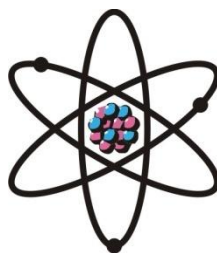


**ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК**

Журнал основан
в январе 1952 г.



№ 3 (184)
2021 г.

*Посвящается 70-летию
Национальной академии наук Таджикистана*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Х.Х.Муминов – главный редактор, академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Г.И.Кохирова** – зам.главного редактора, член-корреспондент, доктор физико-математических наук; **С.Х.Абдулаева** – ответственный секретарь; **О.Амирзода** – кандидат технических наук; **Х.М.Ахмедов** – академик, доктор химических наук; **П.Б.Бабаджанов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **С.А.Исхоков** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **З.В.Кобулиев** – член-корреспондент, доктор технических наук, профессор; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **С.О.Одинаев** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Ф.Рахими** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Т.Х.Салихов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Д.Усманов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

М.Илолов, Х.С.Кучакшоев, Дж.Ш.Рахматов. Дробные эволюционные стохастические дифференциальные уравнения	7
С.А.Исхоков. Вариационная задача Дирихле для некоторых классов вырождающихся эллиптических операторов	26
Н.Р.Раджабов. Переопределённая линейная система трёх интегральных уравнений Вольтерровского типа с тремя сингулярными областями	46

ИНФОРМАТИКА

З.Д.Усманов. Обзор результатов по применению гамма-классификатора	62
--	----

АСТРОНОМИЯ

Г.И.Кохирова. Достижения астрономической науки под руководством Национальной академии наук Таджикистана	74
--	----

ФИЗИКА

С.Одинаев. Исследования релаксационных процессов, явлений переноса, упругих и диэлектрических свойств жидкостей и растворов электролитов	95
---	----

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Д.Х.Халиков. Роль кислоты в реакции химического превращения протопектина на пектиновые полисахариды	114
И.Н.Ганиев, Дж.Х.Джайлоев. Физико-химические свойства алюминиевого сплава АЖ2.18 с щелочноземельными металлами	128

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

У.М.Мирсаидов. Исследования в области химии энергоёмких веществ в Институте химии им.В.И.Никитина НАН Таджикистана	147
---	-----

ЭНЕРГЕТИКА

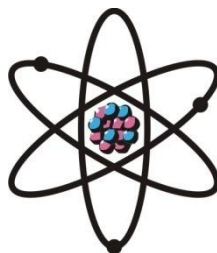
Х.М.Ахмедов, М.Г.Хулми, С.Расулов. Анализ состояния и перспектив использования солнечных водяных насосов для орошения и водоснабжения	156
--	-----

РАДИОЭКОЛОГИЯ

И.Мирсаидзода (И.У.Мирсаидов). Исследования в области физико-химических основ переработки урансодержащих материалов и радиоэкологии	165
--	-----

ШҮЪБАИ
ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,
ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА

Маҷалла аз мохи
январ соли 1952
нашр мешавад



№ 3 (184)
с. 2021

ХАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:

Ҳ.Ҳ.Муминов – сармуҳаррир, академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Кохирова Г.И.** – муовини сармуҳаррир, узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **С.Ҳ.Абдулоева** – котиби масъул; **О.Амирзода** – номзадӣ илмҳои техникӣ; **Ҳ.М.Аҳмедов** – академик, доктори илми химия; **П.Б.Бобочонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **И.Н.Ғаниев** – академик, доктори илми химия, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **С.А.Исҳоқов** – узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.В.Кобулиев** – узви вобаста, доктори илмҳои техникӣ, профессор; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор; **С.Х.Неъматуллоев** – академик, доктори илмҳои техникӣ; **С.О.Одинаев** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Ф.Раҳимӣ** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҳ.Раҳмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Рачабов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Т.Х.Салихов** – узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҷ.Усмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **А.Р.Файзиев** – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва минералогия, профессор; **Ҷ.Х.Холиқов** – академик, доктори илми химия, профессор.

МУНДАРИҶА

МАТЕМАТИКА

М.Илолов, Х.С.Кучакшоев, Ҷ.Ш.Раҳматов. Муодилаҳои касрии эволюсионии стохастикӣ дифференсиалӣ.....	7
С.А.Исҳоқов. Масъалаи вариатсионии Дирихле барои баъзе синфҳои операторҳои эллиптикӣ таназзулбанда.....	26
Н.Рачабов. Системаи се муодилаи хатии барзиёд муайяншудаи интегралӣ намуди Волтерра бо се соҳаи сингулярӣ.....	46

ИНФОРМАТИКА

З.Ҷ.Усмонов. Баррасии натиҷаҳо доир ба татбиқи гамма-таснифгар.....	62
--	----

АСТРОНОМИЯ

Г.И.Қохирова. Дастовардҳои илми астрономӣ таҳти роҳнамоии Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон 74

ФИЗИКА

С.Одинаев. Тадқиқоти равандҳои релаксационӣ, ҳодисаҳои интиқол, чандирӣ ва диэлектрикии моеъҳо ва маҳлулҳои электролитӣ 95

ХИМИЯИ ФИЗИКАВӢ

Қ.Х.Холиқов. Нақши кислота дар реаксияи тағйирёбии химиявии протопектин ба полисахаридҳои пектинӣ 114

И.Н.Ғаниев., Қ.Қ.Қайлоев. Хосиятҳои физикавӣ-химиявии хӯлаи алюминий АЖ2.18 бо металлҳои ишқорзаминӣ 128

ХИМИЯИ ҒАЙРИОРГАНИКӢ

У.М.Мирсаидов. Тадқиқот дар соҳаи химияи моддаҳои энергияталаб дар Институти химияи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон 147

ЭНЕРГЕТИКА

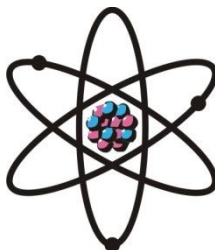
Ҳ.М.Аҳмедов, М.Г.Хулми, С.Расулов. Таҳлили ҳолат ва дурнамои истифодаи обкашҳои офтобӣ барои обёрӣ ва обтаъминкунӣ 156

РАДИОЭКОЛОГИЯ

И.Мирсаидзода (И.У.Мирсаидов). Тадқиқот дар соҳаи асосҳои физикӣ-химиявии коркарди моддаҳои урандор ва радиоэкология 165

**DEPARTMENT OF
PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES**

The journal was established
in January 1952



№ 3 (184)
2021

EDITORIAL BOARD

Prof. **Kh.Kh.Muminov**, Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; **G.I.Kokhirova**, Doctor of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **S.H.Abdulaeva**, Secretary; **O.Amirzoda** – Doctor of Engineering; **Kh.M.Akhmedov**, Doctor of Chemistry; Prof. **P.B.Babadzhanov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **A.R.Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **M.I.Iolov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **I.N.Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **D.Kh.Khalikov**, Doctor of Chemistry; Prof. **S.A.Iskhokov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.V.Kobuliev**, Doctor of Engineering; Prof. **U.M.Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; **S.Kh.Negmatullaev**, Doctor of Engineering; Prof. **S.O.Odinaev**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **N.R.Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **F.Rakhimi**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.Kh.Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **T.Kh.Salihov**, Doctor of Engineering; Prof. **Z.D.Usmanov**, Doctor of Physical and Mathematical.

CONTENTS

MATHEMATICS

- M.Iolov, Kh.S.Kuchakshoyev, J.Sh.Rakhmatov.** Fractional evolutionary stochastic differential equations..... 7
- S.A.Iskhokov.** Variational Dirichlet problem for some classes of degenerate elliptic operators..... 26
- N.Rajabov.** Three linear overdetermined system Volterra type integral equation with singular domains..... 46

INFORMATICS

- Z.D.Usmanov.** Overview of results on application of gamma classifier 62

ASTRONOMY

- G.I.Kokhirova.** Achievements of astronomic science under the leadership of the National Academy of Sciences of Tajikistan 74

PHYSICS

S.Odinaev. A studying of relaxation processes, transport phenomena, elastic and dielectric properties of liquids and electrolyte solutions **95**

PHYSICAL CHEMISTRY

D.Kh.Khalikov. Role of acid in the reaction of chemical conversion of protopectin to pectin polysaccharides **114**

I.N.Ganiev, J.H.Dzhayloev. Physical and chemical properties of aluminum alloy AlFe 2.18 with alkaline earth metals **128**

INORGANIC CHEMISTRY

U.M.Mirsaidov. Research in the field of energy-intensive substances chemistry in V.I.Nikitin Institute of chemistry of NAS Tajikistan..... **147**

ENERGETICS

H.M.Akhmedov, M.G.Khulmi, S.Rasulov. Analysis of the condition and prospects of the use of solar water pumps for irrigation and water supply **156**

RADIOECOLOGY

I.Mirsaidzoda (I.U.Mirsaidov). Research in the field of physical and chemical basis of processing of uranium-containing materials and radioecology **165**

УДК 517.927.4

М.ИЛОЛОВ^{1,2}, Х.С.КУЧАКШОЕВ³, ДЖ.Ш.РАХМАТОВ¹

**ДРОБНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

¹*Центр инновационного развития науки и новых технологий*

Национальной академии наук Таджикистана

²*Институт математики им. А.Джураева*

Национальной академии наук Таджикистана

³*Университет Центральной Азии*

Поступила в редакцию 07.06.2021 г.

Настоящая статья посвящена теории разрешимости стохастических эволюционных уравнений дробного порядка, возмущенных аддитивным слагаемым типа белого шума Балакришнана. Полученные здесь результаты могут найти применение при анализе разнообразных стохастических релаксационных и диффузионных процессов в сложных пористых и фрактальных средах.

Ключевые слова: белый шум, стохастический интеграл Балакришнана, дробные производные, оператор Гильберта-Шмидта, резольвентные семейства операторов.

1. Введение

Теория стохастических эволюционных уравнений и ее приложения получили существенное развитие за последние десятилетия. Это связано с одной стороны с бесконечномерным анализом полугрупп и эволюционных операторов решений, а с другой с тем, что их конечномерные реализации часто возникают в качестве математических моделей в физике, технике, химии, математической биологии, финансовой математике и других областях науки. Обобщение теории Ито-Стратоновича-Скорохода на бесконечномерном

Адрес для корреспонденции: Илолов Мамадшо, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАНТ, E-mail: ilolov.mamadsho@gmail.com

случае берет своё начало в работах [1, 2]. В рамках этой теории, в частности, было исследовано линейное дифференциальное уравнение Ито с мультипликативным шумом [3-6]. В работах [7-10] был предложен иной подход к анализу стохастических уравнений на основе производной Нельсона-Гликлиха. В работе [10] установлено, что производная Нельсона-Гликлиха от винеровского процесса хорошо согласуется с предсказаниями теории броуновского движения Эйнштейна-Смолуховского, поэтому соответствующий стохастический процесс был назван "белым шумом".

В настоящей работе изучается класс стохастических уравнений дробного порядка, возмущенных абсолютным случайным процессом или белым шумом типа Балакришнана. Такой тип белого шума впервые введен в монографии [11].

Рассматривается задача Коши вида

$${}^c D_t^\alpha u(t) + Au(t) = f(u(t)) + B\omega(t), u(0) = u_0, \quad (1.1)$$

где ${}^c D_t^\alpha$ – дробная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, A – почти секториальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H , $f: H \rightarrow H$ – нелинейное заданное отображение, $\omega(t)$ – абсолютный случайный процесс (белый шум в смысле Балакришнана) в другом сепарабельном гильбертовом пространстве H_n , B – линейный оператор, определенный в H со значениями в пространстве операторов из H_n в H . При анализе разрешимости задачи Коши (1.1) стандартным требованием является порождение оператором A резольвентных семейств операторов $\{S_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ и $\{Z_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$. Это условие гарантирует корректность задачи Коши для детерминированного, невозмущенного однородного уравнения

$${}^c D_t^\alpha u(t) + A(t)u(t) = 0.$$

Далее нужно потребовать от нелинейного отображения $f(\cdot)$ условия типа Липшица. Условия, накладываемые на оператор B , тесно связаны со свойствами абсолютного случайного процесса (белого шума). Далее, всюду в работе под случайным процессом $\omega(t)$ будем понимать белый шум в смысле Балакришнана. Вводится в рассмотрение пространство $W = L_2((0, T), H)$, где $0 < T \leq \infty$, которое будет сепарабельным гильбертовым пространством, если таковым является H . Далее через ω и μ обозначены элементы пространства W и стандартная гауссова мера на W соответственно. Так определенное пространство W называется белым шумом, а каждый его элемент $\omega \in W$ реализацией белого шума.

Положим далее

$$W(t, \omega) = \int_0^t \omega(s) ds.$$

Функция $W(t, \omega)$ непрерывна по t при фиксированном ω , и при $t > s$ разность $[W(t, \omega) - W(s, \omega)]$ является гауссовой случайной величиной, с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной $(t-s) \|h\|^2$, где $h \in W$. Тем не менее, функция $[W(t, \omega), h]$ не может быть реализацией винеровского процесса ввиду того, что такая реализация имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале при фиксированном ω .

Модель пространственно-временной корреляции Балакришнана является одной из возможных моделей, основанной на дельта-функции. Другой подход основан на теории мартингалов и венеровских процессов. Если ограничиться рассмотрением лишь линейных операторов, то оба подхода приводят к одинаковым результатам. При использовании нелинейных операторов появляется глубокое различие между этими подходами (см. напр. [12-14]).

Настоящая работа состоит из введения, списка литературы и пяти параграфов. В §2 изложены основные определения и результаты теории интегралов и производных дробного порядка. §3 посвящен изучению резольвентных семейств операторов $S_a(t)$ и $Z_a(t)$. В §4 приводятся основные свойства белого шума Балакришнана и соответствующий стохастический интеграл. Линейный случай задачи Коши изучается в §5, а нелинейный в §6.

Интегралы и производные дробного порядка

Пусть $J = [0, T]$, X – банахово пространство, N – множество натуральных чисел, \mathbb{R} – действительная ось, $L(J, X)$ – пространство интегрируемых в смысле Лебега функций, определенных на J со значениями в X , $AC^m(J, X)$ – пространство $(m-1)$ – раз непрерывно дифференцируемых на JX -значных функций с абсолютно непрерывной производной порядка m , $W^{m,1}(J, X)$ пространства Соболева.

Определение 2.1. *Интеграл дробного порядка $\alpha > 0$ от функции $f \in L^1(J, X)$ имеет вид*

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}}, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

при условии, что правая часть поточечно определена на J , где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера второго рода.

Определение 2.2. Производная Лиувилля дробного порядка $a > 0$ от функции f имеет вид

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(s)ds}{(t-s)^{(\alpha+1-n)}}, \quad t > 0, \quad n-1 < \alpha < n. \quad (2.2)$$

Интеграл (2.1) для удобства записывается в виде

$$I_t^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t)$$

для функции

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t \leq 0. \end{cases}$$

Приведем краткую сводку основных свойств интеграла (2.1) и производной (2.2) дробного порядка в виде следующего утверждения (см. напр. [15-18]).

Лемма 2.3. Пусть $\beta > 0$ и $m = [\beta]$.

Если $f \in L^1(J, X)$, то $g_{m-\beta} * (I_t^\alpha f) \in W^{m,1}(J, X)$ и ${}^{RL}D_t^\beta I_t^\beta f(t) = f(t)$ н.в.

Если $a > \beta$ и $f \in L^1(J, X)$, то ${}^{RL}D_t^\beta I_t^\alpha f(t) = I_t^{\alpha-\beta} f(t)$ н.в., в частности, если $a > k$, то $D^k I_t^\beta f(t) = I_t^{\beta-k} f(t)$ н.в.

Если $p > \frac{1}{q}$ и $f \in L^p(J, X)$, то $I^\alpha f$ непрерывна на J .

Производная Римана-Лиувилля не очень удобна при моделировании реальных физических процессов. Поэтому вводится связанная с именем М.Капуто модифицированная дробная производная.

Определение 2.4. Производная Капуто дробного порядка $a > 0$ от функции $f : J \rightarrow X$ имеет вид

$${}^c D_t^\alpha f(t) = {}^{RL}D^\alpha \left[f(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^k(0) \right], \quad t > 0, \quad n-1 < \alpha < n. \quad (2.3)$$

Легко видеть, что производная Капуто от постоянной функции равна нулю. Заметим также, что интегралы во всех определениях (2.1), (2.2) и (2.3) понимаются в смысле Бохнера.

Лемма 2.5. Пусть $\alpha \in (0,1)$ и $h : J \rightarrow X$ непрерывная функция. Функция $u \in C(J, \mathbb{R})$, заданная в виде

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

является единственным решением следующей дробной задачи Коши

$${}^c D_t^\alpha u(t) = h(t), t \in J$$

$$u(0) = u_0.$$

Замечание 2.6. Если вместо непрерывной функции h в лемме 2.2 взять интегрируемую функцию, то результат леммы остается верным.

Почти секториальные операторы и основные свойства

Пусть X банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, A линейный замкнутый оператор, $D(A), R(A)$ и $\sigma(A)$ соответственно, область определения, область значения и спектр оператора A .

Определение 3.1. (см. [19]). Пусть $-1 < \gamma < 0$ и $0 \leq \delta \leq \pi$. Через $\Theta_\delta^\gamma(X)$ обозначим множество линейных замкнутых операторов $A: D(A) \subseteq X \rightarrow X$ таких, что:

1) спектр $\sigma(A)$ принадлежит сектору

$$\Sigma_\mu = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg \lambda| \leq \mu U\{0\}\};$$

2) для каждого $\sigma < \mu < \pi$ существует постоянная $c_\mu > 0$ такая, что

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq c_\mu |\lambda|^\gamma \text{ для всех } \lambda \in \Sigma_{\pi/2-\delta}^0.$$

Введем семейство операторов

$$\{T(t)\}_{t \in \Sigma_{\pi/2-\delta}^0}, \{S_\alpha(t)\}_{t \in \Sigma_{\pi/2-\delta}^0}, \{z_\alpha(t)\}_{t \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}-\delta}^0}, \text{ ассоциированное с оператором } A \text{ сле-}$$

дующим образом

$$T(t) = e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} e^{-t\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, t \in \Sigma_{\pi/2-\delta}^0, \lambda \in \mathbb{C}(-\infty, 0];$$

$$S_\alpha(t) = E_\alpha(-\lambda t^\alpha)(A)^\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} E_\alpha(-\lambda t^\alpha)(\lambda - A)^{-1} d\lambda, t \in \Sigma_{\pi/2-\delta}^0, \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\infty, 0];$$

$$Z_\alpha(t) = E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)(\lambda - A)^{-1} d\lambda, t \in \Sigma_{\pi/2-\delta}^0, \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\infty, 0], \quad (3.1)$$

где $E_{\alpha,\alpha}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha(k+1))}$, $\alpha > 0, \lambda \in \mathbb{C}$ – двухпараметрическая функция Миттагале

Лефлера $E_{\alpha}(\lambda) = E_{1,\alpha}(z)$, контур $\Gamma_{\theta} = \{\mathbb{R}_+ e^{i\theta}\} \cup \{\mathbb{R}_+ e^{-i\theta}\}$ ($0 < \theta < \pi$) ориентирован так, что S_{θ} открытый сектор $\Sigma_{\theta}^0 = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg \lambda| < \theta\} \cup \{0\}$ лежит по правой стороне от Γ_{θ} .

Отметим, что семейство $\{T(t)\}_t \in \Sigma_{\pi/2-\delta}^0$ является полугруппой в силу свойства

$$T(s+t) = T(s)T(t)$$

для всех $\Sigma_{\pi/2-\delta}^0$, кроме того, оператор $T(t)$ характеризуется как резольвента $(\lambda + A)^{-1}$ оператора $-A$, которая является преобразованием Лапласа полугруппы $T(t)$, то есть

$$(\lambda + A)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt, \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что между оператором A и полугруппой $T(t)$ существует взаимное однозначное соответствие. Из определения (2.1) следует, что операторы $S_{\alpha}(t)$ и $Z_{\alpha}(t)$ могут быть представлены через $T(t)$ следующим образом

$$S_{\alpha}(t)x = \int_0^{\infty} \Phi_{\alpha}(s) T(st^{\alpha}) x ds, t \in \Sigma_{\pi/2-\delta}^0, x \in D(S_{\alpha}(t)), \quad (3.3)$$

$$Z_{\alpha}(t)x = \int_0^{\infty} \alpha \Phi_{\alpha}(s) T(st^{\alpha}) x ds, t \in \Sigma_{\pi/2-\delta}^0, x \in D(Z_{\alpha}(t)), \quad (3.4)$$

где функция $\Phi_{\alpha}(s)$ (см. напр. [19]) определяется так

$$\Phi_{\alpha}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{(k-1)!} \Gamma(k\alpha) \sin(k\pi\alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Опишем основные свойства операторов $S_{\alpha}(t)$ и $Z_{\alpha}(t)$ в виде следующих предложений.

Лемма 3.2. Пусть $A \in \Theta_{\delta}^{\gamma}$, $-1 < \gamma < 0, 0 < \delta < \pi/2$. Имеют место следующие утверждения:

(1) Для каждого $t \in \Sigma_{\pi/2-\delta}^0$, $S_{\alpha}(t)$ и $Z_{\alpha}(t)$ линейные и ограниченные операторы на X . Более того, существуют постоянные $C_S = C(\alpha, \gamma) > 0$ и $C_Z = C(\alpha, \gamma) > 0$ такие, что для всех $t > 0$

$$\|S_\alpha(t)\| \leq C_S t^{-\alpha(1+\gamma)} \text{ и } \|Z_\alpha(t)\| \leq C_Z t^{-\alpha(1+\gamma)}.$$

(2) Для $t > 0$, семейства $S_\alpha(t)$ и $Z_\alpha(t)$ непрерывные в равномерной операторной топологии. Более того, для каждого $r > 0$ равномерно непрерывные на $[r, \infty)$.

(3) Для каждого фиксированного $t \in \Sigma_{\pi/2-\delta}^0$ и всех $x \in D(A)$,

$$(S_\alpha(t) - I)x = \int_0^t -s^{\alpha-1} A Z_\alpha(s) x ds.$$

(4) Для всех $x \in D(A)$ и $t > 0$

$${}^c D_t^\alpha S_\alpha(t)x = -A S_\alpha(t)x.$$

(5) Для всех $t > 0$ $S_\alpha(t) I_t^\alpha (t^{\alpha-1} Z_\alpha(t))$.

(6) Пусть $\beta > 1 + \gamma$. Для всех $x \in D(A^\beta)$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} S_\alpha(t)x = x$.

Лемма 3.3. ([25]). Пусть $A \in \Theta_\delta^\gamma(X)$, $-1 < \gamma < 0$, $0 < \delta < \pi/2$, и пусть $0 < \beta < 1 - \gamma$. Тогда:

(1) Область значений $R(Z_\alpha(t))$ семейство $Z_\alpha(t)$ для $t > 0$ содержится в $D(A^\beta)$.

(2) $S'_\alpha(t)x = -t^{\alpha-1} A Z_\alpha(t)x$, и $S'_\alpha(t)x$ для $x \in D(A)$ локально интегрируема на $(0, \infty)$.

(3) Для всех $x \in D(A)$ и $t > 0$, $\|A S^\alpha(t)x\| \leq c t^{-\alpha(1+\gamma)} \|Ax\|$, где c – постоянная зависящая от γ, α .

(4) Для каждого фиксированного $t \in \Sigma_{\pi/2-\delta}^0$, $Z_\alpha(t)$ является линейным ограниченным оператором на X^β . Более того, существует положительная постоянная C_0 такая, что для всех $t > 0$

$$\|A^\beta Z_\alpha(t)x\| \leq \alpha C_0 \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha(\gamma+\beta))} t^{-\alpha(\gamma+\beta+1)} \|x\|.$$

Лемма 3.4. Если резольвента $(\lambda + A)^{-1}$ компактная для каждого $\lambda > 0$, то $S_\alpha(t)$ и $Z_\alpha(t)$ компактные для каждого $t > 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Покажем, что

$$\zeta_\varepsilon(t) = \int_\varepsilon^\infty \Phi_\alpha(s) T(st^\alpha - \varepsilon t^\alpha) ds, \xi_\varepsilon(t) = \int_t^\infty \Phi_\alpha(s) T(st^\alpha) ds.$$

Тогда, $\xi_\varepsilon(t) = T(\varepsilon t^\alpha) \zeta_\varepsilon(t)$ и легко доказать, что для каждого $t > 0$ ξ_ε линейный ограниченный оператор на X . Далее с помощью компактности $T(t), t > 0$ мы увидим, что $\xi_\varepsilon(t)$ компактный для каждого $t > 0$.

С другой стороны, заметим, что

$$\left\| \xi_\varepsilon(t) - S_\alpha(t) \right\| \leq \left\| \int_0^\infty \Phi_\alpha(s) T(st^\alpha) ds \right\| \leq \int_0^\infty \Phi_\alpha(s) s^{-1-\gamma} ds.$$

Следовательно, из компактности $\xi_\varepsilon(t), t > 0$ следует, что $S_\alpha(t)$ компактно для каждого $t > 0$. С помощью аналогичных рассуждений мы можем сделать заключение, что $Z_\alpha(t)$ компактный для каждого $t > 0$. Лемма доказана.

Белый шум и стохастический интеграл Балакришнана

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство и $W = L_2((0, T), H)$ – гильбертово пространство всех измеримых функций

$$f : [0, T] \rightarrow H$$

таких, что

$$\int_0^T \|f(t)\|^2 < \infty,$$

где $\|\cdot\|$ – норма в H .

Определим цилиндрическую меру μ на (W, Σ) (Σ – алгебра цилиндрических множеств) с помощью

$$\mu(E) = \int_{\tilde{B}} G(x) dx,$$

где \tilde{B} – борелевское множество в \mathbb{R}^n изоморфное к B – основание цилиндра E , и $G(x)$ – n -мерная гауссова плотность с нулевым средним и единичной ковариацией. Такая мера называется гауссовой мерой на W .

Пусть \mathbb{H} сепарабельное предгильбертово пространство. Очевидно, что $H \subset \mathbb{H}$. Измеримое по Борелю отображение $f : W \rightarrow \mathbb{H}$ называется случайным вектором, если гауссова мера μ может быть расширена до счетно-аддитивной на σ – алгебре множеств вида $(f^{-1}(B), B$ – борелевское множество на $\mathbb{H})$.

Если $H = \mathbb{R}^1$, то f называется случайной величиной.

Под конечно-аддитивным белым шумом в W будем понимать процесс с траекторией в $\omega(\cdot)$ в W с гауссовой мерой μ и с характеристической функцией

$$C(h) = E[\exp\left(i\int_0^T [N(t), h(t)] dt\right)] = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T [h(t), h(t)] dt\right).$$

Эта мера не может быть расширена до счетно аддитивной на W . Пусть $f(\cdot)$ означает любую измеримую по Борелю функцию, отображающую W в другое (сепарабельное) гильбертово пространство H_r . В общем случае не надо определять распределение над H_r . Мы должны рассмотреть только специальный класс таких функций, которые имеют определенный предельный смысл. Таким образом, пусть P_N любая последовательность конечномерных проекторов на W таких, что P_N сильно сходятся к тождественному оператору. Тогда для каждого N , $f(P_N \omega)$ является случайной величиной. Предположим теперь, что

$$\{f(P_N \omega)\}$$

является последовательностью Коши по вероятностной мере. Тогда

$$C(h) = \lim_N C_N(h), \quad h \in H_r, \quad (4.1)$$

где

$$C_N(h) = E[\exp(i[f(P_N \omega), h])]$$

определяет счетно-аддитивную меру на борелевских множествах пространства H_r . Если предельная характеристическая функция $C(h)$ не зависит от частичной последовательности проекторов P_N , то мы назовем $f(\cdot)$ физической случайной величиной (ФСВ), и соответствующую предельную меру определим как распределение $f(\cdot)$. Напомним в этой связи известную предельную теорему Прохорова [16]: для каждого борелевского множества B в H_r

$$\mu_N(B) \rightarrow \mu_f(B), \quad \text{если} \quad \mu_f(\partial B) = 0, \quad (4.2)$$

где $\mu_N(\cdot)$ является распределением $f(P_N \omega)$.

Теперь, пользуясь соотношениями (4.1) и (4.2), приведем характеристику ФСВ. С этой целью воспользуемся следующей концепцией непрерывности.

Определение 4.1. Пусть H^1 , H^2 действительные сепарабельные гильбертовы пространства. Отображение $F: H^1 \rightarrow H^2$ является непрерывным в $x \in H^1$ относительно S

– топологии, если для любого $\varepsilon > 0$ существует оператор Гильберта-Шмидта $L_\varepsilon(x): H^1 \rightarrow H^1$ такой, что из

$$\|L_\varepsilon(x)(x-x')\| < 1 \quad (4.3)$$

следует

$$\|F(x) - F(x')\| < \varepsilon, \quad (4.4)$$

F является равномерно S - непрерывным на $U \subset H_1$, если оператор Гильберта-Шмидта в (4.3) не зависит от $x \in U$.

Определение 4.2. *Отображение $F: H^1 \rightarrow H^2$ называется равномерно S -непрерывным в окрестности начала, если F равномерно S -непрерывно на множествах*

$$U_n = \{u \in H_1 \mid \|L_n u\| \leq 1\},$$

где $\{L_n\}_n$ последовательность операторов Гильберта-Шмидта такая, что

$$\{L_n\}_{HS} \rightarrow 0 \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = H^1.$$

Совершенно очевидно, что равномерно S -непрерывное отображение является также равномерно S -непрерывным в окрестности начала.

С учетом неравенств (4.3), (4.4) и определения (4.2) можно привести критерий, характеризующий ФСВ.

Лемма 4.3. *Достаточным условием того, что $F: H^1 \rightarrow H^2$ является ФСВ будет его равномерная S -непрерывность в окрестностях начала.*

Стохастическое эволюционное уравнение с линейным сносом

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – почти секториальный оператор, то есть $A \in \Theta_\sigma^\gamma(H)$, $-1 < \gamma < 0$, $0 < \sigma < \pi/2$. В соответствии с результатами раздела 4 определим функциональное пространство $W = L_2((0, T), H)$, где $T \leq \infty$. Пусть, кроме того, H_n – другое сепарабельное гильбертово пространство (здесь n – является сокращением слова noise – шум) и положим $W_n = L_2((0, T), H_n)$. Обозначим через B линейный ограниченный оператор, действующий из H_n в H .

Рассмотрим эволюционное уравнение вида

$${}^c D_t^\alpha u(t) + Au(t) = B\omega(t), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \quad (5.1)$$

где ${}^c D_t^\alpha$ – дробная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, $A \in \Theta_\sigma^\gamma(H)$, $-1 < \gamma < 0$, $0 < \sigma < \pi/2$, $\omega(t)$ – белый шум со значениями в другом сепарабельном гильбертовом пространстве H_n , B – линейный оператор из H в H_n .

Так как мы хотим подчеркнуть зависимость решения от случайного входа ω , то для него будем использовать обозначение $u(t, \omega)$. Уравнение

$$\begin{aligned} [u(t, \omega), v] = & [u(0), v] + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [u(t, \omega), A^* v] d\tau + \\ & + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [B\omega(\tau), v] d\tau, \quad v \in D(A^*) \end{aligned} \quad (5.2)$$

имеет решение, определяемое формулой

$$u(t, \omega) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) B\omega(\tau) d\tau \quad (5.3)$$

и для каждого ω это решение единственно в классе слабо непрерывных функций, удовлетворяющих уравнение (5.2). Здесь $S_\alpha(t)$, $Z_\alpha(t)$ – семейства резольвентных операторов, введенных в разделе 3. Утверждение непосредственно следует из теоремы 4.8.3 монографии [11] и работы [20]. Далее, используя формулу (5.3), вычислим корреляционный оператор, соответствующий процессу $u(t, \omega)$. Поскольку элемент $u(t, \omega)$ определен для каждого t , то его можно определить для каждого момента времени t . Предполагая u_0 заданным, получим

$$\begin{aligned} E\left([u(t, \omega) - S_\alpha u_0 v][u(\tau, \omega) - S_\alpha u_0 z]\right) = \\ E\left(\int_0^t [(t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) B\omega(\tau), v] d\tau \int_0^t [(\tau-\sigma)^{\alpha-1} Z_\alpha(\tau-\sigma) B\omega(\tau), z] d\sigma\right) \\ = E\left(\int_0^t [\omega(\tau), B^*(t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha^*(t-\tau)v] d\tau \int_0^t [\omega(\sigma), B^*(\tau-\sigma)^{\alpha-1} Z_\alpha^*(\tau-\sigma)v] d\sigma = \right. \\ \left. = \int_0^t [\omega(\sigma), B^*(t-\sigma)^{\alpha-1} Z_\alpha^*(\tau-\sigma)v, B^*(\tau-\sigma)^{\alpha-1} Z_\alpha^*(\tau-\sigma)z] d\sigma = \right. \\ \left. [v, (t-\tau)^{\alpha-1} R_\alpha(\tau, \tau)z], t \geq \tau. \right. \end{aligned}$$

Следовательно, корреляционный оператор $R_\alpha(t, \tau)$ определяется формулой

$$R_\alpha(t, \tau) = S_\alpha(t - \tau)R_\alpha(\tau, \tau), \quad t \geq \tau, \quad (5.4)$$

где

$$R_\alpha(\tau, \tau)u_0 = \int_0^\tau (\tau - \sigma)^{\alpha-1} Z_\alpha(\tau - \sigma) B B^* Z_\alpha^*(\tau - \sigma) u_0 d\sigma. \quad (5.5)$$

Из последнего представления непосредственно следует равенство

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha [R_\alpha(\tau, \tau)u_0, v] &= [R_\alpha(\tau, \tau)u_0, v] + \\ &+ [R_\alpha(\tau, \tau)u_0, A^* v] + [B^* u_0, A^* v] R_\alpha(0, 0) = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

для всех u_0, v из области определения $D(A^*)$. Обратное, уравнение (5.6) имеет единственное решение, и оно определяется формулой (5.5).

Далее, для каждого u_0 справедливо равенство

$$[R_\alpha(\tau, \tau)u_0, u_0] = \int_0^\tau \|B^* S^*(\tau - \sigma)u_0\|^2 d\sigma,$$

и поэтому эта величина не убывает при $\tau \geq 0$.

Положим

$$[R_{\infty}u_0, u_0] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [R_\alpha(\tau, \tau)u_0, u_0].$$

Предел справа конечен, если, например, выполнено условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|S(t)\| = \omega_0 < 0. \quad (5.7)$$

В этом случае оператор R_{∞} будет линейным ограниченным оператором, определенным равенством

$$[R_{\infty}A^*u_0, v] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [R_\alpha(\tau, \tau)u_0, v], \quad u_0, v \in H. \quad (5.8)$$

С учетом уравнения (5.6) можно считать, что R_{∞} удовлетворяет уравнению

$$[R_{\infty}A^*u_0, v] + [R_{\infty}u_0, A^*v] + [B^*u_0, B^*v] = 0 \quad (5.9)$$

для всех $u_0, v \in H$ из области определения оператора A^* .

Конечно, условие (5.7) не является необходимым для того, чтобы оператор R_{∞} был определен корректно. В качестве примера, можно рассмотреть случай компактной полугруппы такой, что $S(t)Bx = \exp(-\zeta t)x$, $\zeta > 0$. Отметим, что условие

$$[R_\alpha(\tau, \tau)u_0, u_0] = 0 \text{ влечет } u_0$$

вовсе не означает, что ноль принадлежит резольвентному множеству. Этот факт отражает специфику бесконечномерного случая.

Дело в том, что в конечномерном случае оператор $R(\tau, \tau)$ всегда компактен.

Далее, пусть

$$\tilde{u}(t, \omega) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-s) B \omega(s) ds.$$

Тогда равенство

$$L\omega = \tilde{u}(\cdot, \omega) \quad (5.10)$$

определяет линейный ограниченный оператор, отображающий пространство W_n в W . Формула $\chi(c) = \mu[\omega : L\omega \in C]$ (см. раздел 4) определяет гауссову цилиндрическую меру на классе цилиндрических множеств из пространства W . Она является счетно-аддитивной на τ -алгебре борелевских множеств этого пространства тогда и только тогда, когда L – оператор Гильберта-Шмидта, или в том и только том случае, если $Z_\alpha(t)B$ – оператор Гильберта-Шмидта почти для всех $t \in (0, T)$ и

$$\int_0^t \int_0^t \left\| (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) B \right\|^2 d\tau dt < \infty.$$

Это условие удовлетворяется, если либо $Z_\alpha(t)$ является полугруппой Гильберта-Шмидта, либо – оператор Гильберта-Шмидта. Отметим, что

$$E((L\omega)(L\omega)^*) = LL^*.$$

Вышеизложенные рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пусть $f(\omega) = L(\omega)$, где L является любым линейным ограниченным преобразованием из H в H_n . $f(\cdot)$ является физической случайной величиной тогда и только тогда, когда L оператор Гильберта-Шмидта.

Стохастические эволюционные уравнения с нелинейным сносом

В этом разделе рассмотрим нелинейную дробную задачу Коши вида

$${}^c D_t^\alpha u(t) + Au(t) = f(u(t)) + B\omega(t), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \quad (6.1)$$

где $A \in \Theta_\sigma^\gamma$, $-1 < \gamma < 0$, $0 < \sigma < \pi/2$. Под слабым решением задачи (6.1) будем понимать функцию $u(t, \omega) : W_n = L_2((0, T), H_n) \rightarrow H$, удовлетворяющую уравнение

$$u(t, \omega) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) d\tau [f(u(\tau, \omega)) + B\omega(\tau)] d\tau, \quad (6.2)$$

μ_G – гауссова мера на $W_{n, \omega}$ – точка в H_n , $B: W \rightarrow W_n$ – ограниченный оператор и $f: H \rightarrow H$ – равномерное липшицево отображение такое, что

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \leq L(f) \|u_1 - u_2\|, \quad (6.3)$$

где $L(f)$ – постоянная зависящая от f .

Определим интегральный контур Γ_σ ориентированный так, что открытый сектор Σ_σ^0 лежит справа от Γ_σ . Пусть $\beta \in \mathbb{C}$ и $A \in \Theta_\sigma^\gamma(H)$, $-1 < \gamma < 0$, $0 < \sigma < \pi/2$. Тогда комплексная степень A^β оператора A определяется так

$$A^\beta = \lambda^\beta(A) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \lambda^\beta (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

В случае $Re(\beta) > 1 + \gamma$, $A^{-\beta}$ принадлежит $\mathcal{L}(H)$ – пространству всех линейных ограниченных операторов из H в H . Линейное пространство $H^\beta = D(A^\beta)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|_\beta = \|A^\beta u\|, \quad u \in H^\beta.$$

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Предположим, что условие (6.3) и $u(t, \omega)$ удовлетворяют задаче (6.1). Тогда для каждого $u_0 \in H^\beta$ функция $u(t, \omega)$ удовлетворяет уравнению*

$$u(t, \omega) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) f(u(\tau, \omega)) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) B\omega(\tau) d\tau. \quad (6.4)$$

Доказательство. Совершенно ясно, что в условиях теоремы, задача (6.1) эквивалентна решению интегрального стохастического уравнения вида

$$u(t, \omega) = u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Au(\tau, \omega) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(u(\tau, \omega)) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} B\omega(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (6.5)$$

Применяя к обеим частям (6.5) преобразование Лапласа, получим

$$U(s) = S^{\alpha-1}(S^\alpha + A)^{-1}u_0 + (S^\alpha + A)^{-1}F(s) + (S^\alpha + A)^{-1}G\omega(s), \quad (6.6)$$

где

$$U(s) = \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt, F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(u(t)) dt, G\omega(s) = \int_0^\infty e^{-ts} G\omega(t) dt, F(s), Res > \gamma i.$$

Используя леммы раздела 3, интегрируя по частям и учитывая соотношения (6.5), получим

$$\begin{aligned} & S^{\alpha-1}(S^\alpha + A)^{-1}u_0 + (S^\alpha + A)^{-1}G\omega(s) = \\ & = \int_0^\infty e^{-ts} S_\alpha(t) u_0 dt + \int_0^\infty e^{-ts} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) f(u(\tau)) dt \right) dt + \\ & \int_0^\infty e^{-ts} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) fB\omega(\tau) d\tau \right) dt. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Комбинируя (6.6) и (6.7) и учитывая теорему единственности преобразования Лапласа, получим

$$\begin{aligned} u(t, \omega) = & S_\alpha(t) u_0 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) f(u(\tau, \omega)) dt + \\ & + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) B\omega(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Теорема 6.2. Пусть выполнены условия теоремы 6.1. Тогда решение $u(t, \omega)$ задачи (6.1) является физической случайной величиной, если A оператор Гильберта Шмидта u /или B оператор Гильберта Шмидта.

Доказательство. Запишем уравнение (6.1) в интегральной форме

$$\begin{aligned} u(t, \omega) = & u_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Au(\tau, \omega) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(u(\tau, \omega)) d\tau + \\ & \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} B\omega(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.8)$$

ИЛИ ЭКВИВАЛЕНТНО

$$\begin{aligned}
u(t, \omega) = & S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(u(\tau, \omega)) d\tau + \\
& + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) B \omega(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Решение (6.9) является единственным слабым непрерывным решением задачи (6.1)

$$\begin{aligned}
[u(t, u), v] = & [u_0, v] + \int_0^t [(t-\tau)^{\alpha-1} u(t, \omega), v] d\tau + \\
& + \int_0^t [(t-\tau)^{\alpha-1} f(u(\tau, \omega)), v] d\tau + \int_0^t [(t-\tau)^{\alpha-1} B \omega(\tau), v] d\tau
\end{aligned}$$

для каждого $v \in D(A^*)$, где $D(A^*)$ – область определения сопряженного почти секториального оператора A^* . Мы хотим показать, что $u(\cdot, \omega)$ является физической случайной величиной.

Из (6.9) получим

$$\begin{aligned}
& \|u(\cdot, \omega_1) - u(\cdot, \omega_2)\|_\omega^2 \leq \\
& \leq 2 \int_0^{(T)} \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) [f(u(\tau, \omega_1)) - f(u(\tau, \omega_2))] d\tau \right\|^2 dt + \\
& \quad + 2 \int_0^{(T)} \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} B [\omega_1(\tau) - \omega_2(\tau)] d\tau \right\|^2 dt \leq \\
& \leq 2 \int_0^{(T)} \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) \right\|^2 \|f(u(\tau, \omega_1)) - f(u(\tau, \omega_2))\|^2 d\tau dt + \\
& \quad + 2 \int_0^{(T)} \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) B [\omega_1(\tau) - \omega_2(\tau)] d\tau \right\|^2 dt \leq \\
& \leq 2M(\alpha) e^{kT} L(f) \int_0^{(T)} \left\| \int_0^t \| (u(\tau, \omega_1)) - f(u(\tau, \omega_2)) \|_H^2 dt \right\|^2 d\tau dt +
\end{aligned}$$

$$+2 \int_0^{(T)} \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) B[\omega_1(\tau) - \omega_2(\tau)] d\tau \right\|_H^2 dt. \quad (6.10)$$

Пусть $m(t) = \int_0^t \left\| u(\tau, \omega_1) - f(u(\tau, \omega_2)) \right\|_H^2 d\tau,$

$$P(\alpha) = 2M(\alpha) e^{kT} L(f), \beta(T) = \\ = 2 \int_0^{(T)} \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) \times BL[\omega_1(\tau) - \omega_2(\tau)] d\tau \right\|_H^2 dt,$$

тогда (6.11) можно переписать так

$$M(T) \leq \int_0^{(T)} Nm(t) dt + B(T) \quad (6.11)$$

и из неравенства Гронуолла следует

$$m(t) \leq e^{NT} B(T) \quad (6.12)$$

или

$$\|u(\cdot, \omega_1) - u(\cdot, \omega_2)\|_W^2 \leq 2e^{NT} \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) B[\omega_1(\tau) - \omega_2(\tau)] d\tau \right\|_W^2.$$

Теперь поскольку $Z_\alpha(t-\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}$ является оператором Гильберта-Шмидта, можно определить оператор $L: W^1 \rightarrow W^2$ такой, что

$$Lf = g, \quad g = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) Bfd\tau.$$

Тогда, вводя $\gamma(N) = 2e^{NT}$, получим

$$\|u(\cdot, \omega_1) - u(\cdot, \omega_2)\|_W^2 \leq \gamma(N) \|L(\omega_1 - \omega_2)\|_W^2$$

или $u(\cdot, \omega)$ является равномерно непрерывным в S -топологии и $u(\cdot, \omega)$ является физической случайной величиной.

Теорема доказана.

Отметим, что близкие вопросы рассматривались также в работах [23-26].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ichikawa A. Stability of semilinear stochastic evolution equations. – J. Math. Anal. Appl., 1982, № 90, pp. 12-44.
2. Ichikawa A. Semilinear stochastic evolution equations – Stochastics, 1984, N12, pp. 1-39.
3. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic equations in infinite dimensions. – Cambridge: Camb. Univ. Press, 2014.
4. Gawarecki L., Mandrekar V. Stochastic Differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations. – Berlin; Heidelberg: Springer – Verl, 2011.
5. Melnikova I.V. Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Generalized and regularized solutions. – Boca Raton; London; New York: CRS Press, 2016.
6. Filinkov A., Sorensen J. – Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions, Stoch. Stoch. Rep., 2003, v. 72, № 3-4, pp. 129-173.
7. Gliklich Yu. E. Global and Stochastic Analysis with Appercations to Mathematical Physics. – London; Dordrecht; Heidelberg; New York: Springer, 2011.
8. Nelson E. Dynamical Theory of Brownian motion. – Princeton: Princeton University Press, 1967.
9. Kovach M., Larsson S. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations. New Directions on the Mathematical and Computer Sciences. – National Universities Commission, Auja, Nigeria, 2007, v. 4, Publications of the ICMCS, Lagos (2007), pp. 159232.
10. Sviridyuk G.A., Zamyshlyayeva A.A., Zagrebina S.A. Multipoint initial-final problem for one class of Sobolev type models of higher order with additive "white noise". – Vestnik YUUrGU. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie i proramirovanie", v.11, №3 (2018), pp. 103-117.
11. Balakrishnan A.V. Applied Functional Analysis. – Springer – Verlag, Applications of Mathematics, 1976.
12. Balakrishnan A.V. Radon-Nikodim derivatives of a class of weak distributios on Hilbert spaces. – Appl. Math. Opt. 1977, N3, pp. 209-255.
13. Balakrishnan A.V. An infinite dimensional Gaussian Markov process with non-nuclear steady state covariance. – Teor. Veroyatnost. i Primene., v.38, №3, 1993, pp. 656-661.
14. Cacase F., Conte F., Germani A., Palombo G. White Noise Solutions for Nonlinear Stochastic Systems. – IFAC Papers Online 49-18, 2016, pp. 327-332.
15. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of fractional Differential Equations, Elsevier, 2006.
16. Oksendal B. Stochastic differential equations an introduction with applications. – Springer Science Business Media, 2013.
17. Feckan M., Wang ZinRong, Pospisil M. – Fractional – Order Equations and Inclusions, De Grugter, 2017.
18. Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics. – New Jersey: World Scientific, 2001.
19. Wang R.-N., Chen D.-H., Xiao T.J. Abstract fractional Cauchy problems with almost sectorial operators. – J.Differential Equations 252, 2012, pp. 202-235.
20. Ding X.L., Ahmad B. Analytical solutions to fractional evolution equations with almost sectorial operators. – Advances in Difference Equations, 206 (2016), <https://doi.org/10.1186/s13662-016-0097-y>
21. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В.: Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. – М.: Наука, Физматлит, 1983.
22. Сазонов В. Замечание о характеристических функционалах. – Теория вероятности и его примен. т.3, N2, 1958, pp. 201-205.
23. Polov M., Kozobrod V.N. Periodic random perturbations of differential - difference equations of neytral type. – Dokladi AN Taj. SSR, V.26, №7, 1983, pp. 405-408 (Russian).

24. Ilolov M., Kozobrod V.N. Periodic random perturbations of differential equations with parameter. – Dokladi AN Taj. SSR, V.31, №3, 1988, pp. 147-150 (Russian).
25. El - Nadi K.E. On some stochastic parabolic differential equations in a Hilbert space. – International Journal of Stochastic Analysis, V.2 (2005), pp. 167-173.
26. Guang-an Zou, Bo Wang. On the study of stochastic fractional-order differential system equation systems. – arXiv: 16/11/07 618 v.1, 2016.

М.ИЛОЛОВ^{1,2}, Х.С.КУЧАКШОЕВ³, Ҷ.Ш.РАҲМАТОВ¹

МУОДИЛАҶОИ КАСРИИ ЭВОЛЮТСИОНИИ СТОХАСТИКИИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ

¹*Маркази рушди инноватсионии илм ва технологияҳои нави*

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

²*Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви*

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

³*Университети Осийи Марказӣ*

Ин мақола ба назарияи ҳалшавандагии муодилаҳои касрии эволюсионии стохастикӣ дифференсиалӣ, ки бо чамъшавандаи аддитивии ба намуди садои сафеди Балакришнан барошуда, бахшида шудааст. Натиҷаҳои дар ин ҷо бадастомада метавонанд дар таҳлили равандҳои гуногуни релаксатсионӣ-стохастикӣ ва диффузионӣ дар муҳитҳои мураккаби ковок ва фракталӣ, татбиқ гарданд.

Калимаҳои калидӣ: садои сафед, интегралҳои стохастикӣ Балакришнан, ҳосилаҳои касрӣ, оператори Гилберта-Шмидт, оилаи операторҳои резольвентӣ.

M.ILOLOV^{1,2}, Kh.S.KUCHAKSHOYEV³, J.Sh.RAKHMATOV¹

FRACTIONAL EVOLUTIONARY STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Center of Innovative Development of Science and New Technologies

of the National Academy of Sciences of Tajikistan,

Institute of mathematics named after A.Juraev

of the National Academy of Sciences of Tajikistan,

**University of Central Asia*

This article is devoted to the theory of solvability of stochastic evolutionary equations of fractional order perturbed by an additive term of the Balakrishnan white noise type. The results obtained here can find application in the analysis of various stochastic relaxation and diffusion processes in complex porous and fractal media.

Key words: white noise, Balakrishnan stochastic integral, fractional derivatives, Hilbert-Schmidt operator, resolvent operators' family.

УДК 517.957

С.А.ИСХОКОВ

**ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ**

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

В работе приводится обзор результатов, полученных в Институте математики им. А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана за последние несколько лет, по разрешимости вариационной задаче Дирихле для некоторых классов эллиптических уравнений с вырождением.

Ключевые слова: вариационная задача Дирихле, эллиптический оператор, степенное вырождение, фредгольмова разрешимость, гладкость решения, некоэрцитивная полуторалинейная форма.

Введение. Один из методов исследования разрешимости краевых задач для эллиптических уравнений с вырождением основан на элементах теории нормированных весовых пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных (теоремы вложения, эквивалентные нормировки, прямые и обратные теоремы о следах, теоремы о плотности гладких функций и т.д.). Этот метод хорошо разработан в работах Л.Д.Кудрявцева, С.М.Никольского, П.И.Лизоркина, К.Х.Бойматова, Н.В.Мирошина, Х.Трибелья и др. (по поводу библиографии см. обзорную работу [1]) в случае эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением вдоль всей границы области. По этому направлению ведутся научные исследования и в Институте математики им. А.Джураева НАН Таджикистана. В настоящей работе приведен обзор результатов, полученных в этом институте за последние несколько лет по этом направлению. Работа состоит из четырех разделов. В первом разделе приведен результат о весовом аналоге неравенства Гординга для широкого класса эллиптических операторов произвольного четного порядка с разными нестепенными вырождениями по разным независимым переменным. Второй раздел работы посвящен изучению

Адрес для корреспонденции: Исхоков Сулаймон Абунасович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Институт математики НАНТ, E-mail: sulaimon@mail.ru

разрешимости вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением вдоль всей границы области в случае некоэрцитивности соответствующих полуторалинейных форм. Сначала рассматривается случай согласованного вырождения коэффициентов и затем рассматривается случай, когда коэффициенты исследуемого оператора могут иметь несогласованное вырождение. В третьем разделе рассматривается случай операторов во всем пространстве со степенным вырождением на бесконечности и в четвертом разделе рассматриваются эллиптические операторы в бесконечной предельно-цилиндрической области.

1. Неравенства Гординга в произвольной области. Пусть Ω – произвольное открытое множество в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n и пусть $\Pi(0) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < 1/2, i = \overline{1, n}\}$ – единичный куб с центром в начале координат. Для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ и любого вектора $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\vec{t}}(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^n : ((x_1 - \xi_1)/t_1, \dots, (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть $g_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) – определенные в Ω положительные функции. Символом $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi)$ обозначим параллелепипед $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ при $\vec{t} = \varepsilon \cdot \vec{g}(\xi)$, где $\vec{g}(\xi) = (g_1(\xi), \dots, g_n(\xi))$.

Далее, в этом разделе, предполагается, что множество Ω и функции $g_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) связаны условием: существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\xi \in \Omega$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi)$ содержится в Ω . Это условие является аналогом условия погружения, рассмотренного в работе П.И.Лизоркина [2]. В этой работе также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$), удовлетворяющих условию погружения.

Пусть $\sigma(x)$ – определенная в Ω положительная функция и ε – некоторое фиксированное достаточно малое положительное число. Предположим, что для любого $\delta \in (0, \varepsilon)$ существуют положительные числа $\lambda(\delta), \nu(\delta)$ такие, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lambda(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \nu(\delta) = 1$$

и

$$\frac{1}{\nu(\delta)} \leq \frac{\sigma(x)}{\sigma(\xi)} \leq \nu(\delta), \frac{1}{\lambda(\delta)} \leq \frac{g(x)}{g(\xi)} \leq \lambda(\delta), i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

для всех x из $\Pi_{\delta, \vec{g}}(\xi)$.

Класс положительных функций $\sigma(x), x \in \Omega$, удовлетворяющих условию (1) обозначим через $\Phi_{\varepsilon, \vec{g}}(\Omega)$

Пусть $1 \leq p < +\infty$ и r – натуральное число. Символом $L_{p,r}^m(\Omega; \sigma, \vec{g})$, где целое число m такое, что $0 \leq m \leq r$, обозначим класс функций $u(x)$, $x \in \Omega$, имеющих обобщенные по Соболеву производные $u^{(k)}(x)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + \dots + k_n \leq r$, с конечной полунормой

$$\|u; L_{p,r}^m(\Omega; \sigma, \vec{g})\| = \left\{ \sum_{|k|=m} \int_{\Omega} (\sigma(x) g_1^{k_1-r}(x) g_2^{k_2-r}(x) \dots g_n^{k_n-r}(x) |u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p},$$

а символом $W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$ – пространство функций $u(x)$, $x \in \Omega$, с конечной нормой

$$\|u; W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\| = \left\{ \|u; L_{p,r}^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^p + \|u; L_{p,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^p \right\}^{1/p}. \quad (2)$$

Пространство $W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$ является банаховым с нормой (2), и в сделанных выше предположениях при всех $p \in [1, \infty)$ и всех натуральных r множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в этом пространстве.

Символом $(W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g}))'$ обозначим пространство ограниченных антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $W_p^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$, наделенное нормой сопряженного пространства.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$(Au)(x) = \sum_{|k|, |l| \leq r} (-1)^{|l|} \left(p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)}, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где $p_k(x) = \sigma(x) g_1^{-r+k_1}(x) g_2^{-r+k_2}(x) \dots g_n^{-r+k_n}(x)$ и $a_{kl}(x)$ – комплекснозначные функции.

Изучение краевых задач для дифференциальных уравнений с оператором (3) методами функционального анализа связано со следующей полуторалинейной формой, порожденной этим оператором,

$$B[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx. \quad (4)$$

Вариационная задача Дирихле, связанная с формой (4) ранее изучалась в работе С.А.Исхокова [3] в предположении, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ удовлетворяют следующему условию эллиптичности

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|, |l| \leq r} a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l} \geq c \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \quad (5)$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \leq r} \subset \mathbb{C}$. Число $c > 0$ не зависит от x, ζ . Здесь вместо условия (5) мы предполагаем выполнение более слабого условия

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|, |l|=r} a_{kl}(x) \zeta^k \bar{\zeta}^l \geq c |\zeta|^{2r} \quad (6)$$

для всех $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$; c – положительное число, не зависящее от x, ξ . Здесь и далее используются следующие обозначения

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \xi^k = \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n}, \quad |\xi| = \{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2\}^{1/2}.$$

Теорема 1. Пусть коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|=|l|=r$ ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности (6) и для любого достаточно малого числа $\nu > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|a_{kl}(y) - a_{kl}(z)| < \nu$$

для любого $y \in \Omega$ и любого

$$z \in \Pi_{\varepsilon, \bar{g}}(y) = \{z \in \mathbb{R}^n : |z_i - y_i| < \frac{1}{2} \varepsilon g_i(y), i = \overline{1, n}\}.$$

Пусть также коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|, |l| \leq r$ и $|k| + |l| \leq 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}}(\Omega; (g_1 \cdot g_2 \dots g_n)^{-1/p_{kl}})$, где

$$p_{kl} = \begin{cases} q_{kl} & \text{при } |k| \leq r-1, |l| \leq r \\ q_{lk} & \text{при } |k|=r, |l| \leq r-1 \end{cases}$$

а числа q_{kl} определяются соотношениями:

$$\frac{n}{2r - |k| - |l|} < q_{kl} \leq \frac{n}{r - |l|}, \text{ если } n > 2(r - |k|), n > 2(r - |l|);$$

$$\frac{n}{r - |k| - \varepsilon_1 n} < q_{kl}, 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2} \text{ если } n > 2(r - |k|), n \leq 2(r - |l|);$$

$$q_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{r-|l|+\varepsilon_2 n}, 0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}, \text{ если } n \leq 2(r-|k|), n > 2(r-|l|), \\ \text{любое конечное число } > 1, \text{ если } n \leq 2(r-|k|), n \leq 2(r-|l|). \end{cases}$$

Тогда существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 \geq 0$, что

$$\operatorname{Re} B[u, u] \geq c_1 \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 - c_2 \|u; L_{2,r}^0(\Omega; \sigma, \vec{g})\|^2 \quad (7)$$

для всех $u \in W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$.

Неравенство (7) является весовым аналогом неравенства Гординга для сильно эллиптических операторов, которое играет важную роль в исследовании разрешимости краевых задач для эллиптических уравнений (см., например, [4, 5]). С помощью неравенства (7), в частности, исследована разрешимость следующей задачи.

Задача $D_{1,\lambda}$. Для заданного функционала $F \in (W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g}))'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U, v] + \lambda \int_{\Omega} \sigma^2(x) (g_1(x) g_2(x) \dots g_n(x))^{-2r} U(x) \overline{v(x)} dx = \langle F, v \rangle \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)),$$

принадлежащее пространству $W_2^r(\Omega; \sigma, \vec{g})$.

Доказана следующая теорема

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

I) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|=|l|=r$ ограничены и удовлетворяют условию эллиптичности

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \bar{\xi}^l \geq c |\xi|^{2r}$$

для всех $x, \xi \in R_n$ (c – положительное число, не зависящее от x, ξ), и для любого достаточно малого $\nu > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|a_{kl}(x) - a_{kl}(\xi)| < \nu$$

для любого $\xi \in \Omega$ и любого $x \in \Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi)$;

II) коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|, |l| \leq r$ и $|k|+|l| \leq 2r-1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}}(\Omega; (g_1 g_2 \dots g_n)^{-1/p_{kl}})$, где числа p_{kl} – такие же как в теореме 1.

Тогда существует число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что для любого $F \in (W_2^r(\Omega; \sigma, \bar{g}))'$ задача $D_{1,\lambda}$ имеет единственное решение $U(x)$ и при этом выполняется оценка

$$\|U; W_2^r(\Omega; \sigma, \bar{g})\| \leq M \left\| F; (W_2^r(\Omega; \sigma, \bar{g}))' \right\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от F .

Напомним, что сформулированные выше теоремы относятся к случаю произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (ограниченной или неограниченной). В следующих разделах рассматриваются более конкретные классы областей Ω и получены более точные результаты.

Сформулированные в этом разделе результаты опубликованы в работах [6, 7, 8]

2. Случай ограниченной области. Пусть Ω – ограниченная область в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n с замкнутой $(n-1)$ -мерной границей $\partial\Omega$. Пусть r – натуральное и α – вещественное число. Символом $V_{2,\alpha}^r(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных на Ω , имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные порядка r с конечной нормой

$$\|u; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2},$$

где $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω , то есть бесконечно дифференцируемая положительная функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\rho(x) \leq \text{dist}\{x, \partial\Omega\} \leq M\rho(x), \quad |\rho^{(k)}(x)| \leq M_k \rho^{1-|k|}(x),$$

для любого $x \in \Omega$ и любого мультииндекса k ; M, M_k – некоторые положительные постоянные.

Вводим также пространство $(V_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ – пополнение пространства $L_{2,\alpha-r}(\Omega)$ по норме

$$\left\| f; (V_{2,\alpha}^r(\Omega))' \right\| = \sup \frac{|(f, v)_{\alpha-r}|}{\|u; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым $v \in V_{2,\alpha}^r(\Omega)$. Элементы из пространства

$(V_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ отождествляются с соответствующими антилинейными функционалами над

$V_{2,\alpha}^r(\Omega)$. Далее обозначим через $\langle F, v \rangle$ значение функционала $F \in (V_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ на функцию $v \in V_{2,\alpha}^r(\Omega)$.

Рассмотрим следующую интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$B_\lambda[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx + \lambda \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) u(x) \overline{v(x)} dx, \quad (8)$$

коэффициенты $a_{kl}(x)$ которой являются комплекснозначными функциями и $p_k(x) = \rho^{\alpha-r+|k|}(x)$.

Далее предполагается, что:

I) функции $a_{kl}(x), |k|=|l|=r$, непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$;

II) существуют числа $c_0 > 0, \varphi \in (0, \pi)$ и непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $\gamma(x) \neq 0$ такие, что

$$\left| \arg \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \overline{\xi^l} \right| < \varphi,$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \overline{\xi^l} \right\} \geq c_0 |\xi|^{2r}.$$

для всех $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$.

III) младшие коэффициенты $a_{kl}(x), |k|+|l| \leq 2r-1, |k|, |l| \leq r$, формы (8) принадлежат пространству $L_{p_{kl}; -n/p_{kl}}(\Omega)$, где число p_{kl} определяется следующим образом:

$$1) p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{r-|k|} + \varepsilon, & |l|=r, \quad n > 2(r-|k|), \\ \frac{n}{r-|l|} + \varepsilon, & |k|=r, \quad n > 2(r-|l|); \end{cases}$$

2) если $|k| \leq r-1, |l| \leq r-1$, то

$$p_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{2r - |k| - |l|} + \varepsilon, & n > 2(r - |k|), \quad n > 2(r - |l|), \\ \frac{n}{r - |l| + \varepsilon}, & n \leq 2(r - |k|), \quad n > 2(r - |l|), \\ \frac{n}{r - |k| + \varepsilon}, & n > 2(r - |k|), \quad n \leq 2(r - |l|); \end{cases}$$

3) p_{kl} – любое конечное число больше 2 в оставшихся случаях.

Здесь ε – достаточно малое положительное число. В условии II) и далее считается, что функция $\arg z$ принимает значения на отрезке $(-\pi, \pi]$.

Пространство $L_{p;\delta}(\Omega)$, где $1 \leq p < +\infty, \delta \in (-\infty, +\infty)$, определяется нормой

$$\|u; L_{p;\delta}(\Omega)\| = \left\{ \int_{\Omega} \rho^{p\delta}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Задача $D_{2,\lambda}$. Для заданного функционала $F \in (V_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B_{\lambda}[U, v] = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

принадлежащее пространству $V_{2,\alpha}^r(\Omega)$.

Замечание 1. Если граница $\partial\Omega$ области Ω достаточно гладкая и число α такое, что

$$\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1, \dots, r\}, \quad -\frac{1}{2} < \alpha < r - \frac{1}{2},$$

то решение $U(x), x \in \Omega$, задачи $D_{2,\lambda}$ удовлетворяет однородным граничным условиям

$$\left. \frac{\partial^s U}{\partial n^s} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали, а целое число s_0 такое, что $r - \alpha - 1/2 \leq s_0 < r - \alpha + 1/2$. Поэтому, в общем случае, граничные условия в задаче $D_{2,\lambda}$ формально будем считать однородными.

Замечание 2. В отличие от полуторалинейной формы (4), рассмотренной в первом разделе, форма (8) в условиях I) – III) не является коэрцитивной. Здесь и далее

понятие коэрцитивности формы понимается в смысле определения 2.0.1 работы [1]: если H_0 — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$, H_+ — другое гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_+$, плотно вложенное в H_0 , то определенная в H_+ полуторалинейная форма $P[u, v]$ называется H_+ -коэрцитивной относительно H_0 , если найдутся числа $\mu_0 \in \mathbb{R}, \delta_0 > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} P[u, u] + \mu_0 \|u\|_0^2 \geq \delta_0 \|u\|_+^2$$

для всех $u \in H_+$.

Разрешимость вариационной задачи Дирихле для некоэрцитивных форм впервые исследовалась К.Х.Бойматовым в работе [9].

Теорема 3. Пусть $0 \leq \alpha < r$ и выполнены условия I)-III). Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in (V_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ существует единственное решение $U(x)$ задачи $D_{2,\lambda}$ и при этом справедлива оценка

$$\|U; V_{2,\alpha}^r(\Omega)\| \leq M_0 \left\| F; (V_{2,\alpha}^r(\Omega))' \right\|,$$

где число M_0 не зависит от λ и F .

Далее рассмотрим эллиптический оператор с более сложной структурой вырождения коэффициентов. Пусть r — натуральное число и J — некоторое подмножество множества $\{0, 1, \dots, r\}$, причем $r \in J$. Пусть $\tau_j, j \in J$, — вещественные числа. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u] = \sum_{|k|=|l|=j \in J} (-1)^j \left(\rho(x)^{2\tau_j} b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)}, \quad (9)$$

который понимается в смысле теории распределений на Ω . Предполагается, что коэффициенты $b_{kl}(x), x \in \Omega$ являются ограниченными комплекснозначными функциями.

Определение 1. Вырождение коэффициентов оператора (9) называется **согласованным**, если существует число α такое, что $\tau_j = \alpha + j - r$ при всех $j \in J$. В противном случае оно называется **несогласованным**.

Вариационная задача Дирихле для оператора (9) в случае согласованного вырождения коэффициентов исследована во многих работах (см., например, [1, 10, 11, 12] и имеющуюся в них библиографию). Случай несогласованного вырождения коэффициентов рассмотрен только в работе [13].

В работах [9, 11, 14, 15] рассмотрен случай, когда связанная с оператором (9) интегро-дифференциальная полуторалинейная форма

$$B[u, v] = \sum_{|k|=|l|=j \in J} \int_{\Omega} \rho(x)^{2\tau_j} b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx \quad (10)$$

не является коэрцитивной.

Далее приводим результат о разрешимости вариационной задачи Дирихле, связанной с оператором (9) в случае несогласованности вырождения его коэффициентов и некоэрцитивности формы (10).

Пусть j — натуральное, α_j, p_j — вещественные числа и $1 \leq p_j < \infty$. Символом $W_{p_j; \alpha_j}^j(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных на Ω , имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $u^{(k)}(x)$ порядка j с конечной нормой

$$\|u; W_{p_j; \alpha_j}^j(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=j} \int_{\Omega} \rho^{p_j \alpha_j}(x) |u^{(k)}(x)|^{p_j} dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p_j} dx \right\}^{1/p_j}.$$

Полуторалинейную форму (10) представим в виде

$$B[u, v] = \sum_{j \in J} B_j[u, v], \quad B_j[u, v] = \sum_{|k|=|l|=j} \int_{\Omega} \rho(x)^{2\tau_j} b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx.$$

Определение 2. Пусть i_0 — наименьший ненулевой элемент множества J . Если $\tau_{i_0} > i_0$, то через j_0 обозначим наибольшее число из множества J такое, что $j_0 - \tau_{j_0} > i_0 - \tau_{i_0}$. В случае $\tau_{i_0} \leq i_0$ через j_0 обозначим наибольшее число из множества J такое, что $\tau_{i_0} > \tau_{j_0} i_0 / j_0$. Если же такое число $j_0 \in J$ не существует, то обозначим i_0 через j_0 . Пусть i_1 — наименьший ненулевой элемент множества $J \setminus \{i_0, j_0\}$. Если $\tau_{i_1} > i_1$, то через j_1 обозначим наибольшее число из множества J такое, что $j_1 - \tau_{j_1} > i_1 - \tau_{i_1}$. В случае $\tau_{i_1} \leq i_1$ через j_1 обозначим наибольшее число из множества J такое, что $\tau_{i_1} > \tau_{j_1} i_1 / j_1$. Если же такое число $j_1 \in J \setminus \{i_0, j_0\}$ не существует, то обозначим i_1 через j_1 . Продолжая этот процесс до завершения, представим множество индексов J в виде $J = J_1 \cup J_2, J_1 \cap J_2 = \emptyset$, где $J_1 = \{i_0, i_1, \dots, i_t\}$, $J_2 = \{j_0, j_1, \dots, j_s\}$. Полуторалинейные формы $B_j[u, v]$ с индексами из множества J_2 назовем **старшими**.

Вводим пространство \mathbb{H}_+ комплекснозначных функций $u(x), x \in \Omega$, с конечной нормой

$$\|u; \mathbb{H}_+\| = \left\{ \sum_{m=0}^s \left\| u; W_{2; \tau_{j_m}}^{j_m}(\Omega) \right\|^2 \right\}^{1/2}.$$

Символом \mathbb{H}'_+ обозначим замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в метрике пространства \mathbb{H}_+ , а через \mathbb{H}'_- обозначим пространство антилинейных непрерывных функционалов, определенных на \mathbb{H}'_+ со следующей нормой

$$\|F; \mathbb{H}'_-\| = \sup \frac{|\langle F, u \rangle|}{\|u; \mathbb{H}'_+\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $u \in \mathbb{H}'_+$. Здесь и далее символом $\langle F, u \rangle$ обозначено значение функционала F на функцию u .

Обозначим через $(\cdot, \cdot)_0$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Задача $D_{3,\lambda}$. Для заданного функционала $F \in \mathbb{H}'_-$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U, v] + \lambda(U, v)_0 = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \quad (11)$$

принадлежащее пространству \mathbb{H}'_+ .

Для каждого $m \in \{0, 1, \dots, s\}$ вводим функцию

$$L_{j_m}(x, \zeta) = \sum_{|k|=|l|=j_m} a_{kl}(x) \zeta_k \bar{\zeta}_l,$$

где $x \in \Omega$ и $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|=j_m}$ — набор комплексных чисел.

Теорема 4. Пусть числа $\tau_j, j \in J$, такие, что

$$\tau_j \geq -1/2; \quad \max_{j \in J} (j - \tau_j) > 0.$$

Пусть $m \in \{0, 1, \dots, s\}$ и найдутся числа $\varphi_m \in (0, \pi)$, $M > 0$ и отличная от нуля в $\bar{\Omega}$ функция $\gamma_m(x) \in C(\bar{\Omega})$ такие, что выполняются следующие неравенства

$$\left| \arg L_{j_m}(x, \zeta) \right| < \varphi_m,$$

$$\sum_{|k|=j_m} |\zeta_k|^2 \leq M \operatorname{Re} \left\{ \gamma_m(x) L_{j_m}(x, \zeta) \right\}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|=j_m}$.

Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \mathbb{H}'_-$ существует единственное решение $U(x)$ задачи D_λ и при этом справедлива оценка

$$\|U; \mathbb{H}'_+\| \leq M_0 \|F; \mathbb{H}'_-\|,$$

где число M_0 не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$ и от функционала F .

Решение задачи $D_{3,\lambda}$ принадлежит пространству \mathbb{H}'_+ , в котором плотно множество финитных функций. Поэтому, формально, можно считать, что решение задачи D_λ удовлетворяет однородным граничным условиям. Далее мы исследуем разрешимость следующей задачи с неоднородными граничными условиями.

Задача $D_{4,\lambda}$. Для заданного функционала $F \in \mathbb{H}'_-$ и заданной функции $U_1(x) \in \mathbb{H}_+$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения (11), принадлежащее пространству \mathbb{H}_+ и удовлетворяющее условию

$$U(x) - U_1(x) \in \mathbb{H}'_+. \quad (12)$$

Условие (12) означает, что решение $U(x)$ задачи $D_{4,\lambda}$ принимает на границе $\partial\Omega$ области Ω те же значения, что и заданная функция $U_1(x)$.

Теорема 5. Пусть выполнены все условия теоремы 4. Тогда существует число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \mathbb{H}'_-$ и любой заданной функции $U_1(x) \in \mathbb{H}_+$ задачи $D_{4,\lambda}$ имеет единственное решение $U(x)$. Это решение удовлетворяет оценке

$$\|U; \mathbb{H}'_+\| \leq (M_1 + \lambda) \|U_1; \mathbb{H}_+\| + M_1 \|F; \mathbb{H}'_-\|,$$

где число M_1 не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$ и от выбора функционала F и функции $U_1(x)$.

Результаты, сформулированные в теоремах 3-5, относятся к случаю дифференциальных операторов дивергентного вида и опубликованы в работах [12, 16]. В последние годы также рассмотрен случай операторов не дивергентного вида в ограниченной области и полученные результаты опубликованы в работах [17, 18].

3. Случай всего пространства. Символом $V_{p,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < +\infty$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, обозначим пространство функций $u(x)$, определенных во всем пространстве \mathbb{R}^n , имеющих производные порядка r с конечной нормой

$$\|u; V_{p,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int d^{p\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx + \int d^{p(\alpha+r)}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

где $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$. Здесь и далее в этом разделе все интегралы берутся по всему \mathbb{R}^n .

Пространство $V_{p,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$ хорошо изучено в монографии Х.Трибеля. Оно является частным случаем пространства $V_p^r(\Omega; \sigma, \delta)$, введенного и изученного в работах К.Х.Бойматова [19] и С.А.Исхокова [20]. Согласно результатам этих работ для любого натурального числа r и вещественных чисел α, p , причем $1 < p < \infty$, множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в пространстве $V_{p;\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$.

Пусть δ – вещественное число. Вводим пространство $L_{p,\delta}(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|u; L_{p,\delta}(\mathbb{R}^n)\| = \left\{ \int (d^\delta(x)|u(x)|)^p dx \right\}^{1/p}.$$

Пространство $L_{p,\delta}(\mathbb{R}^n)$ при $p = 2$ является гильбертовым пространством, и скалярное произведение в $L_{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$(u, v)_\delta = \int d^{2\delta}(x)u(x)\overline{v(x)}dx.$$

Определим пространство $(V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n))'$ – пополнение пространства $L_{2,\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\left\| f; (V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n))' \right\| = \sup \frac{|(f, v)_{\alpha+r}|}{\|v; V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $v(x) \in V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$.

На функциях $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad (13)$$

коэффициенты $a_{kl}(x)$ которой являются ограниченными комплекснозначными функциями.

Наряду с формой (13) вводим следующую функцию

$$A(x, \zeta) = \sum_{|k|, |l| \leq r} a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \leq r} \subset \mathbb{C}.$$

Предположим, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \leq r} \subset \mathbb{C}$ выполнены условия

$$|\arg A(x, \zeta)| < \varphi,$$

$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \leq M \operatorname{Re} \{ \gamma(x) A(x, \zeta) \},$$

где φ – некоторое число из интервала $(0, \pi)$, и отличная от нуля комплекснозначная функция $\gamma(x)$ всюду непрерывна, и для любого числа $\nu > 0$ существует число $R_\nu > 0$ такое, что $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x| > R_\nu, |y| > R_\nu$.

Задача $D_{5,\lambda}$. Для заданного функционала $F \in (V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n))'$ требуется найти решение $u(x)$ уравнения

$$B[u, \nu] + \lambda \int d^{2(\alpha+r)}(x) u(x) \overline{\nu(x)} dx = \langle F, \nu \rangle \quad \forall \nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (14)$$

принадлежащее пространству $V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 6. Пусть выполнены все сформулированные выше условия. Тогда существует число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что если $\lambda \geq \lambda_0$, то для любого заданного функционала $F \in (V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n))'$ задача $D_{5,\lambda}$ имеет единственное решение, и при этом справедлива оценка

$$\|u; V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n)\| \leq M \|F; (V_{2,\alpha}^r(\mathbb{R}^n))'\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ и функционала F .

Если коэффициенты формы (13) и правая часть уравнения (14) обладают более хорошими свойствами гладкости, то можно исследовать гладкость решения задачи $D_{5,\lambda}$.

Теорема 7. Пусть выполнены все условия теоремы 6. Пусть также существует натуральное число m_0 такое, что

$$|a_{kl}^{(s)}(x)| \leq M d^{|s|}(x)$$

для любого мультииндекса s такого, что $|s| \leq m_0$. Тогда при $\lambda \geq \lambda_0$, где λ_0 – такое же число, как в теореме 6, для любого заданного элемента $F \in (V_{2,\alpha+m}^{r-m}(\mathbb{R}^n))'$, где целое число m такое, что $0 \leq m \leq m_0$, существует решение $u(x)$ задачи $D_{5,\lambda}$; оно принадлежит пространству $V_{2,\alpha-m}^{r+m}(\mathbb{R}^n)$, и имеет место неравенство

$$\|u; V_{2,\alpha-m}^{r+m}(\mathbb{R}^n)\| \leq M \|F; (V_{2,\alpha+m}^{r-m}(\mathbb{R}^n))'\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$ и функционала F .

Результаты, сформулированные в этом разделе, опубликованы в работе [21].

4. Случай предельно-цилиндрической области. В этом разделе изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в предельно-цилиндрической области. Приведенные ниже результаты опубликованы в работе [22].

Пусть $n \geq 2$ и G – ограниченная область в $(n-1)$ – мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n-1} , граница которой удовлетворяет условию конуса и не является линией уровня многочлена степени $\leq r-1$ по переменным x_1, \dots, x_{n-1} . Пусть $\omega(t)$ ($-\infty < t < \infty$) ограниченная сверху, положительная, непрерывная функция. В n – мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n вводим следующую предельно-цилиндрическую область $\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x' / \omega(x_n) \in G\}$, где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Далее предполагается, что

$$\text{dist}(x, \Gamma_{x_n}) \leq M \text{dist}(x, \partial\Omega) \quad (15)$$

для всех $x = (x', x_n) \in \Omega$, где $\Gamma_{x_n} = \{(x', x_n), x' / \omega(x_n) \in \partial G\}$.

Пусть $V(\tau)$ – положительная дифференцируемая в интервале $(0, d), d > 0$, функция, которая удовлетворяет условиям

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{V'(\tau)\tau}{V(\tau)} = 0, V(2\tau) \sim V(\tau). \quad (16)$$

Здесь и далее символ " \sim " означает наличие двухсторонней оценки с положительными константами.

Пусть $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ и функция $\phi(x)$ такая, что $\phi(x) \sim V(\rho(x))$. Пусть r – натуральное, α, p – вещественные числа и $1 \leq p < \infty$. Обозначим через $L_{p,\alpha,\phi}^r(\Omega)$ класс функций $u(x)$, $x \in \Omega$, имеющих обобщенные в смысле Соболева производные $u^{(k)}(x)$ порядка r ($|k| = r$) с конечной полунормой

$$\|u; L_{p,\alpha,\phi}^r(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} (\rho^\alpha(x) \phi(x) |u^{(k)}|)^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Символом $W_{p,\alpha,\phi}^r(\Omega)$ обозначим весовое пространство функций $u(x)$ из класса $L_{p,\alpha,\phi}^r(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|u; W_{p,\alpha,\phi}^r(\Omega)\| = \left\{ \|u; L_{p,\alpha,\phi}^r(\Omega)\|^p + \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $a_{k,l}(x)$ ($|k|, |l| \leq r, x \in \Omega$) – измеримые в Ω , комплекснозначные ограниченные функции и $p_k(x) = \varphi(x) \rho^{\alpha-r+|k|}(x)$, где α – некоторое вещественное число (на которое далее будут наложены дополнительные ограничения). Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) u(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad (17)$$

первоначально определенную на всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Число всевозможных n -мерных мультииндексов, длиной не больше r , обозначим через $\mathcal{N} = \mathcal{N}(r)$. На множество $\Omega \times \mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ введем функцию

$$A(x, \xi) = \sum_{|k|, |l| \leq r} a_{kl}(x) \xi_k \overline{\xi_l}, \quad x \in \Omega, \quad \xi = \{\xi_k\}_{|k| \leq r} \in \mathbb{C}$$

и предположим, что для всех $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ она удовлетворяет условиям

$$|\arg A(x, \xi)| < \pi - \varepsilon, \quad (18)$$

$$\sum_{|k|=r} |\xi_k|^2 \leq M \operatorname{Re} \{ \gamma(x) A(x, \xi) \}, \quad (19)$$

где ε – некоторое число из интервала $(0, \pi)$ и комплекснозначная функция $\gamma(x)$ непрерывна и отлична от нуля в $\overline{\Omega}$.

Рассматривается следующая вариационная задача Дирихле с однородными граничными условиями.

Задача $D_{\lambda, H}$. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\phi}^r(\Omega) \right)'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U, v] + \lambda(U, v) = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \quad (20)$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\phi}^r(\Omega)$.

С целью изучения гладкости решения задачи $D_{\lambda, H}$ в зависимости от гладкости коэффициентов $a_{kl}(x)$ и правой части уравнения F предположим, что

$$|a_{kl}^{(q)}(x)| \leq M_q \rho^{-|q|}(x) \quad (x \in \Omega; |q| \leq m_0), \quad (21)$$

где m_0 – некоторое натуральное число.

Теорема 8. Пусть $\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \dots, r\}$, $r - \alpha > 0$ и выполнены условия (15), (16), (18), (19). Пусть функция $w(x_n)$ в определении области Ω такая, что $\lim_{x_n \rightarrow 0} w(x_n) = 0$, а функция $\gamma(x)$ в условии (19) ограничена в $\bar{\Omega}$ и для любого числа $\nu > 0$ существует число $R_\nu > 0$ такое, что $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ для всех $x, y \in \Omega \setminus B(0, R_\nu)$, где $B(0, R_\nu)$ – шар радиуса R_ν с центром в начале системы координат. Пусть выполнено условие (21) и s – целое число из отрезка $[0, m_0]$.

Тогда существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что если $\lambda > \lambda_0$, то для любого элемента $F \in \left(\overset{\circ}{W}_{2; \alpha-s, \phi}^{r-s}(\Omega) \right)'$ существует единственное решение задачи $D_{\lambda, H}$, оно принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}_{2; \alpha+s, \phi}^{r+s}(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\left\| U; \overset{\circ}{W}_{2; \alpha+s, \phi}^{r+s}(\Omega) \right\| \leq M \left\| F; \left(\overset{\circ}{W}_{2; \alpha-s, \phi}^{r-s}(\Omega) \right)' \right\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, +\infty]$ и от функционала F .

Далее рассматривается вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями. Обозначим через g $(n-1)$ -мерный открытый шар, который содержится в области G и удовлетворяет условию $\text{dist}(x', \partial G) \geq C > 0 \quad \forall x' \in g$.

Определяется весовое пространство $T_{p, \alpha}^r(\Omega)$ функций $u(x)$ ($x \in \Omega$) с конечной нормой

$$\begin{aligned} & \left\| u; T_{p, \alpha}^r(\Omega) \right\| = \\ & = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \left(\rho^\alpha(x) |u^{(k)}(x)| \right)^p dx + \int_{\Omega_0} \left(w^{\alpha-r}(x_n) |u(x)| \right)^p dx \right\}^{1/p}, \end{aligned}$$

где

$$\Omega_0 = \left\{ x = (x', x_n) \in R_n; \frac{x'}{w(x_n)} \in g \right\}.$$

Пространство $W_{p,\alpha,\varphi}^r(\Omega)$ при $\varphi(x) \equiv 1$ обозначим через $W_{p,\alpha}^r(\Omega)$. При $\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1, 2, \dots, r\}$, с точностью до эквивалентности норм, выполняется равенство

$$\overset{\circ}{T}_{p,\alpha}^r(\Omega) = \overset{\circ}{W}_{p,\alpha}^r(\Omega).$$

Задача $D_{\lambda,N}$. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{T}_{2,\alpha}^r(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Phi \in T_{2,\alpha}^r(\Omega)$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения (20), удовлетворяющее условию

$$U - \Phi \in \overset{\circ}{T}_{2,\alpha}^r(\Omega).$$

Результат о разрешимости задачи $D_{\lambda,N}$ сформулируем с учетом изучения гладкости ее решения.

Теорема 9. Пусть выполнены условия (15), (18), (19) и число λ_0 , функции $w(x_n), \gamma(x)$ такие же, как в теореме 8, а функция $\varphi(x)$, участвующая в определении полуторалинейной формы (17), тождественно равна единице.

Пусть $\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, \dots, r\}$, $-\frac{1}{2} < \alpha < r - \frac{1}{2}$ и пусть существует натуральное число m_0 такое, что

$$|a_{kl}^{[q]}(x)| \leq M \rho^{r-|k|-|q|}(x) \quad (x \in \Omega)$$

для всех мультииндексов k, λ, q таких, что $|k|, |l| \leq r$, $|q| \leq m_0$.

Тогда при $\lambda > \lambda_0$, $F \in \left(\overset{\circ}{T}_{2,\alpha}^{r-s}(\Omega)\right)'$, $\Phi(x) \in T_{2,\alpha+s}^{r+s}(\Omega)$, где целое число $s \in [0, m_0]$,

решение $U(x)$ задачи $D_{\lambda,N}$ принадлежит пространству $T_{2,\alpha+s}^{r+s}(\Omega)$ и справедлива следующая оценка

$$\|U; T_{2,\alpha+s}^{r+s}(\Omega)\| \leq M \left\{ \left\| F; \left(\overset{\circ}{T}_{2,\alpha-s}^{r-s}(\Omega)\right)' \right\| + \left\| \Phi; T_{2,\alpha+s}^{r+s}(\Omega) \right\| \right\},$$

где число $M > 0$ не зависит от λ , F и Φ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М, Лирозкин П.И, Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. – Известия вузов. Математика. 1988, № 8, с. 4-30.
2. Лизоркин П.И. Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p -нормах. – Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1980, т.156, с. 130-142.
3. Исохов С.А. О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением. – Дифференциальные уравнения, 2003, т. 39, № 11, с. 536-542.
4. Егоров Ю.В. Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
5. Шишмарев И.А. Введение в теорию эллиптических уравнений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.
6. Исохов С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением. – Математические заметки, 2010, т. 87, № 2, с. 201-216.
7. Исохов С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением. – Доклады академии наук (Россия), 2012, т. 443, № 11, с. 286-289.
8. Исохов С.А., Гадоев М.Г., Якушев И.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением и его приложения. – Уфимский математический журнал, 2016, т. 8, вып. 1, с. 54-71.
9. Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка. – Доклады АН СССР, 1992, т. 327, № 1, с. 9-15.
10. Мирошин Н.В. Вариационная задача Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического оператора. – Дифференциальные уравнения, 1988, т. 24, № 3, с. 455-464.
11. Бойматов К.Х., Исохов С.А. О разрешимости и спектральных свойствах вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой. – Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН, 1997, т. 214, с. 107-134.
12. Исохов С.А., Гадоев М.Г., Константинова Т.П. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными формами. – Доклады Академии наук (Россия), 2015, т. 462, № 1, с. 7-10.
13. Мирошин Н.В. Обобщенная задача Дирихле для одного класса эллиптических дифференциальных операторов, вырождающихся на границе области. Некоторые спектральные свойства. – Дифференциальные уравнения, 1976, т. 12, № 6, с. 1099-1111.
14. Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле, порожденная некоэрцитивной формой. – Доклады Академии наук (Россия), 1993, т. 330, № 3, с. 285-290.
15. Исохов С.А. О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами. – Доклады Академии наук (Россия), 1995, т. 342, № 1, с. 20-22.
16. Исохов С.А., Якушев И.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов. – Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 164-182.
17. Исохов С.А., Хакназаров К.Э. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов не дивергентного вида в ограниченной области. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2020, т.63, № 5-6, с. 308-314.

18. Хакназаров К.Э. О фредгольмовой разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов не дивергентного вида. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2020, т.63, № 9-10. с. 586-590.
19. Бойматов К.Х. О плотности финитных функций в весовых пространствах. – Доклады АН СССР, 1989, т. 307, № 6, с. 1296-1299.
20. Исохов С.А. О гладкости решения вырождающихся эллиптических уравнений.– Дифференциальные уравнения, 1995, т. 31, №4, с. 641-653.
21. Исохов С.А., Рахмонов Б.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле во всем пространстве, связанной с некоэрцитивной формой.– Уфимский математический журнал, 2020, т. 12, № 1, с. 13-29.
22. Исохов С.А., Каримов А.Г. Вариационная задача Дирихле в предельно-цилиндрической области, порожденная некоэрцитивной формой. – ДАН РТ, 2006, т. 49, № 8, с. 696-703.

С.А.ИСҲОҚОВ

МАСЪАЛАИ ВАРИАЦИОНИИ ДИРИХЛЕ БАРОИ БАЪЗЕ СИՒФҲОИ ОПЕРАТОРҲОИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАНАЗЗУЛЁБАНДА

*Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола шарҳи мухтасари натиҷаҳои илмии дар Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон дар соҳаи охир гирифташуда, ки ба ҳалшавандагии масъалаи вариационии Дирихле барои операторҳои эллиптикии таназзулӯбанда алоқаманданд, оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: масъалаи вариационии Дирихле, оператори эллиптикӣ, таназзулӯбии дараҷагӣ, соҳаи маҳдуд, ҳалшавандагӣ ба маънои Фредгольм, суфтагии ҳал, шакли якунимхаттии ғайри коэрцитивӣ.

S.A.ISKHOKOV

VARIATIONAL DIRICHLET PROBLEM FOR SOME CLASSES OF DEGENERATE ELLIPTIC OPERATORS

*Institute of Mathematics named after A.D.Dzhuraev,
National Academy of Sciences of Tajikistan*

The paper is devoted to review of results obtained in the Institute of Mathematics named after A.D.Dzhuraev of National Academy of Sciences of Tajikistan in last years on solvability of the variational Dirichlet problem for degenerate elliptic operators.

Key words: variational Dirichlet problem, elliptic operator, power degeneration, Fredholm solvability, smoothness of a solution, noncoercive sesquilinear form.

УДК 517. 962

Н.Р.РАДЖАБОВ

ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ТРЁХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ
ОБЛАСТЯМИ

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 19.05.2021 г.

Изучена переопределённая линейная система трех интегральных уравнений первого порядка с тремя сингулярными областями, сведением её к одному одномерному интегральному уравнению Вольтерровского типа с сингулярной точкой в ядре.

Ключевые слова: переопределённая система интегральных уравнений, условие совместности, сингулярные ядра, представление многообразия решений.

Через Ω , обозначим параллелепипед

$$\Omega = \{(x, y, z) : a < x < a_0, b < y < b_0, c < z < b_0\}.$$

Соответственно обозначим

$$\Omega_1 = \{(x, y) : a < x < a_0, b < y < b_0, z = c\}, \Omega_2 = \{(x, z) : a < x < a_0, y = b, c < z < c_0\},$$

$$\Omega_3 = \{(y, z) : x = a, b < y < b_0, c < z < c_0\},$$

$$\Gamma_1 = \{x : a < x < a_0, y = b, z = c\}, \Gamma_2 = \{y : x = a, b < y < b_0, z = c\},$$

$$\Gamma_3 = \{z : x = a, y = b, c < z < c_0\}.$$

Адрес для корреспонденции: Раджабов Нусрат. 734025. Республики Таджикистан. г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: nusrat38@mail.ru

В области Ω рассмотрим следующую переопределённую систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) + \int_a^x \frac{A(t)\varphi(t, y, z)}{t-a} dt = f(x, y, z) \\ \varphi(x, y, z) + \int_b^y \frac{B(s)\varphi(x, s, z)}{s-b} ds = g(x, y, z) , \\ \varphi(x, y, z) + \int_c^z \frac{C(\tau)\varphi(x, y, \tau)}{\tau-c} d\tau = E(x, y, z) \end{cases} \quad (1)$$

где $A(x)$, $B(y)$, $C(z)$ – заданные функции областей Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $E(x, y, z)$ – заданные функции области Ω , $\varphi(x, y, z)$ – искомая функция.

Решение переопределённой системы интегральных уравнений (1) будем искать в классе функций $\varphi(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль в особых областях Ω_j ($1 \leq j \leq 3$).

Проблеме исследования переопределённой системы дифференциальных уравнений с регулярными, сингулярными и сверх-сингулярными коэффициентами посвящено много работ. В частности монографии автора [1-3]. Переопределённая система интегральных уравнений для класических интегральных уравнений, раньше не изучалась. Раньше такой проблемы и не возникало. Эта проблема возникла в связи с изучением нового класса интегральных уравнений вольтеровских типов с сингулярными и сверхсингулярными ядрами [4-6], решение которой может содержать произвольные постоянные или произвольные функции.

1. Случай, когда основным уравнением является первое уравнение системы (1)

1.1. Случай, когда $A(a) < 0$, $B(b) < 0$, $C(c) < 0$.

Пусть в первом уравнении системы (1) функция $A(x) \in C(\bar{\Gamma}_1)$, $A(a) < 0$, в окрестности точек $x = a$ удовлетворяет условию Гёльдера. Функция $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $f(a, y, z) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x, y, z) = o\left[(x-a)^{\delta_1}\right], \quad \delta_1 > |A(a)| \quad \text{при } x \rightarrow a. \quad (2)$$

Тогда согласно [4] решение первого уравнения системы (1) даётся формулой

$$\varphi(x, y, z) = (x-a)^{|A(a)|} \exp\left[-W_A^1(x)\right] C_1(y, z) + f(x, y, z) -$$

$$-\int_a^x \exp[W_A^1(t) - W_A^1(x)] \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{|A(a)|} \frac{A(t)}{t-a} f(t, y, z) dt, \quad (3)$$

где $C_1(y, z)$ – произвольная функция области Ω_3 , $W_A^1(x) = \int_a^x \frac{A(t) - A(a)}{t-a} dt$.

Подставляя это значение $\varphi(x, y, z)$ во второе и третье уравнение системы (1), после некоторых преобразований, для нахождения $C_1(y, z)$, получим следующую переопределённую систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} C_1(y, z) + \int_b^y \frac{B(s)C_1(s, z)}{s-b} ds = (x-a)^{A(a)} \exp[W_A^1(x)] (g(x, y, z) - f(x, y, z)) + \\ \int_a^x (t-a)^{A(a)-1} \exp[W_A^1(t)] A(t) f(t, y, z) dt + \\ + \int_a^x (t-a)^{A(a)-1} \exp[W_A^1(t)] A(t) dt \int_b^y \frac{B(s)f(t, s, z)}{s-b} ds, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} C_1(y, z) + \int_c^z \frac{C(\tau)C_1(y, \tau)}{\tau-c} d\tau = (x-a)^{A(a)} \exp[W_A^1(x)] (E(x, y, z) - f(x, y, z)) + \\ \int_a^x (t-a)^{A(a)-1} \exp[W_A^1(t)] A(t) f(t, y, z) dt + \\ + \int_a^x (t-a)^{A(a)-1} \exp[W_A^1(t)] A(t) dt \int_c^z \frac{C(\tau)f(t, y, \tau)}{\tau-c} d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Замечая, что в равенствах (4), (5) левые части не зависят от переменного x будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[(x-a)^{A(a)} \exp[W_A^1(x)] (g(x, y, z) - f(x, y, z)) \right] + \\ + (x-a)^{A(a)-1} \exp[W_A^1(x)] A(x) \left[f(t, y, z) + \int_b^y \frac{B(s)f(x, s, z)}{s-b} ds \right] = 0, \quad (6) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[(x-a)^{A(a)} \exp[W_A^1(x)] (E(x, y, z) - f(x, y, z)) \right] + \end{aligned}$$

$$+ (x-a)^{A(a)-1} \exp[W_A^1(x)] A(x) \left[f(x, y, z) + \int_c^z \frac{C(\tau) f(x, y, \tau)}{\tau - c} d\tau \right] = 0, \quad (7)$$

В равенствах (6), (7), выполняя операцию дифференцирования, будем иметь

$$A(x)g(x, y, z) + (x-a) \frac{\partial}{\partial x} [g(x, y, z) - f(x, y, z)] + A(x) \int_b^y \frac{B(s) f(x, s, z)}{s-b} ds = 0, \quad (8)$$

$$A(x)E(x, y, z) + (x-a) \frac{\partial}{\partial x} [E(x, y, z) - f(x, y, z)] + A(x) \int_c^z \frac{C(\tau) f(x, y, \tau)}{\tau - c} d\tau = 0. \quad (9)$$

Принимая во внимание равенства (6), (7) и замечая, что при выполнении условия (2) $\left[(x-a)^{A(a)} f(x, y, z) \right]_{x=a} = 0$, увидим, что если существуют следующие пределы

$$\left[(x-a)^{A(a)} g(x, y, z) \right]_{x=a} = G(y, z), \quad (10)$$

$$\left[(x-a)^{A(a)} E(x, y, z) \right]_{x=a} = E(y, z), \quad (11)$$

тогда задача сводится к нахождению решения следующей переопределённой системы интегральных уравнений в области Ω_3 :

$$\begin{cases} C_1(y, z) + \int_b^y \frac{B(s) C_1(s, z)}{s-b} ds = G(y, z) \\ C_1(y, z) + \int_c^z \frac{C(\tau) C_1(y, \tau)}{\tau - c} d\tau = E(y, z) \end{cases} \quad (12)$$

Когда основным уравнением системы (12) является первое уравнение, функции $B(y)$, $C(z)$ в окрестности точек $y=b$, $z=c$ удовлетворяют условиям Гёльдера $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$, $C(z) \in C(\overline{\Gamma_3})$, $B(b) < 0$, $C(c) < 0$, функции $G(y, z) \in C(\overline{\Omega_3})$, $G(b, z) = 0$ с асимптотическим поведением

$$G(y, z) = o\left[(y-b)^{\delta_2}\right], \delta_2 > |B(b)|, \text{ при } y \rightarrow b, \quad (13)$$

существует предел

$$\left[(y-b)^{B(b)} E(y, z)\right]_{y=b} = E(z), \quad (14)$$

$E(z) \in C(\bar{\Gamma}_3)$, $E(c) = 0$ с асимптотическим поведением

$$E(z) = o\left[(z-c)^{\delta_3}\right], \delta_3 > |C(c)| \text{ при } z \rightarrow c, \quad (15)$$

тогда решение системы (1.12) даётся формулой

$$\begin{aligned} C_1(y, z) = & (y-b)^{|B(b)|} \exp[-W_B^1(y)] C_1(z) + G(y, z) - \\ & - \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left(\frac{y-b}{s-b}\right)^{|B(b)|} \frac{B(s)G(s, z)}{s-b} ds, \end{aligned} \quad (16)$$

где $C_1(z)$ – решение одномерного интегрального уравнения

$$C_1(z) + \int_c^z \frac{C(\tau)C_1(\tau)}{\tau-c} d\tau = E(z), \quad (17)$$

которое, при $C(c) < 0$ даётся формулой

$$\begin{aligned} C_1(z) = & (z-c)^{|C(c)|} \exp[-W_c^1(z)] C_1 + E(z) - \\ & - \int_c^z \exp[W_c^1(\tau) - W_c^1(z)] \left(\frac{z-c}{\tau-c}\right)^{|C(c)|} \frac{C(\tau)E(\tau)}{\tau-c} d\tau. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение вида (18) получено при предположении, что $E(z) \in C(\bar{\Gamma})$, $E(c) = 0$ с асимптотическим поведением (15).

Решение вида (16) получено при предположении, что коэффициенты системы (12) удовлетворяют следующему условию совместности

$$B(y)E(y, z) + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} [E(y, z) - G(y, z)] + B(y) \int_c^z \frac{C(\tau)G(y, \tau)}{\tau-c} d\tau = 0. \quad (19)$$

Подставляя найденное значение $C_1(z)$ из (18) в (16), находим функцию $C_1(y, z)$. Это значение $C_1(y, z)$, подставляя в формулу (3), находим решение системы (1) в этом случае,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & (x-a)^{|A(a)|} \exp[-W_A^1(x)] \{(y-b)^{|B(b)|} \exp[-W_B^1(y)] \cdot \\ & [(z-c)^{|C(c)|} \exp[-W_C^1(z)] C_1 + E(z) - \\ & - \int_c^z \exp[W_B^1(\tau) - W_E^1(z)] \left(\frac{z-c}{\tau-c}\right)^{|E(c)|} \frac{C(\tau)E(\tau)}{\tau-c} d\tau] + \\ & + G(y, z) - \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left(\frac{y-b}{s-b}\right)^{|B(b)|} \frac{B(s)G(s, z)}{s-b} ds \} + f(x, y, z) - \\ & - \int_a^x \exp[W_A^1(t) - W_A^1(x)] \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{|A(a)|} \frac{A(t)}{t-a} f(t, y, z) dt, \end{aligned} \quad (20)$$

где C_1 – произвольная постоянная, $W_B^1(y) = \int_b^y \frac{B(s) - B(b)}{s-b} ds$,

$$W_E^1(z) = \int_c^z \frac{E(\tau) - E(c)}{\tau - c} d\tau.$$

Подытоживая вышеприведённое, приходим к следующему утверждению

Теорема 1. Пусть в системе (1) $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $g(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $E(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $A(x) \in C(\bar{\Gamma}_1)$, $B(y) \in C(\bar{\Gamma}_2)$, $C(z) \in C(\bar{\Gamma}_3)$, $A(a) < 0$, $B(b) < 0$, $C(c) < 0$. Функции $A(x), B(y), C(c)$ в окрестности точек $x = a$ и $y = b, z = c$ удовлетворяют условию Гёльдера. Функция $f(x, y, z)$ обладает свойством: $f(a, b, c) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x, y) = 0 \left[(x-a)^{\delta_1} (y-b)^\varepsilon (z-c)^\varepsilon \right], \delta_1 > |A(a)| \text{ при } (x, y, z) \rightarrow (a, b, c).$$

Функции $g(x, y, z)$, $E(x, y, z)$ такие, что существуют пределы видов (10), (11), причём $G(b, z) = 0$ с асимптотическим поведением (12). Кроме того, функция $E(y, z)$ такова, что существует предел вида (14), причём $E(c) = 0$ с асимптотическим поведе-

нием (15). Функции $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ удовлетворяют условиям совместности (8), (9). Функции $G(y, z)$, $E(y, z)$ условиям совместности (19).

Тогда однородная система (1) имеет одно решение вида

$$\varphi_0(x, y) = (x-a)^{|A(a)|} (y-b)^{|B(b)|} (z-c)^{|C(c)|} \exp[W_C^1(z) + W_B^1(y) + W_A^1(x)].$$

Неоднородная система (1) всегда разрешима, и её общее решение содержит одну произвольную постоянную и даётся формулой (20), где C_1 – произвольная постоянная.

1.2. Случай, когда $A(a) < 0$, $B(b) < 0$, $C(c) > 0$.

В случае $C(c) > 0$, решение интегрального уравнения (16) согласно [1], [2], [3] даётся формулой

$$C_1(z) = E(z) - \int_c^z \exp[W_C^1(\tau) - W_C^1(z)] \left(\frac{\tau-c}{z-c} \right)^{C(c)} \frac{C(\tau)E(\tau)}{\tau-c} d\tau. \quad (21)$$

Это решение получено при предположении, что $C(z)$ в окрестности точек $y = b$ удовлетворяет условию Гёлдера, $E(z) \in C(\overline{\Gamma_3})$, $E(c) = 0$ с асимптотическим поведением

$$E(z) = o\left[(z-c)^\varepsilon\right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } z \rightarrow c. \quad (22)$$

Найденное значение $C_1(z)$ из (21), подставляя в формулу (16), находим решение системы (12) в этом случае

$$\begin{aligned} C_1(y, z) = & (y-b)^{|B(b)|} \exp[-W_B^1(y)] \times \\ & \times \left[E(z) - \int_c^z \exp[W_C^1(\tau) - W_C^1(z)] \left(\frac{\tau-c}{z-c} \right)^{E(c)} \frac{C(\tau)E(\tau)}{\tau-c} d\tau \right] + G(y, z) - \\ & - \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(z)] \left(\frac{y-b}{s-b} \right)^{|B(b)|} \frac{B(s)G(s, z)}{s-b} ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Найденное значение $C_1(y, z)$ из 23 подставляя в формулу (3), находим решение системы (1) в этом случае

$$\varphi(x, y, z) = (x-a)^{|A(a)|} \exp[-W_A^1(x)] \{ (y-b)^{|B(b)|} \exp[-W_B^1(y)] \}.$$

$$\begin{aligned}
& \left[E(z) - \int_c^z \exp[W_c^1(\tau) - W_c^1(z)] \left(\frac{\tau - c}{z - c} \right)^{C(c)} \frac{C(\tau) E(\tau)}{\tau - c} d\tau \right] + \\
& + G(y, z) - \int_b^y \exp[W_B^1(sb) - W_B^1(z)] \left(\frac{y - b}{s - b} \right)^{|B(b)|} \frac{B(s) G(s, z)}{s - b} ds + f(x, y, z) - \\
& - \int_a^x \exp[W_A^1(t) - W_A^1(x)] \left(\frac{x - a}{t - a} \right)^{|A(a)|} \frac{A(t)}{t - a} f(t, y, z) dt, \quad (24)
\end{aligned}$$

Итак, доказано

Теорема 2. Пусть в системе (1) функции $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $E(x, y, z)$, $A(x)$, $B(y)$, $C(z)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1, кроме $C(c) < 0$ и (15). Пусть $C(c) > 0$, $E(z) \in C(\overline{\Gamma}_3)$, $E(c) = 0$ с асимптотическим поведением (22). Тогда система интегральных уравнений (1) в классе $C(\overline{D})$ обращающихся в нуль на $\overline{\Gamma}_1$, $\overline{\Gamma}_2$, $\overline{\Gamma}_3$ имеет единственное решение, которое даётся формулой (24).

1.3. Случай, когда $A(a) > 0$, $B(b)$, $C(c)$ - любое

В этом случае, если решение первого уравнения системы (1) существует, тогда согласно [1] оно представимо в виде

$$\varphi(x, y, z) = f(x, y, z) - \int_a^x \exp[W_A^1(t) - W_A^1(x)] \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^{A(a)} \frac{A(t) f(t, y, z)}{t - a} dt, \quad (25)$$

Решение вида (25) существует, если $f(x, y, z) \in C(\overline{\Omega})$, $f(a, y, z) = 0$

с асимптотическим поведением

$$f(x, y, z) = o\left[(x - a)^\varepsilon\right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow a. \quad (26)$$

Подставляя найденное значение $\varphi(x, y, z)$ во второе и третье уравнение системы (1), получим следующие условия совместности

$$\begin{aligned}
& f(x, y, z) - \int_a^x \exp[W_A^1(t) - W_A^1(x)] \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^{A(a)} \frac{A(t) f(t, y, z)}{t - a} dt + \\
& \int_b^y \left[f(x, s, z) - \int_a^x \exp[W_A^1(t) - W_A^1(x)] \left(\frac{t - a}{x - a} \right)^{A(a)} \frac{A(t) f(t, s, z)}{t - a} dt \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{B(s)}{s-b} ds = g(x, y, z). \quad (27)$$

$$f(x, y, z) - \int_a^x \exp[W_A^1(t) - W_A^1(x)] \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{A(a)} \frac{A(t)f(t, y, z)}{t-a} dt +$$

$$\int_c^z \left[f(x, y, \tau) - \int_a^x \exp[W_A^1(t) - W_A^1(x)] \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{A(a)} \frac{A(t)f(t, y, \tau)}{t-a} dt \right]$$

$$\frac{C(\tau)}{\tau-c} d\tau = E(x, y, z). \quad (28)$$

Таким образом, в случае $A(a) > 0$ имеет место следующее утверждение

Теорема 3. Пусть в системе (1) $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $g(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $E(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $A(x) \in C(\bar{\Gamma}_1)$, $B(y) \in C(\bar{\Gamma}_2)$, $C(z) \in C(\bar{\Gamma}_3)$, $A(a) > 0$, $B(b)$, $C(c)$ - любое. Функция $A(x)$ в окрестности точек $x = a$ удовлетворяет условию Гёльдера. Функция $f(x, y, z)$ обладает свойством: $f(a, b, c) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x, y) = 0 \left[(x-a)^\varepsilon (y-b)^\varepsilon (z-c)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } (x, y, z) \rightarrow (a, b, c).$$

Функции $g(x, y, z)$, $E(x, y, z)$ обладают свойствами: $g(a, b, c) = 0$, $E(a, b, c) = 0$ с асимптотическими поведениями

$$g(x, y, z) = 0 \left[(x-a)^\varepsilon (y-b)^\varepsilon (z-c)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } (x, y, z) \rightarrow (a, b, c),$$

$$E(x, y, z) = 0 \left[(x-a)^\varepsilon (y-b)^\varepsilon (z-c)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } (x, y, z) \rightarrow (a, b, c).$$

Функции $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $E(x, y, z)$, $A(x)$, $B(y)$, $C(z)$ удовлетворяют условиям совместности (27), (28). Тогда система интегральных уравнений (1) в классе $C(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на $\bar{\Gamma}_1$, $\bar{\Gamma}_2$, $\bar{\Gamma}_3$, имеет единственное решение, которое даётся формулой (25).

1.4. Случай, когда $A(a) < 0$, $B(b) > 0$, $C(c)$ - любое .

В этом случае решение первого уравнения системы (1) даётся формулой (3). В случае, когда в системе (12) основным уравнением является первое уравнение этой системы и $B(b) > 0$, тогда решение первого уравнения даётся формулой

$$C_1(y, z) = G(y, z) - \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left(\frac{y-b}{s-b}\right)^{B(b)} \frac{B(s)G(s, z)}{s-b} ds. \quad (29)$$

Подставляя это значение $C_1(y, z)$ во второе уравнение системы (12) получим условие совместности в следующем виде

$$\begin{aligned} G(y, z) - \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left(\frac{y-b}{s-b}\right)^{B(b)} \frac{B(s)G(s, z)}{s-b} ds + \\ \int_c^z \left[G(y, \tau) - \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left(\frac{s-b}{z-b}\right)^{B(b)} \frac{B(s)G(s, \tau)}{s-b} ds \right] \cdot \\ \frac{C(\tau)}{\tau - c} d\tau = E(y, z). \end{aligned} \quad (30)$$

В интегральном представлении (3), вместо $C_1(y, z)$, подставляя его значение по формуле (29), находим решение системы (1) в этом случае

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = (x-a)^{|A(a)|} \exp[-W_A^1(x)] \cdot \\ \left[G(y, z) - \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left(\frac{y-b}{s-b}\right)^{B(b)} \frac{B(s)G(s, z)}{s-b} ds \right] + f(x, y, z) \\ - \int_a^x \exp[W_A^1(t) - W_A^1(x)] \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{|A(a)|} \frac{A(t)}{t-a} f(t, y, z) dt, \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, в случае $A(a) < 0$, $B(b) > 0$, $C(c)$ - любое, имеет место следующее утверждение

Теорема 4. Пусть в системе (2.1) $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $g(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $E(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $A(x) \in C(\bar{\Gamma}_1)$, $B(y) \in C(\bar{\Gamma}_2)$, $C(z) \in C(\bar{\Gamma}_3)$, $A(a) < 0$, $B(b) > 0$, $C(c)$ – любое. Функции $A(x)$, $B(y)$ соответственно в окрестности точек $x = a$ и

$y = b$ удовлетворяют условиям Гёльдера. Функция $f(x, y, z)$ обладает свойством: $f(a, b, c) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x, y) = 0 \left[(x-a)^{\delta_1} (y-b)^\varepsilon (z-c)^\varepsilon \right], \quad \delta_1 > |A(a)|, \quad \varepsilon > 0$$

при $(x, y, z) \rightarrow (a, b, c)$.

Существуют, придали (10), (11)

$$G(y, z) = o \left[(y-b)^\varepsilon (z-c)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } (y, z) \rightarrow (b, c) .$$

Функция $E(y, z) \in C(\overline{\Omega_3})$, $E(b, c) = 0$ с асимптотическим поведением

$$E(y, z) = o \left[(y-b)^\varepsilon (z-c)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } (y, z) \rightarrow (b, c) .$$

Функции $G(y, z)$, $E(y, z)$, $B(y)$, $C(z)$ удовлетворяют условию совместности (30). Тогда система интегральных уравнений (1) в классе $C(\overline{\Omega})$, обращающихся в нуль на $\overline{\Gamma_1}$, $\overline{\Gamma_2}$, $\overline{\Gamma_3}$, имеет единственное решение, которое даётся формулой (31).

1.5. Случай, когда в системе (12) основным уравнением является второе уравнение,

$$A(a) < 0, \quad C(c) > 0, \quad B(b) - \text{любое}$$

В случае, когда в системе (12) основным уравнением является второе уравнение этой системы и $C(c) > 0$, тогда решение второго уравнения даётся формулой

$$C_1(y, z) = E(y, z) - \int_c^z \exp \left[W_c^1(\tau) - W_c^1(z) \right] \left(\frac{z-c}{\tau-c} \right)^{C(c)} \frac{C(\tau) E(y, \tau)}{\tau-c} d\tau . \quad (32)$$

Подставляя это значение $C_1(y, z)$ в первое уравнение системы (12), получим условие совместности в следующем виде

$$E(y, z) - \int_c^z \exp \left[W_c^1(\tau) - W_c^1(z) \right] \left(\frac{z-c}{\tau-c} \right)^{C(c)} \frac{C(\tau) E(y, \tau)}{\tau-c} d\tau +$$

$$\int_b^y \left[E(s, z) - \int_c^z \exp \left[W_c^1(\tau) - W_c^1(z) \right] \left(\frac{z-c}{\tau-c} \right)^{C(c)} \frac{C(\tau) E(s, \tau)}{\tau-c} d\tau \right] \frac{B(s)}{s-b} ds = G(y, z) . \quad (33)$$

В интегральном представлении (3), вместо $C_1(y, z)$, подставляя его значение по формуле (32), находим решение системы (1) в этом случае

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & (x-a)^{|A(a)|} \exp[-W_A^1(x)]. \\ \left[E(y, z) - \int_c^z \exp[W_C^1(\tau) - W_C^1(z)] \left(\frac{z-c}{\tau-c} \right)^{C(c)} \frac{C(\tau)E(y, \tau)}{\tau-c} d\tau. \right] + & f(x, y, z) \\ - \int_a^x \exp[W_A^1(t) - W_A^1(x)] \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{|A(a)|} \frac{A(t)}{t-a} f(t, y, z) dt, & \quad (34) \end{aligned}$$

Таким образом, в случае $A(a) < 0$, $C(c) > 0$, $B(b)$ - любое, имеет место следующее утверждение

Теорема 5. Пусть в системе (1) $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $g(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $E(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $A(x) \in C(\bar{\Gamma}_1)$, $B(y) \in C(\bar{\Gamma}_2)$, $C(z) \in C(\bar{\Gamma}_3)$, $A(a) < 0$, $C(c) > 0$, $B(b)$ - любое. Функции $A(x)$, $C(z)$ соответственно в окрестности точек $x = a$ и $z = c$ удовлетворяют условиям Гёльдера. Функция $f(x, y, z)$ обладает свойством: $f(a, b, c) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x, y) = o \left[(x-a)^{\delta_1} (y-b)^\varepsilon (z-c)^\varepsilon \right], \quad \delta_1 > |A(a)|, \quad \varepsilon > 0$$

при $(x, y, z) \rightarrow (a, b, c)$.

Существуют, придали (10), (11). Функция $G(y, z) \in C(\bar{\Omega}_3)$, $G(b, c) = 0$ с асимптотическим поведением

$$G(y, z) = o \left[(y-b)^\varepsilon (z-c)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } (y, z) \rightarrow (b, c).$$

Функция $E(y, z) \in C(\bar{\Omega}_3)$, $E(b, c) = 0$ с асимптотическим поведением

$$E(y, z) = o \left[(y-b)^\varepsilon (z-c)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } (y, z) \rightarrow (b, c).$$

Функции $G(y, z)$, $E(y, z)$, $B(y)$, $C(z)$ удовлетворяют условию совместности (33).

Тогда система интегральных уравнений (1) в классе $C(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на $\bar{\Gamma}_1$, $\bar{\Gamma}_2$, $\bar{\Gamma}_3$, имеет единственное решение, которое даётся формулой (34).

В случае, когда в системе (12), основным уравнением является второе уравнение этой системы и $C(c) < 0$, тогда решение второго уравнения дается формулой

$$C_1(y, z) = (z - c)^{|C(c)|} \exp[-W_c^1(z)] C_1(y) + E(y, z) - \int_c^z \exp[W_c^1(\tau) - W_c^1(z)] \left(\frac{z - c}{\tau - c} \right)^{|C(c)|} \frac{C(\tau) E(y, \tau)}{\tau - c} d\tau, \quad (35)$$

где $C_1(y)$ – произвольная функция точек $\overline{\Gamma_2}$.

Решение вида (35) получено при предположении, что $E(y, z) \in C(\overline{\Omega_3})$, $E(y, c) = 0$ с асимптотическим поведением

$$E(y, z) = o\left[(z - c)^{\delta_4}\right], \quad \delta_4 > |C(c)| \quad \text{при } z \rightarrow c, \quad (36)$$

Найденное значение $C_1(y, z)$ из (35), подставляя в первое уравнение системы (12), после некоторых преобразований приходим к следующему равенству

$$C_1(y) + \int_b^y \frac{B(s) C_1(s)}{s - b} ds = (z - c)^{C(c)} \exp[W_c^1(z)] [G(y, z) - E(y, z)] + \int_c^z \left[E(y, \tau) (\tau - c)^{C(c)-1} C(\tau) \exp[W_c^1(\tau)] - \int_b^y \exp[W_c^1(\tau)] (\tau - c)^{C(c)} B(s) \frac{C(\tau) E(s, \tau)}{s - b} ds \right] d\tau. \quad (37)$$

В силу того, что левая часть этого выражения не зависит от переменного z , имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[(z - c)^{C(c)} \exp[W_c^1(z)] [G(y, z) - E(y, z)] \right] = - (z - c)^{C(c)-1} C(z) \exp[W_c^1(z)] \left[E(y, z) + \int_b^y \frac{B(\tau) E(s, \tau)}{s - b} ds \right]. \quad (38)$$

В (38), выполняя операцию дифференцирования, получим

$$C(z) G(y, z) + (z - c) \frac{\partial}{\partial z} [G(y, z) - E(y, z)] + C(z) \int_b^y \frac{B(\tau) E(s, \tau)}{s - b} ds = 0 \quad (39)$$

Принимая во внимание формулу (38), формулу (37) запишем в следующем виде

$$C_1(y) + \int_b^y \frac{B(s)C_1(s)}{s-b} ds = (z-c)^{C(c)} \exp[W_C^1(z)] [G(y,z) - E(y,z)] - \int_c^z \frac{\partial}{\partial \tau} [(\tau-c)^{C(c)} \exp[W_C^1(\tau)] [G(y,\tau) - E(y,\tau)]] d\tau$$

$$\text{В силу условия (36)} \quad \left[E(y,z)(z-c)^{C(c)} \right]_{z=c} = 0.$$

Пусть существует предел

$$\left[G(y,z)(z-c)^{C(c)} \right]_{z=c} = G(y). \quad (40)$$

Тогда задача сводится к нахождению решения следующего одномерного интегрального уравнения:

$$C_1(y) + \int_b^y \frac{B(s)C_1(s)}{s-b} ds = G(y). \quad (41)$$

Решение уравнения (41) при $B(b) > 0$ согласно [1] даётся формулой

$$C_1(y) = G(y) - \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left(\frac{s-b}{y-b} \right)^{B(b)} \frac{B(s)G(s)}{s-b} ds. \quad (42)$$

Подставляя найденное значение $C_1(y)$ в интегральное представление (35), находим решение системы (12) в этом случае

$$C_1(y,z) = (z-c)^{|C(c)|} \exp[-W_C^1(z)] \cdot \left[G(y) - \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left(\frac{s-b}{y-b} \right)^{B(b)} \frac{B(s)G(s)}{s-b} ds \right] + E(y,z) - \int_c^z \exp[W_C^1(\tau) - W_C^1(z)] \left(\frac{z-c}{\tau-c} \right)^{|C(c)|} \frac{C(\tau)E(y,\tau)}{\tau-c} d\tau, \quad (43)$$

Подставляя найденное значение $C_1(y,z)$ в формулу (3), находим решение системы (1) в этом случае

$$\varphi(x,y,z) = (x-a)^{|A(a)|} \exp[-W_A^1(x)] \{ (z-c)^{|C(c)|} \exp[-W_C^1(z)] \cdot \left[G(y) - \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left(\frac{s-b}{y-b} \right)^{B(b)} \frac{B(s)G(s)}{s-b} ds \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + E(y, z) - \int_c^z \exp[W_c^1(\tau) - W_c^1(z)] \left(\frac{z-c}{\tau-c} \right)^{|C(c)|} \frac{C(\tau) E(y, \tau)}{\tau-c} d\tau \} + \\
& + f(x, y, z) - \int_a^x \exp[W_A^1(t) - W_A^1(x)] \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{|A(a)|} \frac{A(t)}{t-a} f(t, y, z) dt. \quad (44)
\end{aligned}$$

Таким образом, в случае, когда $A(a) < 0$, $C(c) < 0$, $B(b) > 0$ и в системе (12) основным уравнением является второе уравнение, имеет место следующее утверждение

Теорема 6. Пусть в системе (1) $f(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $g(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $E(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, $A(x) \in C(\bar{\Gamma}_1)$, $B(y) \in C(\bar{\Gamma}_2)$, $C(z) \in C(\bar{\Gamma}_3)$, $A(a) < 0$, $C(c) < 0$, $B(b) > 0$. Функции $A(x)$, $B(y)$, $C(z)$ соответственно в окрестности точек $x = a$, $y = b$ и $z = c$ удовлетворяют условиям Гёльдера. Функция $f(x, y, z)$ обладает свойством $f(a, b, c) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x, y) = o\left[(x-a)^{\delta_1} (y-b)^\varepsilon (z-c)^\varepsilon\right], \quad \delta_1 > |A(a)|, \quad \varepsilon > 0$$

при $(x, y, z) \rightarrow (a, b, c)$.

Существуют, придали (10), (11). Функция $G(y, z) \in C(\bar{\Omega}_3)$, и существует предел вида (40), $G(y) \in C(\bar{\Gamma}_2)$, $G(b) = 0$ с асимптотическим поведением

$$G(y) = o\left[(y-b)^\varepsilon\right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } y \rightarrow b.$$

Функция $E(y, z) \in C(\bar{\Omega}_3)$, $E(b, c) = 0$ с асимптотическим поведением

$$E(y, z) = o\left[(y-b)^\varepsilon (z-c)^{\delta_5}\right], \quad \delta_5 > |C(c)| \text{ при } (y, z) \rightarrow (b, c).$$

Функции $G(y, z)$, $E(y, z)$, $B(y)$, $C(z)$ удовлетворяют условию совместности (39). Тогда система интегральных уравнений (1) в классе $C(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на $\bar{\Gamma}_1$, $\bar{\Gamma}_2$, $\bar{\Gamma}_3$, имеет единственное решение, которое даётся формулой (44).

Замечание 1. Из теоремы 1 и интегрального представления (20) следует.

$$\left[\left\{ \left[(x-a)^{A(a)} \varphi(x, y, z) \right]_{x=a} \right\}_{y=b} \right]_{z=c} = C_1.$$

Замечание 2. Аналогичным образом исследуется случай, когда основным уравнением является второе и третье уравнение системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. – Душанбе: Изд-во ТНУ, 1992, 235с.
2. Rajabov N. An introduction to the theory of partial differential equation with super-singular coefficients. Tehran University Publications, 1997, 228 p.
3. Раджабов Н., Мохамед Эль-Сад Абдель-Аал. Переопределенная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями. LAP LAMBERT Academic Publishing. – Germany, 2011, 234 p.
4. Раджабов Н. Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе: Изд-во «Деваштич», 2007, 221с.
5. Rajabov N. Volterra Type Integral Equation with Boundary and Interior Fixed Singularity and Super-singularity Kernels and Their Application. – Dushanbe: “Irfon”, TNU, 2010, 295 p.
6. Rajabov N. Volterra Type Integral Equation with Boundary and Interior Fixed Singularity and Super-singularity Kernels and Their Application, LAP LAMBERT Academic Publishing. – Germany, 2011, 282 p

Н.РАҶАБОВ

СИСТЕМАИ СЕ МУОДИЛАИ ХАТИИ БАРЗИЕД МУАЙАНШУДАИ ИНТЕГРАЛИИ НАМУДИ ВОЛТЕРРА БО СЕ СОХАИ СИНГУЛЯРӢ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола якумин бор системаи се муодилаи хатии барзиед муайаншудаи намуди Волтерра бо ядроҳои сингулярӣ омӯхта шудааст. Тасвири умумии ҳал ба воситаи як доимии ихтиери ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: системаҳои барзиед муайаншудаи интегралӣ, шартҳои якҷояшави, ядроҳои сингулярӣ, тасвирҳои бисершаклаи ҳалҳо.

N.RAJABOV

THREE LINEAR OVERDETERMINED SYSTEM VOLTERRA TYPE INTEGRAL EQUATION WITH SINGULAR DOMAINS

Tajik National University

In this work in first time, three linear Volterra type over determined system integral equation with three singular domains is investigated. Obtained integral representation of the manifold solution with one arbitrary constant, in depend from that, in system (1) some equation is fundamental.

Key words: over determined system integral equation, jointly condition, singular kernels, representation manifold solution.

УДК 81'322::519.25

З.Д.УСМАНОВ

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ПО ПРИМЕНЕНИЮ ГАММА-КЛАССИФИКАТОРА

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

Поступила в редакцию 21.05.2021 г.

γ -классификатор – это математическая триада, состоящая из цифрового портрета (ЦП) объекта исследования, формулы расстояния между объектами и алгоритма обучения по прецедентам. Созданный в 2017 г. он успешно расширяет сферу своих приложений. В работе наряду с описанием самого классификатора в краткой форме излагаются полученные с его помощью результаты.

Ключевые слова: машинное обучение, классификатор, применение, обзор достижений.

γ -классификатор – это математическая триада, состоящая из цифрового портрета (ЦП) объекта исследования, формулы расстояний между объектами и алгоритма обучения по прецедентам. С момента своего появления в 2017 году γ -классификатор, [см. 1, 2], наряду с нейронными сетями и машиной опорных векторов подтвердил свою эффективность, прежде всего, в решении задач идентификации авторов текстов. В связи с тем, что с тех пор фронт исследований с помощью нового классификатора значительно расширился и появилось большое число работ, связанных с его применением, возникла необходимость описать направления развития исследований и достижения, полученные в этой области.

1. Цифровой портрет объекта. Предположим, что для описания объекта \mathbb{O} используется конечное множество признаков (элементов) $\mathbb{C} = \{c_k\}, k = \overline{1, m}$, значения которых являются случайными величинами.

Адрес для корреспонденции: Усманов Зафар Джураевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Институт математики НАНТ. Email: zafar-usmanov@rambler.ru

Определение 1. *Цифровым портретом (ЦП) объекта \mathbb{O} будем называть распределение в нем частот встречаемости элементов множества \mathbb{C} .*

Итак, цифровой портрет объекта – это пара, составленная, во-первых, из множества его элементов и, во-вторых, из информации об относительной частоте встречаемости в объекте самих элементов.

Определение 2. *Множество \mathbb{C} , элементы которого упорядочены каким-либо образом, назовём алфавитом \mathbb{C}^* объекта \mathbb{O} .*

ЦП объекта \mathbb{O} записывается в табличном виде:

$$\begin{array}{l} N: \quad 1 \quad 2 \quad \dots m \\ P: \quad p_1 \quad p_2 \quad \dots p_m, \end{array}$$

в котором первая строка – порядковые номера (индексы) элементов алфавита \mathbb{C}^* (m – число элементов), а вторая – их относительные частотности в \mathbb{O} , причём $\sum_{k=1}^m p_k = 1$.

Цифровому портрету сопоставляется монотонно возрастающая дискретная функция

$$F(s) = \sum_{k=1}^s p_k \quad (s = 1, \dots, m).$$

2. Расстояния между цифровыми портретами текстов. Пусть $\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2$ – пара объектов, характеризуемых на основе единого алфавита \mathbb{C}^* , и

$$F^{(\alpha)}(s) = \sum_{k=1}^s p_k^{(\alpha)} -$$

соответствующие им ЦП, представленные дискретными функциями, $\alpha = 1, 2$, и $s = 1, \dots, m$.

Определение 3. *Расстоянием между объектами \mathbb{O}_1 и \mathbb{O}_2 называется положительное число $\rho(\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2)$, определяемое формулой*

$$\rho(\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2) = \sqrt{m/2} \max_s |F^{(1)}(s) - F^{(2)}(s)|. \quad (1)$$

Иными словами, $\rho(\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2)$ вычисляется как максимальное расстояние по оси ординат между дискретными функциями $F^{(1)}(s)$ и $F^{(2)}(s)$ объектов \mathbb{O}_1 и \mathbb{O}_2 , помноженное на весовой коэффициент $\sqrt{m/2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно проверить, что величина $\rho(\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2)$ зависит от порядка ранжирования элементов алфавита \mathbb{C}^* на фоне $m!$ других возможных вариантов. Ка-

кому из них следует отдать предпочтение? В предшествующих работах этот вопрос не затрагивался, поскольку в качестве объекта исследования в них рассматривались тексты, а распознавания их авторства на основе случайно выбранных алфавитов \mathbb{C}^* , как правило, отличались большой точностью. Однако поднятый вопрос заслуживает внимания и к его рассмотрению мы вернемся в дальнейшем.

3. Алгоритм обучения по прецедентам – это третья составная часть математической триады, которая совместно с двумя другими частями названа γ -классификатором. Обучение алгоритма классификации производится в соответствии с правилом \mathbb{R} , в котором прецедентами являются объекты “однородные”, если они принадлежат отдельным образам (классам), и “неоднородные”, если принадлежат разным образам.

Пусть γ - некоторое положительное число.

Определение 4. Пару объектов \mathbb{O}_1 и \mathbb{O}_2 назовём γ - однородными, если

$$\rho(\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2) \leq \gamma, \quad (2)$$

и γ - неоднородными, если

$$\rho(\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2) > \gamma. \quad (3)$$

Неравенства (2) и (3) по-существу являются математической интерпретацией (моделью) предложенного правила. Очевидно, что от значения γ зависит однородность или неоднородность любой пары объектов, а потому и степень выполнимости правила.

Однородность всех объектов одного класса в рамках математической модели означает справедливость неравенства (2), а неоднородность любых двух объектов разных классов – справедливость неравенства (3). Правило \mathbb{R} может нарушаться для каких-то пар объектов из одного и того же класса в случае, когда вместо (2) имеет место неравенство (3), а также в случае, когда какие-то два объекта из двух различных образов удовлетворяют неравенству (2) вместо того, чтобы выполнялось неравенство (3).

Подсчитывая одновременно в двух случаях суммарное количество $\tau = \tau(\gamma)$ нарушений правила \mathbb{R} , определим для фиксированного γ ($0 < \gamma < 1$) эффективность выполнения правила \mathbb{R} величиной π , задаваемой формулой

$$\pi = 1 - \tau(\gamma) / L, \quad (4)$$

где L - число взаимных расстояний между всеми парами объектов, содержащихся в обучающей выборке. Из этой формулы следует, что π может принимать значения из отрезка $[0, 1]$, причём $\pi = 0$, если $\tau = L$, и $\pi = 1$, если $\tau = 0$. В первом случае математическую модель γ -классификатора следует признать абсолютно непригодной, а во втором – полностью согласованной с обучающей выборкой.

Поскольку эффективность π зависит от значения γ , то представляет интерес определить его таким образом, чтобы *общее число τ нарушений неравенств (2), (3) на элементах обучающей выборки оказалось минимальным*. В связи с тем, что $\tau(\gamma)$ является кусочно-постоянной положительной функцией, целочисленной в полуинтервалах $[\rho^*, \rho^{**})$ между любыми двумя ρ^* и ρ^{**} соседними значениями расстояний, нахождение её минимального значения осуществляется посредством перебора всех её вычисляемых значений на конечном числе полуинтервалов, общее число которых не превосходит величины $L + 2$. Процедура определения оптимального значения γ была названа *настройкой классификатора* на данных обучающей выборки. Если такая настройка окажется успешной, то можно говорить о решении задачи обучения γ -классификатора.

4. Применение γ -классификатора. Алгоритм обучения по прецедентам подробно описан в двух статьях. В [1] алгоритм представляется в общем виде, не привязанном к конкретным прикладным задачам. В нём на множестве дискретных случайных величин с возможными значениями среди m чисел натурального ряда введена метрика, на основе которой исследуется вопрос об эффективности представления множества в виде совокупности непересекающихся подмножеств однородных элементов.

В статье [2] рассматривается однопараметрическая математическая модель кластеризатора дискретных случайных величин. Его настройка по данным обучающей выборки, распределенной по классам, производится путём определения оптимального значения параметра. Вычисляется показатель эффективности откалиброванного кластеризатора, позволяющий эксперту оценить возможность его использования в качестве классификатора.

4.1. В том же 2017 г., после появления упомянутых работ, начались первые приложения их результатов. В [3] расписывается общий подход к задачам распознавания авторства с использованием буквенных униграмм, биграмм и словоформных униграмм в применении к одной и той же опытной коллекции текстов, составленной из 10 художественных произведений (по 2 произведения от 5 авторов), написанных на таджикском языке. В [4] для случая буквенных униграмм ($m = 35$: таджикский алфавит состоит из такого количества букв) установлено всего лишь одно нарушение $\tau = 1$ неравенства (2), и потому эффективность π распознавания автора по формуле (4), оказалась равной 0.977.

В [5] для случая буквенных биграмм (их число m равно $1225 = 35^2$) установлено, как и в предыдущем случае, всего лишь одно нарушение $\tau = 1$ неравенства (2), и потому эффективность π распознавания автора по формуле (4), также оказалась равной 0.977.

Для словоформных униграмм [6] число $m = 170958$. Нарушение неравенств (1) и (2) произошло для одного автора двух произведений и для одной пары произведений двух авторов. Следовательно, $\tau = 2$, и потому $\pi = 0.955$.

4.2. Таким образом, на примере экспериментальной коллекции произведений и 4-х цифровых портретов текстов классификатор показал вполне приемлемую для практиче-

ского использования эффективность. Почти одновременно с упомянутым направлением исследований, развернулись работы по определению минимальных объёмов выборки словоформ и минимального числа высокочастотных буквенных n -грамм для распознавания автора таджикского текста, [7-9].

В [7, 8] обнаружено, что γ -классификатор способен распознавать с точностью до 96% автора текстового фрагмента размером вплоть до 625 слов (2800 символов) и с точностью не менее 84% автора текстового фрагмента размером даже до 150 слов (670 символов). В [9] для целей существенного сокращения объёма вычислительных процедур установлена возможность эффективного использования не всех, а только высокочастотных элементов алфавита буквенных n -грамм ($n = 1, 2, 3$).

4.3. В 2018 г. предложена дополнительная однопараметрическая математическая модель кластеризатора, настраиваемого на основе самообучения. Последнее ограничено двумя условиями: число классов, а также набор вариантов относительно возможного распределения объектов по классам известны заранее. Для каждого варианта вычисляется показатель эффективности, по максимальному значению которого фиксируется величина параметра, [10].

4.4. Первоначальные итоги распознавания “однородных” текстов показали, что точность результатов зависит не только от каждой из трёх частей математической триады, но также и от состава обрабатываемых текстов. Причина, по которой большинство результатов основывалось на обработке текстов художественной литературы, обуславливалась тем, что в настоящее время именно в этой сфере человеческой деятельности создано большое количество электронных текстовых корпусов, доступных для исследователей. Тем не менее для изучения перспективности применения триады вначале используются модельные коллекции текстов, содержащие небольшое количество произведений. Например, в работах [11-13] обрабатывались коллекции на таджикском языке, составленные из 12 произведений 5 авторов: А.Фирдоуси “Бежан бо Манижа” и “Рустам ва Сӯҳроб”; Дж.Руми “Маснави Маънавӣ, Дафтари 1” и “Маснави Маънавӣ, Дафтари 2”; А.Суруш “Дафтари 1” и “Дафтари 2”; С.Айни “Одина”, “Аҳмади Девбанд”, “Дохунда” и “Марги судхӯр”; С.Турсун “Нисфирӯзӣ” и “Повести Камони Рустам”.

4.5. Однако применения математической триады не ограничивались только цифровыми портретами на основе буквенных n -грамм и текстами из художественной литературы. Перспективность успешного использования γ -классификатора проявлялась в распознаваниях текстов экономико- и историко-политического содержания [14-16], а также на цифровых портретах, основанных на распределении частотности слогов, знаков препинаний, длин слов и предложений, [17-20].

4.6. В статье [21] дано описание программного комплекса Tajik Text Author (ТТА), предназначенного для распознавания автора незнакомого текста на основе символьных n -грамм ($n = 1, 2, 3$). Принятие решений осуществляется с точностью до 96% при распозна-

вании авторов текстовых фрагментов на таджикском языке размером до 625 слов (2800 символов) и с точностью не менее 84% для фрагментов не менее 150 слов (670 символов).

Для модельной коллекции из двенадцати образцов советской прозы была принята попытка применить настроенную на идентификацию авторства триаду на опознавание “однородных” по тематикам произведений, [22]. Для одного и того же цифрового портрета (на основе буквенных триграмм с пробелами) настройка на авторов осуществлялась на основе гипотезы об “однородности” авторских произведений и “разнородности” произведений различных авторов, а настройка по тематике предполагала “однородность” произведений по отдельности для текстов о Великой Отечественной и Гражданской войнах, а “неоднородность” - для пары произведений о разных войнах. Вычисления показали, что в первом случае точность опознавания авторов оказывалась равной 83%, а во втором случае – совсем неудовлетворительная, около 52%. Вероятная причина заключалась в том, что в обоих случаях использовался однотипный цифровой портрет, который оказался неприемлемым для распознавания тематик произведений. Из этого напрашивался вывод, что не только метод обработки данных, но также и количественный образ объектов исследований важны для достижения высоких результатов.

4.7. Этот факт подтвердился при изучении вопроса об автоматическом распознавании авторства и стилей 68 произведений 7-и таджикско-персидских литературных школ [23]. Также как и в [22], цифровой портрет на основе буквенных триграмм с пробелами использовался для распознавания авторов сочинений и литературных школ. Настройка классификатора на “однородность” в первом случае выдавала точность ответа не менее 98.6%, а во втором – 80% , то есть полученные результаты не сильно отличаются друг от друга и могут на практике применяться для распознавания и авторов, и литературных школ с использованием γ -классификатора.

Итак, на основании предыдущих двух результатов можно заключить, что *едва ли один и тот же ЦП может успешно служить для определения текстов с различными “однородными” признаками.*

4.8. В дополнение к сказанному следует обратить внимание на статью [24], в которой *выявляются особенности применения γ -классификатора при распознавании авторства.* В ней обрабатывается та же самая модельная коллекция, что и в [20], составленная из 3-х частей (классической и современной поэзиями и современной прозы), причём для простейшего типа цифрового портрета, когда в качестве элементов текста выбираются n -граммы (с пробелами, $n = 1, 2, 3$). Для формулирования дальнейших результатов предвзвешенно вводятся следующие обозначения множества n -грамм ($n = 1, 2, 3$) в зависимости от упорядочения своих алфавитных элементов рассматриваются в 4-х вариантах:

1) элементы располагаются в алфавитном порядке (с пробелом в качестве последнего элемента алфавита); этот вариант обозначается как ABC ¹;

2) элементы располагаются в порядке, обратном алфавитному (с пробелом в качестве первого элемента алфавита); обозначается как CBA ²;

3) элементы располагаются в порядке убывания их частотности в тексте; обозначается символом “↘”;

4) элементы располагаются в порядке возрастания их частотности в тексте; обозначается символом “↗”.

Для каждого из 4-х вариантов упорядочения n -грамм ($n = 1, 2, 3$) путём автоматической обработки формируются в табличном виде (1) цифровые портреты всех произведений коллекции и затем по формулам (2) и (3) вычисляются расстояния между парами текстов на таджикском языке по отдельности из классической поэзии, современной поэзии и современной прозы. Отметим, что расстояния, вычисляемые между любыми двумя текстами для различных вариантов расположения алфавитных элементов, оказываются в общем случае различными. В этом можно убедиться на простых примерах.

Из результатов вычислений получены следующие выводы:

1) наивысшее значение $\pi = 1$ коэффициента эффективности распознавания автора текста реализуется для произведений классической поэзии на триграммах, упорядоченных как по ABC , так и по CBA ;

2) значения коэффициентов π эффективности на основе порядков ABC и CBA расположения n -грамм ($n = 1, 2, 3$) равны;

3) значения коэффициентов π эффективности на основе порядков расположения n -грамм ($n = 1, 2, 3$) по убыванию (↘) или возрастанию (↗) также равны;

4) значение коэффициента π эффективности на основе порядка ABC и CBA расположения n -грамм ($n = 1, 2, 3$) не ниже значения, основанного на порядке расположения n -грамм ($n = 1, 2, 3$) по убыванию (↘) или возрастанию (↗);

5) коэффициент π эффективности распознавания автора произведений современной поэзии как для любых n -грамм ($n = 1, 2, 3$), так и для всех вариантов их упорядочения, определяется значением 0.98;

¹ Для биграмм и триграмм – с двумя и тремя пробелами в конце.

² Для биграмм и триграмм – с двумя и тремя пробелами в начале.

б) коэффициенты π для произведений современной прозы несколько ниже аналогичных значений для произведений классической и современной поэзии;

7) полуинтервалы оптимальных значений γ для двух противоположных порядков расположения n -грамм ($n = 1, 2, 3$) одинаковы.

Из огромного количества всевозможных вариантов упорядоченного расположения элементов текста были рассмотрены только четыре: два из них - связанных с алфавитным порядком, и два других – с учётом частотности элементов. Именно в этих двух случаях, прямого и обратного порядков упорядочения элементов, расстояния между любыми парами произведений оказывались равными, вследствие чего равными оказывались коэффициенты π эффективности γ -классификатора. Другие допустимые варианты нуждаются в специальном исследовании.

4.9. Согласно Рудману¹ для изучения особенностей авторского стиля современный исследователь может воспользоваться около тысячей разнообразными признаками текста. Однако, несмотря на обилие таковых, к ним может быть присоединен ещё один, принципиально новый признак, связанный с так называемым алфавитным $\alpha\beta$ -кодированием словоформ, [25]. Этот признак описывает присутствие в текстах *анаграмм*. Для целей исследования этому понятию вместо привычного придается новое

Определение 5. Анаграмма (нетривиальная) – конечное множество (по крайней мере, пара) словоформ с общим α -кодом, [26].

С помощью α -кодирования словоформ тексту сопоставляется некое множество $\alpha\beta$ -кодов с их частотностью, обозначаемое через $M^{(\alpha\beta)}$ [27]. Оно, в свою очередь, разделяется на два подмножества: одно из них - $M_1^{(\alpha\beta)}$ содержит только однозначные коды (им соответствуют единственные словоформы), а другое $M_2^{(\alpha\beta)}$ – только многозначные (им соответствуют не менее двух словоформ). Дальнейшее детальное представление подмножества

$M_2^{(\alpha\beta)}$ через $M_2^{(\alpha\beta,2)}$, $M_2^{(\alpha\beta,3)}$, $M_2^{(\alpha\beta,4)}$ и $M_2^{(\alpha\beta,2)} \cup M_2^{(\alpha\beta,3)}$ описаны в статьях [28- 30]. Распределения частотностей элементов этих множеств, каждое по своему, характеризуют произведения.

На примере модельной коллекции текстов на таджикском языке, той же самой, что и в [20], составленной из 3-х частей (классической и современной поэзиями и современной прозы), для цифровых портретов, основанных на применении различных подмно-

¹ Rudman J. The state of authorship attribution studies: Some problems and solutions //Computers and Humanities. – 1998. – Vol.31. – p. 351-365.

жеств $\alpha\beta$ - кодов словоформ (связанных с анаграммами), получены следующие результаты: при определении авторства достигнута точность в пределах от 82% до 93.3%, в то время как для определения жанров – в пределах от 73.3% до 84.3%. Не столь значительное отличие результатов предоставляет возможность практического применения γ -классификатора на основе анаграмм для распознавания и авторов, и жанров произведений.

4.10. Статьи [31, 32] интересны в том смысле, что подтверждают возможность применения γ -классификатора к решению задач распознавания текстов с однородными признаками для различных языков, в частности, и для узбекского. В упомянутых исследованиях распознавание авторов осуществляется на основе буквенных униграмм и биграмм.

4.11. В настоящее время математическая триада с γ -классификатором в качестве алгоритма обучения по прецедентам проникает в новую область исследования – распознавания языка произведений. К примеру, в статье [33] для коллекции из 10 текстов на пяти языках (английском, немецком, испанском, итальянском и французском) с использованием латинской графики подтверждается 100%-ная статистическая способность γ -классификатора для автоматического распознавания языка произведения на основе частотности общих 26 латинских алфавитных букв.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Необходимо отметить, что расстояние $\rho(T_1, T_2)$ между двумя текстами, вычисляемое по формуле (1), зависит от характера ранжирования элементов алфавита \mathbb{C}^* . Это, в свою очередь, влияет на количество $\tau = \tau(\gamma)$ нарушений правила \mathbb{R} , см. п.3 и, следовательно, на определяемый формулой (4) коэффициент эффективности π выполнения правила \mathbb{R} . В этой связи возникает вопрос, какому именно алфавиту следует отдать предпочтение.

Однако, вместо формулы (1) в рамках триады возможно использование, например, евклидова расстояния между текстами T_1 и T_2 :

$$\rho(T_1, T_2) = \left[\left(p_1^{(1)} - p_1^{(2)} \right)^2 + \left(p_2^{(1)} - p_2^{(2)} \right)^2 \cdots \left(p_m^{(1)} - p_m^{(2)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

значение которого не зависит от порядка следования элементов в алфавите.

И тогда поставленный вопрос не будет иметь особого значения. Тем не менее представляет интерес исчерпывающим образом изучить зависимость величины π от выбора алфавита \mathbb{C}^* , поскольку частные примеры показывают возможность достижения более высоких показателей эффективности при использовании именно формулы (1).

В обозримом будущем предполагается развернуть исследования по приложению γ -классификатора к распознаванию изображений и голоса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усманов З.Д. Классификатор дискретных случайных величин. ДАН РТ, 2017, т. 60, № 7-8, с. 291-300.
2. Усманов З.Д. Алгоритм настройки кластеризатора дискретных случайных величин. ДАН РТ, 2017, т. 60, № 9, с. 392-397.
3. Усманов З.Д. N-граммы в распознавании однородных текстов . -Материалы 20 научно-практического семинара «Новые информационные технологии в автоматизированных системах». – Москва, 2017, № 20, с. 52-54.
4. Косимов А.А. Оценка эффективности использования униграмм при идентификации текста. ДАН РТ, 2017, т. 60, № 3-4, с. 132-137.
5. Косимов А.А. Оценка эффективности использования биграмм при идентификации текста. ДАН РТ, 2017, т. 60, № 5-6, с. 224-229.
6. Ашурова Ш.Н., Косимов А.А. Оценка эффективности использования словесных униграмм при идентификации текста. Известия АН РТ. Отделение физ-мат, хим, геол и техн наук. 2017, № 2(167), с. 49-54.
7. Косимов А.А. Определение минимального объёма выборки слов для идентификации текста. Вестник Таджикского национального университета, Серия естественных наук. Мат-лы Международной научной конференции «Современные проблемы математики и их приложения». – Душанбе, Куляб, 14-15 июня 2017, № 1/5, с. 178-180.
8. Косимов А.А. О минимальном объёме текста, необходимого для распознавания его автора. ДАН РТ, 2017, т.60, № 9, с. 398-401.
9. Косимов А.А. О минимальном числе высокоточных N-грамм, необходимых для распознавания автора текста. - Российско-китайский научный журнал «Содружество», Ежемесячный научный журнал, научно-практической конференции, 2017, часть 1, № 17, с. 58-59.
10. Усманов З.Д. Об одном эвристическом кластеризаторе. ДАН РТ, 2018, т.61, № 2, с. 140-143.
11. Косимов А.А., Бахтеев К.С. Применение специфичного цифрового портрета для идентификации авторов произведений. Известия АН РТ. Отделение физ-мат, хим, геол и техн наук. 2019, № 3 (176), с. 7-11.
12. Косимов А.А. О распознавании автора текста на основе частотности буквенных униграмм. ДПДТТХ ба номи М.С. Осимӣ. – Хучанд, 2019, с. 11.
13. Косимов А.А., Бахтеев К.С. О распознавании автора текстового фрагмент. Известия АН РТ. Отделение физ-мат, хим, геол и техн наук. 2019, № 4 (177). с. 18-25.
14. Солиев О.М., Косимов О.А. Идентификация авторов экономико- политических произведений с помощью символьных триграмм. Вестник ПИТТУ имени академика М.С. Осими «Научно-технический журнал», Худжанд, 2019, №2 (11), с. 22-29.
15. Косимов О.А. Идентификация авторов экономико-политических произведений с помощью символьных униграмм. В сб.: Состояние и перспективы развития ИТ-образования. Сборник докладов и научных статей Всероссийской научно-практической конференции. – Чувашская Республика, 2019, с. 131-138.
16. Косимов А.А., Каюмов А.А. Муайянкунии муаллифи асарҳои таърихию-сиёсӣ бо воситаи униграммаҳои рамзӣ. [Электронный ресурс] – Душанбе, 2020. URL: <https://ravshanfikir.tj/navalamon/muajyankunii-muallifi-asar-oi-ta-rikhiyu-sijos-bo-vositai-unigramma-oi-ramz.html> (дата опубликования: 17.08.2020).
17. Худойбердиев Х.А., Косимов А.А. О распознавании автора текста на основе частотности слов. ДАН РТ, 2019, т. 62, № 11-12, с. 641-645.

18. Каюмов М.М. О цифровом портрете текстовой информации, основанном на частотности знаков пунктуации. Политехнический вестник. Серия Интеллект. Инновации. Инвестиции, 2019, № 1 (45), с. 7-10
19. Каримов А. А. О распознавании автора текста на основе частотности длин слов. Политехнический вестник. Серия Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2019, №1 (45), с. 7-10
20. Косимов А.А., Бахтеев К.С. О распознавании автора текста на основе частотности длин предложений . ДАН РТ, 2020, т. 63, № 3-4, с. 180-186.
21. А.А. Косимов. Программный комплекс *tajik_text_author* Политехнический вестник. Серия Интеллект. Инновации. Инвестиции. №1 (45) 2019, с. 22-28.
22. Усманов З.Д., Косимов А.А. О метризации произведений художественной литературы. Материалы 21 научно-практического семинара "Новые информационные технологии в автоматизированных системах". – Москва, 2018, № 21, с. 183-186.
23. Усманов З.Д., Косимов А.А. К вопросу об автоматическом распознавании авторства и стилей произведений таджикско-персидской художественной литературы. ДАН РТ, 2020, т. 63, № 1-2, с. 49-54.
24. Усманов З.Д., Косимов А.А. О влиянии цифрового портрета текста на распознавание автора произведения. Известия АН РТ, Отделение физ-мат, хим, геол и техн наук, 2020, №. 3 (180), с. 36-42.
25. Усманов З.Д. Об упорядоченном алфавитном кодировании слов естественных языков. ДАН РТ, 2012, т. 55, № 7, с. 545-548
26. Усманов З.Д. Автоматический поиск и статистические закономерности множества анаграмм (монография). - Душанбе: изд-во “Дониш”, 2020, 81 с.
27. Усманов З.Д., Косимов А.А. Автоматический поиск анаграмм словоформных n -грамм. ДАН РТ, 2020, т. 63, № 5-6, с. 316-321.
28. Каюмов М.М. О распознавании автора текста на основе частотности $\alpha\beta$ -кодов словоформ. Политехнический вестник. Серия Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2020, № 2 (51), с. 18-24
29. Каюмов М.М. О распознавании авторов произведений на основе частотности однозначных и многозначных $\alpha\beta$ -кодов словоформ. Известия АН РТ, Отделение физ-мат, хим, геол и техн наук, 2020, №. 4(181), с. 30-40
30. Каюмов М.М. О распознавании авторов произведений на основе частотности n -значных $\alpha\beta$ -кодов словоформ. ДНАНТ, 2020, т. 81, № 1-2,
31. Худойбердиев Х.А., Косимов А.А., Зулфикарова П.Э. О распознавании автора текста на узбекском языке с помощью символьных униграмм. Проблемы вычислительной и прикладной математики, - Ташкент, 2020, № 6(30), с. 49-55.
32. Косимов А.А., Зулфикарова П.Э. О распознавании автора текста на узбекском языке с помощью символьных биграмм. Ежегодная межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов имени Е.В.Арменского, МИЭМ НИУ ВШЭ, Секция №1 "Математика и компьютерное моделирование", 2020, с. 50-51.
33. Usmanov Z.D., Rosimov A.A. About the automatic recognition of the languages of works based on the latin alphabet. SCIENTIFIC COLLECTION «INTERCONF», THE ISSUE CONTAINS: Proceedings of the 8th International Scientific and Practical Conference SCIENCE AND PRACTICE: IMPLEMENTATION TO MODERN SOCIETY, Manchester, Great Britain, 26-28.12.2020, № 3 (39), pp. 834-840.

З.Ҷ.УСМОНОВ

БАРРАСИИ НАТИЧАҲО ДОИР БА ТАТБИҚИ ГАММА-ТАСНИФГАР

Институти математика ба номи А. Ҷӯраеви

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

γ -таснифгар – ин сегонаи математикие, ки аз симой рақамии (СР) объекти тадқиқот, формулаи масофаи байни объектҳо ва алгоритми омӯзишӣ дар асоси претседент, иборат аст. Он соли 2017 сохта шуда, доираи замимаҳои худро бомуваффақият васеъ намуда истодааст. Дар ин мақола дар баробари тавсифи худи таснифкунанда, натиҷаҳои бо ёрии он ба даст омада ба таври мухтасар оварда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: омӯзиши мошинӣ, таснифгар, татбиқ, баррасии дастовардҳо.

Z.D.USMANOV

OVERVIEW OF RESULTS ON APPLICATION OF GAMMA CLASSIFIER

A. Dzhuraev Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The γ -classifier is a mathematical triad consisting of a digital portrait (CP) of an object of study, a formula for distances between objects, and a precedent-based learning algorithm. Created in 2017, it has successfully expanded its scope of applications. In this work, together with the description of the classifier itself, the results obtained with its help are briefly presented.

Key words: machine learning, classifier, application, review of achievements.

УДК 523.532

Г.И.КОХИРОВА

ДОСТИЖЕНИЯ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ НАУКИ ПОД РУКОВОДСТВОМ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК ТАДЖИКИСТАНА

Институт астрофизики НАН Таджикистана

Поступила в редакцию 10.06.2021 г.

Приведена краткая историческая справка о становлении и развитии астрономической и астрофизической науки в Республике Таджикистан, начиная с 1932 г и по настоящее время. Показаны основные достижения Института астрофизики под руководством Национальной академии наук Таджикистана и вклад ведущих ученых Института в его становлении, развитии и выводе на ведущие позиции. Показаны перспективы дальнейшего развития астрономии и астрофизики в республике.

Ключевые слова: астрономия, астрофизика, Институт астрофизики, обсерватория, академия, Таджикистан, сотрудничество, кадры.

Астрономия имеет глубокие исторические корни в Таджикистане и в других странах Центральной Азии. Сведения об астрономических исследованиях в этом регионе приведены в книге Авеста, в произведениях великих ученых средневековья Абурайхони Беруни, Абуали ибн Сино, Ал-Хоразми, Омар Хайяма, Ал-Кушчи, Шах Мирзо-Улугбека, Ал-Фороби и др. Развитие астрономии в период государства Саманидов, самаркандская астрономическая школа, древняя обсерватория на Памире с возрастом 2500 лет также подтверждают вышесказанное.

Современная астрономическая наука в Таджикистане берёт начало от Таджикской астрономической обсерватории (ТАО), учреждённой 13 ноября 1932 г. Постановлением СНК Таджикской ССР [1]. ТАО в 1948 г. была переименована в Сталинабадскую астрономическую обсерваторию (САО). В САО 4 октября 1957 г. успешно выполнены наблюдения первого искусственного спутника Земли. С этого исторического события началось

Адрес для корреспонденции: Кохирова Гулчехра Исроиловна. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бухоро, 22, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: kokhirova2004@mail.ru

активное освоение космоса и превращение астрономии во всеволновую науку. Появилась насущная потребность в обсерваториях с хорошими условиями для астрономических наблюдений. Географическое положение и астрономический климат Таджикистана соответствуют наилучшим условиям наблюдений. Постановлением ЦК КП и Совета министров Таджикской ССР от 17 января 1958 г. САО была преобразована в Институт астрофизики Академии наук Таджикской ССР, ныне Национальная академия наук Таджикистана [1]. Поскольку полноценные астрономические исследования невозможны без наблюдений, за короткий исторический период в Таджикистане были созданы две современных астрономических обсерватории с прекрасным астрономическим климатом. Это Гиссарская астрономическая обсерватория, построенная в 1964 г., и Международная астрономическая обсерватория Санглох, начавшая функционирование в 1981 г. Позже в 1995 г. Постановлением Правительства Республики Таджикистан за №723 от 6 декабря 1995 г. статус филиала Международной астрономической обсерватории Санглох получила Памирская обсерватория. Памирская астрономическая обсерватория была построена по инициативе Главной астрономической Пулковской обсерватории АН СССР и Института космических исследований АН СССР в начале 70-х гг. XX в. и называлась «Памирская астрономическая экспедиция Академии Наук СССР». Обсерватория находится в урочище Шорбулок Мургабского района Горно-Бадахшанской Автономной области Республики Таджикистан (Восточный Памир) на высоте 4350 м и является уникальной наблюдательной базой.

Основные характеристики обсерваторий ИА НАНТ приведены в Таблице, где λ – географическая долгота, φ – географическая широта, Н – высота над уровнем моря, N – количество наблюдательных часов в году, А – астрономический индекс (качество изображения в угловых секундах), Р – оптическая прозрачность атмосферы [1].

Таблица

Основные характеристики астрономических обсерваторий Института астрофизики НАНТ

Обсерватория	λ , град.	φ , град.	Н, м	N, ч	A"	P
Гиссар	68.6	38.5	730	1620	2.10	0.72
Санглох	69.0	38.2	2300	1700	0.54	0.78
Памир	74	38	4350	1820	0.54	0.86

Кроме обсерваторий в структуру Института астрофизики НАНТ входят научные подразделения: Отдел межпланетных тел, Отдел физики комет и астероидов, Группа ионосферы. В институте работали и работают 2 академика и 4 члена-корреспондента НАНТ, докторов наук – 10, кандидатов наук – более 20. В настоящее время общее количество сотрудников – 64, научного персонала – 35, в аспирантуре ежегодно обучаются в среднем 2 аспиранта.

Цель и задачи Института астрофизики - исследование и использование космоса в мирных целях. Основные научные направления института: Малые тела Солнечной системы, астрометрические задачи, переменные звезды, комплексы звездообразования и их эволюция, ионосфера Земли. Сегодня по этим направлениям разрабатываются три проблемы: 1. Межпланетные тела Солнечной системы и метеорное вещество. 2. Физика ко-

мет и активные процессы в ядрах комет. 3. Ионосферные эффекты сильных землетрясений. В последнее время начаты исследования малоразмерных фрагментов космического мусора и переменных звезд. В задачи Института также входят подготовка астрономических кадров и популяризация астрономических знаний.

С 2014 г. Институт принимает активное участие в работе, связанной с нормативно-правовыми документами по проекту Соглашения о сотрудничестве в области исследования и использования космического пространства в мирных целях государств-участников СНГ. Эту сферу деятельности Института координирует Правительство РТ и Президиум НАНТ. В течение 2014-2020 гг. директор Института астрофизики Кохирова Г.И. по поручению Президиума НАНТ принимала участие в систематическом изучении и обсуждении проекта Соглашения, вносила предложения и конкретизировала позицию Института и Национальной академии наук Таджикистана, и, следовательно, позицию Республики Таджикистан в этом многостороннем Соглашении. В результате этой многолетней работы, 2 ноября 2018 г. в г. Астана, Казахстан, Соглашение о совместной многосторонней деятельности государств-участников СНГ в области исследования и использования космического пространства в мирных целях было подписано государствами-участниками СНГ. Решением Маджлиси намояндагони Маджлиси Оли Республики Таджикистан № 169 от 14 октября 2020 г. Соглашение ратифицировано и получило официальное признание для Республики Таджикистан. В рамках Соглашения создан Межгосударственный совет по космосу, куда входят представители каждого государства, подписавшего Соглашение. В декабре 2020 г. из Правительства РТ в Президиум НАНТ поступил запрос о назначении компетентного органа от Республики Таджикистан для реализации Соглашения. Институт астрофизики внес предложение рассмотреть возможность назначения таким органом Национальную академию наук Таджикистана. Соглашение охватывает целый ряд различных вопросов и областей использования и исследования космического пространства совместно с государствами-участниками СНГ. К компетенции и деятельности Института астрофизики, как структуры НАНТ, непосредственное отношение имеет 4 статья Соглашения «исследование космического пространства, в том числе астрофизические и планетные исследования, астероидно-кометная опасность». Институт астрофизики НАНТ имеет возможность координировать свои исследования в этом направлении с профильными учреждениями государств-участников СНГ в рамках этого Соглашения. В 2019-2021 гг. Президиум НАНТ и Институт уже осуществляют реализацию Соглашения в этом направлении, ведя переговоры с государственной корпорацией «Роскосмос» РФ о возможности включения астрономических обсерваторий Таджикистана в программы «Роскосмоса», связанные с наблюдениями космического мусора и астероидно-кометной опасностью.

С момента создания и по настоящее время в Институте выполнен широкий фронт наблюдений естественных и искусственных космических объектов. Проведены глубокие фундаментальные исследования метеоров и верхней атмосферы Земли, комет и астероидов, звезд и галактик, которые имеют важное прикладное значение. Под руководством

академиков П.Б. Бабаджанова и О.В. Добровольского здесь сформировались признанные в мире научные школы по метеорному веществу и по физике комет. Международный астрономический союз (МАС) высоко оценил вклад ученых Института в астрономическую науку, присвоив малым планетам имена «Таджикистан», «ГисАО» и имена 8 ведущих учёных Института: (3013) “Dobrovoleva”, (4011) “Bakharev”, (4206) “Kiselev”, (4207) “Chernova”, (3945) “Gerasimenko”, (7164) “Babadzhanov”, (3436) “Ibadinov”, (24533) “Kokhirova”. За большие достижения в научных исследованиях в 1969 г. Институт астрофизики награждён Орденом Трудового Красного Знамени.

Исследования метеоров занимают важное место в деятельности Института. Под руководством академика НАНТ П.Б. Бабаджанова в Гиссарской астрономической обсерватории был реализован метод «мгновенного фотографирования метеоров», позволивший впервые в мире получить мгновенные изображения метеоров и их спектров и установить факт дробления метеорных тел [2-5]. Впервые в СССР были осуществлены одновременные фотографические и радиолокационные наблюдения одних и тех же метеоров. Многолетние комплексные (фотографические, спектральные, телевизионные, радиолокационные) исследования метеоров, в том числе по программам международного геофизического года (МГГ), Международного года спокойного Солнца (МГСС), ГЛОБМЕТ, Международной программы исследования кометы Галлея (ИНУ) и Советской экваториальной метеорной экспедиции (Сомали, 1968-1970 гг., руководитель П.Б. Бабаджанов) дали обширную информацию о радиантах, скоростях, массах, плотностях, пористости и орбитах десятков тысяч метеоров [см. 6 и приведенную там библиографию]. Выявлены новые метеорные потоки и ассоциации, оценен приток метеорного вещества на Землю, Венеру и Марс. В Институте создана и реализована теория квазинепрерывного дробления метеоров [7], исследованы процессы ионизации и деионизации вещества метеоров в атмосфере Земли.

Выполнены важные исследования по эволюции метеороидных роев и получены совершенно новые представления об их форме и динамике. Впервые установлено, что большинство коротко периодических метеороидных роев под действием притяжения больших планет могут породить 4, а некоторые до 8 метеорных потоков [см. 6 и приведенную там библиографию]. Показано, что по «метеорному» признаку часть астероидов является «высохшими» кометами и вместе со связанными с ними метеороидными роями образуют метеороидно-астероидные комплексы [см. 6 и приведенную там библиографию]. Такие комплексы были обнаружены среди метеороидных роев Тауриды, Писциды, Квадрантиды, Скорпииды, Сигма-Каприкорниды, Акварида и др. В 2018 г. было показано, что среди открытых к настоящему времени околоземных астероидов 440 объектов представляют собой вымершие кометные ядра или спящие фрагменты более крупных кометных тел. Это количество составляет около 3% от общего числа АСЗ (почти 19000), обнаруженных до 2018 г. Результаты выявления угасших ядер комет среди астероидов, сближающихся с Землей, опубликованы в виде каталога [8]. Сотрудниками Отдела метеорной астрономии (ныне Отдел межпланетных тел) совместно с учеными России и Сло-

вакии создан каталог орбит 126 короткопериодических комет и банк данных оскулирующих элементов орбит больших планет на интервале 20 тыс. лет.

Под руководством П.Б. Бабаджанова разработана методика определения плотности метеороидов по данным фотографических наблюдений слабых метеоров, сфотографированных камерами Супер Шмидт. На основе физической теории метеоров и по результатам двухстанционных фотографических наблюдений метеоров в Душанбе, Киеве и Одессе впервые определена средняя минералогическая и объемная плотность метеороидов, принадлежащих девяти метеорным потокам и спорадическому фону. Средняя минералогическая плотность метеороидов заключена в пределах 2.2 г/см^3 (Персеиды) и 3.4 г/см^3 (Квадрантиды, дельта-Аквариды и альфа-Каприкорниды). Средняя объемная плотность метеороидов, найденная на основе теории квазинепрерывного дробления метеороидов в земной атмосфере, варьирует от 0.4 г/см^3 (Леониды) до 2.9 г/см^3 (Геминиды). Используя соотношение между минералогической и объемной плотностями, оценена пористость метеороидов. Показано, что метеороиды Геминид имеют самую низкую пористость, т.е. являются очень рыхлыми, тогда как метеороиды Драконид и Леонид имеют наиболее пористую структуру (83%). Эти результаты подтверждают пористость вещества родительских тел метеороидов – комет и астероидов. Результаты, впервые полученные П.Б. Бабаджановым совместно с Г.И. Кохировой, имеют очень важное фундаментальное и прикладное значение и были опубликованы в 2009 г. в международном ведущем рецензируемом журнале *Astronomy and Astrophysics* [9].

Заслуги академика П.Б. Бабаджанова высоко оценены - за цикл работ по фотографическим исследованиям метеоров в 1977 г. он был удостоен Государственной премии Таджикской ССР им. Абуали ибн-Сино, в 2003 г. удостоен премии имени С.У.Умарова НАНТ за цикл работ по исследованию эволюции метеороидных роев и их связи с околоземными объектами, за значительный вклад в астрономическую науку и подготовку кадров в 2009 г. П.Б.Бабаджанову присуждена Межгосударственная премия СНГ «Звезды Содружества» в номинации «Наука и образование». Признанием вклада Пулата Бабаджановича в астрономическую науку является Решение Международного астрономического союза от 1998 г. о присвоении одной из новых малых планет №7164 имени «Babadzhanov» в честь П.Б. Бабаджанова.

В 2009 г. с целью изучения болидов и процессов разрушения крупных метеороидов в атмосфере Земли в Таджикистане была создана фотографическая болидная сеть, первая и единственная в Средней Азии (руководитель – член-корреспондент НАНТ, д.ф.-м.н. Г.И.Кохирова). Сеть состояла из 5 наблюдательных станций, оснащенных болидными и цифровыми камерами с объектива типа «рыбий глаз». Систематические фотографические наблюдения болидов проводились во все безлунные ясные ночи одновременно в двух обсерваториях Института – в ГисАО и на Санглохе, и трех пунктов в Раште, Ховалинге, Курган-Тюбе. Все пять станций сети оперировали с 30.03.2009 г. до 2013 г., в настоящий момент болидные наблюдения проводятся с двух пунктов - в ГисАО и на Санглохе. За время работы сети проведено более 6000 часов одновременных наблюдений,

в результате получены базисные фотографии более 200 болидов, для большинства из них также имеются цифровые изображения. В результате астрометрической и фотометрической обработки данных болидных наблюдений определены динамические и физические параметры метеороидов, породивших сфотографированные болиды. Каталог данных болидных наблюдений опубликован [10]. Также опубликован Каталог аналогичных данных фотографических метеорных наблюдений, выполненных в Отделе в 1957-1983 гг. [11]. Успешное функционирование болидной сети в Таджикистане и значительные научные результаты, полученные в рамках этой деятельности, получили высокую оценку и в республике, и за ее пределами. В июле 2014 г. решением Международного Астрономического Союза за большой вклад Кохирова Г.И. в исследовании малых тел Солнечной системы ее именем “Kokhirova” названа новая малая планета № 24533. Это восьмая планета, названная в честь ученого астронома из Таджикистана. Каталог данных болидных наблюдений был выдвинут на соискание Премии им. С.У.Умарова НАНТ в области физико-математических, химических, геологических и технических наук и в 2021 г. Кохирова Г.И. стала лауреатом этой престижной награды. За ценный вклад в развитие астрономических и астрофизических исследований, за подготовку высококвалифицированных кадров и активную популяризацию астрономических знаний, в 2021 г. решением Совета по присуждению Межгосударственной премии «Звезды Содружества» Межгосударственного фонда гуманитарного сотрудничества стран-участников СНГ Кохирова Г.И. удостоена звания лауреата этой Премии за 2020 г. в номинации «Наука и образование».

Спектральные исследования метеоров позволили определить температурные параметры возбуждения и излучения метеорной комы, концентрацию ионов кальция и свободных электронов в метеорной коме [см. 6 и приведенную там библиографию].

В настоящее время Отдел межпланетных тел проводит в ГисАО и в обсерватории Санглох фотографические, в том числе цифровые наблюдения болидов, астероидов, как Главного пояса, так и околоземного космического пространства, комет, активных астероидов, комет Главного пояса, объектов семейства кентавров, мелкоразмерных фрагментов космического мусора и других объектов.

Результаты исследования метеоров позволили выяснить вклад метеоров в ионизацию верхней атмосферы и определить физические параметры и ветровой режим в метеорной зоне атмосферы Земли (60-120 км), изучить характеристики циркуляции атмосферы Земли в метеорной зоне и установить зависимость скорости ветра в этой зоне от солнечной активности [см. 6 и приведенную там библиографию].

Радиофизические методы исследования метеоров привели к изучению ионосферы Земли, распространению радиоволн и к сейсмоионосферным эффектам. Из результатов исследований ионосферы стало очевидно, что состав и физические свойства ионосферы Земли чувствительны к сильным землетрясениям. Максимальный сейсмоионосферный эффект проявился за 2-3 суток перед катастрофическим землетрясением в поселке Шарора Гиссарского района 23 января 1989 г. Исследования связи аномальных явлений в ионосфере и в атмосфере привели к заключению, что эти явления могут быть использованы

для разработки методов краткосрочных прогнозов катастрофических землетрясений [см. 6 и приведенную там библиографию].

Значительный вклад в развитие исследований метеоров, болидов, межпланетных тел, выявлении их взаимосвязей и происхождения внесли академик НАНТ, д.ф.-м.н., профессор П.Б.Бабаджанов, член-корреспондент НАНТ, д.ф.-м.н. Г.И.Кохирова, к.ф.-м.н. Н.А.Коновалова, к.ф.-м.н. М.Нарзиев, к.ф.-м.н. У.Х.Хамроев, в прошлые годы Л.А.Катасев, А.М.Бахарев, В.И.Иванников, д.ф.-м.н. Ю.В.Обрубков, к.ф.-м.н. В.С.Гетман, к.ф.-м.н. И.М.Хаимов, к.ф.-м.н. К.Х.Саидов, О.Ф.Золова, д.ф.-м.н. А.Ф.Заусаев, А.Н.Пушкарев, д.ф.-м.н. Г.Г.Новиков, к.ф.-м.н. В.М.Колмаков, к.ф.-м.н. Р.Ш.Бибарсов, Р.П.Чеботарев, к.ф.-м.н. Ш.О.Исамутдинов и другие. В изучении верхней атмосферы Земли и ионосферных процессов внесли к.ф.-м.н. Л.Н.Рубцов, к.ф.-м.н. А.В.Блохин, к.ф.-м.н. О.Алимов, и другие. В создание и эксплуатацию радиотехнического комплекса заметный вклад внесли инженера В.Н.Сидорин, Г.А.Полушкин, Е.Струк, В.Ковалев, С.Марченко, В.Н.Филин, С.Гапоненко и другие.

Под руководством академика НАНТ О.В. Добровольского в Институте астрофизики развиты все разделы физики комет, накоплен обширный наблюдательный и экспериментальный материал. Сотрудник института А.М.Бахарев в 1955 г. открыл новую комету, зарегистрированную как комета Бахарева-Макфарлана-Кринке. Выполнены позиционные, фотографические, фотометрические, электрофотометрические, поляриметрические и спектральные наблюдения комет, развита механическая теория кометных форм и разработаны эффективные методы решения задач этой теории, заложены основы электромагнитной теории комет. Сотрудниками Института открыта отрицательная поляризация и опозиционный эффект в интегральном излучении головы комет, установлено зарастание ядер части короткопериодических комет тугоплавкой коркой, исследованы нестационарные процессы в кометах и установлена их связь с солнечной активностью, выявлены механизмы вспышек яркости комет, установлены новые закономерности нестационарной активности ядер комет, исследованы плазменные и пылевые хвосты комет, установлены новые закономерности в формировании плазменной и нейтральной составляющей комет, развита теория дезинтеграции ядер комет из конгломерата льдов и тугоплавких частиц и его эволюции в астероидоподобное тело, заложены основы теории ударных волн, возникающих при взаимодействии намагниченного корпускулярного солнечного ветра с кометной плазмой, развита физическая теория головы кометы, исследовано взаимодействие частиц межпланетной пыли с пылевыми частицами, атмосферы кометы и предложены механизмы рентгеновского излучения комет, возникновения многозарядных ионов.

Совместно с ФТИ им. Иоффе РАН создан метод лабораторного моделирования кометных явлений, который был реализован в Институте астрофизики. В результате получены приоритетные результаты о физико-механических свойствах моделей поверхности ядра кометы, закономерностей его зарастания тугоплавкой коркой, выяснены механизмы образования тугоплавких веществ и корки на поверхности ядра кометы, механизмы образования газопылевых струй в кометах.

Выполнены наблюдения ряда крупных астероидов главного пояса, изучены их фазовые кривые блеска, фотометрические и поляриметрические подобию и различия астероидов и комет.

Институт астрофизики участвовал в подготовке нескольких проектов изучения комет из космоса, в том числе в разработке и реализации международной (ИНВ) и советской (СОПРОГ) программ исследования кометы Галлея, в разработке проектов КАТРАН, БЕННЕТ, ИКОМ. Наблюдения кометы Галлея, выполненные в Таджикистане, были использованы при реализации проекта космической миссии ВЕГА к этой комете в 1985-1986 гг. и включены в международный архив данных. Результаты исследований свойств ядер комет использованы при подготовке международного проекта космической миссии «Розетта».

Научный сотрудник Института астрофизики Герасименко С.И. является первооткрывателем кометы 67P/Чурюмова-Герасименко. Эту комету Европейское космическое агентство в сотрудничестве с Национальным космическим агентством США выбрало в качестве целевого объекта для исследования с помощью космической миссии «Розетта». В 2004 г. межпланетная автоматическая станция «Розетта» запущена в долгий полет к комете и их встреча произошла в 2014 г. «Розетта» - первый космический аппарат, который вышел на орбиту кометы. 12 ноября 2014 г. Герасименко С.И. участвовала в наблюдениях посадки на поверхность ядра этой кометы спускаемого аппарата «Филы» космической миссии «Розетты» в центре управления полетом в Германии (рис.1-2). Получив впервые эту уникальную возможность непосредственного полноценного и всестороннего изучения ядра кометы Чурюмова-Герасименко, ученые смогут ответить на многие вопросы, связанные с образованием малых тел Солнечной системы, включая вопросы возникновения жизни на Земле, образования и сохранения воды в Солнечной системе. Сегодня все человеческое сообщество может гордиться, что является свидетелем такого грандиозного события, результаты работы миссии «Розетта» значительно расширят наши знания об окружающем мире, о нас самих, повысят уровень нашей цивилизованности, и, в конечном счете, побудят нас к более бережному отношению к нашей родной планете Земля. Сотрудница Института Герасименко С.И. за открытие кометы Чурюмова-Герасименко в 2017 г. была удостоена Государственной премии Республики Таджикистан им. Абуали ибн Сино в области науки и техники.



Рис. 1-2. Снимок кометы 67P/Чурюмова-Герасименко, полученный миссией «Розетта» (верхнее фото) и Светлана Герасименко – первооткрыватель кометы, научный сотрудник Института астрофизики НАНТ.

В формировании кометной научной школы в Таджикистане, создании новых теорий, методов и средств исследований комет, а также в полученных результатах существенный вклад внесли сотрудники Института академик НАНТ О.В.Добровольский, к.ф.-м.н. Л.С.Марочник, к.ф.-м.н. Н.М.Хашимов, к.ф.-м.н. С.А.Алиев, член-корреспондент НАНТ, д.ф.-м.н. Х.И.Ибадинов, д.ф.-м.н. Н.Н.Киселев, к.х.н. Г.П.Чернова, член-корреспондент НАНТ, д.ф.-м.н. С.И.Ибадов, к.ф.-м.н. П.Е.Егибеков, к.ф.-м.н. О.И.Мамадов, к.ф.-м.н. Р.С.Ошеров, к.ф.-м.н. З.М.Иоффе, С.И.Герасименко, к.ф.-м.н. А.А.Рахмонов, к.ф.-м.н. Ш.Ш.Шоёкубов, к.ф.-м.н. Ф.А.Тупиева и другие.

С запуском первого искусственного спутника Земли в 1957 г. связаны наблюдения искусственных спутников Земли (ИСЗ) и астрометрические работы в Таджикистане [12]. После ввода в эксплуатацию в 1964 г. Гиссарской астрономической обсерватории института и строительства Высокоточной астрономической установки (ВАУ) эти работы стали интенсивно развиваться. ВАУ позволяет проводить фотографические наблюдения ИСЗ в

широком диапазоне видимых скоростей и обладает значительной проникающей силой. Институт участвовал в создании базы данных по международным программам «ИНТЕРКОСМОС», «МЕРИТ», «БОЛЬШАЯ ХОРДА», во всесоюзных программах «ФОН», и «ФОКАТ», созданы астрометрический стандарт в созвездии Лебедя и каталог геостационарных спутников Земли (ГСС) [13-15]. Позиционные наблюдения искусственных спутников использованы для коррекции орбиты межпланетных станций и ИСЗ и создания каталогов геостационарных спутников. Оперативные наблюдения ГСС используются для контроля и управления космических аппаратов. В последнее время проводятся наблюдения слабых геостационарных спутников (ГСС) (17-18 звездных величин) и их фрагментов с использованием ПЗС матрицы, позволяющей обрабатывать получаемую информацию в реальном режиме времени.

Большой вклад в астрометрические исследования, наблюдения ИСЗ внесли сотрудники института к.ф.-м.н. А.Г.Крылов, к.ф.-м.н. Ф.Н.Масуми, М.И.Гулямов, к.ф.-м.н. Н.Н.Матвеев, В.Чумаченко, О.Наимов и другие.

Наблюдения переменных звезд в Таджикистане начались с первых дней образования астрономической обсерватории под руководством профессора Московского государственного университета Б.В. Кукаркина, сотрудников института В.П. Цесевича, а затем А.В. Соловьева и О.П. Васильяновской. Создана уникальная фототека «Служба неба», состоящая из почти 70 тысяч снимков. На ее базе были открыты 2 новые звезды и более 100 переменных звезд, изучены закономерности и механизмы изменчивости звезд и предложена их классификация по изменчивости и по спектру, обнаружены протопланетные облака. Была найдена важная характеристика для установления шкалы расстояний во Вселенной - поправка к нулю пункту зависимости «период - светимость». Впервые обнаружено явление поляризации излучения в протопланетных газовых оболочках переменных звезд и установлена неоднородность их пылевой оболочки. С вводом метрового телескопа на обсерватории Санглох в 1981 г. стали развиваться фотометрические, поляриметрические и спектральные наблюдения слабых объектов, экстремально молодых звезд типа Т Тельца, Ae/Be Хербига, рентгеновских двойных систем, ядер галактик.

Большой вклад в исследования переменных звезд, кроме вышеназванных ученых, внесли к.ф.-м.н. А.Я.Филин, к.ф.-м.н. Н.М.Шаховской, к.ф.-м.н. Г.Е.Ерлексова, к.ф.-м.н. В.С.Сатывалдиев, д.ф.-м.н. Н.Н.Киселев, Е.К.Киселева, к.ф.-м.н. Ю.В.Борисов, д.ф.-м.н. Н.П.Редькина и другие.

Исследование галактик в институте имело, в основном, теоретический характер. Л.С.Марочник, член-корреспондент НАНТ, д.ф.-м.н. М.Н.Максумов, д.ф.-м.н. Ф.С.Сахибов, А.А.Сучков и другие разработали методы исследования динамики и эволюции бесстолкновительных, гравитационно связанных систем частиц и изучили динамические проявления коллективных гравитационных взаимодействий звезд в галактиках как статистических системах. Исследовано происхождение фундаментальной спиральной структуры галактик, развита обобщенная теория спиральных возмущений звездной плотности, объяснено подразделение класса нормальных спиральных галактик по форме спи-

ральных узоров на 3 подкласса, выявлена единая динамическая основа морфологических классификаций галактик, принадлежащих Хабблу и Ванден-Бергу. Исследования комплексов звездообразования в галактиках, проведенные д.ф.-м.н. Ф.С.Сахибовым, показали, что спиральные волны плотности в галактиках сказываются не только в особенностях движения звезд и межзвездного газа, но и в своеобразии процессов позднего звездообразования.

Институт в 1958-90 годы издавал Всесоюзный научный журнал Астросовета АН СССР «Кометы и метеоры», с 1952 г. издаёт научный журнал – «Бюллетень Института астрофизики АН РТ», проводит исследования по истории астрономии, занимается подготовкой специалистов и просвещением. Систематизированы астрономические представления ираноязычных народов с древнейших времен, обобщены сведения о зиджах, о планетах, кометах, метеорах и других небесных явлениях. Изучается история и опыт становления астрономии в Республике Таджикистан.

В 2017 г. начаты пионерские работы по оцифровке фотопластинок и фотоплёнок, накопленных в фототеке Института в течение многолетних астрономических наблюдений. В частности, имеется 70 тысяч фотопластинок, полученных по программе Служба неба, 1570 фотопластинок, экспонированных в рамках проекта ФОН, большое количество фотоплёнок с метеорными и болидными наблюдениями. С приобретением профессионального сканера Microtek ScanMaker 1000XL Plus Scanner начато сканирование фотопластинок проекта ФОН, на этой основе будет создан новый Каталог точных положений и блеска звезд северного неба. В этом направлении также планируется в дальнейшем создание электронной базы данных наблюдений в Таджикистане, т.е. создание виртуальной обсерватории и внедрение ее в мировую виртуальную обсерваторию. В годы независимости Таджикистана в Институте зарождается новое направление – астроархеология. Археологами республики на восточном Памире обнаружено сооружение, которое оказалось древним астрономическим объектом. Начато серьезное изучение этого и других подобных древних сооружений на территории Таджикистана.

Институт астрофизики уделяет много внимания подготовке молодых астрономов. По инициативе института и поддержке Правительства республики в Таджикистане в 1999 г. в Таджикском национальном университете открыта специальность «Астрономия». Гиссарская астрономическая обсерватория и обсерватория Санглох Института стали научной и учебной базой для этой специальности. Для выявления способной молодежи и привлечения её в астрономию при Институте действует секция астрофизики Малой академии наук.

Институт астрофизики плодотворно сотрудничает с ведущими научными учреждениями и учеными мира. Среди них Международный астрономический союз, а также такие учреждения Российской Академии наук, такие как Институт астрономии, Институт прикладной астрономии, Главная Пулковская астрономическая обсерватория, Крымская астрофизическая обсерватория. Имеется сотрудничество с Государственным астрономическим институтом им. П.К.Штернберга МГУ, Санкт-Петербургским государственным

университетом; с астрономическими учреждениями Украины - Главной астрономической обсерваторией Национальной академии наук Украины, Николаевской обсерваторией, Одесским государственным университетом; с Бюраканской астрофизической обсерваторией Национальной академии наук Армении; с Астрономическим институтом им. Улугбека Академии наук Республики Узбекистан; Астрономическим Институтом Академии наук Словакии; Астрономическим Институтом Академии наук Чехии; Лондонским университетом Королевы Марии; с Синцзянской астрономической обсерваторией Академии наук Китайской Народной Республики. С частью из учреждений сотрудничество ведется в рамках Меморандумов. В Институте выполнялись работы по международным проектам ЮНЕСКО и МНТЦ. Сотрудничество осуществляется в виде совместных наблюдений и обработки, публикации совместных статей и презентации на международных конференциях, обмен визитами ученых и пр. Институт получает около двадцати научных изданий из этих и других стран и международных организаций. Для более плодотворного международного сотрудничества и совместного использования астрономических обсерваторий Таджикистана имеются хорошие возможности и создана юридическая база.

С 2005 г. и по настоящее время в Институте выполнены и выполняются 4 научно-исследовательских проекта при поддержке Президентского Фонда фундаментальных исследований, выполнены три международных проекта при поддержке Международного Научно-Технического Центра.

Результаты научных исследований, полученных в Институте, опубликованы в таких международных рецензируемых ведущих журналах, как «Astronomy and Astrophysics», «Advances in Space Research», «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society», «Planetary and Space Science», «Meteoritics and Planetary Sciences», «Astronomy Reports», «Solar System Research», «Astronomy Letters», electronic circulars of the IAU MPC, «Астрономический Вестник», «Астрономический журнал» и другие.

Официальный сайт Института астрофизики АН РТ размещен по адресу www.inastr.tj, где имеется полная информация о научно-организационной деятельности Института, доступная для каждого заинтересованного лица.

Новая эпоха в деятельности Международной астрономической обсерватории Санглох

Астрономические обсерватории Таджикистана являются достоянием республики. В годы независимости Республики Таджикистан Институт начал их модернизацию. На Гиссарской астрономической обсерватории внедрена новая техника и технология астрономических наблюдений (ПЗС матрицы), накопления, обработки и передачи информации. Уже выполнены ПЗС наблюдения метеоров, комет, слабых ГСС (17-18 звёздных величин) и их фрагментов, шаровых скоплений, планетарных туманностей.

Обсерватория Санглох расположена на горе Санглох в Дангаринском районе, в 90 км от Душанбе в юго-восточном направлении. Обсерватория была построена в 1978-80 гг. и оснащена зеркальным телескопом с диаметром зеркала 1 м. Телескоп был изготовлен в

компании Карл Цейсс, г. Йена, ФРГ, и установлен на Санглохе в 1980 г. [16]. Телескоп Цейсс-1000 может «видеть» очень слабые космические объекты, удаленные от Земли на расстояния более миллионов километров, и в частности, телескоп различает объекты размером 10 см на расстоянии 40 тысяч км от Земли [17]. Качество изображений телескопа сравнимо с показателями 2-х метрового телескопа [18]. В 1985 г. во время очередного приближения кометы Галлея к Солнцу в обсерватории Санглох с помощью телескопа Цейсс-1000 получены ее первые наземные снимки, в то время как комету не смогли обнаружить в других обсерваториях мира даже с помощью 6 м телескопа [19]. В этот период видимый блеск кометы равнялся 22 звездным величинам, т.е. она была очень тусклой [19].

В те годы в обсерватории Санглох активно проводились наблюдения и исследования звезд, комет, астероидов, включая спектральные и поляризационные наблюдения. Обсерватория была одной из лучших в мире по астроклиматическим условиям и по научным результатам астрономов и астрофизиков Таджикистана.

К сожалению, события гражданской войны в Таджикистане в 1992–1997 гг. нанесли обсерватории серьезный материальный и научный урон. Телескоп Цейсс-1000 обсерватории Санглох был выведен из строя, его управление разрушено, наблюдения с помощью этого телескопа прекратились. В тот период напряженная обстановка в стране не позволила ученым Института продолжить полноценную научную работу в обсерватории. После восстановления мира и согласия, а также приобретения Республикой Таджикистан Независимости ресурсов и сил молодого государства было недостаточно для немедленного восстановления одного из крупнейших телескопов в регионе. Поэтому телескоп Цейсс-1000 Санглоха находился в нерабочем состоянии более 25 лет.

В соответствии с созидательными инициативами Основателя мира и национально-го единства, Лидера нации, Президента Республики Таджикистан уважаемого Эмомали Рахмона, при полной поддержке Правительства Республики Таджикистан и Президиума НАНТ в 2014-2016 гг. была разработана и реализована Стратегия восстановления обсерватории Санглох и укрепления астрономической науки в Таджикистане. В рамках Стратегии выполнены работы по восстановлению и модернизации телескопа Цейсс-1000 обсерватории Санглох Института астрофизики НАНТ, одного из крупнейших телескопов региона, выполнен капитальный ремонт 6-ти этажной башни телескопа и всех помещений обсерватории (рис. 3).

После восстановления и модернизации управление движением телескопа и проведение наблюдений выполняются с помощью компьютеров и специальных астрономических программ [20]. Более того, впервые осуществлено автоматическое наведение телескопа на выбранные объекты по заданным координатам. Новая цифровая камера со специальным ССД приемником для астрономических наблюдений присоединена к телескопу, с помощью которой получают изображения космических объектов. Использование ССД приемника значительно увеличило чувствительность камеры, таким образом, значительно повысилась эффективность телескопа. Изображения выводятся на экран персонального

компьютера, теперь можно быстро их обрабатывать и получать результаты в реальном режиме времени. Кроме наблюдений околоземных объектов также появилась возможность наблюдать очень далекие и сверхслабые объекты [20]. Раньше мониторинг таких объектов с применением фотопленок и фотопластинок был невозможен.

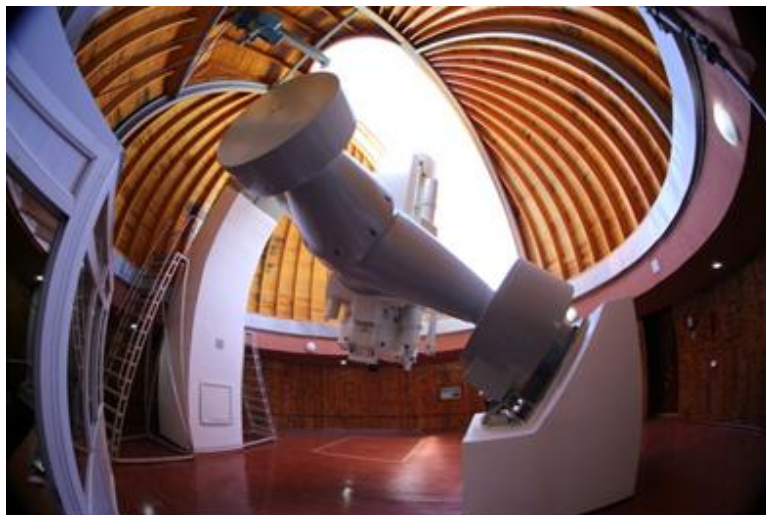


Рис. 3. Телескоп Цейсс-1000 обсерватории Санглох после реконструкции в 2016 г.

Таким образом, в свете конструктивной политики Президента страны уважаемого Эмомали Рахмона, направленной на укрепление и совершенствование национальной науки и образования, обсерватория Санглох была вновь открыта после 26-летнего перерыва, что является важнейшим достижением таджикского народа и науки. Летом 2016 г. с помощью восстановленного и модернизированного телескопа Цейсс-1000 Международной астрономической обсерватории Санглох Института астрофизики НАНТ был получен новый «Первый свет», и начался новый этап функционирования телескопа [20]. В астрономии «Первым светом» называют изображения небесных объектов, впервые полученных с помощью новых или восстановленных и модернизированных телескопов. Башня телескопа Цейсс-1000 и обсерватория Санглох после восстановления и ремонта показаны на рис. 4.

Необходимо отметить, что астроклимат и оптические параметры Международной астрономической обсерватории Санглох являются одними из лучших в мире [16-19]. С учетом большого научного и международного значения астрономических наблюдений, изучения и исследования малых тел Солнечной системы в годы независимости после 26-летнего простоя при поддержке Основателя мира и национального единства, Лидера нации, Президента Республики Таджикистан уважаемого Эмомали Рахмона в течение 2014-2016 гг. обсерватория Санглох была восстановлена и запущена в эксплуатацию.

Восстановление и модернизация телескопа, ремонт зданий и помещений обсерватории Санглох осуществлены при полной поддержке и всесторонней помощи Правительства Республики Таджикистан, Президента НАНТ академика Фархода Рахими и Президиума НАНТ. Работы выполнены под руководством директора Института астрофизики

НАНТ, чл.-корр. Кохировой Г.И. с участием инженеров Института астрономии РАН и Научно-исследовательского института «Крымская астрофизическая обсерватория» РАН, и активным участием сотрудников Института астрофизики НАНТ.



Рис. 4. Башня телескопа Цейсс-1000 и панорама обсерватории Санглох.

8 июня 2016 г. с участием Основателя мира и национального единства, Лидера нации, Президента Республики Таджикистан уважаемого Эмомали Рахмона состоялось открытие Международной астрономической обсерватории Санглох Института астрофизики Национальной академии наук Таджикистана на горе Санглох Дангаринского района Хатлонской области после ее реконструкции и модернизации (рис.5).



Рис. 5. Выступление Основателя мира и национального единства, Лидера нации, Президента Республики Таджикистан уважаемого Эмомали Рахмона во время открытия Международной астрономической обсерватории Санглох 8 июня 2016 г.

Президент страны, знакомясь с условиями обсерватории, подчеркнул, что центр станет хорошей базой для обучения молодых кадров. Сотрудникам Института астрофизики НАНТ было поручено сотрудничать с учеными из развитых стран в целях укрепления астрономической школы Таджикистана (рис. 6).



Рис. 6. Встреча Основателя мира и национального единства, Лидера нации, Президента Республики Таджикистан уважаемого Эмомали Рахмона с учеными Национальной академии наук Таджикистана в Международной астрономической обсерватории Санглох 8 июня 2016 г.

Руководствуясь поручениями, высказанными во время этой исторической встречи, Институт астрофизики НАНТ наладил плодотворное сотрудничество обсерватории Санглох с ведущими научными учреждениями и учеными мира. Среди них Институт астрономии РАН, Институт прикладной астрономии РАН, Главная Пулковская астрономическая обсерватория РАН, Крымская астрофизическая обсерватория РАН, Государственный астрономический институт им. П.К.Штернберга МГУ, Главная астрономическая обсерватория Национальной академии наук Украины, Астрономическая обсерватория Киевского госуниверситета им. Т.Шевченко, Синцзянская астрономическая обсерватория Академии наук Китайской Народной Республики, обсерватория Цефеид Республики Индия и др.

После восстановления телескопа Цейсс-1000 в обсерватории Санглох проводятся систематические наблюдения астероидов, комет, мелкоразмерных фрагментов космического мусора и других объектов Солнечной системы. В наблюдения и исследования

включены такие интересные объекты, как астероид Шейла, который относится к новому классу переходных объектов «кометы главного пояса» или «активные астероиды» [21]. Такие объекты имеют двойственную природу и малоизучены. Подтверждена сублимационная активность астероида Интерамния [22], выполнены наблюдения кометы 29P из группы кентавров [23], активных астероидов 2008GO98 [24] и Дон Кихот [25], астероида Фаэтон [26], определены новые физические и динамические характеристики этих объектов, в том числе построены их геометрические фигуры, которые могут способствовать пониманию их происхождения и природы. Часть наблюдений и исследований выполняются в сотрудничестве с учеными России, Украины, Словакии, Китая, Индии и др. В обсерваториях Таджикистана в 2016 г. проведены наблюдения потенциально опасного астероида 2014JO25 [27] и в 2018 г. – кометы 41P [28] совместно с обсерваториями России, США, Китая и др. В рамках международной программы наблюдения переменных звезд (Variable Stars Net) с 2019 г. в обсерватории Санглох выполняются совместные с другими обсерваториями многоцветные наблюдения вспышек новых карликовых звезд [29,30]. Отметим, что наблюдения звезд в обсерватории Санглох начаты впервые за годы независимости Республики Таджикистан и благодаря восстановлению и модернизации телескопа Цейсс-1000.

На основе выполненных наблюдений получены совершенно новые оригинальные результаты, которые уже доложены на международных конференциях и опубликованы в ведущих астрономических международных журналах. Данные наблюдений в обсерватории Санглох и ГисАО, зарегистрированных в MPC с кодами 092 и 093, включены в мировую базу данных Международного астрономического союза - Международный центр малых планет [31] и доступны всему мировому научному сообществу, что подтверждает, что наши результаты соответствуют мировым стандартам астрономических наблюдений.

Кроме того, опубликованные новые результаты используются для подготовки специалистов Таджикского национального университета. По результатам наблюдений в обсерватории Санглох уже защищены три кандидатской диссертации, несколько соискателей готовят диссертации. Обсерватория координирует свою деятельность с кафедрой астрономии физического факультета Таджикского национального университета, в обсерватории обучаются студенты.

Перспективы дальнейшего развития астрономических исследований в Таджикистане

Институт астрофизики был и остаётся центром астрономической науки и подготовки высококвалифицированных астрономических кадров в Таджикистане. Перспектива астрономических исследований в республике в ближайшие 10-15 лет определяется, главным образом, перспективой развития Института, актуальностью проводимых здесь исследований, темпом модернизаций астрономических обсерваторий, методов и средств

наблюдений и обработки информации, качеством подготовки специалистов и эффективностью сотрудничества.

Институт развивает основные направления актуальных научных исследований, предусмотренных Стратегией Республики Таджикистан в области развития науки и инновационных технологий. Цели и задачи Института астрофизики НАНТ соответствуют такому приоритетному направлению развития науки, утвержденному, как исследование и использование космоса в мирных целях. В этой связи в Институте предусмотрены дальнейшие исследования малых тел Солнечной системы и сейсмоионосферных эффектов. В области малых тел Солнечной системы будет уделено внимание околоземным объектам, особенно потенциально опасным астероидам, представляющих угрозу Земле и космическим аппаратам; астероидно-кометно-метеороидным комплексам, активности комет и астероидов; физическим и динамическим свойствам метеороидов. Исследования в этих направлениях будут основаны на наблюдениях объектов в обсерваториях Института. Также предусмотрены наблюдения и исследования фрагментов космического мусора на геостационарных орбитах, необходимые для контроля космических аппаратов и экологии околоземного космического пространства, и наблюдения и изучение переменных звезд. Эти исследования важны как для Республики Таджикистан, так и для мирового сообщества.

Президент Республики Таджикистан в своем ежегодном Послании в 2019 г. подчеркнул, что сегодня без науки и инноваций, информационных и коммуникационных технологий и формирования технического мировоззрения не может быть предпринято никаких шагов по совершенствованию изучения естественных, точных и математических наук. С целью развития технического мышления подрастающего поколения 2020-2040 годы были объявлены «Двадцатилетием изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования». В этой связи для перспективы развития науки и образования, улучшения изучения естественных и точных наук, развитию технического сознания среди подрастающего поколения, укрепления инновации и изобретательства среди талантливых студентов, повышения качества воспитания научных кадров особенно в области точных наук необходимо принять соответствующие меры.

Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана поддерживает созидательную политику, идеи и инициативы Лидера нации и приложит все усилия для дальнейшего развития и совершенствования астрономической науки. В связи с этим Институт и дальше будет стремиться к развитию астрономии в научном сообществе страны и других сферах общества, особенно среди подрастающего поколения.

В 2020 г. в государстве началась подготовка к 30-летию Независимости Республики Таджикистан. В связи с этим запланировано восстановление Памирской обсерватории в Мургабском районе ГБАО, расположенной на высоте 4350 метров. Решением Президиума НАНТ №34 от 26 февраля 2019 г. эта обсерватория получила наименование Международной высокогорной обсерватории «30 лет независимости Республики Таджикистан». Пути восстановления обсерватории обсуждаются с

Индийской организацией космических исследований (ISRO) и Синьцзянской астрономической обсерваторией Академии наук Китайской Народной Республики.

Подводя итоги, можно сказать, что будущее таджикской астрофизической науки связано с совершенствованием результатов исследования околоземного космического пространства и звезд, подготовкой астрономических кадров, популяризацией астрономических знаний и воспитанием научного мировоззрения среди населения страны, с более эффективным международным сотрудничеством, инновациями, эффективной коммерциализацией научных исследований и привлечением инвестиций. Такая работа в Институте астрофизики НАНТ уже ведется.

Ученые Института астрофизики Национальной академии наук Таджикистана активно вовлечены в процесс распространения идей научного мировоззрения среди подрастающего поколения страны. Вслед за Лидером нации, Президентом Республики Таджикистан мы надеемся, что разумная энергия интеллигенции поднимет знамя таджикской науки на мировой арене и еще больше укрепит развитие современной науки, технологии и техники в Таджикистане.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кохирова Г.И., Рахматуллаева Ф.Д. Институт астрофизики. Издание 2-е. – Душанбе: «ЭР-граф», 2020, 35 стр.
2. Бабаджанов П. Б., Крамер Е. Н. Предварительные результаты фотографирования метеоров по методу мгновенной экспозиции. – Астроном. журн., 1965, т. 52, № 3, с. 660-665.
3. Бабаджанов П. Б., Крамер Е. Н. Мгновенные фотографии метеоров.-Земля и Вселенная, 1967, № 1, с. 47.
4. Бабаджанов П. Б., Крамер Е. Н. О структуре метеора. – Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 2, с. 315-318.
5. Бабаджанов П. Б., Крамер Е. Н. О характере дробления метеорных тел . – Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 5, с. 1043-1046.
6. Пулат Бабаджанович Бабаджанов. Материалы к биобиблиографии ученых Таджикистана. Вып.95. (Третье издание, переработанное). Вступительная статья и составитель: Кохирова Г.И., Ответственный редактор: Рахими Ф.К. – Душанбе: Дониш, 2020, 123 с.
7. Бабаджанов П. Б., Новиков Г. Г., Лебединец В. Н. и др. Теория квазинепрерывного дробления метеорных тел с учетом торможения. – Москва, 1984, 35 с. (Препр. Физ.-техн. ин-т им. Иоффе АН СССР; 915).
8. Бабаджанов П.Б., Кохирова Г.И. Метеорные потоки астероидов, пересекающих орбиту Земли. – Душанбе: Дониш, 2009, 185 с.
9. Vabadzhanov P.B., Kokhirova G.I. Densities and porosities of meteoroids. – Astronomy & Astrophysics, 2009, v. 495, Issue 1, p.353-358.
10. Кохирова Г.И., Бабаджанов П.Б. Траектория, радианты, орбиты, кривые блеска болидов, сфотографированных болидной сетью Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2018, 154 с.
11. Сводный каталог элементов орбит и кривых блеска метеоров, сфотографированных в Институте астрофизики Академии наук Республики Таджикистан (Душанбе) , Отв. ред. П.Б. Бабаджанов; Сост.: Г.И. Кохирова, Н.А. Коновалова. – Душанбе: Дониш, 2006, 208 с.
12. Бабаджанов П.Б. Результаты фотографических наблюдений ИСЗ. – Бюллетень станций оптического наблюдения ИСЗ, № 9, 1959, с. 22-23.

13. Завьялов Ф.П., Каххоров А. Моменты максимумов блеска ракеты-носителя 3-го Советского ИСЗ. – Бюллетень станций оптического наблюдения ИСЗ, № 12 (22), 1960, с. 30-38.
14. Рельке Е.В., Кислюк В.С. Создание астрометрического стандарта в области созвездия Лебедя. – КФНТ, 1992, т. 8, № 2, с. 112-119.
15. Матвеев Н.Н. Об организации наблюдений по программе ФОКАТ на 40-см астрографе Гиссарской обсерватории. – КФНТ, 1985, т.1, № 1, с. 93-95.
16. Kiselev N.N., Maksumov M.N., Shcheglov P.V. The 1 m RCC telescope of the mountain Sanglok observatory. – Jena Review, 1988, v. 33, No. 2, p. 88-89.
17. Сатыводдиев В., Иркаев Б.Н., Юферев А.О. Исследования фотографических свойств метрового телескопа обсерватории Санглох. Бюлл. Ин-та астрофизики АН Тадж.ССР, 1989, № 78, с. 3-9.
18. Киселев Н.Н., Рахимов В.Ю., Сиклицкий В.И., Чернова Г.П. Атмосферная экстинкция на обсерватории Санглох. – Бюлл. Ин-та астрофизики АН Тадж.ССР, 1989, № 78, с. 65-68.
19. Галиева З.А., Герасименко С.И., Киселев Н.Н., Логинова Е.М., Чернова Г.П. Позиционные наблюдения на 1-м RCC телескопе. – Бюлл. Ин-та астрофизики АН Тадж.ССР, 1989, № 78, с. 62-64.
20. Кохирова Г.И., Рахими Ф., Крючков С.В., Николенко И.В., Хамроев У.Х., Мулло-Абдолов А.Ш., Абдуллоев С.Х. Новый «Первый свет» телескопа Цейсс-1000 Международной астрономической обсерватории Санглох. – Известия АН РТ. Отделение ФМХГТН, 2016, № 1 (162), с. 59-69.
21. Kokhirova G.I., Ivanova O.V., Rakhmatullaeva F.Dzh., Khamroev U.Kh., Buriev A.M., Abdulloev S.Kh. Results of Complex Observations of Asteroid (596) Scheila at the Sanglokh International Astronomical Observatory. – Sol. Sys. Res., 2018, v. 52 (6), p. 511-520.
22. Busarev V. V., Shcherbina M. P., Barabanov S. I., Irmambetova T.R., Kokhirova G. I., Khamroev U. Kh., Khamitov I. M., Bikmaev I. F., Gumerov R. I., Irtuganov E. N., and Mel'nikov S.S. Confirmation of the Sublimation Activity of the Primitive Main-Belt Asteroids 779 Nina, 704 Interamnia, and 145 Adeona, as well as its Probable Spectral Signs on 51 Nemausa and 65 Cybele. – Sol. Syst. Res, 2019, v. 53, pp. 261-277.
23. Kokhirova G.I., Ivanova A.V., Rakhmatullaeva F.Dzh., Buriev A.M., Khamroev U.H. Astrometric and Photometric Observations of Comet 29P/Schwassmann-Wachmann 1 at the Sanglokh International Astronomical Observatory. – Planetary and Space Sci., v.181, 2020, 104794 (7 pp.).
24. Kokhirova G.I., Ivanova O.V., Rakhmatullaeva F.D. Results of observations of dual-status object 2008 GO98 in 2017. – Advances in Space Research, 2021, vol. 67, Issue 1, pp. 639-647.
25. Kokhirova G.I., Ivanova O.V., Rakhmatullaeva F.D. Evidence of the Cometary Nature of Asteroid Don Quixote Provided by Observations at the Sanglokh Observatory. – Solar System Research, 2021, vol. 55, Issue 1, pp.61-70.
26. Kartashova, A., Husarik, M., Ivanova, O., Kokhirova G I., Bakanas, E., Sokolov, I., Khamroev U.Kh., Ibragimov A.A. Photometric observation of the asteroid 3200 Phaethon using small and middle telescopes. – Contributions of the Astronomical Observatory Skalnaté Pleso, 2019, v. 49, № 2, pp. 367-372.
27. Девяткин А.В., Горшанов Д.Л., Петрова С.Н., Башакова Е.А., Львов В.Н., Цекмейстер С.Д., Русов С.А., Иванов А.В., Вершков А.Н., Мартюшева А.А., Барабанов С.И. Ерофеев Д.В., Кохирова Г.И., Хамроев У.Х., Буриев А.М. Базисные наблюдения потенциально опасных астероидов в 2017 году. – Экологический вестник научных центров Черноморского экономического содружества, 2017, № 4, т. 3, с. 24-31.

28. Кохирова Г.И., Буриев А.М., Хамроев У.Х., Баканас Е.С., Мулло-Абдолов А.Ш., Абдуллоев С.Х. Наблюдения кометы 41P/Туттля-Джакобини-Кресака в период ее сближения с Землей в астрономических обсерваториях Таджикистана. – ДАН РТ, 2018, т.61, № 7-8, с. 620-630.
29. Павленко Е.П., Рахими Ф.К., Кохирова Г.И., Рахматуллаева Ф.Дж., Антонюк К.А., Пить Н.В., Хамроев У.Х. Двухцветная фотометрия нового асинхронного поляра IGR J19552+0044. – ДАН РТ, 2019, т. 62, № 11-12, с. 646-652.
30. IAU Minor Planet Center, www.minorplanetcenter.net/iau.

Г.И.ҚОҲИРОВА

ДАСТОВАРДҶОИ ИЛМИ АСТРОНОМӢ ТАҲТИ РОҲНАМОИИ АКАДЕМИЯИ МИЛЛИИ ИЛМҶОИ ТОҶИКИСТОН

Институти астрофизикаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Маълумоти мухтасари таърихӣ оид ба ташаккул ва рушди илми астрономия ва астрофизика дар Ҷумҳурии Тоҷикистон аз соли 1932 то имрӯз оварда шудааст. Дастовардҳои асосии Институт астрофизика таҳти роҳбарии Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон ва саҳми олимони барҷастаи Институт дар ташаккул, рушд ва таъмини мавқеъҳои пешсаф нишон дода шудаанд. Пешомадҳои рушди минбаъдаи астрономия ва астрофизика дар ҷумҳурӣ нишон дода шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: астрономия, астрофизика, Институти астрофизика, расадхона, академия, Тоҷикистон, ҳамкорӣ, кадрҳо.

G.I.KOKHIROVA

ACHIEVEMENTS OF ASTRONOMIC SCIENCE UNDER THE LEADERSHIP OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF TAJIKISTAN

Institute of Astrophysics of the National Academy of Sciences of Tajikistan

A brief historical background on the formation and development of astronomical and astrophysical science in the Republic of Tajikistan, from 1932 to the present, is given. The main achievements of the Institute of Astrophysics under the leadership of the National Academy of Sciences of Tajikistan and the contribution of the leading scientists of the Institute in its formation, development and achievement of the leading positions are shown. The prospects for the further development of astronomy and astrophysics in the republic are shown.

Key words: astronomy, astrophysics, Institute of astrophysics, observatory, academy, Tajikistan, collaboration, staff.

УДК 532.7; 532.135; 537.31; 537.266

С.ОДИНАЕВ

**ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ, ЯВЛЕНИЙ
ПЕРЕНОСА, УПРУГИХ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЖИДКОСТЕЙ
И РАСТВОРОВ ЭЛЕКТРОЛИТОВ**

*Физико-технический институт им. С.У.Умарова
Национальной академии наук Таджикистана
Поступила в редакцию 30.07.2021 г.*

Приводится краткий литературный обзор теоретических методов исследования жидкостей и их растворов. Также, коротко излагается получение исходных кинетических уравнений для одно- и двухчастичной функции распределения и их решение методом Грэда. На основе этих исходных кинетических уравнений исследуются явления переноса, упругие, акустические и диэлектрические свойства жидкостей и растворов электролитов. Проведены численные расчеты этих физических параметров, результаты которых, а также их сравнение с экспериментальными данными в виде таблиц и рисунков приведены в работах автора (имеются ссылки).

Ключевые слова: релаксационные процессы, коэффициенты переноса, упругие модули, скорость и коэффициент поглощения звука, коэффициенты удельной электропроводности, диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерь.

1. Использование жидкостей и их растворов в промышленности, в продуктах химической технологии и в медицине требуют знания вязкостных, тепло- и электропроводящих, диэлектрических, а также упругих и акустических свойств в широком интервале изменения плотности, температуры, давления и частоты деформации. Изучение молекулярного механизма различных релаксационных процессов позволяют определить практически все термодинамические и кинетические параметры, характеризующие состояние жидкости. Кроме того, знание частотно-зависящих кинетических коэффициентов и моду-

Адрес для корреспонденции: Одинаев Саидмухаммад Одинаевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299, Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАНТ.
E-mail: odsb42@mail.ru.

лей упругости с учетом вкладов различных релаксационных процессов, главным образом, структурной релаксации, позволяет подробно теоретически исследовать акустические свойства жидкостей – дисперсию скорости и коэффициента поглощения звука, спектр коллективных мод в жидкостях и растворах в широком диапазоне частот.

Настоящая работа посвящена краткому изложению полученных результатов автора по изучению и, по мере возможности, исследованию этих вопросов на основе молекулярно-кинетической теории.

Изучение молекулярной природы строения вещества идет в настоящее время, главным образом, в направлении развития строгой статистической теории, основанной на методах коррелятивных и временных корреляционных функций распределения [1-5], проекционных и неравновесных статистических операторов [6-8], функций Грина [9], коллективных переменных [10], а также модельных теориях [11].

Представляет интерес построение кинетического уравнения для жидкостей на основе цепочки уравнений Боголюбова для неравновесных функций распределения. В частности, при выполнении условия ослабления начальных корреляций любого числа взаимодействующих частиц, Н.Н.Боголюбовым [1] получены кинетическое уравнение Больцмана в приближении парных столкновений и кинетические уравнения Власова и Ландау для систем со слабым взаимодействием. В [12] подробно описан вывод кинетических уравнений методом Н.Н.Боголюбова для газовых систем, дан анализ этих уравнений и указаны способы их решения. В [13] приведено обобщенное уравнение Больцмана-Энскога, в левую часть которого дополнительно введен интеграл Власова, что обусловлено наличием парных взаимодействий, описываемых потенциалом $\Phi_0(|\bar{q}_1 - \bar{q}_2|)$, наряду с имеющимся взаимодействием твердых шаров, и найдены микроскопические решения, соответствующие точному движению частиц в рассмотренной динамической системе.

Подробный обзор и методы получения основных (квантовых) кинетических уравнений (Ван-Хова, Пригожина, Яннера, Браута и др.), а также переход к обычным (классическим) кинетическим уравнениям в различных приближениях приведены в работе [14]. Аналогично, в [15] систематически изложена современная кинетическая теория классических и квантовых систем, а также методы построения конкретных кинетических уравнений и их решения, основанные на идее Н.Н.Боголюбова. Подробно изучены кинетические уравнения Больцмана, Энскога, Власова, Ландау, Балеску-Леннарда и обобщенные уравнения Фоккера-Планка. Наряду с этими уравнениями для газов, автор рассматривает еще динамику идеально упругих шаров и инфракрасные (низкочастотные) асимптотики неравновесных корреляционных функций. Однако в плотных газах и жидкостях взаимодействия становятся интенсивными и принимают коллективный характер. С другой стороны, учет высших приближений по плотности в интегралах столкновений приводит к расходящимся (по времени) интегралам [16]. Это свидетельствует о том, что построение кинетических уравнений для плотных газов и жидкостей разложением по степеням плотности (или взаимодействия) малоэффективно.

2. В работе [16] на основе цепочки уравнений Н.Н.Боголюбова нами были получены кинетические уравнения для $f_1(\vec{x}_1, t)$ и $f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$, которые имеют следующий вид:

$$\hat{L}_1 f_1(\vec{x}_1, t) - \int \hat{\theta}_1 f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) d\vec{x}_2 = \beta \frac{\partial}{\partial p_1^\alpha} \left[\frac{\tilde{p}_1^\alpha}{m} f_1(\vec{x}_1, t) + kT \frac{\partial f_1(\vec{x}_1, t)}{\partial p_1^\alpha} \right] \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \left(\hat{L}_{12} - \hat{\theta}_{12} \right) f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) - \int \left(\hat{\theta}_{13} - \hat{\theta}_{23} \right) f_3(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, t) d\vec{x}_3 = \\ & = \sum_{i=1}^2 \beta_i \frac{\partial}{\partial p_i^\alpha} \left[\frac{\tilde{p}_i^\alpha}{m} f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) + kT \frac{\partial f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)}{\partial p_i^\alpha} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\hat{L}_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1^\alpha}{m} \frac{\partial}{\partial q_1^\alpha}$, $\hat{L}_{12} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{p_i^\alpha}{m} \frac{\partial}{\partial q_i^\alpha}$, $\vec{x}_i = \left(\vec{q}_i; \vec{p}_i \right)$,

$$\hat{\theta}_{ij} = \frac{\partial \Phi(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|)}{\partial q_i^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_i^\alpha} + \frac{\partial \Phi(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|)}{\partial q_j^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_j^\alpha} - \text{оператор взаимодействия Чо и Уленбека,}$$

$\tilde{p}_i^\alpha = p_i^\alpha - m\mathcal{G}^\alpha(\vec{q}_i, t)$ – относительный импульс i -ой частицы, β – коэффициент трения, m – масса частиц, k – постоянная Больцмана, T – локальное значение температуры.

Интегральные члены в левых частях уравнений (1) и (2) отражают влияние крупномасштабных флуктуаций на релаксационные процессы и являются следствием коллективных явлений в жидкостях. Правые части этих уравнений получены в приближении парных взаимодействий. Они обеспечивают необратимость этих уравнений по времени, то есть возможность описания диссипативных процессов в жидкостях. Уравнения (1) и (2) являются незамкнутыми. Это связано с тем, что в системе многих взаимодействующих частиц невозможна полная изоляция группы рассматриваемых частиц жидкости. Чтобы замкнуть уравнения для $f_1(\vec{x}_1, t)$ и $f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$, необходимо использовать ту или иную дополнительную аппроксимацию относительно расщепления трехчастичной функции распределения $f_3(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, t)$. Для неё принимаем суперпозиционное приближение Кирквуда, которое выражает $f_3(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, t)$ посредством $f_1(\vec{x}_1, t)$ и $f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$ в виде:

$$f_3(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, t) = \frac{f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_3, t) f_2(\vec{x}_2, \vec{x}_3, t)}{f_1(\vec{x}_1, t) f_1(\vec{x}_2, t) f_1(\vec{x}_3, t)}$$

Следует отметить, что уравнения (1) и (2) в этом приближении являются замкнутыми кинетическими уравнениями для $f_1(\vec{x}_1, t)$ и $f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$ и отличаются от известных уравнений Кирквуда наиболее полным учетом коллективных явлений в жидкостях, а от уравнений Райса-Олнетта – дополнительным учетом вкладов неравновесных сил в динамическом члене Боголюбова.

В работе [16] исходные кинетические уравнения (1) и (2) решаются методом Грэда, получены уравнения обобщенной гидродинамики, а также исследованы явления переноса упругих и акустических свойств жидкостей. Получены явные аналитические выражения для коэффициентов сдвиговой и объемной вязкости, теплопроводности, модулей сдвиговой и объемной упругости, термоупругости, а также скорости и коэффициента поглощения звука, спектр коллективных мод в жидкостях. При определенном выборе потенциала взаимодействия и радиальной функции распределения проведены численные расчеты этих физических параметров, и результаты сравнены с экспериментальными данными простых жидкостей, которые находятся в удовлетворительном согласии.

3. В последующих работах исследованы релаксационные процессы, вязкоупругих, электропроводящих и диэлектрических свойств растворов электролитов. Для этого обобщены уравнения (1) и (2) для растворов электролитов. Исходные кинетические уравнения для одночастичной $f_a(\bar{x}_a, t)$ и двухчастичной $f_{ab}(\bar{x}_a, \bar{x}_b, t)$ функций распределения имеют следующий вид [16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{p_a^\alpha}{m_a} \frac{\partial f_a}{\partial q_1^\alpha} + z_a e E^\alpha(\bar{q}_1, t) \frac{\partial f_a}{\partial p_a^\alpha} - \sum_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial q_1^\alpha} \frac{\partial f_{ab}}{\partial p_a^\alpha} d\bar{q}_2 d\bar{p}_b = \\ = \beta_a \frac{\partial}{\partial p_a^\alpha} \left[\frac{\tilde{p}_a^\alpha}{m_a} f_a + kT(\bar{q}_1, t) \frac{\partial f_a}{\partial p_a^\alpha} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ab}}{\partial t} + \left(\frac{p_a^\alpha}{m_a} \frac{\partial}{\partial q_1^\alpha} + \frac{p_b^\alpha}{m_b} \frac{\partial}{\partial q_2^\alpha} \right) f_{ab} + e E^\alpha \left(z_a \frac{\partial}{\partial p_a^\alpha} + z_b \frac{\partial}{\partial p_b^\alpha} \right) f_{ab} - \\ - \left(\frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial q_1^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_a^\alpha} + \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial q_2^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_b^\alpha} \right) f_{ab} - \sum_c \int \left[\frac{\partial \Phi_{ac}}{\partial q_1^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_a^\alpha} + \frac{\partial \Phi_{bc}}{\partial q_2^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_b^\alpha} \right] f_{abc} d\bar{q}_3 d\bar{p}_c = \\ = \sum_{l=a,b} \beta_l \frac{\partial}{\partial p_l^\alpha} \left[\frac{\tilde{p}_l^\alpha}{m_l} f_{ab} + kT(\bar{q}_1, t) \frac{\partial f_{ab}}{\partial p_l^\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Приближенное решение уравнения (4) для $f_{ab}(\bar{x}_a, \bar{x}_b, t)$ можно представить в виде [16, 17]:

$$f_{ab}(\bar{x}_a, \bar{x}_b, t) = f_{ab}^{(0)} \left[\frac{n_{ab}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, t)}{n_{ab}^{(0)}(|\bar{r}|)} + \frac{m}{kT} \sum_{i=1}^2 \frac{J_{ab(i)}^\alpha(\bar{q}_1, \bar{q}_2, t)}{n_{ab}^{(0)}(|\bar{r}|)} \frac{\tilde{p}_i^\alpha}{m} \right]. \quad (5)$$

На основе (3) и (4), с учетом крупномасштабных флуктуаций и последовательного применения импульсных моментов двухчастичной функции распределения $f_{ab}(\bar{x}_a, \bar{x}_b, t)$ в [16] получено уравнение Смолуховского для бинарной плотности $n_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t)$, которое имеет вид

$$\frac{\partial n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t)}{\partial t} + \omega_{ab} \hat{L} n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t) = F_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t), \quad (6)$$

где $\vec{r} = \vec{r}_{ab} / d_{ab}$ – безразмерное взаимное расстояние между ионами a и b ,

$d_{ab} = (1/2)(d_a + d_b)$, d_a и d_b – диаметры ионов, $\omega_{ab} = \frac{kT_0}{d_{ab}^2} \left(\frac{\beta_a + \beta_b}{\beta_a \beta_b} \right)$; β_a, β_b – коэффициенты

трения, $\hat{L} = -\frac{\partial}{\partial r^\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial}{\partial r^\alpha} \ln g_{ab}^0(|\vec{r}|) \right]$ – оператор Смолуховского в конфигурационном пространстве,

$$F_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t) = -2n_{ab}^0(|\vec{r}|) \left\{ \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\partial \ln g_{ab}^0}{\partial \ln r} - \frac{1}{2} \left[n \left(\frac{\partial \ln g_{ab}^0}{\partial n} \right)_T + \gamma T \left(\frac{\partial \ln g_{ab}^0}{\partial T} \right)_n \right] \right] \text{div } \vec{v} + \right. \\ \left. + \left(r^\alpha r^\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta^{\alpha\beta} \right) \frac{\partial \ln g_{ab}^0}{\partial \ln r} \left\{ \frac{\partial v^\alpha}{\partial q_1^\beta} \right\} + \frac{1}{2d_{ab}} \left(\frac{e_b}{\beta_b} - \frac{e_a}{\beta_a} \right) \frac{\partial \ln g_{ab}^0}{\partial r^\alpha} E_1^\alpha \right\}, \\ \gamma = \frac{1}{nC_V} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_n, \quad n_{ab}^0(|\vec{r}|) = n_a n_b g_{ab}^0(|\vec{r}|), \quad \left\{ \frac{\partial v^\alpha}{\partial q_1^\beta} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial q_1^\beta} + \frac{\partial v^\beta}{\partial q_1^\alpha} - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} \text{div } \vec{v} \right).$$

Решение уравнения (6) представим в виде:

$$n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t) = \int_0^t G_{ab}(r, r_1, t - t_1) F_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}_1, t_1) dr_1. \quad (7)$$

Пользуясь методом импульсных моментов одночастичной и двухчастичной функций распределения, на основе исходного кинетического уравнения (3) с учетом неравновесных бинарных плотности и потока, а также функции (5), получим следующие линеаризованные законы сохранения для растворов электролитов:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v^\alpha}{\partial q_1^\alpha} = 0, \quad \rho \frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + \rho \frac{\partial P^{\alpha\beta}}{\partial q_1^\beta} = 0, \quad \rho C_V \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial S^\alpha}{\partial q_1^\alpha} + T \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_\rho \frac{\partial v^\alpha}{\partial q_1^\alpha} = 0, \quad (8)$$

где

$$P^{\alpha\beta} = \sum_a^k P_a \delta^{\alpha\beta} + \sum_a K_a^{\alpha\beta} - \sum_{a,b} \frac{1}{2} \int \frac{\partial \Phi_{ab}(r)}{\partial r} \frac{r^\alpha r^\beta}{r} n_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t) d\vec{r}, \quad (9)$$

$$S^\alpha(\vec{q}_1, t) = \sum_a S_a^{k\alpha}(\vec{q}_1, t) + \sum_{a,b} \frac{d_{ab}^3}{4} \int \left(\Phi_{ab}(r) \delta^{\alpha\beta} - \frac{r^\alpha r^\beta}{r} \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial r} \right) J_{ab}^\beta(\vec{q}_1, \vec{r}, t) d\vec{r}. \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial P_a^k}{\partial t} + \frac{5}{3} P_a^k \operatorname{div} \bar{v} + \frac{2}{3} \frac{\partial S_a^\alpha}{\partial q_1^\alpha} - \frac{2}{3} \sum_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial r^\alpha} J_{ab^{(a)}}^\alpha d\bar{r} = 0, \\
& \frac{\partial K_a^{\alpha\beta}}{\partial t} + 2 P_a^k \left\{ \frac{\partial v^\alpha}{\partial q_1^\beta} \right\} + 2 \left\{ \frac{\partial S_a^{k\alpha\beta\gamma}}{\partial q_1^\gamma} \right\} - 2 \sum_b \int \left\{ \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial r^\alpha} J_{ab^{(a)}}^\beta \right\} d\bar{r} = -\frac{2\beta_a}{m_a} K_a^{\alpha\beta}, \quad (11) \\
& \frac{\partial S_a^\alpha}{\partial t} + \frac{5}{2} \frac{k}{m_a} P_a^k \frac{\partial T}{\partial q_1^\alpha} + \frac{5}{2} \frac{k}{m_a} T_0 \frac{\partial P_a^k}{\partial q_1^\alpha} + \frac{5}{2} \frac{k}{m_a} T_0 \frac{\partial K_a^{\alpha\beta}}{\partial q_1^\beta} = -\frac{3\beta_a}{m_a} S_a^k + \frac{5\beta_a}{m_a^2} j_a^\alpha.
\end{aligned}$$

4. На основе исходных кинетических уравнений (3) и (4) были исследованы вязкоупругие свойства растворов электролитов [16, 18-21]. Для этого макроскопический тензор плотности потока импульса определяется в виде

$$P^{\alpha\beta}(\bar{q}_1, t) = P \delta^{\alpha\beta} + \rho v^\alpha v^\beta - \sigma^{\alpha\beta} = -\sigma^{\alpha\beta} + \rho v^\alpha v^\beta,$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma^{\alpha\beta}(\bar{q}_1, t) = & K \operatorname{div} \bar{U} \delta^{\alpha\beta} + \eta_v \operatorname{div} \dot{\bar{U}} \delta^{\alpha\beta} + \\
& + 2\mu \left(U^{\alpha\beta} - (1/3) \operatorname{div} \bar{U} \delta^{\alpha\beta} \right) + 2\eta_s \left(\dot{U}^{\alpha\beta} - (1/3) \operatorname{div} \dot{\bar{U}} \delta^{\alpha\beta} \right). \quad (12)
\end{aligned}$$

Рассмотрим малое отклонение состояния раствора от положения равновесия. Тогда для тензора напряжения растворов электролитов имеем:

$$\sigma^{\alpha\beta}(\bar{q}_1, t) = -\sum_a \left(P_a^k \delta^{\alpha\beta} + K_a^{\alpha\beta} \right) + \sum_a \sum_b \frac{1}{2} \int \frac{\partial \Phi_{ab}(r)}{\partial r} \frac{r^\alpha r^\beta}{r} n_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t) d\bar{r}, \quad (13)$$

где

$$n_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t) = n_{ab}^{(0)}(|\bar{r}|, n, t) + n'_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t).$$

Подставляя (13) с учетом (7), а также решения двух первых уравнений системы (11) для P_a^k и $K_a^{\alpha\beta}$ в случае независимых потоков в (9), и, завершив Фурье-преобразование по времени в (12) и (13), для динамических модулей упругости и коэффициентов вязкости получаем:

$$K(\omega) = K_s + \sum_a \sum_b \frac{2\pi n_a n_b d_{ab}^3}{3} \omega \int_0^\infty dr r^2 \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial r} \int_0^r G_2^{ab}(r, r_1, \omega) \varphi_{ab}^*(r_1) r_1 dr_1, \quad (14)$$

$$\mu(\omega) = \sum_a \frac{n_a kT (\omega \tau_a)^2}{1 + (\omega \tau_a)^2} + \sum_a \sum_b \frac{2\pi n_a n_b d_{ab}^3}{15} \omega \int_0^\infty dr r^2 \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial r} \times \int_0^r G_2^{ab}(r, r_1, \omega) \frac{\partial g_{ab}^0}{\partial r_1} r_1^2 dr_1, \quad (15)$$

$$\eta_V(\omega) = \sum_a \sum_b \frac{2\pi n_a n_b d_{ab}^3}{3} \int_0^\infty dr r^2 \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial r} \int_0^r G_1^{ab}(r, r_1, \omega) \varphi_{ab}^*(r_1) r_1 dr_1, \quad (16)$$

$$\eta_S(\omega) = \sum_a \frac{n_a kT \tau_a}{1 + (\omega \tau_a)^2} + \sum_a \sum_b \frac{2\pi n_a n_b d_{ab}^3}{15} \int_0^\infty dr r^2 \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial r} \times \int_0^r G_1^{ab}(r, r_1, \omega) \frac{\partial g_{ab}^0}{\partial r_1} r_1^2 dr_1, \quad (17)$$

где K_s – адиабатический объемный модуль упругости раствора,

$$\varphi_{ab}^*(r_1) = 2g_{ab}^0(r_1) \left\{ 1 + \frac{r_1}{6} \frac{\partial \ln g_{ab}^0(r_1)}{\partial r_1} - \frac{1}{2} \left[n \left(\frac{\partial \ln g_{ab}^0}{\partial n} \right)_T + \gamma T \left(\frac{\partial \ln g_{ab}^0}{\partial n} \right)_n \right] \right\},$$

$$G_{1,2}^{ab}(r, \xi, \omega) = \pm \frac{\tau_{ab}}{2} \left(\frac{\omega \tau_{ab}}{2} \right)^{-1/2} \left[(\sin \varphi_1 \mp \cos \varphi_1) e^{-\varphi_1} - (\sin \varphi_2 \mp \cos \varphi_2) e^{-\varphi_2} \right],$$

$$\tau_a = \omega_a^{-1} = \frac{m_a}{2\beta_a}, \quad \tau_{ab} = \omega_{ab}^{-1} = \frac{d_{ab}^2}{kT_0} \frac{\beta_a \beta_b}{\beta_a + \beta_b}, \quad \varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}^{ab} = \left(\frac{\omega \tau_{ab}}{2} \right)^{1/2} (r \mp \xi).$$

Рассмотрим случай, когда восстановление равновесной структуры раствора происходит по экспоненциальному закону. Для этого второй член в уравнении (6) заменим следующим образом:

$$\omega_{ab} \hat{L} n_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t) = -\omega_{ab} \left[n_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t) - n_{ab}^{(0)}(|\vec{r}|, r, T) \right]. \quad (18)$$

Учитывая (18), в (4) для $n_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t)$ получим следующее решение:

$$n_{ab}(\vec{q}, \vec{r}, t) = n_a n_b g_{ab}^0(r) - n_a n_b \left[n \left(\frac{\partial g_{ab}^0}{\partial n} \right)_T + \gamma T \left(\frac{\partial g_{ab}^0}{\partial T} \right)_n \right] \cdot \vec{\nabla} \vec{u}(\omega) + \frac{i\omega \tau_{ab}}{1 - i\omega \tau_{ab}} \left[\varphi_{ab}^0(r) \vec{\nabla} \vec{u}(\omega) + \varphi_{ab}^{\alpha\beta}(r) \left\{ \frac{\partial u^\alpha(\omega)}{\partial q_1^\beta} \right\} \right], \quad (19)$$

где

$$\varphi_{ab}^0(r) = \frac{r}{3} \frac{\partial g_{ab}^0(r)}{\partial r} - \left[n \left(\frac{\partial g_{ab}^0}{\partial n} \right)_T + \gamma T \left(\frac{\partial g_{ab}^0}{\partial T} \right)_n \right], \quad \varphi_{ab}^{\alpha\beta}(r) = \frac{r^\alpha r^\beta - (1/3)r^2 \delta^{\alpha\beta}}{r} \frac{\partial g_{ab}^0}{\partial r}.$$

Совершая Фурье-преобразование по времени в (13), с учетом (19) для модулей объемной $K(\omega)$ и сдвиговой $\mu(\omega)$ упругостей, коэффициентов объемной $\eta_V(\omega)$ и сдвиговой $\eta_S(\omega)$ вязкостей, получим следующие аналитические выражения:

$$K(\omega) = \sum_a K_{sa} - \frac{2\pi}{3} \sum_{a,b} \frac{(\omega\tau_{ab})^2}{1+(\omega\tau_{ab})^2} n_a n_b d_{ab}^3 kT \int_0^\infty \frac{\partial \Phi_{ab}^*(r)}{\partial r} \varphi_{ab}^0(r) r^3 dr, \quad (20)$$

$$\mu(\omega) = \sum_a \frac{n_a kT (\omega\tau_a)^2}{1+(\omega\tau_a)^2} - \frac{2\pi}{15} \sum_{a,b} \frac{(\omega\tau_{ab})^2}{1+(\omega\tau_{ab})^2} n_a n_b d_{ab}^3 kT \int_0^\infty \frac{\partial \Phi_{ab}^*(r)}{\partial r} \frac{g_{ab}(r)}{\partial r} r^4 dr, \quad (21)$$

$$\eta_V(\omega) = \sum_{a,b} \frac{2\pi n_a n_b d_{ab}^3}{3} \frac{\tau_{ab}}{1+(\omega\tau_{ab})^2} \int_0^\infty \frac{d\Phi_{ab}}{dr} \varphi_{ab}^0(r) r^3 dr, \quad (22)$$

$$\eta_S(\omega) = \sum_a \frac{n_a kT \tau_a}{1+(\omega\tau_a)^2} - \sum_{a,b} \frac{2\pi}{15} \frac{n_a n_b kT d_{ab}^3 \tau_{ab}}{1+(\omega\tau_{ab})^2} \int_0^\infty \frac{\partial \Phi_{ab}^*}{\partial r} \frac{\partial g_{ab}^0(r)}{\partial r} r^4 dr. \quad (23)$$

Ранее рассматривали ионную подсистему, описываемую в приближении теории Мак-Миллана-Майера, путём выбора наиболее простой модели раствора электролита. При этом полярная среда растворителя предполагается бесструктурной и описывается диэлектрической проницаемостью ϵ_{SS} и коэффициентами трения β_a , β_b ионов сорта a и b . Описание растворов электролитов в рамках этой модели называют феноменологическим и в [10, 22] показано, что растворитель можно исключить из явного рассмотрения, представив теорию в форме, в которой явно фигурируют только ионы растворенного вещества. Для определения коэффициента трения воспользуемся следующими аналитическими выражениями для β_a и β_b [23]:

$$\beta_a^2 = \sum_a \frac{4\pi}{3} \rho_a kT \sum_b d_{ab} \int_0^\infty \nabla^2 \Phi_{ab}^*(r) g_{ab}^0(r) r^2 dr, \quad (24)$$

$$\beta_b^2 = \sum_b \frac{4\pi}{3} \rho_b kT \sum_a d_{ab} \int_0^\infty \nabla^2 \Phi_{ab}^*(r) g_{ab}^0(r) r^2 dr.$$

Межчастичный потенциал взаимодействия $\Phi_{ab}(r)$ принимаем [18-21, 24] в виде суммы потенциальной энергии Леннарда-Джонса и обобщенного потенциала Дебая с учетом конфигурации размеров ионов:

$$\Phi_{ab}(r) = 4\varepsilon_{ab} (r^{-12} - r^{-6}) + \frac{R_{ab}}{r} e^{-\chi^* r}, \quad (25)$$

где $\varepsilon_{ab} = \sqrt{\varepsilon_{aa}\varepsilon_{bb}}$, $d_{ab} = (d_a + d_b)/2$ – параметры потенциала Леннарда-Джонса, $R_{ab} = \frac{f z_a z_b e^2 \exp(\chi^*)}{kT \varepsilon_{SS} d_{ab} (1 + \chi^*)}$, $f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$, ε_0 – электрическая постоянная, ε_{SS} – коэффициент диэлектрической проницаемости растворителя, e – элементарный заряд, z_a , z_b – валентность ионов сортов a и b ; $\chi^* = d_{ab} \chi_a$ – приведенный обратный дебаевский радиус экранировки [25]:

$$\chi^2 = \frac{\sum n_a e_a^2}{\varepsilon_{SS} \varepsilon_0 kT}.$$

Радиальную функцию распределения ионной подсистемы запишем следующим образом [10]:

$$g_{ab}(r) = y(r, \rho^*) e^{-\frac{\Phi_{ab}(r)}{kT}}, \quad (26)$$

где $y(r, \rho^*)$ – бинарная функция распределения двух полостей, имеющая вид

$$y(\rho^*) = \frac{(2 - \rho^*)}{2(1 - \rho^*)^3}.$$

Здесь $\rho^* = \frac{\pi}{6} n d_{ab}^3 = \frac{\pi}{6} \rho \frac{d_{ab}^3 N_0}{M}$ – приведенная плотность.

В серии работ [18 – 21], на основе уравнений (14) – (17) и (20) – (23) с учетом (24) – (26), при определенном выборе модели раствора, межчастичного потенциала взаимодействия и радиальной функции распределения, проведены численные расчеты коэффициентов вязкости и модулей упругости водного раствора NaCl. Результаты приведены в виде таблиц и рисунков, а также сравнены с экспериментальными данными, которые находятся в удовлетворительном согласии.

В последующей серии работ [26-29] на основе исходных кинетических уравнений (3) и (4) были исследованы электропроводящие и диэлектрические свойства растворов электролитов.

Исходное кинетическое уравнение для одночастичной функции распределения $f_a(\vec{x}_a, t)$ с учетом внешнего электрического поля \vec{E} , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a(\bar{x}_a, t)}{\partial t} + \frac{p_a^\alpha}{m_a} \frac{\partial f_a(\bar{x}_a, t)}{\partial q_1^\alpha} + e_a E^\alpha \frac{\partial f_a(\bar{x}_a, t)}{\partial p_a^\alpha} - \sum_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}(r)}{\partial q_1^\alpha} \frac{\partial f_{ab}(\bar{x}_a, \bar{x}_b, t)}{\partial p_a^\alpha} d\bar{q}_2 d\bar{p}_b = \\ = \beta_a \frac{\partial}{\partial p_a^\alpha} \left[\frac{\tilde{p}_a^\alpha}{m_a} f_a(\bar{x}_a, t) + kT(\bar{q}, t) \frac{\partial f_a(\bar{x}_a, t)}{\partial p_a^\alpha} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

где правая часть $I_c = \beta_a \frac{\partial}{\partial p_a^\alpha} \left[\frac{\tilde{p}_a^\alpha}{m_a} f_a(\bar{x}_a, t) + kT(\bar{q}, t) \frac{\partial f_a(\bar{x}_a, t)}{\partial p_a^\alpha} \right]$ – столкновительный член

Фоккера-Планка, полученный в приближении парных столкновений и обеспечивающий необратимость этого уравнения во времени.

Для замыкания уравнения одночастичной функции распределения $f_a(\bar{x}_a, t)$ необходимо произвести дополнительную аппроксимацию относительно двухчастичной функции распределения $f_{ab}(\bar{x}_a, \bar{x}_b, t)$. Для этого $f_{ab}(\bar{x}_a, \bar{x}_b, t)$ согласно [16, 17] представим в виде

$$f_{ab}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t) = f_{ab}^0(\bar{p}_1, \bar{p}_2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{2ij}^{(k)} H_{ij}^{(k)}, \quad (28)$$

где $f_{ab}^0(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ – равновесная бинарная функция распределения, $H_{ij}^{(k)}$ – полиномы Эрмита, $a_{2ij}^{(k)}$ – коэффициенты Грэда, определяемые как $a_{2ij}^{(k)}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, t) = \int H_{2ij}^{(k)} f_{ab}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t) d\bar{p}_1 d\bar{p}_2 / n_2^{(0)}$.

Ограничимся коэффициентами низших порядков в выражении (28), получим:

$$f_{ab}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t) = f_{ab}^0(\bar{p}_a, \bar{p}_b)(1 + a_2^{(0)}), \quad (29)$$

где $a_2^{(0)} = n'_{ab}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, t) / n_{ab}^0(r)$, $n_{ab}^0(r)$ – равновесная бинарная плотность частиц, а $n'_{ab}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, t)$ – неравновесная бинарная плотность частиц в конфигурационном пространстве.

Подставляя (29) в уравнение (27), в линейном приближении получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a(\bar{x}_a, t)}{\partial t} + \frac{p_a^\alpha}{m_a} \frac{\partial f_a(\bar{x}_a, t)}{\partial q_1^\alpha} + e_a E^\alpha \frac{\partial f_a(\bar{x}_a, t)}{\partial p_a^\alpha} - \int \frac{\partial \Phi_{ab}(r)}{\partial q_1^\alpha} f_b^0(\bar{x}_b) g_{ab}^0(r) \times \\ \times (1 + a_2^0) d\bar{x}_b \frac{\partial f_a^0(\bar{x}_a)}{\partial p_a^\alpha} = \beta_a \frac{\partial}{\partial p_a^\alpha} \left[\frac{\tilde{p}_a^\alpha}{m_a} f_a(\bar{x}_a, t) + kT(\bar{q}, t) \frac{\partial f_a(\bar{x}_a, t)}{\partial p_a^\alpha} \right], \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$F^\alpha(\vec{q}_1, t) = -\frac{\partial U}{\partial q_1^\alpha} = \int \frac{\partial \Phi_{ab}(|\vec{r}|)}{\partial r^\alpha} g_{ab}^0(r) (1 + a_2^0) n_b^0 d\vec{r} \quad (31)$$

есть обобщённая средняя сила, действующая на частицу сорта a со стороны окружающих частиц.

Теперь, подставив значение $a_2^0 = n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, t) / n_{ab}^0(r)$ в выражение (31), для обобщенной средней силы имеем:

$$\begin{aligned} F^\alpha(\vec{q}_1, t) &= -\frac{1}{n_a^0} \int \frac{\partial \Phi_{ab}(r)}{\partial q_1^\alpha} n_{ab}^0(r) \left(1 + \frac{n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, t)}{n_{ab}^0(r)} \right) d\vec{q}_2 = \\ &= \frac{1}{n_a^0} \int \frac{\partial \Phi_{ab}(r)}{\partial r} \frac{r^\alpha}{r} n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, t) d\vec{r} \end{aligned} \quad (32)$$

Далее, подставляя (32) в уравнение (30), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a(\vec{x}_a, t)}{\partial t} + \frac{p_a^\alpha}{m_a} \frac{\partial f_a(\vec{x}_a, t)}{\partial q_1^\alpha} + e_a E^\alpha \frac{\partial f_a(\vec{x}_a, t)}{\partial p_a^\alpha} + \frac{\partial f_a^0(\vec{p}_a)}{\partial p_a^\alpha} \times \\ \times \frac{1}{n_a^0} \int \frac{\partial \Phi_{ab}(r)}{\partial r} \frac{r^\alpha}{r} n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, t) d\vec{r} = \beta_a \frac{\partial}{\partial p_a^\alpha} \left[\frac{\tilde{p}_a^\alpha}{m_a} f_a(\vec{x}_a, t) + kT(\vec{q}, t) \frac{\partial f_a(\vec{x}_a, t)}{\partial p_a^\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Для замыкания уравнения (33) следует найти уравнение для возмущенной части бинарной плотности частиц в конфигурационном пространстве $n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, t)$ на основе кинетического уравнения для двухчастичной функции распределения $f_{ab}(\vec{x}_a, \vec{x}_b, t)$, то есть формулы (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ab}(\vec{x}_a, \vec{x}_b, t)}{\partial t} + \sum_{i=a,b} \left[\frac{p_i^\alpha}{m_i} \frac{\partial}{\partial q_i^\alpha} + e_i E^\alpha \frac{\partial}{\partial p_i^\alpha} - \frac{\partial \Phi_{ab}(r)}{\partial q_i^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_i^\alpha} \right] f_{ab}(\vec{x}_a, \vec{x}_b, t) - \\ - \sum_c \sum_{i=a,b} \int \frac{\partial \Phi_{ic}}{\partial q_i^\alpha} \frac{\partial f_{abc}(\vec{x}_a, \vec{x}_b, \vec{x}_c, t)}{\partial p_i^\alpha} d\vec{q}_3 d\vec{p}_c = \\ = \sum_{i=a,b} \beta_i \frac{\partial}{\partial p_i^\alpha} \left[\frac{\tilde{p}_i^\alpha}{m_i} + kT(\vec{q}_i, t) \frac{\partial}{\partial p_i^\alpha} \right] f_{ab}(\vec{x}_a, \vec{x}_b, t), \end{aligned} \quad (34)$$

где $f_{abc}(\vec{x}_a, \vec{x}_b, \vec{x}_c, t)$ – трёхчастичная функция распределения; $\vec{x}_i = (\vec{q}_i, \vec{p}_i)$, $i = a, b$.

Умножая уравнение (34) на 1 и \tilde{p}_a^α / m_a , интегрируя по всем значениям импульсов \vec{p}_a и \vec{p}_b с учётом определения импульсных моментов двух- и трёхчастичных функций распределения, а также в рамках суперпозиционного приближения для $f_{abc}(\vec{x}_a, \vec{x}_b, \vec{x}_c, t)$, в линейном приближении для $n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t)$, получим уравнение Смолуховского вида

$$\frac{\partial n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t)}{\partial t} + \omega_{ab} \hat{L} n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t) = F_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t), \quad (35)$$

где

$$F_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t) = -2n_{ab}^0(|\vec{r}|) \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{\partial \ln g_{ab}^0}{\partial r} - \frac{1}{2} \left[n \left(\frac{\partial \ln g_{ab}^0}{\partial n} \right)_T + \gamma T \left(\frac{\partial \ln g_{ab}^0}{\partial T} \right)_n \right] \text{div} \vec{g} + \right. \\ \left. + \left(r^\alpha r^\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta^{\alpha\beta} \right) \frac{\partial \ln g_{ab}^0}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}^\alpha}{\partial q_1^\beta} \right\} + \frac{1}{2d_{ab}} \left(\frac{e_b}{\beta_b} - \frac{e_a}{\beta_a} \right) \frac{\partial \ln g_{ab}^0}{\partial r^\alpha} E_1^\alpha \right\}, \quad (36)$$

$$\gamma = \frac{1}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_n, \quad n_{ab}^0(|\vec{r}|) = n_a^0 n_b^0 g_{ab}^0(|\vec{r}|), \quad \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}^\alpha}{\partial q_1^\beta} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{G}^\alpha}{\partial q_1^\beta} + \frac{\partial \mathcal{G}^\beta}{\partial q_1^\alpha} - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} \text{div} \vec{g} \right),$$

C_V – теплоемкость раствора при постоянном объеме; $\omega_{ab} = \frac{kT_0}{d_{ab}^2} \left(\frac{1}{\beta_a} + \frac{1}{\beta_b} \right) = \frac{1}{\tau_{ab}}$, τ_{ab} –

время структурной релаксации; $\hat{L} = -\frac{\partial}{\partial r^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial \ln g_{ab}^0}{\partial r^\alpha} \right)$ – оператор Смолуховского в

конфигурационном пространстве.

Решение уравнения (35) представляет собой задачу Коши ($t > 0$, $-\infty \leq r \leq \infty$) с нулевым начальным условием. В самом деле, $n_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t) = n_{ab}^{(0)}(r) + n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t)$ и при $t=0$ $n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t=0) = 0$. Следовательно, $n_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t) = n_{ab}^{(0)}(|\vec{r}|, n, t)$ соответствует локально-равновесному состоянию раствора. Решение уравнения (35) представим в виде [16, 26]

$$n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t) = \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} G_{ab}(r, r_1, t-t_1) F_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}_1, t_1) d\vec{r}_1, \quad (37)$$

где $G_{ab}(r, r_1, t-t_1)$ есть фундаментальное решение однородного уравнения (35), то есть функция Грина, которая для радиально-симметричного случая имеет вид

$$G_{ab}(r, r_1, t-t_1) = \\ = \frac{2(rr_1)^{-1}}{(2\pi)^3} \left(\frac{\pi}{\omega_{ab}(t-t_1)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \exp \left[-\frac{(r-r_1)^2}{4\omega_{ab}(t-t_1)} \right] - \exp \left[-\frac{(r+r_1)^2}{4\omega_{ab}(t-t_1)} \right] \right\}. \quad (38)$$

Принимаем замкнутое кинетическое уравнение (33) для одночастичной функции распределения $f_a(\vec{x}_a, t)$ с учетом неравновесной бинарной плотности $n'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t)$ в конфигурационном пространстве (37) в качестве исходного, которое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_a(\bar{x}_a, t)}{\partial t} + \frac{p_a^\alpha}{m_a} \frac{\partial f_a(\bar{x}_a, t)}{\partial q_1^\alpha} + e_a E^\alpha(\bar{q}_1, t) \frac{\partial f_a(\bar{x}_a, t)}{\partial p_a^\alpha} + \frac{\partial f_a^0(\bar{p}_a)}{\partial p_a^\alpha} \times \\ & \times \frac{1}{n_a^0} \int \frac{\partial \Phi_{ab}(r)}{\partial r} \frac{r^\alpha}{r} n'_{ab}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, t) d\bar{r} = \beta_a \frac{\partial}{\partial p_a^\alpha} \left[\frac{\tilde{p}_a^\alpha}{m_a} f_a(\bar{x}_a, t) + kT(\bar{q}, t) \frac{\partial f_a(\bar{x}_a, t)}{\partial p_a^\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Попытаемся упростить исходное кинетическое уравнение для $f_a(\bar{q}_1, \bar{p}_a, t)$ в случае, когда потоки затухают по экспоненциальному закону. Для этого в (39) линеаризуем бинарную плотность в конфигурационном пространстве $n_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t)$ в виде

$$n_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t) = n_{ab}^o(r) + n'_a(\bar{q}_1, t) n_b^o g_{ab}^o(r) + n_a^o n'_b(\bar{q}_2, t) g_{ab}^o(r) + n_a^o n_b^o g'_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t), \quad (40)$$

где $n_{ab}^o = n_a^o n_b^o g_{ab}^o(r)$, n_a^o , n_b^o , $g_{ab}^o(r)$ и $n'_a(\bar{q}_1, t)$, $n'_b(\bar{q}_2, t)$, $g'_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t)$ – равновесные и неравновесные плотности и радиальная функция распределения частиц сортов a и b .

Учитывая (40) в (35), заменяя оператор Смолуховского на релаксационный член вида

$$-\omega_{ab} \hat{L} n_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t) = -\frac{n_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t) - n_{ab}^o(\bar{r})}{\tau_{ab}},$$

линеаризуя и исключая $\partial n'_a / \partial t$, $\partial n'_b / \partial t$ из законов сохранения зарядов

$$\partial n'_a(1) / \partial t = -n_a^0 \operatorname{div} \vec{\mathcal{G}}(1); \quad \partial n'_b(2) / \partial t = -n_b^0 \operatorname{div} \vec{\mathcal{G}}(2),$$

для возмущенной части радиальной функции распределения $g'_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t)$ в случаях независимости потоков получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial g'_{ab}}{\partial t} + \left(\mathcal{G}^\alpha(2) - \mathcal{G}^\alpha(1) \right) \frac{\partial g_{ab}^0}{\partial r^\alpha} + \left(\frac{e_b}{\beta_b} - \frac{e_a}{\beta_a} \right) \frac{\partial g_{ab}^0}{\partial r^\alpha} E_1^\alpha(1) = -\frac{(g'_{ab} - \tilde{g}_{ab})}{\tau_{ab}}, \quad (41)$$

где $\mathcal{G}^\alpha(1) = \mathcal{G}^\alpha(\bar{q}_1, t)$, $\mathcal{G}^\alpha(2) = \mathcal{G}^\alpha(\bar{q}_2, t)$, $E^\alpha(1) = E^\alpha(\bar{q}_1, t)$.

В случае независимости потоков для исследования электропроводящих свойств растворов электролитов на основе уравнения (41) для неравновесной радиальной функции распределения имеем:

$$\frac{\partial g'_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{ab}} g'_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t) = -F'_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t), \quad (42)$$

где

$$F'_{ab}(\bar{q}_1, \bar{r}, t) = -\frac{1}{d_{ab}} \left(\frac{e_b}{\beta_b} - \frac{e_a}{\beta_a} \right) \left(\frac{\partial g_{ab}(r)}{\partial r^\alpha} \right) E^\alpha(\bar{q}, t). \quad (43)$$

Согласно [26], совершая Фурье-преобразование по времени в уравнении (42), для Фурье-образа неравновесной радиальной функции распределения $g'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, \omega)$ получим выражение:

$$g'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, \omega) = -\frac{\tau_{ab}}{1-i\omega\tau_{ab}} F'_{ab}(\vec{q}_1, \vec{r}, t) = \frac{D_{ab}^\beta(r)}{1-i\omega\tau_{ab}} E^\beta(\vec{q}_1, \omega), \quad (44)$$

где

$$D_{ab}^\beta(r) = \frac{\pi}{4} \frac{d_{ab} e_a}{kT_0} q_{ab} \frac{\partial g_{ab}^0(r)}{\partial r} \frac{r^\beta}{r}, \quad q_{ab} = \frac{4}{\pi} \frac{e_a \beta_b - e_b \beta_a}{e_a (\beta_a + \beta)}, \quad \tau_{ab} = \frac{d_{ab}^2}{kT_0} \left(\frac{\beta_a \beta_b}{\beta_a + \beta_b} \right).$$

На основе системы уравнений Максвелла, в работах [26, 37] между комплексным коэффициентом диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}(\omega)$ и комплексным коэффициентом удельной электропроводности $\tilde{\sigma}(\omega)$ получена связь следующего вида:

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \tilde{\sigma}(\omega), \quad (45)$$

которая совпадает с выражениями, полученными в [30, 31].

Для определения аналитического выражения $\tilde{\sigma}(\omega)$ необходимо иметь дифференциальное уравнение для вектора плотности тока проводимости $\vec{j}(\omega)$. На основе исходного замкнутого кинетического уравнения для одночастичной функции распределения (39) с учётом определения импульсных моментов $f_a(\vec{x}_a, t)$, а также выражений (40) и (44), в линейном приближении для Фурье-образа компоненты плотности тока проводимости $j^\alpha(\vec{q}_1, \omega)$ в [26] получено уравнение

$$j^\alpha(\vec{q}_1, \omega) = \sum_a \frac{\sigma_a^0}{1-i\omega\tau_{ab}} \left\{ 1 + \sum_b \frac{\pi^2}{3} \frac{d_{ab}^3 n_b^0 q_{ab}}{1-i\omega\tau_{ab}} \int \frac{\partial \Phi_{ab}^*(r)}{\partial r} \frac{\partial g_{ab}^0(r)}{\partial r} r^2 dr \right\} E^\alpha(\vec{q}_1, \omega). \quad (46)$$

Сравнивая выражение (46) с Фурье-образом закона Ома для компоненты вектора плотности тока проводимости в дифференциальной форме $j^\alpha(\vec{q}, \omega) = \tilde{\sigma}(\omega) E^\alpha(\vec{q}, \omega)$, определим комплексный коэффициент удельной электропроводности в следующем виде:

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \sum_a \frac{\sigma_a^0}{1-i\omega\tau_{ab}} \left\{ 1 + \sum_b \frac{G_0^{ab}(r)}{1-i\omega\tau_{ab}} \right\}, \quad (47)$$

где

$$G_0^{ab}(r) = 2\pi n_b^* q_{ab} \int \frac{\partial \Phi_{ab}^*(r)}{\partial r} \frac{\partial g_{ab}^0(r)}{\partial r} r^2 dr, \quad (48)$$

$n_b^* = (\pi/6)d_{ab}^3 n_b^0$ – приведенная плотность частиц сорта b , $\tau_a = m_a / 2\beta_a$, $\omega_a = 2\pi\nu_a$, $\omega_{ab} = 2\pi\nu_{ab}$, $\sigma_a^0 = n_a e_a^2 / \beta_a$, $d_{ab} = (d_a + d_b) / 2$, $\Phi_{ab}^*(r) = \Phi_{ab}(r) / kT$.

По аналогии с определениями модулей упругости [16,32] комплексный модуль электроупругости определяется в виде

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = -i\omega\tilde{\sigma}(\omega) = \epsilon(\omega) - i\omega\sigma(\omega), \quad (49)$$

где $\epsilon(\omega)$ – динамический модуль электроупругости, $\sigma(\omega)$ – динамический коэффициент удельной электропроводности.

Подставляя (47) в (49), разделив реальную и мнимую части, для $\epsilon(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ получим следующие выражения:

$$\epsilon(\omega) = \sum_a \frac{(\omega\tau_a)^2 \epsilon_a^0}{1 + (\omega\tau_a)^2} \left[1 + \sum_b \frac{(1 + \tau_{ab} / \tau_a) G_0^{ab}(r)}{1 + (\omega\tau_a)^2 (\tau_{ab} / \tau_a)^2} \right], \quad (50)$$

$$\sigma(\omega) = \sum_a \frac{\sigma_a^0}{1 + (\omega\tau_a)^2} \left[1 + \sum_b \frac{1 - (\omega\tau_a)^2 (\tau_{ab} / \tau_a)}{1 + (\omega\tau_a)^2 (\tau_{ab} / \tau_a)^2} G_0^{ab}(r) \right], \quad (51)$$

где $\epsilon_a^0 = \frac{n_a^0 e_a^2}{m_a}$, $\sigma_a^0 = \epsilon_a^0 \tau_a = \frac{n_a^0 e_a^2 \tau_a}{m_a} = \frac{n_a^0 e_a^2}{\beta_a}$.

В [27 – 29] проведены численные расчеты коэффициентов трения β_a , β_b , времён релаксации τ_a , τ_b , τ_{ab} , а также модуля электроупругости $\epsilon(\omega)$ и коэффициента удельной электропроводности $\sigma(\omega)$ в зависимости от концентрации C , плотности ρ , температуры T и частоты ω . Полученные результаты для водных растворов LiCl, NaCl, KCl и CsCl приведены в виде таблиц и рисунков и сравнены с экспериментальными литературными данными, которые находятся в хорошем согласии [33 – 36].

Для динамических коэффициентов диэлектрической проницаемости $\epsilon_1(\omega)$ и диэлектрических потерь $\epsilon_2(\omega)$ на основе (45) и (47) можно получить следующие выражения [37, 38]:

$$\epsilon_1(\omega) = \epsilon_\infty + \sum_a \frac{\sigma_a^0 \tau_a}{\epsilon_0 [1 + (\omega\tau_a)^2]} \left[1 + \sum_b \left(\frac{1 - (\omega\tau_a)^2 \frac{\tau_{ab}}{\tau_a}}{1 + (\omega\tau_a)^2 \left(\frac{\tau_{ab}}{\tau_a} \right)^2} A_{ab}(0) \right) \right], \quad (52)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \sum_a \frac{(\omega\tau_a)\sigma_a^0\tau_a}{\varepsilon_0[1+(\omega\tau_a)^2]} \left[1 + \sum_b \left(\frac{\left(1 + \frac{\tau_{ab}}{\tau_a}\right)}{1+(\omega\tau_a)^2 \left(\frac{\tau_{ab}}{\tau_a}\right)^2} A_{ab}(0) \right) \right], \quad (53)$$

где $A_{ab}(0) = 6\pi n_b^* q_{ab} \int \frac{\partial^2 \Phi_{ab}^*(r)}{\partial r^2} g_{ab}(r) r^2 dr$, $n_b^* = \frac{\pi}{6} n_b d_{ab}^3$, $q_{ab} = \frac{4}{\pi} \frac{e_b \beta_a - e_a \beta_b}{e_a (\beta_a + \beta_b)}$,

$\Phi_{ab}^*(r) = \frac{\Phi_{ab}(r)}{kT}$ – приведенная потенциальная энергия межчастичного взаимодействия.

На основе (52) и (53) и при определённом выборе модели раствора, потенциальной энергии взаимодействия и радиальной функции распределения в [39 – 43] проведены численные расчеты $\varepsilon_1(\nu)$ и $\varepsilon_2(\nu)$ в зависимости от термодинамических параметров состояния и частоты. Полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными. Построены диаграммы Коула-Коула.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. – Избр. труды, том 2. – Киев: Наукова думка, 1970, с. 99-196.
2. Kirkwood J.G. The statistical mechanical theory of transport processes: I. General theory. – J.Chem. phys., 1946, 14, № 3, pp. 180-201.
3. Фишер И.З. Статистическая теория жидкостей. – М: Физматгиз, 1961, 280 с.
4. Физика простых жидкостей. Под ред. Темперли Г., Роулинсона Дж. и Рашбрука Дж., часть I. – М.: Мир, 1971, 308 с.; часть II. – М.: Мир, 1973, 400 с.
5. а) Кубо Р., Иокота М., Накажима С. Статистическая механика необратимых процессов. II Реакция на термические возмущения. – В кн.: Вопросы квантовой теории необратимых процессов. – М.: ИЛ, 1961, с. 73-78.
б) Кубо Р. Некоторые вопросы статистической теории необратимых процессов. – В сб.: Термодинамика необратимых процессов. – М.: ИЛ, 1962, с. 345-421.
6. Mori H. Statistical-mechanical theory of transport in fluids. – Phys. Rev., 1958, 112, № 6, pp. 1829-1842.
7. Mori H. Transport, collective motion, and Brownian motion. – Prog. of Theor. Phys., 1965, 33, № 3, pp. 423-455.
8. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. – М.: Наука, 1971, 415 с.
9. Бонч-Бруевич В.Л., Тябликов С.В. Метод функций Грина в статистической механике. – М.: Физ.-мат., 1961, 312 с.
10. Юхновский И.Р., Головкин М.Ф. Статистическая теория классических равновесных систем. – Киев: Наукова думка, 1980, 372 с.
11. Гиршфельдер Дж., Кергисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. – М.: ИЛ, 1961, 930 с.
12. Гуров К.П. Основания кинетической теории. – М.: Наука, 1986, 351 с.
13. Боголюбов Н.Н. Микроскопические решения уравнения Больцмана-Энскога в кинетической теории для упругих шаров. – ТМФ, 1975, 24, вып. 2, с. 242-247.

14. Честер Дж. Теория необратимых процессов. – М.: Наука, 1966, 111с.
15. Шелест А.В. Метод Боголюбова в динамической теории кинетических уравнений. – М.: Наука, 1990, 158 с.
16. Одинаев С., Адхамов А.А. Молекулярная теория структурной релаксации и явлений переноса в жидкостях. - Душанбе: Дониш, 1998, 230 с.
17. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов. – В сб.: Механика, 1952, № 4, с. 71 –97.
18. Одинаев С., Акдодов Д.М., Шарифов Н.Ш., Мирзоаминов Х. О частотной дисперсии вязкоупругих свойств растворов электролитов. Журнал физической химии, 2010, т. 84, № 6, с. 1063-1068 (Frequency Dispersion of the Viscoelastic Properties of Solutions of Electrolytes. Russian Journal of Physical Chemistry A, 2010, v. 84, No 6, pp. 954-959).
19. Одинаев С., Акдодов Д.М. Области частотной дисперсии коэффициента сдвиговой вязкости водных растворов электролитов. Журнал физической химии, 2013, т. 87, № 7, с. 1154–1159 (Ranges of Frequency Dispersion for the Shear Viscosity Coefficients of Aqueous Solutions of Electrolytes. Russian Journal of Physical Chemistry A, 2013, V. 87, No7, pp. 1129–1134).
20. Одинаев С., Акдодов Д.М., Шарифов Н. Частотная дисперсия динамических модулей упругости растворов электролитов. Журнал физической химии, 2016, т. 90, № 2, с. 294-299 (Frequency Dispersion of the Dynamic Moduli of Elasticity of Electrolyte Solutions. Russian Journal of Physical Chemistry A, 2016, V. 90, No 2, pp. 479–484).
21. Одинаев С., Акдодов Д.М. Зависимость частотной дисперсии коэффициента объемной вязкости растворов электролитов от природы затухания релаксирующих потоков. Журнал физической химии, 2016, т. 90, № 6, с. 877-884 (Dependence of the frequency dispersion of the bulk viscosity coefficient of solutions of electrolytes on the nature of the decay of relaxing fluxes// Russian Journal of Physical Chemistry A, 2016, V.90, No 6, pp. 1168-1174).
22. Смирнова Н.А. Молекулярные теории растворов. Л.: Химия, 1987, 336 с.
23. Musharaf A.Sk., Alok S, Swapan G. Mode coupling theory of self and cross diffusivity in a binary fluid mixture: Application to Lennard-Jones systems. J. Chem. Phys. 2001, V. 114. № 23, pp. 10419-10429.
24. Эрдеи–Груз Т. Явления переноса в водных растворах. М.: «Мир», 1976, 597 с.
25. Krienke H., Barthel J. Equations of State for Fluids and Fluids Mixtures. Chapter 16 - Ionic fluids // Ed. By J.V. Sengers et al. Amsterdam: Elsevier, 2000, p. 751-803.
26. Одинаев С., Идибег Х. К статистической теории электропроводящих свойства растворов электролитов. ДАН РТ, 2017, т. 60, № 7-8, с. 320-328.
27. Одинаев С., Акдодов Д.М., Идибегзода Х.И. Исследование частотной дисперсии коэффициента удельной электропроводности водных растворов электролитов. Журнал структурной химии, 2019, т. 60, № 3, с. 452-460. (Odinaev S., Akdodov D.M., Idibegzoda Kh.I. Frequency dispersion of the specific conductance coefficient in aqueous electrolyte solutions // Journal of Structural Chemistry. 2019, т. 60. № 3. с. 434-442.)
28. Одинаев С., Акдодов Д.М., Идибегзода Х.И. Численный расчет концентрационной и температурной зависимостей коэффициента удельной электропроводности водных растворов электролитов. Журнал Физической Химии, 2019, т. 93, № 6, с. 930–937 (Odinaev S., Akdodov D.M., Idibegzoda Kh.I. Numerically calculating the concentration and temperature dependences of the electrical conductivity of aqueous electrolyte solutions. Russian Journal of Physical Chemistry A, 2019, Vol. 93, No. 6, pp. 1171–1177.)
29. Одинаев С., Акдодов Д.М., Идибегзода Х.И. Частотная дисперсия модуля электроупругости водных растворов электролитов. Журнал структурной химии, 2019, т. 60, № 9, с. 1476-1484. (Odinaev S., Akdodov D.M., Idibegzoda Kh.I. Frequency dispersion of the electroelasticity modulus in aqueous electrolyte solutions. Journal of Structural Chemistry. 2019, т. 60, № 9, с. 1481-1489.)

30. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М.: МГУ, 1964, 281 с.
31. Barther J.M.G., Krienke H., Kunz W. Physical chemistry of electrolyte solution. Modern aspects. Steinkopff: Darmstadt; New York: Springer, 1998, 401 p.
32. Nossal R. Collective motion in simple classical fluids // Phys. Rev., 1968, V.166, №1. pp. 81-88.
33. Кузнецов Н.М. Загоскин, Ю.Д. Артемкина. Ю.М. Щербачков В.В. Успехи в химии и химической технологии, 2015, Т. XXIX, № 1, с. 55-57.
34. Lobo V.M.M., Quaresma J.L. Handbook of electrolyte solutions. Amsterdam: Elsevier. 1989. Pt.A. 1268 p., Pt.B.-PP.1169-2353.
35. Максимова Н.И., Пак Ч.С., Правдин Н.Н. и др. Свойства электролитов. - М.: Metallurgia, 1987, 128 с.
36. Добош Д. Электрохимические константы. Справочник для электрохимиков. - М.: «Мир», 1980, 365 с.
37. Одинаев С., Махмадбегов Р. К статистической теории диэлектрических свойств растворов электролитов. ДАН РТ, 2013, т. 56, № 5, с. 381-388.
38. Одинаев С., Махмадбегов Р. Об определении связи между коэффициентами диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерь растворов электролитов. ДАН РТ, 2014, т. 57, № 6, с. 483-489.
39. Одинаев С., Махмадбегов Р.С. Исследование диэлектрических свойств и частотных спектров диэлектрических потерь водного раствора NaCl в зависимости от параметров состояния. Укр. физ. журн. 2015, т. 60, № 9, с. 862-869. Research of the dependences of dielectric properties and frequency spectra of dielectric losses in NaCl aqueous solution on the state parameters. Odinaev S., Makhmadbegov R.S. Ukr. J. Phys., 2015, v. 60, No 9, pp. 861-867.
40. Одинаев С., Махмадбегов Р.С. Частотная дисперсия диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерь водных растворов KCl и CsCl в зависимости от параметров состояния УФЖ. Укр. физ. журн. 2015, т. 60, № 12, с. 1212-1219.; Frequency dispersion of dielectric permittivity and dielectric losses in aqueous KCl and CsCl solutions depending on their state parameters / S. Odinaev, R.S. Makhmadbegov. Ukr. J. Phys., 2015, v. 60, No 12, pp. 1211-1217.
41. Одинаев С., Махмадбегов Р.С. Исследование частотной дисперсии коэффициента диэлектрической проницаемости растворов электролитов. Журнал Физической Химии, 2016, т. 90, № 1, с. 52-58.; Studying the frequency dispersion of the dielectric permeability of electrolyte solutions. Odinaev S., Makhmadbegov R.S. J. Phys. Chem. A. 2016, V. 90, pp. 89-94.
42. Одинаев С., Махмадбегов Р.С. Расчет частотных спектров коэффициентов диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерь водных растворов электролитов. Журнал Физической Химии, 2018, т. 92, № 1, с. 107-114; Calculating permittivity and dielectric loss frequency spectra for aqueous electrolyte solutions. Odinaev S., Makhmadbegov R.S. Russian Journal of Physical Chemistry a, 2018, vol. 92, no. 1, pp. 111-117.
43. Одинаев С., Махмадбегов Р.С. Численный расчет коэффициентов диэлектрической проницаемости и диэлектрических потерь водного раствора KF от параметров состояния. Журнал структурной химии – 2018, т. 59, № 3, с. 621-628; Odinaev S., Makhmadbegov R.S. Numerical calculation of permittivity and dielectric loss of aqueous KF solution depending on state parameters // Journal of Structural Chemistry. 2018, т. 59, № 3, с. 604-611.

С.ОДИНАЕВ

**ТАДҶИҚОТИ РАВАНДҲОИ РЕЛАКСАТСИОНӢ, ХОДИСАҲОИ ИНТИҚОЛ,
ЧАНДИРӢ ВА ДИЭЛЕКТРИКИИ МОЕЪҲО ВА МАҲЛУЛҲОИ
ЭЛЕКТРОЛИТӢ**

*Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Таҳлили мухтасари адабиётҳо оид ба омӯзиши назарияи моеъҳо ва маҳлулҳои онҳо оварда шудааст. Инчунин, муодилаҳои ибтидоии кинетикӣ барои функсияҳои тақсимоти як ва ду зарра оварда шуда, ҳалли онҳо бо усули Грэд мухтасар нишон дода шудааст. Дар асоси ин муодилаҳо ҳодисаҳои интиқол, ҳосиятҳои чандирӣ ва диэлектрикии моеъҳо ва маҳлулҳои электролитӣ таҳқиқ карда мешаванд. Ҳисобкуниҳои адабии ин параметрҳои физикӣ гузаронида шуда, натиҷаҳо дар шакли ҷадвалҳо ва расмҳо пешниҳод карда шудаанд, инчунин бо маълумотҳои таҷрибавӣ муқоиса карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: равандҳои релаксатсионӣ, коэффитсиентҳои интиқол, модулҳои чандирӣ, суръат ва зариби фурубурди садо, коэффитсиентҳои электрогузаронӣ, нуфузпазирии диэлектрикӣ ва талафшавии диэлектрикӣ.

S.ODINAЕV

**A STUDYING OF RELAXATION PROCESSES, TRANSPORT PHENOMENA,
ELASTIC AND DIELECTRIC PROPERTIES OF LIQUIDS AND
ELECTROLYTE SOLUTIONS**

S.U.Umarov Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Tajikistan

A brief literature review of the theoretical methods of studying liquids and their solutions are given. Also, the initial kinetic equations obtained and solved by the Grad method for one- and two-particle distribution functions are briefly described. On the basis of these initial kinetic equations, the transfer phenomena, elastic, acoustic and dielectric properties of liquids and electrolyte solutions are investigated. Numerical calculations of these physical parameters are carried out and the results are presented in the form of tables and figures, as well as compared with the experimental data.

Key words: relaxation processes, transport coefficients, elastic modules, sound velocity and absorption, coefficients of specific electrical conductivity, dielectric permittivity and losses.

УДК 544.476:661.183.123.2

Д.Х.ХАЛИКОВ

**РОЛЬ КИСЛОТЫ В РЕАКЦИИ ХИМИЧЕСКОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ
ПРОТОПЕКТИНА НА ПЕКТИНОВЫЕ ПОЛИСАХАРИДЫ**

Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана

Поступила в редакцию 21.09.2021 г.

Приводятся обобщенные результаты кислотной гидролиз-экстракции протопектинов (ПП) корзинки подсолнечника (КП), свекловичного жома (СЖ), яблочных выжимок (ЯВ) и цитрусовых корочек (ЦК). Данные представлены в широкой области pH, температуре 85°C, различной продолжительности реакции, в условиях статического и динамического режимов. Раствор-гидролизат разделяют по ранее разработанной методике на фракции: микрогель (МГ), пектиновые вещества (ПВ) и олигосахариды (ОС). Предполагая, что процесс гидролиз-экстракции включает в себя комбинации, по крайней мере, трех видов реакций: гидролиз солей, гидролиз сложноэфирных и гликозидных связей. О вероятности вклада отдельных реакций судили по выходу и показателям структуры компонентов распада ПП соответствующих растительных ресурсов. Высокие значения выходов ПВ и ОС из свекловичного жома наряду с высокими значениями остатков ГК и его степени этерификации свидетельствуют о высокой вероятности реакции распада цепей полимера. Для распада ПП КП более характерна реакция гидролиза солевых связей. Действие кислотности раствора при гидролиз-экстракции пектинсодержащего сырья проявляется в катализе процесса и в извлечении ионов кальция, который в свою очередь зависит от первичной структуры протопектина и продуктов его распада.

Ключевые слова: протопектин, пектиновые вещества, корзинка подсолнечника, свекловичный жом, микрогель, олигосахариды.

При разработке современной технологии получения пектиновых полисахаридов из вторичных фруктовых ресурсов основное внимание обращают на увеличение выхода целевых продуктов и создание условий, приводящих к возрастанию содержания уранидных составляющих в составе мономерных звеньев макромолекул. Как выход, так и ура-

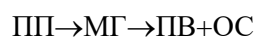
Адрес для корреспонденции: Халиков Джурабой Халикович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: dkhalikov@rambler.ru

видные составляющие пектиновых полисахаридов, с одной стороны зависят от источника сырья, а с другой от способа проведения гидролиз-экстракции и задаваемых физико-химических параметров процесса [1, 2], таких, как рН и ионная сила раствора. Традиционно считается, что роль кислоты заключается в ее действии в качестве катализатора [3]. В то же время, имеются сведения [4] об изменении рН раствора в процессе гидролиза протопектина (ПП) подсолнечника и существенное влияние присутствия неорганических ионов на скорость распада протопектина различных фруктовых источников, что связано с расходом ионов водорода на другие химические реакции. В связи с этим, в настоящей статье, опираясь на данные ранних публикаций и экспериментальные результаты, полученные в последние годы, раскрывается роль кислоты в осуществлении химического превращения сетчатого природного полимера – протопектина, приводящего к получению водонабухающих и водорастворимых компонентов пектиновых полисахаридов.

Очищенные и измельченные фруктовые материалы - свекловичный жом (СЖ), корзинка подсолнечника (КП), яблочные выжимки (ЯВ) и цитрусовые корочки (ЦК) подвергали гидролизу с помощью соляной кислоты при постоянном значении рН и при объемном соотношении сырья: гидролизат 1:20 в течение различной продолжительности реакции. Растворы гидролизата отделяли от остатков клетчатки и разделяли на три фракции: путём последовательного центрифугирования при скорости 7200 об/мин, осаждением трёхкратным количеством спирта (этанол или изопропанол) и высушиванием оставшегося маточного раствора, которые условно, после деления названы, соответственно, "микроргель" (МГ), "пектиновые вещества" (ПВ) и "олигосахариды" (ОС). Для каждой фракции определяли содержание звеньев ГК, их степень этерификации, остатки нейтральных сахаров (НС) и ионов кальция. Моносахаридный состав фракции определяли методом ГЖХ, используя метод внутреннего стандарта [5].

Статический режим. На основании данных кинетики распада ПП подсолнечника, выходов МГ, ПВ и ОС [6] показано, что отличительная особенность данного процесса заключается в экстремальном изменении содержания МГ в растворе гидролизата, а в этих же условиях с возрастанием продолжительности гидролиза содержание ПВ и ОС постепенно увеличивается, а ПП клетчатки - снижается до нуля.

Полученные результаты находят свое объяснение, если предположить, что при гидролизе ПП и продуктов его распада моносахаридные остатки их цепей перераспределяются в образующихся фракциях последовательно по следующей схеме реакции:



Принимая во внимание данную последовательность, для обработки полученных данных использовали следующие уравнения, выведенные для описания кинетики последовательной реакции первого порядка [7]:

$$\omega_{\max(MГ)} = \frac{a}{1-r} \left(e^{-r \frac{\ln r}{r-1}} - e^{\frac{\ln r}{r-1}} \right), \quad (1)$$

$$k_1 = \ln \frac{r}{r-1} * t_{\max}, \quad (2)$$

$$k_2 = rk_1, \quad (3)$$

где

ω_{\max} (МГ) – максимальное содержание моносахарида в МГ, %.,

t_{\max} - продолжительность реакции, при которой достигается максимальное содержание моносахарида в МГ, мин.,

a – исходное содержание моносахаридного остатка в ПП.

По экспериментальным значениям ω_{\max} (МГ), t_{\max} и величины a , рассчитанная суммированием содержания компонентов во всех фракциях в области плато (табл. 1), используя системы уравнения (1-3), методом компьютерного анализа [4], была подобрана величина « r », удовлетворяющая равенству (1), что дало возможность рассчитать численные значения k_1 и k_2 .



Рис. 1. Зависимость содержания ГК(1) и суммы НС(2) в МГ от продолжительности гидролиза ПП корзинки подсолнечника.

Для учета реакционной способности кислых и нейтральных составляющих ПП в реакции кислотного гидролиза соответствующие константы k_1 и k_2 были рассчитаны для распада химической связи ГК и суммы НС. Экспериментальные результаты, необходимые для этой цели представлены на рис. 1. Видно, что

закономерности изменения содержания этих компонентов (МГ и НС) в ходе гидролиза являются экстремальными. Используя вышеописанный подход, по уравнениям

1-3 рассчитаны величины константы k_1 и k_2 , которые наряду с другими величинами приводятся в табл.1.

Таблица 1

Параметры уравнений (1-37) для МГ КП и его моносахаридных составляющих

Наименование	ω_{\max} , %	t_{\max} , мин	a , %	r	$10^4 k_1$, сек ⁻¹	$10^4 k_2$, сек ⁻¹
МГ	37.50	60.00	100.00	0.9620	2.83	2.72
НС	4.90	75.00	32.54	4.2560	0.99	4.21
ГК	26.94	65.81	41.80	0.2302	4.83	1.11

Величины a , входящие в эти уравнения, были рассчитаны из области плато (рис.1) в зависимости выхода соответствующих компонентов от продолжительности гидролиза. Из табл. 1 следует, что для ГК величина r меньше, а для суммы НС больше единицы. Это означает, что соответствующие связи с участием остатков НС легче разрушаются, чем связи образованные остатками ГК, что приводит к обогащению МГ КП звеньями ГК.

Перечисленные процессы приводят к тому, что содержание ГК в составе МГ фактически стабилизируется и достигает величины более 80% при продолжительности процесса около 1 часа. При этом неизменным остается также и степень этерификации звеньев ГК на уровне 52-57 %.

Состав ПВ обогащается звеньями ГК на всем протяжении гидролиза, достигая максимальной величины в конце процесса, так и не доходя до величины, равной в МГ.

Фракции ОС содержат в основном низкомолекулярные осколки нейтральных полисахаридов. Естественным следствием суммарного процесса гидролиза является обогащение фракции ОС низкомолекулярными остатками, главным образом, нейтральных сахаров.

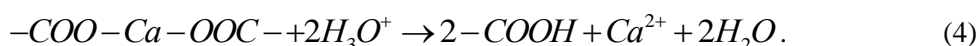
Для ПВ и ОС с ростом концентрации кислоты ($pH_0=1.05-1.4$) выход закономерно увеличивается, а в случае МГ, для всех трех значений исходной кислотности раствора (pH_0), выход с ростом продолжительности гидролиза проходит через максимум. В табл. 2 представлены экспериментальные данные выхода МГ ($\omega_{\max}, \%$) при различных pH, отнесенной к содержанию ПП, продолжительность гидролиза в области максимума ($t_{\max}, \text{мин}$), а также рассчитанные значения $r=k_2/k_1$, k_1 и k_2 .

Таблица 2

Влияние исходной кислотности раствора на численное значение параметров уравнения 1-3

pH_0	$t_{\max}, \text{мин}$	$\omega_{\max}, \%$	r	$k_1, \text{мин}^{-1}$	$k_2, \text{мин}^{-1}$
1,05	129.3	29.36	1.5246	0.0062	0.0095
1,2	64.65	39.01	0.8873	0.0164	0.0146
1,4	83.67	18.18	3.2614	0.0062	0.0203

Из данных табл. 2 следует, что изменение соответствующих параметров с ростом исходного значения pH_0 раствора не описываются четкой закономерностью, хотя прослеживается рост скорости (k_2) распада МГ на более низкомолекулярные компоненты с увеличением pH раствора. Это не связано с подбором величины r [19], поскольку разность между значениями максимума выхода МГ, найденного экспериментально и рассчитанного по уравнениям 1-3, отличаются между собой на незначительные величины ($10^{-5}-10^{-6}$ единиц). Другая причина может заключаться в том, что как величина r , так и численные значения констант k_1 и k_2 не характеризуют конкретные реакции, а отражают некую усредненную величину протекающих реакций. По-видимому, главная причина заключается в изменении величины pH (рис. 2) в процессе реакции [8]. Одной из причин возрастания значения pH раствора в процессе гидролиза может быть расход кислоты для извлечения ионов кальция из ПП [9], которое иллюстрируется уравнением:



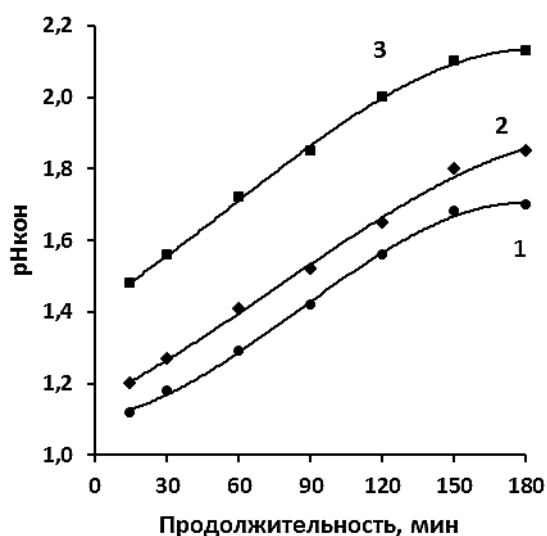


Рис. 2. Изменение рН в зависимости от продолжительности гидролиз-экстракции ПП яблочных выжимок при различных значениях рН_{исх} раствора. рН_{исх} = 1.05 (1); 1.2 (2); 1.4 (3).

Для подтверждения данного предположения экспериментальные данные были обработаны на основании уравнения необратимой реакции 2-го порядка. Показано, что величина констант для всех компонентов гидролизата достаточно резко уменьшается в начале процесса, а затем стабилизируется вокруг постоянной величины (например, для МГ).

Изменение величины констант, хоть и является неожиданным, всё же можно объяснить на основании изменений структуры мономерных звеньев соответствующих компонентов реакции. Этими реакциями, в частности, могут быть гидролиз солей и гидролиз сложноэфирных и гликозидных связей, происходящих одновременно с реакцией экстракции ионов кальция.

Соотношение величин констант (k_1 и k_2 табл. 2) убедительно свидетельствует о малой скорости гидролиза солей (выделения ионов кальция из ПП), что обуславливает значительное накопление микрогеля, в особенности МГ КП в начале процесса.

Концентрация ионов кальция $C_x(Ca)$ в протопектине и продуктах его распада была рассчитана по формуле (5).

$$C_x(Ca) = \frac{\omega_x(Ca) * \omega(x) * \omega(ПП)}{\mathcal{E}(Ca) * E} \text{ (мэкв / литр) } , \quad (5)$$

где x – протопектин, микрогель, пектиновые вещества, олигосахариды;

$\omega(x)$ – выход продуктов распада ПП, %;

$\omega_x(Ca)$ – содержание Ca^{2+} в протопектине, микрогеле, пектиновых веществах и олигосахаридах при фиксированной продолжительности гидролиз-экстракции, %;

$\omega(ПП)$ – содержание ПП в остатке КС, %;

$\mathcal{E}(Ca)$ – эквивалентная масса Ca^{2+} , г/экв;

E – значение гидромодуля.

Используя данные, представленные в табл. 3, были рассчитаны константы скорости гидролиз-экстракции (рис. 3).

Таблица 3

Концентрация ионов водорода и кальция в продуктах распада протопектина

Концентрация, мэкв/литр	Продолжительность, мин.						
	0	15	30	60	90	120	150
$C(H^+)$	63.1	50.1	44.70	39.80	35.50	31.60	28.20
$C_{пп}(Ca^{2+})$	43.8	20.1	15.80	9.00	8.10	6.10	-
$C_{мг}(Ca^{2+})$	-	9.86	12.70	17.65	14.80	14.80	13.70
$C_{пв}(Ca^{2+})$	-	4.51	4.51	4.52	6.09	8.40	8.78
$C_{ос}(Ca^{2+})$	-	9.32	10.72	12.47	17.92	14.84	21.30

В начале процесса величина кажущейся константы скорости распада протопектина для всех продуктов реакции (уравнение 4) резко уменьшается, а затем принимает постоянное значение. Изменение значений констант объясняется трансформацией структуры пектиновых полисахаридов, происходящей под действием процесса экстракции ионов кальция и каталитических реакций. Соотношение величин констант выделения ионов кальция из протопектина, микрогеля и пектиновых веществ свидетельствует о замедленной скорости выделения Ca^{2+} из МГ, что является причиной накопления микрогеля корзинки подсолнечника в ходе реакции.

Очевидно, что ионы кальция играют важную роль в процессе стабилизации структуры продуктов распада протопектина. Их селективное удаление дает дополнительную возможность управления процессом получения пектиновых полисахаридов в сторону оптимизации выхода водорастворимой фракции и качества целевого продукта.

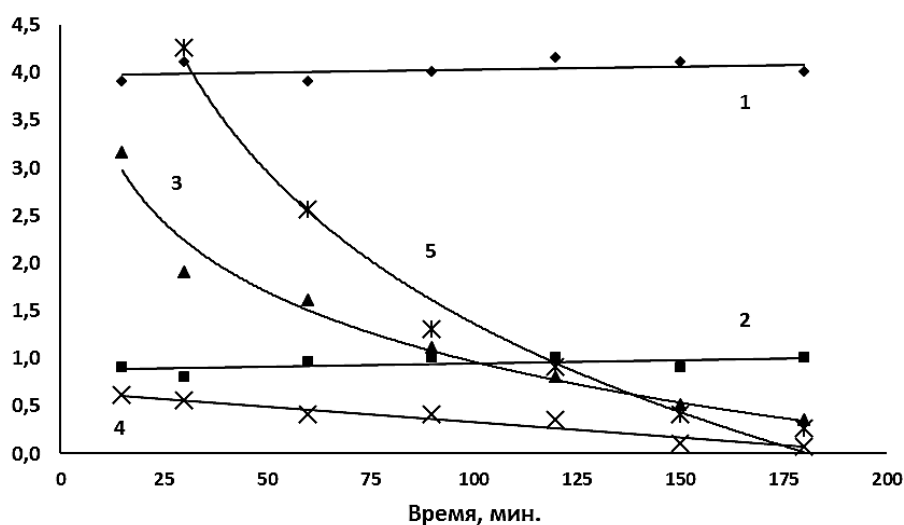


Рис. 3 Содержание ионов кальция в МГ ($W_{мг}(Ca)$) (1), отношение эквивалентов ионов кальция и ГК ($\frac{Э(Ca)}{Э(ГК)}$) (2), значение кажущейся константы скорости реакции ($10^5 \cdot k$, л/(моль*сек)) выделения ионов кальция из ПП (3), МГ (4) и ПВ (5) в зависимости от продолжительности гидролиза.

Другая основная функция кислоты при гидролиз-экстракции пектинсодержащего сырья заключается в её каталитическом действии. Как было показано в [10], первая ста-

для каталитической реакции распада протопектина может заключаться в адсорбции кислоты растительными клетками.

Процесс каталитического действия кислоты на распад ПП можно описать следующими уравнениями [11]:



$$-\frac{d[МГ]}{dt} = \frac{k_3 k_1 [ПП]}{k_2 [МГ] + k_1 [ПП]} [H^+] \quad (8)$$

при

$$k_1 [ПП] \ll k_2 [МГ] \quad (9)$$

$$-\frac{d[МГ]}{dt} \approx \frac{k_3 k_1 [ПП]}{k_2 [МГ]} [H^+]. \quad (10)$$

Из уравнений 6-10 следует, что вначале образуется активный комплекс ПП с ионом водорода, который далее распадается на МГ и ПВ. По этой схеме между скоростью распада ПП и концентрацией катализатора должна быть прямая зависимость. Действительно, как показано в работе [12] во всех значениях исходного рН₀ раствора, с ростом продолжительности гидролиза наблюдается прямая пропорциональность (рис. 4) между скоростью распада ПП и отношением $[ПП] \cdot [H^+] / [МГ]$.

Таким образом, при гидролиз-экстракции протопектина происходит освобождение карбоксильных групп галактуроновой кислоты от межмолекулярных связей, образованных ионами Ca²⁺.

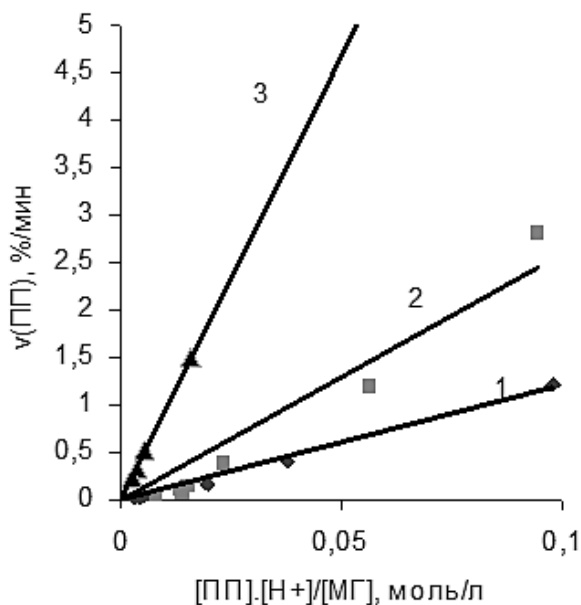


Рис. 4. Скорость распада ПП КП в зависимости от величины $[ПП] \cdot [H^+] / [МГ]$. рН_{исх}=1.05 (1); 1.2 (2); 1.4 (3).

Уронидные составляющие пектиновых полисахаридов, особенно, имеющие свободные карбоксильные группы, в том числе, образованные в результате экстракции ионов кальция, становятся доступными к воздействию гидролизующих агентов – минеральной и полимерной кислот, что является причиной распада пектиновой макромолекулы по этим участкам цепи.

Учитывая тот факт, что полимерная кислота является намного сильнее минеральной, интенсивный распад сетчатых полимеров – протопектина и микрогеля происходит, прежде всего, по неэтерифицированным остаткам галактуроновой кислоты, что приводит к увеличению степени этерификации ГК как микрогеля, так и пектиновых веществ [13].

Следует отметить, что кроме перечисленных действий кислоты на все параметры реакции гидролиз-экстракции и первичной структуры получаемых целевых продуктов, несомненно, влияет структура мономерных остатков, в частности степень этерификации звеньев галактуроновой кислоты. При высоком значении степени этерификации, естественно, за счет снижения кальциевых мостиков облегчается распад протопектина соответствующих пектинсодержащих растительных источников. Сказанное достаточно хорошо иллюстрирует данные, полученные при сравнительном изучении выходов МГ, ПВ и ОС, содержание в них остатков ГК и их степень этерификации при гидролиз-экстракции КП и СЖ (рис. 5-7).

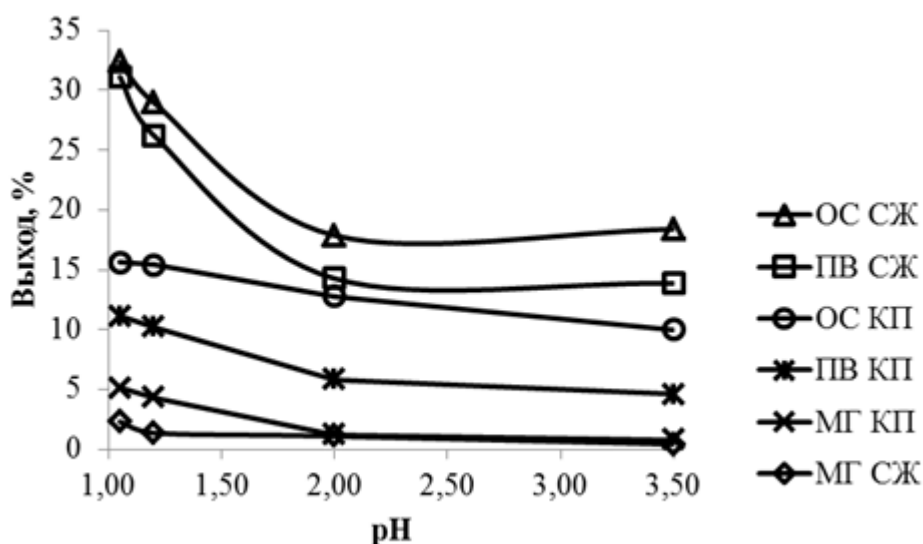


Рис. 5. Выход фракций МГ, ПВ и ОС при изменении pH реакционной среды (Т-85°С, t-60 мин).

Из рис. 5 следует, что в соответствии с вышеуказанным предположением, наименьший выход из компонентов реакции составляет МГ, полученное из свекловичного жома. При pH 1,05 составляет 2,3% и к тому же снижается до величин 0,43% при pH равной 3,5. В этих условиях содержание МГ, выделяемого из КП, составляет более 2,5 раза, чем из СЖ. Фракции ПВ для обоих источников сырья составляют наибольшее количество, причем для СЖ при низких значениях pH достигают величин более 30%. Содержание ОС в этих условиях извлекаемого из СЖ 2-3 раза больше, чем содержание этих компонентов при гидролизе ПП КП. Эта разница наиболее ощутима в области pH равной 1-2.

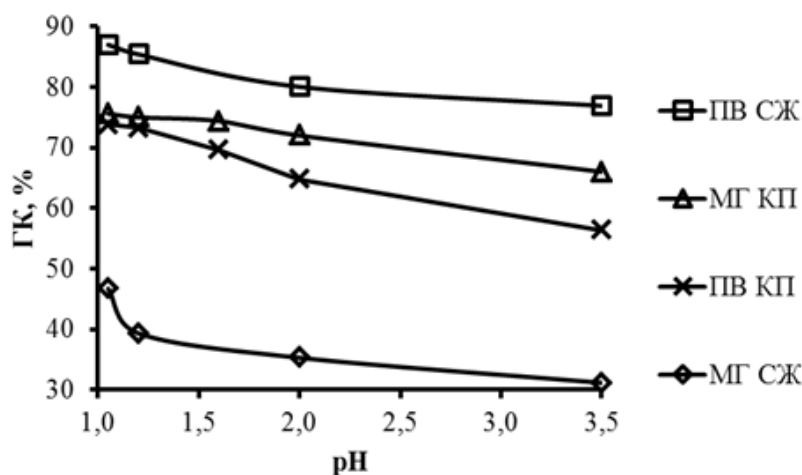


Рис. 6. Содержание остатков галактуронозой кислоты во фракциях МГ и ПВ при распаде протопектинов КП и СЖ.

На рис. 6 приводится содержание остатков галактуронозой кислоты в двух основных продуктах распада протопектинов КП и СЖ, а именно в МГ и ПВ. На рис.6 видно, что наибольшее количество остатков ГК содержится в ПВ СЖ, которые составляют более 80% от количества мономерных звеньев полисахаридов. Остатки ГК находятся в следующем порядке снижения: МГ КП, ПВ КП и МГ СЖ, причем содержание ГК в последнем объекте порядка 5-7%, в то время как для МГ КП достигает величин более 70%. Что касается, степени этерификации галактуронозой кислоты (рис. 7), то для образцов МГ и ПВ, полученных из СЖ, имеет существенно высокое значение и практически остается без изменения во всей области рН раствора от 1.05 до 3.5, что связано, по-видимому, с практическим отсутствием свободных карбоксильных групп в этих компонентах. Кроме того, разность этого параметра является значительной при сравнении образцов, полученных из сырьевых ресурсов СЖ и КП.

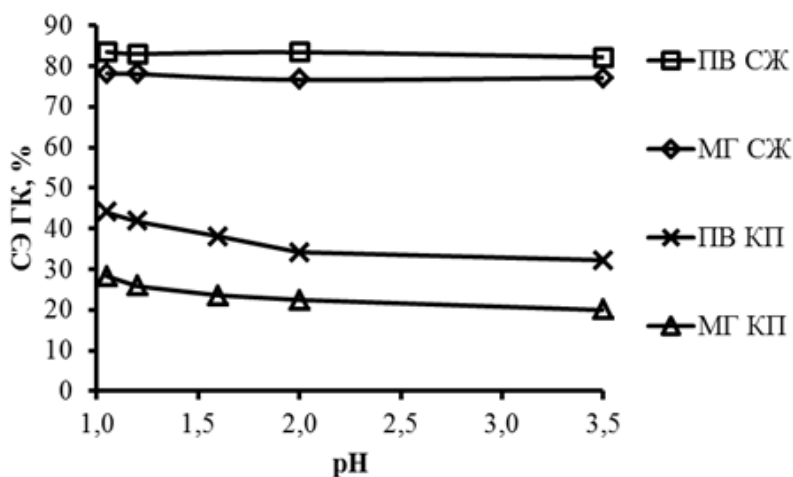


Рис. 7. Изменение степени этерификации остатков ГК в МГ и ПВ для образцов, полученных из КП и СЖ в зависимости от рН раствора гидролизата.

Как видно на рис. 7 численное значение СЭ для образцов, полученных из СЖ, составляет более 80%, в то время как для пектинов КП эта величина не достигает и 50% и с ростом рН снижается вплоть до значений 30 и 20 % при варьировании рН от 1 до 3.5. По данному показателю ПВ КП можно отнести к низкоэтерифицированным, а ПВ СЖ к высокоэтерифицированным пектинам.

Таким образом, действие кислотности раствора при гидролиз-экстракции пектин-содержащего сырья проявляется не только в каталитическом процессе, но и в извлечении ионов кальция, которое в свою очередь зависит от первичной структуры протопектина и продуктов их распада. В частности, отличительной чертой КП является высокое содержание в них ионов кальция и для извлечения целевого продукта необходимы высокая температура, воздействие сильных кислот в течение длительного времени. Поэтому для получения пектиновых веществ КП нужны более низкие значения рН раствора, что приводит к возрастанию доли гидролиза сложноэфирных и гликозидных связей, одновременно со снижением молекулярной массы и изменением первичной структуры ПВ, хотя доля звеньев ГК и её степень этерификации остается без существенных изменений.

Динамический режим. В динамическом режиме основные закономерности распада протопектина и кинетика образования компонентов реакции в целом остается без изменения. Гидролиз-экстракции растительного сырья непрерывно находятся в потоке раствора кислотного катализатора при неизменном значении рН. Скорость достижения процессов диффузии, сорбции, десорбции, как гидролизующего агента, так и продуктов распада протопектина ускоряется, что приводит к росту значений выхода пектиновых полисахаридов, изменению их первичной структуры, физико-химических параметров и свойств [14]. Сокращение времени воздействия раствора кислоты и температуры на проэкстрагированные макромолекулы позволяет сохранить нативную структуру и, естественно, оптимальные физико-химические параметры продуктов реакции, что иллюстрируют ниже представленные экспериментальные данные.

Гидролиз-экстракции проводили на колонке общей высотой 78 см, высотой нагревательного элемента 44 см и диаметром 3.3 см. Максимальная загрузка сырья в экстрактор составляла 20 г сухой выжимки.

Суммарный распад протопектина всех видов исследованного сырья в динамическом режиме значительно превышает аналогичное значение, полученное в статическом режиме. При рН 1.05-1.2 превышение значения распада ПП в ДР составляет около 10%, а при рН 3.5-5.6 распад протопектина увеличивается более, чем в два раза. Динамический режим гидролиз-экстракции оказывает положительное влияние на значения выхода фракций протопектина всех исследованных видов сырья. Как в статическом, так и в динамическом режиме, максимального значения выхода продуктов распада ПП удается достичь в области рН 1.05 и 1.2. Выход водорастворимой фракции – пектиновых веществ в ДР при рН 1.05-1.2 превышает аналогичный показатель в статике на 5-8% и далее, разрыв увеличивается, сохраняя высокое значение до рН 3.5 и превышая выход ПВ в СР вдвое. В статическом режиме, при рН 1.6-5.6 наблюдается резкое снижение выхода ПВ. Выход спирторастворимой фракции – олигосахаридов выше в режиме динамики (рис. 8). Для КП в ДР снижение данного показателя практически не наблюдается. Для прочих видов сырья,

выход ОС уменьшается с ростом значения рН, как в динамическом режиме, так и в статике.

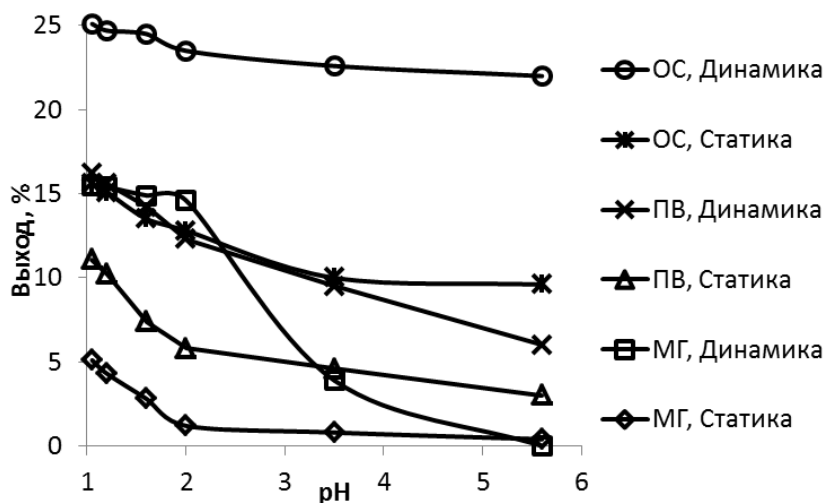


Рис. 8. Действие рН гидролизующего раствора на выход продуктов распада протопектина КП в СР и ДР. Т=85°С.

Особенно резкое отличие в значениях выхода микрогеля в режимах статике и динамики наблюдается для корзинки подсолнечника [15]. При рН 1.05-2.0 выход МГ превышает аналогичное значение в 3-7 раз, по сравнению с СР. Для прочих видов сырья выход микрогеля также выше при применении метода гидролиз-экстракции в динамическом режиме. Качество пектиновых полисахаридов для всех видов сырья выше при применении гидролиз-экстракции в динамическом режиме (рис. 9). При увеличении величины рН в обоих режимах гидролиза, содержание остатков галактуроновой кислоты и степень её этерификации, как в микрогеле, так и в пектиновых веществах снижается, но в динамике, по сравнению со статикой, темп снижения менее выражен.

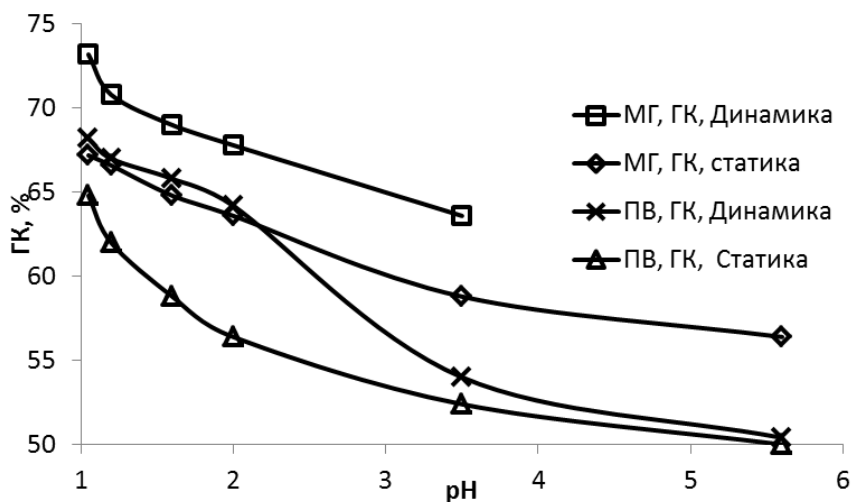


Рис. 9. Содержание звеньев ГК в МГ и ПВ корзинки подсолнечника, полученных в условиях СР и ДР. Т=85°С.

Достаточно высокое значение содержания ГК образцов, полученных в режиме динамики, удаётся сохранить до рН=3.5. В статическом режиме содержание галактуроновой кислоты в пектиновых полисахаридах снижается в диапазоне рН 1.6-5.6. Степень этерификации пектиновых веществ и образцов микрогеля, полученных в ДР, также превышает аналогичный показатель образцов, полученных в СР.

Таким образом, полученные результаты указывают на преимущество применения метода гидролиз-экстракции в динамическом режиме по сравнению со статическим режимом. Применение данного метода позволяет избежать излишнего воздействия кислоты и высокой температуры на пектиновые макромолекулы, экстрагированные из растительного сырья в раствор-гидролизат, что приводит к увеличению численных значений выходов целевых продуктов, оптимизации качества пектиновых полисахаридов и возможности проведения процесса в мягких условиях.

Следует отметить, что при постоянной температуре существенными параметрами оптимизации процесса гидролиз-экстракции, помимо кислотности раствора, является природа исходного сырья. Наиболее перспективные виды растительного сырья, представляющие интерес для промышленности при производстве пектиновых полисахаридов является свекловичный жом (СЖ), корзинка подсолнечника (КП), яблочные выжимки (ЯВ) и цитрусовые корочки (ЦК). Среди перечисленных объектов наиболее лабильные связи с веществами клеточной стенки образуются ПП ЯВ и ЦК, что является причиной получения достаточно высококачественных ПВ при относительно высоких значениях рН раствора. В этом ряду свекловичный жом занимает промежуточное положение между корзинкой подсолнечника и двух последних объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович Н.С., Донченко Л.В. и др. Пектин: производство и применение. – Киев: Урожай, 1989, 88 с.
2. Халиков Д.Х., Горшкова Р.М., Мухиддинов З.К. и др. Влияние фонового электролита на гидролиз протопектина подсолнечника. – Химия природных соединений, 2002, № 2, с. 118-120.
3. Lin M.J.Y., Sosulski F.W., Humbert E.S., Downey R.K. Distribution and composition of pectins in sunflower plants. – *Canad. J. plant. Sci.*, 1975, v.55 p. 507
4. Халиков Д.Х., Мухиддинов З.К., Авлоев Х.Х. Кислотный гидролиз протопектина корзинки подсолнечника. – ДАН РТ, 1996, т. 39, № 11/12, с. 76-80.
5. Столяров Б.В., Савинов И.М., Витенберг А.Г. Руководство к практическим работам по газовой хроматографии. ИЛ., 1978, 200 с.
6. Халиков Д.Х., Мухиддинов З.К., Авлоев Х.Х., Абдусамиев Ф.Т. Некоторые характеристики продуктов распада протопектина подсолнечника. – Химия природных соединений, 1999, с. 581-585.
7. Герасимов Я.И. и др., Курс физической химии, 2-е изд., Химия. – Москва, 1973, т. 2, с. 32.
8. Халиков Д.Х., Мухиддинов З.К., Горшкова Р.М. Распад протопектина растительных клеток под действием кислотных катализаторов. – Мат-лы Российского конгресса по катализу «Роскатализ» (Москва, 3-7 октября 2011 г.). – М., 2011, с. 97.

9. Халиков Д.Х., Мухиддинов З.К., Авлоев Х.Х. Кинетика выделения ионов кальция при гидролизе протопектина корзинки подсолнечника. - ДАН РТ, 1998, т. 41, № 1-2, с. 62-66.
10. Халиков Д.Х., Асоев М.Г., Мухиддинов З.К. Сорбция кислоты в клеточной стенке яблочной выжимки. - ДАН РТ, 1994, т. 37, № 7-8, с. 8-11.
11. Герасимов Я.И. и др., Курс физической химии, 2-е изд., Химия. – Москва, 1973, т. 2, с. 258.
12. Халиков Д.Х., Мухиддинов З.К. Физико-химические основы распада протопектина растительных клеток под действием кислотных катализаторов. – Химия природных соединений, 2004, № 2, с. 118-142.
13. Халиков Д.Х., Горшкова Р.М., Халикова С. и др. Распад протопектинов при кислотном гидролизе растительных материалов. – ДАН РТ, 2007, т. 50, № 4, с. 340-343.
14. Горшкова Р.М., Мухиддинов З.К., Махкамов Х.К. и др. Статический и динамический режимы кислотного гидролиза протопектина корзинки подсолнечника. – Изв. АН Республики Таджикистан. Отд-ние физ.-мат., хим., геол. и тех. наук, 2010, № 3 (140), с. 69-75.
15. Халиков Д.Х., Бободжанова Г.Н., Горшкова Р.М., Махкамов Х.К. Действие кислотности раствора и фонового электролита на выход и уранидные составляющие продуктов распада протопектина корзинки подсолнечника в потоке раствора. – ДАН РТ, 2017, т. 60, № 5-6, с. 251-258.

Ҷ.Х.ХОЛИҚОВ

НАҚШИ КИСЛОТА ДАР РЕАКСИЯИ ТАҒЙИРЁБИИ ХИМИЯВИИ ПРОТОПЕКТИН БА ПОЛИСАХАРИДҲОИ ПЕКТИНӢ

Институту химияи ба номи В.И.Никитини АМИТ

Натиҷаҳои умумии гидролиз-истирочи кислотаҳои протопектинҳои (ПП) сабади офтобпараст (СО), партови лаблабу (ПЛ) ва себ (ПС), пӯсти мандарин (ПМ) дар доираи васеи рН, ҳарорат 85°C, гуногунии давомнокии реаксия, дар шароити статикӣ ва динамикӣ оварда шудааст. Маҳлули гидролизат мувофиқи техникаи қаблан таҳияшуда ба фраксияҳо ҷудо карда шудаанд: микрогел (МГ), моддаҳои пектинӣ (МП) ва олигосахаридҳо (ОС). Нишон дода шудааст, ки раванди гидролиз-истихроҷ таркиби на камтар аз се намуди реаксияҳоро дар бар мегирад: гидролизи намакҳо, гидролизи пайвандҳои эфир ва гликозидӣ. Эҳтимолияти сахми реаксияҳои инфиродӣ аз рӯи баромад ва нишондиҳандаҳои сохтори компонентҳои ҷудошудаи ПП мувофиқ ба ҳолатҳои карда шуд. Баромади баланди ҳосили МП ва ОС аз партови лаблабу дар якҷоягӣ бо арзишҳои баланди пасмондаҳои кислотаи галактурон (КГ) ва дараҷаи этерификацияи он эҳтимолияти баланди реаксияи вайроншавии занҷирҳои полимериро нишон медиҳанд. Барои таҷзияи ПП ва СО реаксияи гидролизи пайвастиҳои намак бештар хос аст. Амали кислотаи маҳлул ҳангоми гидролиз-истихроҷи ашёи хоми дорои пектин дар раванди каталики ва истихроҷи ионҳои калтсий зоҳир мешавад, ки дар навбати худ ба сохтори ибтидоии протопектин ва маҳсулоти ҷудошудани он вобаста аст.

Калимаҳои калидӣ: протопектин, моддаҳои пектинӣ, сабади офтобпараст, партови лаблабу, микрогел, олигосахаридҳо.

D.Kh.KHALIKOV

ROLE OF ACID IN THE REACTION OF CHEMICAL CONVERSION OF PROTOPECTIN TO PECTIN POLYSACCHARIDES

V.I.Nikitin Institute of Chemistry of National Academy of Sciences of Tajikistan

The generalized results of acid of hydrolysis-extraction of protopectins (PP) of the sunflower basket (SB) and beet pulp (SG), apple pomace (AP) and citrus peels (CP) in a wide range of pH, temperature 85°C, different duration of reaction, under static and dynamic conditions are presented. The hydrolyzate solution is separated according to the previously developed technique into fractions: microgel (MG), pectin substances (PS) and oligosaccharides (OS). Assuming that the hydrolysis-extraction process includes combinations of at least three types of reactions: hydrolysis of salts, hydrolysis of ester and glycosidic linkage. The probability of the response of each reaction was analyzed using the test outcome and indicators of the structure of PP decay components of the corresponding plant resources. High resulting values of the PS and the OS from beet pulp with high values of the HA remains and its degree of esterification - indicates a high probability of the decomposition reaction of polymer chains. Hydrolysis reaction of salt bonds is more characteristic for the decomposition of the PP and SB. The action of the acidity of the solution during the hydrolysis-extraction of pectin-containing raw materials is manifested not only in the catalytic process, but also in the extraction of calcium ions, which in turn depends on the primary structure of protopectin and their decay products.

Key words: protopectin, pectin substances, sunflower head residue, microgel, kinetics rate in flow, activation energy.

УДК 669.76+542.943

И.Н.ГАНИЕВ, Дж.Х.ДЖАЙЛОЕВ

**ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА
АЖ2.18 С ЩЕЛОЧНОЗЕМЕЛЬНЫМИ МЕТАЛЛАМИ**

Институт химии им. В. И. Никитина НАН Таджикистана

Поступила в редакцию 26.08.2021 г.

Установлены основные закономерности изменения теплоемкости и термодинамических функций (энтальпия, энтропия и энергия Гиббса) алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием, стронцием и барием в зависимости от температуры и количества легирующего компонента. Показано, что с ростом температуры теплоемкость, энтропия и энтальпия алюминиевого сплава АЖ2.18 с щелочноземельными металлами увеличиваются, а энергия Гиббса сплавов уменьшается. С увеличением доли легирующего компонента в сплаве АЖ2.18 энтальпия и энтропия увеличиваются, а значение энергии Гиббса уменьшается. Выявлено, что с ростом температуры скорость окисления сплава АЖ2.18 с кальцием, стронцием и барием, в твердом состоянии увеличивается. Константа скорости окисления имеет порядок $10^{-4} \text{кг/м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$. Установлено, что процесс окисления алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием, стронцием и барием описывается гиперболическим уравнением. Потенциостатическим методом в потенциодинамическом режиме при скорости развертки потенциала 2 мВ/с установлено, что добавки легирующих компонентов до 0,5 мас.% увеличивают коррозионную стойкость исходного сплава АЖ2.18 на 25-35%. При этом отмечается сдвиг потенциала коррозии исходного сплава в положительную область, а потенциалы питтингообразования и репассивации – в отрицательном направлении оси ординат. При переходе от сплавов с кальцием к сплавам со стронцием и барием отмечается уменьшение скорости коррозии сплавов.

Ключевые слова: алюминиевый сплав АЖ2.18, кальций, стронций, барий, теплоемкость, термодинамические функции, термогравиметрия, высокотемпературное окисление, скорость окисления, энергия активации, потенциостатический метод, анодное поведение, среда электролита NaCl.

Адрес для корреспонденции: Ганиев Изатулло Наврузович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/2, Институт химии им.В.И. Никитина НАНТ. E-mail: ganiev48@mail.ru

Введение

Алюминиевые сплавы в последнее время как конструкционный материал заняли значительную позицию вместо стальных конструкций. С учётом подробного исследования и анализа диаграмм состояния металлических систем были разработаны легкие сплавы на основе алюминия в качестве конструкционного материала, эквивалентные или превосходящие стальным, например, сплавы алюминия с добавками цинка, магния, меди и ряда других металлов [1-3].

Повышенное содержание примесей, как кремний и железо, в алюминии и алюминиевых сплавах является главным преткновением к их широкому применению в различных областях производства. Фазы с алюминием, которые образуются из примесей кремния и железа, в итоге создают внутренние дефекты как структурной неоднородности, оказывающие отрицательное влияние на качество продукции. Следовательно, затратными являются очистки из железа алюминия [4-8].

Анализ литературы показывает, что алюминий низкой чистоты с повышенным содержанием железа почти не находит использования, кроме как для раскисления и дегазации стали. Также перспективным является разработка алюминиевых сплавов на основе технического алюминия с повышенным содержанием железа. Кроме того, сплавы алюминия с железом и щелочноземельных металлов широко применяют в качестве носителя электрического заряда в электротехнике [9-14].

Таким образом, актуальность работы заключается в разработке новых сплавов на основе низкосортного алюминия с тем, чтобы превратить данный металл в сплав, который отличался бы особыми свойствами и мог применяться в промышленности. Для реализации поставленной цели в качестве объекта исследования был выбран сплав эвтектического состава $Al+2.18\%Fe$ (АЖ2.18), который далее подвергался модифицированию щелочноземельными металлами (Ca, Sr, Ba) в количестве от 0.005 до 0.5 мас.% [15-19].

Сплавы эвтектического состава обладают рядом преимуществ, главным из которых является минимальное значение интервала кристаллизации и, соответственно, усачных характеристик. Полученные в данном разделе результаты послужат научной основой для синтеза новых анодных сплавов для протекторной защиты стальных конструкций [20-23].

Экспериментальные результаты и их обсуждение

В работе измерение теплоёмкости сплавов в режиме «охлаждения» производилось на установке, в основу работы которой положен метод С-калориметра с тепломером и адиабатической оболочкой. Для измерения удельной теплоёмкости металлов использован закон охлаждения Ньютона - Рихмана. Всякое тело, имеющее температуру выше окружающей среды, будет охлаждаться, причём скорость охлаждения зависит от величины теплоёмкости тела и коэффициента теплоотдачи. Если взять два металлических стержня определённой формы, то сравнивая кривые охлаждения (температуры как функции времени) этих образцов, один из которых служит эталоном (его теплоёмкость и скорость ох-

лаждения должны быть известны), можно определить теплоёмкость другого, определив скорость его охлаждения. Количество теплоты δQ , теряемое предварительно нагретым телом массы m при его охлаждении на dT градусов, будет

$$\delta Q = C_p^0 m dT, \quad (1)$$

где C_p – удельная теплоёмкость вещества, из которого состоит тело.

Потеря энергии происходит через поверхность тела. Следовательно можно считать, что количество теплоты δQ_s , теряемое через поверхность тела за время $d\tau$, будет пропорционально времени, площади поверхности S и разности температур тела T и окружающей среды T_0 :

$$\delta Q_s = -\alpha(T - T_0) S d\tau. \quad (2)$$

Если тело выделяет тепло так, что температура всех его точек изменяется одинаково, то будет справедливо равенство:

$$C_p^0 m dT = -\alpha(T - T_0) S d\tau. \quad (3)$$

Выражение (3) можно представить в виде

$$C_p^0 m \frac{dT}{d\tau} = -\alpha(T - T_0) S. \quad (4)$$

Полагая, что α , T и T_0 в малом интервале температур не зависят от координат точек поверхности образца, нагретых до одинаковой температуры и при одинаковой температуре окружающей среды, напишем соотношение (4) для двух образцов:

$$C_{p_1}^0 m_1 s_1 a_1 \left(\frac{dT}{d\tau} \right)_1 = C_{p_2}^0 m_2 s_2 a_2 \left(\frac{dT}{d\tau} \right)_2. \quad (5)$$

При использовании этой формулы для двух образцов (эталоны и любого другого), имеющих одинаковые размеры $S_1 = S_2$ и состояния поверхностей (тогда их коэффициенты теплоотдачи предполагают равными $a_1 = a_2$):

$$C_{p_1}^0 m_1 \left(\frac{dT}{d\tau} \right)_1 = C_{p_2}^0 m_2 \left(\frac{dT}{d\tau} \right)_2. \quad (6)$$

Следовательно, зная массы образцов m_1 и m_2 , скорости их охлаждения и удельную теплоёмкость эталона, можно вычислить теплоёмкость другого вещества по:

$$C_{p_2}^0 = \frac{C_{p_1}^0 m_1 \left(\frac{dT}{d\tau} \right)_1}{m_2 \left(\frac{dT}{d\tau} \right)_2}. \quad (7)$$

Для оправданности такого допущения экспериментально были установлены зависимости температуры образцов от времени охлаждения для алюминия и меди. Полученные значения теплоемкости хорошо согласуются с литературными данными. Температурный диапазон измерения - до 800 К. Погрешность измерения теплоемкости по данной методике не превышает 6%.

В рамках данной работы исследовано влияние кальция, стронция и бария на теплоемкость и изменения термодинамических функций алюминиевого сплава АЖ2.18. Для синтеза сплавов использовали металлы следующих марок: алюминий – марки А5 (ГОСТ 11069-2001), железо – ч.д.а., кальций металлический марки КМ1(ТУ 48-40-215-72), стронций металлический марки СтМ1(ТУ 48-4-173-72), барий металлический марки БаМ1(ТУ 48-4-465-85).

Синтез сплавов осуществлён в лабораторных шахтных печах сопротивления марки СШОЛ при температуре 800-850°С с использованием лигатуры алюминий-железо (2.18% Fe). Из синтезированных сплавов в графитовые изложницы отливали цилиндрические образцы высотой 30 мм и диаметром 16 мм. Температурную зависимость теплоёмкости алюминиевого сплава АЖ2.18, модифицированного кальцием, изучали в режиме «охлаждения» в интервале температур 298,15-800 К. На рис. 1 представлены экспериментально полученные зависимости температуры образцов из сплава АЖ2.18, модифицированного кальцием, которые описываются уравнением.

$$T = T_0 + \left[(T_1 - T_0) e^{-\tau/\tau_1} + (T_2 - T_0) e^{-\tau/\tau_2} \right]. \quad (8)$$

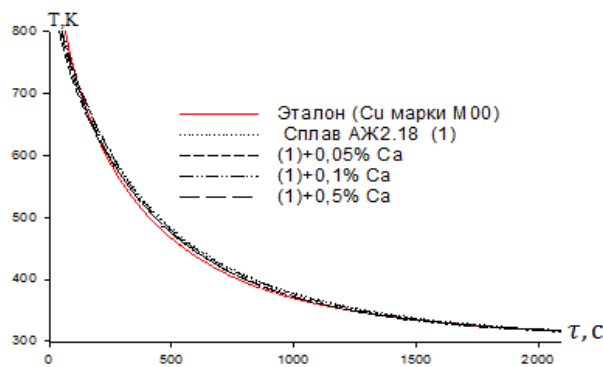


Рис. 1. Зависимость температуры (Т) от времени охлаждения (τ) для образцов из алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием и эталона (Cu марки М00).

Проводя дифференцирование уравнения (8) по τ, получим уравнение для определения скорости охлаждения образцов из сплава АЖ2.18, модифицированного кальцием, вида:

$$\frac{dT}{d\tau} = - \left(\frac{T_1 - T_0}{\tau_1} \right) e^{-\tau/\tau_1} - \left(\frac{T_2 - T_0}{\tau_2} \right) e^{-\tau/\tau_2}. \quad (9)$$

По данному дифференцированному уравнению были рассчитаны скорости охлаждения образцов сплавов, которые графически приведены на рис. 2. В табл. 1 для исследованных сплавов представлены экспериментальные значения коэффициентов $\Delta T_{01}, \tau_1, \Delta T_{02}, \tau_2$ в уравнении (9). Результаты экспериментов обработаны по программе MS Excel, графики построены с помощью программы Sigma Plot. При этом коэффициент корреляции составлял не менее 0.994.

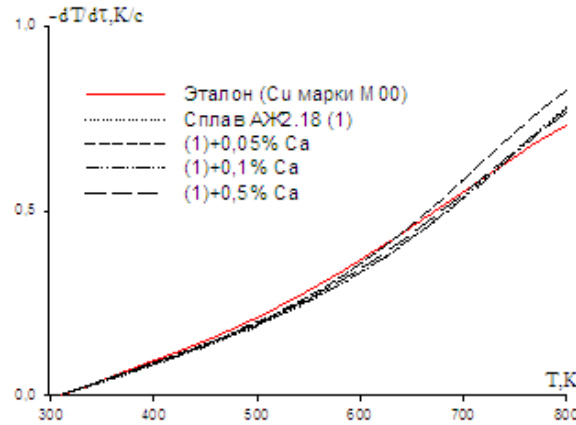


Рис. 2. Температурная зависимость скорости охлаждения образцов из алюминиевого сплава АЖ2.18, модифицированного кальцием, и эталона (Си марки М00).

Таблица 1

Значения коэффициентов $\Delta T_{01}, \tau_1, \Delta T_{02}, \tau_2$ в уравнении (9) для алюминиевого сплава АЖ2.18, модифицированного кальцием, и эталона (Си марки М00).

Содержание кальция в сплаве, мас.%	$\Delta T_1, \text{К}$	$\tau_1, \text{с}$	$\Delta T_2, \text{К}$	$\tau_2, \text{с}$	$\Delta T_1/\tau_1, \text{К/с}$	$\Delta T_2/\tau_2, \text{К/с}$	$\Delta T_0, \text{К}$
Сплав АЖ2.18	185.68	139.39	411.15	569.25	1.33	0.72	307.41
0.05	185.68	139.39	411.15	569.25	1.33	0.72	307.41
0.1	185.31	139.67	410.33	570.39	1.33	0.72	306.80
0.5	181.96	142.24	402.93	580.86	1.28	0.69	301.26
Эталон	277.41	109.73	390.83	543.51	2.53	0.72	308.35

Для вычисления удельной теплоёмкости алюминиевого сплава АЖ2.18, модифицированного кальцием, использовали значения скорости охлаждения эталона (Си марки М00) и сплавов по уравнению (7).

Температурная зависимость теплоёмкости алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием описывается уравнением вида

$$C_p^0 = a + bT + cT^2 + dT^3. \quad (10)$$

Обработкой уравнения (7) получены нижеследующие коэффициенты для уравнения температурной зависимости удельной теплоёмкости алюминиевого сплава АЖ2.18 и сплавов, модифицированных кальцием (табл. 2).

Таблица 2

Значения коэффициентов a , b , c , d в уравнении (10) для алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием и эталон (Cu марки М00)

Содержание кальция в сплаве, мас. %	a , Дж/(кг·К)	$b \cdot 10^{-4}$, Дж/(кг·К ²)	$c \cdot 10^{-7}$, Дж/(кг·К ³)	$d \cdot 10^{-10}$, Дж/(кг·К ⁴)	Коэффициент корреляции R , %
Сплав АЖ2.18	0.9020	8.24	-7.40	3.05	0.9999
0.01	0.8967	7.52	-5.55	1.75	0.9995
0.1	0.8385	1.04	-9.89	4.13	0.9998
0.5	0.9940	1.70	6.05	-4.98	0.994
Эталон	0.3245	2.75	-2.87	1.42	1.000

Рассчитанные значения удельной теплоёмкости алюминиевого сплава АЖ2.18, модифицированного кальцием, с шагом 100К приведены в табл. 3.

Таблица 3

Удельная теплоёмкость (кДж/(кг·К)) в зависимости от температуры для алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием и эталона (Cu марки М00)

Содержание кальция в сплаве, мас. %	Т, К					
	300	400	500	600	700	800
Сплав АЖ2.18	1.0908	1.1327	1.1671	1.1959	1.2208	1.2438
0.05	1.0771	1.1199	1.1558	1.1859	1.2112	1.2327
0.1	1.0726	1.1227	1.1629	1.1957	1.2235	1.2490
0.5	1.0860	1.1269	1.1680	1.2062	1.2386	1.2622
Эталон	0.3850	0.3977	0.4080	0.4169	0.4251	0.4336

По экспериментально полученным значениям скорости охлаждения и по рассчитанным результатам теплоемкости модифицированного кальцием сплавов, провели расчет температурной зависимости коэффициента теплоотдачи (Вт/К·м²) по уравнению (5). Результаты расчёта представлены на рис. 3.

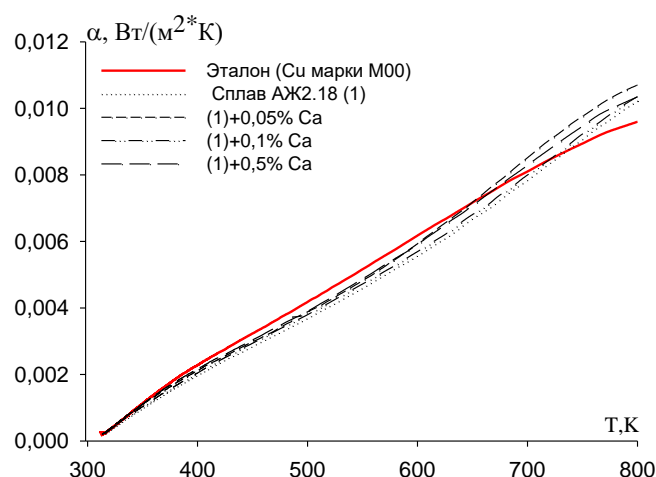


Рис. 3. Зависимость коэффициента теплоотдачи алюминиевого сплава АЖ2.18, модифицированного кальцием и эталона от температуры.

Для расчёта температурной зависимости изменений энтальпии, энтропии и энергии Гиббса были использованы интегралы от теплоёмкости для алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием по уравнениям (11) - (13)

$$H^0(T) - H^0(T_0) = a(T - T_0) + \frac{b}{2}(T^2 - T_0^2) + \frac{c}{3}(T - T_0^3) + \frac{d}{4}(T^4 - T_0^4); \quad (11)$$

$$S^0(T) - S^0(T_0) = a \ln \frac{T}{T_0} + b(T - T_0) + \frac{c}{2}(T^2 - T_0^2) + \frac{d}{3}(T^3 - T_0^3); \quad (12)$$

$$[G^0(T) - G^0(T_0)] = [H^0(T) - H^0(T_0)] - T[S^0(T) - S^0(T_0)]. \quad (13)$$

Результаты расчёта температурной зависимости изменений энтальпии, энтропии и энергии Гиббса для алюминиевого сплава АЖ2.18, модифицированного кальцием, и эталона (Cu марки М00) с шагом 100К представлены в табл. 4.

Таблица 4

Температурная зависимость изменений термодинамических функций алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием

Т, К	Эталон (Cu марки М00)	Сплав АЖ2.18	Сплав АЖ2.18 +0.05% Ca	Сплав АЖ2.18 +0.1% Ca	Сплав АЖ2.18 +0.5% Ca
	[H ⁰ (T)-H ⁰ (T ₀)],кДж/кг для сплавов				
300	0.7120	2.0173	1.9918	2.0787	2.0577
400	39.8686	113.2685	111.9024	119.0420	117.0481
500	80.1679	228.3200	225.7418	245.1042	240.9939
600	121.4193	346.5152	342.8724	380.5546	376.4495
700	163.5173	467.3806	462.7618	525.9301	526.2684
800	206.4419	590.6258	584.9824	682.0153	693.6028
	[S ⁰ (T)-S ⁰ (T ₀)],кДж/(кг·К) для сплавов				
300	0.0024	0.0067	0.0067	0.0066	0.0067
400	0.1154	0.3265	0.3226	0.3223	0.3247
500	0.2058	0.5831	0.5764	0.5773	0.5806
600	0.2816	0.7985	0.7899	0.7923	0.7970
700	0.3473	0.9847	0.9747	0.9788	0.9855
800	0.4055	1.1493	1.1378	1.1439	1.1525
	[G ⁰ (T)-G ⁰ (T ₀)], кДж/кг для сплавов				
300	-0.0042	-0.0062	-0.0062	0.0892	0.0431
400	-6.27802	-17.3298	-17.1207	-9.8908	-12.8336
500	-22.7266	-63.2165	-62.4751	-43.5610	-49.3102
600	-47.5615	-132.5721	-131.0705	-94.8493	-101.7534
700	-79.5877	-221.9334	-219.5038	-159.2256	-163.5631
800	-117.957	-328.7832	-325.2865	-233.0652	-228.4170

Проведённые исследования показали, что с ростом температуры удельная теплоёмкость, энтальпия, энтропия сплавов увеличиваются, а значение энергии Гиббса уменьшается, что объясняется ростом степени гетерогенности структуры сплавов при модифицировании их ЦЗМ. В табл. 5, 6 обобщены результаты исследования теплоёмкости и из-

менений термодинамических функций сплава АЖ2.18 с кальцием, стронцием и барием на примере сплавов, содержащих 0.5 мас.% модифицирующего компонента. Видно, что с ростом температуры теплоёмкость, энтальпия и энтропия увеличиваются, а величина энергии Гиббса сплавов уменьшается.

Таблица 5

Температурная зависимость удельной теплоёмкости (Дж/(кг·К)) алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием, стронцием и барием и эталон (Cu марки МОО)

Содержание ЦЗМ в сплаве, мас.%	T, К					
	300	400	500	600	700	800
Сплав АЖ2.18	1.0908	1.1327	1.1671	1.1959	1.2208	1.2438
0.5Ca	1.0860	1.1269	1.1680	1.2062	1.2386	1.2622
0.5Sr	1.0452	1.0794	1.1143	1.1499	1.1866	1.2244
0.5Ba	1.0144	1.0574	1.0893	1.1134	1.1330	1.1513
Эталон	0.3850	0.3977	0.4080	0.4169	0.4251	0.4336

Таблица 6

Зависимость изменений энтальпии, энтропии и энергии Гиббса от температуры для сплава АЖ2.18 с кальцием, стронцием и барием и эталон (Cu марки МОО)

Содержание ЦЗМ в сплаве, мас.%	Энтальпия, кДж/кг					
	T, К					
	300	400	500	600	700	800
Сплав АЖ2.18	2.0173	113.268	228.320	346.515	467.380	590.625
0.5Ca	2.0577	117.048	240.993	376.449	526.268	693.602
0.5Sr	1.9392	108.620	219.046	333.364	451.736	574.342
0.5Ba	2.0545	119.067	248.438	391.387	549.454	724.507
Эталон	0.7120	39.8686	80.1679	121.419	163.517	206.441
Энтропия, кДж/(кг·К)						
Сплав АЖ2.18	0.00670	0.3265	0.5831	0.7985	0.9847	1.1493
0.5Ca	0.00670	0.3247	0.5806	0.7970	0.9855	1.1525
0.5Sr	0.00647	0.3124	0.5576	0.7642	0.9443	1.1049
0.5Ba	0.00630	0.3043	0.5438	0.7447	0.9178	1.0703
Эталон	0.00240	0.1154	0.2058	0.2816	0.3473	0.4055
Энергия Гиббса, кДж/кг						
Сплав АЖ2.18	-0.0062	-17.3298	-63.216	-132.572	-221.93	-328.783
0.5Ca	0.0431	-12.8336	-49.310	-101.753	-163.56	-228.417
0.5Sr	-0.00331	-16.362	-59.755	-125.202	-209.32	-309.635
0.5Ba	0.1729	-2.6451	-23.476	-55.4091	-93.009	-131.723
Эталон	-0.0042	-6.27802	-22.726	-47.5615	-79.587	-117.957

Кинетику окисления алюминиевого сплава АЖ2.18 в твёрдом состоянии изучали термогравиметрическим методом на сплавах, содержащих: 0.005; 0.01; 0.05; 0.1; 0.5 мас.% добавки. Кинетические и энергетические параметры процесса окисления данных сплавов приведены на рис. 4-6 и в табл. 7.

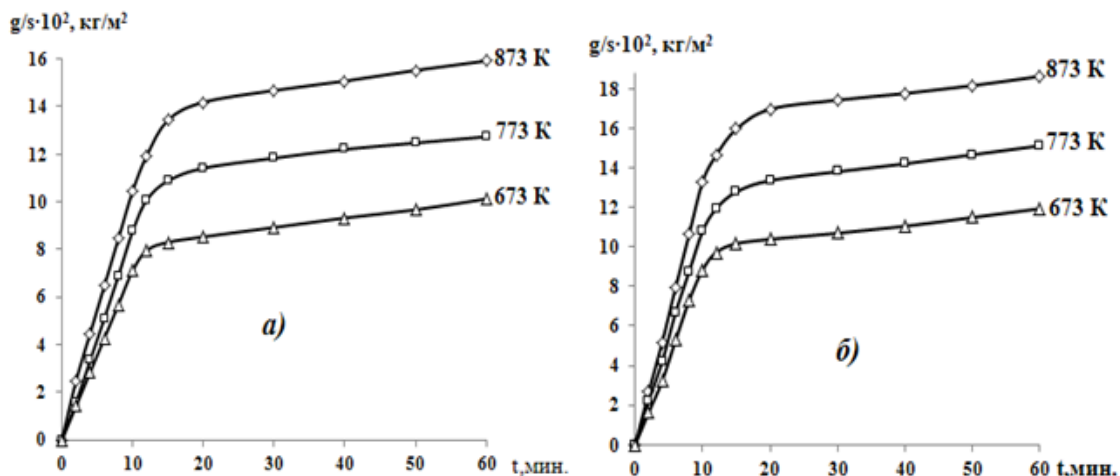


Рис. 4. Кинетические кривые окисления алюминиевого сплава АЖ2.18(а) с 0.005 мас.% кальцием (б).

Характер кинетических кривых окисления алюминиевого сплава АЖ2.18 показывает, что окисление в начальных стадиях протекает интенсивно, о чем свидетельствует рост величины удельной массы образцов. Истинная скорость окисления сплава АЖ2.18 в зависимости от температуры изменяется в пределах $1.96 \cdot 10^{-4}$ до $2.40 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$. Кажущаяся энергия активации процесса окисления, вычисленная по тангенсу угла наклона прямой зависимости $-\lg K - 1/T$, составляет 149.0 кДж/моль (табл. 7).

Окисление сплава АЖ2.18, содержащего 0.005 мас.% кальция, в твёрдом состоянии проводили при температурах 673К, 773К и 873К. Кинетические кривые окисления сплава приведены на рис. 4б. Скорость окисления сплава в зависимости от времени и температуры незначительно увеличивается. Однако рост величины удельной массы образца к 20 минутам приобретает постоянное значение, равное $16.92 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2}$ при 873К. Кажущаяся энергия активации процесса окисления составляет 146.3 кДж/моль (табл. 7).

Результаты исследования кинетики окисления алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием обобщены в табл. 7.

Приведенная на рис. 5 зависимость $\lg K - 1/T$ для алюминиевого сплава АЖ2.18, модифицированного кальцием, показывает, что процесс окисления при вышеуказанных температурах с ростом количества кальция в сплаве АЖ2.18 растёт. Изохронны окисления сплавов системы АЖ2.18-Са, приведенные на рис. 6, показывают, что с ростом концентрации кальция привес сплавов увеличивается.

Таблица 7

Кинетические и энергетические параметры процесса окисления алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием, в твёрдом состоянии

Содержание кальция в сплаве, мас. %	Температура окисления, К	Истинная скорость окисления $K \cdot 10^4$, $\text{кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$	Кажущаяся энергия активации, кДж/моль
0.0	673	1.96	149.0
	773	2.10	
	873	2.40	
0.005	673	2.00	146.3
	773	2.20	
	873	2.50	
0.05	673	2.19	130.6
	773	2.53	
	873	2.66	
0.1	673	2.65	116.7
	773	2.78	
	873	2.93	
0.5	673	2.79	80.0
	773	3.21	
	873	3.30	

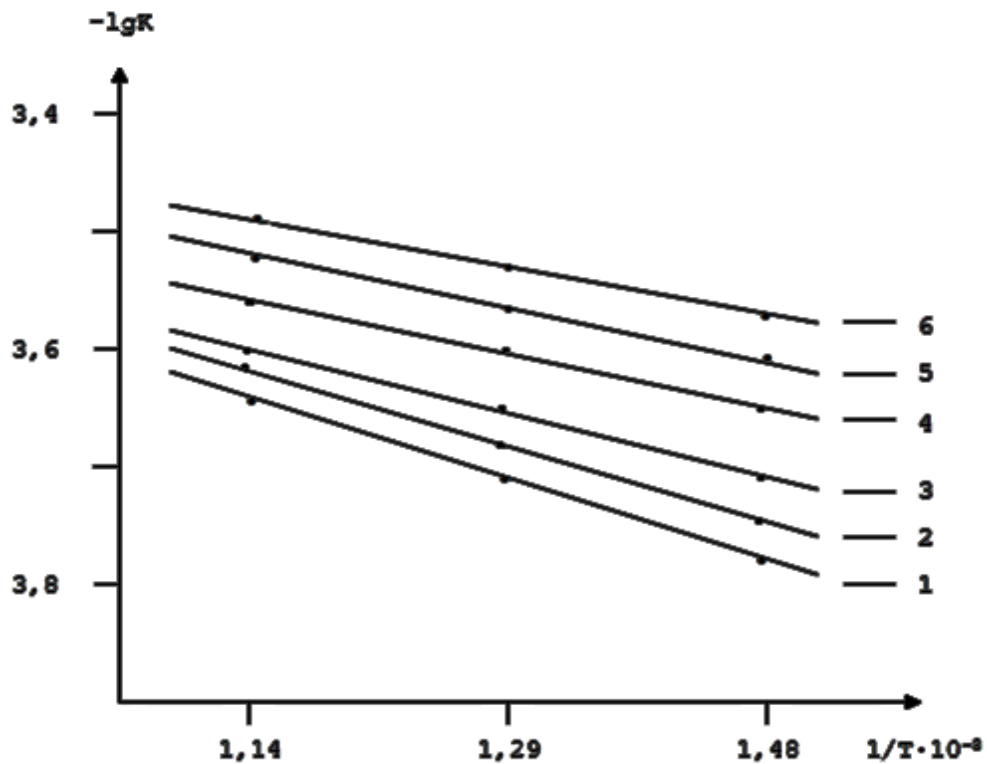


Рис. 5. Зависимость $-\lg K$ от $1/T$ для алюминиевого сплава АЖ2.18(1) с кальцием, мас. %: 0.005(2); 0.01(3); 0.05(4); 0.1(5); 0.5(6).

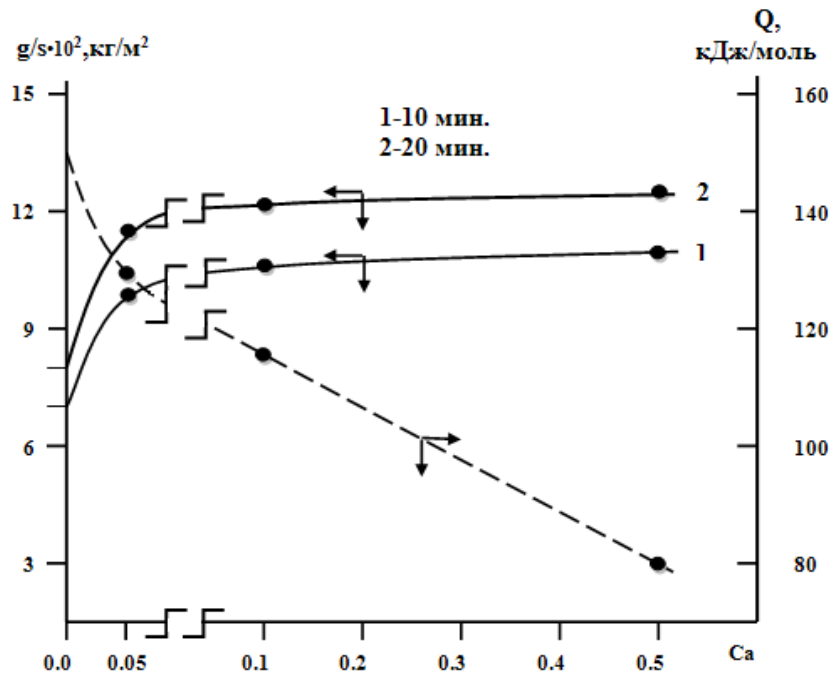


Рис. 6. Изохронны окисления алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием при 673 К.

Таким же образом были исследованы кинетика окисления алюминиевого сплава АЖ2.18 со стронцием и барием. Результаты исследования приведены в табл. 8. Видно, что при переходе от сплавов с кальцием к сплавам с барием окисление сплавов растёт, о чём свидетельствует уменьшение величины кажущейся энергии активации сплавов.

Таблица 8

Зависимость кажущейся энергии активации процесса окисления алюминиевого сплава АЖ2.18 в твердом состоянии от содержания кальция, стронция и бария

Содержание ЩЗМ в сплаве, мас. %	Кажущаяся энергия активации, кДж/моль					
	Добавка, мас. %					
	0.0	0.005	0.01	0.05	0.1	0.5
Ca	149.0	146.3	140.4	130.6	116.7	80.0
Sr	149.0	139.4	126.7	115.0	105.5	69.7
Ba	149.0	132.0	123.1	111.5	97.6	53.9

Ниже представлены результаты исследования анодного поведения сплава АЖ2.18, модифицированного кальцием, стронцием и барием, в среде электролита 0.03, 0.3 и 3%-ного NaCl.

Исследование анодных свойств алюминиевого сплава АЖ2.18, модифицированного кальцием, стронцием и барием, проводили с использованием потенциостата ПИ-50-1.1 и самописца ЛКД-4-002, в среде электролита NaCl марки ч.д.а. Электродом сравнения служил хлоридсеребряный, а вспомогательным – платиновый. Скорость развертки потенциала составляла $2 \text{ мВ} \cdot \text{с}^{-1}$. По ходу прохождения полной поляризационной кривой определяли следующие электрохимические параметры: $E_{ст}$ или $E_{св.кор.}$ – стационарный потен-

циал или потенциал свободной коррозии; $E_{рп}$ – потенциал репассивации; $E_{но}^1$ – потенциал питтингообразования после катодной поляризации; $E_{кор}$ – потенциал коррозии; $i_{кор}$ – ток коррозии. Расчет тока коррозии, как основной электрохимической характеристики процесса коррозии, проводился по катодной кривой с учетом тафеловской константы, равной $\beta_k = 0,12В$. Скорость коррозии (K) определяли по формуле $K=i_{кор} \cdot k$, где: $i_{кор}$ – плотность тока коррозии, а $k=0.335$ г/А·ч электрохимический эквивалент алюминия.

Для электрохимических исследований образцы потенциодинамически поляризовали в положительном направлении от потенциала, установившегося при погружении, до резкого возрастания тока в результате питтингообразования (рис. 7, кривая I). Затем образцы поляризовали в обратном направлении (рис. 7, кривая II) и по пересечению кривых I и II определяли величину потенциала репассивации. Далее шли в катодную область до значения потенциала $-1,1В$ для удаления оксидной плёнки с поверхности электрода (рис. 7, кривая III) в результате подщелачивания при электродной поверхности. Наконец, образцы поляризовали вновь в положительном направлении и из анодных кривых определяли основные электрохимические параметры (рис. 7, кривая IV).

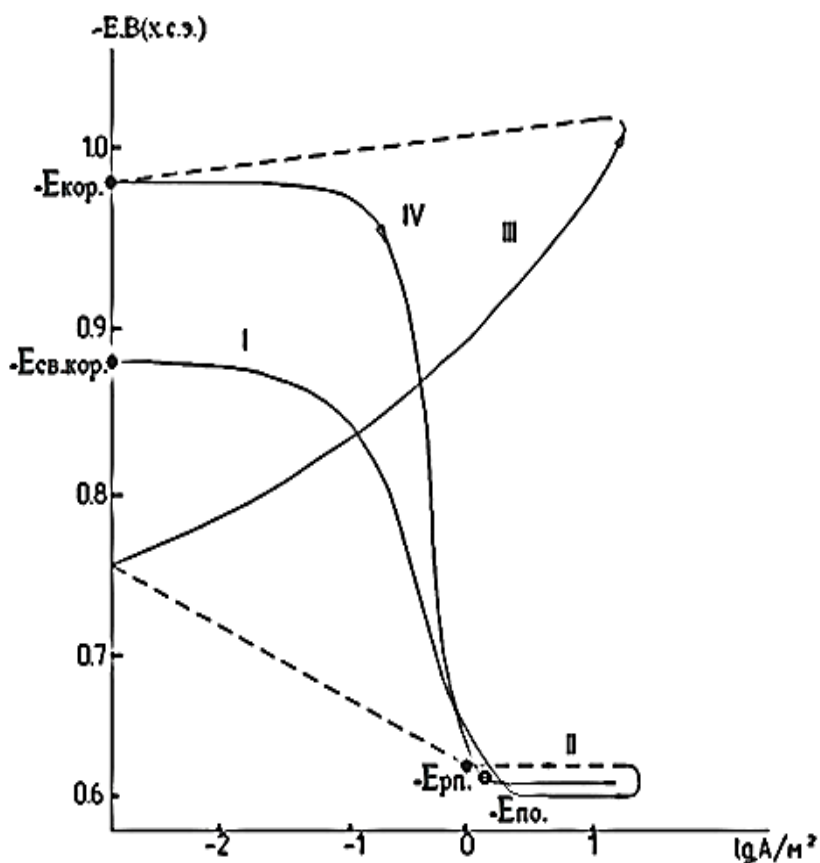


Рис. 7. Полная поляризационная (2мВ/с) кривая алюминийсвого сплава АЖ2.18 в среде электролита 3%-ного NaCl.

Таблица 9

Коррозионно-электрохимические характеристики алюминиевого сплава АЖ2.18
с кальцием в среде электролита NaCl

Среда NaCl, мас. %.	Содержание кальция в сплаве, мас. %.	Электрохимические потенциалы, В (х.с.э.)				Скорость коррозии	
		-E _{св.кор.}	-E _{кор.}	-E _{п.о.}	-E _{рп.}	i _{кор.} · 10 ² , А/м ²	K · 10 ³ , г/м ² · час
0.03	-	0.680	0.960	0.484	0.580	0.130	4.35
	0.005	0.700	0.950	0.350	0.480	0.125	4.19
	0.01	0.690	0.936	0.340	0.460	0.120	4.02
	0.05	0.670	0.920	0.320	0.440	0.115	3.85
	0.1	0.660	0.900	0.320	0.430	0.113	3.79
	0.5	0.640	0.880	0.300	0.420	0.110	3.69
3.0	-	0.860	0.994	0.600	0.620	0.170	5.70
	0.005	0.860	0.990	0.560	0.610	0.165	5.53
	0.01	0.856	0.988	0.520	0.580	0.156	5.22
	0.05	0.844	0.968	0.500	0.550	0.150	5.02
	0.1	0.830	0.950	0.470	0.540	0.145	4.86
	0.5	0.820	0.920	0.460	0.520	0.130	4.35

Исследования показывают, что добавки кальция в пределах 0.005-0.5 мас.% способствуют смещению потенциала свободной коррозии в положительную область во всех исследованных средах электролита NaCl. При этом потенциалы питингообразования и репассивации также смещаются в положительную область значений (табл. 9).

Скорость коррозии сплавов, содержащих 0.005-0.5% кальция, почти в 1.5 раза меньше, чем у исходного алюминиевого сплава АЖ2.18 (табл. 9). Добавки кальция к сплаву АЖ2.18 способствуют снижению скорости анодной коррозии, о чём свидетельствует смещение анодных кривых модифицированных сплавов в более положительную область потенциалов (рис. 8.). При этом по мере увеличения концентрации хлорид – иона в электролите NaCl скорость коррозии сплавов увеличивается независимо от содержания модифицирующего компонента – кальция, что сопровождается смещением в отрицательную область потенциалов коррозии, питингообразования и репассивации.

Применительно к настоящим исследованиям следует отметить, что в целом с ростом концентрации хлорид – иона в 10 (0.03% и 0.3% NaCl) и в 100 (0.03% и 3% NaCl) раз, потенциал питингообразования исходного сплава АЖ2.18 и сплавов с кальцием смещается в отрицательную область значений. Так, для исходного сплава АЖ2.18 при переходе от концентрации 0.03% к 3%-ного NaCl E_{п.о.} составляет соответственно -0.484 В и -0,600 В. Аналогичным образом изменяются потенциалы свободной коррозии (стационарный потенциал) и коррозии.

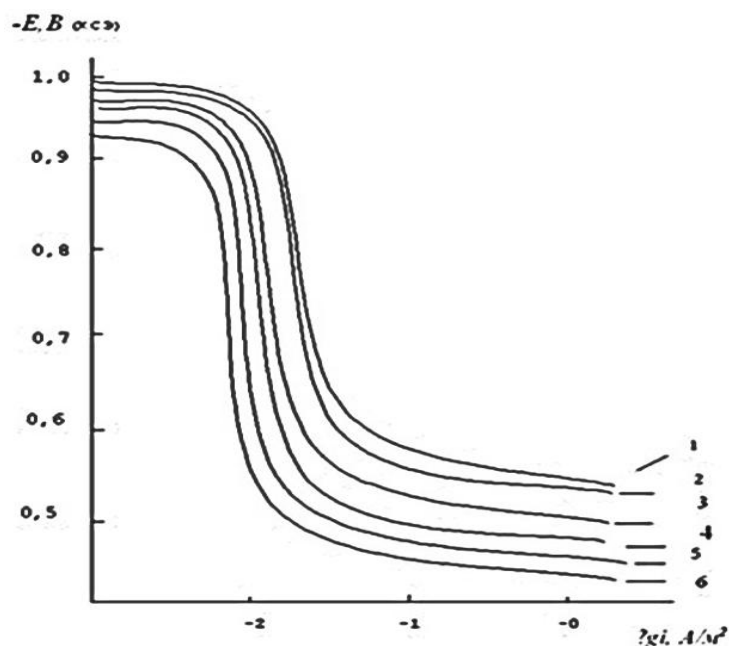


Рис. 8. Потенциодинамические анодные поляризационные (2мВ/с) кривые алюминиевого сплава АЖ2.18, содержащего кальций, мас. %: 0(1), 0.005(2), 0.01(3), 0.05(4), 0.1(5), 0.5(6), в среде электролита 3%-ного NaCl.

Таким образом, увеличение концентрации хлорид – иона способствует уменьшению потенциала питтинговой коррозии сплавов и росту величины скорости анодной коррозии сплавов. Так, если скорость коррозии исходного сплава в среде 0.03%- ного NaCl составляет $-0.130 \cdot 10^{-2} \text{ A/m}^2$, то в среде 3%- ного NaCl $-0.170 \cdot 10^{-2} \text{ A/m}^2$ (табл. 9).

Обобщённые результаты исследования сплавов систем АЖ2.18 - Ca (Sr, Ba) представлены в табл. 10 и 11. Потенциал свободной коррозии сплава АЖ2.18 с кальцием, стронцием и барием с ростом концентрации щелочноземельного металла изменяется в положительном направлении оси ординат. С увеличением концентрации хлорид-иона потенциал свободной коррозии сплава АЖ2.18 уменьшается от -0.680 В в среде 0.03 % NaCl до - 0.860 В в среде 3 %- ного NaCl (табл. 10).

Величины потенциалов питтингообразования и репассивации алюминиевого сплава АЖ2.18 с ЩЗМ также по мере роста концентрации хлорид-иона в электролите изменяются в отрицательном направлении оси ординат. Увеличение концентрации модифицирующего компонента способствует росту величины потенциалов питтингообразования и репассивации во всех средах независимо от концентрации хлорид-иона. Установленные зависимости характерны для сплава АЖ2.18 со всеми щелочноземельными металлами. При переходе от сплавов с кальцием к сплавам со стронцием и барием потенциалы свободной коррозии и питтингообразования растут, то есть изменяются в положительном направлении оси ординат (табл. 10).

Таблица 10

Потенциалы (х.с.э.) свободной коррозии ($-E_{св.кор.}$, В) и питтингообразования ($-E_{п.о.}$, В) алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием, стронцием, барием, в среде электролита NaCl.

Среда NaCl, мас.%	Содержание ЦЗМ в сплаве, мас.%	Сплавы с Ca		Сплавы со Sr		Сплавы с Ba	
		$-E_{св.кор.}$	$-E_{кор.}$	$-E_{св.кор.}$	$-E_{кор.}$	$-E_{св.кор.}$	$-E_{кор.}$
0.03	-	0.680	0.484	0.680	0.484	0.680	0.484
	0.005	0.700	0.350	0.690	0.518	0.672	0.450
	0.01	0.690	0.340	0.682	0.500	0.665	0.440
	0.05	0.670	0.320	0.670	0.487	0.654	0.440
	0.1	0.660	0.320	0.658	0.460	0.640	0.430
	0.5	0.640	0.300	0.640	0.450	0.634	0.415
3.0	-	0.860	0.600	0.860	0.600	0.860	0.600
	0.005	0.860	0.560	0.860	0.550	0.858	0.500
	0.01	0.856	0.520	0.848	0.534	0.840	0.484
	0.05	0.844	0.500	0.832	0.518	0.832	0.460
	0.1	0.830	0.470	0.818	0.500	0.810	0.446
	0.5	0.820	0.460	0.800	0.480	0.798	0.420

Плотность тока коррозии и соответственно скорость коррозии сплава АЖ2.18 с кальцием, стронцием и барием с ростом концентрации хлорид-иона увеличивается. Данная зависимость характерна для всех сплавов независимо от их состава и особенностей физико-химических свойств легирующего компонента. При переходе от сплава АЖ2.18 с кальцием к сплавам со стронцием и барием наблюдается уменьшение скорости коррозии, что не коррелирует со свойствами самих щелочноземельных металлов (табл. 11).

Таблица 11

Зависимость скорости коррозии сплавов систем АЖ2.18 -Ca (Sr, Ba) от содержания ЦЗМ, в среде электролита NaCl

Среда NaCl, мас.%	Содержание ЦЗМ в сплаве, мас.%	Скорость коррозии					
		сплавов с Ca		сплавов со Sr		сплавов с Ba	
		$i_{корр.} \cdot 10^2$	$K \cdot 10^3$	$i_{корр.} \cdot 10^2$	$K \cdot 10^3$	$i_{корр.} \cdot 10^2$	$K \cdot 10^3$
		A/m ²	г/м ² ·час	A/m ²	г/м ² ·час	A/m ²	г/м ² ·час
0.03	-	0.130	4.35	0.130	4.35	0.130	4.35
	0.005	0.125	4.19	0.122	4.09	0.118	3.95
	0.01	0.120	4.02	0.118	3.95	0.115	3.85
	0.05	0.115	3.85	0.115	3.85	0.112	3.75
	0.1	0.113	3.79	0.112	3.75	0.090	3.01
	0.5	0.110	3.69	0.100	3.35	0.080	2.69
3.0	-	0.170	5.70	0.170	5.70	0.170	5.70
	0.005	0.165	5.53	0.162	5.42	0.160	5.36
	0.01	0.156	5.22	0.150	5.03	0.148	4.96
	0.05	0.150	5.02	0.146	4.89	0.140	4.69
	0.1	0.145	4.86	0.134	4.48	0.135	4.52
	0.5	0.130	4.35	0.131	4.38	0.128	4.29

Таким образом, установлено, что модифицирование щелочноземельными металлами до 0.5 мас.% алюминиевого сплава АЖ2.18 повышает его анодную устойчивость на

25-35%, в среде электролита NaCl. При этом с ростом концентрации модифицирующего компонента отмечается изменение в положительном направлении оси ординат потенциалов свободной коррозии, питтингообразования и репассивации. С увеличением концентрации хлорид-иона в электролите потенциалы свободной коррозии, питтингообразования и репассивации сплавов уменьшаются, скорость коррозии увеличивается.

ВЫВОДЫ

1. В режиме «охлаждения» исследована температурная зависимость теплоемкости алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием, стронцием и барием. Показано, что с ростом концентрации модифицирующего компонента и температуры теплоемкость сплавов увеличивается. При переходе от сплавов с кальцием к сплавам со стронцием и барием величина теплоемкости и коэффициент теплоотдачи сплавов уменьшаются.

2. В результате исследований температурных зависимостей изменений термодинамических функций алюминиевого сплава АЖ2.18 с элементами подгруппы кальция показано, что при переходе от сплавов с кальцием к сплавам со стронцием величины энтальпии и энтропии уменьшаются, а к сплавам с барием растут. С ростом температуры энтальпия и энтропия сплавов растёт, значение энергии Гиббса уменьшается. Указанные изменения связаны с ростом степени гетерогенности структуры сплавов в результате их модифицирования ЦЗМ.

3. Методом термогравиметрии исследована кинетика окисления алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием, стронцием и барием. Установлено, что окисление сплавов описывается уравнением гиперболы с истинной скоростью окисления порядка 10^{-4} кг·м⁻²·сек⁻¹. Выявлено, что самые минимальные значения скорости окисления относятся к сплаву АЖ2.18 с кальцием, а максимальные – к сплавам с барием.

4. Потенциостатическим методом в потенциодинамическом режиме со скоростью развертки потенциала 2мВ/с исследовано анодное поведение алюминиевого сплава АЖ2.18, модифицированного кальцием, стронцием и барием. Показано, что добавки модифицирующего компонента в пределах 0.005-0.5 мас.% повышают коррозионную стойкость сплава АЖ2.18, в среде электролита NaCl на 25-30%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганиев И.Н., Рашидов А.Р., Одиназода Х.О., Сафаров А.Г., Джайлоев Дж.Х. Влияние добавок меди на теплоемкость и термодинамические функции алюминия марки А7Е. – Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. 2020, № 3, с. 4-12.
2. Джайлоев Дж.Х., Ганиев И.Н., Хакимов А.Х., Ибрахимов Н.Ф., Азимов Х.Х. Влияние бария на температурную зависимость удельной теплоемкости и изменение термодинамических функций сплава АЖ2.18. – Вестник ТНУ. Серия естественных наук, 2018, № 4, с. 240-248.
3. Джайлоев Дж.Х., Ганиев И.Н., Азимов Х.Х., Эсанов Н.Р. Температурная зависимость теплоемкости и термодинамических функций сплава АЖ2.18. – Конф. XIV Нумановские чтения, посвященные Году молодежи «Вклад молодых учёных в развитие химической науки Института химии им. В.И. Никитина АН Республики Таджикистан», 2017, с. 134-138.

4. Ганиев И.Н., Окилов Ш.Ш., Эшов Б.Б., Муллоева Н.М., Якубов У.Ш. Температурная зависимость теплоёмкости и изменений термодинамических функций свинцово-сурьмяного сплава ССуЗ с калием. – Вестник Казанского государственного технического университета им А.Н. Туполева, 2021, т. 77, № 1, с. 24-30.
5. Ганиев И.Н., Джайлоев Дж.Х., Амонзода И.Т. Хакимов А.Х. Влияние кальция на температурную зависимость теплоемкости сплава АЖ2.18. – Мат-лы Республиканской научно-практической конференции «Наука и техника для устойчивого развития». Технологический университет Таджикистана, 2018, с. 184-187.
6. Ганиев И.Н., Алиев Дж.Н., Аминов Ф.М. Влияние циркония на удельную теплоемкость и изменение термодинамических функций цинкового сплава Zn55Al. – Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. 2020, т. 22, № 4, с. 13-19.
7. Джайлоев Дж.Х., Ганиев И.Н., Хакимов А.Х., Иброхимов Н.Ф., Рахимов Ф.А. Влияние стронция на температурную зависимость теплоёмкости алюминиевого сплава АЖ2.18. – Мат-лы Межд. научно-практической конференции «Перспективы использования материалов, устойчивых к коррозии, в промышленности Республики Таджикистан», посвященной Дню химика. – Душанбе, 2018, с. 39-43.
8. Зокиров Ф.Ш., Ганиев И.Н., Бердиев А.Э., Сангов М.М. Кинетика окисления сплава АК12М2, модифицированного барием, в твердом состоянии. – Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета), 2020, № 55 (81), с. 28-33.
9. Джайлоев Дж.Х., Ганиев И.Н., Хакимов А.Х., Азимов Х.Х. Кинетика окисления алюминиевого сплава АЖ2.18 с кальцием. – Вестник ТНУ. Серия естественных наук, 2018, № 4, с. 214-220.
10. Давлатов О.Ш., Ганиев И.Н., Одиназода Х.О., Раджабалиев С.С. Кинетика окисления алюминиевого сплава АЖ2.4М5.3Мг1.1Ц4Кр3, легированного оловом, в твердом состоянии. – Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета), 2021, № 56 (82), с. 17-22
11. Джайлоев Дж.Х., Ганиев И.Н., Бердиев А.Э., Амонов И.Т. Кинетика окисления алюминиево-железовых сплавов, легированных кальцием. – Мат-лы Межд. научно-техн. конф. «Нефть и газ Западной Сибири». -Тюмень, 2013, с. 96-99.
12. Ганиев И.Н., Бокиев Л.А., Хакимов А.Х., Джайлоев Д.Х., Якубов У.Ш. Кинетика окисления алюминиевого сплава АЖ5К10 с церием. – Вестник Казанского государственного технического университета им А.Н. Туполева, 2020, т. 23, № 8, с. 35-38.
13. Джайлоев Дж.Х., Ганиев И.Н., Амонов И.Т., Азимов Х.Х. Анодное поведение сплава Al+2,18Fe, легированного кальцием, в среде электролита NaCl. – Известия высших учебных заведений. Серия: Химия и химическая технология, 2015, т. 58, № 12, с. 38-42.
14. Ганиев И.Н., Содикова С.С., Саидзода Р.Х., Алихонова С.Дж. Влияние добавок меди на коррозионно-электрохимическое поведение высокочистого цинка, в среде электролита NaCl. – Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Металлургия», 2020, т. 20, № 4, с. 14-22.
15. Джайлоев Дж.Х., Ганиев И.Н., Амонов И.Т., Азимов Х.Х. Потенциодинамическое исследование сплава Al+2,18Fe, легированного барием. – Известия высших учебных заведений. Серия: Химия и химическая технология, 2014, т. 57, № 2, с. 97-98.
16. Ганиев И.Н., Додхоев Э.С., Сафаров А.Г., Якубов У.Ш. Анодное поведение сплавов системы Mg-Se, в среде электролита NaCl. – Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение, 2021, т. 23, № 1, с. 13-19.

17. Джайлоев Дж.Х., Ганиев И.Н., Амонов И.Т., Эсанов Н.Р. Влияние щелочноземельных металлов на анодное поведение сплава Al+2.18%Fe в нейтральной среде. – Вестник СибГИУ, 2017, № 3, с. 40-44.
18. Ганиев И.Н., Додхоев Э.С., Якубов У.Ш. Коррозионно-электрохимическое поведение сплавов системы Mg-La, в среде электролита NaCl. – Вестник Казанского государственного технического университета им А.Н. Туполева, 2021, т. 77, № 1, с. 19-23.
19. Джайлоев Дж.Х., Ганиев И.Н., Амонов И.Т., Якубов У.Ш. Анодное поведение сплава Al+2.18%Fe, легированного стронцием, в среде электролита NaCl. – Вестник СибГИУ, 2019, № 1 (26), с. 41-46.
20. Ганиев И.Н., Абдухоликова П.Н., Бердиев А.Э., Алихонова С.Дж. Коррозионно-электрохимическое поведение цинкового сплава ЦАМ4-1, легированного галлием, в среде электролита NaCl. – Вестник Казанского технологического университета, 2020, т. 23, № 11, с. 44-48.
21. Джайлоев Дж.Х., Ганиев И.Н., Амонов И.Т. Анодное поведение сплава Al+2/18%Fe, легированного барием. Доклады АН Республики Таджикистан, 2012, т. 55, № 9, с. 747-749.
22. Джайлоев Дж.Х., Ганиев И.Н., Амонов И.Т. Об анодном поведении алюминий-железовых сплавов с некоторыми щелочноземельными металлами. – Мат-лы Межд. научно-техн. конф. «Нефть и газ Западной Сибири», Тюмень, 2013, с. 94-96.
23. Джайлоев Дж.Х., Ганиев И.Н., Амонов И.Т. Анодное поведение сплава Al+2/18%Fe, легированного стронцием. Мат-лы научно-практической конференции «Перспективы инновационной технологии в развитии химической промышленности Таджикистана». – Душанбе, ТНУ, 2013, с. 40-41.

И.Н.ГАНИЕВ., Ч.Х.ЧАЙЛОЕВ

ХОСИЯТҶОИ ФИЗИКАВИЮ-ХИМИЯВИИ ХҶЛАИ АЛЮМИНИЙ АЖ2.18 БО МЕТАЛЛҶОИ ИШҚОРЗАМИНӢ

Институту химияи ба номи В.И.Никитин АМИ Тоҷикистон

Конуниятҳои асосии тағйирёбии гармигунҷоиш ва функцияҳои термодинамикии (энталпия, энтропия ва энергияи Гиббс) хӯлаи алюминий АЖ2.18 бо калсий, стронсий ва барийи вобаста ба ҳарорат ва миқдори иловаҳои ҳамроҳшуда муайян карда шуданд. Нишон дода шуд, ки бо баландшавии ҳарорат гармигунҷоиш, энталпия ва энтропияи хӯлаи алюминийи АЖ2.18 бо металлҳои ишқорзаминӣ зиёд мешаванд, энергияи Гиббс бошад кам мешавад. Бо зиёдшавии ҳиссаи металлҳои иловашуда дар хӯлаи АЖ2.18 энтропия ва энталпия зиёд мешаванд ва энергияи Гиббс кам мешавад. Маълум карда шуд, ки бо баландшавии ҳарорат суръати оксидшавии хӯлаи АЖ2.18 бо калсий, стронсий, барий, дар ҳолати саҳти меафзояд. Доимии суръати оксидшавӣ тартиби $10^{-4} \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ -ро дорад. Муайян карда шуд, ки раванди оксидшавии хӯлаи АЖ2.18 бо калсий, стронсий ва барий бо муодилаи гиперболикӣ тавсиф карда мешавад. Бо усули потенциостатикӣ дар ҳолати потенциодинамикӣ бо суръати потенциалӣ 2мВ/с , маълум карда шуд, ки ҳамроҳкунии металлҳои ишқорзаминӣ то 0.5 % вазн, муқовимати коррозияи хӯлаи АЖ2.18 ро то 25-35% баланд мебардорад. Ҳамзамон, тағйирёбии потенциали коррозияи ба минтақаи

мусбӣ, потенциали питтингпайдошавӣ ва репассивасия бошад ба самти манфии хати ординат майл мекунад. Ҳангоми гузаштан аз хӯлаи калсийдор ба хӯлаи стронсийдор ва барийдор сустшавии суръати коррозияи хӯлаҳо мушоҳида мешавад.

Калимаҳои калидӣ: хӯлаи алюминий АЖ2.18, калсий, стронсий, барий, гармиғунҷош, функсияи термодинамикӣ, термогравиметрия, оксидшавии ҳарорати баланд, суръати оксидшавӣ, энергияи фаъол, усули потенциостатӣ, раванди анодӣ, муҳити электролити NaCl.

I.N.GANIEV, J.H.DZHAYLOEV

PHYSICAL AND CHEMICAL PROPERTIES OF ALUMINUM ALLOY AlFe 2.18 WITH ALKALINE EARTH METALS

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, National Academy of Sciences of Tajikistan

The main regularities of changes in the heat capacity and thermodynamic functions (enthalpy, entropy and Gibbs energy) of the AlFe 2.18 aluminum alloy with calcium, strontium and barium, depending on the temperature and the amount of the alloying component, have been established. It is shown that with an increase in temperature, the heat capacity, entropy, and enthalpy of the AlFe 2.18 aluminum alloy with alkaline-earth metals increase, while the Gibbs energy of the alloys decreases. With an increase in the proportion of the alloying component in the AlFe 2.18 alloy, the entropy and enthalpy increase, and the value of the Gibbs energy decreases. It was revealed that with an increase in temperature, the oxidation rate of the AlFe 2.18 alloy with calcium, strontium and barium in the solid state increases. The oxidation rate constant is of the order $10^{-4} \text{ kg / m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. It was found that the oxidation process of the AlFe 2.18 aluminum alloy with calcium, strontium and barium is described by a hyperbolic equation. The potentiostatic method in the potentiodynamic mode at a potential sweep rate of 2 mV / s has established that the addition of alloying components up to 0.5 wt% increases the corrosion resistance of the initial AlFe 2.18 alloy by 25-35%. In this case, a shift in the corrosion potential of the initial alloy to the positive region is noted, and the potentials of pitting and repassivation - in the negative direction of the ordinate axis. When passing from alloys with calcium to alloys with strontium and barium, a decrease in the corrosion rate of alloys.

Key words: aluminum alloy AlFe 2.18, calcium, strontium, barium, heat capacity, thermodynamic functions, thermogravimetry, high temperature oxidation, oxidation rate, activation energy, potentiostatic method, anodic behavior, NaCl electrolyte environment.

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК ТАДЖИКИСТАНА
ОТДЕЛЕНИЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

№3 (184), 2021 г.

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

УДК 541.124-661.663

У.М.МИРСАИДОВ

ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ХИМИИ ЭНЕРГОЁМККИХ ВЕЩЕСТВ
В ИНСТИТУТЕ ХИМИИ ИМ.В.И.НИКИТИНА НАН ТАДЖИКИСТАНА

Институт химии им.В.И.Никитина НАН Таджикистана

Поступила в редакцию 16.06.2021 г.

В статье систематизированы материалы лаборатории химии энергоёмких веществ Института химии им.В.И.Никитина НАН Таджикистана, опубликованные с 1970 г. по настоящее время. Рассмотрены методы получения боро- и алюмогидридов металлов, гидрида алюминия. Изучены физико-химические свойства гидридов бора и алюминия.

Ключевые слова: борогидриды, алюмогидриды, энергоёмкие вещества, гидрид алюминия, Институт химии НАН Таджикистана.

Главным направлением научных работ Института химии было изучение и освоение природных ресурсов Таджикистана и использование полученных результатов для нужд республики.

На протяжении 75 лет Институт химии выполняет возложенные на него задачи. Особенно после распада СССР коллектив Института сконцентрировал свой научный потенциал на решении проблем промышленности, медицины и сельского хозяйства суверенного Таджикистана. При этом Институт особое внимание уделяет комплексному использованию местного сырья, вопросам утилизации промышленных отходов, синтезу веществ с заданными свойствами, лекарственным препаратам.

В связи с 75-летием Института и 70-летием Национальной академии наук Таджикистана ниже описывается развитие химии энергоёмких веществ в Институте. Это очень сложное направление, и в настоящее время оно развивается не такими быстрыми темпами, как во времена СССР. В последние годы в указанной области ведутся работы, в основном, в направлении энергетики и термодинамических характеристик веществ.

Адрес для корреспонденции: Мирсаидов Улмас. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ, E-mail: info@nrnsa.tj.

Начиная с 1970 г., выполнены фундаментальные исследования в области энергоёмких веществ, открыты основные закономерности, определены характеристики взаимодействия водорода с лёгкими металлами.

Впервые проведено систематическое исследование фазовых равновесий в тройных системах «борогидрид непереходного металла – борогидрид переходного элемента – растворитель». На основе этих исследований создан метод синтеза индивидуальных борогидридов редкоземельных металлов (РЗМ), который основан на использовании наиболее доступного и дешёвого борогидрида натрия и является достаточно общим. По разработанному методу впервые получен весь ряд борогидридов РЗМ, их комплексов с борогидридами щелочных металлов и тетраалкиламмонием. Достоверность полученных результатов подтверждена детальным исследованием физико-химических свойств выделенных соединений [1-3].

Физико-химический анализ ряда систем на основе гидридных соединений алюминия позволил доказать существование сложных двойных гидридных комплексов, осуществить простой способ синтеза ранее неизвестных, или известных, но не выделенных в индивидуальном состоянии гепта-, гекса- и тетрагидроалюминатов щелочных и щёлочноземельных металлов с использованием бинарных гидридов - наиболее дешёвых и легко доступных источников гидридного водорода [1, 2].

На основании систематического исследования взаимодействия бинарных гидридов и алюмогидридов металлов с электрофильными реагентами различной акцепторной силы (хлорсодержащие реагенты, арил- (алкил)галогениды, боро- и алюмогидрид лития и т.д.) предложены эффективные способы синтеза гидрида алюминия – компонента твёрдого ракетного топлива [3].

Начиная с 1972 г., появились первые публикации совместно с ИОНХ им.Н.С.Курнакова АН СССР в журнале Известия АН СССР, серия химия. Были изучены диаграммы растворимости всех алюмогидридов щелочных металлов в среде диглима, единственного доступного растворителя для всех алюмогидридов щелочных металлов (MAIH₄). Были найдены закономерности изменения растворимости в ряду Li → Cs и установлены области существования сольватов MAIH₄ при различных температурах: от температуры жидкого азота до 75°C.

На автоклавной установке Института органической химии АН СССР были синтезированы алюмогидриды калия, рубидия и цезия по реакции



M=K, Rb, Cs.

Реакция (1) обеспечила нам исследование недостаточно изученных алюмогидридов калия, рубидия и цезия [2, 3].

Были найдены оптимальные условия синтеза алюмогидридов щелочных металлов, условия их очистки и были изучены физико-химические свойства этих алюмогидридов (ИК-спектры, ДТА, рентгенограммы).

MAH_4 – активные доноры водорода, весьма реакционноспособны и являются эффективными водородоносителями. Они используются как источники водорода, активные восстановители и катализаторы в процессах полимеризации, превращения функциональных групп органических соединений.

Будучи носителями AlH_4 -группы, алюмогидриды металлов применяются для получения AlH_3 , комплексных соединений, содержащих полигидридалюминаты. Алюмогидриды щелочных металлов стали основными реагентами химии и анализа, и получение алюмогидридов лития и натрия было освоено в промышленных масштабах.

Многообразие валентных возможностей металлов и водорода, а также наблюдаемое разнообразие типов химической связи AlH_4^- обуславливает и значительный теоретический интерес к комплексным гидридным соединениям алюминия.

В начале 70-х гг. прошлого века были сформулированы новые задачи: изучение реакции LiAlH_4 с хлористым алюминием в смешанном растворителе в присутствии сложных гидридных соединений магния.

В те годы особое значение приобрел несольватированный гидрид алюминия. Центральной задачей в производстве AlH_3 было совершенствование способа получения и главное - повышение качества вещества, его термостабильность. Цель новой задачи состояла в исследовании возможности синтеза AlH_3 повышенной стабильности по реакции:



в присутствии сложных гидридных соединений магния.

Были синтезированы сложные комплексы магния состава $\text{Li}_2\text{Mg}(\text{AlH}_4)_4$ (I); $\text{Mg}(\text{AlH}_4)_2 \cdot \text{LiAlH}_4$ (II); $\text{Mg}(\text{AlH}_4)_2 \cdot 2\text{LiAlH}_4$ (III), и в процесс синтеза гидрида алюминия было добавлено различное количество этих комплексов.

Добавление растворов магниевых комплексов II и III в процесс синтеза AlH_3 дало хорошие результаты. Полученные кристаллы представляли собой в основном гранулы правильной формы [1, 2].

Затем были изучены физико-химические свойства синтезированных образцов AlH_3 с незначительным содержанием магния. Рентгенофазовый анализ показал, что кристаллы представляют собой однофазный продукт, кристаллизующийся в гексагональной модификации. Из-за незначительного количества магния, рентгенофазовый анализ не фиксировал содержания магния. Термограммы образцов гидрида алюминия, содержащих магний, показывали, что температура начала быстрого разложения гидрида алюминия сдвигалась в область более высоких температур на 15-20°C (от 167-182 до 188-203°C) сравнительно с образцами, не содержащими магния.

Тип термограммы всех образцов гексагональной модификации гидрида алюминия одинаков. Наблюдается один глубокий эндотермический эффект с бурным газовыделением.

Для некоторых образцов с примесью ромбической модификации форма термограммы несколько отличается.

Кинетику изотермического распада магнийсодержащих образцов гидрида алюминия изучали совместно с Институтом неорганической химии АН Латвийской ССР в г.Риге.

Кинетические кривые распада гидрида алюминия показали, что наличие магния во всех случаях приводит к увеличению термической устойчивости. Присутствие магния сильно изменяет характер кинетических кривых.

Следует отметить, что строгой корреляции между степенью распада и содержанием магния в образцах не наблюдается. Но в общем случае с увеличением содержания магния степень распада уменьшается. При содержании магния в образцах 1.7-2.0% степень распада является наименьшей.

Таким образом, в гг.Исфаре и Риге были синтезированы и изучены термостабильности магнийсодержащих образцов гидрида алюминия.

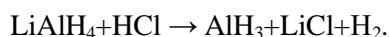
Совместно с сотрудниками МГУ им.М.В.Ломоносова, ИОНХ, ИНЭОС АН СССР, Центральным научно-исследовательским институтом химии и механики Минмаша СССР (ЦНИИХМ) были начаты совместные работы по синтезу AlH_3 на пилотной установке, затем в цехе «Каштан».

Учитывая важность проблемы, в 1974 году дирекция Института создала отдельную группу по химии гидридов и в состав группы были включены старший научный сотрудник Х.Джураев и младший научный сотрудник А.Курбонбеков.

Мы начали работу по синтезу новых экономичных методов гидрида алюминия.

С 1974 по 1991 гг. были выполнены хоздоговорные работы с Центральным научно-исследовательским институтом химии и механики Минмаша СССР, с Исфаринским гидрометаллургическим заводом, с НПО «Алтай» и другими организациями на сумму более 4 млн. рублей.

Наша работа была востребована в области химии гидридов алюминия. Были опубликованы первые работы по растворимости в тройных системах, растворимость HCl в бензоле, толуоле, эфире. Были получены образцы гидрида алюминия через HCl по реакции [1, 2]:



В 1974 году, когда в состав группы был зачислен М.С.Пулатов, переведённый из лаборатории химии редких и рассеянных элементов, мы начали работу по поиску новых методов синтеза AlH_3 . Был предложен хлорбензильный способ синтеза AlH_3 по реакции:



Способ оказался простым и эффективным. В лаборатории были получены хорошие образцы AlH_3 [1, 3].

При поддержке директора ИГМЗ Х.Темурджанова мы смогли провести заводские испытания этого метода, в которых наряду с нами участвовала сотрудник ИОНХ им.Н.С.Курнакова АН СССР Т.Н.Дымова, и она являлась научным консультантом лаборатории.

В начале 80-х годов 20 века было решено построить большой цех по выпуску AlH_3 . Была выбрана площадка строительства на ПО «Навоиазот». За короткий срок был построен крупный цех по выпуску AlH_3 . Исфаринский цех «Каштан» стал экспериментальной базой для испытаний новых методов синтеза гидрида алюминия. На ИГМЗ прошёл испытания хлоралановый метод (ГНИХТЭОС), кинетический метод (СО АН СССР) и др.

В 1978 году на работу в нашу лабораторию была зачислена Р.Ф.Гатина. В первые годы она показала себя как трудолюбивый и хороший экспериментатор и начала работу по проблеме AlH_3 .

За короткий срок она освоила методику эксперимента и много сделала для развития химии гидридов в Институте.

В 1983 году Р.Ф.Гатина подготовила кандидатскую диссертацию и успешно защитила её в ИОНХ им.Н.С.Курнакова по спецтематике и в 1991 году защитила докторскую диссертацию.

Р.Ф.Гатиной совместно с сотрудниками были изучены свойства алюмогидридов щёлочноземельных металлов. Найдены двойные комплексы алюмогидридов щелочных металлов с алюмо- и борогидридом лития.

В конце 80-х годов 20 века мы предложили метод прямой кристаллизации AlH_3 по реакции:



Р.Ф.Гатина и Л.Башилова (которая начала работать с 1983 года) провели испытания метода прямой кристаллизации на ПО «Навоиазот». Были подготовлены все документы для внедрения метода, даны расчёты предварительного ожидаемого экономического эффекта в размере 6 миллионов рублей (данные 1990 года). Однако после распада СССР работы по внедрению одностадийного метода потеряли свою актуальность.

В соответствии с планом координации НИР, лаборатория химии энергоёмких веществ тесно работала с Таджикским политехническим институтом (ныне ТТУ им.М.Осими). В ТПИ под руководством А.Бадалова было налажено изучение термического распада алюмогидридов и борогидридов металлов тензиметрическим методом [6, 7].

В последующие годы по теме химии гидридов А.Бадалов защитил кандидатскую и докторскую диссертации и продолжает успешно работать в этом направлении.

Профессором А.Бадаловым и сотрудниками определены термодинамические характеристики комплексных гидридов, выявлены закономерности изменения свойств комплексных гидридов.

В целом по проблеме химии гидридов были защищены шесть докторских и 25 кандидатских диссертаций.

Исследования по химии гидридов бора. Параллельно сотрудниками лаборатории А.Рахимовой, А.Курбонбековым, Г.Ротенбергом были начаты работы по борогидридам редкоземельных элементов.

Химия комплексных гидридных соединений бора – одна из наиболее интересных и перспективных с познавательной и практической точек зрения областей современной неорганической химии.

Борогидриды также весьма реакционноспособны и являются эффективными водоносителями (борогидрид лития, например, содержит 18% гидридного водорода). Они используются как источники водорода, активные восстановители и катализаторы в процессах полимеризации, превращения функциональных групп органических соединений, получения проводников и плёночных покрытий. Значительная энергоёмкость обуславливает возможность применения борогидридов лёгких металлов в качестве компонентов твёрдого ракетного топлива. Будучи носителями BH_4 -группы, борогидриды применяются для получения борводородов, каборанов, соединений, содержащих полигидридоборатные и полиэдрические гидридные анионы, а также для легирования бором металлических поверхностей. Борогидриды щелочных металлов стали основными реагентами в химии и анализе, и в настоящее время получение борогидрида лития и натрия освоено в производственных масштабах.

Химия переходных металлов, особенно борогидридов РЗМ, сравнительно с непереходными значительно богаче и шире. Это обусловлено двойственной функцией и различной геометрией связей BH_4 -группы с атомом-компексообразователем. BH_4 -группа может быть концевой и мостиковой – H_2BH_2 , с моно-, би- и тридентатным способом связи, а также близкой по строению и свойствам к аналогичной группе в молекуле диборана.

Общепринятые методы синтеза борогидридов щелочных металлов во многих случаях непригодны для синтезов борогидридов переходных металлов или не позволяют получить их в достаточно чистом состоянии. Обычно большие затруднения встречаются при извлечении этих соединений из реакционной массы и очистке.

Значительный вклад в экспериментальную химию борогидридов внесли советские химики В.И.Михеева, К.Н.Семенов, В.В.Волков, Н.Т.Кузнецов, Б.М.Булычев, К.А.Солнцев.

Нами была поставлена задача синтеза борогидридов РЗМ, а также суммирования и обобщения наиболее значительных достижений по способам получения и идентификации борогидридов металлов с привлечением современных физико-химических методов анализа и выявлением закономерностей изменения свойств этих соединений по d- и f-рядам [4, 5].

В 70-90-х годах 20 века эти задачи решили ряд сотрудников, в том числе А.Рахимова, А.Курбонбеков, Т.Алиханова, А.Бадалов, Б.Гафуров, В.Маруфи, М.Хикматов

и др. Все эти сотрудники защитили кандидатские диссертации, а в последующие годы А.Курбонбеков и А.Бадалов защитили докторские диссертации.

Была выполнена фундаментальная работа по химии борогидридов переходных металлов.

Химические реакции с участием атомов водорода. Механизмы химических реакций с участием атомов водорода мы начали изучать в середине 80-х годов 20 века. И.М.Норматов и другие сотрудники показали роль атомов водорода в получении тонких гидридных плёнок металлов, изучили электрические, магнитные свойства и структуру тонких плёнок 3d-металлов. Плазмохимическим методом получен ряд ценных продуктов.

Необходимо отметить работы по ассимиляции гидрида алюминия в проведении твёрдофазных химических реакций. Была показана ассимиляция AlH_3 в получении магнитных порошков никеля, роль гидрида алюминия как инициатора процесса [8].

Для определения основных каналов, ответственных за формирование плёнок, нами проводились математические расчёты энергетики предполагаемых гетерогенных химических реакций атомов водорода с хлоридами металлов. На примере хлорида алюминия было установлено, что наряду с рекомбинационной энергией атомов водорода на поверхности обрабатываемого материала основной вклад в постепенное разрушение молекул исходного реагента с последующим осаждением тонких слоёв вносит процесс электростатического взаимодействия подлетающих атомов водорода с атомами хлора. Было также установлено, что формирование металлических плёнок на рабочей подложке протекает в результате автокаталитического разложения летучих гидридов металлов. Существование таких металл-водородных связей было обнаружено в результате проведения ИК-спектроскопических исследований продуктов реакций, остающихся на технологической подложке. Это является свидетельством того, что формирование летучих гидридов протекает непосредственно на технологической подложке.

Потенциальная возможность атомов водорода в завершении обменных реакций навела нас на мысль об использовании водорода в проведении твёрдофазных химических реакций. Для этого хлориды металлов (Zn, Cd) и кристаллическая сера механически смешивались и подвергались бомбардировке атомами водорода. Проведением ИК-спектроскопических и рентгенофазовых исследований осаждённых плёнок была установлена принципиальная возможность получения сульфидных плёнок цинка и кадмия.

В процессе получения плёнок сульфидов цинка и кадмия было обнаружено существенное влияние температуры рабочей подложки на формирование микроструктуры плёнок. Плёнки сульфида цинка, например, осаждённые на высокотемпературной подложке (350 K), в отличие от низкотемпературной, характеризуются высокой степенью кристалличности и ориентированности, о чём свидетельствует модуляция яркости по окружности дифракционных колец. В случае бомбардировки механической смеси хлорида кадмия и серы обнаруживалось интересное, на наш взгляд, явление. Электронно-микроскопическое и рентгенофазовые исследования показали, что плёнки на рабочей и

высокодисперсные порошки CdS на технологической подложке имеют соответственно гексагональную и кубическую структуру.

Механическая смесь в процессе бомбардировки атомами водорода обеспечивается непрерывным подводом энергии, и кристаллы сульфида кадмия на технологической подложке должны были бы иметь высокотемпературную гексагональную модификацию. Это прежде всего связано с тем, что хотя механическая смесь в процессе бомбардировки обеспечивается энергией, образовавшиеся на технологической подложке летучие соединения CdSH непрерывно уносят основную часть подводимой энергии в виде кинетической энергии.

Полученные результаты, свидетельствующие о принципиальной возможности формирования тонких плёнок в процессе гетерогенной химической реакции потока атомов водорода с хлоридами цинка, олова, кадмия, навели на мысль об использовании хлорида алюминия для получения тонких плёнок алюминия.

По этой проблеме И.Ш.Норматов и Н.Шерматов защитили докторские диссертации и ряд сотрудников – Н.У.Хакимова, З.Х.Гайбулоева, М.Идиев, А.Имомов и др., защитили кандидатские диссертации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирсаидов У.М. Синтез, свойства и химические превращения боро- и алюмогидридов металлов. – Душанбе: Дониш, 2005, 295 с.
2. Мирсаидов У.М. Алюмогидриды металлов. – Душанбе: Дониш, 2004, 86 с.
3. Мирсаидов У.М. Синтез и свойства гидрида алюминия. – Душанбе: Дониш, 2004, 105 с.
4. Мирсаидов У.М. Борогидриды металлов. – Душанбе: Дониш, 2004, 140 с.
5. Мирсаидов У.М., Дымова Т.Н. Борогидриды переходных металлов. – Душанбе: Дониш, 1985, 124 с.
6. Мирсаидов, Гафуров Б.А., Бадалов А. Термическая устойчивость и термодинамические характеристики борогидридов металлов. - Душанбе: Дониш, 2014, 108 с.
7. Мирсаидов У.М., Гафуров Б.А., Бадалов А. Термическая устойчивость и термодинамические характеристики простых и комплексных гидридов редкоземельных металлов. – Душанбе: Дониш, 2014, 84 с.
8. Норматов И.Ш., Мирсаидов У.М. Инициирование и механизмы химических реакций с участием атомов водорода. – Душанбе: Дониш, 2004. 184 с.

У.М.МИРСАИДОВ

ТАДҚИҚОТ ДАР СОҲАИ ХИМИЯИ МОДДАҲОИ ЭНЕРГИЯТАЛАБ ДАР ИНСТИТУТИ ХИМИЯИ БА НОМИ В.И.НИКИТИНИ АМИ ТОҶИКИСТОН

Институтути химияи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон

Дар мақола маводҳои озмоишгоҳи химияи моддаҳои энергияталаби Институти химияи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон, ки аз соли 1970 то имрӯз чоп гардидаанд, мурағаб оварда шудаанд. Усулҳои ба даст овардани металлҳои боро- ва

алюмогидридҳо, гидриди алюминий дида баромада шудаанд. Хусусиятҳои физики-химиявии гидридҳои бор ва алюминий омӯхта шуданд.

Калимаҳои калидӣ: борогидридҳо, алюмогидридҳо, моддаҳои энергияталаб, гидриди алюминий, Институти химияи АМИ Тоҷикистон.

U.M.MIRSAIDOV

**RESEARCH IN THE FIELD OF ENERGY-INTENSIVE SUBSTANCES
CHEMISTRY IN V.I.NIKITIN INSTITUTE OF CHEMISTRY
OF NAS TAJIKISTAN**

V.I.Nikitin Institute of Chemistry, National Academy of Sciences of Tajikistan

The article systematizes the materials of the laboratory of chemistry of energy-intensive substances of the V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National Academy of Sciences of Tajikistan, published from 1970 to the present. Methods for obtaining boron- and aluminumhydrides of metals and aluminum hydride are considered. The physicochemical properties of boron and aluminum hydrides have been studied.

Key words: borohydrides, aluminohydrides, energy- intensive substances, aluminum hydride, Institute of Chemistry of the National Academy of Sciences of Tajikistan.

УДК 620.92

Х.М.АХМЕДОВ, М.Г.ХУЛМИ, С.РАСУЛОВ

АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ И ПЕРСПЕКТИВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СОЛНЕЧНЫХ ВОДЯНЫХ НАСОСОВ ДЛЯ ОРОШЕНИЯ И ВОДОСНАБЖЕНИЯ

Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана

Поступила в редакцию 22.06.2021 г.

Проведен анализ состояния и перспектив использования солнечных технологий для орошения и водоснабжения. Отмечено, что орошение как основной метод полива позволяет обеспечивать пахотные земли необходимым количеством воды и способствовать повышению продуктивности сельского хозяйства. Использование водяных насосов на солнечной энергии в большинстве случаев может обеспечить надежную, экономичную и экологически устойчивую энергию для децентрализованных служб водоснабжения и орошения. Авторы считают, что резкие падения цен на солнечные панели в последние годы придадут новые возможности их широкого применения для орошения и водоснабжения, в том числе в Таджикистане.

Ключевые слова: солнечные водяные насосы, орошение, водоснабжение, солнечные панели, фотоэлектрические станции, водоподъемные установки.

Вода является не только основой жизнедеятельности человечества, но и базовым ресурсом всех других отраслей экономики, прежде всего сельского хозяйства и промышленности. Поэтому ее дефицит, возникший в середине прошлого века и с тех пор только усугубляющийся, является серьезным вызовом всему человечеству и самой экосистеме земли. Он затрагивает все страны мира и рассматривается на самом высоком международном уровне. Согласно новому отчету ЮНИСЕФ и ВОЗ, миллиарды людей во всем мире продолжают страдать от плохого доступа к воде. Около 2.2 миллиарда человек во всем мире не имеют доступа к безопасной питьевой воде [1].

Адрес для корреспонденции: Ахмедов Хаким Мунавварович, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33а, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАНТ.
E-mail: ahmedovhakim@gmail.com

В настоящей статье проведен анализ состояния и перспектив использования солнечных водяных насосов для орошения и водоснабжения.

По мере увеличения численности населения ресурсы, особенно продовольствие и вода, будут испытывать серьезную нагрузку. Поскольку вода, продовольствие и энергия неразрывно связаны, снижение стоимости систем водоснабжения и энергосбережения является ключом к решению этой проблемы. Ожидается, что к 2050 году произойдет рост населения мира с нынешних 7 миллиардов до 8.8-10 миллиардов то есть на 25-43% [2], что приведет к росту потребления продовольствия и воды примерно вдвое [3].

В настоящее время во всем мире около 500 миллионов мелких фермеров обрабатывают участки площадью не менее 2 гектаров и производят 80% продовольствия, потребляемого в Азии и странах Африки к югу от Сахары. Однако в мире орошается только около 10% пахотных земель [4]. Орошение может повысить урожайность и снизить потребление воды фермерами, работающими на небольших участках земли [5]. Учитывая, что вода является основополагающим ресурсом развития сельских районов и продовольственной безопасности, то настало время принимать эффективные меры в области применения энерго- и ресурсосберегающих технологий для орошения и водоснабжения, чтобы свести к минимуму потери воды.

Сегодня аграрный сектор вносит большой вклад в развитие экономики многих стран. Орошение – это метод, который обеспечивает своевременную подачу необходимого количества воды на пахотные земли и способствует повышению продуктивности сельского хозяйства. Сельскохозяйственный сектор является крупнейшим работодателем в мире, обеспечивающим средства к существованию 40% населения, многие из которых живут в бедности (United Nations, 2015). Повышение производительности в сельскохозяйственном секторе широко признано одним из наиболее эффективных способов борьбы с бедностью и стимулирования социально-экономического развития.

Орошение входит в число первоочередных мер, которые могут повысить урожайность, снизить уязвимость к изменению режима выпадения осадков и обеспечить возможность применения различных методов возделывания сельскохозяйственных культур (Продовольственная и сельскохозяйственная организация (ФАО), 2011).

Доступная, надежная и экологически устойчивая энергия – жизненно важный фактор для оказания ирригационных услуг. Использование водяных солнечных насосов может в большинстве случаев обеспечить надежную, экономичную и экологически устойчивую энергию для децентрализованных служб орошения и водоснабжения и позволит получить следующие выгоды: улучшение условий жизни (повышение производительности и доходов, а также продовольственная безопасность); повышение социального благосостояния (снижение уровня бедности, сокращение выбросов); и сокращение расходов на субсидии на ископаемое топливо и централизованную инфраструктуру.

В связи с этим применение современных технологий солнечной энергии может сыграть важную роль в расширении доступа к чистой питьевой воде и воде для орошения.

В связи с чем существует огромный и глобальный интерес в мире к использованию водяных насосов на солнечной энергии для орошения и водоснабжения.

Резкие падения цен на солнечные панели в последние годы дают новые возможности для увеличения мощности фотоэлектрических станций для орошения и водоснабжения (рис. 1 и рис. 2) [6]. Дальнейшее снижение цен непременно может привести к бурному развитию солнечного орошения не только в таких регионах, как Африка к югу от Сахары, где орошаются только три процента обрабатываемой площади, что в семь раз меньше, чем в среднем по миру, но и в других регионах мира, в том числе в Таджикистане, орошаемое земледелие которых основано на использовании насосных станций, имеющих огромные мощности потребления электроэнергии.

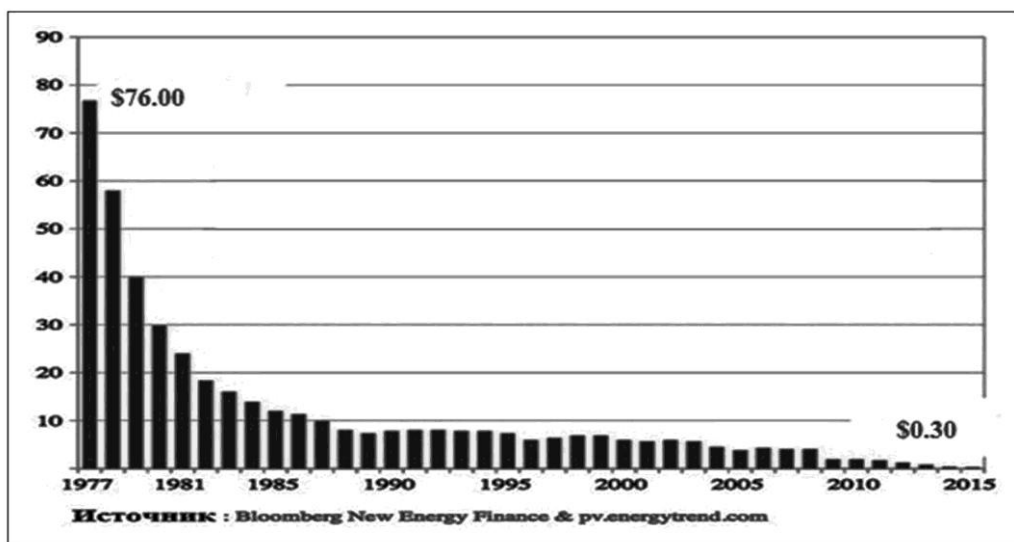


Рис. 1. Динамика изменения цен на кремневые фотоэлементы в расчёте на ватт [6].

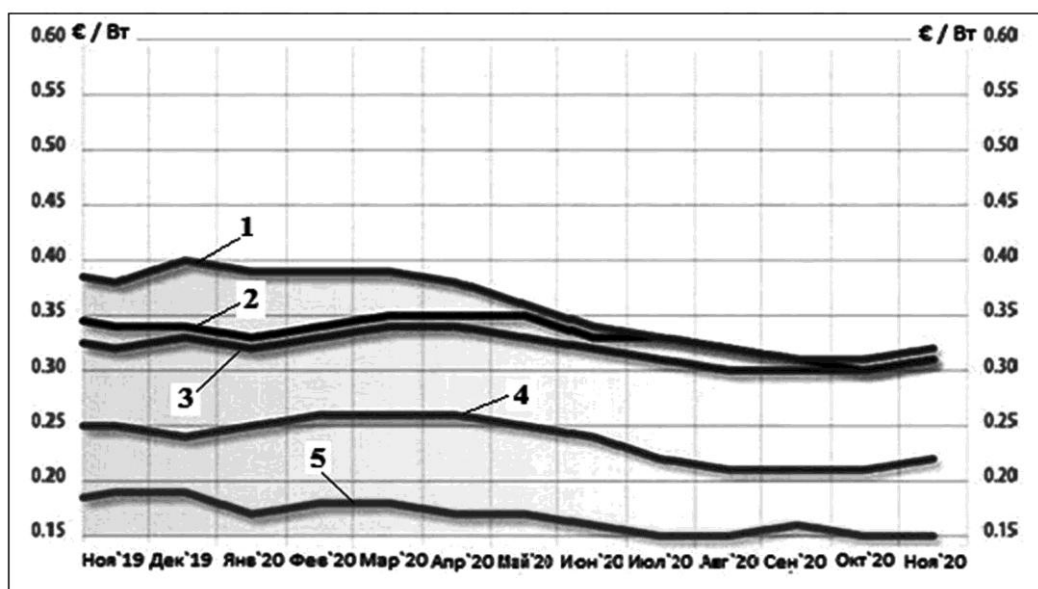


Рис. 2. Динамика изменения средних цен на кристаллические модули(моно-/поли-Si) на спортовом рынке ЕС по технологиям на 1 ноября 2020 г.[6].

Использование солнечных фотоэлектрических систем для подъема воды из различных источников: колодцы, скважины, реки, озера, каналы известно и применяется для различных целей, как для водообеспечения населения и животных, так и для орошения [7]. Солнечные водоподъемные установки в настоящее время изготавливаются многими фирмами разных стран. Они имеют большой диапазон установленной мощности солнечных панелей: от нескольких десятков ватт до десятков киловатт. В этих установках применяют электроприводы как на постоянном, так и на переменном токе с инверторами.

Перспективность использования фотоэлектрических водоподъемных установок состоит в том, что можно отказаться от сложных и дорогостоящих систем аккумулирования энергии в электрохимических аккумуляторах и запастись водой в накопительных емкостях, стационарных или передвижных, либо расходовать воду для полива растений сразу же после её подъема на необходимую высоту.

1. Высокоэффективные модули: модули Cystaline 330 Вт и выше с Cello, PERC, HJT, n-типа или обратными контактами или их комбинациями. **2. Основной поток модулей:** модули обычно с 60 ячейками, стандартные алюминиевые рамы, белая подложка и от 275 Вт до 325 Вт - большинство модулей на рынке. **3. Двусторонние модули:** модули с двусторонними ячейками, прозрачным тыльным листом или стеклом, в рамке и без рамки. **4. Черные типы модулей:** типы модулей с черными задними листами, черными рамками и номинальной мощностью от 290 Вт до 390 Вт. **5. Модули низкой стоимости:** модули с ограниченной производительностью, с заводским дефектом, бывшие в употреблении кристаллические модули.

Важное преимущество использования солнечной энергии именно для подъема воды связано: с сезонным совпадением максимума годового прихода солнечного излучения и годового максимума потребности в воде; с низкой вероятностью наличия пасмурных дней в весенне-летний период. Кроме того, использование водяных насосов на солнечной энергии имеет: независимое от сети электроснабжения для орошения и добычи питьевой воды; значительную экономию; фиксированную и доступную стоимость; возможность исключения применения дизельного топлива и газа бутана; высокую надежность и длительный срок службы; бесшумную автономную работу; широкий диапазон мощности применения солнечных батарей; простоту установки и его запуск; низкие затраты на техническое обслуживание; экологически безопасное решение для водоснабжения – отсутствие загрязнения воздуха газами.

В 1987 г. в мире практически действовало более 3000 фотоэлектрических насосных установок на демонстрационных и коммерческих технологических объектах, в 1994 году количество действующих солнечных фотоэлектрических водоподъемников за рубежом составляло уже более 10 тысяч и, по данным Комиссии Европейского Сообщества, ожидалось увеличение их числа ещё в 50 раз [8]. Эти установки, как правило, работают в наиболее солнечных регионах Земли, где интенсивность солнечного излучения достаточно высока в течение всего года. Поэтому в этих странах водоподъемные установки могут

использоваться круглый год в стационарном положении и с достаточно большой мощностью солнечных батарей.

В работе [9] для оценки возможностей водоподъемной установки использован средний показатель $1.5 \div 2.0$ Вт/м² в сутки, что означает для подъема 1 м³ воды в сутки на высоту 1 м требуется $1.5 \div 2.0$ Вт мощности солнечной фотоэлектрической батареи. Для более точных расчётов основных параметров солнечных водоподъемных установок фирмой Grundfos [10] разработана номограмма, которая позволяет увязать параметры насосных агрегатов, требуемые мощности фотоэлектрической батареи и среднесуточные суммы прихода солнечной радиации на плоскость солнечной батареи, находящейся под оптимальным углом к горизонту.

На рис. 3 показана принципиальная схема солнечной водоподъемной установки, позволяющей выкачивать воду как из скважин, так и подымать её из других водных источников [11].

Как известно в Средней Азии, в том числе в Таджикистане основу земледелия составляет искусственное орошение. После распада Советского Союза в орошаемом земледелии произошли большие изменения. Резко сократилась площадь орошаемого земледелия, а также её продуктивность. В основном это произошло из-за ухудшения состояния ирригационной инфраструктуры, в которой немалую роль сыграло машинное орошение, осуществляемое электрическими насосными станциями.

В Таджикистане общая орошаемая площадь с оросительной сетью с учетом орошаемых приусадебных участков составляла 762.198 га. Земли орошались как самотёчным способом, так и механическим, водоподъемными насосными станциями. Следует отметить, что более 40% орошаемого земледелия в Таджикистане базировалось на насосных станциях. Орошались не только пашни, приусадебные участки, но и многолетние насаждения (сады, виноградники), частично пастбища и сенокосы.

До 2020 года, согласно статистическим данным Агентства мелиорации и ирригации (АМИИ) при Правительстве РТ, общая орошаемая площадь земель снизилась до 600 тыс.га. и продолжает снижаться, по сей день. В основном это произошло из-за ухудшения состояния ирригационной инфраструктуры [13].

В дополнение к плохому техническому состоянию инфраструктуры ненадежное электроснабжение, особенно весной, когда в энергосистеме образуется колоссальный объем дефицита мощностей, приводит к значительным потерям урожая и дополнительным расходам на техническое обслуживание. Кроме того, практически прекратились ежегодные полноценные капитальные ремонты ирригационных насосных станций, вследствие чего пропускная способность магистральных каналов сократилась, а некоторые линейные сооружения пришли полностью в негодность. За этот период образовалась проблема с поставками силовых оборудования и запасных частей к ним, в связи с разрывом связей с заводами изготовителями оборудования для насосных станций, а многие из них просто прекратили выпускать подобные типы продукции из-за отсутствия потребности к

ним и переориентировались на производство других изделий. Поэтому, существующие насосные станции, построенные в Таджикистане в 1960-80 годы, давно морально устарели и физически износились, в результате чего многие из них вышли из эксплуатации. По сведениям АМиИ сегодня в республике насчитывается 388 насосных станций и 1492 агрегата. В связи с нехваткой запчастей 210 агрегатов насосных станций не работает, в том числе по Гиссарской долине – 62; Хатлонской области – 106; Сугдской области – 42, и требуются весьма большие финансовые средства для их восстановления или замены. В связи с этим не орошаются десятки тыс. га орошаемых земель.

По сведениям АМиИ агропромышленный комплекс также является одним из крупнейших потребителей электроэнергии в стране и ежегодно требует более 1.6 млрд. кВт·ч в год, что составляет более 11% электропотребления от общего производства электроэнергии в стране. В летний период порядка 20% производимой в стране электроэнергии расходуется на нужды ирригации. Согласно показателям АМиИ, подготовленным для Всемирного Банка, средневзвешенный удельный расход электроэнергии насосными станциями на перекачку одного кубометра воды составляет 0.64 кВт·ч, варьируясь в пределах 1.09-0.33 кВт·ч/куб.м. Среднее потребление энергии составляет более 9.0 тыс. кВт·ч на один гектар в год. Удельная водоподача насосами на один гектар составила 14.5 тыс. куб.м воды в год.

Использование водяных насосов на солнечной энергии особенно эффективно среди регионов, имеющих проблемы с водой и не имеющих электроэнергию и дизельное топливо. Данный метод не использует ни электроэнергию, ни дизельное топливо, тем самым не только снижает денежные затраты, но и предотвращает вредные воздействия на окружающую среду и является уникальной возможностью для устойчивого развития технологий солнечной энергии, что очень важно для Таджикистана. Как было отмечено, солнечные водные насосы эффективно работают в условиях высокой солнечной радиации, то есть именно тогда, когда потребность в чистой воде особенно значительна. Современные солнечные водные насосы могут качать воду не только из скважин глубиной до 200 метров, но и практически из любого возможного водозабора (озеро, пруд, реки и т.д.) на высоту более 150 м.

На рис. 4 показан пример передвижной фотоэлектрической станции установленной мощности 800 Вт в развернутом положении. Весогабаритные параметры такой системы позволяют транспортировать её с помощью мотоблока мощностью до 5 л.с. Фотоэлектрические установки мощностью до 1 кВт площадью 6÷8 м² могут быть смонтированы и на поплавках, а в таком случае их можно перемещать непосредственно по оросительным каналам.

Поэтому замена существующих ирригационных систем, большая часть которых построена в Таджикистане в 60-х годах прошлого столетия, на ирригационные системы, использующие водные насосы, работающие на энергии Солнца, заметно уменьшит нагрузку на энергетическую систему страны. При этом если есть автономная система водо-

снабжения, то можно автоматизировать весь процесс, связанный с обеспечением водой, в частности устанавливать систему автоматического капельного орошения и полива, которые ориентированы также на использование воды как в теплицах и парниках, так и в садах и огородах.

Однако опыт Таджикистана показывает, что физический и моральный износ основного оборудования, а также плохое техническое обслуживание работающих насосов, двигателей и вспомогательного оборудования в значительной степени способствует неэффективности ирригации. Нерегулярная подача энергии, нарушение графика планово-предупредительных ремонтных работ часто снижают надежность обслуживания насосных ирригационных систем. Перерывы в водоподаче из-за периодического отключения электроэнергии разрушают поливной режим и создают значительные ограничения в производстве продукции.

В связи с этим использование энергосберегающих технологий и водяных насосов на солнечных батареях в комплексе с автоматизированной системой капельного орошения в различных регионах Таджикистана, где водные ресурсы и линии электропередач находятся на больших расстояниях, отсутствует дизельное топливо, орошаемые земли имеют сложный рельеф, а большинство агрегатов ирригационных насосных станций вышли из строя, является актуальной задачей.

Таким образом, среди широкого спектра вопросов, связанных с эффективным использованием водных ресурсов, использование водяных насосов на солнечных батареях для орошения и водообеспечения в последнее время стало весьма популярным. Хотя солнечная насосная технология применяется в разных странах мира уже несколько десятилетий, недавнее снижение цен на солнечные панели и повышение осведомленности о потенциальных преимуществах этой технологии вынудили все большее число стран запускать программы по ускорению ее внедрения. Например, Бангладеш поставила цель развернуть 50 000 солнечных водяных насосов к 2025 году; Индия - 100 000 к 2020 году; Марокко - 100 000 к 2022 году. Ожидается, что в Малави более 500 гектаров сельскохозяйственных угодий получают выгоду от орошения насосными технологиями на солнечной энергии в рамках государственной программы, финансируемой Африканским банком развития.

В настоящее время в Таджикистане практически не изготавливаются и не используются как стационарные, так и передвижные мобильные солнечные водоподъемные установки для орошения и водообеспечения. Потребность в подобных установках сегодня очень высока, в связи с аграрным характером и необходимостью интенсификации сельскохозяйственного производства для решения продовольственной программы страны. Возможности осуществления этих проектов в Таджикистане весьма реальны, экономически целесообразны и экологически безопасны, однако требуют привлечения внимания соответствующих профильных министерств и малого бизнеса для оперативного решения задач по освоению производства и внедрению таких установок, применение которых за

рубежом с каждым годом растет. Для этого очень важно построить в Таджикистане завод по производству солнечных панелей широкого спектра мощности, и наладить производство водяных насосов на одном из профильных предприятий республики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г.Н., Ахмедов Х.М. Актуальные вопросы эффективного использования водно-энергетических ресурсов. – Душанбе.: Дониш, 2021, 245 с.
2. A Cost Optimization of Solar-Powered, Drip Irrigation Systems MIT (John Cleland. World Population Growth; Past, Present and Future. Environmental and Resource Economics, 55(4):543{554, 2013.)
3. A Cost Optimization of Solar-Powered, Drip Irrigation Systems MIT (Foley J Mueller N, Gerber J, Johnston M, Ray D, Ramankutty N. Closing yield gaps through nutrient and water management, 1991).
4. IFAD, "Smallholders, food security and the environment," International Fund for Agricultural Development (IFAD), 2013.
5. Dubois, "The state of the world's land and water resources for food and agriculture: Managing systems at risk.," Earthscan, 2011.
6. <https://www.pv-magazine.com/module-price-index/>
7. UNDP Project GLO/80/003. Main report: Small-Scale Solar-Powered Pumping Sistem. – К, 1983.
8. Беленов А.Т., Метлов Г.Н. Солнечные фотоэлектрические водоподъемники. Изд. второе, дополненное, под ред. академика РАН Д.С.Стребкова. – М.: ВИЭСХ, 2014.
9. Метлов Г.Н. Фотоэлектрические водоподъемные установки. Водоснабжение и санитарная техника. 1986, № 7.
10. Проспекты фирмы Grundfos. Солнечные насосные системы SP.
11. <https://elesant.ru/sistemy-vodosnabzhenija/vodyanye-nasosy-na-solnechnyh-batareyah-cto-eto>
12. Коротов В.А., Метлов Г.Н., Беленов А.Т. Передвижные фотоэлектрические водоподъемные установки для орошения. - Технологические средства механизации. 2016, № 1, с. 48-56.
13. Статистические данные Агентства мелиорации при Правительстве Республики Таджикистан. 2019.

Ҷ.М.АХМЕДОВ, М.Г.ХУЛМИ, С.РАСУЛОВ

ТАҲЛИЛИ ҲОЛАТ ВА ДУРНАМОИ ИСТИФОДАИ ОБКАШҶОИ ОҶТОБӢ БАРОИ ОБӢРӢ ВА ОБТАӢМИНКУНӢ

Маркази рушди инноватсионии илм ва технологияҳои нави

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Таҳлили ҳолат ва дурнамои истифодаи технологияҳои оғтобӣ барои обёрӣ ва обтаъминкунӣ гузаронида шудааст. Зикр гардидааст, ки обёрӣ ҳамчун усули асосии обмонӣ барои бо миқдори зарурии об таъмин намудани заминҳои қорам имкон медиҳад ва ба бақадшавии маҳсулнокии зироатҳои хоҷагии қишлоқ мусоидат менамояд. Истифодаи обкашҷо, ки бо энергияи оғтоб қор мекунанд, дар аксар мавридҳо энергияи эъти- моднок, босарфа ва аз нигоҳи экологӣ устуворро барои ғайримарказигардонии ҳадамоти обтаъминкунӣ ва обёрӣ таъмин менамоянд. Муаллифон чунин меҳисобанд, ки дар солҳои

охир якбора паст фаромадани нарх ба панелҳои офтобӣ имкониятҳои навро ба истифодаи васеи онҳо барои обёрӣ ва обтаъминкунӣ, аз ҷумла дар Тоҷикистон фароҳам меоранд.

Калимаҳои калидӣ: обкашҳои офтобӣ, обёрӣ, обтаъминкунӣ, ирригатсия, панелҳои офтобӣ, пойгоҳҳои фотоэлектрикӣ, дастгоҳҳои оббардорӣ.

H.M.AKHMEDOV, M.G.KHULMI, S.RASULOV

ANALYSIS OF THE CONDITION AND PROSPECTS OF THE USE OF SOLAR WATER PUMPS FOR IRRIGATION AND WATER SUPPLY

*Center for Innovative Development of Science and New Technologies
of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

The analysis of the state and prospects of using solar technologies for irrigation and water supply is carried out. It is noted that irrigation as the main method of irrigation allows providing arable land with the required amount of water and contributing to an increase in agricultural productivity. The use of solar-powered water pumps in most cases can provide reliable, economical and environmentally sustainable energy for decentralized water and irrigation services. The authors believe that the sharp drops in prices for solar panels in recent years will provide new opportunities for their widespread use for irrigation and water supply, including in Tajikistan.

Key words: solar water pumps, irrigation, water supply, solar panels, photovoltaic stations, water lifting installations.

УДК 613.5÷614.72÷546.296

И.МИРСАИДЗОДА (И.У.МИРСАИДОВ)

**ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ ОСНОВ
ПЕРЕРАБОТКИ УРАНСОДЕРЖАЩИХ МАТЕРИАЛОВ И
РАДИОЭКОЛОГИИ**

*Агентство по ядерной и радиационной безопасности НАН Таджикистана
Поступила в редакцию 18.06.2021г.*

В статье рассматриваются исследования в области переработки урановых руд, отходов урановой промышленности и в области радиоэкологии. Разработаны принципиальные технологические схемы получения урановых концентратов из различных урансодержащих материалов, показан выбор эффективного сорбента для выделения урана. Разработаны радиоэкологические карты регионов и проведён радиационный мониторинг биосреды Таджикистана.

Ключевые слова: урансодержащие материалы, радиоэкология, радиоизотопы, хвостохранилище, радон, концентрат.

В 2003 г. в структуре НАН Таджикистана было создано Агентство по ядерной и радиационной безопасности (АЯРБ) НАНТ. В связи с необходимостью проведения исследований в области радиационной безопасности и радиоэкологии, основными направлениями АЯРБ НАН Таджикистана наряду с функциями регулирования в области радиационной безопасности в соответствии с Постановлением Президиума НАНТ были следующие:

- научные исследования в области радиационной безопасности (РБ);
- радионуклидный мониторинг биосреды Таджикистана;
- переработка урановых руд и отходов.

В результате проведённых исследований, начиная с 2003 г. получены экспериментальные данные, позволяющие рекомендовать местные сырьевые ресурсы Таджикистана для получения урановых концентратов.

Адрес для корреспонденции: Мирсаидзода Илхом. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по ядерной и радиационной безопасности НАНТ, E-mail: info@nrta.tj.

Исследованы переработка отходов урановой промышленности, извлечение урана из руд Таджикистана, а также выделение его из природных урансодержащих вод. На основании проведённых исследований и паспортизации всех хвостохранилищ северного Таджикистана установлено, что для вторичной переработки из существующих техногенных отходов наиболее целесообразной является «Карга 1-9» и хвостохранилище Адрасман [1, 2].

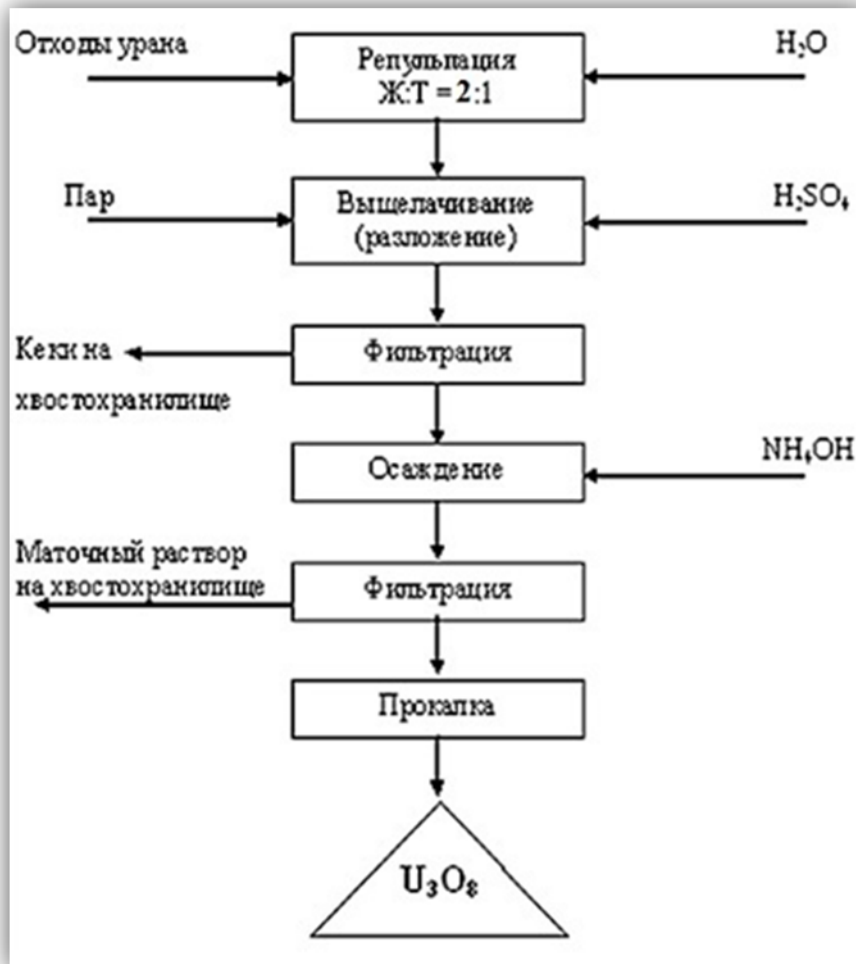


Рис. 1. Принципиальная технологическая схема переработки отходов урановой промышленности.

Разработана принципиальная технологическая схема переработки урановых отходов хвостохранилищ, а также схема получения урановых концентратов из шахтных и дренажных вод отходов урановой промышленности, которая состоит из следующих стадий: подкисление, сорбция, обжиг, разложение, осаждение, фильтрация, сушка (рис.1, 2) [2, 3, 8].

Таблица 1

Сорбция урана природными сорбентами

Наименование сорбента	Сорбционная ёмкость материала, кг/т	Время насыщения ураном, сутки	Количество урана при 90-дневном насыще-
-----------------------	-------------------------------------	-------------------------------	---

			нии, кг
Шишки арчи	10	90	10.0
Шишки сосны	6.5	50	11.2
Скорлупа грецкого ореха	3.2	25	11.5

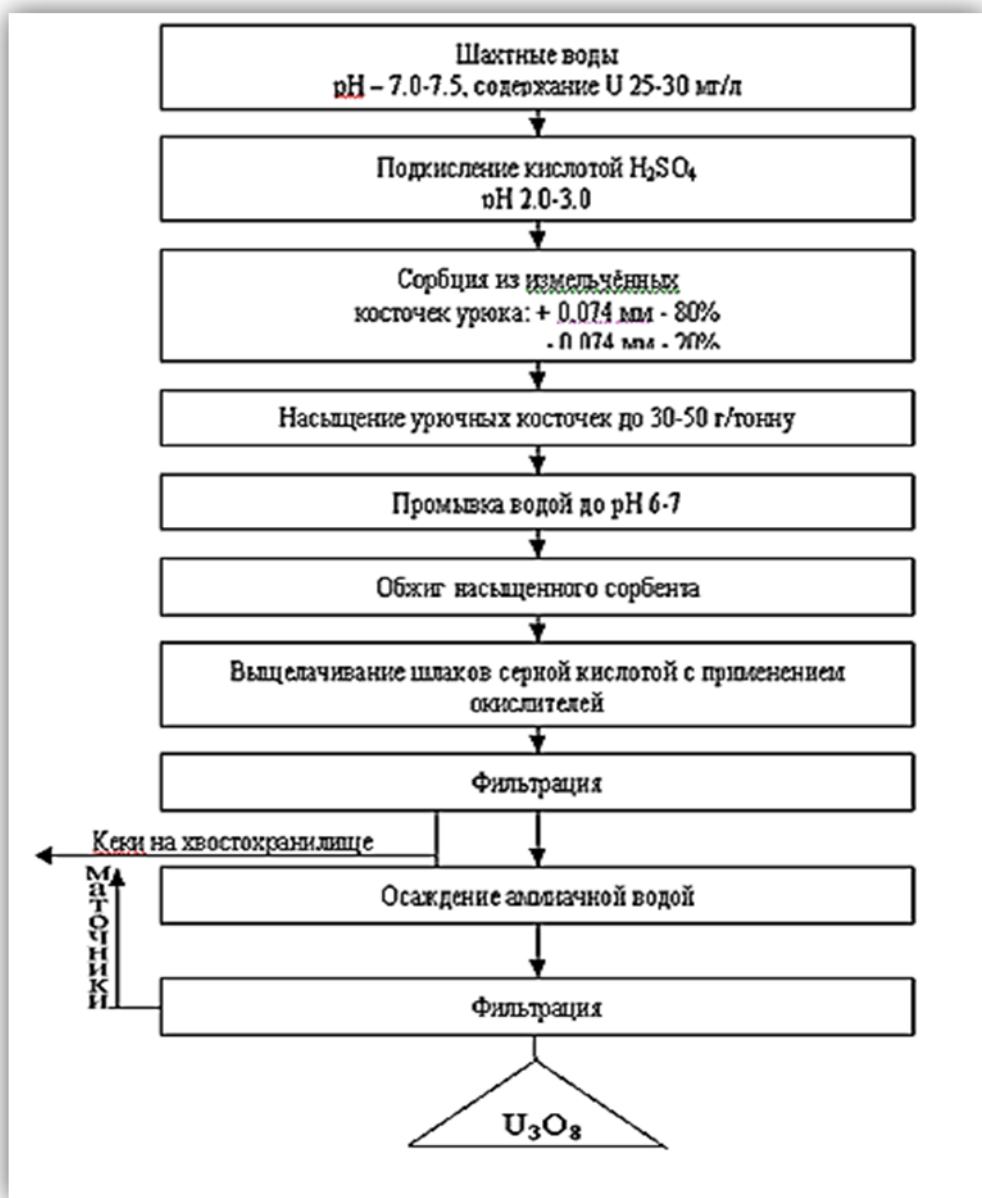


Рис. 2. Принципиальная технологическая схема получения урановых концентратов из шахтных и дренажных вод.

Исследована кинетика сернокислотного разложения руд техногенного хвостохранилища «Карта 1-9». Проведённые исследования раскрывают механизм протекания процесса сернокислотного разложения хвостов и дают возможность выбора рационального режима извлечения U_3O_8 [2, 4].

Изучена также кинетика сорбционного процесса извлечения урана из шахтных и дренажных вод с использованием природных сорбентов – скорлупы урюка, грецкого ореха, шишек арчи и сосны. Выявлена бифункциональность сорбента из растительного сырья (табл.1).

Схема переработки урановых руд и отходов от классической отличается тем, что в процессе перед осаждением диураната аммония из десорбата известняком нейтрализуется часть избыточной кислоты. Применение такой технологической схемы переработки урановых руд позволяет сэкономить аммиачную воду в несколько раз. Извлечение урана на стадии осаждения составляет 99%.

Разработанная схема извлечения урана из рапы озера Сасык-Куль состоит из следующих основных стадий: выпаривание, выщелачивание, удаление хлор-иона, сорбция, десорбция, осаждение, сушка и прокалка [2].

В результате проведенных исследований получены экспериментальные данные, позволяющие рекомендовать местные сырьевые ресурсы Таджикистана для получения урановых концентратов (рис. 3).

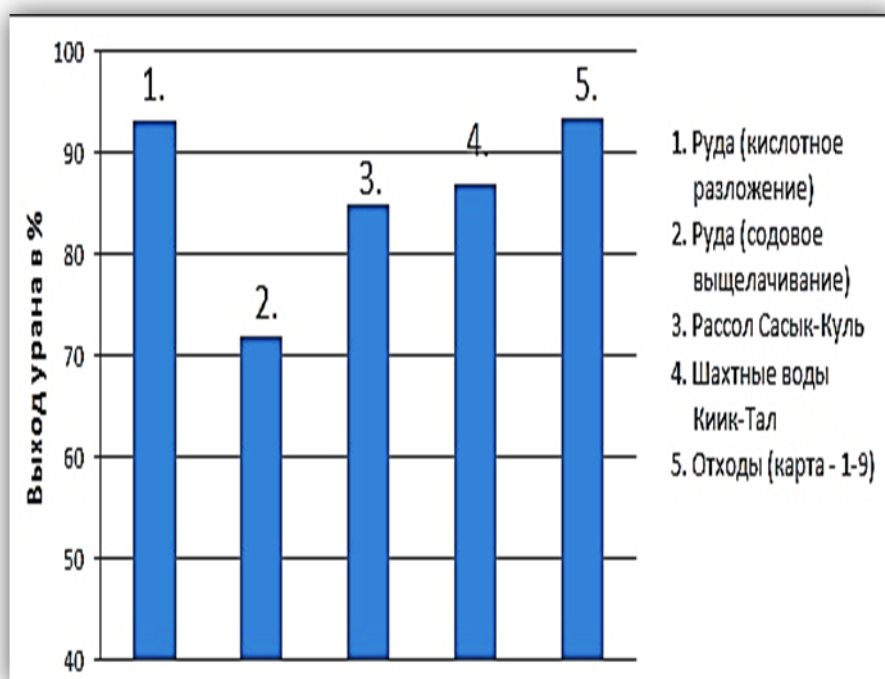


Рис. 3. Степень извлечения урана из различных ураносодержащих материалов.

Изучением процесса термического разложения нитратов тория (IV) и уранила, также сульфата уранила в равновесных условиях методом тензиметрии установлены характер, схема и температурный интервал всех стадий процесса. Процесс термического разложения нитрата тория и сульфата уранила протекает в одну стадию, нитрата уранила – в две ступени. Вторая ступень разложения исходного нитрата уранила состоит из двух параллельно протекающих процессов разложения U_3O_8 и NO_2 [5, 6].

Полуэмпирическим методом и методом разностей определены и уточнены величины энтальпии образования оксидов лантаноидов (II) и (III) и актиноидов (II), (III) и (IV). Впервые установлены закономерности в изменениях энтальпии образования оксидов от природы металлов с проявлением тетрад-эффекта [6, 7].

Изучено извлечение урановых концентратов из руд месторождений «Центральный Таджикистан» и «Западный Таджикистан», которое заключается в том, что при сернокислотном разложении руд указанных месторождений с использованием пероксида водорода, диоксида марганца и азотной кислоты железо не добавляли, поскольку в составе руд содержится 1.7% магнетита.

Представленная принципиальная технологическая схема переработки урановых руд отличается от традиционных тем, что в процессе извлечения урана в качестве окислителя используется пероксид водорода, что приводит к значительному повышению степени извлечения [9, 10].

Изучены кинетические параметры разложения руды месторождения «Центральный Таджикистан» при различных температурах (293, 313, 333 и 353 К) и продолжительностях процесса (1-6 часов). Определены значения экспериментальных энергий активации процесса выщелачивания, которые составляют 2.5; 5.7; 4.8 кДж/моль для трёх вышеуказанных окислителей, соответственно в зависимости от расхода кислоты. Величина энергии активации свидетельствует о протекании процесса в диффузионной области [13, 14].

Раскрыт механизм сернокислотного разложения урановых руд месторождения «Центральный Таджикистан» и «Западный Таджикистан», установлены оптимальные параметры их вскрытия [13, 14].

Разработана принципиальная технологическая схема переработки урансодержащих руд месторождения «Центральный Таджикистан», которая включает стадии дробления руды, отмывку водой, выщелачивание руды серной кислотой в присутствии окислителей, фильтрацию, сорбцию урана, десорбцию, нейтрализацию, осаждение диураната, фильтрацию и получение жёлтого кека [9, 14].

Проведены исследования по радиационной экологии, разработаны радиоэкологические карты регионов и проведён радиационный мониторинг биосферы Таджикистана.

Проведённые работы и последующий анализ данных позволяет судить о радиационной и экологической ситуациях и прогнозировать радиоэкологическую обстановку, сложившуюся в Таджикистане.

Для совершенствования систем радиоэкологического контроля на объектах ведутся систематические наблюдения за их влиянием на окружающую среду, которые должны быть положены в основу обоснования проектов реабилитационных мероприятий на объектах [11, 12].

Изучено содержание природных радионуклидов в почвенных покровах различных районов Таджикистана и определены содержания радиоизотопов семейства урана-238 и

тория-232. Определено содержание изотопа цезия-137 в почвенном покрове центрального и южного Таджикистана в зависимости от рельефа и механических свойств грунта местности. Выявлены основные закономерности и характер пространственного распределения цезия - 137 в почвенном покрове. Изучена радиоэкологическая ситуация северного Таджикистана. Выявлено, что наиболее высоко радиоактивными территориями со значениями МЭД > 0.35-0.40 мЗв/час являются территории вокруг урановых хвостохранилищ. Определены удельные суммарные активности природных радионуклидов в воде источников питьевого водоснабжения южных районов Таджикистана. В Хатлонской области наибольшие значения удельной суммарной альфа-активности радионуклидов отмечаются в районе Темурмалик – 0.17 Бк/кг, бета-активности – в Кабодианском районе – 0.05 Бк/кг. Изучено содержание радона в атмосферном воздухе и в жилых помещениях школьных и дошкольных учреждений г. Душанбе. Анализ полученных данных показал, что вклад радона и дочерних продуктов его распада в среднюю годовую эффективную дозу облучения детей при нахождении их в помещениях школ и детских садов города Душанбе составляет 0.64-1.64 мЗв [17].

Определены средние величины индивидуального эквивалента дозы облучения персонала рентгеновских отделений в стоматологических поликлиниках г. Душанбе Республики Таджикистан за 2010-2014 гг. Величины годовых доз у врачей-рентгенологов и рентгенлаборантов составили, соответственно, 0.7 и 1.04 мЗв. Показано, что облучение рентгенлаборантов оказалось выше, чем у врачей-рентгенологов на 23%. Измеренные значения доз оказались значительно ниже нормативных значений и, в целом, соответствуют аналогичным величинам доз других категорий персонала рентгеновских отделений при проведении рентгенологических исследований в общей рентгеновской диагностике.

Оценка внешнего облучения медперсонала показала, что наибольшую дозовую нагрузку из всех категорий медработников, относящихся к группе «А», имеет персонал, занимающийся ангиографией. При этом превышения предельно допустимых значений доз облучения не наблюдалось. Установлено, что средние индивидуальные дозы облучения персонала различных профессий в радионуклидной диагностике составляют в среднем 0.88 мЗв на специалиста за год и находятся в диапазоне от 0.29 до 2.16 мЗв. То есть они выше средних медицинских показателей, но ниже предельно допустимых значений.

Анализ данных контроля сотрудников различных профессий Таможенной службы показал, что средние индивидуальные дозы облучения составляют в среднем 1.15 мЗв на специалиста в год и находятся в диапазоне от 0.73 до 1.21 мЗв. Полученные данные о профессиональном облучении сотрудников Таможенной службы за период с 2010-2013 гг. свидетельствуют о снижении уровня облучения персонала, отнесенного к категории «А», а среднегодовые значения не превышают предельно допустимых значений.

Анализ выполненных мониторинговых работ показывает, что в настоящее время на территории Таджикистана негативное воздействие радоноопасных объектов на окружающую среду в основном локализовано в пределах имеющихся радиоактивных хвосто-

хранилищ. Оценка радоновой обстановки на территории Таджикистана свидетельствует о том, что объекты уранового наследия, особенно радиоактивные хвостохранилища в г.Истиклол и Дигмайское хвостохранилище, являются наиболее значимыми источниками поступления радона в воздух [15, 16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирсаидов У.М. Отходы уранодобывающих производств Таджикистана. – Горный журнал, 2012, № 2, с.128-131.
2. Хакимов Н., Назаров Х.М., Мирсаидов И.У. Физико-химические и технологические основы получения урановых концентратов из отходов гидрометаллургических заводов и технических вод. – Душанбе, 2012, 120 с.
3. Саломов Дж.А., Мирсаидов И.У., Баротов А.М. О необходимости реабилитации и рекультивации хвостохранилищ Табашарского региона. – В сб.: Материалы семинара «Урановое наследие Советского Союза в Центральной Азии: проблемы и решения». – Душанбе, 2012, с. 30-35.
4. Мирсаидов И.У., Назаров Х.М., Хакимов Н. Использование местных материалов в качестве сорбента для извлечения урана из сточных шахтных и технических вод горнодобывающих предприятий. – Горный журнал, 2011, № 12, с. 60-62.
5. Мирсаидов И.У., Бадалов А. Системный анализ термодинамических свойств бинарных гидридов лантаноидов. – Журнал физической химии, 2006, т. 80, № 9, с.1713-1716.
6. Бадалов А., Камалов Д.Д., Хамидов Б.О., Мирсаидов И.У., Эшбеков Н.Р. Изучение процесса дегидратации гексагидроуранил нитрата. – ДАН РТ, 2005, т.48, № 8, с. 22-25.
7. Камолов Д.Д., Мирсаидов И.У., Эшбеков Н.Р. и др. Термодинамические характеристики процесса термического разложения уранилнитрата. – ДАН РТ, 2005, т. 48, № 9-10, с. 12-17.
8. Мирсаидов И.У., Назаров Х.М., Хакимова Н. О возможностях извлечения урана из шахтных вод месторождения Киик-Тал Таджикистана. – ДАН РТ, 2005, т. 48, № 910, с. 100-104.
9. Мирсаидов И.У. Физико-химические основы получения урановых концентратов из отходов и сырьевых материалов. – Душанбе: Дониш, 2014, 106 с.
10. Мирсаидов У.М., Назаров Х.М., Ходжиев С.К., Рахматов Н.Н. Особенности выделения урановых концентратов из руд и урансодержащих вод Таджикистана. – Душанбе, 2019, 192 с.
11. Назаров Х.М., Эрматов К.А., Саломов Дж.А. и др. Оценка потенциальной радиационной опасности бывших урановых объектов для населения г.Истиклол Республики Таджикистан. – Радиационная гигиена, 2018, т.11, № 2, с. 83-90.
12. Назаров Х.М., Эрматов К.А., Бахронов С.М., Мирсаидов У.М. Оценка потенциальной радиационной опасности хвостохранилища Дигмай (Таджикистан) для населения, проживающего вокруг него. – Радиационная гигиена, 2019, т.12, № 1, с. 115-121.
13. Ходжиев С.К. Физико-химические и технологические основы переработки урансодержащих руд месторождения «Центральный Таджикистан: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Душанбе, 2018, 22 с.
14. Мирсаидзода И., Баротов Б.Б., Бобоёров М.Д., Бобоев К.О., Мирсаидов У.М. Технологические основы переработки урансодержащих руд Таджикистана. – Республиканская конференция «Инновационное развитие науки». – Душанбе, 2020, с. 14-16.
15. Mirsaidov U.M., Nazarov Kh.M., Shosafarova Sh.G., Mahmudova M.M. Radon monitoring in the territory of Tajikistan. – International Conference on Radiation Safety, Vienna, 2020, pp. 25-28.
16. Мирсаидов У.М., Назаров Х.М., Шосафарова Ш.Г., Махмудова М.М. Радоновый мониторинг на территории северного Таджикистана. – Радиационная гигиена, 2020, т.13, 31, с. 68-73.

17. Муминов С.В., Баротов Б.Б., Махмудова М.М., Хамидов Ф.А., Ахмедов М.З., Мирсаидов У.М. Изучение уровней содержания радона в зданиях дошкольных и школьных учреждений г. Душанбе Республики Таджикистан. – Радиационная гигиена, 2021, т.14, № 1, с.124-132.

И.МИРСАИДЗОДА (И.У.МИРСАИДОВ)

ТАДҚИҚОТ ДАР СОҲАИ АСОСҲОИ ФИЗИКӢ-ХИМИЯВИИ КОРКАРДИ МОДДАҲОИ УРАНДОР ВА РАДИОЭКОЛОГИЯ

Агентии амнияти ядрӣ ва радиатсионии АМИ Тоҷикистон

Дар мақола тадқиқотҳо дар соҳаи коркарди маъданҳои урандор, партовҳои урани саноатӣ дар соҳаи радиоэкология дида баромада шудаанд. Нақшаҳои технологияи принсипиалии ба даст овардани концентратҳои урани аз маводҳои гуногуни урандор коркард карда интихоби сорбенти эффективӣ барои ҷудо намудани уран нишон дода шуд. Харитаҳои радиоэкологии минтақаҳо коркард карда мониторинги радиатсионии биомухити Тоҷикистон гузаронида шуд.

Калимаҳои калидӣ: маводҳои урандор, радиоэкология, радиоизотопҳо, маҳфузгоҳҳо, радон, концентрат.

I.MIRSAIDZODA (I.U.MIRSAIDOV)

RESEARCH IN THE FIELD OF PHYSICAL AND CHEMICAL BASIS OF PROCESSING OF URANIUM-CONTAINING MATERIALS AND RADIOECOLOGY

Nuclear and Radiation Safety Agency of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The article discusses research in the field of uranium ores processing, uranium industry waste and in the field of radioecology. Basic technological schemes for obtaining uranium concentrates from various uranium-containing materials have been developed and an effective sorbent selection for uranium separation has been shown. Radioecological maps of the regions have been developed and radiation monitoring of the biological environment of Tajikistan has been carried out.

Key words: uranium-containing materials, radioecology, radioisotopes, tailing dump, radon, concentrate.