_1 функций $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Аналогичный смысл имеет пространство $L_{2,\mu_2}[c, d]$. Полагаем, что $\mathfrak{M}_{n+1} \subset L_{2,\mu_1(x)}[a, b]$ и $\mathfrak{N}_{m+1} \subset L_{2,\mu_2(y)}[c, d]$ два конечномерных подпространства с базисами $\{P_p(x)\}_{p=0}^n$ и $\{Q_q(y)\}_{q=0}^m$ соответственно. В пространстве $L_{2,\mu(x,y)}(\mathcal{Q})$, где $\mu(x, y) := \mu_1(x)\mu_2(y)$, рассмотрим множество функций

$$G(\mathfrak{M}_{n+1}, \mathfrak{N}_{m+1}) := L_{2,\mu_2(y)}[c, d] \otimes \mathfrak{M}_{n+1} \oplus L_{2,\mu_1(x)}[a, b] \otimes \mathfrak{N}_{m+1}, \quad (9)$$

где символами " \otimes " и " \oplus " обозначены соответственно операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Элементы множества (9) имеют вид

$$g_{n,m}(x, y) = \sum_{p=0}^n \varphi_p(y) P_p(x) + \sum_{q=0}^m \psi_q(x) Q_q(y), \quad (10)$$

где $\{\varphi_p(y)\}_{p=0}^n \subset L_{2,\mu_2(y)}[c, d]$ и $\{\psi_q(x)\}_{q=0}^m \subset L_{2,\mu_1(x)}[a, b]$ – произвольные наборы функций из указанных пространств. Функции вида (10) называются квазиполиномами [2] или "углами", составленными из вещественных алгебраических полиномов [1].

Для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}(\mathcal{Q})$ символом $\mathcal{E}_{n,m}(f)_{2,\mu}$ обозначим её наилучшее приближение элементами множества (5) в метрике пространства $L_{2,\mu}(\mathcal{Q})$, то есть полагаем

$$\mathcal{E}_{n,m}(f)_{2,\mu} := \inf \left\{ \|f - g_{n,m}\|_{2,\mu} : g_{n,m} \in G(\mathfrak{M}_{n+1}, \mathfrak{N}_{m+1}) \right\}. \quad (11)$$

Через $S_{n,\infty}(f)$ и $S_{\infty,m}(f)$ обозначим частные суммы ряда, стоящего в правой части равенства (1) функции $f \in L_{2,\mu}(\mathcal{Q})$ порядков n по x и m по y соответственно, которые имеют вид:

$$S_{n,\infty}(f; x, y) := \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y),$$

$$S_{\infty,m}(f; x, y) := \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^m c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y).$$

Под $S_{n,m}(f)$ понимаем прямоугольную сумму ряда (1) функции $f \in L_{2,\mu}$ порядка n по x и m по y

$$S_{n,m}(f; x, y) := \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y).$$

Функцию

$$\begin{aligned} \sigma_{n,m}(f; x, y) &:= S_{n,\infty}(f; x, y) + S_{\infty,m}(f; x, y) - S_{n,m}(f; x, y) = \\ &= \left(\sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^{\infty} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^m - \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m \right) c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y) \end{aligned} \quad (12)$$

будем называть обобщенным полиномом (квазиполиномом) Фурье функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$ порядка (n, m) по переменным (x, y) .

Из (12) также следует другое представление $\sigma_{n,m}(f; x, y)$:

$$\sigma_{n,m}(f; x, y) = \left(\sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m + \sum_{p=0}^n \sum_{q=m+1}^{\infty} + \sum_{p=n+1}^{\infty} \sum_{q=0}^m \right) c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y). \quad (13)$$

Можно показать, что функция (13) принадлежит множеству (9), то есть имеет вид (10). Впрочем, это следует также из доказательства нижеприведенной леммы.

Лемма. Среди всех квазиполиномов вида (10), принадлежащих множеству (9), наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$ доставляет её квазиполином Фурье $\sigma_{n-1,m-1}(f)$ порядка $(n-1, m-1)$. При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu} &:= \inf \left\{ \|f - g_{n-1,m-1}\|_{2,\mu} : g_{n-1,m-1} \in G(\mathfrak{M}_n, \mathfrak{N}_m) \right\} = \\ &= \|f - \sigma_{n-1,m-1}(f)\|_{2,\mu} = \left\{ \sum_{p=n}^{\infty} \sum_{q=m}^{\infty} c_{pq}^2(f) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Прежде всего, учитывая равенство (13), любую функцию $f \in L_{2,\mu}(Q)$ представим в виде

$$f(x, y) := \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{p=0}^{n-1} + \sum_{p=n}^{\infty} \right) \left(\sum_{q=0}^{m-1} + \sum_{q=m}^{\infty} \right) c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y) = \\
&= \left(\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=m}^{\infty} + \sum_{p=n}^{\infty} \sum_{q=0}^{m-1} \right) c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y) + \\
&+ \sum_{p=n}^{\infty} \sum_{q=m}^{\infty} c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y) = \sigma_{n-1, m-1}(f; x, y) + \sum_{p=n}^{\infty} \sum_{q=m}^{\infty} c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y),
\end{aligned}$$

откуда запишем

$$f(x, y) - \sigma_{n-1, m-1}(f; x, y) = \sum_{p=n}^{\infty} \sum_{q=m}^{\infty} c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y).$$

Применяя тождество Парсеваля к последнему равенству, будем иметь

$$\|f - \sigma_{n-1, m-1}(f)\|_{2, \mu} = \left\{ \sum_{p=n}^{\infty} \sum_{q=m}^{\infty} c_{pq}^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (15)$$

Следуя схеме рассуждений работ [7, 8], рассмотрим произвольный элемент

$$g_{n-1, m-1}(x, y) = \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_p(y) P_p(x) + \sum_{q=0}^{m-1} \psi_q(x) Q_q(y), \quad (16)$$

принадлежащий множеству $G(\mathfrak{M}_n, \mathfrak{N}_m)$. Поскольку $\{\varphi_p(y)\}_{p=0}^{n-1} \subset L_{2, \mu_2(y)}[c, d]$ и $\{\psi_q(x)\}_{q=0}^{m-1} \subset L_{2, \mu_1(x)}[a, b]$, то в смысле сходимости в пространствах $L_{2, \mu_1(x)}[a, b]$ и $L_{2, \mu_2(y)}[c, d]$ соответственно имеют место равенства

$$\psi_q(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p(\psi_q) P_p(x), \quad c_p(\psi_q) = \int_a^b \mu_1(x) \psi_q(x) P_p(x) dx, \quad q = \overline{0, m-1}, \quad (17)$$

$$\varphi_p(y) = \sum_{q=0}^{\infty} c_q(\varphi_p) Q_q(y), \quad c_q(\varphi_p) = \int_c^d \mu_2(y) \varphi_p(y) Q_q(y) dy, \quad p = \overline{0, n-1}. \quad (18)$$

Подставляя вместо $\psi_q(x)$ и $\varphi_p(y)$ в равенство (16) их разложения из равенств (17) и (18), получаем

$$g_{n-1, m-1}(x, y) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\infty} c_q(\varphi_p) P_p(x) Q_q(y) + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{m-1} c_p(\psi_q) P_p(x) Q_q(y). \quad (19)$$

Представим разность $f(x, y) - g_{n-1, m-1}(x, y)$ в следующем виде

$$\begin{aligned}
f(x, y) - g_{n-1, m-1}(x, y) &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y) - \\
&- \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\infty} c_q(\varphi_p) P_p(x) Q_q(y) - \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{m-1} c_p(\psi_q) P_p(x) Q_q(y) = \\
&= \left(\sum_{p=0}^{n-1} + \sum_{p=n}^{\infty} \right) \left(\sum_{q=0}^{m-1} + \sum_{q=m}^{\infty} \right) c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y) - \\
&- \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{q=0}^{m-1} + \sum_{q=m}^{\infty} \right) c_q(\varphi_p) P_p(x) Q_q(y) - \\
&- \left(\sum_{p=0}^{n-1} + \sum_{p=n}^{\infty} \right) \sum_{q=0}^{m-1} c_p(\psi_q) P_p(x) Q_q(y) = \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} \left(c_{pq}(f) - c_q(\varphi_p) - c_p(\psi_q) \right) P_p(x) Q_q(y) + \\
&+ \sum_{p=n}^{\infty} \sum_{q=0}^{m-1} \left(c_{pq}(f) - c_p(\psi_q) \right) P_p(x) Q_q(y) + \\
&+ \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=m}^{\infty} \left(c_{pq}(f) - c_q(\varphi_p) \right) P_p(x) Q_q(y) + \\
&+ \sum_{p=n}^{\infty} \sum_{q=m}^{\infty} c_{pq}(f) P_p(x) Q_q(y). \tag{20}
\end{aligned}$$

Так как последовательность полиномов $\{P_p(x)\}_{p=0}^{\infty}$ ортогональна в пространстве $L_{2, \mu_1(x)}[a, b]$, а последовательность $\{Q_q(y)\}_{q=0}^{\infty}$ ортогональна в пространстве $L_{2, \mu_2(x)}[c, d]$, то, применяя тождество Парсеваля к разности (20), приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
\|f - g_{n-1, m-1}\|_{2, \mu}^2 &= \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} \left(c_{pq}(f) - c_q(\varphi_p) - c_p(\psi_q) \right)^2 + \\
&+ \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=m}^{\infty} \left(c_{pq}(f) - c_q(\varphi_p) \right)^2 + \sum_{p=n}^{\infty} \sum_{q=0}^{m-1} \left(c_{pq}(f) - c_p(\psi_q) \right)^2 + \\
&+ \sum_{p=n}^{\infty} \sum_{q=m}^{\infty} c_{pq}^2(f). \tag{21}
\end{aligned}$$

Из равенства (21) сразу следует, что выражение, расположенное в его правой части, имеет минимальное значение, равное

$$\left\{ \sum_{p=n}^{\infty} \sum_{q=m}^{\infty} c_{pq}^2(f) \right\}^{1/2} \quad (22)$$

тогда и только тогда, когда выполняется система равенств:

$$\begin{cases} c_{pq}(f) = c_q(\varphi_p) + c_p(\psi_q), & p = \overline{0, n-1}; q = \overline{0, m-1}; \\ c_{pq}(f) = c_q(\varphi_p), & p = \overline{0, n-1}; q = m, m+1, \dots; \\ c_{pq}(f) = c_p(\psi_q), & p = n, n+1, \dots; q = \overline{0, m-1}. \end{cases} \quad (23)$$

Подставляя в правой части равенства (19) вместо коэффициентов $c_q(\varphi_p)$ и $c_p(\psi_q)$ их значения через коэффициенты $c_{pq}(f)$ из системы (23), мы получим квазиполином Фурье порядка $(n-1, m-1)$, имеющий вид (13), для которого имеет место равенство (15), а значит и (14). Лемма доказана.

Имеет место следующая

Теорема 1. При любых $k, n, m \in \mathbb{N}$ и любом $t \in (0, 1)$ имеет место экстремальное равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_k(f,t)_{2,\mu}} = \frac{1}{(1-(1-t)^{n+m})^k}. \quad (24)$$

Доказательство. Пользуясь равенством (8) и учитывая соотношение (14), для произвольной $f \in L_{2,\mu}(Q)$ имеем:

$$\begin{aligned} \Omega_k^2(f,t)_{2,\mu} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (1-(1-t)^{p+q})^{2k} c_{pq}^2(f) \geq \\ &\geq \sum_{p=n}^{\infty} \sum_{q=m}^{\infty} (1-(1-t)^{p+q})^{2k} c_{pq}^2(f) \geq \\ &\geq (1-(1-t)^{n+m})^{2k} \sum_{p=n}^{\infty} \sum_{q=m}^{\infty} c_{pq}^2(f) = \\ &= (1-(1-t)^{n+m})^{2k} \mathcal{E}_{n-1,m-1}^2(f)_{2,\mu}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (24)

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_k(f,t)_{2,\mu}} \leq \frac{1}{(1-(1-t)^{n+m})^k}. \quad (25)$$

Для получения оценки снизу той же величины введем в рассмотрение функцию $f_0(x, y) = P_n(x)Q_m(y) \in L_{2,\mu}(Q)$, для которой, как следует из равенств (8) и (14), имеют место равенства

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f_0)_{2,\mu} = 1, \quad \Omega_k(f_0, t)_{2,\mu} = \left(1 - (1-t)^{n+m}\right)^k. \quad (26)$$

Теперь, воспользуясь равенствами (26), получаем оценку снизу

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_k(f, t)_{2,\mu}} \geq \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f_0)_{2,\mu}}{\Omega_k(f_0, t)_{2,\mu}} = \frac{1}{\left(1 - (1-t)^{n+m}\right)^k}. \quad (27)$$

Требуемое равенство (24) следует из сопоставления оценки сверху (25) с оценкой снизу (27), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1. В условиях теоремы 1, при $t = 1/(n+m), n, m \in \mathbb{N}$ справедливо экстремальное равенство

$$\sup_{m, n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_{2,\mu}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_k\left(f, 1/(n+m)\right)_{2,\mu}} = \left(1 - e^{-1}\right)^{-k}.$$

Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $k, m, n \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty, q(t)$ – весовая функция на отрезке $[0, \eta]$ ($0 < \eta \leq 1$). Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int_0^\eta \Omega_k^p(f, t)_{2,\mu} q(t) dt\right)^{1/p}} = \left(\int_0^\eta \left[1 - (1-t)^{n+m}\right]^{kp} q(t) dt\right)^{-1/p}. \quad (28)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из (25) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$ вытекает неравенство

$$\left[1 - (1-t)^{n+m}\right]^k \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu} \leq \Omega_k(f, t)_{2,\mu}. \quad (29)$$

Возведя обе части неравенства (29) в степень p ($1 \leq p \leq \infty$), затем умножая полученное неравенство на весовую функцию q и интегрируя обе стороны по переменному t в пределах от 0 до η , получаем

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}^p(f)_{2,\mu} \cdot \int_0^\eta \left[1 - (1-t)^{n+m}\right]^{kp} q(t) dt \leq \int_0^\eta \Omega_k^p(f, t)_{2,\mu} q(t) dt.$$

Отсюда вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (28):

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int_0^\eta \Omega_k^p(f,t)_{2,\mu} q(t) dt \right)^{1/p}} \leq \left(\int_0^\eta [1-(1-t)^{n+m}]^{kp} q(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (30)$$

С другой стороны, для рассмотренной нами в предыдущей теореме функции $f_0(x, y) = P_n(x)Q_m(y) \in L_{2,\mu}(Q)$, для которой имеют место равенства (26), имеем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_{2,\mu}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int_0^\eta \Omega_k^p(f,t)_{2,\mu} q(t) dt \right)^{1/p}} &\geq \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f_0)_{2,\mu}}{\left(\int_0^\eta \Omega_k^p(f_0,t)_{2,\mu} q(t) dt \right)^{1/p}} = \\ &= \left(\int_0^\eta [1-(1-t)^{n+m}]^{kp} q(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (31)$$

Требуемое равенство (28) является следствием сопоставления оценки сверху (30) с оценкой снизу (31). Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 вытекает ряд следствий.

Следствие 2. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Положим $q(t) := (n+m)(1-t)^{n+m-1}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $n+m \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $\eta \in (0, 1]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_{2,\mu}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left((n+m) \int_0^\eta \Omega_k^p(f,t)_{2,\mu} (1-t)^{n+m-1} dt \right)^{1/p}} &= \\ &= \left\{ \frac{kp+1}{(1-(1-\eta)^{n+m})^{kp+1}} \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Полагая в этом равенстве $\eta = 1/(n+m)$ и переходя к верхней грани по всем числам $(n+m) \in \mathbb{N}$, получаем

$$\begin{aligned} \sup_{(n+m) \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_{2,\mu}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left((n+m)^{1/(n+m)} \int_0^\eta \Omega_k^p(f,t)_{2,\mu} (1-t)^{n+m-1} dt \right)^{1/p}} &= \\ &= \left\{ \frac{kp+1}{(1-e^{-1})^{kp+1}} \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (32)$$

В частности, полагая в (32) $p = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{(n+m) \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_{2,\mu}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left((n+m) \int_0^1 \Omega_k^{1/k}(f,t)_{2,\mu} (1-t)^{n+m-1} dt \right)^k} = \frac{2^k}{(1-e^{-1})^{2k}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов М.К. О приближении "углом". – Proc. Conf. on Constructive Theory of Functions. Budapest, 1972, с. 193-206.
2. Брудный Ю.А. Приближение функций n переменных квазимногочленами. – Изв. АН СССР. Серия: Математика. 1970, т. 34, № 3, с. 564-583.
3. Абилов В.А., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, т. 55, № 7, с. 1109-1117.
4. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.:Физматгиз, 1963.
5. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.:Физматгиз, 1962.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Перев.с англ. Н.Я. Виленкина. М.: Наука, 1966, 266 с.
7. Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшем приближении в среднем с весом Чебышева-Эрмита алгебраическими полиномами на всей вещественной оси.– Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 2013, т. 10, № 1, с. 28-38.
8. Шабозов М.Ш., Сайнаков В.Д. О неравенствах типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных. – Труды ИММ УрО РАН, 2018, т. 24, № 4, с. 270-282.

О.А.ЧУРАХОНОВ

ОИД БА НОБАРОВАРИ АНИКИ НАМУДИ ЧЕКСОН-СТЕЧКИН ДАР ФАЗОИ ВАЗНИИ ГИЛБЕРТИИ $L_{2,\mu}(Q)$

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола нобаробарии аниқи намуди Чексон-Стечкин, байни бузургии наздиккунии бехтарини миёнакватраї ба воситаи «кунҷо», ки аз бисёръзогиҳои ҳақиқии алгебравии ортогоналі тартиб дода шудаанд ва интегралҳои, ки дар таркибашон модули умумикардашуда бефосилагии функсияҳо, ки дар асоси оператори конкретии кӯчиш, дар фазои $L_{2,\mu}(Q)$ бо функсияи вазнии $\mu(x, y) := \mu_1(x)\mu_2(y)$ ҳосил шудаанд, ёфта шудаанд. Аз синфи функсияҳои дуғирёбандаи $f(x, y)$ талаб карда мешавад, ки дар росткунҷаи $Q := \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ нормаи охирноки

$$\|f\|_{2,\mu} = \left(\iint_{(Q)} \mu(x, y) f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}$$

дошта бошанд.

Калимаҳои калидӣ: полиномҳои ортогонали, модули бефосилагии умумикардасуда, оператори кучиши умумикардасуда, квазиполиномҳо, наздиккунии беҳтарин.

O.A.JURAKHONOV

**ON EXACT INEQUALITIES TYPE OF JACKSON-STECHKIN
IN HILBERT WEIGHT SPACE $L_{2,\mu}(Q)$**

Tajik National University

We evaluate the exact inequalities Jackson-Stechkin type obtained between the best "angle" square approximation, composed of real orthogonal algebraic polynomials, and integrals containing a generalized modulus of continuity of functions generated by a particular shift generalized operator in the metric of the space $L_{2,\mu}(Q)$ with weight $\mu(x, y) := \mu_1(x)\mu_2(y)$ on the function classes of two variables f , integrable with a square on the rectangle $Q := \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ with finite norm

$$\|f\|_{2,\mu} = \left(\iint_{(Q)} \mu(x, y) f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

Key words: orthogonal polynomials, generalized modulus of continuity, generalized shift operator, quasi-polynomials, best approximation.

УДК 517.5

Ф.РАИМЗОДА

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИИ И ЕЕ
ПРОИЗВОДНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В L_2

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 08.01.2020 г.

В работе решена задача одновременного приближения функции и ее последовательных производных тригонометрическими полиномами в L_2 на некоторых классах функций, задаваемых усредненными значениями нормы разности первого порядка.

Ключевые слова: наилучшее приближение, тригонометрический полином, одновременное приближение функций и ее производных.

1. Обозначим через \mathbb{N} – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; \mathbb{R}_+ – множество положительных чисел; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ пространство суммируемых с квадратом по Лебегу 2π -периодических действительных функций с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0, 2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Множество всех тригонометрических полиномов

$$T_{n-1}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

порядка $n-1$ обозначим через \mathfrak{S}_{2n-1} . Если $S_{n-1}(f, x)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f :

Адрес для корреспонденции: Раимзода Фарахноз. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: farahnoz@mail.ru

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

то хорошо известно свойство частичной суммы ряда Фурье функций f , которое состоит в том, что наилучшее приближении функций f в метрике L_2 тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(x) \in \mathfrak{T}_{2n-1}$ реализуется частичной суммой ряда Фурье $S_{n-1}(f, x)$:

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &:= \inf \{ \|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \mathfrak{T}_{2n-1} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ради простоты положено $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты Фурье функций $f \in L_2$.

Через $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} = L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)} \in L_2$. Модуль непрерывности m -го порядка произвольной 2π -периодической измеримой и суммируемой с квадратом функции $f \in L_2$ определим равенством

$$\omega_m(f, t) := \sup \{ \|\Delta_h^m f(\cdot)\|_2 : |h| \leq t \}, \quad (2)$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x + (m-k)h)$$

— разность m -го порядка функции f в точке x с шагом h . Непосредственным вычислением, применяя равенство Парсеваля, получаем соотношение

$$\|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2^2 = 2^m \sum_{k=1}^m (1 - \cos kh)^m k^{2r} \rho_k^2(f). \quad (3)$$

В следующем утверждении приведено точное равенство, содержащее наилучшее приближение и усредненное значение нормы разности первого порядка функции $f \in L_2^{(r)}$, являющееся в некотором смысле обобщением результата работы [1].

Теорема 1. При любых $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $n \in \mathbb{N}$ и $h \in (0, \pi/n]$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^1 f^{(r)}(\cdot)\|_2^2 dh \right) dt} = \frac{n}{2(nh - Si(nh))}, \quad (4)$$

где $Si(t) := \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$ — интегральный синус.

Доказательство. Будем следовать схеме рассуждений работы [2]. Без ограничений общности можно ограничиться функциями f , которые ортогональны всем полиномам $T_{n-1}(x) \in \mathfrak{T}_{2n-1}$

$$f(x) \sim \sum_{k=n}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx).$$

Тогда для разности первого порядка функции $f \in L_2$ имеем:

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^1 f(\cdot)\|_2^2 &:= \|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_2^2 = \\ &= 2 \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) (1 - \cos kh) = 2E_{n-1}^2(f)_2 - 2 \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \cos kh. \end{aligned} \quad (5)$$

Если проинтегрировать равенство (5) в промежутке $[0, t]$, и полученный результат поделить на $2t$, то приходим к равенству

$$E_{n-1}^2(f)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \frac{\sin kt}{kt} + \frac{1}{2t} \int_0^t \|\Delta_u^1 f(\cdot)\|_2^2 du.$$

Еще раз интегрируя полученное равенство в промежутке $[0, h]$ и поделив результат на $2h$, будем иметь

$$E_{n-1}^2(f)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \frac{Si(kh)}{kh} + \frac{1}{2h} \int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_u^1 f(\cdot)\|_2^2 du \right) dt. \quad (6)$$

Теперь заметим, что функция $Si(t) := \int_0^t u^{-1} \sin u du$ при значениях $t \in [0, +\infty)$ монотонно возрастает от $Si(0) = 0$ до $Si(+\infty) = \pi/2$ (см., напр. [3, с.123]), а функция $Si(kh)/(kh)$ в области $(n \leq k < \infty, 0 \leq h < \infty)$ монотонно убывает от $Si(nh)/(nh)$ до нуля, поэтому отсюда сразу следует экстремальное равенство

$$\sup \left\{ \frac{Si(kh)}{kh} : k \geq n \right\} = \frac{Si(nh)}{nh}. \quad (7)$$

Пользуясь равенством (7), из (6) получаем неравенство

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{Si(nh)}{nh} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) + \frac{1}{2h} \int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_u^1 f(\cdot)\|_2^2 du \right) dt,$$

откуда, учитывая соотношение (1), запишем

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh} \right)^{-1} \int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_u^1 f(\cdot)\|_2^2 du \right) dt, \quad (8)$$

или что то же

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_u^1 f(\cdot)\|_2^2 du \right) dt. \quad (9)$$

В полученном соотношении функцию f заменим на производную $f^{(r)}$:

$$E_{n-1}^2(f^{(r)})_2 \leq \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_u^1 f^{(r)}(\cdot)\|_2^2 du \right) dt \quad (10)$$

и, воспользовавшись получаемым неравенством

$$E_{n-1}^2(f^{(s)})_2 \leq \frac{1}{n^{2(r-s)}} E_{n-1}^2(f^{(r)})_2 \quad (0 \leq s \leq r), \quad (11)$$

неравенство (10) запишем в виде

$$E_{n-1}^2(f^{(s)})_2 \leq \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_u^1 f^{(r)}(\cdot)\|_2^2 du \right) dt. \quad (12)$$

Так как неравенство (12) справедливо для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, то из него следует оценка сверху экстремальной величины, стоящей в левой части равенства (4):

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^1 f^{(r)}(\cdot)\|_2^2 dh \right) dt} \leq \frac{n}{2(nh - Si(nh))}. \quad (13)$$

С целью получения оценки снизу указанной величины, равной правой части неравенства (13), рассмотрим функцию $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$. Для этой функции имеем

$$f_0^{(s)}(x) = n^s \cos\left(nx + \frac{s\pi}{2}\right), \quad E_{n-1}(f^{(s)})_2 = n^s,$$

$$f_0^{(r)}(x) = n^s \cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right), \quad E_{n-1}(f^{(r)})_2 = n^r$$

и, пользуясь соотношением (3), запишем

$$\|\Delta_u^1 f_0^{(r)}(\cdot)\|_2^2 = 2n^{2r}(1 - \cos nu), \quad 0 < nu \leq \pi.$$

Воспользовавшись последним равенством, для всех значений $h \in (0, \pi/n]$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_u^1 f_0^{(r)}(\cdot)\|_2^2 du \right) dt = \int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t 2n^{2r}(1 - \cos nu) du \right) dt = \\ & = 2n^{2r} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right) dt = 2n^{2r} \left(h - \frac{\text{Si}(nh)}{n} \right) = 2n^{2r} \cdot \frac{nh - \text{Si}(nh)}{n}. \end{aligned}$$

Используя полученное равенство, получаем оценку снизу

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^1 f^{(r)}(\cdot)\|_2^2 dh \right) dt} & \geq \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f_0^{(s)})_2}{\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^1 f_0^{(r)}(\cdot)\|_2^2 dh \right) dt} = \\ & = \frac{n^{2(r-s)} n^{2s}}{2n^{2r}} \cdot \frac{n}{nh - \text{Si}(nh)} = \frac{n}{2(nh - \text{Si}(nh))}. \end{aligned} \quad (14)$$

Требуемые равенства (4) получаем из сопоставления оценки сверху (13) с оценкой снизу (14). Теорема 1 доказана.

Через $W^{(r)}(h)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, \pi/n]$) обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, каждая из которых удовлетворяет условию

$$\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_u^1 f^{(r)}(\cdot)\|_2^2 du \right) dt \leq 1.$$

Требуется при любых $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(h))_2 := \sup\{E_{n-1}(f^{(s)})_2 : f \in W^{(r)}(h)\}. \quad (15)$$

Теорема 2. При любых $r, n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $h \in (0, \pi/n]$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(h))_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nh - \text{Si}(nh))} \right\}^{1/2}. \quad (16)$$

Доказательство. Из неравенства (12) для любой функции $f \in W^{(r)}L_2$ получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{1/2},$$

откуда сразу вытекает оценка сверху величины (15)

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(h))_2 \leq \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{1/2}. \quad (17)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу рассмотрим экстремальную функцию

$$g(x) = \frac{1}{n^r} \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{1/2} \cdot \cos nx.$$

Для этой функции

$$g^{(s)}(x) = \frac{1}{n^{r-s}} \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{1/2} \cos \left(nx + \frac{s\pi}{2} \right), \quad s = 0, 1, 2, \dots, r;$$

$$E_{n-1}(g^{(s)})_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{1/2}; \quad (18)$$

$$\|\Delta_u^1 g^{(r)}(\cdot)\|_2^2 = \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\} \cdot 2(1 - \cos nu), \quad 0 < nu \leq \pi.$$

Простые вычисления дают

$$\int_0^h \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_u^1 g^{(r)}(\cdot)\|_2^2 du \right) dt = 1.$$

Последнее равенство означает, что функция $g \in W^{(r)}(h)$, а потому, учитывая равенство (18), запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(h))_2 \geq E_{n-1}(g^{(s)})_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{1/2}. \quad (19)$$

Требуемое равенство (16) получаем из сравнений неравенств (17) и (19), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Схема доказательства теоремы 1 позволяет также доказать следующее утверждение с весовой функцией $\varphi_0(t) = 2(h-t)/h^2, 0 \leq t \leq h$.

Теорема 3. Пусть $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $n \in \mathbb{N}$, $nh \leq \pi$. Тогда справедливы равенства

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{\sqrt{2} n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t) \|\Delta_t^1 f^{(r)}(\cdot)\|_2^2 dt \right)^{1/2}} = \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-1/2}.$$

Следствие. В условиях теоремы 3 имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{r-s-1} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int_0^{\pi/n} \left(\frac{\pi}{n} - t \right) \|\Delta_t^1 f^{(r)}(\cdot)\|_2^2 dt \right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - 4}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабозов М.Ш., Мамадаев Н.М. О неравенствах типа Джексона-Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций, задаваемых усредненными модулями непрерывности в пространстве L_2 – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2012, 1(146), с.7-17.
2. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 – Мат. заметки, 1976, т.20, 3, с.433-438.
3. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977, 511 с.

Ф.РАИМЗОДА

ОИД БА ЯҚБОРА НАЗДИККУНИИ ФУНКСИЯ ВА ҲОСИЛАҲОИ ОН БА ВОСИТАИ БИСЕРАЪЗОГИҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ ДАР L_2

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола масъалаи наздиккунии функсия ва ҳосилаҳои пайдарпаи он ба воситаи бисераъзогиҳои тригонометрӣ дар фазои L_2 барои баъзе синфи функсияҳо, ки ба воситаи қимати норми миёнакардашудаи фарқияти тартиби якум дода шудаанд, ҳал карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии бехтарин, бисераъзогии тригонометрӣ, яқбора наздиккунии функсия ва ҳосилаҳои он.

F.RAIMZODA

**ABOUT SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF FUNCTIONS AND ITS
DERIVATIVES BY TRIGONOMETRIC POLYNOMIES IN L_2**

Tajik National University

The problem of simultaneous approximation of functions and its successive derivatives by trigonometric polynomials in L_2 on some classes of functions defined by averaged values of the norm of the first-order difference is solved.

Key words: best approximation, trigonometric polynomial, simultaneous approximation of functions and its derivatives.

УДК 517.968.220

Н.РАДЖАБОВ, С.Б.ЗАРИПОВ*

К ТЕОРИИ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ,
СИММЕТРИЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОЙ ИЗ ПЕРЕМЕННЫХ

Таджикский национальный университет,

**Таджикский Технический Университет им. акад. М.С.Осими*

Поступила в редакцию 16.01.2020 г.

Изучен новый класс модельных двумерных интегральных уравнений вольтерровского типа, симметричных по одной из переменных, ядро которых имеет граничную и внутреннюю фиксированную сверхсингулярную линию.

Ключевые слова: однородные интегральные уравнения, двумерное интегральное уравнение, сверхсингулярная линия, симметричное уравнение, краевые задачи, асимптотические условия.

Через D обозначим прямоугольник следующего вида $D_0 = \{(x, y) : -a < x < a, 0 < y < b\}$, соответственно обозначим $\Gamma_0 = \{-a < x < a\}$, $\Gamma_1 = \{0 < y < b\}$. В области $D = D_0 \setminus \Gamma_0$ рассмотрим двумерное симметричное интегральное уравнение типа Вольтерра следующего вида:

$$\varphi(x, y) + A \int_{-x}^x \frac{\varphi(t, y)}{|t|^\alpha} dt + B \int_0^y \frac{\varphi(x, s)}{s^\beta} ds + E \int_{-x}^x \frac{dt}{|t|^\alpha} \int_0^y \frac{\varphi(t, s)}{s^\beta} ds = f(x, y), \quad (1)$$

где A, B, E – заданные постоянные, $f(x, y)$ – заданная функция на D , $\varphi(x, y)$ – искомая функция, $\alpha > 1, \beta > 1$.

Решение двумерного симметричного интегрального уравнения (1) согласно [3], будем искать в классе функций, $\varphi(x, y) \in C(\bar{D})$ $\varphi(0, 0) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$\varphi(x, y) = o\left[|x|^{\delta_1} y^{\delta_2}\right], \quad \delta_1 > 1, \delta_2 > 1 \text{ при } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Адрес для корреспонденции: Раджабов Нусрат. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: nusrat38@mail.ru

Введем следующие интегральные операторы:

$$T_x(\varphi) = \int_{-x}^x \frac{\varphi(t, y)}{|t|^\alpha} dt, T_y(\varphi) = \int_0^y \frac{\varphi(x, s)}{s^\beta} ds.$$

Тогда двухмерное симметричное интегральное уравнение (1) в операторном виде записываем в следующем виде

$$\varphi(x, y) + AT_x(\varphi) + BT_y(\varphi) + ET_xT_y(\varphi) = f(x, y). \quad (2)$$

Проблеме исследования одномерных и многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с граничными и внутренними сингулярными точками, сингулярными линиями, сингулярными областями или сверхсингулярными линиями, или сверх - сингулярными областями посвящены работы [1]-[4].

Пусть в уравнении (1) или (2) постоянные A, B, E между собой связаны при помощи равенств $E=AB$. Тогда интегральное уравнение (2) можно записать в следующем виде

$$\varphi(x, y) + AT_x(\varphi) + BT_y[\varphi + AT_x\varphi] = f(x, y). \quad (3)$$

Обозначим

$$\varphi(x, y) + AT_x\varphi = \Psi(x, y), \quad (4)$$

тогда уравнение (3) примет вид

$$\Psi(x, y) + BT_y(\Psi) = f(x, y). \quad (5)$$

Таким образом, в этом случае задача о нахождении решения двумерного симметричного интегрального уравнения (1) сводится к нахождению одного одномерного модельного интегрального уравнения вольтерровского типа со сверхсингулярными линиями. Согласно [1], если решение интегрального уравнения (5) при $B < 0$ существует, тогда оно даётся формулой

$$\Psi(x, y) = \exp[B\omega_b^\beta(y)]c_1(x) + f(x, y) - B \int_0^y \exp\left[B\left(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)\right)\right] \frac{f(t, s)}{s^\beta} ds, \quad (6)$$

при $B > 0$ формулой

$$\Psi(x, y) = f(x, y) - B \int_0^y \exp\left[B\left(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)\right)\right] \frac{f(t, s)}{s^\beta} ds. \quad (7)$$

Решение вида (6) получено при предположении, что $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(x, 0) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f(x, y) = o\left[\exp(B\omega_b^\beta(y))y^{\gamma_1}\right], \gamma_1 > \beta - 1, y \rightarrow 0. \quad (8)$$

Решение вида (7) получено при условии, что $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(x, 0) = 0$, со следующим асимптотическим поведением

$$f(x, y) = o[y^{\gamma_2}], \gamma_2 > \beta - 1, y \rightarrow 0. \quad (9)$$

Согласно результатам главы 7 из [1], если решение симметричного интегрального уравнения (4) существует, тогда оно представимо в виде:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \Psi(x, y) - AK_1^1[\Psi(x, y)]c_1(x) & \text{когда, } (x, y) \in D^+ \\ \Psi(-x, y) + AK_1^1[\Psi(x, y)]c_1(-x) & \text{когда, } (x, y) \in D^- \end{cases}, \quad (10)$$

где

$$K_1^1[\Psi(x, y)] = \int_0^x \frac{\Psi(t, y) + \Psi(-t, y)}{|t|^\alpha} dt.$$

$c_1(x)$ – произвольная функция точек Γ_1 ,

Так как мы ищем решение двумерного симметричного интегрального уравнения (1) в классе функций $\varphi(x, y) \in C(\bar{D})$, $\varphi(0, 0) = 0$, то при $B > 0$ в (10) необходимо полагать $c_1(x) = 0$.

Таким образом, если решение двумерного симметричного интегрального уравнения (4) существует, тогда оно представимо в виде

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \Psi(x, y) - AK_1^1[\Psi(x, y)] & \text{когда, } (x, y) \in D^+ \\ \Psi(-x, y) + AK_1^1[\Psi(x, y)] & \text{когда, } (x, y) \in D^- \end{cases}. \quad (11)$$

Решение вида (11) существует, если $\Psi(0, y) = 0$, с асимптотическим поведением

$$\Psi(x, y) = 0[|x|^{\gamma_3}], \gamma_3 > \alpha - 1, \text{ при } x \rightarrow 0. \quad (12)$$

Из представления (6) следует, что поведение $\Psi(x, y)$ при $x \rightarrow 0$ определяется формулой (12), если $f(0, y) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x, y) = 0[|x|^{\gamma_3}], \gamma_3 > \alpha - 1, \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Случай 1. Пусть $B < 0$, тогда в представлении (10) вместо $\Psi(x, y)$, подставляя её значение из (6), получим решение двумерного симметричного интегрального уравнения (1) в случае

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} K_1[c_1(x)] + K_2[f(x, y)], & \text{когда } (x, y) \in D_0^+ \\ K_3[c_1(-x)] + K_4[f(x, y)], & \text{когда } (x, y) \in D_0^- \end{cases}, \quad (13)$$

где

$$K_1[c_1(x)] = c_1(x) \left[\exp\left(B\omega_b^\beta(y)\right) - A \int_0^x |t|^\alpha \exp\left[\omega_b^\beta(y)[c_1(t) + c_1(-t)]\right] dt, \right.$$

$$K_2[f(x, y)] = f(x, y) - \int_0^y \exp\left[B\left(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)\right)\right] f(t, s) s^{-\beta} ds -$$

$$-A \int_0^x |t|^{-\alpha} [f(t, y) + f(-t, y)] dt - BA \int_0^x \frac{dt}{|t|^\alpha} \int_0^y B\left(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)\right).$$

$$\begin{aligned}
& \cdot [f(t, s) + f(-t, s)]s^{-\beta} ds, \\
K_3[c_1(-x)] &= c_1(-x) \left[\exp \left(B\omega_b^\beta(y) \right) \right] - A \int_0^x |t|^\alpha \exp \left[\omega_b^\beta(y) [c_1(t) + c_1(-t)] \right] dt, \\
K_4[f(x, y)] &= f(-x, y) - \int_0^y \exp \left[B \left(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s) \right) \right] f(-t, s) s^{-\beta} ds - \\
& - A \int_0^x |t|^{-\alpha} [f(t, y) + f(-t, y)] dt - BA \int_0^x \frac{dt}{|t|^\alpha} \cdot \\
& \cdot \int_0^y \exp \left[B \left(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s) \right) \right] [f(t, s) + f(-t, s)] s^{-\beta} ds.
\end{aligned}$$

Как в [1], легко можно убедиться, что если в интегральном представлении (13), функции $f(x, y) \in C(\overline{D_0})$, $f(0,0) = 0$ со следующим асимптотическим равенством

$$f(x, y) = O[|x|^{\gamma_4} y^{\gamma_5}], \gamma_4 > \alpha - 1, \gamma_5 > \beta - 1 \text{ при } (x, y) \rightarrow (0,0) \quad (14)$$

и произвольные функции $c_1(x)$, удовлетворяют следующим условиям:

$c_1(0) = 0$, со следующим асимптотическим поведением

$$c_1(x) = O[|x|^{\sigma_1}], \sigma_1 > \alpha - 1 \text{ при } x \rightarrow 0 \quad (15)$$

тогда интегралы в представлении (13) сходятся и любое решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D_0})$, обращающееся в нуль в точке $(x, y) = (0,0)$, представимо в виде (10), где $c_1(x)$ – произвольные функции точек Γ_0 . Причём $c_1(0) = 0$ с асимптотическим поведением (15).

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть в двумерном симметричном интегральном уравнении (1) $E=AB$, $B < 0$, A -любое, функция $f(x, y) \in C(\overline{D})$, $f(0,0)=0$ со следующим асимптотическим равенством

$$f(x, y) = O[|x|^{\gamma_6}], \gamma_6 > \alpha - 1, \text{ при } (x, y) \rightarrow (0,0).$$

Тогда любое решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D})$ представимо в виде (10) и (13), где $c_1(x)$ – произвольная функция точек Γ_0 , причем, $c_1(0) = 0$, с асимптотическим поведением (15).

Случай 2. Пусть $B > 0$, тогда в представлении (11) вместо $\Psi(x, y)$, подставляя её значение из (7), получим решение симметричного уравнения (1) в случае

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} K_2[f(x, y)], & \text{когда } (x, y) \in D^+ \\ K_4[f(x, y)], & \text{когда } (x, y) \in D^- \end{cases}. \quad (16)$$

Из представления (11) следует, что если $B > 0$, тогда для существования интегралов в этих интегральных операторах достаточно, чтобы $f(0,0)=0$ с асимптотическим поведением (14).

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть в симметричном интегральном уравнении (1), $E=AB$, $B>0$, A - любое, функция $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(0,0)=0$ с асимптотическим поведением, $f(x, y) = O[|x|^{\gamma_7}]$, $\gamma_7 > \alpha - 1$, при $(x,y) \rightarrow (0,0)$. Тогда двухмерное симметричное интегральное уравнение (1) в классе $C(\bar{D}_0)$ обращается в нуль в точке $(x,y)=(0,0)$ и имеет единственное решение, которое даётся при помощи формулы (16).

Как следует из теоремы 1, в случае $B<0$, общее решение симметричного интегрального уравнения (1) содержит одну произвольную функцию переменного x . В этом случае ставится и исследуется следующая задача.

Задача N_1 . Требуется найти решение симметричного интегрального уравнения (1) при $B<0$, по граничному условию.

$$[\exp(-B(\omega_b^\beta(y)))\varphi(x, y)]_{y=0} = \omega_1(x),$$

где $\omega_1(x)$ - заданная функция точек Γ_0 .

О разрешимости задачи N_1 имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Кроме того, пусть в задаче N_1 функция $\omega_1(x) \in C(\Gamma_0)$, $\omega_1(0) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$\omega_1(x) = O[x^{\gamma_8}], \gamma_8 > \alpha - 1 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Допустим, что существует предел $f_1(x, y) = \left(\exp(-B\omega_b^\beta(y)) f(x, y) \right)_{y=0}$, причём $f_1(0,0) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f_1(x, y) = O[x^{\gamma_9}], \gamma_9 > \alpha - 1 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Функция $F_1(x) = (\omega_1(t) + \omega_2(t) - f(t, y) - f(-t, y))$, в точке $x=0$ обращается в нуль, то есть $F_1(0) = 0$ со следующим асимптотическим равенством

$$F_1(x) = O[|x|^{\gamma_{10}}], \gamma_{10} > \alpha - 1, \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Тогда задача N_1 имеет единственное решение, которое дается формулой (13), где $c_1(x)$ определяется при помощи формулы

$$c_1(x) = \omega_1(x) + B \int_0^y f_1(x, s) s^{-\beta} ds + \int_0^x \exp(-B\omega_b^\beta(y)) \cdot [\omega_1(t) + \omega_2(t) - f(t, y) - f(-t, y)] dt + A \int_0^x |t|^{-\alpha} [f_1(t, y) + f_1(-t, y)] dt - f_1(x, y).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджабов Н. Интегральные уравнения типа Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх-сингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе: Издательство «Деваштич», 2007, 221с.

2. Radjabov N. Volterra type integral equation with boundary and interior fixed singularity and super-singularity kernels and their application. – Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing , 2011, 282 p.
3. Раджабов Н., Раджабова Л. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверх- сингулярными ядрами и их приложения. – Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011, 502 p.
4. Раджабов Н. Многомерное интегральное уравнение вольтерровского типа с сингулярными граничными областями в ядрах. – Москва: ДАН России, 2011, том 473 № 2 с.1-3.
5. Раджабов Н., Зарипов С.Б. Об одном двухмерном интегральном уравнении вольтерровского типа с одной граничной и одной внутренней сингулярной линиями. - Материалы XI Школы молодых ученых Российской Федерации. – Россия, Трескол, 4-8 декабря 2013, с. 52-55
6. Раджабов Н., Зарипов С.Б. К теории одного класса двумерного симметричного интегрального уравнения Вольтерровского типа с одной граничной и одной внутренней сингулярной линиями. - Доклады АН РТ, т. 56, № 12, 2013 г.
7. Раджабов Н., Зарипов С.Б. Кривые задачи для одного класса двумерного симметричного по одному из переменных интегрального уравнения Вольтерра с двумя сингулярными линиями. - Номаи Донишгоҳ, ХГУ. 2014, с. 53-58
8. Раджабов Н., Зарипов С.Б. Двумерные симметричные интегральные уравнения вольтерровского типа со сверх-сингулярными линиями. - Материалы научной конференции “Современные проблемы естественных и социально гуманитарных наук” Научно исследовательского института ТНУ (28-29 ноября 2014 г.) 115 с.
9. Раджабов Н., Окили Б. Модельное двумерное симметричное интегральное уравнение Вольтерровского типа с одной граничной и одной внутренней сингулярной линией. - Вестник Таджикского национального университета 12(81) 2012,с. 43-48
10. Раджабов Н., Зарипов С.Б. Об одном классе двумерного симметричного интегрального уравнения Вольтерровского типа с одной граничной и одной внутренней сингулярной линиями. - Материалы Международной научно-теоретической конференции «Актуальные проблемы науки и техники в современном ВУЗЕ» 23-25 мая 2019г. г Стерлитамак, на базе Стерлитамакского филиала Баш ГУ. с. 165-171.

Н.РАЦАБОВ, С.Б.ЗАРИПОВ*

**ДАР БОРАИ ЯК СИНФИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРАЛИИ ДУЧЕНАКАИ
НАМУДИ ВОЛТЕРР БО ХАТХОИ МАХСУСИ ДАРАЧАИ ОЛӢ,
КИ НИСБАТАН БА ЯКЕ АЗ ТАӢИРӢБАНДАҲО
СИММЕТРӢ МЕБОШАНД**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон,

**Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ*

Дар мақола як синфи нави муодилаҳои моделии дученакаи нисбатан ба яке аз тағйирёбандаҳо симметрии интегралӣ намуди Волтерр, ки ядроӣ он якто хати махсуси суперсингулярии қайдқардашудаи сарҳадӣ ва якто хати махсуси суперсингулярии дохилӣ доранд, омӯхта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: муодилаи дученакаи интегралӣ, хати суперсингулярӣ, муодилаи симметрӣ, шартҳои канорӣ.

N.RAJABOV, S.B.ZARIPOV*

**TO THEORY ONE CLASS OF SIMMETRICAL TWO DIMENSIONAL
VOLTERRA TYPE INTEGRAL EQUATION WITH ONE BOUNDARY AND
ONE INTERIOR SUPERSINGULAR LINES**

Tajik National University,

**M.Osimi Tajik Technical University*

In this work, we investigate one new class of the two dimensional symmetric Volterra type integral equations with one boundary and one interior super singular lines.

Key words: two dimensional integral equation, supersingular lines, symmetrical equation, asymptotic conditions.

УДК 621.039.51

ИМОМ М.Ш., МУМИНОВ Х.Х., РОМОДАНОВ В.Л. *, РАХИМИ Ф., ОДИНАЕВ С.Ф.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЦИФРОВОГО МЕТОДА АНАЛИЗА
ЗАГРУЗКИ НЕЙТРОННОГО КАНАЛА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ
СЦИНТИЛЛЯЦИОННЫХ СЧЕТЧИКОВ**

*Физико-технический институт им. С.У.Умарова АН Республики Таджикистан,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

В работе исследована эффективность цифрового метода анализа загрузки нейтронного канала для жидких и кристаллических сцинтилляторов. Были использованы два различных источника гамма-квантов и определена зависимость изменения количества регистрируемых импульсов нейтронов от расстояния до источника гамма-квантов. Показано, что для сцинтиллятора ВС-501 по сравнению с сцинтиллятором EJ-309 и стильбеновым кристаллическим сцинтиллятором до величин загрузки $3 \cdot 10^4$ имп/с число регистрируемых нейтронов остается неизменными и отклики гамма-квантов не попадают в отклики нейтронов, что обеспечивает эффективность цифрового метода регистрации нейтронного излучения.

Ключевые слова: НРА-неразрушающий анализ, АЦП-аналого-цифровой преобразователь, ЯДМ-ядерные делящиеся материалы, ФЭУ-фотоэлектронные умножители, нс-наносекунда.

Введение

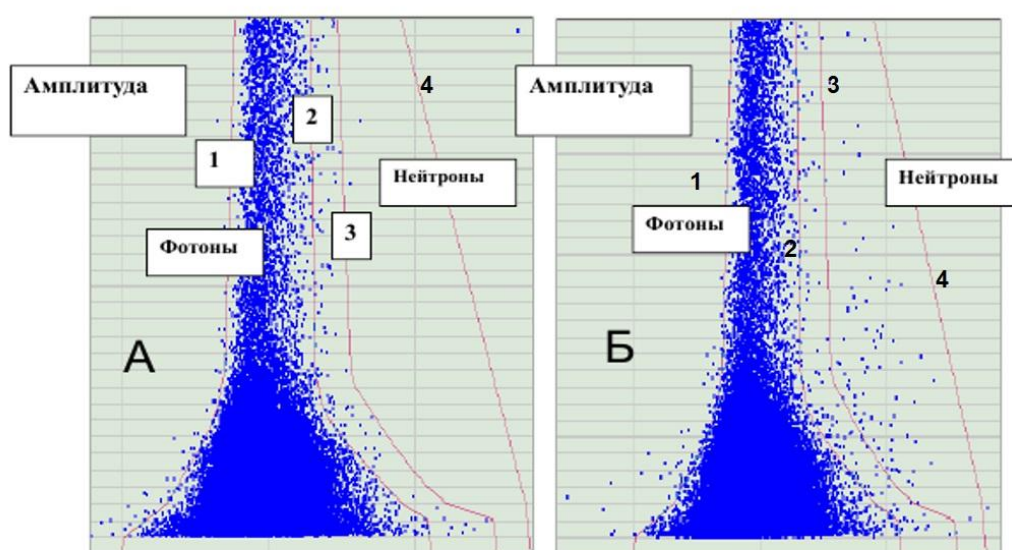
Обнаружение источников нейтронного излучения является важным аспектом контроля радиологической обстановки в целях национальной безопасности, поскольку плутониевый материал, используемый для ядерного оружия, является значительным источником нейтронов.

Как известно, в основном, детекторы нейтронного излучения используют в качестве конвертора газообразный ^3He , что естественно приводит к росту спроса и, соответственно, его дефициту. В связи с этим поиск альтернативных методов детектирования нейтронного излучения на основе других физических принципов с использованием альтерна-

Адрес для корреспонденции: Муминов Хикмат Халимович, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Президиум АН РТ. E-mail: muminov.khikmat@mail.ru; Имом Мирахмади Шарофиддин, 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Физико-технический институт АН РТ. E-mail: emmirshar@gmail.com

тивных материалов конвертеров представляет значительный научный и практический интерес [1].

На сегодняшний день предлагаются различные альтернативные методы обнаружения нейтронных, в частности, с использованием гадолиниевых конвертеров [2]. Одним из лучших методов обнаружения ядерных делящихся материалов (ЯДМ) является использование сцинтилляционных детекторов, особенно эффективных в сочетании с цифровым методом разделения импульсов нейтронов и гамма-квантов [3]. Цифровой метод анализа ЯДМ с помощью сцинтилляционных счётчиков имеет ряд преимуществ и обладает большей точностью по сравнению с другими методами. В этом методе помимо определения откликов нейтронов, также можно определять импульсы фотонов делящихся материалов. [4]



Параметр разделения отн. ед. Параметр разделения отн. ед.

Рис. 1. Цифровое представление фотонных и нейтронных откликов.

А – измерения без ЯДМ, Б – измерения с ЯДМ

1, 2, 3, 4 – дискриминационные кривые разделения откликов

В данной работе проводится исследование эффективности разделения импульсов нейтронов и гамма-квантов с помощью цифрового метода анализа на различных сцинтилляционных детекторах. Основной целью является определение возможного влияния изменения потока гамма-квантов на канал загрузки, который может повлиять на эффективность регистрации импульсов нейтронов.

В эксперименте были использованы источники гамма-квантов (^{60}Co), источник нейтронов (^{252}Cf), фотоэлектронные умножители и детекторы на основе различных сцинтилляторов. В качестве сцинтилляторов были использованы жидкие сцинтилляторы ВС-501, EG-309 и кристаллический стибеновый сцинтиллятор. Эксперимент заключается в

определении зависимости регистрации числа нейтронов от загрузки сцинтиллятора, создаваемой источником гамма-квантов. В эксперименте варьировалось расстояние до источников гамма-квантов, что вело к изменению загрузки импульсов.

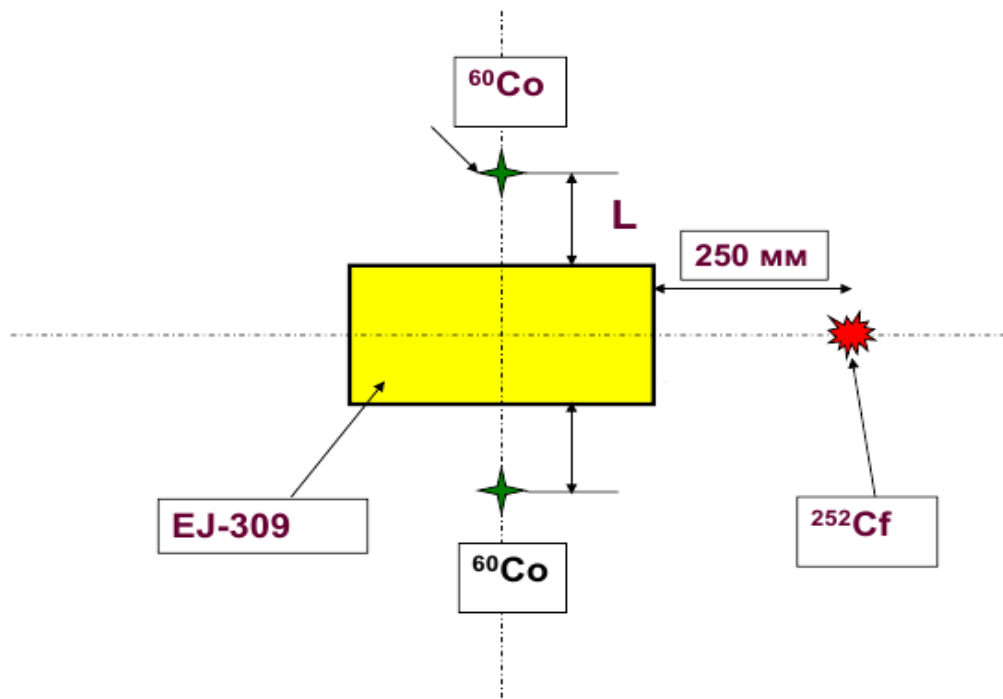


Рис. 2. Схема эксперимента по изменению загрузки сцинтиллятора с помощью источников ^{60}Co

Эксперимент со сцинтиллятором ВС-501

Эксперимент проводился на сцинтилляторе ВС-501. Использовались два источника гамма-квантов и источник нейтронов. Сцинтиллятор ВС-501 является жидким сцинтиллятором, он предназначен для обнаружения как нейтронного излучения, так и гамма-квантов. Сцинтилляторы ВС-501 чаще всего поставляются в капсулах, в металлических или стеклянных ячейках, готовые для немедленного использования. Результаты эксперимента приведены в таблице 1.

Таблица 1

Зависимость числа регистрируемых импульсов нейтронов от загрузки сцинтиллятора
BC-501, создаваемой источником ^{60}Co

№ №	Тип источника	Загрузка, имп/с	Расстояние, см	Число гамма квантов	Число нейтронов
1	^{252}Cf	584	-	14704	1103
2	$^{252}\text{Cf} +$ ^{60}Co	31707	0,5	904817	1151
3	$^{252}\text{Cf} +$ ^{60}Co	23394	3,5	668472	1178
4	$^{252}\text{Cf} +$ ^{60}Co	16808	6	481883	1113

Эксперимент со сцинтиллятором EJ-309

Данный эксперимент был проведён с жидким сцинтиллятором EJ-309, были использованы источники гамма-квантов и нейтронов, как и в предыдущем случае. Сцинтилляторы типа EJ-309 имеют хорошие свойства распознавания формы импульса, низкое давление пара, а также высокую температуру вспышки. Ниже в таблице 2 приведены результаты эксперимента.

Таблица 2

Зависимость числа регистрируемых импульсов нейтронов от загрузки сцинтиллятора
EJ-309, создаваемой источником ^{60}Co

№.№	Тип источника	Загрузка, имп/с	Расстояние, см	Число гамма квантов	Число нейтронов
1	^{252}Cf	2303	-	49259	3542
2	$^{252}\text{Cf} + ^{60}\text{Co}$	55093	0	1486490	3527
3	$^{252}\text{Cf} + ^{60}\text{Co}$	38526	3	1100009	3692
4	$^{252}\text{Cf} + ^{60}\text{Co}$	32361	5	925519	3645

Эксперимент со стильбеновым сцинтиллятором

В этом эксперименте был использован кристаллический стильбеновый сцинтиллятор. Аналогично были использованы источники гамма-квантов и нейтронов. Стильбен

обладает несколько меньшим световым выходом и длительность сцинтилляции у него несколько меньше.

Таблица 3

Зависимость числа регистрируемых импульсов нейтронов от загрузки стилибенового сцинтиллятора, создаваемой источником ^{60}Co

№ №	Тип источника	Загрузка, имп/с	Расстояние, см	Число гамма квантов	Число нейтронов
1	^{252}Cf	345	-	9258	649
2	$^{252}\text{Cf} + ^{60}\text{Co}$	1490	1	52340	630
3	$^{252}\text{Cf} + ^{60}\text{Co}$	1573	2	45715	637
4	$^{252}\text{Cf} + ^{60}\text{Co}$	1242	3	23254	632

В результате выполнения работы была определена зависимость числа нейтронов от загрузки различных сцинтилляторов, создаваемых источником гамма-квантов (^{60}Co). Эксперимент со сцинтиллятором ВС-501 показал, что до загрузок порядка $3 \cdot 10^4$ имп/с число гамма-квантов не влияет на эффективность регистрации нейтронов, поскольку отклики гамма-квантов не попадали в отклик нейтронов и их можно эффективно разделить с помощью цифрового метода.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» А.Г. Белевиту за помощь в цифровой обработке данных эксперимента и плодотворное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Richard T. Kouzes n, James H. Ely, Luke E. Erikson, Warnick J. Kernan, Azaree. Neutron detection alternatives to ^3He for national security applications, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 623(3), 1035-1045. <https://doi.org/10.1016/j.nima.2010.08.021>
2. Abdushukurov D.A., Abdubokhidov M.A, Bondarenko D.V., Muminov Kh. Kh., Toshov T.A., Chistyakov D. Yu. «Modeling the registration of thermal neutrons by gadolinium foils» Journal of Instrumentation, vol.2, issue 04, pp. 4001-4020. doi: 10.1088/1748-0221/2/04/P04001
3. Ромоданов В.Л. Физические методы и установки активного контроля делящихся материалов. – Москва: НИЯУ МИФИ, 2007 г.
4. Ромоданов В.Л., Белевитин А.Г., Афанасьев В.В., Рябов Р.Ю. Комплекс цифровой технологии обработки данных в установках обнаружения радиоактивных и делящихся материалов. – Москва: НИЯУ МИФИ, 2005 г.

ИМОМ М.Ш., МУМИНОВ Ҳ.Ҳ., РОМОДАНОВ В.Л. *, Ф.РАҲИМИ, ОДИНАЕВ С.Ф.

ТАДҚИҚИ САМАРАНОКИИ ТАҲЛИЛИ УСУЛИ АДАДИИ ПУРБОРКУНИИ КАНАЛИ НЕЙТРОНӢ БАРОИ ҲИСОБКУНАКҲОИ ГУНОГУНИ СИНТИЛЛЯТСИОНӢ

*Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови,
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон,
Донишгоҳи миллии тадқиқоти ядроии «ИМФМ»

Дар кори мазкур таҳлили ададии пурборкунии канали нейтронӣ барои синтилляторҳои моеъгӣ ва кристаллӣ тадқиқ шудааст. Ду манбаи гамма квантҳо истифода шуда, тағйири масофаи манбаҳои гамма квантҳо гузаронида шудааст ва миқдори импульсҳои нейтронҳо муайян гардидааст. Синтиллятори BC-501 назар ба синтиллятори EJ-309 ва синтиллятори кристаллии Stilben нишон дод, ки то пурборкунии $3 \cdot 10^4$ имп/с адади нейтронҳо тағйир намеёбанд ва импульси гамма квантҳо ба импульси нейтронҳо намеафтад.

Калимаҳои калидӣ: таҳлили вайроннашванда, табдилдиҳандаи аналогӣ, моддаҳои ядроии таксимшаванда, афзункунандаи фотоэлектронӣ, нс – наносония.

M.Sh.IMOM, Kh.Kh.MUMINOV, V.L.ROMODANOV*, F.RAHIMI, S.F.ODINAEV
*S.U.Umarov Physical-Technical Institute, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,
National Research Nuclear University MEPhI

RESEARCH OF THE EFFICIENCY OF THE DIGITAL ANALYSIS OF LOADING A NEUTRON CHANNEL FOR VARIOUS SCINTILLATION COUNTERS

A digital analysis of the neutron channel loading for liquid and crystalline scintillators is investigated. We used 2 sources of gamma quanta and made changes in the distance of sources of gamma quanta and determined changes in the number of neutron pulses. Scintillator BC - 501, compared with the EJ - 309 scintillator and the Stilben crystal scintillator, showed that before loading 3×10^4 pulses/s the number of neutrons does not change and the responses of gamma quanta do not fall into the neutron responses.

Key words: non-destructive analysis, analog-digital converter, nuclear fissionable materials, photomultiplier tubes - photomultiplier tubes, nanosecond.

УДК 621.315.529

А.А.АДХАМОВ, Ф.ХОЛМУРОДОВ

**ОБЪЕМНОЕ ПРЕЛОМЛЕНИЕ ДВУХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ЛАЗЕРНЫХ
ПУЧКОВ В СУЛЬФИДЕ КАДМИЯ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ**

Физико-технический институт им. С.У.Умарова АН РТ

Поступила в редакцию 19.12.2019 г.

В работе исследован физический эффект, при реализации которого появляется возможность управлять сильным пучком света, используя пересекающийся слабый лазерный луч, распространяющийся в полупроводниковом кристалле с узкой запрещенной зоной, обладающей пьезоэлектрическими свойствами в сильном магнитном поле и при низких температурах как жидкого азота, так и жидкого гелия. В этой связи представляется уместным говорить об "оптическом аналоге транзистора". Все расчеты выполнены для полупроводникового кристалла сульфида кадмия, прозрачного для падающего на него излучения.

Ключевые слова: лучи лазера, поток электронов, рассеяние, электромагнитная волна, пьезополупроводники, интенсивность волны.

Эффективное управление лазерными лучами при низких температурах привлекает к себе внимание ученых и специалистов в области квантовой электроники, нелинейной оптики и радиосвязи в связи с рядом новейших практических применений, среди которых важное место занимают исследования по созданию вычислительных систем с оптическим принципом работы, в которых вместо потоков электронов используются лучи лазера, а также ведущиеся сегодня широким фронтом исследования и разработки, нацеленные на увеличение эффективности многих параметров средств связи и телекоммуникаций.

Обращает на себя внимание один из известнейших и перспективных методов управления лазерным излучением – это способ, основанный на использовании эффекта вынужденного рассеяния Мандельштама-Бриллюэна в полупроводниковых кристаллах. Такое утверждение основано на обнаруженном в последние годы [1] новом физическом

Адрес для корреспонденции: Адхамов Акбар Акобирович. 734065, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1. Физико-технический институт АН РТ.
E-mail: akbaradkhatov@ gmail.com

явлении — спаренным вынужденным рассеянии Мандельштама- Бриллюэна (СВРМБ) в кристаллах полупроводников, в которых присутствует пьезоэффект. Суть этого процесса достаточно проста. Распространение электромагнитной волны, испущенной лазером, или луч лазера с достаточно высокой плотностью потока энергии (выше пороговой), вызывает рассеяние падающего излучения, причем на стоковой частоте. Волна накачки рассеивается на флуктуациях плотности среды. Флуктуации плотности среды – это множество продольных звуковых волн в кристалле с непрерывным спектром по частоте и по направлениям волновых векторов. Наличие второго лазерного пучка, пересекающегося в кристалле с первым пучком, приводит к тому, что возбуждается одна звуковая волна (продольная) с достаточно высокой интенсивностью, на которой происходит перерассеяние обеих электромагнитных волн. При этом волновые векторы двух волн накачки и двух рассеянных волн образуют два треугольника с общим основанием – волновым вектором "общей" звуковой волны [2]. Эта продольная звуковая волна действует как объемная отражательная решетка, которая как будет показано ниже, в определенных режимах может перерассеивать до 100% падающего на неё лазерного излучения. Причем, время быстрогодействия такой системы определяется толщиной кристалла и скоростью гиперзвука в нем.

Заметим, что сам по себе процесс ВРМБ в твердых телах обладает серьезным недостатком – достаточно высоким порогом плотности потока энергии волны накачки, необходимым для возникновения указанного процесса ($10^6 \div 10^7$ Вт/см: [3]). Этот факт, как известно [3], обусловлен сильным затуханием звука, возникающего в процессе ВРМБ. Однако, используя пьезополупроводники, можно усиливать этот звук с помощью сверхзвукового дрейфа электронов и тем самым существенно снизить порог ВРМБ. Такой способ предложен в работе [3], обсуждался в [4,5] и наблюдался в [6]. Таким образом, использование пьезополупроводников позволяет исследователям избавиться от указанного выше недостатка. Более того, появляется ещё одна возможность управлять рассматриваемым процессом — изменять величину тока, протекающего через кристалл [7].

Под инверсным преломлением понимается следующий процесс: пара лазерных пучков взаимно пересекаются, и в месте их пересечения помещается полупроводниковый кристалл с пьезоэффектом. Если порог по интенсивности превзойдён, тогда в образце полупроводника возбуждается звуковая волна, действующая как объёмное зеркало. При этом каждый из двух лазерных пучков выходит из кристалла, поменяв направление, которое он имел до кристалла. Причём, выходящий из кристалла первый пучок и падающий на кристалл второй пучок являются соосными, и наоборот. Другими словами, падающие и рассеянные волны распространяются навстречу друг другу.

Будем считать, что нелинейная среда представляет собой слой пьезополупроводника (сульфида кадмия), ограниченный плоскостями $Y=0$ и $Y=l$ и прозрачного для падающего лазерного излучения. Предположим, что на этот слой падают \vec{k}_1 и \vec{k}_2 [2]. Примем для простоты, что все четыре электромагнитные волны, участвующие в нелинейном

взаимодействии в слое пьезополупроводника, поляризованы таким образом, что электрическое поле в них направлено вдоль оси OX .

В качестве отправного пункта для вывода уравнений, определяющих процессы, возникающие в пьезополупроводниковых соединениях при облучении их электромагнитными волнами, используем систему гидродинамических уравнений для электронов, систему уравнений Максвелла для полей [8], пьезоэлектрическое уравнение состояния, включающего в себя эффект электрострикции [3] и уравнение движения упругой среды.

Рассмотрим развитие процесса в пространстве (вдоль оси OY) в интервале времени $\Delta t < t < \infty$, где Δt - время выхода на стационар: $\Delta t \cong 10$ мкс) и, следовательно, исключим производные по времени. Поскольку мы рассматриваем прозрачные материалы, то можно положить $\varepsilon' \cong 0$. Поглощение света для рубинового лазера согласно оценкам, выполненным для сульфида кадмия $\varepsilon'' = 0,5 \cdot 10^{-7}$. В пренебрежении перерасcением света на нерезонансных плазменных волнах, получаем следующую систему укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{01}}{dy} &= -Q(E_{01}E_1^* + E_{02}E_{02}^*)E_1 \\ \frac{dE_{02}}{dy} &= +Q(E_{01}E_1^* + E_{02}E_{02}^*)E_2 \\ \frac{dE_1^*}{dy} &= +Q(E_{01}E_1^* + E_{02}E_{02}^*)E_{01}^* \\ \frac{dE_2^*}{dy} &= -Q(E_{01}E_1^* + E_{02}E_{02}^*)E_{02}^* \end{aligned} \quad (1)$$

где $Q = (\alpha\alpha^* w_0^2 tg\Theta_0) / (4sc2 \rho\gamma_s)$

Предположим для начала, что на границе $Y=0$ задана интенсивность одной из падающих волн $|E_{01}(0)|^2 = 1$, а на границе $Y=1$ ($Y=Q1$) задана интенсивность другой волны накачки $|E_{02}(1)|^2 = 1$. Примем также, что на границе $Y=0$ задана интенсивность рассеянной волны $|E_{01}(0)|^2 = \eta_d 1$, а на границе $Y=1$ задана интенсивность другой рассеянной волны $|E_2(1)|^2 = \eta_d 1$. Помимо этого будем считать, что известны фазы волн: $\varphi_{01}(0)$, $\varphi_1(0)$, $\varphi_{02}(1)$, $\varphi_2(1)$ - то есть известны входные фазы волн. Искомыми величинами являются коэффициенты отражения от слоя пьезополупроводника $r_a = |E_2(0)|^2 / |E_{01}(0)|^2$, $r_b = |E_1(1)|^2 / |E_{02}(1)|^2$, коэффициенты прохождения:

$S_a = |E_{01}(1)|^2 / |E_{01}(0)|^2, S_b = |E_{02}(0)|^2 / |E_{02}(1)|^2$ и четыре фазы волн на выходе из слоя нелинейной среды: $\varphi_{01}(1), \varphi_1(1), \varphi_{02}(0), \varphi_2(0)$. Тогда с помощью указанных выше граничных условий для случая $\eta_{c,d} = 0, \xi = 1$, получаем $r_a = r_b = r$ и $S_a = S_b = S, S = 1 - r$, а также уравнение для определения коэффициента отражения r :

$$\sqrt{r} = th(G\sqrt{r}). \quad (2)$$

Для случая $\eta_{c,d} = 0, \xi \neq 1$ находим $r_b = r, r_a = \xi^2 r, S_a = S_b = S, S = 1 - \xi r$ и уравнение:

$$\sqrt{(1-\xi)^2 + 4\xi^2 r} = (1+\xi)th\left(\frac{G}{2}\sqrt{(1-\xi)^2 + 4\xi^2 r}\right). \quad (3)$$

Заметим, что в процессе численного расчета был обнаружен интересный с нашей точки зрения эффект, который назван процессом "инвертного преломления". Суть этого эффекта заключается в том, что наличие второй волны накачки, пересекающейся в слое нелинейной среды с первой волной накачки приводит к тому, что первая волна накачки в процессе прохождения слоя пьезополупроводника разворачивается в направлении, являющемся инвертным по отношению ко второй волне накачки и наоборот, вторая волна накачки, по мере своего прохождения слоя, на выходе распространяется навстречу первой волне накачки. В самом деле, вводя "коэффициент инвертного преломления": $R_1 = |E_1(1)|^2 / |E_{01}(0)|^2$ и $R_2 = |E_2(0)|^2 / |E_{02}(1)|^2$, находим $R_1 = \xi r b$ и $R_2 = r_a / \xi$, но с другой стороны $r_a = \xi r b$ откуда следует $R_1 = R_2 = R$ - коэффициент "инвертного преломления". Результаты численного расчета представлены на рисунке, из которого следует, что "эффект полного взаимного преломления" наступает с увеличением величины при меньших значениях коэффициента конвективного усиления ВРМБ G . На графике приведены зависимости $R(G)$ для следующих значений отношения интенсивности волн накачки на входе в слой пьезополупроводника: $\xi = 0, 1; 1, 0; 5; 10$. Как легко видеть из рис.1, зависимость $R(G)$ имеет пороговый характер, причём величина порога $G_{пор}$ уменьшается с увеличением величины ξ .

Таким образом, рис.1 указывает на то, что в нём заложен очень важный, с нашей точки зрения, физический эффект. Суть этого эффекта состоит в том, что слабым (по интенсивности) пучком накачки можно управлять сильным по интенсивности пучком света. В этом плане представляется уместным применить характеристику для этого процесса - "оптический аналог транзистора". В самом деле, если мы фиксируем на графике (рис.1) величину G , например, при неизменной интенсивности падающей слева на слой волны накачки - фиксируем толщину слоя 1 мм или при неизменной толщине слоя, фиксируем интенсивность накачки, тогда, как следует из графика, при увеличении интенсивности

второй (пробной или управляющей) волны накачки, то есть при увеличении параметра ξ коэффициент инвертного преломления R приближается к насыщению. Причём, меняя параметры ξ , например, в пределах $0,001 \leq \xi \leq 0,1$, можно эффективно менять интенсивность прошедшего света мощного лазерного пучка от нулевой величины до максимальной, то есть той, которая была у мощного пучка на входе в слой кристалла. И, соответственно, доля прошедшего насквозь света (а не отклоненного в направлении слабого пучка) от мощной волны накачки меняется обратным образом - то есть прошло то, что осталось от мощной волны накачки после "инвертного преломления". Указанный эффект мог бы, с нашей точки зрения, явиться основой для создания целого класса принципиальных новых устройств управления оптическим излучением.

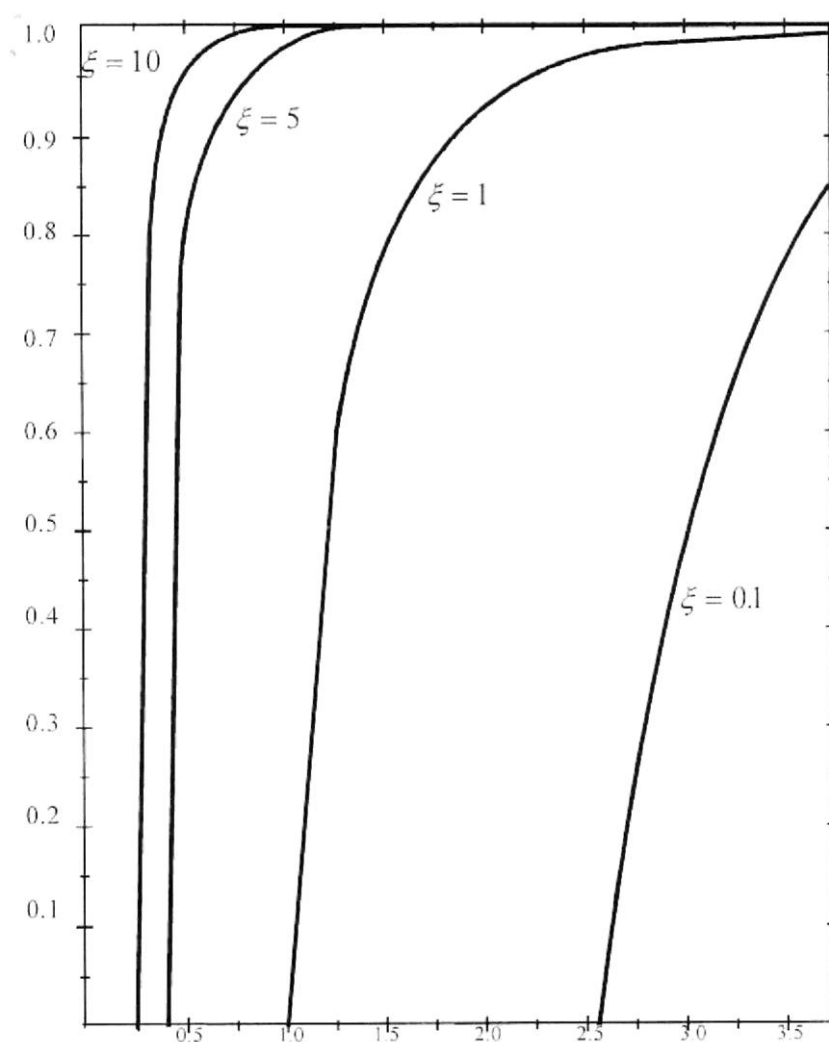


Рис.1. Зависимость "коэффициента инвертного преломления" от коэффициента конвективного усиления ВРМБ G для различных значений параметра ξ

ЛИТЕРАТУРА

1. Адхамов А.А. Фотовозбуждение звука в полупроводниках двухчастотной лазерной накачкой. – Акустический журнал. 1988, т. XXXIV, в. 2, с. 207-214.
2. Адхамов А.А. Вынужденное рассеяние Манделъштама-Бриллюэна двух скрещенных лазерных пучков в кристаллах CdS при усилении акустических фонов. Деп. в ВИНТИ 3 марта 1988 г., № 1728-В-88,
3. Gordon R.L. Stimulated Brillouin Scattering in Piezoelectric Semiconductors. J, Appl. Phys, 1968, V. 39, № 1, pp. 306-313.
4. Рысаков В.М. Рассеяние Манделъштама-Бриллюэна в кристаллах с усилением звуковых волн. - ФТТ. 1968. т. 10, в. 9, с. 2829-2831
5. Красильник З.Ф., Рабинович М.И. О вынужденном рассеянии Манделъштама-Бриллюэна (ВРМБ) в пьезополупроводниках. – ФТП. 1973. т. 7, в. 7, с. 1241-1247.
6. Дьяконов А.М., Леманов В.В., Сагтикулов М. Вынужденное рассеяние Манделъштама-Бриллюэна в кристаллах CdS при усилении акустических фононов. – Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 31, в. 8, с. 460-463.
7. Адхамов А. А. Абсолютная параметрическая неустойчивость при вынужденном рассеянии двух пересекающихся в сульфиде кадмия электромагнитных волн. – Труды II - Всесоюзной школы-семинара "Взаимодействие электромагнитных волн с полупроводниками и полупроводниково-диэлектрическими структурами" (4-10 сентября 1988 г.). Издательство Саратовского Государственного университета им. Н.Г. Чернышевского, 1988, Часть 2, с. 96-97; Програма, Саратов. 1988, с. 11.
8. Горбунов Л.М. Гидродинамика плазмы в сильном высокочастотном поле. – УФН, 1973, г. 109. № 4. с. 631-665.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – М: Наука, 1953, 788 с.
10. Стил М., Вюраль Б. Взаимодействие волн в плазме твердого тела. – М: Мир, 1975. 436 с.

А.А.АДХАМОВ, Ф.ХОЛМУРОДОВ

ШИКАСТИ ҲАҚИИ ДУ НУРҲОИ ҲАМДИГАРРО БУРРАНДАИ ЛАЗЕРӢ ДАР СУЛФАТИ КАДМИ ДАР ҲАРОРАТИ ПАСТ

*Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови
Академия илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар кори мазкур ходисаи физикие таҳқиқ карда шудааст, ки ҳангоми амаликунонии он, бо истифода аз нури лазерии ҳамдигарро буррандаи энергияш пасти дар кристалли нимноқилии қитъаи мамнуъаш борик паҳншаванда, ки дар майдони магнитии баланд хусусиятҳои пьезоэлектрикиро дар ҳароратҳои пасти ҳам нитрогени моеъ ва ҳам гелии моеъ доро мебошад, идоракунии нури рӯшноиаш баланд имконпазир мегардад.

Дар ин робита оид ба «аналоги оптикии транзистор» далел овардан бамаврид мебошад. Ҳамаи ҳисобҳо барои кристалли нимноқили сульфати кадмий, ки ба нури ба он афтанда шаффоф мебошад, иҷро карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: нурҳои лазери, сели электронҳо, парокандашавӣ, мавҷи электромагнитӣ, пьезонимноқилҳо, интенсивияти мавҷҳо.

A.A.ADHAMOV, F.KHOLMURODOV

**BULK REFRAKTION OF TWO INTERSECTING LAZER BEAMS
IN CADMIUM SULFIDE AT LOW TEMPERATURES**

*S.U.Umarov physical-tehnical institute,
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*

The physical effect is studied in the implementation of which it becomes possible to control a strong light beam using an intersecting weak laser beam propagating in a semiconductor crystal with a narrow gap, possessing piezoelectric properties in a strong magnetic field and at of both liquid nitrogen and liquid helium low temperatures. In this regard, it seems appropriate to talk about «optical analogous of the transistor».

All calculations were performed for a semiconductor cadmium sulfide crystal transparent to the incident radiation.

Key words: laser beams, electrons flow, scattering, electromagnetic wave, piezoelectric semiconductor, wave intensity.

УДК [621.373.826:519.876.5](075.8)

Х.ГАФУРОВ, Х.А.ТОШХОДЖАЕВ

МЕХАНИЗМ ВЫСОКОЙ СТАБИЛЬНОСТИ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ЛАЗЕРА С СИНХРОНИЗАЦИЕЙ МОД

Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова

Поступила в редакцию 26.12.2019 г.

Представлены результаты, которые объясняют механизм формирования сложной структуры излучения лазера в режиме синхронизации продольных мод. Результаты оценки временных и частотных характеристик показали, что высокая стабильность временной структуры обеспечивается процессами насыщения. Форма отдельного светового импульса на границе области существования режима синхронизации мод указывает на тонкую структуру спектра лазерного перехода.

Ключевые слова: лазер, синхронизация мод, период, частота, световой импульс, сигнал биений, время релаксации.

Лазеры, работающие в режиме синхронизации продольных мод, являются источником излучения периодической структуры сверхкоротких световых импульсов [1, с. 9]. Достигнутые предельные временные характеристики и практическое применение световых импульсов для формирования и передачи информации ставят новые задачи досконального выяснения механизмов их формирования. При этом требуются все большие уровни стабильности, миниатюризации, удельного объема размещаемой информации и энергетических параметров световых импульсов [1, с. 16].

Периодическая последовательность световых импульсов формируется при синхронизации продольных мод. В полупроводниковых лазерах такие импульсы формируются с целью передачи информации, где основным требованием является стабильность временной и амплитудной структуры. С целью обеспечения этого используют процессы насыщения усиливающей среды или размещение полосового фильтра [2, с. 147]. Наличие

Адрес для корреспонденции: Гафуров Халимджон, Республика Таджикистан, г. Худжанд., ул. Мавлонбекова, дом 1, Худжандский государственный университет им.ак. Б.Гафурова
E-mail: microwavetgu@gmail.com

процесса насыщения явно отражается на спектре излучения, в пределах которого генерируются продольные моды, имеющие непосредственное влияние на формирование временной структуры излучения. Использование полосового фильтра спектра излучения лазера обеспечивает генерацию достаточного количества продольных мод и достижение необходимой длительности световых импульсов в заданной области длины волн [2, с. 151].

Сложную структуру отдельного импульса можно выразить как комбинацию двух импульсов разной длительности следующим образом:

$$f(t) = G1 * e^{-\frac{(t-t1)^2}{2*\sigma1^2}} + G2 * e^{-\frac{(t-t2)^2}{2*\sigma2^2}}$$

где G1 и G2 – амплитуда, t1 и t2 – моменты времени максимума импульсов, $\sigma1$ и $\sigma2$ – длительность импульсов. Для сравнения представлены расчеты временной структуры двух случаев, когда их максимумы совпадают (рис.1) и когда импульсы смещены друг относительно друга достаточно далеко (рис.2.)

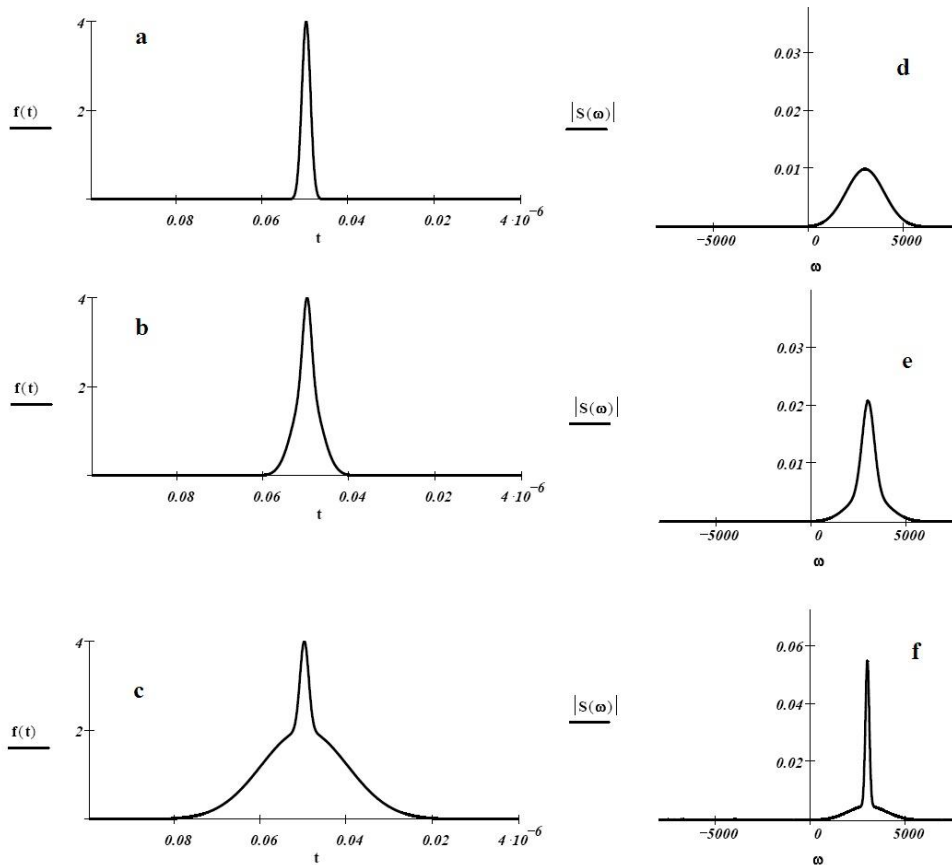


Рис.1. Расчет формирования импульса из комбинации двух отдельных импульсов одинаковой – а и разной длительности – b,c и спектр суммарного импульса – d,e,f

Форма импульса, представленная на рис.1 (c), довольно часто встречается в экспериментальных исследованиях излучения лазера с синхронизацией мод, в том числе и в

наших результатах[11]. Поскольку форма импульса с резким максимумом в центре наблюдается на пределе режима генерации одиночных импульсов, за которым следует структура излучения с дополнительными импульсами сателлит на периоде, можно предполагать, что формирование импульса сателлит начинается с момента изменения формы импульса. Поэтому форму импульса (рис. 1(с)) можно рассматривать как комбинацию двух импульсов представленных на (рис. 2 (а)). Такое предположение приводит к утверждению, что импульс сложной структуры является результатом суммирования двух групп продольных мод, частоты которых совпадают. Разница этих мод, может быть в плоскости их поляризации или в пространственном их распределении, другими словами возможно спектр лазерного перехода имеет тонкую структуру наблюдаемых при больших значениях мощности излучения.

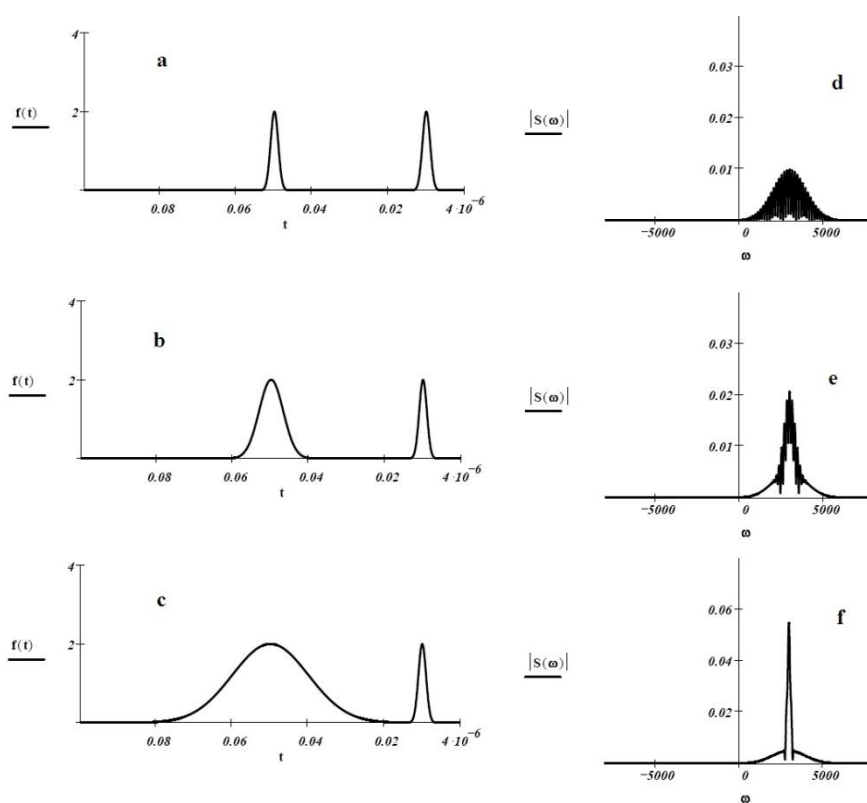


Рис.2. Расчет структуры двух отдельных импульсов одинаковой – а и разной длительности – b,c и спектр импульсов – d,e,f

Сложная структура импульсов проявляется в том, что в периоде между импульсами формируются дополнительные импульсы - «сателлит» или импульс состоит из набора импульсов – квазиимпульс. По контролируемым параметрам [4], режим генерации сложной временной структуры является достаточно стабильной, который дает надежду их применения на практике [5]. Поскольку генерация световых импульсов сложной структуры наблюдается как при активной [6], так и пассивной синхронизации [7] продольных

мод непрерывных лазеров, определение механизма процесса их формирования становится актуальной задачей [1].

Сравнение результатов расчета на рис. 1 и 2 показывает однозначную сложную структуру как временной, так и спектральной плотности частот. Кроме случая (рис.1 (с)) и (рис.2 (с)), где имеет место незначительная разница в спектрах связанная достаточно большой разницей в длительности импульсов. Сложная спектральная структура имеет непосредственное влияние при экспериментальном измерении сигнала биений с помощью анализатора спектра [4].

В наших экспериментальных исследованиях режима синхронизации мод непрерывных лазеров, показателем высокой стабильности является ширина сигнала биений между модами, на анализаторе спектра С4-27. Сигнал биений представляет собой реперную линию шириной аппаратной функции прибора равную 1 кГц (рис.3). Длина резонатора составляет $L = 4$ метра, и поскольку насыщающийся поглотитель находился посередине резонатора $L/2 = 2$ м. сигнал биений наблюдается вблизи частоты $c/L = 75$ ГГц. Поскольку оптическая длина зависит от коэффициента усиления, наблюдалось смещение положения сигнала биений при изменении последнего в пределах области существования.

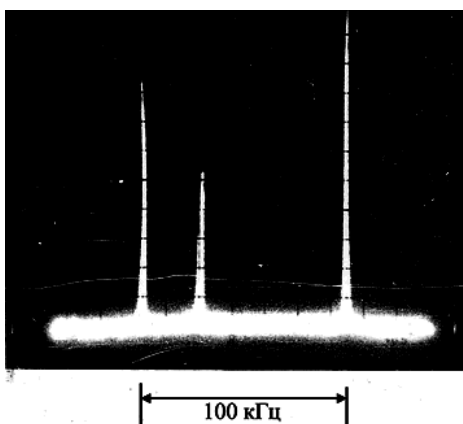


Рис.3. Сигнал биений между модами лазера на ионах аргона в режиме синхронизации мод.

Согласно экспериментальным данным работы [4, с.1147, рис. 3], значимым результатом является формирование сложной временной структуры излучения лазера, работающего в режиме синхронизации мод, при существенном рассогласовании частоты модуляции и интервала частот между продольными модами, определяемого длиной резонатора – $c/2L$. Сигнал биений между модами, наблюдаемый на анализаторе спектра, состоял из большого количества пиков, расположенных симметрично относительно некоторой центральной частоты – $\nu_{opt} = c/2L_{opt}$. Частотный интервал между максимумами и оптимальной частотой зависел от величины рассогласования длины резонатора и становился больше при увеличении последнего [4, с. 1147, рис. 3d]. Сложная структура сигнала биений наблюдалась и при уменьшении длины резонатора от оптимального значения [4, с. 1148, рис. 5b, рис. 6b], где расстояние между пиками увеличивалось. Исходя из сложной

временной структуры излучения, в каждом из этих случаев, можно утверждать, что имеет место формирование множества групп продольных мод и каждая группа синхронизована, поскольку мы наблюдаем резкий сигнал биений от каждой группы. В связи с тем, что геометрическая длина резонатора остается постоянной, то для каждой группы продольных мод имеют место разные значения оптической длины резонатора, определяемого умножением величины показателя преломления лазерной среды и геометрической длины резонатора – $L_0 \cdot n_g(t)$. Величина $n_g(t)$ зависит от времени и однозначно связана со значением рассогласования длины резонатора через значение коэффициента насыщенного усиления $g(t)$. Чем меньше значение $g(t)$, тем меньше затягивание продольных мод к центру спектра усиления и интервал между продольными модами больше. Поэтому при большем изменении длины резонатора имеет место увеличение расстояния между пиками сигнала биений (рис.3d) и уменьшение расстояния между пиками сигнала биений при меньшем изменении длины резонатора (рис.3 b).

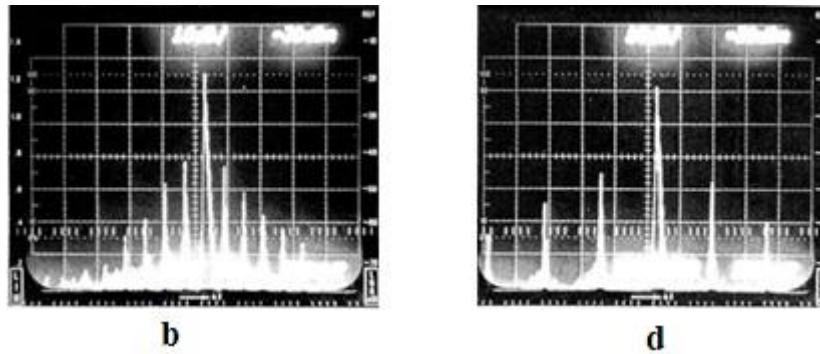


Рис. 3. Сигналы биений между продольными модами при большей длине резонатора: (b) $L = L_{opt} + 125$ мкм и (d) $L = L_{opt} + 320$ мкм. согласно [4, с. 1147, рис. 3]. Масштаб экрана по горизонтали 200 кГц/дел. и по вертикали 10 дВ/дел. Частота центра экрана около 80.5-МГц, что соответствует интервалу между модами резонатора пустого резонатора - $c/2L_0$.

Интервал между сигналами биений в случае b составляет 120 кГц, а для случая d эта величина равна 340 кГц. Эти данные получены после векторизации изображения рис. 3 с помощью программы Easy Trace с учетом масштаба, указанного авторами [4]. Если предположить, что эти сигналы связаны только с изменением геометрической длины резонатора, то расчет показывает, для b $c/2(L-L_{opt}) = 800$ ГГц, а для случая d эта величина получается равной 469 ГГц. Сравнение этих величин с интервалами пиков сигнала биений говорит о том, что механизм образования эквидистантных сигналов биений заключается не только в изменении геометрии резонатора.

В последнее время обсуждается один из механизмов возникновения сложной временной структуры излучения в лазерах с синхронизацией мод [8] который заключается в проявлении времени когерентности лазерных переходов. Временные и частотные интервалы, определенные по сигналу биений работы [4], имеют близкое соответствие с этим механизмом образования сложной структуры сигнала биений. Поскольку ширина спектра

генерации и время релаксации поляризации для красителя родамина 6Ж соответственно составляют порядка 1012 Гц и 10-12 с.

Структура сигнала биений говорит об экспоненциальном падении амплитуды пиков сигнала биений, относительно максимальной. Подобная зависимость указывает на вклад релаксационных процессов, которые происходят в усиливающей среде, с учетом импульса накачки и формируемых импульсов лазера на красителе. Основными параметрами, определяющими структуры формируемых импульсов, являются соотношение между периодами импульсов накачки и импульсов лазера на красителе, длительность импульсов, время релаксации инверсной населенности – T1 и время релаксации поляризации – T2 для лазерного перехода красителя.

С целью оценки влияния процессов насыщения на формирование сложной структуры сигнала биений была определена зависимость амплитуды пиков сигнала биений от их порядкового номера исходя из данных рис. 3(b). Данные полученные после векторизации сигнала биений с учетом масштаба развертки приведены на рис.4.

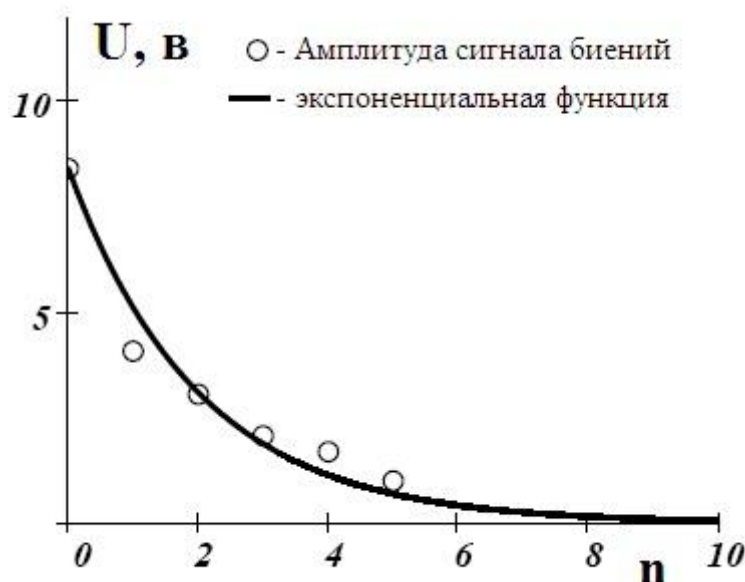


Рис. 4. Зависимость амплитуды пиков сигнала биений от их порядкового номера относительно центрального пика.

Расчет характерного интервала времени спада экспоненциальной зависимости дает значение $\tau = 4.17 \times 10^{-9} \text{ с} = 4 \text{ нс}$, который указывает на близость к времени релаксации инверсной населенности красителя.

Аналогичную экспоненциальную зависимость наблюдаем при формировании сложной временной структуры излучения аргонового лазера с пассивной синхронизацией мод (рис.5).

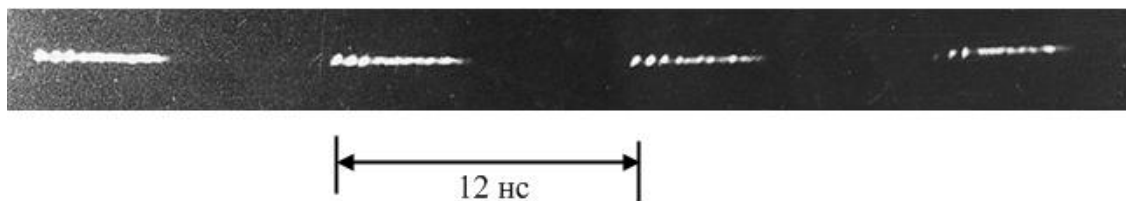


Рис. 5. Временная развертка световых квазиимпульсов аргонового лазера в режиме пассивной синхронизации мод.

Световой квазиимпульс состоит из большого количества импульсов, и их амплитуда монотонно спадает до нуля в интервале времени близкое в половине периода следования $T = 12$ нс. Это время близко к значению времени релаксации населенности верхнего уровня ионов аргона, которая судя по ширине спектра излучения составляет величину $T_u = 10$ нс [7 с.1506]. Временная структура имеет строгую периодичность и, согласно разверткам высокоскоростных камер прямого наблюдения ФЭР-2 и АГАТ, излучение не имеет случайного светового фона в интервале периода следования импульсов [7 с.1506]. Судя по этому, лазер генерирует импульсы с максимальной энергетической эффективностью, которая и обеспечивает высокую стабильность сформированной временной структуры.

Таким образом, несмотря на утверждения авторов [9 с. 23137], что проблема сложной временной структуры впервые теоретически и экспериментально рассмотрена ими, она не является новой и имеет место как при пассивной, так и при активной синхронизации мод, сопровождаемой эффектом гистерезиса [10]. Результаты всех работ указывают на нестабильность в промежутке перехода от одной временной структуры к другой и стабильности режима установившейся временной структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архипов Р.М., Архипов М.В., Шимко А.А., Пахомов А.В., Розанов Н.Н., Предельно короткие оптические импульсы и их генерация в резонансных средах (Миниобзор). Письма в ЖЭТФ, 2019, т. 110, вып. 1, с. 9-20.
2. Kyriakos V., Bintjas C., Pleros N., Avramopoulos H. Ultrafast Semiconductor-Based Fiber Laser Sources/2004. IEEE Journal of selected topics in quantum electronics, V. 10, № 1, pp.147-154.
3. Виноградова А. А., Криндач Д. П., Назаров Б. И. “Временная структура генерации аргонового лазера при пассивной синхронизации мод” Квантовая электроника, 1979, т. 6, № 3, с.625–629.
4. MacFarlane D.L., Lee W. Casperson, and A.A. Tovar, Spectral behavior and pulse train instabilities of a synchronously pumped mode-locked dye laser J. Opt. Soc. Am. B/Vol. 5, No. 5/May 1988. pp. 1144-1151.
5. Архипов М.В., Архипов Р.М. Шимко, А.А., Бабушкин И., Розанов Н.Н. , “Синхронизация мод в титан-сапфировом лазере за счет когерентного поглотителя”. Письма в ЖЭТФ, 109:10 (2019), с.657-661; JETP Letters,109:10 (2019), с.634-637.
6. Гафуров Х., Сархатов И., Тошходжаев Х.А., Хомидов М. “Моделирование воздействия лазерного импульса сложной временной структуры на тепловые процессы в твердых телах”, – Политехнический вестник, Таджикского политехнического университета им. ак. М.С.Осими, серия: интеллект, инновации, инвестиции. №2 (46), 2019, с. 41- 46

7. Гафуров Х.Г., Криндач Д. П., Яковлев А. Г. “Стационарная пассивная синхронизация мод Ar+ лазера” – Квантовая электроника, 1985, т. 12, № 7, с.1503–1510.
8. Casperson L.W., Coherence effects in synchronously pumped mode-locked dye lasers. Journal of Applied Physics, (1982). 54 (5) pp. 2198-2208.
9. Brandon G.B., Khanh K., Kutz J.N., Wise F., Transition dynamics for multi-pulsing in mode-locked lasers. – OPTICS EXPRESS, 2009, Vol. 17, No. 25, pp. 23137-23146.
10. Гафуров Х.Г., Криндач Д.П., “Гистерезисные эффекты Ar+ лазера с нелинейным поглотителем в резонаторе”. – Квантовая электроника. 1985, т.12, № 3, с.625-627.
11. Гафуров Х.Г., Криндач Д.П., Нехаенко В.А., Яковлев А.Г., “Повышение стабильности непрерывного лазера на красителе с синхронным возбуждением при введении нелинейного поглотителя” – Квантовая электроника. 1985, т. 12, № 6, с.1279–1282.

Ҳ.ҒАҒУРОВ, Ҳ.А.ТОШХҶАЕВ

МЕХАНИЗМИ УСТУВОРИИ БАЛАНДИ СОХТИ ТАРКИБИИ ИМПУЛСҶОИ ЛАЗЕР БО СИНХРОНИЗАТСЯИ МОДҶО

Донишгоҳи давлатии Хуҷанд ба номи академик Б.Ғафуров

Натиҷаҳои оварда шудаанд, ки механизми ташаккулёбии сохти таркибии мураккаби нури лазерро, дар речаи синхронизатсияи модҳои қаддӣ, маънидод мекунад. Натиҷаҳои баҳодихӣ, ба тавсифҳои вақтӣ ва басомадӣ, нишон доданд, ки устувории баланди сохти таркибӣ тавассути протсессии сершавӣ таъмин мешавад. Шакли мураккаби импульси алоҳидаи рӯшноӣ, нишонаи сохти нозуки спектри гузариши лазерӣ мебошад.

Калимаҳои калидӣ: лазер, синхронизатсияи модҳо, лазер, довр, басомад, импульси рӯшноӣ, сигнали таппиш, вақти релаксация.

Kh.GAFUROV, H.A.TOSHHODZHAEV

MECHANISM HIGH STABILITY OF TIME STRUCTURE IN MODE-LOCKED LASER

B.Gafurov Khujand State University

Presented results are explained the mechanism formation a complex structure of laser radiation in the mode locked laser. The estimation results of time and frequency characteristics showed that high stability, time structure, is provided by saturation processes. The shape of an individual light pulse at the boundary region existence of the mode-locking regime indicates the fine structure spectrum of the laser transition.

Key words: laser, mode locking, period, frequency, light pulse, beat signal, relaxation time.

УДК 541.124

Ш.Х.РАДЖАБОВ, Д.А.САЙДАЛИЕВ, Х.АЛИШЕР, Э.АБУАЛИ, А.С.ФАЙЗУЛЛАЕВ
**ТЕХНОЛОГИЯ ПОЛУЧЕНИЯ КРИОЛИТА, ФТОРИДА АЛЮМИНИЯ И
ПЛАВИКОВОЙ КИСЛОТЫ ИЗ ГЛИНОЗЕМ-, ФТОРСОДЕРЖАЩИХ
ОТХОДОВ ПРОИЗВОДСТВА АЛЮМИНИЯ**

Дангаринский государственный университет

Поступила в редакцию 13.03.2020 г.

В работе приведены результаты исследований по разработке технологии получения криолита, фторида алюминия и глинозема из глинозем-, фторсодержащих отходов производства алюминия методом сернокислотного разложения. Найдены оптимальные параметры осуществления технологических процессов, проведен физико-химический анализ этих отходов и продуктов их переработки.

Ключевые слова: производство алюминия, глинозем-, фторсодержащие отходы, кислотное разложение, плавиковая кислота, производство криолита, производство фторида алюминия.

На современном этапе технического и технологического развития промышленности степень влияния человека на окружающую среду стала почти такой же, как всеохватывающие вредные природные процессы.

Отходы и шламовые поля химической, металлургической промышленности занимают огромные площади, загрязняя окружающую среду. По данным работ [1-3] ежегодно химико-металлургической промышленностью выбрасываются в окружающую среду золашлаковые отходы ТЭЦ, пыль электрофильтров горнометаллургических предприятий, углекислый газ, образующийся в производстве алюминия, продукты выжигания угля, диоксид серы и т.п.

Алюминиевое производство образует огромное количество углерод- фтор- и глиноземсодержащих отходов: использованная графитовая футеровка электролизёрных ванн, огарки использованных анодов, углеродсодержащая пена, образующаяся в электролизных

Адрес для корреспонденции: Раджабов Шухрат Холмуродович. 734003, Республика Таджикистан, г. Дангара, ул. Маркази, 35, Дангаринский государственный университет.
E-mail: R.Shuhrat.Kh@mail.ru

ваннах, сметки между электролизными корпусами, шлаки литейного производства. Например, ежегодно количество образующихся отходов в Западной Европе насчитывает более 130-150 тыс. тонн [4], а в США составляет 172 тыс. тонн [5]. Образование углерод-, фтор-, натрий- и глиноземсодержащих отходов, по мнению автора работы [6], составляет на тонну алюминия 30-35 кг. В среднем фазовый состав углерод-, фтор-, натрий- и глиноземсодержащие отходы содержат, % масс:

C – 25÷35;

Na_3AlF_6 – 25÷30;

$\text{MgF}_2 + \text{CaF}_2$ – 3÷7;

Na_2SO_4 – 5÷10;

Na_2CO_3 – 5÷7;

SiO_2 – 0,2 ÷ 0,5;

Fe_2O_3 – 1,2 ÷ 1,5.

Так, в графитовой футеровке электролизёрных ванн содержание фтора доходит до 18%, пена, образующаяся в электролизных ваннах, содержит 60-70% электролита. Складирование этих видов отходов требует огромных площадей, приводит к потерям ценных веществ и загрязняет экологию региона [7-8].

Поэтому извлечение ценных веществ, переработка твердых отходов и использование их в производстве в качестве добавочного сырья во много раз превосходит существующие требования по степени экологической чистоты [9-10].

Переработка твердых углерод-, фтор- и глиноземсодержащих отходов алюминия осуществляется в трех направлениях: очистка фтора, очистка углерода и комплексная очистка ценных веществ [11-12].

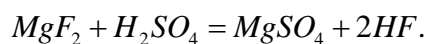
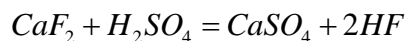
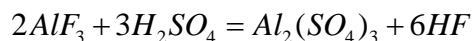
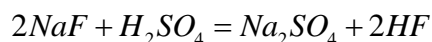
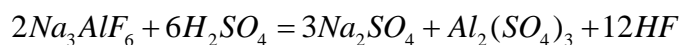
Переработку твердых углерод-, фтор- и глиноземсодержащих отходов алюминия можно произвести, применяя следующие методы [5,12]:

- содо-щелочные;
- соляно-сернокислотные;
- двухстадийная содо-щелочная обработка;
- высокотемпературный обжиг;
- обогащение с использованием флотореагента флотации;
- спекание с известняком;
- пиролиз с влажным воздухом.

В России, Америке, Европе и др. используют содо-щелочные методы очистки фтора из графитовой футеровки электролизёрных ванн, пыли из электрофильтров и шламов газоочистных сооружений. По этим методам углерод-, фтор- и глиноземсодержащие отходы растворяются в содо-щелочах с получением алюминатно-фторидных растворов, которые нейтрализуются с кислотой для образования криолита [2,7,12].

Сущность методики кислотной обработки заключается в разложении при определенной температуре глинозема и фтористых солей из графитовой футеровки электролизёрных ванн. Этот способ трудоёмок и экономически нецелесообразен.

В результате взаимодействия концентрированной серной кислоты с фторосолями, содержащимися в отходах, происходит разложение солей по следующим возможным уравнениям реакций:



При этом также происходит частичное разложение серной кислоты и испарение воды. Для поглощения выделяющегося фтористого водорода продуктивный газ пропускали через воду. Затем осаждением фтора хлоридом магния рассчитывалась степень извлечения фтора из фторосолей.

Как видно из рис. 1.1 и 1.2, наиболее рациональными условиями разложения являются: $C_{H_2SO_4} = 92$ мас.%; Ж:Т = 4÷1; $t = 300^\circ\text{C}$; $\tau = 30$ мин. При этом степень извлечения фтора достигает 92 мас.%.

Увеличение продолжительности процесса более 30 мин (рис. 1.1а) приводит к незначительному росту степени извлечения (0.3%), но при этом расход энергии неадекватно повышается.

При увеличении температуры свыше 300°C (рис. 1.1б) степень извлечения фтора возрастает, но вследствие повышения скорости разложения серной кислоты продуктивный газ загрязняется оксидами серы.

Влияние концентрации серной кислоты на степень извлечения фтора представлено на рис. 1.2а. Как видно из рисунка при увеличении концентрации кислоты монотонно возрастает степень извлечения фтора.

При соотношении Ж:Т менее 4:1 происходит (рис. 1.2б) загустевание реакционной массы, что приводит к снижению скорости диффузии ионов водорода кислоты вглубь твердой фазы, а увеличение соотношения Ж:Т более 5:1 повышает скорость реакции, но при этом существенно возрастает расход серной кислоты.

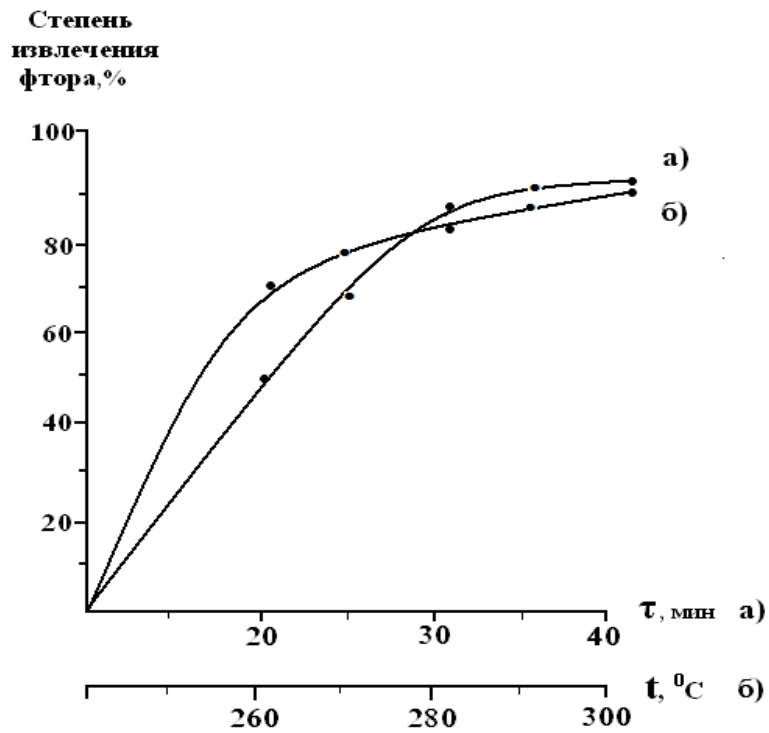


Рис. 1.1. Зависимость степени извлечения фтора от продолжительности процесса (а) и температуры (б).

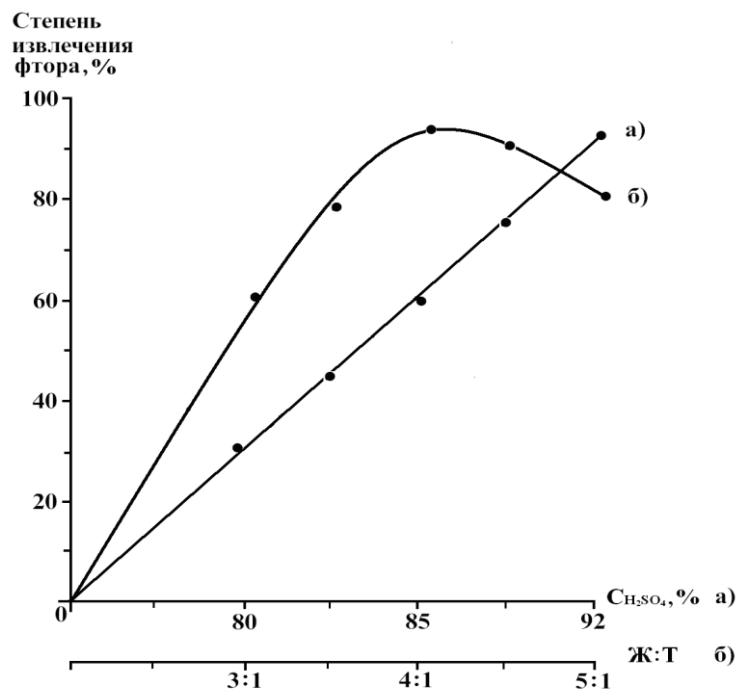


Рис. 1.2. Зависимость степени извлечения фтора от концентрации серной кислоты (а) и соотношения Ж:Т (б).

С целью изучения минералогического состава исходного сырья и конечных продуктов процесса, направления и механизма протекания реакций был проведен рентгенофазовый анализ некондиционного КГК, продукта, полученного при осаждении фтора и твердого остатка, образующегося в результате кислотного разложения исходного сырья (рис. 2).

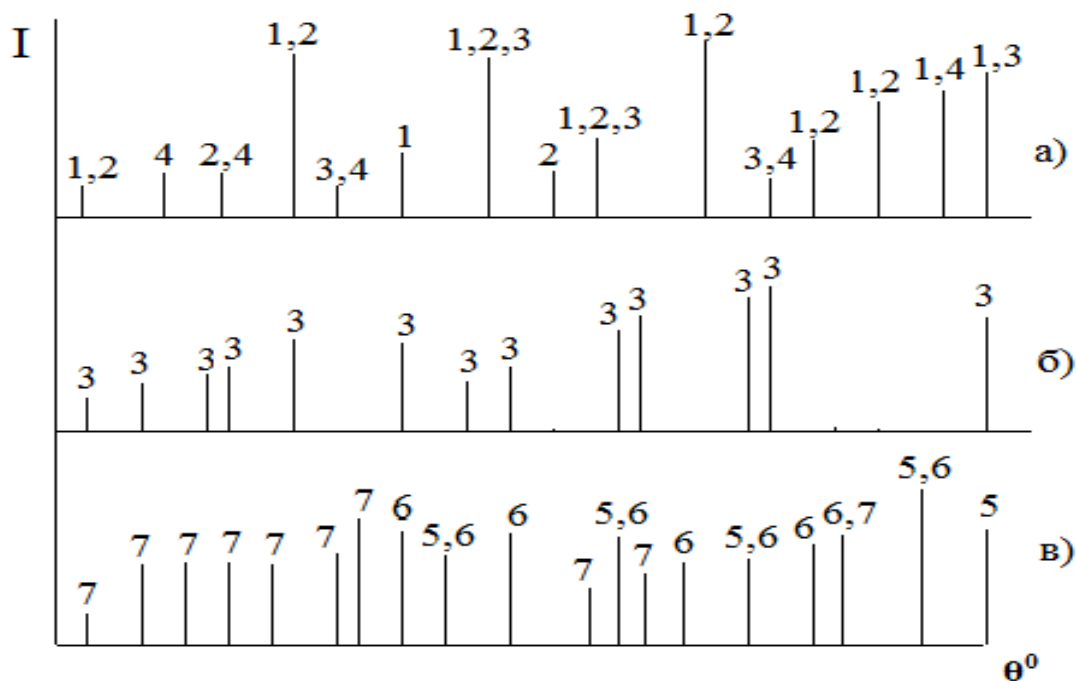


Рис. 2. Штриходиаграммы:

а) некондиционного КГК; б) продукта, полученного при осаждении фтора и в) твердого остатка после кислотного разложения:

1 – криолит (Na_3AlF_6); 2 – глинозем (Al_2O_3); 3 – селлаит (MgF_2);
 4 – флюорит (CaF_2); 5 – квасцы натровые ($\text{NaAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$);
 6 – алуноген ($\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 18\text{H}_2\text{O}$); 7 – гипс ($\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$).

Как видно из штриходиаграммы некондиционного КГК (рис. 2а), основными компонентами его являются: криолит, глинозем, флюорит и селлаит.

На штриходиаграмме осадка, полученного при осаждении фтора (рис 2б) присутствуют только линии селлаита (MgF_2), что указывает на полноту разложения фторсодержащих компонентов с образованием фтористо-водородной кислоты.

Штриходиаграмма твердого остатка после кислотного разложения (рис. 2в) характеризуется отсутствием линий криолита, глинозема, флюорита, фтористого магния и появлением новых линий алюмонатриевых квасцов, алуногена и гипса, что также свидетельствует о полноте протекания процесса их разложения.

На основе проведенных исследований была разработана принципиальная технологическая схема получения фторида алюминия, криолита и плавиковой кислоты из твер-

дых фторсодержащих отходов производства алюминия (рис. 3), которая органически вписывается в традиционную технологическую схему производства этих солей из флюорита.

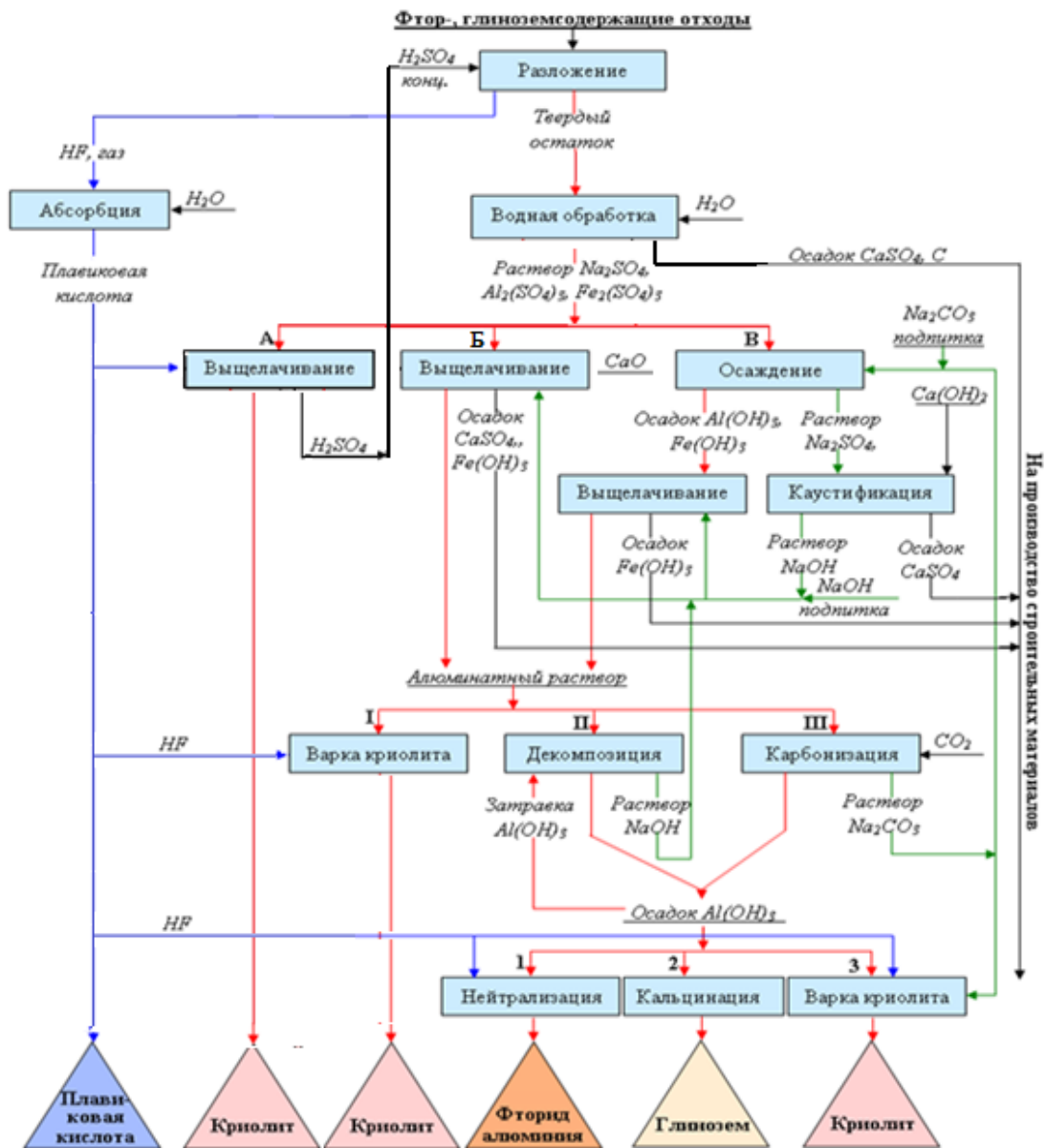


Рис. 3. Принципиальная технологическая схема получения криолита, фторида алюминия и плавиковой кислоты из глинозем-, фторсодержащих отходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пальгунов П.П., Сумароков М.В. Утилизация промышленных отходов. – М.: Стройиздат, 1990, 346 с.
2. Ласкорин Б.Н., Громов Б.В., Цыганков А.П. и др. Безотходная технология в промышленности. – М.: Стройиздат, 1986, 155 с.
3. Галков А.С., Пигарев М.Н., Жигалин И.Н. и др. Пути использования отходов криолитового производства. – Цветные металлы, 1978, № 3. с.41.

4. Галкин Н.Г. и др. Улавливание и переработка фторсодержащихся газов. – М.: Атомиздат, 1975, 238 с.
5. Истомин С.П., Куриков Б.П., Мясникова С.Г. Новые направления в технологии переработки высокодисперсных фторсодержащих отходов производства алюминия. – Цветные металлы, 1999, № 3, с.45-47.
6. Веклер Э.А. Справка по алюминиевой промышленности капиталистических и развивающихся стран. – Л.: ВАМИ, ОНТИ, 1977, 126 с.
7. Скрыбцева Л.М., Гончаров В.К., Устич Е.П. Утилизация угольных отходов электролизного производства. – Цветные металлы, 1986, № 2, с.49-50.
8. Истомин С.П., Мясникова С.Г. Исследование флотационного способа получения криолита. – Цветные металлы, 1999, № 3, с. 56-58.
9. Гузь С.Ю., Бариковская Р.Г. Производство криолита, фтористого алюминия, фтористого натрия. – М.: Металлургия, 1964, 138 с.
10. Вильсон Д. Утилизация твердых отходов. Под ред.Д.Вильсона – М.: Стройиздат, 1985, т.1-2, 320 с.
11. Albert, I.C. Waste recovery in Europe. Waste Age. – 1987, № 10, pp.70-72.
12. Finders G. Aufbereitung der kathodenausk leitung von Aluminiumelektrolyzeller. Umweltschutz Metallgutteneinol Claushal. – Zellerfeld, 1973, pp. 65-70.

Ш.Х.РАДЖАБОВ, Д.А.САЙДАЛИЕВ, Х.АЛИШЕР, Э.АБУАЛИ, А.С.ФАЙЗУЛЛАЕВ

**ТЕХНОЛОГИЯИ ҲОСИЛ НАМУДАНИ КРИОЛИТ, ФТОРИДИ
АЛЮМИНИЙ ВА КИСЛОТАИ ГИДРОГЕНФТОРИД АЗ ПАРТОВҲОИ
ГИЛҲОКУ ФТОРДОРИ ИСТЕҲСОЛОТИ АЛЮМИНИЙ**

Университети давлатии Дангара

Дар маводи мазкур натиҷаҳои таҳқиқотҳои оид ба коркарди технологияи ҳосил намудани криолит, фториди алюминий, гилҳок ва кислотаи гидрогенфторид аз партовҳои гилҳоку фтордори истеҳсолоти алюминий бо усули таҷзияи кислотагӣ оварда шудаанд. Параметрҳои оптималии гузариши равандҳои технологӣ ва бо таҳлили физикавӣ ва химиявӣ таркиби ашёи хому маҳсулоти онҳо муайян гаштаанд.

Калимаҳои калидӣ: истеҳсоли алюминий, партовҳои гилҳоку фтордор, таҷзияи кислотагӣ, кислотаи гидрогенфторид, истеҳсоли криолит ва фториди алюминий.

Sh.Kh.RAJABOV, D.A.SAIDALIEV, H.ALISHER, E.ABUALI, A.S.FAIZULLOEV

THE TECHNOLOGY OF RECEPTION CRYOLITE, FLUORIDE AND FLUORIC ACID OF ALUMINUM FROM ALUMINA-, FLUORINE CONTAINING ALUMINUM PRODUCTION WASTES

Dangara State University

In the present article technology of reception cryolite and fluoride of aluminum from alumina and fluorine containing wastes of aluminum production is described. The physical and chemical analysis is carried out on optimum condition of process passing and defined compositions of raw materials and products.

Key words: aluminum production, alumina and fluorine containing wastes, aluminum manufacture, acidic decomposition, fluoric acid, cryolite and aluminum fluoride production.

УДК 669.76+542.943

П.Р.ИБРОХИМОВ, И.Н.ГАНИЕВ, Ф.А.РАХИМОВ, З.Р.ОБИДОВ

**ВЛИЯНИЕ ДОБАВОК ХРОМА НА АНОДНОЕ ПОВЕДЕНИЕ СПЛАВА
Zn_{0.5}Al В ЩЕЛОЧНОЙ СРЕДЕ**

Институт химии им. В.И.Никитина АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 21.01.2020 г.

В работе представлены результаты потенциостатического исследования влияния добавок хрома на анодное поведение сплава Zn_{0.5}Al в щелочной среде. Показано, что скорость коррозии цинк-алюминиевого сплава уменьшается в 2.0–2.5 раза при добавке в него 0.01÷0.1 мас.% Cr.

Ключевые слова: сплав Zn_{0.5}Al, хром, потенциостатический метод, электролит NaOH, потенциал коррозии, скорость коррозии.

Цинк-алюминиевые сплавы широко используются в различных областях техники. В последнее время данные сплавы стали применять в качестве защитных покрытий стальных конструкций, изделий и сооружений. Наиболее известные из них, это сплавы Zn₅Al и Zn₅₅Al известные под торговыми марками Гальфан-I, II и Гальвалюм. Покрытия наносятся для анодной защиты стали, определяющим является компромисс между низкой поляризацией покрытия в области повреждения (что и определяет защиту стали) и его коррозионной стойкостью вдали от этой зоны [1-3].

В литературе встречаются различные модификации цинк-алюминиевых сплавов, легированных третьим компонентом. В частности в работах [4-12] показано положительное влияние ряда металлов периодической системы на коррозионную устойчивость сплавов Zn_{0.5}Al, Zn₅Al и Zn₅₅Al.

Цель работы заключается в изучении влияния добавок хрома на анодное поведение цинк-алюминиевого сплава Zn_{0.5}Al, предназначенного для нанесения защитного покрытия на сталь горячим методом.

В качестве исходных материалов использовали цинк квалификации ЧДА (гранулированный), алюминий марки А7 и его лигатуру с хромом (2 мас.% Cr), которая синте-

Адрес для корреспонденции: Иброхимов Пайрав Рустамович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: z.r.obidov@rambler.ru

зировалась в шахтной печи электрического сопротивления типа СШОЛ в интервале температур 750...850°C. Химический состав сплавов оценивали методом микрорентгеноспектрального анализа на приборе SEM (Южная Корея). Точность определения содержания хрома составляла $\pm 10^{-3}$ % от измеренной величины.

Из каждой плавки отливали в графитовую изложницу стержни диаметром 8 мм и длиной 140 мм. Торцевая часть образцов изолировалась коррозионностойким лаком, что позволяло исследовать в них одинаковую подготовленную площадь поверхности. Перед погружением образца в рабочий раствор его торцевую часть зачищали наждачной бумагой, полировали и обезжиривали в течение 10-15 с. в 10%-ном растворе NaOH. Температура раствора в ячейке поддерживалась постоянной (20 °C) с помощью термостата МЛШ-8. Электродом сравнения служил хлоридсеребряный, вспомогательным – платиновый.

Потенциодинамическое исследование влияния добавок хрома на анодное поведение цинк-алюминиевого сплава Zn0.5Al проводилось в щелочных средах 0.001н. (pH=10), 0.01н. (pH=11) и 0.1н. (pH=12) электролита NaOH со скоростью развертки потенциала 2 мВ·с⁻¹ на потенциостате ПИ-50.1.1 по методике, описанной в работах [13-15].

Таблица 1

Изменения потенциала свободной коррозии ($-E_{\text{св.кorr.}}$, В) сплава Zn0.5Al с хромом, во времени, в щелочной среде

Среда NaOH	Добавки Cr в сплаве, мас. %	Время, минут							
		1/3	2/3	1	5	15	30	45	60
0.001н	-	1.032	1.032	1.031	1.029	1.025	1.025	1.025	1.025
	0.01	1.050	1.049	1.049	1.046	1.042	1.042	1.042	1.042
	0.05	1.067	1.067	1.065	1.064	1.060	1.060	1.060	1.060
	0.1	1.094	1.094	1.093	1.090	1.085	1.085	1.085	1.085
	0.5	1.124	1.122	1.122	1.118	1.114	1.114	1.114	1.114
	1.0	1.148	1.147	1.145	1.141	1.137	1.137	1.137	1.137
0.01н	-	1.056	1.055	1.050	1.050	1.048	1.048	1.048	1.048
	0.01	1.071	1.071	1.070	1.069	1.068	1.068	1.068	1.068
	0.05	1.098	1.097	1.097	1.097	1.093	1.093	1.093	1.093
	0.1	1.114	1.112	1.112	1.109	1.107	1.107	1.107	1.107
	0.5	1.140	1.140	1.136	1.136	1.134	1.134	1.134	1.134
	1.0	1.172	1.170	1.170	1.166	1.165	1.165	1.165	1.165
0.1н	-	1.216	1.215	1.213	1.213	1.210	1.210	1.210	1.210
	0.01	1.226	1.224	1.224	2.219	1.218	1.218	1.218	1.218
	0.05	1.125	1.225	1.224	1.223	1.222	1.222	1.222	1.222
	0.1	1.255	1.253	1.253	1.251	1.245	1.245	1.245	1.245
	0.5	1.280	1.280	1.280	1.178	1.277	1.277	1.277	1.277
	1.0	1.291	1.290	1.290	1.288	1.284	1.284	1.284	1.284

Исследование изменения потенциала свободной коррозии ($-E_{\text{св.кorr.}}$, В) сплава Zn0.5Al, легированного хромом, во времени, в щелочной среде проводили в течение 1 ч. Для всех исследованных групп сплавов отмечено незначительное смещение потенциала в положительную область, что объясняет динамику формирования защитной оксидной плёнки, которая завершается к 15 мин. от начала процесса. По мере увеличения концен-

трации легирующей добавки и электролита NaOH величина $E_{\text{св.корр.}}$ смещается в отрицательную область значений, что косвенно свидетельствует о снижении коррозионной стойкости сплавов в среде NaOH (табл. 1).

Добавки хрома в диапазоне изученной концентрации сдвигают коррозионно-электрохимические потенциалы исходного сплава Zn0.5Al в отрицательную сторону, при этом наиболее заметен рост потенциалов коррозии, питтингообразования и репассивации в отрицательном направлении при содержании легирующего компонента в сплавах более 0.5 мас.%. Такая особенность наблюдалась во всех исследуемых щелочных средах при различной концентрации электролита NaOH (табл. 2).

Таблица 2

Влияние хрома на анодное поведение сплава Zn0.5Al в щелочной среде

Среда NaOH	Содержание хрома в сплаве, мас.%	Электрохимические потенциалы, В (х.с.э.)				Скорость коррозии	
		- $E_{\text{св.корр.}}$	- $E_{\text{корр.}}$	- $E_{\text{п.о.}}$	- $E_{\text{реп.}}$	$i_{\text{корр.}} \cdot 10^2$	$K \cdot 10^3$
						А/М^2	$\text{Г/М}^2 \cdot \text{ч}$
0.001н	-	1.025	1.033	0.845	0.853	0.116	1.41
	0.01	1.042	1.053	0.871	0.888	0.044	0.54
	0.05	1.060	1.074	0.895	0.907	0.056	0.68
	0.1	1.085	1.090	0.910	0.915	0.059	0.72
	0.5	1.114	1.135	0.942	0.955	0.061	0.74
	1.0	1.137	1.154	0.963	0.978	0.062	0.75
0.01н	-	1.048	1.058	0.892	0.900	0.127	1.55
	0.01	1.068	1.070	0.902	0.907	0.052	0.63
	0.05	1.093	1.105	0.922	0.937	0.055	0.67
	0.1	1.107	1.112	0.963	0.972	0.066	0.80
	0.5	1.134	1.146	1.041	1.057	0.070	0.85
	1.0	1.165	1.170	1.066	1.073	0.073	0.89
0.1н	-	1.210	1.216	0.920	0.936	0.133	1.62
	0.01	1.218	1.220	0.938	0.940	0.053	0.65
	0.05	1.222	1.225	0.985	1.000	0.056	0.68
	0.1	1.245	1.252	1.017	1.026	0.069	0.84
	0.5	1.277	1.280	1.097	1.114	0.076	0.93
	1.0	1.284	1.284	1.121	1.138	0.081	0.99

В целом, проведенные исследования анодного поведения сплава Zn0.5Al с добавкой хрома в щелочных средах 0.001н. (pH=10), 0.01н. (pH=11) и 0.1н. (pH=12) NaOH показали возможность повышения коррозионной стойкости анодных покрытий за счет оптимизации их состава: концентрация легирующего компонента должна составлять 0.01÷1.0 мас.% Cr. Скорость коррозии данных сплавов в 2.0-2.5 раза ниже, чем исходного Zn0.5Al (табл. 2). Предложенные составы сплавов могут быть использованы в качестве анодного покрытия для защиты от коррозии стальных конструкций, изделий и сооружений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кечин В.А., Люблинский Е.Я. Цинковые сплавы. – М.: Металлургия, 1986, 247 с.

2. Виткин А.И., Тейндл И.И. Металлические покрытия листовой и полосовой стали. – М.: Металлургия, 1971, 493 с.
3. Amini R.N., Irani M.B., Ganiev I.N., Obidov Z.R. Galfan I and Galfan II doped with calcium, corrosion resistant alloys. – Oriental Journal of Chemistry, 2014, v. 30, № 3, pp. 969-973.
4. Одинаева Н.Б., Ганиев И.Н., Обидов З.Р., Амини Р.Н. Потенциодинамическое исследование сплава Zn+0.5% Al, легированного таллием. – ДАН РТ, 2014, т. 57, № 8, с. 686-689.
5. Obidov Z.R. Anodic behavior and oxidation of strontium-doped Zn5Al and Zn55Al alloys. – Protection of Metals and Physical Chemistry of Surfaces, 2012, v. 48, № 3, pp. 352-355.
6. Амини Р.Н., Ганиев И.Н., Обидов З.Р., Ганиева Н.И. Анодное поведение сплава Zn55Al, легированного бериллием, в среде электролита NaCl. – ДАН РТ, 2010, т. 53, № 2, с. 131-134.
7. Obidov Z.R. Thermophysical properties and thermodynamic functions of the beryllium, magnesium and praseodymium alloyed Zn-55Al alloy. – High Temperature, 2017, v. 55, № 1, pp. 150-153.
8. Алиханова С.Д., Ганиев И.Н., Обидов З.Р. Кинетика окисления сплавов Zn5Al и Zn55Al, легированного неодимом. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2012, № 3(148), с. 92-97.
9. Обидов З.Р. Анодное поведение и окисление сплавов Zn5Al и Zn55Al, легированных барием. – Известия СПбГТИ (ТУ), 2015, № 31(57), с. 51-54.
10. Амини Р.Н., Ганиев И.Н., Обидов З.Р., Ганиева Н.И. Влияние добавок магния на анодное поведение сплава Zn55Al, в среде электролита NaCl. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2009, № 4(137), с. 78-82.
11. Обидов З.Р. Влияние pH среды на анодное поведение сплава Zn5Al, легированного бериллием и магнием. – Известия СПбГТИ (ТУ), 2015, № 32(58), с. 52-55.
12. Amini R.N., Obidov Z.R., Ganiev I.N., Mohamad R.B. Potentiodynamical research of Zn-Al-Mg alloy system in the neutral ambience of NaCl electrolyte and influence of Mg on the structure. – Journal of Surface Engineered Materials and Advanced Technology, 2012, v. 2, № 2, pp. 110-114.
13. Обидов З.Р. Влияние pH среды на анодное поведение сплава Zn55Al, легированного бериллием и магнием. – Журнал прикладной химии, 2015, т. 88, № 9, с. 1306-1312.
14. Обидов З.Р., Ганиев И.Н. Физикохимия цинк-алюминиевых сплавов с редкоземельными металлами. – Душанбе: ООО «Андалеб-Р», 2015, 334 с.
15. Колотыркина Я.М. Металл и коррозия. – М.: Металлургия, 1985, 88 с.

П.РИБРОҶИМОВ, И.Н.ҒАНИЕВ, Ф.А.РАҶИМОВ, З.Р.ОБИДОВ

ТАЪСИРИ ИЛОВАҶОИ ХРОМ БА РАҒТОРИ АНОДИИ ХҶЛАИ Zn0.5Al, ДАР МУҶИТИ ИШҚОРӢ

*Институти химияи ба номи В.И.Никитини
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаҳои таҳқиқоти потенциостатикӣ таъсири иловаҳои хром ба рағтори анодии хӯлаи Zn0.5Al, дар муҳити ишқорӣ пешниҳод шудааст. Нишон дода шудааст, ки суръати коррозияи хӯлаи руҳ-алюминий ҳангоми ба он илова намудани хром 0.01-0.1% вазн 2.0-2.5 маротиба кам мешавад.

Калимаҳои калидӣ: хӯлаи Zn0.5Al, хром, усули потенциостатикӣ, электролити NaCl, потенциали коррозия, суръати коррозия.

P.R.IBROHIMOV, I.N.GANIEV, F.A.RAHIMOV, Z.R.OBIDOV

**INFLUENCE OF ADDITIVES OF CHROME ON ANODE BEHAVIOUR Zn0.5Al
ALLOY, IN ALKALINE ENVIRONMENT**

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

In paper results potentiostatical researches influence of additives of chrome on anode behaviour of Zn0.5Al of alloy, in the alkaline environment are presented. It is shown, that speed of corrosion alloy zinc-aluminium decreases at 2.0-2.5 times at the additives in it 0.01-0.1 wt.% Cr.

Key words: Zn0.5Al alloy, chrome, potentiostatically method, HCl electrolyte, corrosion potential, corrosion rate.

УДК 544.476:661.183.123.2

Р.С.МИРЗОЕВА, Д.С.МУХИДИНОВ, Х.Х.АВЛОЕВ, Д.Х.ХАЛИКОВ

СОРБЦИИ ИОНОВ МЕТАЛЛОВ ПЕКТИНОВЫМИ ГИДРОГЕЛЯМИ

Институт химии им. В.И.Никитина АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 17.02.2020 г.

Методами потенциометрического и кондуктометрического титрования изучены потенциальные центры адсорбции пектиновых полисахаридов полученных из выжимок яблок (ПЯ), цитрусовых (ПЦ), персика (ППр), пектина корзинки подсолнечника (ПКП) и пектата натрия (ПNa) по отношению к катионам металлов. По данным сорбции ионов меди пектиновыми веществами, гидрогели на их основе в водной среде и в ацетатном буфере определены значения максимальной емкости гидрогелей q_m , константа адсорбционного равновесия (K_θ) и изменение свободной энергии ($dG = -RT \ln K_\theta$). Полученные данные свидетельствуют о существенной роли процесса гипотетического ионного обмена в изученных системах и возрастании сорбционной активности изученных природных полимеров в области pH вблизи рК соответствующих карбоксильных групп.

Ключевые слова: центры адсорбции, пектины, пектат натрия, галактуроновая кислота, потенциометрия, кондуктометрия, сорбция, адсорбционные равновесия, свободная энергия.

Проблема взаимодействия синтетических и природных катионитов с низкомолекулярными комплексообразующими ионами металлов представляет большой научный и практический интерес, поскольку образовавшиеся наноструктурные надмолекулярные системы полиметаллокомплексов проявляют ряд уникальных биологически активных свойств. В частности, металлокомплексы пектиновых веществ проявляют ростстимулирующие действия растительных материалов и способствуют коррекции микроэлементных нарушений организма [1-4].

Целью настоящей работы явилось сравнительное изучение потенциальной природы сорбционных центров в пектиновых полисахаридах, полученных из различных источников растительного сырья, оценка величин константы адсорбционного равновесия и из-

Адрес для корреспонденции: Халиков Джурабой Халикович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии АН РТ. E-mail: dkhalikov@rambler.ru

менение свободной энергии реакции обмена ионов двухвалентных металлов и противоионов карбоксильных групп пектиновых полисахаридов на примере ионов меди.

Таблица

Основные характеристики исходных пектиновых полисахаридов

Параметры	ПКП	ГКП	ПЯ	ПЦ	ППр
ГК, %	69.39	66.60	78.74	84.15	65.30
СЭ ГК, %	86.95	25.88	76.73	52.1	94.94
НС, %	8.92	8.32	6.31	8.439	-
[η], дл/г	1.72	-	3.29	3.75	-
Са, %	4.25	2.50	3.0	-	0.25

Пектиновые полисахариды корзинок подсолнечника (ПКП), гидрогель на основе ПВ (ГПВ), выжимок яблок (ПЯ), кожуры апельсина (ПЦ) и персика (ППр) были получены по ранее разработанной методике [5]. Количество связавшихся ионов меди полимерами вычисляли по формуле: $q=V(C_o-C_p)/m$, где V – объём раствора в инкубационной ёмкости; C_o – исходная концентрация сорбата, C_p – равновесная концентрация сорбата; m – масса образца пектинового полисахарида. Используя значения адсорбции (q) и её придельные значения (q_m) была рассчитана степень заполнения сорбента ($\theta=q/q_m$) ионами металла. Величину q_m рассчитывали по данным сорбции ионов металла гидрогелем, используя линейную форму уравнения Лэнгмюра ($1/q=1/q_m+(1/(q_m*K_\theta))*(1/C_p)$), а константу адсорбционного равновесия (K_θ) по формуле: $K_\theta=(\theta/(C_p*(1-\theta)))$. Опыты проводили при 20°C в водной среде и ацетатном буфере (АБ) при pH=5.56. В таблице приводятся основные характеристики исходных объектов исследования. На рис. 1 представлены результаты потенциометрического и кондуктометрического титрования ПКП с раствором

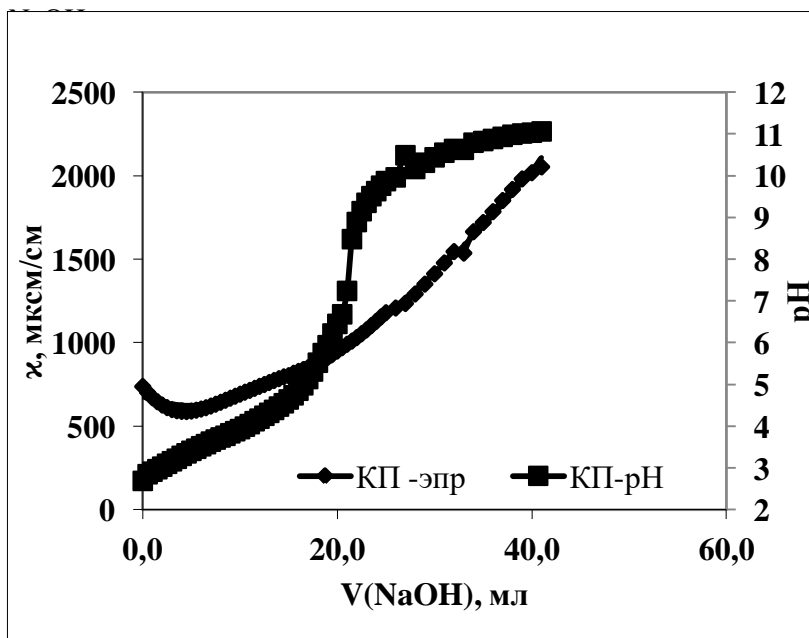


Рис.1. Зависимость удельной электропроводности (κ) и pH раствора ПКП от объема добавленного 0.1н раствора NaOH.
($m(\text{ПNa})=0.5005$ г;
 $V(\text{H}_2\text{O})=100$ мл.)

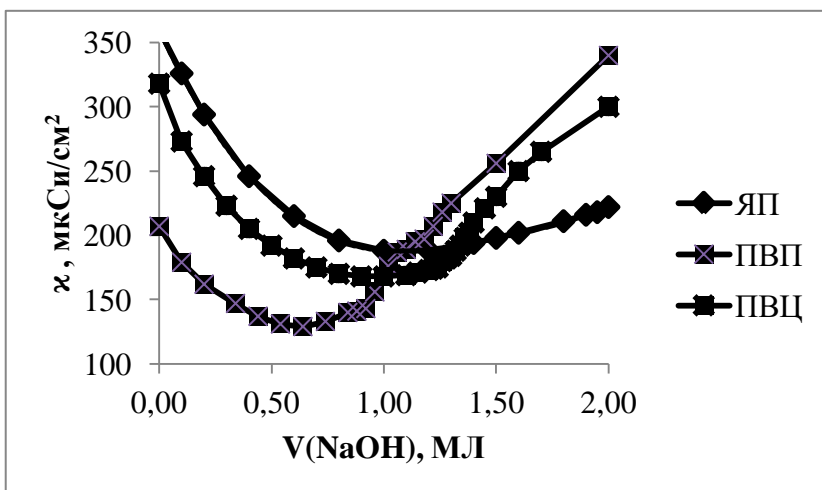


Рис. 2. Зависимость удельной электропроводности (κ) растворов ПВ от объема 0.01N раствора NaOH. ($m(\text{ПЯ})=0.0146$ г; $m(\text{ППр})=0.00715$ г; $m(\text{ПЦ})=0.0148$ г; $V(\text{H}_2\text{O})$ для всех образцов по 5 мл.)

На рис. 1 (кривая $\text{pH}-V(\text{NaOH})$), видно, что реакция между карбоксильными группами остатков полигалактуроновой кислоты и раствором щелочи идет типично между кислотами и основанием. Полученные данные в координате $\text{pH}-\lg(\alpha/(1-\alpha))$ достаточно хорошо укладываются в прямолинейную зависимость $\text{pH} = -1.433(\lg(\alpha/(1-\alpha))) + 4.08$, с коэффициентом корреляции $R^2=0.981$, а величина $\text{pK}=4.08$ достаточно близка к результатам ранее полученной в нашей лаборатории [6]. Из рис. 2, где представлены данные кондуктометрического титрования для пектинов, полученных из различных источников сырья следует, что в начальной области pH снижение величины удельной электропроводности (κ) является общим явлением. Причины снижения величины κ в начальной области pH раствора, скорее всего, связано с малой подвижностью ионов водорода вследствие включения их в водородные связи.

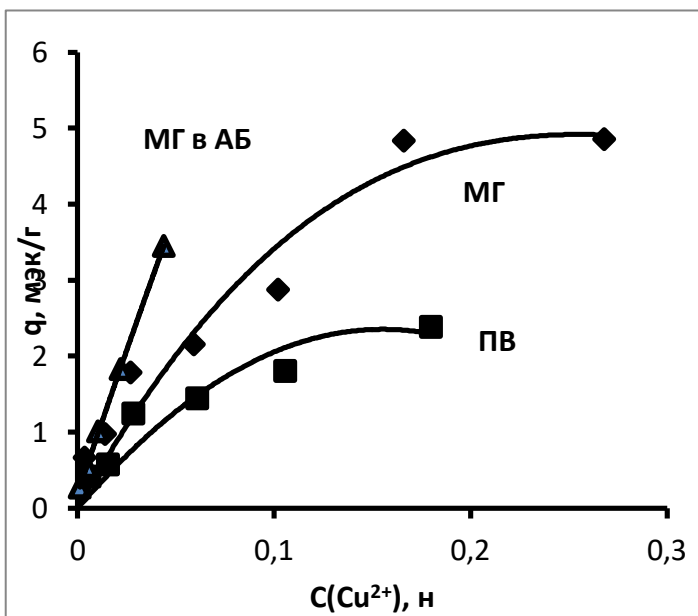


Рис. 3. Изотерма сорбции ионов меди гидрогелями МГ в АБ, МГ и ПВ.

Относительно кондуктометрического измерения следует отметить, что, как видно из рис. 1, для ПКП наблюдается снижение значения удельной электропроводности (κ) до достижения области pH близкой к pK полимеров.

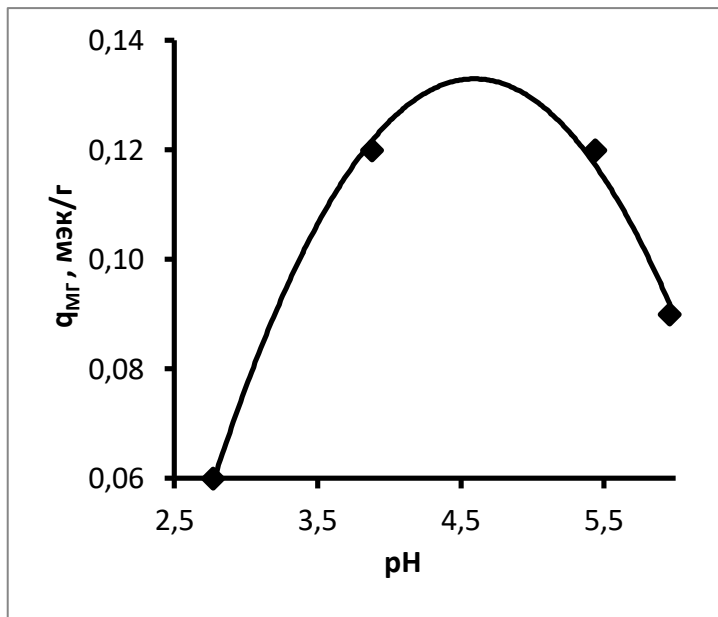


Рис. 4. Зависимость сорбции ионов меди гидрогелем МГ КП от рН в ацетатном буфере. $C_0(Cu^{2+})=0.1$ н.

Таким образом, данные потенциометрического и кондуктометрического титрования пектиновых полисахаридов свидетельствуют о наличии в них потенциальных центров сорбции ионов металлов и возможности их регулирования путем изменения

параметров системы.

Исходя из этого, целью следующей части работы явилось проведение реакции ионного обмена на примере гидрогеля ПВ КП и ионами меди.

На рис. 3 приводится изотерма сорбции ионов меди из раствора гидрогелями МГ, МГ в АБ и ПВ КП, а на рис. 4 продемонстрированы действия рН, из которых следует, что функция q -рН имеет максимум в области близкой к рК (рК=4.02) ПВ, а функция $1/q-1/C_p$ прямолинейная: $1/q=0.011(1/C_p)+0.211$ (МГ), $1/q=0.021(1/C_p)+0.326$ (ПВ) и $1/q=0.003(1/C_p)+0.205$ (МГ в АБ) при коэффициенте корреляции $R^2 = 0.970, 0.998$ и 0.986 соответственно. Из этих же данных были рассчитаны значения q_m и K_θ соответственно равные $q_m(МГ)=4.74$, $q_m(ПВ)=3.07$ и $q_m(МГ в АБ)=4.88$ мэк/г, а значения K_θ для этих же образцов соответственно имели величины $K_\theta(ПВ)=15.52$, $K_\theta(МГ)=19.18$ и $K_\theta(МГ в АБ)=68.33$ г/мэк.

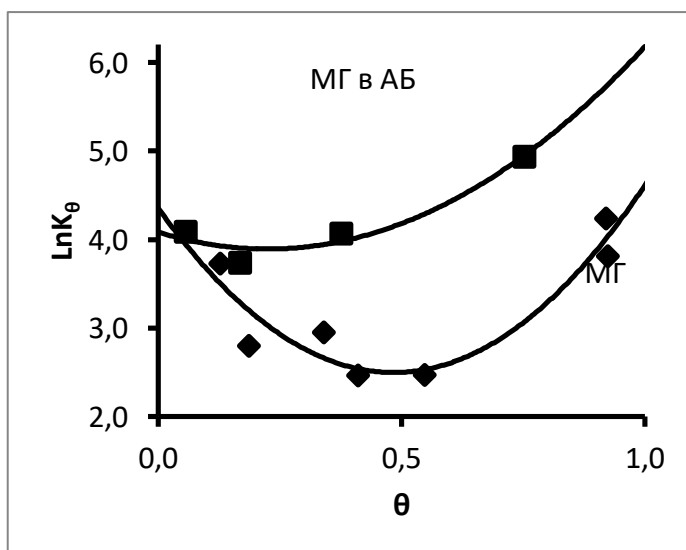


Рис. 5. Зависимость величин $\ln K_\theta$ от θ .

Полученные данные по численным значениям K_θ показывают, что при выбранных условиях сорбция равновесия в системах смещена в сторону образования комплекса и этот процесс усиливается в ряду ПВ, МГ и МГ в АБ. Используя значения K_θ была произведена

оценка величин свободной энергии адсорбционного равновесия с использованием уравнения $dG = -RT \ln K_\theta$ или производя интегрирование величин $\ln K_\theta$ в пределах значения θ от нуля до единицы (рис. 5).

Значения этого параметра для изученных полимеров обоими методами были близки и соответственно равны $dG(\text{МГ}) = -6.68$, $dG(\text{ПВ}) = -7.20$ и $dG(\text{МГ в АБ}) = -10.29$ кДж/мэк. Видно, что отрицательные значения dG возрастают от ПВ к МГ в АБ, указывая усиление процесса в этом направлении.

Таким образом, оценка одного из составляющих свободной энергии свидетельствует о существенной роли процесса гипотетического ионного обмена в изученных системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В.Н., Шелухина Н.П. Пектин: химия, технология, применение. – М., 1996, 92 с.
2. Максудова Ш.Д., Милушева Р.Ю., Холмуминов А.А., Рашидова С.Ш. Наноструктуры пектина и его металлокомплексов. – Химия природных соединений, 2010, № 5, с.546-579.
3. Уликина Е.А., Шубаков А.А., Оводов Ю.С. Влияние пектинов на рост злаковых культур. – Химия растительного сырья, 2005, № 4, с.53-56.
4. Карасаева А.Н., Миронов В.Ф., Цапаева О.В., Вышкакалюк А.Б., Минзановна С.Т., Карлин В.В., Миндубаев А.З. Полиметаллокомплексы пектиновых полисахаридов и их биологическая активность. – Бутлеровские сообщения, 2004, № 1, с.33-35.
5. Минзанова С.Т., Вышкакалюк А.Б., Цапаева О.В. и др. Перспективные противоанемические препараты на основе пектиновых полисахаридов. – Мат-лы. конф. «Актуальные проблемы химии природных соединений». – Ташкент: АН Республики Узбекистан, 2009, с.384.
6. Халиков Д.Х., Мирзоева Р.С., Бободжанова Г.Н., Горшкова Р.М., Халикова С., Авлоев Х.Х. О сорбционной активности пектиновых полисахаридов по отношению к ионам металлов. – Докл. АН РТ, 2017, т. 60, № 7-8, с. 333-341.

Р.С.МИРЗОЕВА, Д.С.МУҲИДИНОВ, Х.Х.АВЛОЕВ, Ч.Х.ХОЛИҚОВ

СОРБТСИЯ И ИОНИ МЕТАЛҲО АЗ ҚОНИБИ ПЕКТИНИ ГИДРОГЕЛИ

Институту химияи ба номи В.И.Никитини АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон

Усулҳои потентсиометрӣ ва кондукторӣ титризатсия барои омӯзиши марказҳои эҳтимолии адсорбсияи полисахаридҳои аз себи фишурдашуда (ПЯ), ситрус (ПЦ), шафтолу (ППр), пектин сабади офтобпараст (ПСР) ва пектат натрий (ПNa) нисбати кати металлҳо ба даст оварда шуданд.

Тибқи сорбсияи ионҳои мед тавассути маҳлулои пектинӣ, гидрогели дар асоси онҳо дар муҳити обӣ ва дар буферӣ ацетат, киматҳои ҳадди ниҳони гидрогелии q_m , мувозинати адсорбсияи доимӣ (K_θ) ва тағирёбии энергияи озод ($dG = -RT \ln K_\theta$) муайян карда шуданд. Маълумоти бадастомада нақши назарраси мубодилаи гипотетикии ионҳоро дар системаҳо ва баланд шудани ҷаълонокии сорбсияи полимерҳои табиӣ омӯхташуда дар минтақаи рН дар наздикии рК гурӯҳҳои дахлдори карбоксил нишон медиҳад.

Калимаҳои калидӣ: марказҳои адсорбсия, пектинҳо, пектат натрий, кислотаи галактуронӣ, потенциометрия, кондуктория, сорбсия, мувозинати адсорбсияи доимӣ, энергияи озод.

R.S.MIRZOEVA, D.S.MUKHIDDINOV, Kh.H.AVLOEV, D.Kh.KHALIKOV

SORPTION OF METAL IONS BY PECTIN HYDROGELS

V.I.Nikitin Institute of chemistry, Academy of Sciences of the RT

Using the methods potentiometric and conductometric titration, the potential centers of adsorption of pectin polysaccharides obtained from extracts of apples, citrus, peach, pectin baskets sunflower and Sodium pectate with respect to metal cations are studied. According to the sorption of ions of Mead pectic substances, hydro gels on their aqueous environment and in the acetate buffer are determined by the value of the maximum capacity qm of hydro gels, the adsorption equilibrium constant (K_{θ}) and the change in free energy ($dG=-RT\ln K_{\theta}$). The data obtained indicates a significant role of the hypothetical ion exchange process in the studied systems and an increase in the sorption activity of the studied natural polymers in the pH region near the pK of the corresponding carboxyl groups.

Key words: adsorption centers, pectins, sodium pectate, galacturonic acid, potentiometry, conductometry, sorption, adsorption, equilibria, free energy.

УДК 549.753.1:536

М.Д.БОБОЁРОВ, Б.Б.БАРОТОВ, Ф.А.ХАМИДОВ, Ш.Р.МУРОДОВ, У.М.МИРСАИДОВ

**ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОТЕКАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ
СЕРНОКИСЛОТНОМ ВЫЩЕЛАЧИВАНИИ РУД МЕСТОРОЖДЕНИЙ
«ЗАПАДНЫЙ ТАДЖИКИСТАН» И «ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ТАДЖИКИСТАН»**

Агентство по ядерной и радиационной безопасности АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 12.03.2020 г.

В статье дан анализ термодинамических характеристик процессов, протекающих при выщелачивании урансодержащих минералов месторождений «Западный Таджикистан» и «Центральный Таджикистан» серной кислотой. Показано, что значения энергии Гиббса в рассматриваемых процессах с участием минералов вышеуказанных месторождений подтверждают протекание всех вероятных реакций.

Ключевые слова: термодинамические характеристики, серная кислота, энергия Гиббса, выщелачивание, минералы, урансодержащие руды.

В работах [1-3] изучены процессы выщелачивания урансодержащих руд с минеральными кислотами, найдены оптимальные условия протекания процессов выщелачивания руд с кислотами и предложены принципиальные технологические схемы переработки урансодержащих руд. В работах [5-7] изучены термодинамические характеристики процессов дегидратации и термического разложения уранилнитрата и уранилсульфата. Найдены термодинамические функции процесса разложения указанных соединений.

Руды месторождений «Западный Таджикистан» и «Центральный Таджикистан» имеют сложный состав. Рентгенофазовым анализом установлено, что в состав этих руд входят следующие минералы, которые приведены в табл. 1.

Адрес для корреспонденции: Бобоёров Мехровар. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Х. Хакимзода, 17а, Агентство по ядерной и радиационной безопасности НАНТ.
E-mail: mehrovar.bobo@yandex.ru

Таблица 1

Минералогический состав месторождений «Западный Таджикистан» и
«Центральный Таджикистан»

№	Месторождение «Западный Таджикистан»	№	Месторождение «Центральный Таджикистан»
1	Уранинит (UO ₂)	5	Коффинит (U,Th)SiO ₄ (OH) ₄
2	Альбит (Na[AlSi ₃ O ₈])	6	Уранофан (CaUO ₂ SiO ₃ (OH) ₂ ·5H ₂ O)
3	Пирит (FeS ₂)	7	Каолинит (Al ₂ Si ₂ O ₇ ·2H ₂ O)
4	Мусковит (KA ₂ [AlSi ₃ O ₁₀](OH) ₂)	8	Доломит (CaCO ₃ ·MgCO ₃)
		9	Сфен (CaTiSiO ₄)

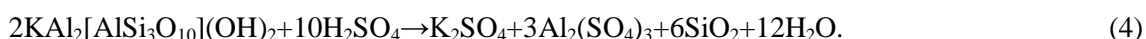
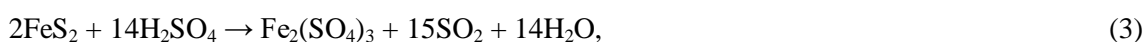
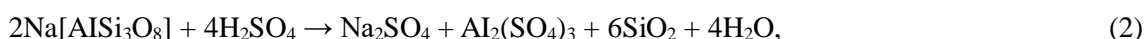
В табл. 2 приведены справочные данные [4] по изменению энтальпии и энтропии веществ и минералов, которые содержатся в урановых рудах месторождений «Западный Таджикистан» и «Центральный Таджикистан».

Таблица 2

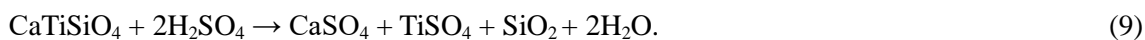
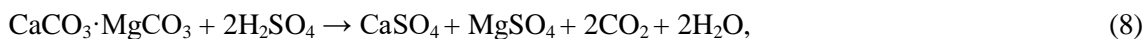
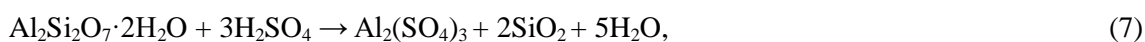
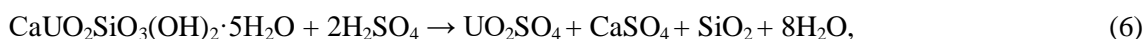
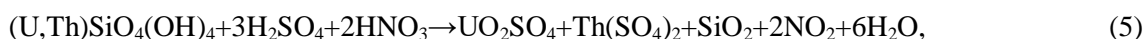
Термодинамические характеристики минералов месторождений
«Западный Таджикистан» и «Центральный Таджикистан»

№	Вещество	ΔH^0_{298} , кДж/моль	ΔS^0_{298} , Дж/моль·К
1.	UO ₂ (тв)	-1081.23	0.08
2.	Na[AlSi ₃ O ₈] (тв)	-3938.8	0.2074
3.	FeS ₂ (тв)	-163.18	0.053
4.	H ₂ SO ₄ (ж)	-814.2	0.157
5.	Al ₂ Si ₂ O ₇ ·2H ₂ O (т)	-4098.65	0.203
6.	HNO ₃ (ж)	-174.14	0.155
7.	CaTiSiO ₄ (т)	-2600.56	-0.173
8.	CaSO ₄ (р-р)	-1454.06	-0.04
9.	TiSO ₄ (р-р)	-1601.4	-0.1733
10.	CaCO ₃ ·MgCO ₃ (т)	-2311.7	0.155
11.	MgSO ₄ (р-р)	-1379.1	-0.116
12.	UO ₂ SO ₄ (р-р)	-1929.7	0.0812
13.	NO ₂ (т)	33.5	0.24
14.	H ₂ O ж	-285.8	0.07
15.	Na ₂ SO ₄ (р-р)	-1395.9	0.136
16.	Al ₂ (SO ₄) ₃ (р-р)	-3792.33	0.55
17.	Fe ₂ (SO ₄) ₃ (р-р)	-2825.7	-0.564
18.	CO ₂ (т)	-398.78	0.214

При взаимодействии серной кислоты с минералами месторождения «Западный Таджикистан» возможны следующие реакции:



В результате взаимодействия серной кислоты с минералами месторождения «Центральный Таджикистан» возможны следующие реакции:



Для каждой реакции были рассчитаны термодинамические характеристики, которые приведены в табл. 3 и 4.

Таблица 3

Расчёт термодинамических характеристик реакции при взаимодействии минералов руды месторождений «Западный Таджикистан» и «Центральный Таджикистан» с серной кислотой

№ схемы реакции	ΔH^0_{298} , кДж/моль	ΔS^0_{298} , Дж/моль·К	ΔG^0_{298} , кДж/моль
(1)	-190.62	0.006	-192.41
(2)	-662.7	-0.924	-387.35
(3)	482.63	1.84	-65.7
(7)	-502.11	0.79	-737.53
(8)	-262.28	-0.057	-245.3
(9)	-309.1	0.1705	-359.91

Таблица 4

Значения энергии Гиббса (ΔG , кДж/моль) при различных температурах в реакциях (1)-(9)

№ схемы реакции	ΔG^0_{298}	ΔG^0_{313}	ΔG^0_{333}	ΔG^0_{353}	ΔG^0_{373}
(1)	-192.41	-188.76	-188.64	-188.53	-188.41
(2)	-387.35	-373.36	-354.9	-336.4	317.91
(3)	-65.7	-93.3	-130.1	-166.9	-203.7
(7)	-737.53	-749.38	-765.18	-780.98	-796.8
(8)	-245.3	-244.44	-243.3	-242.16	-241.02
(9)	-359.91	-362.47	-365.88	-369.28	372.7

Результаты расчёта термодинамических характеристик предполагаемых реакций (1)-(9) (табл. 4) указывают на вероятность протекания процесса в стандартных условиях. В табл. 4 и на рис. 1 приведены результаты влияния температуры на значения энергии Гиббса рассматриваемых процессов. Как видно из табл. 4 и рис. 1, повышение температуры способствует протеканию всех рассматриваемых реакций (1)-(9). Для реакций (4)-(6) не найдены значения энергии Гиббса, так как для минералов мусковит, коффинит и ура-нофан в литературе отсутствуют термодинамические характеристики.

Таким образом, выщелачивание урансодержащих руд месторождений «Западный Таджикистан» и «Центральный Таджикистан» с серной кислотой показывает необходимость проведения процесса при температурах 298-373 К с получением полезных компонентов.

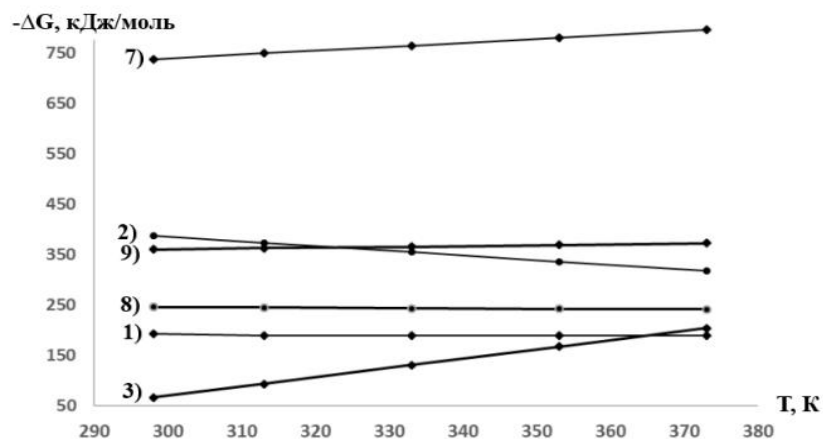


Рис.1. Зависимость изменения ΔG от температуры выщелачивания минералов, содержащихся в месторождениях «Западный Таджикистан» и «Центральный Таджикистан» 1) уранинит, 2) альбит, 3) пирит, 7) каолинит, 8) доломит, 9) сфен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ходжиев С.К., Назаров Х.М., Баротов Б.Б., Бобоёров М.Д., Мирсаидов У.М.. Сернокислотное выщелачивание урана из руд месторождения «Центральный Таджикистан». – Изв. АН РТ, 2017, т.60, № 4, с.71-75.
2. Ходжиев С.К., Назаров Х.М., Хочиён М.М., Ахмедов М.З., Баротов Б.Б., Пулатов М.С., Мирсаидов И.У. Возможности переработки урансодержащих руд месторождения «Центральный Таджикистан». – ДАН РТ, 2017, т.60, № 3-4, с.168-172.
3. Ходжиев С.К., Пулатов М.С., Муминов С.В., Бахронов С.М., Ахмедов М.З., Мирсаидов И.У. Физико-химические основы переработки урановых руд сернокислотным разложением. – ДАН РТ, 2017, т.60, № 5-6, с. 247-250.
4. Краткий справочник физико-химических величин» под редакцией К.П. Мищенко и А.А. Равделя, Л.: Химия, 1974, 200 с.
5. Бадалов А., Камалов Д.Д., Мирсаидов И.У., Эшбеков Н.Р. Изучение процесса дегидратации гексагидроуранилнитрата. – ДАН РТ, 2005, т.48, № 8, с. 22-25.
6. Камолов Д.Д., Мирсаидов И.У., Хомидов Б.О., Бадалов А. Термодинамические характеристики процесса термического разложения уранилнитрата. – ДАН РТ, 2005, т.48, № 9-10, с.12-17.
7. Камолов Д.Д., Мирсаидов И.У., Икрамов М., Бадалов А. Термодинамические характеристики процессов дегидратации и термического разложения тригидратоуранилсульфата. – ДАН РТ, 2007, т.50, № 11-12, с. 857-861.

М.Д.БОБОЁРОВ, Б.Б.БАРОТОВ, Ф.А.ҲАМИДОВ, Ш.Р.МУРОДОВ, У.М.МИРСАИДОВ

**ТАҲЛИЛИ ТЕРМОДИНАМИКИИ ГУЗАРИШИ РАВАНДҲО ҲАНГОМИ
ИШҚОРОНИИ КИСЛОТАГИИ МАЪДАНҲОИ КОНҲОИ
«ТОҶИКИСТОНИ ҒАРБӢ» ВА «ТОҶИКИСТОНИ МАРКАЗӢ»**

Агентии амнияти ядрой ва радиатсионии Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақола таҳлили термодинамикии гузариши равандҳо ҳангоми ишқоронии кислотагии маъданҳои урандори конҳои «Тоҷикистони ғарбӣ» ва «Тоҷикистони марказӣ» оварда шудаанд. Дар равандҳои баррасишаванда бо иштироки минералҳои маъданҳои дар боло зикргардида бузургии энергияи Гиббс нишон медиҳад, ки эҳтимолияти гузариши реаксияҳо имконпазир аст.

Калимаҳои калидӣ: тавсифи термодинамикӣ, кислотаи сулфат, энергияи Гиббс, ишқоронии минералҳо, конҳои урандор.

M.D.BOBOYOROV, B.B.BAROTOV, F.A.KHAMIDOV, SH.R.MURODOV,
U.M.MIRSAIDOV

THERMODYNAMIC ANALYSIS OF FLOWING PROCESSES DURING SULFURIC ACID LEACHING OF THE ORES FROM “WESTERN TAJIKISTAN” AND “CENTRAL TAJIKISTAN” DEPOSITS

Nuclear and Radiation Safety Agency Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

The article provides an analysis of the thermodynamic characteristics of the processes occurring during the leaching of uranium-containing minerals in the Western Tajikistan and Central Tajikistan deposits with sulfuric acid. It is shown that the Gibbs energy values in the considered processes involving minerals of the above deposits confirm the occurrence of all possible reactions.

Key words: thermodynamic characteristics, sulfuric acid, Gibbs energy, leaching, minerals, uranium-containing ores.

541.4:(4546.74.2+548.736)

Ё.К.КУДРАТУЛЛОЕВ, К.С.МАБАТКАДАМЗОДА

**КОМПЛЕКСООБРАЗОВАНИЕ СЕРЕБРА (I) С ТИОПИРИНОМ
В ВОДНО-СПИРТОВЫХ РАСТВОРАХ**

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 14.02.2020 г.

Методом потенциометрии изучен процесс комплексообразования серебра(I) с тиопирином (ТП) в водно-спиртовых растворах, содержащих 25, 50 и 75 об. % метанола и этанола при 298.15 К и ионной силе 0.1 моль/л, создаваемой NaClO₄. Установлено, что Ag(I) с тиопирином в растворах, содержащих разное количество неводного раствора образует комплексная частица состава [Ag(ТП)₃]⁺. Исследован процесс комплексообразования и устойчивость комплекса Ag(I) в зависимости от содержания неводного растворителя. Рассчитаны общая константа образования и значений энергии Гиббса образования комплекса [Ag(ТП)₃]⁺. Показано, что с увеличением содержания спирта в растворе устойчивости общая константа образования уменьшается. Полученные данные по расчёту величины энергии Гиббса показали, что образование трёхзамещенного комплекса серебра (I) с ТП сопровождается отрицательным значением величины ΔG. При возрастании объёмных процентов спирта значения энергии образования Гиббса комплекса [Ag(ТП)₃]⁺ увеличиваются. Показано, что общая константа образования комплекса [Ag(ТП)₃]⁺ в воде больше, чем в водно-спиртовых растворах при 298.15 К.

Ключевые слова: серебро (I), тиопирин, органический растворитель, ионная сила, метанол, этанол, потенциометрическое титрование, комплексообразование, общая константа образования, энергия Гиббса.

Исследование процесса комплексообразования металлов в смешанном растворе и определение влияния различных концентраций органического растворителя на устойчивость комплексов в координационной химии имеет особое значение. Изучение влияния растворителя на координационные равновесия имеет особую актуальность для физической и координационной химии.

Адрес для корреспонденции: Кудратуллоев Ёкуб Кудратуллоевич, Мабаткадамзода Кимё Сабзкадам. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: kudratulloev92@mail.ru; kimyo84@mail.ru

В литературе имеется достаточно сведений о процессе комплексообразования серебра (I) с разными органическими лигандами, в том числе с серо- и азотсодержащими. П.К.Мигаль и К.И.Плоае потенциометрическим методом изучали образование комплексов серебра с этаноламинами в водно-спиртовых растворах, содержащих от 20 до 100% этанола. Обнаружено, что серебро с моно-, ди- и триэтаноломином во всех растворах образует три комплекса, а с триэтаноломином образует три комплекса до 40% спирта, свыше 40% образует только два комплекса [1, с. 2521]. В работе [2, с. 1774] потенциометрически исследована реакция комплексообразования серебра с метаноламином в воде, метаноле и этаноле. Установлено, что серебро с этим лигандом в средах метанола и этанола образует три комплекса. Показано, что общие константы устойчивости моноэтанольных комплексов серебра в метаноле и этаноле больше, чем в водной среде, а общие константы комплексов серебра с моноэтаноламинами в этаноле, больше чем метанольной среде. Г.В.Буду и др. [3, с. 2904] изучали процесс комплексообразования серебра и кадмия с гексамитилентетрамином в водных и водно-органических растворах. Показано, что при увеличении концентрации органического растворителя устойчивость комплексов возрастает. Авторы работы [4, с. 1008] исследовали комплексообразования серебра с некоторыми гетероциклическими аминами в водно-этанольных растворах. Показано, что устойчивость комплексов серебра с имидазолом и 3-аминопиридином растёт с увеличением концентрации этанола в растворе, а устойчивость комплексов серебра с никотинамидом, 5-бром-2-аминопиридином и хинолином проходит через минимум. При этом наибольший минимум - в случае комплексов с хинолином. Авторами [5, с. 101] изучен процесс комплексообразования серебра (I) с 1,2,4-триазолом в водно-спиртовых растворах. Установлено, что с возрастанием концентрации органического растворителя в растворе величина $\lg\beta_i$ вначале уменьшается, а затем постепенно увеличивается, то есть проходит через минимум. В работе [6, с.181] изучено комплексообразование серебра (I) с тиокарбогидразидом в водно-спиртовых растворах. Показано, что состав смешанного раствора не влияет на количество комплексных частиц, образующихся в системе Ag(I)-TK3-P , где P-смешанный раствор.

Вместе с тем, в литературе отсутствуют сведения о комплексообразовании Ag(I) с тиопирином в водно-спиртовых растворах. В настоящей работе представлены исследования комплексообразования серебра (I) с тиопирином (ТП) в водно-спиртовых растворах, содержащих 25, 50 и 75 об. % спирта при 298.15 К.

Экспериментальная часть. Процесс комплексообразования изучали в водно-метанольных и водно-этанольных растворах переменного состава при 298.15 К. Ионную силу 0.1 моль/л, создавали с использованием NaClO_4 . В качестве исходных соединений использовали тиопирин ($\text{C}_{11}\text{H}_{12}\text{N}_2\text{S}$) и нитрат серебра (AgNO_3) марки «ч.д.а.». Начальная концентрация AgNO_3 была равна $1 \cdot 10^{-5}$ моль/л. Титрантом являлся спиртовый раствор тиопирина. Начальная концентрация тиопирина составляла $1 \cdot 10^{-3}$ моль/л. При потенциометрическом титровании использовали мостик с переносом. В качестве индикаторного электрода служила пластинка из серебра, электродом сравнения служил хлорсеребряный

электрод. Потенциал системы измеряли с помощью прибора рН-метр марки 150 МП с погрешностью ± 0.1 мВ. Равновесное значение потенциала индикаторного электрода устанавливалось в течение 5-7 минут. Температуру в ячейке поддерживали постоянной при помощи водяного термостата ($\pm 0.5^\circ\text{C}$). Равновесную концентрацию ионов серебра (I) рассчитывали по уравнению (1):

$$\lg[\text{Ag}^+] = \lg C_{\text{Ag}^+} - \frac{\Delta E}{0.0596}, \quad (1)$$

где: $[\text{Ag}^+]$ - равновесная концентрация ионов серебра в каждой точке титрования; $\Delta E = E_2 - E_1$, E_1 - начальный потенциал системы; E_2 - потенциал системы в каждой точке титрования; C_{Ag^+} - концентрация ионов серебра в каждой точке титрования с учётом разбавления. Равновесную концентрацию тиопирина определяли по уравнению(2):

$$[\text{ТП}] = C_{\text{ТП}} - n(C_{\text{Ag}^+} - [\text{Ag}^+]), \quad (2)$$

где: $[\text{ТП}]$ - равновесная концентрация тиопирина в каждой точке титрования; $C_{\text{ТП}}$ - концентрация тиопирина в каждой точке титрования с учётом разбавления; n - число молекул органического лиганда, присоединённых к иону серебра(I).

Результаты и их обсуждение. Ранее нами [7,8] было показано, что серебро (I) с тиопирином в водных и водно-органических растворах реагирует с образованием устойчивого комплекса состава $[\text{AgL}_3]^+$. Установлено, что с повышением температуры в системе Ag^+ —тиопирин— H_2O величина общей константы устойчивости комплекса серебра уменьшается. Изменение потенциала в системе Ag^+/Ag в отсутствие тиопирина, содержащего разные объёмные проценты метанола и этанола, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Изменение потенциала в системе Ag^+/Ag в растворах, содержащих 25, 50 и 75 объёмн. % метанола и этанола.

Растворитель метанол (этанол)	Объёмные проценты растворителя		
	25.0	50.0	75.0
E, мВ	307.0(307.4)	240.2(258.4)	226.8(236.9)

Из табл. 1 видно, что с увеличением процентного содержания метанола и этанола потенциал системы Ag^+/Ag в растворе уменьшается. Нужно отметить, что независимо от природы органического растворителя потенциал системы уменьшается.

В табл. 2. в качестве примера приведены экспериментальные данные по изменению потенциала системы Ag^+/Ag —тиопирин в растворе, содержащем 25 об. % метанола и этанола при 298.15 К.

Таблица 2

Изменение потенциала системы Ag^+/Ag —тиопирин в метанольном и этанольном растворе (25 об. %) при 298.15 К

Метанол, объёмн. %		Этанол, объёмн. %	
25.0		25.0	
$[\text{ТП}] \cdot 10^4$ моль/л	ΔE , мВ	$[\text{ТП}] \cdot 10^4$ моль/л	ΔE , мВ
0.00124	130.00	0.02521	104.40
0.07815	163.90	0.09667	162.50
0.54510	203.70	0.17201	180.40
0.26722	215.00	0.28314	198.00
0.37738	228.70	0.39543	219.20
0.52045	249.90	0.49817	243.90
0.65934	263.50	0.60220	255.30
0.82734	273.30	0.73741	268.20
0.98940	277.70	0.86880	269.70
1.17647	291.30	0.99650	276.40
1.35593	298.70	1.12069	282.00
1.55629	312.80	1.27119	292.00
1.74757	319.00	1.41667	298.00
2.15385	319.50	1.55738	303.70
2.36527	323.40	1.69355	306.20
2.58721	332.10	1.85127	311.60
2.79661	333.30	2.00311	315.00

На рис. 1 приведена зависимость ΔE от $-\lg C_{\text{ТП}}$ для тиопиринового комплекса, содержащих 25, 50 и 75 % метанола при температуре 298.15 К. На кривой потенциометрического титрования раствора, содержащего 25 объёмн. % метанола при соотношении $\text{Ag}:\text{тиопирин}=1:2.8$ наблюдается скачок потенциала. При увеличении об. % метанола в растворе скачок потенциала становится размытым. Такое резкое изменение потенциала мы наблюдали также при изучении комплексообразования серебра (I) с тиопирином в водной [7, с. 385] и водно-диметилформамидной [8, с. 233] среде при 298.15 К.

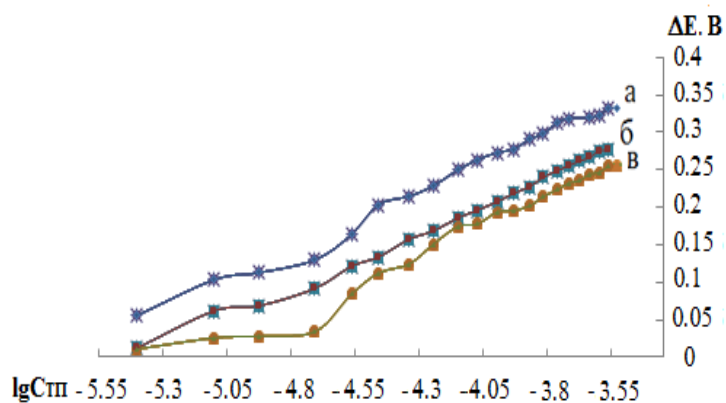


Рис. 1. Зависимость $\Delta E=f(-\lg C_{\text{ТП}})$ для тиопириновых комплексов серебра (I) в водно-метанольных растворах, содержащих а-25; б-50 и в-75 объёмный процент метанола при 298.15 К и ионная сила 0.1 моль/л.

Для определения количества комплексных частиц, образующихся при взаимодействии Ag(I) с тиопирином в водно-метанольных и водно-этанольных растворах мы использовали метод Яцимирского. Экспериментальные данные показали, что серебро (I) с тиопирином в водной, водно-диметилформамидной, водно-диметилсульфоксидной, водно-метанольных и водно-этанольных средах образует комплексную частицу состава $[Ag(TП)_3]^+$.

Для определения общей константы образования комплекса серебра (I) с тиопирином в растворах, содержащих 25, 50 и 75 объёмн. % метанола и этанола нами была использована программа PH-METR[9].

Таблица 3

Значение общей константы устойчивости образования $[Ag(TП)_3]^+$ при разных содержаниях метанола и этанола в растворе при 298.15 К.

$lg\beta$ $[Ag(TП)_3]^+$	Метанол(этанол), объёмн. %			
	0.00	25.0	50.0	75.0
	25.12±0.01[7]	21.855±0.45 (21.100±0.25)	20.733±0.37 (20.389±0.16)	20.139±0.31 (19.561±0.11)

Как видно из табл. 3, при переходе из воды [7] к водно-спиртовым растворам (25 объёмн. %) метанол(этанол) вначале наблюдается резкое уменьшение константы устойчивости, а затем при увеличении концентрации органического растворителя наблюдается плавное уменьшение значения $lg\beta[Ag(TП)_3]^+$. Полученные значения общих констант образования отличаются от данных, полученных в работах [2,5,6]. С использованием найденной константы устойчивости была рассчитана энергия Гиббса реакции образования комплекса $[Ag(TП)_3]^+$.

Таблица 4

Значение свободной энергии Гиббса(ΔG) образования комплекса $[Ag(TП)_3]^+$ при разных концентрациях метанола и этанола при 298.15 К

ΔG , кДж/моль		
$Ag^+ + 3TП = [Ag(TП)_3]^+$		
Метанол(этанол), объёмн. %		
25.00	50.00	75.00
-124.70 (-120.83)	-118.30 (-116.76)	-114.91 (-112.02)

Из табл. 4 следует, что образование трёхзамещенного комплекса серебра (I) сопровождается отрицательным значением величины ΔG . При возрастании объёмного процента как метанола, так и этанола в растворе значение свободной энергии Гиббса образования комплекса $[Ag(TП)_3]^+$ увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мигаль П.К., Плоае К.И. Комплексные соединения серебра с этаноламинами в водно-спиртовых растворах. – Журнал неорганической химии, т. X, 1965, вып.11. с. 2521.

2. Удовенко В.В., Померанц Г.Б. Комплексные соединения серебра с моноэтаноламином в водной и спиртовых средах. – Журнал неорганической химии, т. XVIII, 1973, вып. 7, с. 1774.
3. Буду Г.В., Назарова Л.В., Тхоряк А.П. Комплексообразование серебра и кадмия с гексаметилентетраминном в водных и водно-органических растворах. – Журнал неорганической химии, т. XX, 1975, вып. 11, с. 2904.
4. Буду Г.В., Тхоряк А.П. Комплексообразование серебра с некоторыми гетероциклическими аминами в водно-этанольных растворах. – Журнал неорганической химии, т. 25, 1980, вып. 4, с. 1008
5. Мудинов Х.Г., Сафармамадов С.М. Комплексообразование серебра (I) с 1,2,4-тиразолом в водно-спиртовых растворах. – Вестник ТНУ. Серия естественных наук, 2015, вып. 1/6(191), с.101.
6. Сангов М.М., Сафармамадов С.М. Комплексообразование серебра (I) с тиокарбондигидридом в водно-спиртовых растворах. – Вестник ТНУ. Серия естественных наук, 2016, вып. 1/3(200), с. 181.
7. Мабаткадамзода К.С., Кудратуллоев Ё.К., Содатдинова А.С. Комплексообразование серебра (I) с тиопирином при температурах 278-338К. – ДАН РТ, 2018. №4. Т. 61. С. 382-387.
8. Кудратуллоев Ё.К., Мабаткадамзода К.С. Комплексообразование серебра (I) с тиопирином в водно-органических растворителях. Вестник ТНУ. Серия естественных наук, 2018, № 4, с. 231-237.
9. Васильев В.П. Применение ЭВМ в химико-аналитических расчетах. /В.П., Васильев, В.А., Бородин, Е.В. Козловский. – М.: Высш. школа, 1993, 112 с.

Ё.Қ.ҚУДРАТУЛЛОЕВ, К.С.МАБАТҚАДАМЗОДА

КОМПЛЕКСХОСИЛКУНИИ НУҚРАИ (I) БО ТИОПИРИН ДАР МАҲЛУЛҲОИ ОБИЮ СПИРТӢ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Бо усули потенциометрӣ раванди комплексоилкунии нуқраи (I) бо тиопирин (ТП) дар маҳлулҳои обию спиртӣ, ки 25, 50 ва 75 %-и ҳаҷми метанол ва этанол дорад, дар ҳарорати 298.15 К ва қувваи ионии 0.1 мол/л (NaClO_4) омӯхта шуд. Муайян карда шуд, ки Ag(I) бо тиопирин дар миқдорҳои гуногуни ҳаҷмии спирт шакли комплекси таркибаш $[\text{Ag(ТП)}_3]^+$ -ро ҳосил мекунад. Таъсири фоизҳои ҳаҷмии спирт ба раванди комплексоилкунии ва ба устувории собитҳои умумии ҳосилшавӣ таҳқиқ карда шуд. Собитҳои умумии ҳосилшавӣ ва қиматҳои энергияи Гиббси ҳосилшавии комплекси $[\text{Ag(ТП)}_3]^+$ ҳисоб карда шуд. Нишон дода шуд, ки бо зиёдшавии миқдори спирт дар маҳлул собитҳои умумии ҳосилшавӣ кам мешавад. Натиҷаҳои бадастоварда оид ба ҳисоб кардани бузургии энергияи Гиббс нишон дод, ки ҳосилшавии комплекси сеивазшудаи нуқраи (I) бо ТП бо қимати манфии бузургии ΔG мегузарад. Ҳангоми зиёдшавии фоизҳои ҳаҷмии спирт қиматҳои энергияи Гиббси ҳосилшавии комплекси $[\text{Ag(ТП)}_3]^+$ меафзоянд. Нишон дода шуд, ки қимати собитҳои умумии ҳосилшавии комплекси $[\text{Ag(ТП)}_3]^+$ дар об нисбат ба маҳлулҳои обию спиртӣ дар ҳарорати 298.15 К ва қувваи ионии 0.1 мол/л зиёдтар аст.

Калимаҳои калидӣ: нуқраи (I), тиопирин, ҳалкунандаи органикӣ, қувваи ионӣ, метанол, этанол, титронидани потенциометрӣ, комплексоилкунии, собитҳои умумии ҳосилшавӣ, энергияи Гиббс.

Y.K.KUDRATULLOEV, K.S.MABATKADAMZODA

COMPLEX FORMATION OF SILVER (I) WITH THIOPIRINE IN WATER-ALCOHOL SOLUTIONS

Tajik National University

Using the method of potentiometry, we studied the complexation of silver (I) with thiopyrine (TP) in aqueous-alcoholic solutions containing 25, 50 and 75 vol. % methanol and ethanol at 298.15 K and an ionic strength of 0.1 mol/l reated by NaClO₄. It was found that Ag (I) with thiopyrin in solutions containing different amounts of non-aqueous solution forms a complex particle of the composition [Ag(TP)₃]⁺. The complex formation and stability of the Ag (I) complex depending on the content of non-aqueous solvent were studied. The total formation contant and the Gibbs energy of the formation of the [Ag(TP)₃]⁺ complex were calculated. It was shown that with an increase in the alcohol content in the solution, the stability of the formation constant decreases. The obtained data on the calculation of the Gibbs energy value showed that the formation of a three-mixed complex of silver (I) with TP is accompanied by a negative value of ΔG. With an increase in the volume percent of alcohol of the values, the Gibbs formation energy of the complex [Ag(TP)₃]⁺ increases. It has been shown that the total constant for the formation of complex [Ag(TP)₃]⁺ in water is greater than in water-alcohol solutions at 298.5 K

Key words: silver (I), thiopyrine, organic solvent, ionic strength, methanol, ethanol, potentiometric titration, complexation, general formation constant, Gibbs energy.

УДК 528.77:528.928

Ш.А.ФАЙЗУЛЛОЕВ

**ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ КЛАССИФИКАЦИИ ДАННЫХ
ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ В ГИС-ТЕХНОЛОГИИ
НА ПРИМЕРЕ РАЙОНА КАСКАДА ГЭС НА РЕКЕ ВАХШ**

Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии

АН Республики Таджикистан

Поступила в редакцию 20.02.2020 г.

В статье рассматривается классификация данных дистанционного зондирования с целью построения карты земельного покрова района исследований методом контролируемой классификации и проводится оценка точности выходного материала с использованием ГИС-технологий.

Ключевые слова: дистанционное зондирование, земельный покров, землепользование, ГИС-технология, оценка точности классификаций, матрица ошибок и коэффициент Каппа.

Район исследований занимает часть площади Таджикской депрессии и Южного Тянь-Шаня (рис. 1) и является одной из благоприятных и перспективных территорий нашей республики для возведения гидроэлектростанций.

Цель данной статьи заключается в оценке точности построения карты земельного покрова района исследования, которая была создана после обработки данных дистанционного зондирования и с использованием алгоритма максимального подобия в ГИС-технологии. Материалы были получены с сайта геологической службы США (USGS). Результаты обработки были уточнены в программном обеспечении Google Earth Pro. Первичными материалами, использованными в данном исследовании, являлись снимки Landsat-8 с пространственным разрешением 30 м, сделанные 18.07.2019.

Адрес для корреспонденции: Файзуллоев Шохнаваз Абдукодирович, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии АНРТ. E-mail: shohnavaz.faizullov@mail.ru

Дистанционное зондирование представляет собой измерение и регистрацию электромагнитного излучения, исходящего из окружающей среды Земли, с помощью датчиков, установленных на платформе в точке наблюдения над поверхностью земли [4,3].

В случаях интерпретации или обработки изображений выражения «земельный покров» и «землепользование» используются очень часто. Они имеют близкую между собой характеристику. Земельный покров описывает физическое состояние Земли или типы объектов, таких, как песок, вода и асфальт. Землепользование охватывает всю деятельность человека на определённой территории или с какой-либо экономической целью используется участок, например, природного заповедника, промышленного района или города [8].

Классификация изображений в дистанционном зондировании включает в себя кластеризацию пикселей снимков в группу классов так, чтобы они имели близкие друг к другу свойства. Выявление спектральных характеристик изображения земельного покрова является основой для классификации изображения. При создании сигнатур большое значение имеет их отличие от других пространственных спектральных откликов составных частей земельного покрова или землепользования. Существует много методов классификаций изображения, но обобщённо они подразделяются на контролируемый и неконтролируемый подходы [2, 6].

В общем описании в контролируемой классификации изображений оператор выявляет все кластеры в процессе обучающей выборки, а в неконтролируемой классификации алгоритм кластеризации автоматически находит и определяет ряд кластеров в пространстве признаков.

Последние исследования показали [2], что контролируемый метод является наиболее точным и подходящим для дистанционной классификации объектов, и, исходя из этого, для района исследований использована контролируемая классификация изображений.

Оценка точности классификации изображений является важнейшим процессом, без которого полученные результаты имеют малую ценность. Данная процедура проводится для оценки выходного материала, полученного в результате обработки данных дистанционного зондирования. Результаты оценки важны для получения гарантии качества классификации и доверия пользователей к продукту [7, 1]. Для проведения оценки требуются фактические данные или эталонные пиксели в виде точек [3]. Чем больше точек, тем выше качество оценки точности классификации. Однако фактические данные – это не единственное, что требуется для оценки, следовательно, создаётся матрица погрешностей, где изложены численные выражения правильно и неправильно классифицированных пикселей (табл. 1).

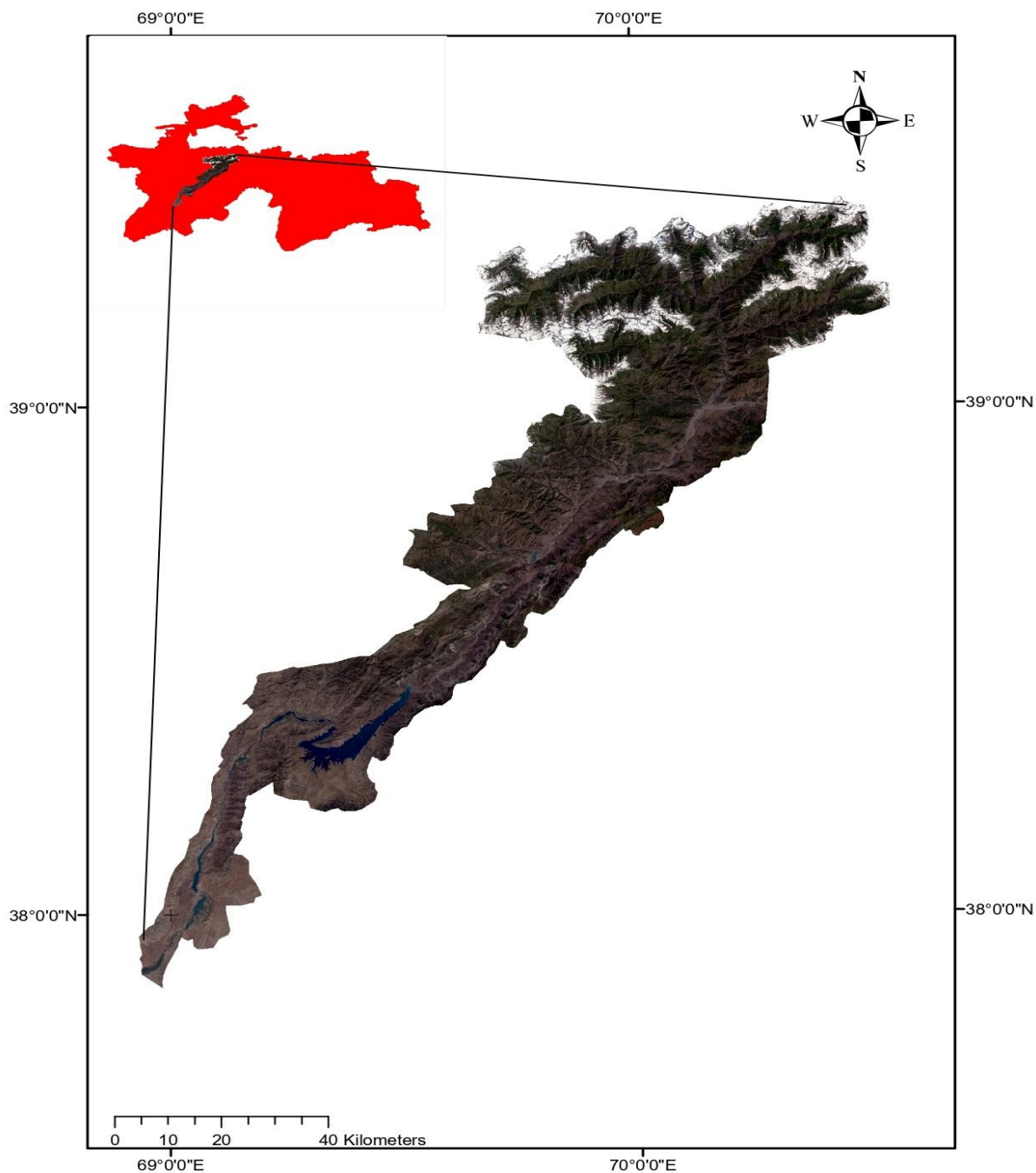


Рис. 1. Локация района исследования

Ячейки, расположенные по диагонали матрицы ошибок, представляют собой количество правильно классифицированных пикселей (D_{ii}). Общая точность классификации (Т) может быть получена из нижеизложенной таблицы путём подсчёта отношения количества правильно классифицированных пикселей ($\sum D_{ii}$) к общему количеству пикселей

($N = \sum R_i = \sum C_j$) района исследования. Эта мера выражается в процентах и подсчитывается следующим уравнением:

$$T = \frac{\sum D_{ii}}{N}, \quad (1)$$

где: $\sum D_{ii}$ – общее количество правильно классифицированных пикселей, N – общее количество пикселей в матрице ошибок.

Таблица 1

Форма матрицы погрешностей или искажений [5]

Классификация	Классы на местности					Итог в строках
	1	2	3	----	М	
1	D_{11}	N_{12}	N_{13}	----	N_{1M}	R_1
2	N_{21}	D_{22}	N_{23}	----	N_{2M}	R_2
3	N_{31}	N_{32}	D_{33}	----	N_{3M}	R_3
----	----	----	----	----	----	----
М	N_{M1}	N_{M2}	N_{M3}	----	D_{MM}	R_M
Итог в столбцах	C_1	C_2	C_3	----	C_M	N

Точность производителя – это точность на основе ссылок, которая вычисляется путём просмотра прогнозов, полученных для класса и установления процента правильных прогнозов:

$$PA = \frac{D_{ij}}{R_i}, \quad (2)$$

где: PA – точность производителя, D_{ij} – количество правильно классифицированных пикселей в строке I (в диагональной ячейке), R_i – общее количество пикселей в строке i .

Точность пользователя – это точность на основе карты, которая вычисляется путём просмотра справочных данных для класса и установления процента правильных прогнозов для этих выборов. Её можно рассчитать по следующей формуле:

$$UA = \frac{D_{ij}}{C_j}, \quad (3)$$

где: UA – точность пользователя, D_{ij} – количество правильно классифицированных пикселей в столбце j (в диагональной ячейке), C_j – общее количество пикселей в столбце j [5].

Более полной мерой точности классификации является коэффициент Каппа. Этот коэффициент сравнивает количество пикселей в каждой ячейке матрицы ошибок с возможностью распределения пикселей в виде случайной величины. Коэффициент Каппа использовался для измерения точности классификации, поскольку он учитывает все элементы в матрице погрешностей или искажений, а не диагональные элементы [5].

Коэффициент Каппа рассчитывался по формуле (4)

$$\hat{K} = \frac{N \sum_{j=1}^m D_{ij} - \sum_{i=1}^m R_i \cdot C_i}{N^2 - \sum_{j=1}^m R_i \cdot C_j}, \quad (4)$$

где: \hat{K} – Каппа-коэффициент, N – общее число пикселей, m – число классов, $\sum D_{ij}$ – общее число диагональных элементов матрицы ошибок (сумма правильно классифицированных пикселей во всех изображениях), R_i – общее число пикселей в строке i , C_j – общее число пикселей в строке j .

Таблица 2

Критерии оценки статистики Каппа [по 1 и 5]

Статистический №	Статистики Каппа	Сила соглашения
1	<0.00	Согласования нет
2	0.00-0.20	Согласование очень слабое
3	0.21-0.40	Согласование средней силы
4	0.41-0.60	Согласованность сильная
5	0.61-0.80	Согласованность очень сильная
6	0.81-1.00	Совершенная

Объекты выходного материала после интерпретации данных дистанционного зондирования были классифицированы на семь секций (рис. 3).

Таблица 3

Матрица погрешностей или искажений карты земельного покрова

Классификация	Кл.1	Кл.2	Кл.3	Кл.4	Кл.5	Кл.6	Кл.7	Общая сумма	Пользовательская точность
Населённые пункты	207	155	9	16	0	18	34	439	47%
Агрокультура	12	186	5	45	0	0	109	357	52%
Лес и высокая растительность	109	12	307	44	1	0	30	503	61%
Низкая растительность	2	11	55	266	0	0	6	340	78%
Ледники и временные снеговые покровы	10	0	1	5	397	2	24	439	90%
Водоём	45	0	1	2	2	379	4	433	87.5%
Бесплодная земля	15	36	22	22	0	0	191	286	67%
Общая сумма	400	400	400	400	400	399	398	2797	
Точность производителя	52%	46.5%	77%	66.5%	99%	95%	48%		
Общая оценка точности : 69%						Каппа=0,68			

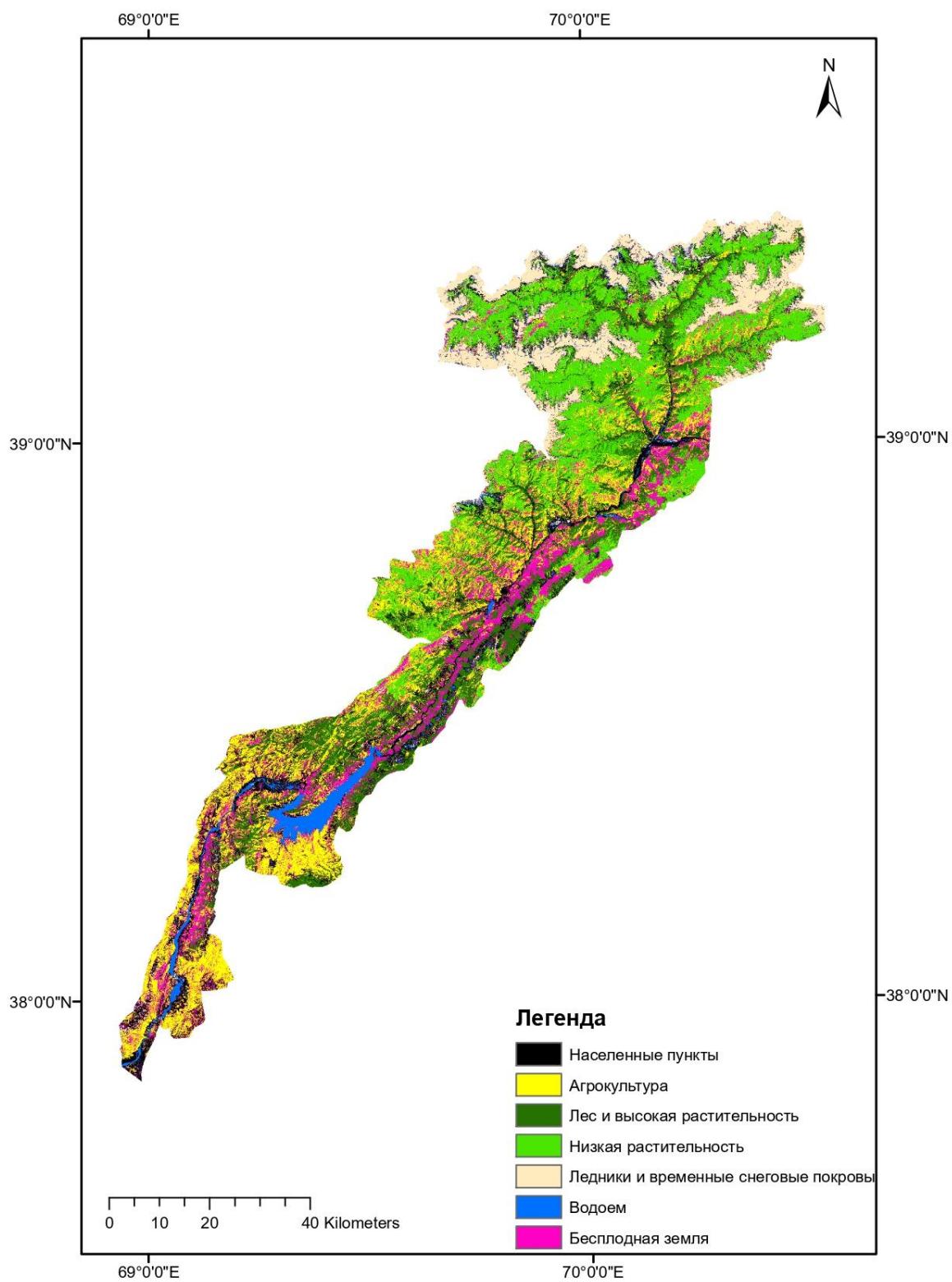


Рис. 3. Карта земельного покрова

Полученные данные в виде пикселей были сравнены с теми же участками с достоверными данными. В матрице погрешностей изложены все фактические и прогнозируемые (предикторы) данные, которые служат для оценки точности классификации (табл. 3). В общем были использованы 2797 случайных точек для оценки точности классификации. Результат оценки точности обычно предоставляет пользователям общую точность карты и точность для каждого класса на карте.

Согласно 1, 2 и 3 уравнениям были подсчитаны точность производителя, пользовательская точность и общая оценка точности классификации снимков. Кроме того, подсчитан коэффициент статистики Каппа (табл. 3). Коэффициент Каппа, равный 1, означает совершенное соглашение, а значение, близкое к нулю, означает, что сила соглашения уменьшается до отсутствия. В соответствии с работами [1, 5] в таблице 2 приводится категоризация статистики Каппа.

Выводы. Дистанционное зондирование является весьма удобным способом получения данных о земельном покрове района исследования. Этот способ помогает сократить время, которое было бы затрачено на проведение полевых работ непосредственно на местности, особенно в районах с сильно расчленённым рельефом, а также сократить экономические расходы. Однако при классификациях изображения требуется использование фактических данных в виде эталонных точек, которые служат основой для классификации изображения.

Оценка точности классификации является неотъемлемой частью исследований при создании карты земельного покрова, без этого полученные результаты имеют малую ценность. Результат оценки важен для получения гарантии качества классификации и доверия пользователей к продукту. Для проведения оценки требуются эталонные пиксели или фактические данные в виде точек, на основе которых создаётся матрица погрешностей или искажений. Чем больше точек, тем выше качество оценки точности классификации.

Вычисленная нами точность классификации карты земельного покрова района исследования составляет 69%. Согласно критериям оценки статистики Каппа (табл. 2), выходной материал имеет очень сильную согласованность. Исходя из этого, можно сделать вывод, что полученные результаты можно оценить как положительные, и составленную карту можно использовать для дальнейших научных исследований при прогнозировании оползневых процессов и проведении мониторинга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sophia S. Rwanga, J.M. Ndambuki. Accuracy Assessment of Land Use/Land Cover Classification Using Remote Sensing and GIS. International Journal of Geosciences, 2017, 8, pp. 611-622.
2. Mohd Hasmadi I, Pakhriazad HZ, Shahrin MF. Evaluating supervised and unsupervised techniques for land cover mapping using remote sensing data. GEOGRAFIA OnlineTM Malaysian Journal of Society and Space 5 issue 1 (1 - 10) © 2009, ISSN 2180-2491.

3. Токарева О.С. Обработка и интерпретация данных дистанционного зондирования Земли. Учебное пособие. – Издательство Томского национального университета, 2010, 147 с.
4. Van Westen C.J.. Geographic Information Systems for Slope Instability Hazard Zonation. Part 2: GIS exercises. Technical Report · January 1993. University of Twente, Faculty of Geo-Information Science and Earth Observation.
5. Anna Bogoliubova, Przemysław Tymków. Accuracy assessment of automatic image processing for land cover classification of ST. Petersburg protected. National Mineral Resources University and Wrocław University of Environmental and Life Science. Geodesia et Descriptio Terrarum 13 (1-2) 2014, pp. 5-22.
6. Eastman, J.R. (2003) Guide to GIS and Image Processing 14, 239-247. Clark University Manual, USA;
7. Foody, G.M., - Status of Land Cover Classification Accuracy Assessment. Remote Sensing of Environment 80, 2001, pp.185-201
8. Lucas L.F. Janssen, Gerrit C. Huurneman, Wim H. Bakker, Ben H.G. Gorte, John A. Horn, Lucas L.F. Janssen, Christine Pohl, Anupma Prakash, Colin V. Reeves, Michael J.C. Weir, Tsehaie Woldai. Principles of remote sensing. An introductory textbook series 2. 2001 ITC;

Ш.А.ФАЙЗУЛЛОЕВ

**АРЗЁБИИ ДАКИҚИИ ТАСНИФОТИ МАЪЛУМОТҲОИ ТАДҚИҚОТИ
МАСОФАВӢ БО ИСТИФОДА АЗ ГИС-ТЕХНОЛОГИЯ ДАР МИСОЛИ
МИНТАҚАИ СИЛСИЛАНЕРУГОҲИ ДАРӢИ ВАХШ**

*Институти геология сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Мақолаи мазкур ба таснифоти аксҳои кайҳонӣ бо мақсади сохтани харитаи руйпуши замин бо истифода аз усули таснифоти идорашаванда бахшида шудааст. Илова бар ин, арзёбии дақиқии харита бо истифода аз ГИС-технология гузаронида шудааст.

Калимаҳои калидӣ: тадқиқоти масофавӣ, руйпуши замин, истифодаи замин, ГИС-технология, арзёбии дақиқии таснифот, матритсаи хатогиҳо ва коэффитсиенти Каппа.

SH.A.FAIZULLOEV

**ACCURACY ASSESMENT OF CLASSIFICATION OF REMOTLY SENSED
DATA IN GIS TECHNOLOGY, A CASE STUDY OF THE HPP CASCADE AREA
ON THE VAKHSH RIVER**

Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology Tajik Academy of Science

The article deals with the classification of images in order to obtain land cover data of the study area using supervised image classification and estimation of the accuracy of the output material using GIS technologies.

Key words: remote sensing, land cover, land use, GIS technology, estimation of classification accuracy, error matrix and Kappa coefficient.

УДК 550.2/552.313

А.К.ОШУРМАМАНОВ

ГЕОХИМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ И ГЕОДИНАМИЧЕСКИЕ
УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ВУЛКАНОПЛУТОНИЧЕСКИХ
АССОЦИАЦИЙ ЮЖНО-ГИССАРСКОЙ ЗОНЫ

*УП «Геологическая поисково-съёмочная экспедиция» Главного управления геологии
при Правительстве Республики Таджикистан*

В статье приводятся данные геохимических исследований вещественного состава вулканитов и плутонитов Южного Гиссара, показывают, что они представлены в основном кислыми породами с надкларковыми содержаниями Cr, Co, Cu, Zn, Rb, Y, Sn, Cs, REE и, по сравнению с лейкократовыми гранитами гранитоидного ряда, обогащены Sn, Y, Zn, Cu, Nb, Ta, U, Th.

Ключевые слова: вулканиты, плутониты, субдукция, коллизия, ассоциация, лучобская серия, хочильёрский комплекс.

Территория Южного Тянь-Шаня отличается исключительной интенсивностью и многообразием магматических процессов, которые проявлены в ее пределах неравномерно. Наибольший объем магматических пород эффузивных и интрузивных, особенно гранитоидов, приходится на южный склон Гиссарского хребта. Интрузивные и эффузивные породы здесь образуют очень сложный комплекс, который по размерам занимаемой территории является наиболее крупным в пределах Южного Тянь-Шаня.

В пределах южного склона Гиссарского хребта кислые вулканиты, образующие лучобскую серию P₁₋₂ Ic и плутониты хочильёрского комплекса, развиты широко [1,2]. Наибольшим развитием эта серия пользуется к северу от Богаинского разлома, где характеризуется большей полнотой и значительной мощностью. Здесь она обнажается в четырех изолированных районах – Каджоуском, Лучобском, Чинарском и самый крупный – Ханакинском (междуречье рр. Савургон – Лучоб).

Данные по содержанию основных микроэлементов представлены для образцов горных пород из лучобской серии вулканитов Южного Гиссара. Были определены содер-

Адрес для корреспонденции: Ошурмаматов Алишер Киргизович. 7340025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Мирзо Турсунзаде, 25, УП «Геологическая поисково-съёмочная экспедиция «Главного управления геологии при Правительстве РТ. E-mail: vulcanite@bk.ru.

жания V, Cr, Co, Ni, Cu, Zn, Ga, Rb, Sr, Y, Zr, Nb, Sn, Cs, Ba, La, Ce, Pr, Nd, Sm, Eu, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu, Hf, Ta, W, Pb, Th и U; репрезентативно были также проанализированы пробы на содержание Rb, Sr, Y, Zr, Nb, Cs, Ba, суммы РЗЭ, Th и U с помощью ICP-MS и ICP-OES, позволившие получить дополнительные критерии для расчленения и корреляции кислых вулканитов, выяснения их условий образования, поисков месторождений в пределах лучобской серии вулканитов. Количественные определения были сделаны, в основном, для кислых вулканитов из четырех толщ. Некоторые данные по содержанию элементов содержатся в работах В.М.Стебловой, В.В.Нарижнева и др. [4,5].

В наших образцах кислых вулканитов и связанных с ними гранитоидов выполнены количественные определения ряда элементов, включая РЗЭ, методами масс-спектрометрии с индуктивно связанной плазмой (ICP-MS). Геохимическая специализация кислых вулканитов лучобской серии представлена на (рис. 1).

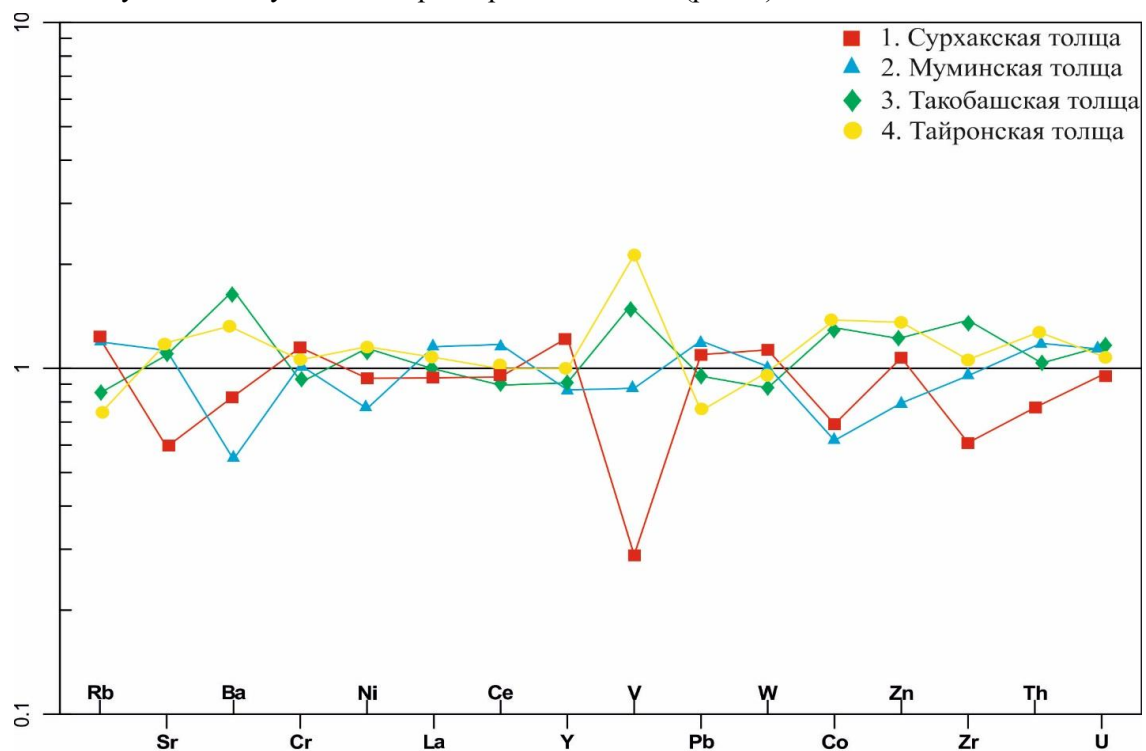


Рис. 1. Нормированное к кларку элементов в кислых породах по А.П. Виноградову средних составов содержание редких элементов в вулканитах Лучобской серии

В надкларковых количествах в кислых вулканитах лучобской серии содержатся Co, Y, V, Ba, Zn, W, Th, U РЗЭ. Отчетливо наблюдается сходный характер расположения элементов-примесей в кислых вулканитах, но при этом обогащение отмечается для V, Co, Zn, Th, U [7].

В плутонитах (граниты) сравнительно повышено содержание Pb, U, Th. По отношению U и Th (рис. 2а) риолиты и граниты относятся к высокорadioактивным вулканитам редкометалльного типа.

Граниты хочильёрского комплекса резко различаются по геохимическому фону. Граниты хочильёрского тела, изучавшиеся ранее с помощью полуколичественных анализов содержат повышенные количества Rb, U, Th, F, Y, Nb, Sn, Pb, пониженные P, Sr, элементов группы Fe, халькофильных элементов [6].

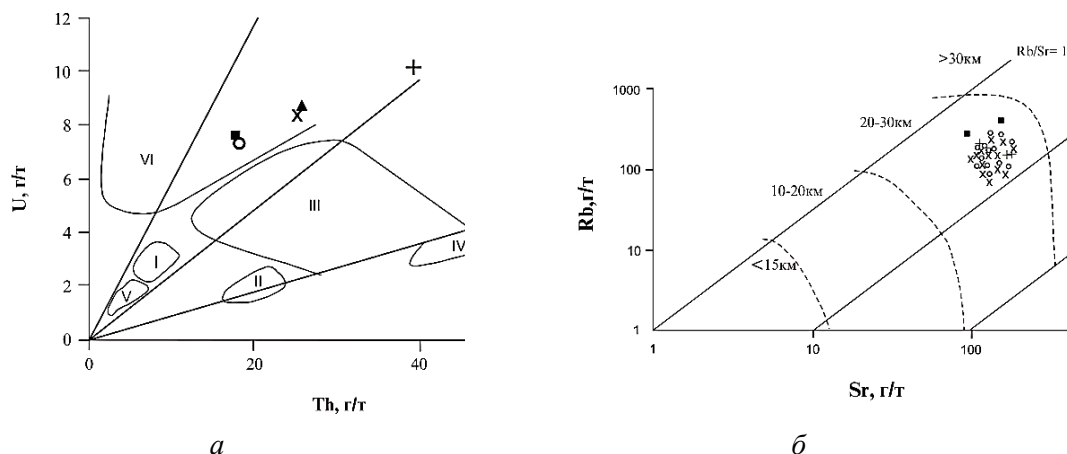


Рис. 2. а) Положение точек составов риолитов лучобской серии и гранитов хочильёрского комплекса на диаграмме U-Th отношений. Толщи: 1 – сурхакская; 2 – муминская; 3 – такабошская; 4 – тайронская; 5 – граниты; I-VI – радиогеохимические типы гранитов по Л.В.Комплеву и А.А.Смыслову (Смыслов, 1974). б) Соотношение Rb-Sr в вулканитах лучобской серии. Основа диаграммы по Конди (Condie, 1973). Толщи: 1 – сурхакская; 2 – муминская; 3 – такабошская; 4 – тайронская.

В целом породы хочильёрского тела следует отнести к высокоспециализированным комплексам, которые по уровню содержания ряда редких элементов не имеют себе равных в Южно-Гиссарской зоне и геохимически сопоставимы с аляскитовым формационным типом и плюмазитовыми редкометалльными лейкогранитами по [2,6,8]. От последних изученные граниты отличаются еще более высокими концентрациями U, Nb, Pb, более низким и Sr, Co, и Ni, а также пониженными отношениями Th/U и Sr/Rb.

На диаграмме Конди (Condie, 1973) Rb-Sr [9], отношения фигуративных точек риолитов и гранитов попадают в область сформировавшихся из расплава, возникшего на глубине 20-30 км, то есть в условиях континентальной коры.

Эти исследования значительно дополнили данные по содержанию микроэлементов для Южного Гиссара, по сравнению с известными ранее [12,13]. Кроме того, качество данных ICP-MS превышает доступные из опубликованных источников [7], а количество анализируемых элементов значительно больше.

Микроэлементы в систематике кислых вулканитов лучобской серии сначала рассмотрены с целью установления количества и распределения различных магматических систем. Петрогенетическое значение данных затем рассматривается с точки зрения эволюции магматической, тектонической обстановки и генезиса рудных месторождений.

Как уже отмечалось, некоторые элементы, которые преимущественно концентрируются в минеральных фазах, а не в магматической системе, описаны как совместимые. Совместимые следовые элементы включают в себя Ni, Co, Cr и V. Несовместимые следовые элементы разделены на две группы на основе их соотношения, заряда и размера, включая Hf, Nb, Pb, Ta, Th, Ti, U, Y, Zr, лантаноиды или редкоземельные элементы. Низкозарядные элементы включают Cs, Rb, K и Ba. К ним могут быть добавлены Sr, двухвалентные Eu и Pb.

Рассмотрим поведение совместимых микроэлементов, основных литофильных элементов и элементов напряженности поля, которые нанесены на диаграмме харкера, вариации диаграммы x-y участков, против Ni, K₂O и Zr соответственно, так как Ni и Zr являются относительно совместимыми микроэлементами.

Как и ожидалось, концентрация Co в образцах падает с уменьшением содержания Ni (рис. 3а). Плутониты и вулканиты образуют относительно четко определенную тенденцию с двумя различными наклонами: субвертикальными и пологими.

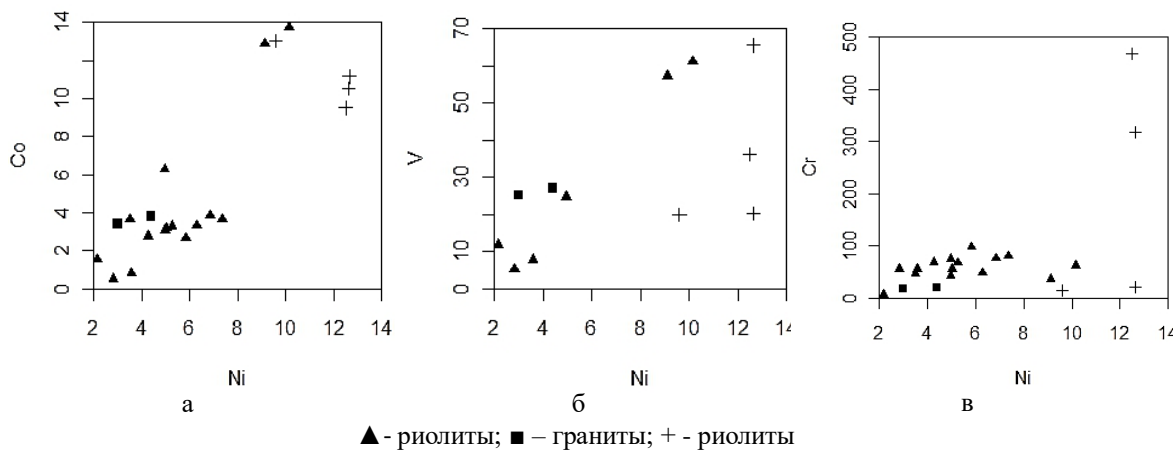
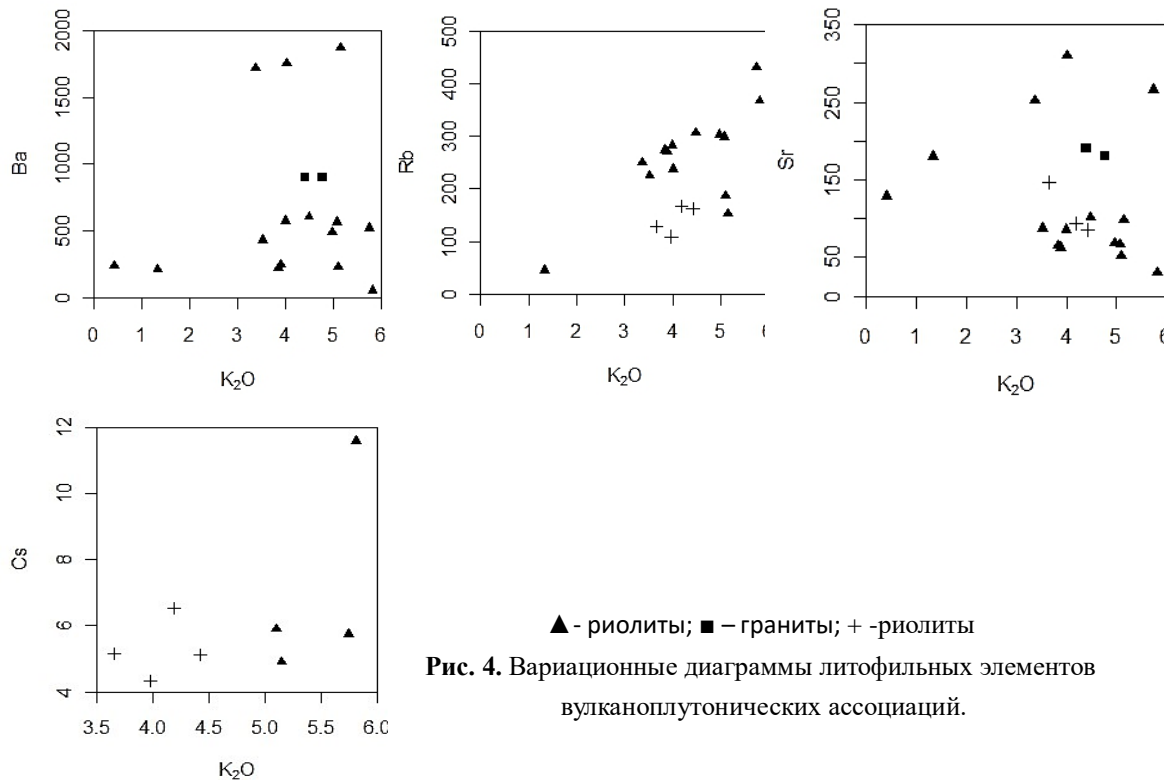


Рис 3. Совместимые элементы различных диаграмм для нижнепермских вулканоплутонических ассоциаций.

По новым выполненным анализам кислые вулканиты лучобской серии и плутониты хочильёрского массива показывают хорошую субвертикальную тенденцию при низких значениях Ni от 2.16 до 4.96 г/т. Образцы Стебловой В.М. и Нарижнева В.В. показывают разбросанные значения Ni от 9.60 до 12.65 г/т. Ванадий показывает аналогичную корреляцию с Ni (рис. 3б). Cr и Co обнаруживают аналогичные вариации при низких содержаниях Ni, а также более рассеянных содержаниях Ni (рис. 3в).

Таким образом, данные совместимости микроэлементов показывают, что кислые вулканиты лучобской серии и плутониты хочильёрского комплекса имеют аналогичные совместимые тенденции. Большинство данных лежат на тенденции с крутыми уклонами содержания Ni, которые соответствуют промежуточным эволюционным содержаниям. Есть различия, которые отражают различную эволюцию магматической системы между ними.

Литофильные элементы включают Ba, Rb, Sr, Cs. Концентрации Ba и Sr во всех кислых вулканитах лучобской серии и плутонитах хочильёрского комплекса отрицательно коррелируют с концентрациями Rb и Cs, положительно со значениями K_2O , отражая четкую тенденцию (рис. 4).



Такое различие в поведении литофилов наиболее правдоподобно объясняется калишпатовым контролем. Вариационные диаграммы литофильных элементов показывают, что большинство проанализированных образцов сохраняют магматические или близмагматические концентрации этих элементов, указывающие на относительно слабые изменения в зоне гипергенеза [7,8].

Микроэлементы Hf, Nb, Pb, Ta, Th, U, Y и Zr встречаются в виде ионов с высокими зарядами (от +3 до +6) при геологических условиях и называются элементами с высокой напряженностью поля. Если два несовместимых элемента нанесены на диаграмму вариации, они должны определять сильные тенденции к концентрации, потому что оба элемента концентрируются в расплаве. Таким образом, наименее мобильные и наиболее несовместимые элементы (Hf, Nb, Ta, Th) нанесены на график с Zr для того, чтобы различать различные магматические эволюционные пути при исследованиях.

В вулканитах тенденции линий Hf аналогичны (рис. 5а), что отражает несовместимую природу Hf и его сильное химическое сходство с Zr. Корреляция существует также между Zr и Nb (рис. 5), хотя тенденция не столь выражена, как для Hf. Лейкократовые

граниты хочильерского массива имеют высокую Nb тенденцию, по концентрации которого они отличаются от кислых вулканитов. Это наблюдение наводит на мысль, что вулканиты и плутониты являются частью единой магмы.

На графике Th/Zr отношений (рис. 5в) поле отображает высокую корреляцию между этими двумя несовместимыми элементами. Более подробно тренд для образцов охватывает широкий спектр Zr/Th отношений, но многие из образцов отражают верхний предел Th-Zr тренда в наборе данных.

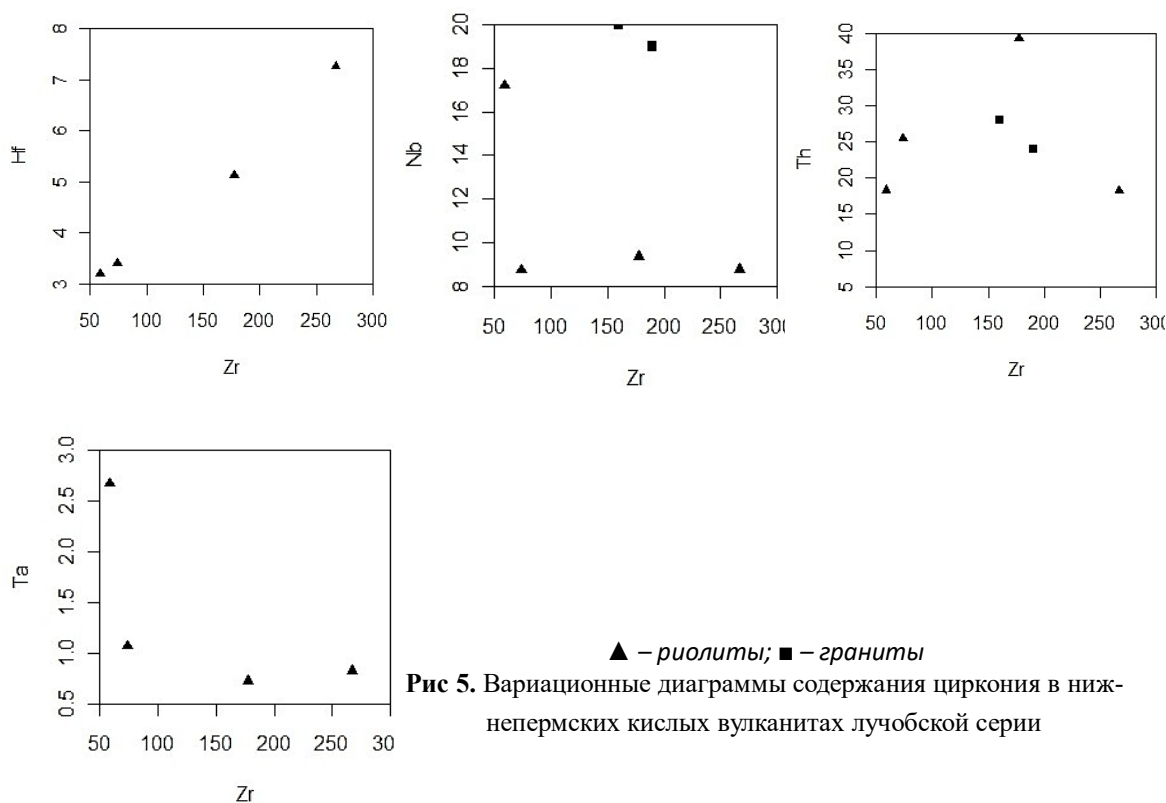


Рис 5. Вариационные диаграммы содержания циркония в нижнепермских кислых вулканитах лучобской серии

Несмотря на то, что Ta считается химически близким Nb из-за сходных размеров и характеристик заряда, его распределение несколько отличается от Nb в нижнепермских кислых вулканитах. При высоких содержаниях Nb и Ta имеют разные тенденции для образцов лучобской и хочильёрской серий на вариационных диаграммах Zr. Такое различие в поведении показывает значительные различия в соотношениях Nb/Ta вулканических пород в результате различных фракционных и ассимиляционных путей корового происхождения.

На Nb-Y тектонической дискриминационной диаграмме (рис. 6а), нижнепермские кислые вулканические и плутонические породы целиком попадают в поле вулканической островной дуги гранита или синколлизонных гранитов (VAG + син-COLG). Результат согласуется с выведенной настройкой во время нижней перми, а также с определением тектонической среды диаграммы Bachlor и Budden (1985) и находится в пределах поля

столкновения после орогенной и одновременно континентальной коллизий (рис. 6б) [14,15].

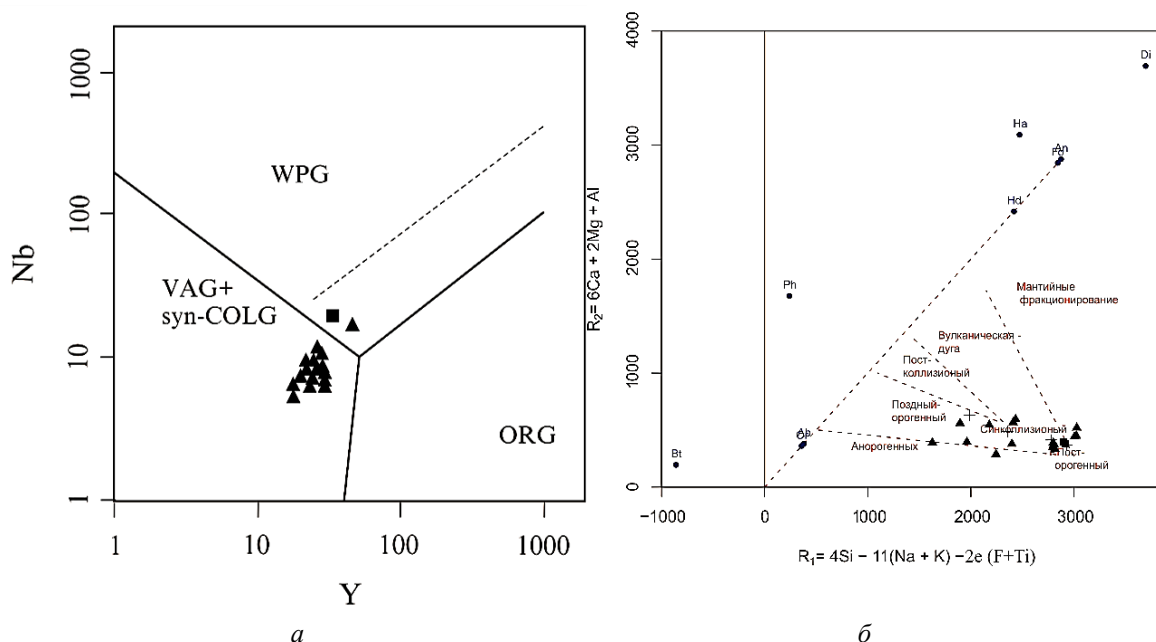


Рис. 6. а - Nb/ Y диаграмма тектонической дискриминации для гранитов (Pearce и др., 1984), показывающая условия субдукции для вулканитов нижней перми лучобской серии; б - диаграмма R_1 - R_2 (Bachelor и Budden, 1985).

Редкоземельные элементы в горных породах, как правило, нормализовались к общему эталону. Наиболее часто используемые нормализующие значения характерны для хондритов [8,10]. Параллельные РЗЭ для группы пространственно-ассоциированных изверженных пород согласуются с эволюцией одной магмы по кристаллизационному фракционированию или без прогрессивной ассимиляции земной коры. Концентрация РЗЭ в анализированных образцах является показателем степени фракционирования в магме. Линии РЗЭ для изверженных пород пересекают друг друга, отсюда более вероятно присутствие различных магм или что первоначально подобные магмы развивались по разной хондрит-нормированной модели нижнепермских кислых вулканитов (рис. 7).

Хондрит-нормированные участки Yb и Ho сегмента тяжелых редкоземельных элементов в нижнепермских вулканитах указывают на низкие содержания элементов и малого межэлементного фракционирования (рис. 7). Ho и La сегмент средне-легких РЗЭ отображает слабо и сильно позитивные тенденции, указывающие на прогрессивно большее обогащение этих элементов лантаном, что характерно для магматизма зоны субдукции. При дегидратации или малой степени плавления погружающейся плиты тяжелые редкоземельные элементы остались ниже в плите, тогда как средние РЗЭ являются умеренной до высокой степени несовместимости и мобилизовались в жидкостях и расплавах. В результате эти элементы обогащаются в мантии над погружающейся плитой.

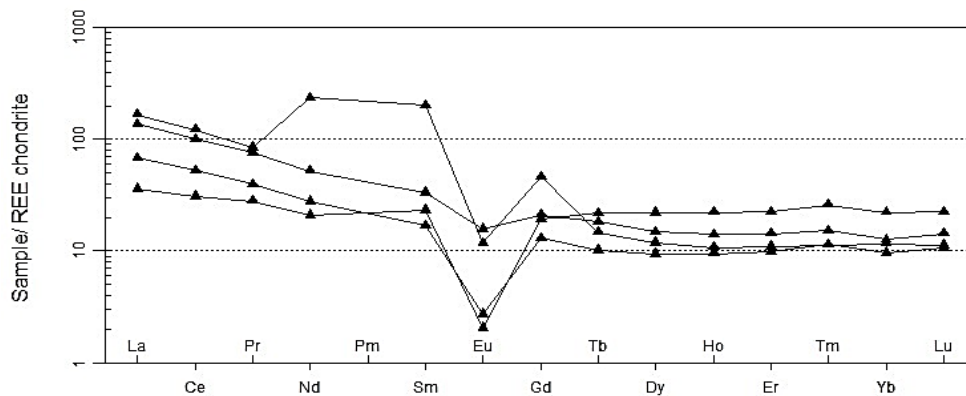


Рис. 7. Хондрит-нормированные участки РЗЭ нижнепермских кислых вулканитов лучобской серии. ▲ – обильнопорфировые риолиты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баратов Р.Б., Лутков В.С. Петрология и геохимия магматических Таджикистана. – Изв. АН Тадж ССР, отд. физ.-мат. геол.-хим. наук, № 1(59), 1976, с.91-93.
2. Баратов Р.Б. Дацит-липаритовая формация Южного Гиссара. – Душанбе: Дониш, 1973, 130 с.
3. Бескин С.М. и др. Редкометалльные гранитовые формации. – М.: Недра, 1979, 280 с.
4. Мамадзафоев М.М. Геохимические особенности орогенных эффузивов Южного Гиссара и проблема их комагматичности. – Душанбе, 1977, с. 10-11.
5. Мамадзафоев М.М. Геохимические особенности рудоносность пермских магматических комплексов Южного Гиссара (Центральный Таджикистан). – Душанбе: Ирфон, 2016, 208с.
6. Мельниченко А.К., Могаровский В.В. Химический состав верхнепалеозойских гранитоидов Гиссарского хребта (Южный Тянь- Шань). В сб.: Вопросы петрохимии. – Л.: Недра, 1969, с. 83-93.
7. Ошурмамадов А.К. Распределение редкоземельных элементов в кислых вулканитах лучобского комплекса Южного Гиссара. Наука и инновация (научный журнал), серия естественных наук. – Душанбе: Сино, 2017, с. 105-108.
8. Ошурмамадов А.К. Геохимия кислых вулканитов Лучобской серии и ассоциирующих с ними гранитоидов. Наука и инновация (научный журнал) серия естественных наук. – Душанбе: Сино, 2017, с. 166-170.
9. Смыслов А. А. Уран и торий в земной коре. – Л.: Недра, 1974, 231 с.
10. Таусон Л.В. Геохимические типы и потенциальная рудоносность гранитоидов. – М.: Наука, 1977, том. [2] с. 278.
11. Фролова Т.И., Перчук Л.Л., Бурикова И.А. Магматизм и преобразование земной коры активных окраин. – М.: Недра, 1989, 261 с.
12. Щукин С.И. Разрывные нарушения междуречья Ханака – Суффа в Южном Гиссаре, последовательность их развития и минерализации – Зап. Тадж. отд-ния Всесоюз. минер. об-ва. 1964, вып. 2, с. 97-106.
13. Щукин С.И. О проявлении трахиандезитовой фазы пермского вулканизма в Южно-Гиссарской зоне. – Докл. АН Тадж. ССР, т. 12, № 1, 1969.
14. Pearse J.A., Harris N.B., Tindle A.G. Trace element discrimination diagrams for the tectonic interpretation of granitic rock 1984, v. 25, no 4, pp. 956-983.
15. Condie K.C. Rare earth in Archean greywackes from Wyoming and from the Fig Tree Group. South Africa: Geochimica Acta. 1973. v. 37. no. 3. pp. 439-453.

А.К.ОШУРМАМАДОВ

**ХУСУСИЯТҲОИ ГЕОКИМИЁВӢ ВА ШАРОИТҲОИ ГЕОДИНАМИКИ
АССОТСИАТСИЯИ ВУЛҚОНИТҲОЮ ПЛУТОНИТҲОИ ЗОНАИ ҲИСОРИ
ҶАНУБӢ**

*КВ «Экспедиция чустучӡию аксбардории геологи»-и
Саридораи геологии назди Ҳукумати Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мақола аҳамияти таҳқиқотҳои петрокимиёӣ, таркиби моддии вулқонитҳо ва плутонитҳо нишон медиҳанд, ки онҳо асосан бо чинҳои куҳии турш бо ғайзнокии аз кларк баланди Cr, Co, Cu, Zn, Rb, Y, Sn, Cs, REE ва нисбат ба гранитҳои лейкократи катори гранит бо Sn, Y, Zn, Cu, Nb, Ta, U, Th пурғайз гардонида шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: вулқонитҳо, плутонитҳо, субдуксия, коллизия, ассотсиатсия, серияи лучоб, комплекси хочилер.

A.K.OSHURMAMADOV

**GEOCHEMICAL FEATURES AND GEODYNAMIC FORMATION
CONDITIONS VOLCANO-PLUTONIC ASSOCIATION OF THE SOUTHERN
HISSAR ZONE**

*UE «Geological prospecting and mapping expedition» of the Main Department of Geology
under the Government of the Republic of Tajikistan*

The article presents data from geochemical studies of the material composition of volcanics and plutonites of Southern Gissar and shows that they are mainly represented by acid-ic rocks with superclark contents Cr, Co, Cu, Zn, Rb, Y, Sn, Cs, and REE in comparison with leucocratic granites of the granitoid series, Sn, Y, Zn, Cu, Nb, Ta, U, Th are enriched.

Key words: volcanic, plutonites, subduction, collision, association, luchob series, hochiler complexes.

**МОДИФИКАЦИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БУССИНЕСКА
ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ В НАПОРНЫХ ТРУБАХ И
ОТКРЫТЫХ КАНАЛАХ.**

Таджикский Национальный Университет

Поступила в редакцию

Предложена замкнутая система уравнений среднего движения Рейнольдса-Буссинеска с добавочным дифференциальным членом – вихревая вязкость. Получены новые решения одномерных задач турбулентного потока в напорных трубах круглого сечения и в руслах со свободной поверхностью.

Ключевые слова: система уравнений турбулентности, несжимаемая жидкость, молекулярная вязкость Ньютона, вихревая вязкость Буссинеска.

В 1883 г. Осборн Рейнольдс [1], наблюдая пульсирующее извилистое течение в стеклянной трубе, предложил сочетать принципы гидромеханики и статистической математики. На этой основе он, расширив систему уравнений мгновенных скоростей Навье-Стокса, предложил свои уравнения среднего движения турбулентности записать так [2]:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \sum_j \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = X_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \rho \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right).$$

Эти уравнения намного сложнее, чем уравнения системы Навье-Стокса: они содержат добавочные напряжения $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ Рейнольдса, физическая суть которых пока не выяснена, выписаны для средних скоростей и среднего давления. Система уравнений Рейнольдса незамкнута. Проблемы замыкания решались в работах Тейлора, Прандтля, Кармана [1] и Миллионщикова [3]. В обзорной работе Шлихтинга [4] подробно изложено

Адрес для корреспонденции: Мирзоев Шоди Ашурмадович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: shodi-tj@mail.ru

состояние проблемы возникновения турбулентности. Вопрос перехода ламинарного течения в турбулентный поток со свободной поверхностью рассмотрен в [5, 6].

Некоторое обобщение методов замыкания предложено в работах [7, 8].

Буссинеск, наблюдая рост касательного напряжения в реальном потоке, добавив к молекулярной еще вихревую вязкость A записал их вместе так [7]:

$$\tau_H + \tau_B = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + A \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = (\mu + A) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z},$$

где \bar{u} – осредненная скорость, τ_H и τ_B – ньютонова и буссинеска напряжения, а μ – молекулярная и A – вихревая динамические вязкости, соответственно.

«Уже в то время Буссинеск отчетливо понимал, что коэффициент A в отличие от коэффициента молекулярной вязкости μ , не есть физическая константа жидкости, а представляет собой некоторую функцию координат пространства (а при нестационарном осредненном движении – и времени)».

Запишем систему уравнений Навье – Стокса-Рейнольдса в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_+ \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_+ \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_+ \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_+ \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_+ \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_+ \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_+ \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_+ \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_+ \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Решим две классические задачи. В первую очередь исследуем важнейшие из тех случаев, когда можно получить явные решения задач, исследуем решения этих задач. Кинематическая (ньютонова) вязкость μ есть малая постоянная величина $0 < \mu \ll 1$, вихревая вязкость (или турбулентная вязкость Буссинеска) подбирается согласно опытным данным Никурадзе [1] в виде функции, удовлетворяющей физическому смыслу поставленной задачи.

“В то время как коэффициент молекулярной вязкости μ меняется только с родом жидкости и ее температурой и, следовательно, сохраняет одно и то же значение по всему живому сечению речного потока, коэффициент турбулентной вязкости A сильно меняется в пространстве, увеличивая свои значения с расстояниями от дна и свободной поверхности” [1].

Задача 1. Течение несжимаемой жидкости под действием внешних сил

Пусть на жидкость действует сила тяжести, и пусть жидкость ограничена сверху свободной поверхностью, снизу же неподвижной плоскостью Оху, наклоненной к гори-

зонту под углом α , причем ось Ox горизонтальна, ось Oz направлена перпендикулярно к плоскости вверх, так что

$$X = g \sin \alpha, \quad Y = 0, \quad Z = -g \cos \alpha$$

Будем считать, что движение происходит параллельно оси Ox и что движение стационарное. Примем для простоты $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Будем учитывать силы как молекулярной μ , так и вихревой вязкости A , при этом возьмем $A = \chi z$. Система (1) при этом приведет к виду:

$$\left. \begin{aligned} \rho g \sin \alpha + (\mu + \chi z) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} ((\mu + \chi z) \frac{\partial u}{\partial z}) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \cos \alpha &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

так что

$$p = C - \rho g z \cos \alpha, \quad (3)$$

где C – некоторая постоянная величина.

В рассматриваемом случае граничные условия имеют следующий вид. На неподвижной плоскости, то есть на дне канала

$$u = 0 \quad \text{при} \quad z = 0; \quad (4)$$

на свободной же поверхности $z = h$ для напряжений должны выполняться условия:

$$p_{zz} = -p_0, \quad p_{zx} = p_{zy} = 0$$

Так как $v = w = 0$ и $u \equiv u(x, y, z)$ и в силу условия неразрывности $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, функция u есть функция только от y и z , мы имеем:

$$p_{zz} = -p + 2(\mu + \chi z) \frac{\partial w}{\partial z} = -p, \quad p_{zx} = (\mu + \chi z) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = (\mu + \chi z) \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$p_{zy} = (\mu + \chi z) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0$$

следовательно, мы приходим к следующим граничным условиям:

$$p = p_0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h. \quad (5)$$

Первое из этих условий определяет постоянную C в (3), $C=p_0+\rho gh\cos\alpha$ так что закон изменения давления в данном сечении потока выражается согласно формуле:

$$p = p_0 + \rho g(h - z) \cos \alpha . \quad (6)$$

Будем теперь решать первое уравнение из системы (2):

$$\rho g \sin \alpha + (\mu + \chi z) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left((\mu + \chi z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0.$$

Покажем, что оно имеет решение u , зависящее только от переменной z , удовлетворяющее граничным условиям (4)-(5), то есть ищем решение вида $u=u(z)$.

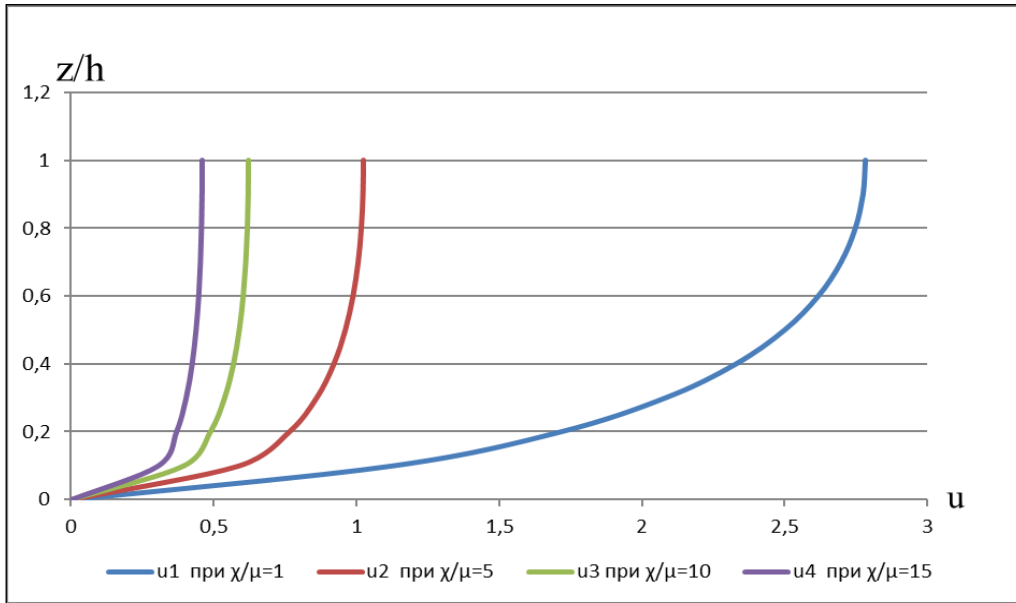


Рис. 1. График закона распределения скоростей по формуле (8).

Оно должно удовлетворять уравнению:

$$\rho g \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial z} \left((\mu + \chi z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 . \quad (7)$$

Легко показать, что решение (7), удовлетворяющее (4)-(5) имеет вид:

$$u(z) = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\chi} \left(z - \left(h + \frac{\mu}{\chi} \right) \ln \frac{\mu + \chi z}{\mu} \right). \quad (8)$$

Функция $u(z)$ ограничена на отрезке $[0;h]$, возрастающая и выпуклая:

$$u_{\max}(z) = u(h) = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\chi} \left(h - \left(h + \frac{\mu}{\chi} \right) \ln \frac{\mu + \chi h}{\mu} \right).$$

При $\chi \rightarrow 0$, $\mu - const.$, $\chi \rightarrow \infty$ получаем:

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} u(z) = \frac{\rho g z (2h - z) \sin \alpha}{2\mu}.$$

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} u = -\rho g \sin \alpha \lim_{\chi \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\chi} - \left(\frac{h}{\chi} + \frac{\mu}{\chi^2} \right) \ln \frac{\mu + \chi z}{\mu} \right) = 0$$

Задача 2. Турбулентное течение в трубках.

Пусть имеется цилиндрическая труба круглого сечения, радиус которого равен a . Пусть несжимаемая жидкость течет вдоль этой трубы, причем внешние силы отсутствуют. Молекулярная вязкость μ есть постоянная величина, очень малая, $\mu \ll 1$, а вихревая вязкость μ_B есть функция от радиуса поперечного сечения трубы r , такая, что у стенки трубы $\mu_B(a) = 0$ и принимает наибольшее значение при $r=0$. Пусть:

$$\mu + \mu_B = \mu + \chi(a - r)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Пусть течение стационарно и в каждой точке скорость направлена параллельно оси трубы. Поэтому координаты скорости будут иметь вид:

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = u(x, y, z).$$

При этих допущениях система (1) принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left((\mu + \mu_B) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_B) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const.}$$

Итак, функция $u(x, y)$ удовлетворяет третьему уравнению из системы (9):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((\mu + \mu_B) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_B) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (10)$$

и граничному условию на стенке:

$$u=0 \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} = a. \quad (11)$$

Обозначим:

$$A(r) = \mu + \mu_B = \mu + \chi(a - r).$$

Запишем уравнение (10) в цилиндрических координатах r, φ, z :

$$A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right) + A'_r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (12)$$

Будем искать его ограниченное решение, удовлетворяющее граничному условию $u(a)=0$.

Покажем, что существует ограниченное решение уравнения (12), зависящее только от r и удовлетворяющее условию (11). Если это функция $u=u(r)$, тогда уравнение (10) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}\right) + A'_r \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{или} \\ A(r) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + A'_r \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial p}{\partial z} \\ (\mu + \chi(a - r)) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) - \chi r \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial z} r &= 0 \end{aligned}$$

Проинтегрируем его. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} q = r \frac{\partial u}{\partial r} \quad (\mu + \chi(a - r)) \frac{\partial q}{\partial r} - \chi q - \frac{\partial p}{\partial z} r &= 0 \\ (\mu + \chi(a - r)) dq - \left(\chi q + \frac{\partial p}{\partial z} r\right) dr &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

уравнение (13) в полных дифференциалах, то существует функция $F(q, r) = C$:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \mu + \chi(a - r); \quad \frac{\partial F}{\partial r} = -\chi q - \frac{\partial p}{\partial z} r.$$

$$F = (\mu + \chi(a - r))q - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r^2}{2} + C_1 = C,$$

$$q = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r^2}{2(\mu + \chi(a - r))} + \frac{C_2}{\mu + \chi(a - r)}$$

и получаем новое уравнение относительно неизвестной функции $u(r)$

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r^2}{2(\mu + \chi(a - r))} + \frac{C_2}{\mu + \chi(a - r)}$$

$$u = \frac{1}{2\chi} \frac{\partial p}{\partial z} \left(-r - \frac{\mu + \chi a}{\chi} \ln(\mu + \chi(a-r)) + \frac{C_2}{\mu + \chi a} \ln \frac{r}{\mu + \chi(a-r)} + C_3 \right).$$

Это общее решение уравнения (13). Из условия ограниченности решения на отрезке $0 \leq r \leq a$ следует, что постоянная $C_2 = 0$. Постоянную C_3 выберем так, чтобы $u(a)=0$:

$$C_3 = a + \frac{\mu + \chi a}{\chi} \ln \mu.$$

$$u(r) = \frac{1}{2\chi} \frac{\partial p}{\partial z} \left((a-r) - \left(\frac{\mu}{\chi} + a \right) \ln \left(1 + \frac{\chi}{\mu} (a-r) \right) \right). \quad (14)$$

Формула (14) есть решение задачи 2.

Функция $u(r)$ убывающая, выпуклая на отрезке $0 \leq r \leq a$, $\frac{\partial u}{\partial r}(0) = 0$.

Максимальное значение функция u принимает при $r=0$.

Вычислим предел u_{max} при $\chi \rightarrow 0$, и $\chi \rightarrow \infty$. Получим:

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} u_{max} = \lim_{\chi \rightarrow 0} u(0) = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{a^2}{2\mu}.$$

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} u(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} \lim_{\chi \rightarrow \infty} \left(\frac{a-r}{\chi} - \frac{1}{\chi} \left(\frac{\mu}{\chi} + a \right) \ln \left(1 + \frac{\chi}{\mu} (a-r) \right) \right) = 0.$$

Молекулярная вязкость μ достаточно маленькая постоянная величина, а коэффициент χ при вихревой вязкости в разы (то есть в 100, 1000, раз) больше.

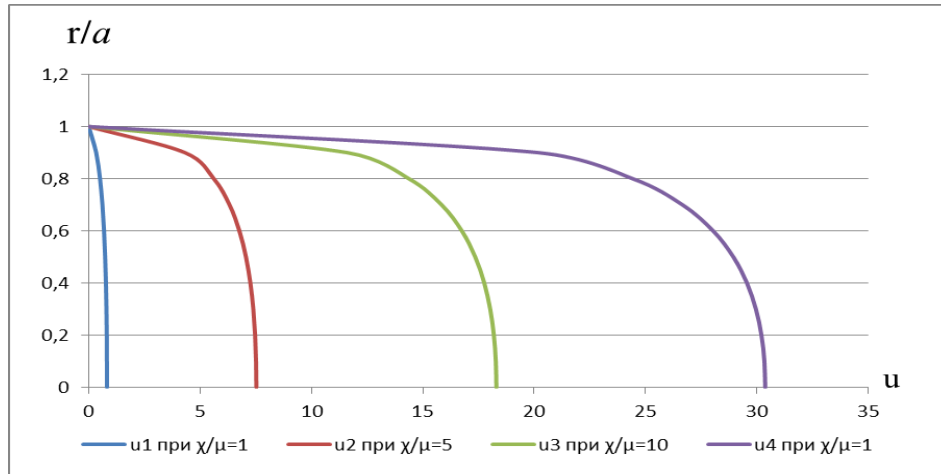


Рис. 2. Эскиз графика распределения скоростей по формулам (14).

При турбулентном течении вследствие обмена импульсов в поперечном направлении скорость сильно сглаживается, то есть течение становится значительно равномернее, что показывают рис.1 и рис.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проблемы турбулентности. Пер. статей Л.Прандтля, Т.Кармана, И.Никурадзе, О.Рейнольдса и др.. под ред. М.А.Великанова. – М.: ОНТИ, 1936, 332 с.
2. Хинце И.О. Турбулентность. Ее механизм и теория. Пер. с англ. под редакцией Г.Н.Абрамовича. – М.: Госиздат Физ.-мат. литературы, 1963, 680 с.
3. Миллионщиков М.Д. Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах. – М.: Наука, 1969, 43 с.
4. Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности. – М.: Изд-во ИЛ, 1962, 204с.
5. Гришанин К.В. Динамика русловых потоков. – Л.: Гидрометеоздат, 1979, 311 с.
6. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – М.: Физматгиз. 1963, ч.1, 584 с.; ч.II, 728 с.
7. Саттаров М.А. Гидромеханический метод оценки осредненных характеристик турбулентного потока. – Душанбе: ДАН РТ, 2006, т.49, № 4, с.321-327
8. Саттаров М.А. Гидромеханические аспекты классификации характеристик турбулентного потока. – Душанбе: ДАН РТ, 2007, т.50, № 11-12, с.826-835.
9. М.А.Саттаров, Н.Н.Степанова, Ш.А.Мирзоев, Н.К.Носиров Обобщение формулы Дарси-Вейсбаха для расчета гидравлики стока реальных жидкостей в трубах и каналах с правильными поперечными сечениями. – Душанбе: Вестник ТНУ, 2014, № 1/3(134), с.87-93.

Ш.А.МИРЗОЕВ

ТАҒИРЁБИИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАҶОИ БУССИНЕСК ҶАНГОМИ ҲАЛЛИ БАЪЗЕ МАСЪАЛАҶО ДОИР БА ҲАРАКАТИ ФИШУРДАШАВАНДАИ МОЕЪ ДАР ҚУБУРҶО ВА КАНАЛҶОИ КУШОД.

Донишгоҳи Миллии Тоҷикистон.

Ба системаи муодилаҳои пушидаи ҳаракати миёнаи моеъ яъне, системаи муодилаҳои Рейнолдс ва Буссинеск аъзоҳои дифференсиалии часпакии гирдобӣ илова карда шуда, дар асоси ин ҳалли нави масъалаи ҷараёни турбулентии моеъ дар кубурҳои буришашон доиравӣ ва каналҳои кушод ҳосил карда мешавад.

Калимаҳои калидӣ: системаи муодилаҳои турбулентӣ, моеъи фишурданашаванда, часпакии молекулавии Ньютон, часпакии гирдобии Буссинеск.

Sh.A.MIRZOEV

MODIFICATION OF THE SYSTEM OF BOUSSINESQ EQUATIONS FOR SOLVING SOME PROBLEMS IN PRESSURE PIPES AND OPEN CHANNELS.

Tajik National University

A closed system of equations of the average Reynolds-Boussinesq motion with an additional differential term, vortex viscosity, is proposed. New solutions to one-dimensional problems of turbulent flow in pressure pipes of circular cross section and in channels with a free surface are obtained.

Key words: system of equations of turbulence, incompressible fluid, Newton's molecular viscosity, Boussinesq vortex viscosity.

КРАТКИЙ ОЧЕРК НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ И ОРГАНИЗАТОРСКОЙ
ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АКАДЕМИКА САФИЕВА ХАЙДАРА
(К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)



Сафиев Х. родился в 1950 г. в г. Куляб Таджикской ССР. В 1972 г. с отличием окончил Киевский политехнический институт по специальности «Технология неорганических веществ», кандидат технических и доктор химических наук, профессор, академик АН РТ.

Трудовая деятельность с 1972 г. по настоящее время: лаборант, ассистент кафедры Таджикского политехнического института, аспирант Киевского политехнического института, старший преподаватель, заведующий кафедрой Кулябского госпединститута, заместитель заведующего отделом науки, техники высших и средних специальных учебных заведений УД Совета Министров Таджикской ССР, заведующий лабораторией Института химии им. В.И. Никитина

АН Республики Таджикистан, заместитель начальника технического отдела Таджикского алюминиевого завода, главный ученый секретарь АН Республики Таджикистан, член Президиума АН Республики Таджикистан (2000-2010гг.), ректор Таджикского государственного национального университета, главный редактор Вестника Таджикского национального государственного университета, советник Президента Республики Таджикистан по вопросам науки и высоким технологиям, директор Государственного учреждения «Научно-исследовательский институт металлургии» Государственного унитарного предприятия «Таджикская Алюминиевая Компания».

С учетом научных и организационных заслуг, связанных с созданием в Таджикистане нового научного направления по химии и технологии комплексной переработки минерального сырья и отходов, вклад в научно-организационную деятельность Академии наук Республики Таджикистан и Таджикского национального университета, в 1999 году

Х. Сафиев избран членом-корреспондентом и в 2014 году – действительным членом (академиком) Академии наук Республики Таджикистан по специальности «Химия».

Сафиев Х. является известным специалистом в области химии и технологии неорганических веществ. Он впервые в Таджикистане начал систематические исследования в области комплексной переработки минерального сырья и промышленных отходов. Более 40 лет под его руководством проводятся фундаментальные исследования в области химии и технологии неорганических веществ. Результаты этих исследований позволили разработать ряд принципиальных технологических схем комплексной переработки алюмосиликатных руд хлорными, кислотными и спекательными способами. При этом особое внимание уделяет вопросам утилизации промышленных отходов, использованию местного сырья в качестве исходных материалов, а также экологическим проблемам химической, металлургической и горнорудной промышленности. Так, при непосредственном руководстве и участии профессора Сафиева Х. в настоящее время научно обоснован и разработан ряд технологий переработки содержимого склада твердых отходов и шламовых полей ГУП «ТАЛКо» с получением криолит-глиноземного концентрата, огнеупорной продукции, флюса для литейного производства, коагулянта для очистки воды, соды, жидкого стекла и др.

Под непосредственным руководством академика АН РТ У.М. Мирсаидова Х. Сафиев являлся инициатором создания Института водных проблем, гидроэнергетики и экологии АН РТ (Постановление Правительства Республики Таджикистан № 279 от 03.07.2002 г.) на базе возглавляемого им отдела водных проблем и экологии АН РТ.

Неоценима заслуга Сафиева Х. в развитии других направлений химии и химической технологии, в частности, нефте- и углехимии. Еще будучи ректором ТГНУ он ставил и решал задачи по развитию указанных направлений, что, несомненно, сыграло позитивную роль впоследствии – при промышленном запуске угольных газогенераторов для обеспечения производственных нужд ГУП «ТАЛКо», Восточной котельной г. Душанбе и предприятия «ТАЛКо Кимиё» (г. Яван) синтетическим углеводородным газом.

Разработки Сафиева Х. в своё время были успешно апробированы и внедрены на Сумском ПО «Химпром» (Украина), Турсунзадевском фарфоровом заводе, НП «Падида», ГУП «Душанбеводоканал». Он является автором более 400 научных работ, в т.ч. 12 монографий и учебников. Новизна научных разработок Сафиева Х. подтверждена более, чем 30 охраняемыми документами на изобретение: авторскими свидетельствами СССР, евразийскими патентами, патентами Российской Федерации и Республики Таджикистан. Под его руководством и непосредственном участии защищены 11 кандидатских и 4 докторские диссертации. В 2001 году Сафиев Х. был удостоен звания лауреата Государственной премии имени Абуали ибн Сино в области науки и техники, а в 2002 году – лауреата Международной премии ЭКО в области науки и технологии.

Научная деятельность ученого тесно связана с педагогической – Х. Сафиев читает циклы лекций в Таджикском национальном университете и Таджикском техническом

университете имени академика М.С. Осими. Он прошел все ступени педагогической деятельности в высшей школе: лаборант, ассистент, старший преподаватель, доцент, профессор кафедры и ректор ТГНУ, действительный член (академик) Таджикского отделения Международной академии наук высшей школы. Много усилий приложил в организации материально-технической и научно-лабораторной базы во вновь созданных ГУ «Научно-исследовательский институт металлургии» ГУП «ТАЛКО» и Научно-исследовательском институте ТНУ, а также в организации учебного процесса по новым специальностям на химических факультетах Национального и Технического университетов. За успешную научную и педагогическую деятельность неоднократно был награжден почетными грамотами Министерства образования республики и ВУЗов.

Является членом Координационного комитета Международного научно-технического центра (г. Москва, г. Астана), Комитета по Государственным премиям Республики Таджикистан им. Абуали ибн Сино в области науки и техники, Диссертационного совета по защите докторских и кандидатских диссертаций при Институте химии им. В.И. Никитина АН Республики Таджикистан.

Одной из значимых вех в трудовой биографии Х.Сафиева, и на этом уместно сделать акцент – учитывая трудности переходного периода, является деятельность на должности ректора Таджикского государственного национального университета (2001-2005гг.). Несколько опережая свое время, ученый-руководитель заложил перспективную стратегическую линию развития высшей школы, выделив в качестве основных постулатов тесную взаимосвязь фундаментальной и прикладной науки, разрешение противоречий между накопившимся объемом знаний и их усвоением, единство науки и образования с социально-экономическим развитием общества. Исходя из этого, Сафиев Х. внес ряд прогрессивных изменений, направленных на создание необходимой нормативно-правовой базы вуза, улучшение материальной и образовательной составляющих процесса обучения, повышение материального благосостояния профессорско-преподавательского состава.

Не случайно, что многие преподаватели и выпускники Университета с теплотой вспоминают период руководства Сафиева Х.

Для Х.Сафиева характерно гармоничное сочетание научно-педагогической деятельности с работой в органах государственной власти, в период с 2005 по 2015 гг. был депутатом Маджлиса народных депутатов города Душанбе, где, используя свои профессиональные навыки и умения, активно участвовал в решении актуальных народно-хозяйственных задач.

Имя Х.Сафиева известно и за пределами Республики Таджикистан, труды ученого опубликованы и цитируются в странах ближнего (Российская Федерация, Республика Беларусь, Украина и др.) и дальнего зарубежья (США, Бельгия, КНР, Турция, Румыния и др.).

В соответствии с Постановлением Правительства Республики Таджикистан № 613 от 31.10.2009 г. по инициативе и непосредственной поддержке Президента страны, ува-

жаемого Эмомали Рахмона, было создано Государственное учреждение «Научно-исследовательский институт металлургии» Государственного унитарного предприятия «Таджикская Алюминиевая Компания» (ГУ «НИИМ» ГУП «ТалКо»), директором которого был назначен Х.Сафиев. Основными целями и задачами Института являются научные исследования и разработка научно-обоснованных инновационных технологий по переходу предприятий ряда отраслей промышленности Республики Таджикистан на местное сырье, снижение негативного воздействия промышленных отходов на окружающую среду и возврат в производство их ценных компонентов, усовершенствование технологических процессов и конструкции оборудования.

Трудно переоценить роль Х.Сафиева как ученого и руководителя в создании и становлении ГУ «НИИМ» ГУП «ТалКо», являющегося непосредственным «мостом» между фундаментальной и прикладной наукой и призванного обеспечить перспективное научно-методологическое развитие целого промышленного комплекса, включающего предприятия металлургической, горнорудной и химической промышленности.

В настоящее время в соответствии с Программой перехода ГУП «ТалКо» на местное сырье под руководством Сафиева Х. проводятся исследования по разработке и апробированию в промышленном масштабе ряда технологий комплексной переработки глинозем-, углеродсодержащего сырья отечественных месторождений (нефелиновых сиенитов «Турпи», каолиновых глин «Зидди», ставролит-мусковитовых сланцев «Курговад» и антрацитов «Назар-Айлок») и промышленных отходов ГУП «ТалКо»: шлама газоочистки, отсева склада твердых отходов, угольной электролитной пены, отработанных электродных блоков, а также золы и золошлаков, образующихся при производстве синтез-газа на ГУП «ТалКо» и сжигании угля на ТЭЦ-2 г. Душанбе, с получением глинозема, криолита, фторида алюминия, электродной и огнеупорной продукции, графита, флюса, строительных материалов и др., что, несомненно, будет способствовать рациональному использованию сырьевых ресурсов, а также внесет весомый вклад в охрану окружающей среды и сохранение экологического равновесия в зоне действия промышленных предприятий республики.

Сафиев Х. принимал активное участие в подготовке к пуску предприятия «ТалКо Кимиё» (г. Яван) по производству серной кислоты, криолита и фторида алюминия. В торжественных мероприятиях, посвященных этому знаменательному событию и проведенных при участии и под руководством Основателя мира и национального единства – Лидера нации, Президента Республики Таджикистан уважаемого Эмомали Рахмона, Сафиев Х. выступил с тематическими презентациями.

Значимым достижением научной школы Х.Сафиева является разработка технологии получения высококачественного сульфата алюминия – коагулянта для очистки питьевой воды и налаживание промышленного выпуска продукции, осуществленного на вступившем в строй предприятии «ТалКо Кимиё». По предварительным расчетам выпускаемая продукция обеспечит потребности не только внутреннего рынка, но и даст возмож-

ность выхода на внешний рынок, учитывая ежегодный высокий спрос на коагулянты. Реализация данного проекта отвечает требованиям национальной и международной программ водной проблематики с решением экологических задач, переходу на использование местного минерального сырья и независимости от импорта.

Одной из важнейших и безотлагательных задач, которые необходимо было решить для пуска предприятия «ТАЛКо Кимиё», являлось обеспечение кондиционным флюоритовым концентратом, применяемым в производстве плавиковой кислоты для последующего получения криолита и фтористого алюминия. Под руководством Х.Сафиева в кратчайшие сроки был разработан и внедрен способ очистки карбонатно-флюоритовых руд Такобского ГОКа с получением высококачественного флюоритового концентрата, позволивший осуществить «горячий» пуск предприятия. Привлекательность предложенного способа заключается в его простоте, отсутствии побочных продуктов реакции и в непосредственной конверсии вредных примесей в товарный флюоритовый концентрат высокого качества.

Отличительные черты школы Х.Сафиева – широта интересов, разнообразие методов исследований, оригинальность трактовки научных результатов, являющихся фундаментом для новых экспериментов, четко поставленная цель с получением прогнозируемых результатов, инновационная деятельность с внедрением научных достижений в производство.

Интуиция, основанная на глубоких знаниях, опыте, широте и оперативности мышления, позволяет ученому оценивать перспективное развитие химической технологии и профессионально заниматься научно-прикладными исследованиями в области создания безотходных технологий и охраны окружающей среды.

Доброжелательность и внимательное отношение к своим коллегам, высокий интеллект, внутренняя энергия, щедрость души вызывают огромное уважение к профессору Сафиеву Х., как к личности большого масштаба.

В начале 90-х годов XX века, в трудные годы становления независимости Таджикской государственности, Х.Сафиев внес неопенимый вклад в сохранение и развитие науки; чувство глубокого патриотизма стало основным мотивом научной и общественной деятельности Х.Сафиева, что привело его в ряды сторонников восстановления мира и нормализации обстановки в республике.

Резюмировать творческую деятельность Х.Сафиева можно словами П.Л.Капицы: «Чем крупнее достижения ученого, тем короче и точнее можно их описать». Научные достижения академика Х.Сафиева крупными буквами вписаны в историю развития отечественной науки и промышленности, а основанная им научная школа, безусловно, способствует подготовке и воспитанию целой плеяды ученых.

Глубокая эрудиция и мудрость, целеустремленность и коммуникабельность, интеллигентность и толерантность, самоотверженность и принципиальность, а также пре-

данность выбранному пути снискали Х.Сафиеву глубокое уважение, любовь учеников и соратников.

Академику Х.Сафиеву 70 лет. Мы желаем ему новых творческих успехов и крепкого здоровья.

Мирсаидов У.М., Хайдаров К.Х., Ганиев И.Н., Халиков Д.Х.,
Юсуфи Саломудин Джаббор (С.Д.Исупов), Кобулиев З.В., Рузиев Д.Р.,
Саидзода Рахимджон Хамро (Р.Х.Саидов), Назаров Ш.Б.

АКАДЕМИК РАХИМ МАРУПОВ

(27.11.1936 - 12.01.2020)



13 января 2020 года на восемьдесят четвертом году жизни скончался академик Академии наук Республики Таджикистан, Заслуженный деятель науки и техники Республики Таджикистан, Лауреат Государственной премии Республики Таджикистан имени Абуали Ибн Сино в области науки и техники, Почетный директор Физико-технического института им. С.У.Умарова Академии наук Республики Таджикистан, известный ученый в области спектроскопии высокомолекулярных соединений – Рахим Марупов.

В предстоящем 2021 году Национальная академия наук Таджикистана отметит свое 70-летие. С высоты этих славных лет отчетливо видны пути становления и развития каждого института в структуре Академии наук. Физико-технический институт, носящий имя своего создателя академика С.У.Умарова, организован в 1964 году на базе Отдела физики и математики Академии наук Таджикской ССР. Значимостью своего пройденного пути, по созданию отдельных подразделений, определению основных направлений научно-исследовательских работ, концентрации всех сил и возможностей в концепции этих научных направлений, по подбору и подготовке талантливой молодежи через стажировки и аспирантуру институт обязан, прежде всего, тем высококвалифицированным кадрам, которые стояли у истоков этого пути и внесли каждый из них свой весомый вклад в его становление и развитие.

Одним из таких ученых – физиков, начавших свой путь в науку, в эту благороднейшую область человеческой деятельности, по призванию и зову сердца отдавший служению ей свои 60 лет творческой деятельности, несомненно, является академик Рахим Марупов.

Уместно вспомнить высказывание великого ученого, русского хирурга - анатома Н.И. Пирогова «Служите верно науке и правде и живите так, чтобы состарившись, могли

безупречно вспоминать вашу и уважать чужую молодость». Эти слова вполне можно отнести к академику Рахиму Марупову.

Рахим Марупов родился 27 ноября 1936 года в кишлаке Вогат Ура-тюбинского района (ныне Истаравшан, Согдийская область) Республики Таджикистан. После окончания средней школы с серебряной медалью в 1954 году он поступил на физическое отделение физико-математического факультета Таджикского государственного университета им. В.И.Ленина.

После окончания университета в 1959 году был направлен на работу в Отдел физики и математики (с 1964 года – ФТИ им. С.У.Умарова) АН Республики Таджикистан. По решению Президиума АН Республики Таджикистан в октябре 1959 года был командирован в Институт физики АН Белорусской ССР для прохождения стажировки, а затем и аспирантуры.

Основная научная деятельность Р.Марупова началась с 1959 года в Институте физики АН БССР в лаборатории физики инфракрасных лучей, руководимой академиком Н.А.Борисевичем, в группе, возглавляемой профессором Р.Г.Жбанковым, и была посвящена исследованию колебательной спектроскопии природных высокомолекулярных соединений целлюлозы и ее производных. Как стажер-исследователь, а затем аспирант, Р.Марупов провел систематические исследования структуры природной и гидратцеллюлозной модификации целлюлозы с привлечением данных инфракрасных спектров большого числа модельных к целлюлозе соединений, в результате которых совместно с Б.И.Степановым и Р.Г.Жбанковым выдвинул гипотезу о причинах структурных различий хлопковой, древесной и гидратцеллюлозы, впоследствии подтвержденную советскими и зарубежными авторами в экспериментальных работах и теоретических расчетах. Эти исследования легли в основу его диссертационной работы «Исследование инфракрасных спектров целлюлозы и новых типов ее производных», защищенной 24 октября 1964 года на специализированном Ученом совете при Институте физики АН БССР на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Дальнейшие, важные с точки зрения практического применения и внедрения исследования, проведены по изучению одного из важнейших свойств полимеров структурно и химически модифицированной целлюлозы, успешно примененные Р.Маруповым для установления механизма структурного окрашивания ряда классов синтетических полимеров. Эти результаты обобщены в монографии «Спектроскопия волокнообразующих полимеров», опубликованной в 1977 году.

Заслуживают особого внимания разработанные Р.Маруповым специальные методы, позволившие впервые систематизировать спектроскопические признаки и выявить структурные особенности хлопковых волокон различного происхождения, волокон здоровых и пораженных вилтом растений.

На основе систематизации данных по изучению спектров составных частей хлопчатника установлен широкий диапазон аналитических приложений спектроскопических

методов в сельском хозяйстве, биологии фотофизике и фотохимии природных полимеров. Эти данные обобщены в монографии «Спектроскопия хлопка», опубликованной в 1976 году в издательстве «Наука», г. Москва, в дальнейшем они легли в основу докторской диссертации, успешно защищенной в 1984 году.

Академик Р.Марупов совместно со своим учениками (П.Бободжанов, И.Юсупов, С.Исломов, Т.Шукуров) и научным консультантом профессором Г.И.Лихтенштейном впервые изучили структуру хлопка и хлопковой целлюлозы и молекулярную динамику хлопковых волокон различного генетического происхождения, а также влияние заболевания хлопчатника вилтом на эти параметры и процесс предпосевной обработки семян хлопчатника гамма-радиацией. Важные работы с применением ЭПР-спектроскопии и спиновых меток проведены под руководством и непосредственном участии академика Р.Марупова. Результаты этих исследований отражены в двух монографиях: «Спектроскопия волокнообразующих полимеров» и «Молекулярная динамика целлюлозного волокна».

Диапазон научных исследований Р.Марупова широк и охватывал большой круг вопросов, посвященных исследованию меж- и внутримолекулярных взаимодействий в гидроксилсодержащих биологически активных производных ацетиленового ряда. Методами молекулярной спектроскопии им решены фундаментальные вопросы пространственного расположения и возможных конформаций функциональных групп в зависимости от их химического строения, что имеет принципиальное значение в синтезе лекарственных препаратов на их основе.

В контексте сказанного, последние 10-15 лет академик Р.Марупов увлеченно и с большой отдачей занимался исследованием влияния экологических факторов на процесс биосинтеза и формирования функциональных групп ряда лекарственных растений Таджикистана, уникального края, богатого своей флорой и фауной.

Академик Р.Марупов уделял большое внимание вопросам подготовки кадров высокой квалификации. Им подготовлен ряд кандидатов и докторов наук.

Как член диссертационных советов по присуждению ученых степеней при Физико-техническом институте им. С.У.Умарова (создан в 2017 году), Таджикском национальном университете, Таджикском техническом университете им. академика М.С.Осими, Институте химии им. В.И.Никитина, Р.Марупов проводит большую работу по подготовке научных кадров, способствуя развитию фундаментальных проблем современной физико-химической науки в республике. Он являлся членом редколлегии журналов «Доклады АН Республики Таджикистан», «Известия АН Республики Таджикистан».

Плодотворная научная деятельность Р.Марупова отмечена медалями «За доблестный труд», «В ознаменование 100-летия со дня рождения В.И. Ленина» и «Ветеран труда». Ему присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Республики Таджикистан». В 2003 году за цикл исследований, посвященных молекулярной динамике хлопковых волокон Р.Марупов удостоен звания Лауреата Государственной премии Республики

Таджикистан имени Абуали ибн Сино в области науки и техники, в 2017 году награжден Орденом «Дӯстлик» Республики Узбекистан.

Академик Рахим Марупов прошел путь от старшего лаборанта (1959) до заместителя директора по научной части Физико-технического института им. С.У. Умарова АН Таджикской ССР (1966-1986), директора института (1991-1999), с 2002 года являлся Почетным директором института. На какой бы должности ни работал, он был требователен к себе и к своим сотрудникам, принципиален в решении важных для науки и развития института вопросов.

Ушел из жизни академик Рахим Марупов, но его образ, образ руководителя–организатора, целеустремленного учёного, большого оптимиста, внесшего, несомненно, весомый вклад в развитие физической науки в Таджикистане, останется в благодарной памяти его коллег, учеников и сотрудников, друзей и близких.

Акад. Ф.Рахими, акад. Х.Х.Муминов, акад. С.Одинаев, Ф.Шокир,
Р.А.Кариева, Ф.Холмуродов, Т.Шукуров, И.Х.Юсупов, А.Холов