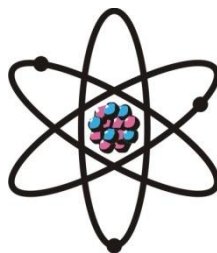


**ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК**

Журнал основан
в январе 1952 г.



№ 3 (188)
2022 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Г.И.Кохирова – главный редактор, член-корреспондент, доктор физико-математических наук; **С.А.Исхоков** – зам. главного редактора, член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **С.Х.Абдулаева** – ответственный секретарь; **О.Амирзода** – доктор технических наук; **Х.М.Ахмедов** – академик, доктор химических наук; **П.Б.Бабаджанов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Бадалов** – член-корреспондент, доктор химических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **С.Р.Мавлони** – кандидат геолого-минералогических наук; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **Д.Н.Низомов** – член-корреспондент, доктор технических наук, профессор; **С.О.Одинаев** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Ф.Рахими** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Т.Х.Салихов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор.

СОДЕРЖАНИЕ

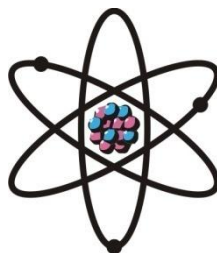
МАТЕМАТИКА

Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров. О совместном приближении периодических функций и её производных в L_2	7
О.А.Джурахонов. Скорость сходимости "треугольных" частных сумм двойного ряда Фурье по ортогональным многочленам Фурье-Эрмита	18

Х.Фирдавси. Интегральные представления решений для некоторого случая модельного интегрального уравнения Вольтера с суперсингулярным ядром.....	29
С.Байзаев, Б.М.Джумаев. Об общем решении переопределенной системы уравнений в частных производных с комплексными периодическими коэффициентами.....	42
Д.С.Сафаров, С.К.Миратов. Точное решение одной нелинейной системы уравнений эллиптического типа с отклоняющимся аргументом	53
М.Султонзода. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида в пространстве Кудрявцева	61
АСТРОНОМИЯ	
Г.И.Кохирова, А.М.Буриев, С.Н.Сафаров, А.А.Сагторзода. Динамика потенциально опасного астероида 2009 хо по наблюдениям в Гиссарской астрономической обсерватории.....	68
ФИЗИКА	
У.Дж.Рахимова, М.Х.Эгамов. Эффект светорассеяния полимерно-жидкокристаллических композитов со спонтанной самоорганизацией структуры	78
ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ	
С.С.Мамадшоева, М.Ш.Холов, Б.Джафари, М.Дж.Халикова, А.А.Саидов, Ш.Р.Самихов, П.Лангер, С.Ш.Сафаров. Вовлечение 8-хлор-2-метил бензотиазоло[3,2-а] пиримидин-4-она и 2-бром-7-трифторметил – 5h-5-оксо-1,3,4-тиадиазола [3,2-а] пиримидина в палладий, катализируемый реакцию кросс-сочетания Сузуки-Мияури.....	85
Д.Х.Эшкuvatов, Дж.Ходжаев, Ш.Н.Шамсудинов, Т.Х.Абдуллаев, Дж.Н.Джамshedов, И.Ф.Рахимов, З.Д.Назарова. Исследование качественного и количественного состава ферулловых смол «Камоли Точик».....	99
НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ	
А.П.Гагаев. Разложение боросиликатного сырья месторождения Ак-Архар Таджикистана «царской водкой»	108
О.А.Азизов, Д.Т.Исозода, И.Мирсаидзода. Получение энергоёмких веществ из местных алюмосиликатных руд	113
ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ	
Р.Дж.Акрамзода. Термодинамические процессы разложения боросиликатных руд Таджикистана	119
Ш.Б.Бахриддинзода, Б.И.Асроров, З.Х.Гайбуллаева, А.Шарифов. Исследование взаимодействия водорода с солями цветных металлов	125
ГЕОХИМИЯ	
Дж.Х.Аминов, L.Ding, Ю.Мамаджанов, С.Б.Ашуралиев, Ш.А.Одинаев. Новые данные о геохимических особенностях гранитов Базардаринского магматического комплекса (Южный Памир)	132
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА	
И.И.Каландарбеков. Анализ точности и сходимости метода сосредоточенных деформаций	143
ГИДРОЛОГИЯ	
А.А.Гулахмадов. Колебания температуры и осадков в верховьях бассейна реки Вахш	152
ГЛЯЦИОЛОГИЯ	
А.Каюмов, Х.К.Кабутов, Х.Д.Наврузшоев. Динамика изменения оледенения бассейна реки Сарыгун в районе озера Каракуль	165
ПАМЯТИ УЧЁНОГО	
Академик Зафар Джураевич Усманов (26.08.1937 – 13.10.2021)	174

ШҮЪБАИ
ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,
ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА

Маҷалла аз моҳи
январӣ соли 1952
нашр мешавад



№ 3 (188)
с. 2022

ҲАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:

Кохирова Г.И. – сармуҳаррир, узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика;
С.А.Исҳоков – муовини сармуҳаррир, узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика,
профессор; **С.Ҳ.Абдулоева** – котиби масъул; **О.Амирзода** – доктори илмҳои техникӣ;
Х.М.Аҳмедов – академик, доктори илми химия; **А.Бадалов** – узви вобаста, доктори илми хи-
мия, профессор; **П.Б.Бобочонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профес-
сор; **И.Н.Ғаниев** – академик, доктори илми химия, профессор; **М.И.Илолов** – академик, док-
тори илмҳои физикаю математика, профессор; **С.Р.Мавлони** – кандидати илмҳои геология ва
минералогия; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор;
С.Х.Неъматуллоев – академик, доктори илмҳои техникӣ; **Д.Н.Низомов** – узви вобаста, докто-
ри илмҳои техникӣ, профессор; **С.О.Одинаев** – академик, доктори илмҳои физикаю матема-
тика, профессор; **Ф.Раҳимӣ** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;
З.Ҳ.Раҳмонов – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Рачабов** –
академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Т.Х.Салихов** – доктори илмҳои
физикаю математика, профессор; **А.Р.Файзиев** – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва
минералогия, профессор; **Ҷ.Х.Ҳолиқов** – академик, доктори илми химия, профессор.

МУНДАРИҶА

МАТЕМАТИКА

Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров. О совмestном приближении периодических функций и ее производных в L_2	7
О.А.Ҷурахонов. Сурати наздикшавиини суммаҳои "секунҷагии" хусусии қатори Фурье бо полиномҳои ортогоналии Фурье-Эрмит	18
Х.Фирдавси. Тасвири интегралҳои ҳал барои баъзе ҳолатҳои моделии муодилаи интегралҳои Волтер бо ядрои барзиёд сингулярӣ	29
С.Байзаев, Б.М.Ҷумаев. Оид ба ҳалли умумии системаи барзиёдмуайяншудаи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии коэффитсиентҳои даврии комплексӣ	42
Ҷ.С.Сафаров, С.Қ.Миратов. Ҳалли аниқи як системаи муодилаҳои ғайрихаттии намуди эллиптикӣ бо аргументҳои фарқкунанда	53
М.Султонзода. Оид ба ҳалшавандагии масъалаи вариатсионии Дирихле барои операторҳои эллиптикии намуди ғайридивергентӣ дар фазои Кудрявтсев	61

АСТРОНОМИЯ

Г.И.Қохирова, А.М.Буриев, С.Н.Сафаров, А.А.Сагторзода. Динамикаи астероиди эхтимолан хатарноки 2009 ХО аз рӯи мушоҳидаҳои расадхонаи астрономии Ҳисор 68

ФИЗИКА

У.Қ.Раҳимова, М.Х.Эгамов. Эффеќти пароканиши рӯшноӣ дар композитҳои полимерии кристалли моеъ дошта бо ташаккули спонтании структура 78

ХИМИЯИ ОРГАНИКӢ

С.С.Мамадшоева, М.Ш.Холов, Б.Қафари, М.Қ.Халиқова, А.А.Саидов, Ш.Р.Самихов, П.Лангер, С.Ш.Сафаров. Қалб кардани 8-хлор-2-метил бензотиазоло[3,2-а] пиримидин-4-она и 2-бром-7-трифторметил – 5h-5-оксо-1,3,4-тиадиазоло [3,2-а] пиримидин бо катализатсияи палладий реаксияи кросс-омезиши Сузукӣ-Мияурӣ 85

Д.Х.Эшқуватов, Қ.Ҳочаев, Ш.Н.Шамсудинов, Т.Х.Абдуллаев, Қ.Н.Чамшедов, И.Ф.Раҳимов, З.Қ.Назарова. Таҳқиқи таркиби сифатӣ ва микдории катронҳои феруллагии «Қамолӣ Тоҷик» 99

ХИМИЯИ ҒАЙРИОРГАНИКӢ

А.П.Тағаев. Таҷзияи маъдан боросиликати кони Ак-Архари Тоҷикистон тавассути “шароби шох” 108

О.А.Азизов, Д.Т.Исозода, И.Мирсаидзода. Аз маддаҳои энергетика гирифтани модаи маҳаллии алюминосиликат 113

ХИМИЯИ ФИЗИКАВӢ

Р.Қ.Ақрамзода. Равандҳои термодинамикии таҷзияи маъданҳои боросиликати Тоҷикистон 119

Ш.Б.Баҳриддинзода, Б.И.Асроров, З.Х.Ғайбуллаева, А.Шарифов. Омӯзиши таъсиррасонии гидроген ба намакҳои металлҳои ранга 125

ГЕОХИМИЯ

Қ.Қ.Аминов, L.Ding, Ю.Мамадҷонов, С.Б.Ашуралиев, Ш.А.Одинаев. Маълумоти нав оид ба хусусиятҳои геокимиёии гранитҳои комплекси магматикии Бозордара (Помири Ҷанубӣ) 132

МЕХАНИКАИ СОҲТОРӢ

И.И.Қаландарбеков. Таҳлили саҳеҳӣ ва наздикшавии методи мутамарказкунонии деформатсияҳо 143

ГИДРОЛОГИЯ

А.А.Гулаҳмадов. Тағйирёбии ҳарорати ҳаво ва боришот дар қисмати болоии ҳавзаи дарёи Вахш 152

ГЛЯЦИОЛОГИЯ

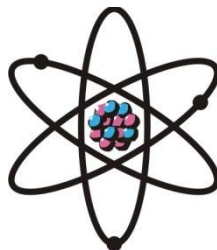
А.Қаюмов, Х.Қ.Қабутов, Ҳ.Д.Наврӯзшоев. Динамикаи пирахҳои дарёи Саригун дар минтақаи қули Қароқул 165

ЁДБУДИ ОЛИМ

Академик Зафар Джураевич Усманов (26.08.1937 – 13.10.2021) 174

**DEPARTMENT OF
PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES**

The journal was established
in January 1952



№ 3 (188)
2022

EDITORIAL BOARD

G.I.Kokhirova Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; Prof. **S.A.Iskhokov**, Doctor of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **S.H.Abdulaeva**, Secretary; **O.Amirzoda**, Doctor of Engineering; **Kh.M.Akhmedov**, Doctor of Chemistry; Prof. **P.B.Babadzhanov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **A.Badalov**, Doctor of Chemistry; Prof. **A.R.Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **M.I.Holov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **I.N.Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **D.Kh.Khalikov**, Doctor of Chemistry; **S.R.Mavloni**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **U.M.Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; **S.Kh.Negmatullaev**, Doctor of Engineering; Prof. **D.N.Nizomov**, Doctor of Engineering; Prof. **S.O.Odinaev**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **N.R.Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **F.Rakhimi**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.Kh.Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **T.Kh.Salihov**, Doctor of Engineering.

CONTENTS

MATHEMATICS

G.A.Yusupov, M.A.Mavlonazarov. On the joint approximation of periodic functions and its derivatives in L_2 7

O.A.Jurakhonov. Speed of convergence "triangular" partial sums of the double Fourier series on the Fourier-Hermite orthogonal polynomials 18

Kh.Firdavsi. Integral representations of solutions for a case of a model Volterra integral equation with a supersingular kernels 29

S.Baizaev, B.M.Jumaev. General solution of an overdetermined system partial differential equations with complex periodic coefficients..... 42

D.S.Safarov, S.K.Miratov. Exact solution of one nonlinear system of elliptic-type equations with a deviating argument 53

M.Sultonzoda. On solvability of variational Dirichlet problem for non-divergent form elliptic operators in the Kudryavtsev space 61

ASTRONOMY

G.I.Kokhirova, A.M.Buriev, S.N.Safarov, A.A.Sattorzoda. Dynamics of potentially hazardous asteroid 2009 XO from observations at the Hissar astronomical observatory..... 68

PHYSICS

U.J.Rakhimova, M.Kh.Egamov. Effect of light scattering of polymeric-liquid crystal composites with spontaneous self-organization of the structure 78

ORGANIC CHEMISTRY

S.S.Mamadshoeva, M.Sh.Kholov, B.Jafari, M.J.Khalikova, A.A.Saidov, Sh.R.Samikhov, P.Langer, S.Sh.Safarov. Involving of 8-chloro-2-methyl benzothiazolo [3,2-a] pyrimidin-4-one and 2-bromo-7-trifluoromethyl - 5h-5-oxo-1,3,4-thiadiazolo [3,2-a] pyrimidine in palladium-catalyzed Suzuki-Miyauricross-coupling reaction..... 85

D.Kh.Eshquvatov, J.Khodzhaev, Sh.N.Shamsudinov, T.Kh.Abdullaev, J.N.Jamshedov, I.F.Rakhimov, Z.J.Nazarova. Research of qualitative and quantitative composition of ferull resin "Kamoli Tojik" 99

INORGANIC CHEMISTRY

A.P.Tagayev. Decomposition of borosilicate raw materials from the Ak-Arkhar deposit of Tajikistan with "royal water"..... 108

O.A.Azizov, D.T.Isosoda. I.Mirsaidzoda. Obtaining energy-intensive substances from local aluminosilicate ores 113

PHYSICAL CHEMISTRY

R.J.Akramzoda. Thermodynamic processes of decomposition of borosilicate ores in Tajikistan..... 119

Sh.Bahriddinzoda, B.I.Asrorov, Z.H.Gaybullaeva, A.Sharifov. Study of hydrogen interaction with non-ferrous metals salts..... 125

GEOCHEMISTRY

J.H.Aminov, L.Ding, Yu.Mamadjanov, S.B.Ashuraliev, Sh.A.Odinaev. New data on geochemical features of granites from the Bazardara magmatic complex (South Pamir) 132

STRUCTURAL MECHANICS

I.I.Kalandarbekov. Analysis of accuracy and convergence location deformation methods 143

HYDROLOGY

A.A.Gulakhmadov. Variations of the temperature and precipitation in the Vakhsh river basin..... 152

GLACIOLOGY

A.Kayumov, H.K.Kabutov, H.D.Navruzshoyev. Dynamics of changing the glaciation of the Sarygun river basin in the area of lake Karakul 165

MEMORY OF SCIENTIST

Academician Zafar Dzhuraevich Usmanov (26.08.1937 – 13.10.2021) 174

УДК 517.5

Г.А.ЮСУПОВ, М.А.МАВЛОНАЗАРОВ

О СОВМЕСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И
ЕЁ ПРОИЗВОДНЫХ В L_2

Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева

Поступила в редакцию 22.02.2022 г.

Для предложенной К.И.Руновским характеристики гладкости функций получены точные неравенства типа Джексона-Стечкина наилучшего совместного приближения функции и ее производных.

Ключевые слова: наилучшее совместное приближение, усредненная характеристика гладкости функции, неравенства типа Джексона-Стечкина.

1. Введение и предварительный результат

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство суммируемых с квадратом функций, у которых норма

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Через \mathcal{F}_{2n-1} обозначим подпространство тригонометрических полиномов

$$T_{n-1}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

порядка $\leq n-1$ ($n \in \mathbb{N}$). Для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

Адрес для корреспонденции: Юсупов Гулзорхон Амиришоевич. 734000, Республика Таджикистан, г.Хорог, ул. Шохтемура, 109, Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева.
E-mail: g_7777@mail.ru

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(f) \cos(kx + \gamma_k), \quad (1.1)$$

где равенство понимается в смысле сходимости в пространстве L_2 , величина ее наилучшего приближения элементами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &:= \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k(f) \cos(kx + \gamma_k)$$

– частная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда Фурье (1.1) функции f . Через $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2 . Заметим, что если $f \in L_2^{(r)}$, то при всех $s = \overline{0, r}$ справедливо равенство [1]

$$E_{n-1}(f^{(s)}) = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (1.3)$$

Здесь возникает следующая экстремальная задача: пусть $\mathfrak{M}^{(r)}$ – некоторый подкласс функций из $L_2^{(r)}$. Требуется найти значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup_{f \in \mathfrak{M}^{(r)}} E_{n-1}(f^{(s)}). \quad (1.4)$$

При решении некоторых экстремальных задач теории аппроксимации функций $f \in L_2$ вместо классического модуля непрерывности m -го порядка

$$\omega_m(f, t)_2 := \sup \{ \|\Delta_h^m f(\cdot)\| : |h| \leq t \},$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + kh)$$

– конечная разность m -го порядка функции f в точке x с шагом h , некоторые авторы ввели в рассмотрение различные обобщенные модули непрерывности [2-6]. Так,

например, С.Б.Вакарчуком, В.И.Забутной и М.Ш.Шабозовым использовалась следующая усредненная характеристика гладкости [7-9]:

$$\Omega_m(f; t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\bar{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2}, \quad (1.5)$$

где $t > 0$, $\bar{h} := (h_1, \dots, h_m)$, $\Delta_{\bar{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$; $\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x + h_j) - f(x)$, $j = \overline{1, m}$.

Следует отметить, что в ходе исследования важных вопросов приближения в метрическом пространстве L_p ($0 < p < 1$) подобного рода усредненная характеристика гладкости функций рассматривалась К.В.Руновским [4] и Э.А.Стороженко, В.Г.Кротовым, П.Освальдом [10]. Но подробные свойства характеристики гладкости (1.5) изучены в [11].

Пусть φ – неотрицательная измеримая суммируемая на $[0, h]$ функция, не эквивалентная нулю (весовая функция). Обозначим $\text{sinc } t := \frac{\sin t}{t}$ ($t \neq 0$), доопределив данную функцию значением 1 в точке $t = 0$, то есть $\text{sinc } 0 = 1$.

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (3\pi / (4n))$, φ – весовая на $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \left\{ \int_0^h (1 - \text{sinc } nt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \quad (1.6)$$

Доказательство. В [11] для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ доказано неравенство

$$\Omega_m^2(f^{(r)}, t) \geq 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) (1 - \text{sinc } kt)^m. \quad (1.7)$$

Учитывая тот факт, что [12, стр.135]

$$\max\{|\text{sinc } u| : u \geq nt\} = \text{sinc } nt, \quad 0 < nt \leq 3\pi / 4,$$

$$\min\{(1 - \text{sinc } u)^m : u \geq nt\} \geq (1 - \max_{u \geq nt} \text{sinc } u)^m = (1 - \text{sinc } nt)^m,$$

для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ из (1.7) получаем

$$\Omega_m^2(f^{(r)}, t) \geq 2^m n^{2r} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) (1 - \text{sinc } kt)^m \geq$$

$$\geq 2^m n^{2r} (1 - \operatorname{sinc} nt)^m \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) = 2^m n^{2r} (1 - \operatorname{sinc} nt)^m E_{n-1}^2(f),$$

или, что то же,

$$\Omega_m(f^{(r)}, t) \geq 2^{m/2} n^r (1 - \operatorname{sinc} nt)^{m/2} E_{n-1}(f). \quad (1.8)$$

Возведем обе части неравенства (1.8) в степень p ($0 < p \leq \infty$), умножим на весовую функцию φ и проинтегрируем от 0 до h , где $h \in (0, 3\pi / (4n)]$. В итоге мы приходим к неравенству

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p} \geq 2^{m/2} n^r E_{n-1}(f) \left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}.$$

Отсюда сразу следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (1.6):

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \leq \left\{ \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \quad (1.9)$$

С целью получения оценки снизу указанной величины рассмотрим функцию $f_0(x) := \sin nx$ из L_2 . Для этой функции, как легко проверить,

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \Omega_m(f_0^{(r)}, t) = 2^{m/2} n^r (1 - \operatorname{sinc} nt)^{m/2},$$

пользуясь которыми запишем

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} &\geq \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f_0^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \\ &= \frac{2^{m/2} n^r \cdot 1}{2^{m/2} n^r \left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Сопоставляя оценку сверху (1.9) с оценкой снизу (1.10), получаем требуемое равенство (1.6), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Замечание. В случае $0 < p \leq 2$ теорема 1 ранее доказана в работе С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и В.И.Забутной [11].

Из доказанной теоремы 1 вытекает следующее следствие, которое одновременно является и ее обобщением.

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq 3\pi / (4n)$, φ – весовая на $[0, h]$ функция. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \left\{ \int_0^h (1 - \text{sinc } nt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \quad (1.11)$$

Доказательство. В левой части равенства (1.11) полагаем $f^{(s)}(t) = g(t)$, откуда имеем $f^{(r)}(t) = g^{(r-s)}(t)$. Таким образом, если $f \in L_2^{(r)}$, то функция $g \in L_2^{(r-s)}$, и мы в силу равенства (6) получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \\ & = \sup_{\substack{g \in L_2^{(r-s)} \\ g \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^{r-s} E_{n-1}(g)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(g^{(r-s)}, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \left\{ \int_0^h (1 - \text{sinc } nt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

2. Точные значения n -поперечников классов функций $W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$

Прежде чем сформулировать дальнейшие результаты, приведем необходимые понятия и определения.

Пусть \mathbb{B} – единичный шар в L_2 ; Q – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 ; $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n ; $\mathcal{L} : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор; $\mathcal{L}^\perp : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(Q, L_2) = \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon \mathbb{B} \cap L_{n+1} \subset Q \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \right\},$$

$$d_n(Q, L_2) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \|f - g\| : g \in \Lambda_n \} : f \in Q \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$\delta_n(Q, L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\| : f \in Q \} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\},$$

$$d^n(Q, L_2) = \inf \left\{ \sup \{ \|f\| : f \in Q \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \right\},$$

$$\Pi_n(Q, L_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\|_2 : f \in Q \} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным n -поперечниками. Поскольку L_2 – гильбертово пространство, то между перечисленными экстремальными характеристиками множества Q , имеют место соотношения [13, 14]:

$$b_n(Q; L_2) \leq d^n(Q; L_2) \leq d_n(Q; L_2) = \delta_n(Q; L_2) = \Pi_n(Q; L_2). \quad (2.1)$$

Используя характеристику гладкости $\Omega_m^p(f, t)$, рассмотрим следующий класс функций. Пусть $\Phi(t)$ ($t \geq 0$) – непрерывная возрастающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Всюду далее ее будем называть мажорантой. Символом $W_{p,m}^{(r)}(\Phi) := W_p^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$, где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq +\infty$, обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $t \in [0, 2\pi]$ выполняется неравенство

$$\int_0^t \Omega_m^p(f^{(r)}, t) \varphi(t) dt \leq \Phi^p(t).$$

Теорема 3. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$ и мажоранта Φ при любом $h \in [0, 2\pi]$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi(\pi/(2n))} \geq \frac{\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt}{\int_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt}. \quad (2.2)$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2) &= \lambda_{2n-1}(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2) = E_{n-1}(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)) = \\ &= \frac{1}{2^{m/2} n^r} \cdot \frac{\Phi(\pi/(2n))}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right)^{1/p}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n -поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (2.2), не пусто.

Доказательство. Используя неравенство (1.9), в котором полагаем $h = \pi/(2n)$, $\varphi(t) = 1$, соотношение (2.1) и определение класса $W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$, запишем оценку сверху

$$\lambda_{2n}(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2) \leq \lambda_{2n-1}(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2) \leq d_{2n-1}(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2) \leq$$

$$\leq E_{n-1}(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)) \leq \frac{1}{2^{m/2} n^r} \cdot \frac{\Phi(\pi / (2n))}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} (1 - \text{sinc } nt)^{mp/2} dt \right)^{1/p}}, \quad (2.4)$$

Для получения оценки снизу n -поперечников рассмотрим на множестве $\mathcal{T}_{2n+1} \cap L_2$ следующий $(n+1)$ -мерный шар полиномов

$$\mathcal{B}_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \leq \frac{2^{-m/2} n^{-r} \Phi(\pi / (2n))}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} (1 - \text{sinc } nt)^{mp/2} dt \right)^{1/p}} \right\}$$

и покажем справедливость включения $\mathcal{B}_{2n+1} \subset W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$. Учитывая поведение функции $\text{sinc}(\cdot)$, для любого натурального $1 \leq k \leq n$ и $h \in (0, 2\pi]$ имеем

$$1 - \text{sinc}(kh) \leq (1 - \text{sinc}(nh))_*. \quad (2.5)$$

Используя неравенство (2.5), для произвольного полинома $T_n \in \mathcal{T}_{2n+1}$ получаем

$$\begin{aligned} \Omega_m^2(T_n^{(r)}, \tau) &= 2^m \sum_{k=1}^n k^{2r} \rho_k^2(T_n) (1 - \text{sinc}(k\tau))^m \leq \\ &\leq 2^m n^{2r} (1 - \text{sinc}(n\tau))_*^m \sum_{k=1}^n \rho_k^2(T_n) = 2^m n^{2r} (1 - \text{sinc}(n\tau))_*^m \|T_n\|^2, \end{aligned}$$

или, что то же,

$$\Omega_m(T_n^{(r)}, \tau) \leq 2^{m/2} n^r (1 - \text{sinc} n\tau)_*^{m/2} \|T_n\|. \quad (2.6)$$

Обе части неравенства (2.6) возведем в степень p , где $0 < p \leq \infty$ и, проинтегрировав их по переменному τ в пределах от 0 до t ($0 < t \leq 2\pi$), имеем

$$\int_0^t \Omega_m^p(T_n^{(r)}, \tau) d\tau \leq \|T_n\|^p 2^{mp/2} n^{rp} \int_0^t (1 - \text{sinc} n\tau)_*^{mp/2} d\tau. \quad (2.7)$$

Учитывая ограничения (2.2) для любого полинома $T_n \in \mathcal{B}_{2n+1}$, из неравенства (2.7) получаем

$$\int_0^t \Omega_m^p(T_n^{(r)}, \tau) d\tau \leq \frac{\Phi^p(\pi / (2n)) \int_0^t (1 - \text{sinc } n\tau)_*^{mp/2} d\tau}{\int_0^{\pi/(2n)} (1 - \text{sinc } n\tau)_*^{mp/2} d\tau} \leq \Phi^p(t).$$

Отсюда, в силу определения класса $W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$, следует, что $\mathcal{B}_{2n+1} \subset W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2) &\geq b_{2n}(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2) \geq b_{2n}(\mathcal{B}_{2n+1}, L_2) \geq \\ &\geq 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi(\pi/(2n)). \end{aligned} \quad (8)$$

Сопоставляя соотношения (2.4) и (2.8), получаем требуемые равенства (2.3). Далее, используя схему рассуждения доказательства теоремы 6 работы [15], убедимся, что мажорантная функция

$$\Phi_*(t) = t^{\alpha/p}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{1}{2\pi^{mp/2-1}} \cdot \frac{(\pi-2)^{mp/2}}{\int_0^{\pi/2} (1 - \sin c\tau)^{mp/2} d\tau}$$

удовлетворяет условию (2.2) при любом $n \in \mathbb{N}$. Теорема 3 доказана.

3. Решение экстремальной задачи (1.4) для класса функций $W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$

В этом пункте приведем решение экстремальной задачи (1.4) для класса функций $W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$. Имеет место следующая

Теорема 4. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$ и мажоранта Φ удовлетворяет условию (2). Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)) &= \\ &= 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \left\{ \int_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi(\pi/(2n)). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Доказательство. Из равенства (11) для величины совместного приближения $E_{n-1}(f^{(s)})$ произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при $h = \pi/(2n)$, $\varphi(t) = 1$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f^{(s)}) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2^{m/2} n^{r-s}} \cdot \left(\int_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^p(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right)^{-1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая определение класса $W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$, получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части (3.1)

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)) \leq \\ & \leq 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \left\{ \int_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi(\pi / (2n)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

При доказательстве теоремы 3 из предыдущего пункта было показано, что множество тригонометрических полиномов $T_n \in \mathcal{T}_{2n+1}$, удовлетворяющих условию

$$\|T_n\| \leq \frac{2^{-m/2} n^{-r} \Phi(\pi / (2n))}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right)^{1/p}},$$

принадлежит классу $W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$, а потому рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \frac{2^{-m/2} n^{-r} \Phi(\pi / (2n))}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right)^{1/p}} \cdot \sin x.$$

Так как

$$\|f_1\| = \frac{2^{-m/2} n^{-r} \Phi(\pi / (2n))}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right)^{1/p}},$$

то функция $f_1 \in W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$. Кроме того, при любом $s = 0, 1, \dots, r$

$$f_1^{(s)}(x) = \frac{2^{-m/2} n^{-(r-s)} \Phi(\pi / (2n))}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right)^{1/p}} \cdot \sin \left(nx + \frac{s\pi}{2} \right)$$

и, в силу (1.3),

$$E_{n-1}(f^{(s)}) = \frac{2^{-m/2} n^{-(r-s)} \Phi(\pi / (2n))}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right)^{1/p}}. \quad (3.3)$$

Учитывая соотношение (3.3), получаем оценку снизу указанной величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)) \geq E_{n-1}(f^{(s)}) =$$

$$= 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \left\{ \int_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi(\pi / (2n)). \quad (3.4)$$

Требуемое равенство (3.1) получаем из сравнения оценки сверху (3.2) с аналогичной оценкой снизу (3.4). Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабозов М.Ш. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 . – *Мат. заметки*, 2010, т.87, №4, с.616-623.
2. Ditzian Z., Totik V. *Moduli of Smoothness*. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg, New York, Tokyo, 1987, 227 p.
3. Сендов Б., Попов В. *Усредненные модули гладкости*. – М.: Мир, 1988, 328 с.
4. Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p , $0 < p < 1$. – *Мат. сборник*, 1994, т.185, №8, с.81-102.
5. Пустовойтов Н.Н. Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усредненные разности и многомерная теорема Джексона. – *Мат. сборник*, 1997, т.188, №10, с.95-108.
6. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π -периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ – *Мат. заметки*, 2004, т.76, №6, с.803-811.
7. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 . – *Мат. заметки*, 2005, т.78, №5, с.792-796.
8. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 . – *Сибир. мат. журнал*, 2011, т.52, №6, с.1414-1427.
9. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций. – *ДАН России*, 2013, т.451, №6, с.625-628.
10. Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$. – *Мат. сборник*, 1975, т.98(140), №3(11), с.395-415.
11. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов. – *Укр. мат. вісник*, 2014, т.11, №4, с.550-571.
12. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 . – *Мат. заметки*, 1976, т.20, 3, с.433-438.
13. Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений*. – М.: МГУ, 1976, 325 с.
14. Pinkus A. *n-Widths in Approximation Theory*. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York, Tokyo, 1985, 252 p.
15. Вакарчук С.Б. Обобщенные характеристики гладкости в неравенствах типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 . – *Мат. заметки*, 2015, т.98, №4, с.511-529.

Г.А.ЮСУПОВ, М.А.МАВЛОНАЗАРОВ

**О СОВМЕСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ
ПРОИЗВОДНЫХ В L_2**

Донишгоҳи давлатии Хоруг ба номи М.Назаршоев

Дар асоси характеристикаи суфтагии функсияҳо, ки аз тарафи К.В.Руновский пешниҳод шудааст, нобаробариҳои аниқи намуди Чексон-Стечкин барои наздиккунии беҳтарини якҷояи функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо ёфта шуданд.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарини якҷояи, характеристикаи суфтагии миёнакардашудаи функсияҳо, нобаробарии намуди Чексон-Стечкин.

G.A.YUSUPOV, M.A.MAVLONAZAROV

**ON THE JOINT APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS AND ITS
DERIVATIVES IN L_2**

Khorog State University named after M.Nazarshoev

For the characteristic of smoothness of functions proposed by K.I.Runovsky, exact inequalities of the Jackson-Stechkin type are obtained for the best joint approximation of a function and its derivatives.

Key words: best joint approximation, average smoothness characteristic of a function, Jackson-Stechkin type inequalities.

УДК 517.5

О.А.ДЖУРАХОНОВ

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ "ТРЕУГОЛЬНЫХ" ЧАСТНЫХ СУММ
ДВОЙНОГО РЯДА ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ
ФУРЬЕ-ЭРМИТА

*Таджикский национальный университет
(Поступила в редакцию 07.12.2021г.)*

В работе вычислены точные верхние грани приближения функций двух переменных "треугольные" частичными суммами двойного ряда Фурье по ортогональным многочленам Фурье-Эрмита на классах функций $L_2^{(r)}(D)$. Вычислены значения различных N -поперечников некоторых классов функций в $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$.

Ключевые слова: наилучшие приближения, "треугольные" суммы, модуль непрерывности, неравенство, ортогональные многочлены.

1. Введем необходимые понятия и определения, нужные нам в дальнейшем. Пусть \mathbb{N} – множество натуральных чисел, \mathbb{R}_+ – множество положительных, \mathbb{Z}_+ – множество целых неотрицательных. Обозначим через $L_{2,\rho} := L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, где $\rho(x, y) := \exp\{-(x^2 + y^2)\}$, множество вещественных суммируемых с квадратом функций двух переменных в плоскости $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) : -\infty \leq x, y \leq +\infty\}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\rho} := \|f\|_{L_{2,\rho}} := \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y) f^2(x, y) dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Адрес для корреспонденции: Джурахонов Олимджон Акмалович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет.
E-mail: olim1974@mail.ru

Пусть $\{H_k(x)H_l(y)\}_{k,l \in \mathbb{Z}_+}$ – ортонормированная на всей плоскости \mathbb{R}^2 с весом $\rho(x, y)$ система многочленов Эрмита (см. напр. [1, с.170]).

Для функции $f \in L_{2,\rho}$ запишем ее разложение в двойной ряд Фурье-Эрмита

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}(f) H_k(x) H_l(y), \quad (1)$$

где

$$c_{kl}(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y) f(x, y) H_k(x) H_l(y) dx dy \quad (2)$$

– коэффициенты Фурье-Эрмита функции f , а равенство в (1) понимается в смысле сходимости в метрике пространстве $L_{2,\rho}$. Обозначим через

$$S_{N-1}(f; x, y) := \sum_{0 \leq k+l \leq N-1} c_{kl}(f) H_k(x) H_l(y)$$

"треугольную" сумму $(N-1)$ -го порядка ряда (1) Фурье-Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}$. Если \mathcal{P}_{N-1} – совокупность полиномов двух переменных x и y степени не более $(N-1)$ вида

$$P_{N-1}(x, y) = \sum_{0 \leq k+l \leq N-1} a_{kl} x^k y^l, \quad (3)$$

то, как хорошо известно [1],

$$\begin{aligned} E_{N-1}(f)_{2,\rho} &:= E_{N-1}(f)_{L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)} = \inf \{ \|f - P_{N-1}\|_{2,\rho} : P_{N-1} \in \mathcal{P}_{N-1} \} = \\ &= \|f - S_{N-1}\|_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k+l \geq N} c_{kl}^2(f) \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

В пространстве L_2 рассмотрим обобщенный оператор сдвига [2]

$$F_h f(x, y) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2-v^2} f\left(xe^{-h} + u\sqrt{1-e^{-2h}}, ye^{-h} + v\sqrt{1-e^{-2h}}\right) dudv,$$

где $h \in \mathbb{R}_+$. Известно, что (см. [3, 4],[5, с.18]) $F_h : L_{2,\rho} \rightarrow L_{2,\rho}$ является линейным оператором, а также [3]

$$F_h H_n(x) H_m(y) = e^{-(n+m)h} H_n(x) H_m(y).$$

Следуя работе [2], как и в классическом случае, определим конечные разности первого и высших порядков следующими равенствами

$$\Delta_h^1(f; x, y) := F_h f(x, y) - f(x, y) = (F_h - E) f(x, y), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_h^m(f; x, y) &= \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f; \cdot, \cdot); x, y) = \\ &= (F_h - E)^m f(x, y) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} F_h^i f(x, y), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

где

$$F_h^0 f(x, y) = f(x, y), F_h^i f(x, y) = F_h(F_h^{i-1} f(x, y)), (i = 1, 2, \dots, m; m \in \mathbb{N}),$$

а E – единичный оператор в пространстве L_2 .

Введём оператор Эрмита второго порядка:

$$\mathcal{D} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Если полагать, как обычно, $\mathcal{D}^0 f = f$, $\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$, то через $L_{2,\rho}^{(r)} := L_{2,\rho}(\mathcal{D}^r)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_{2,\rho}^{(0)} \equiv L_{2,\rho}$) обозначим класс функций $f \in L_{2,\rho}$, имеющих обобщенные частные производные

$$\frac{\partial^s f}{\partial x^i \partial y^j}, i + j = s, s = 1, 2, \dots, 2r, r \in \mathbb{N}$$

в смысле Леви [6] такие, что все они принадлежат пространству $L_{2,\rho}$ и для которых $\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\rho} < \infty$. В работе [2] доказано, что в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\rho}$ имеет место равенство

$$\|\Delta_h^m \mathcal{D}^r(f; x, y)\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - e^{-(k+l)h})^{2m} (k+l)^r c_{kl}^2(f), h \in \mathbb{R}_+,$$

в силу которого определим обобщенный модуль непрерывности m -го порядка:

$$\begin{aligned} \Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\rho} &= \sup \left\{ \|\Delta_h^m(f; \cdot, \cdot)\|_{2,\rho} : 0 < h < t \right\} = \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - e^{-(k+l)t})^{2m} (k+l)^r c_{kl}^2(f) \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Условимся, что далее в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ мы всегда будем подразумевать, что $f \notin \mathcal{P}_{N-1}$. Далее под весовой функцией $g(t)$ на отрезке $[0, h]$ будем понимать всякую неотрицательную

измеримую суммируемую неэквивалентную нулю на $[0, h]$ функцию. При этих условиях имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $m, N \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1)$, $g(t)$ – весовая на отрезке $(0, 1)$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{N^{r/2} E_{N-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\rho} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} = \left\{ \int_0^h (1 - e^{-Nt})^{mp} g(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}}. \quad (7)$$

Доказательство. Из (6), учитывая равенство (4) для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$, получаем

$$\begin{aligned} \Omega_m^2(D^r f; t)_{2,\rho} &\geq \sum_{k+l \geq N} (1 - e^{-(k+l)t})^{2m} (k+l)^r c_{kl}^2(f) \geq \\ &\geq (1 - e^{-Nt})^{2m} N^r \sum_{k+l \geq N} c_{kl}^2(f) = (1 - e^{-Nt})^{2m} N^r E_{N-1}^2(f)_{2,\rho}. \end{aligned} \quad (8)$$

Итак, из (8) для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ получаем неравенство

$$E_{N-1}(f) \leq N^{-r/2} (1 - e^{-Nt})^{-m} \Omega_m(D^r f; h). \quad (9)$$

Обе части неравенства (9) возведем в степень p ($0 < p \leq \infty$) и умножим на весовую функцию $g(t)$. Полученное неравенство интегрируем по отрезку $[0, h]$ ($0 < h < 1$) и возведем в степень $1/p$ ($0 < p \leq \infty$), в итоге получаем

$$\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\rho} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}} \geq N^{r/2} \left\{ \int_0^h (1 - e^{-Nt})^{mp} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot E_{N-1}(f)_{2,\rho}.$$

Последнее неравенство справедливо для любой функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$, а потому из него вытекает оценка сверху для экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (7):

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{N^{r/2} E_{N-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\rho} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} \leq \left\{ \int_0^h (1 - e^{-Nt})^{pm} g(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}}, \quad (10)$$

С другой стороны, нетрудно проверить, что функция $f_0(x, y) := P_N(x)Q_0(y)$ принадлежит классу $L_{2,\rho}^{(r)}$ и в силу равенств (4) и (5) имеем

$$E_{N-1}(f_0)_{2,\rho} = 1, \quad \Omega_m(D^r f_0, t)_{2,\rho} = N^{r/2} [1 - e^{-Nt}]^m. \quad (11)$$

Пользуясь равенствами (11), получаем оценку снизу указанной экстремальной характеристики

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{N^{r/2} E_{N-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\rho} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} &\geq \frac{N^{r/2} E_{N-1}(f_0)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f_0, t)_{2,\rho} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} = \\ &= \left\{ \int_0^h (1 - e^{-Nt})^{pm} g(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Требуемое равенства (7) получаем из сопоставления неравенства (10) и (12), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $m, N, r \in \mathbb{N}$, $r \geq m, h \in (0, 1]$ и $g(t) = Ne^{-Nt}$. Тогда из (7) вытекает равенство :

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{N^{r/2 - \frac{1}{p}} E_{N-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\rho} e^{-Nt} dt \right\}^{\frac{1}{p}}} = \left\{ \frac{mp+1}{(1 - e^{-Nh})^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \quad (13)$$

Из равенства (13), в частности, при $h = 1/N, p = 1/m, r \geq m, r, m, N \in \mathbb{N}$, вытекает экстремальное равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{N^{r/2 - \frac{1}{p}} E_{N-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^{1/N} \Omega_m^{1/m}(D^r f, t)_{2,\rho} e^{-Nt} dt \right\}^m} = \left\{ \frac{2}{(1 - e^{-1})^2} \right\}^m.$$

Следствие 2. В условиях теоремы 1 при $g(t) := g^*(t) = (1 - e^{-Nt})^{-pm}$, имеет место неравенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_{N-1}(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^{1/m}(D^r f, t)_{2,\rho} (1 - e^{-Nt})^{-1} dt \right\}^m} = N^{-r/2} h^{-1/p}. \quad (14)$$

Теорему 1 удается обобщить следующим образом

Теорема 2. Пусть $m, N \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq s \leq r$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq 1$, $g(t)$ – весовая на $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{N^{\frac{r-s}{2}} E_{n-1}(D^s f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\rho} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} = \left\{ \int_0^h (1 - e^{-Nt})^{mp} g(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}}. \quad (15)$$

Доказательство. В левой части (15) обозначим $D^s f = q$ и применяя оператор \mathcal{D} , $r-s$ раз, получаем $D^r f = D^{r-s} q$. Это означает, что если $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$, то $q \in L_{2,\rho}^{(r-s)}$, а потому, учитывая равенство (7), будем иметь

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R}^2)} \frac{N^{\frac{r-s}{2}} E_{n-1}(D^s f)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\rho} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} = \\ & = \sup_{q \in L_{2,\rho}^{(r-s)}(\mathbb{R}^2)} \frac{N^{\frac{r-s}{2}} E_{n-1}(q)_{2,\rho}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^{r-s} q, t)_{2,\rho} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} = \\ & = \left\{ \int_0^h (1 - e^{-Nt})^{mp} g(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

откуда и вытекает равенство (15). Теорема 2 доказана.

2. Точные значения N -поперечников некоторых классов функций

Для изложения дальнейших результатов нам понадобится ряд определений и обозначений. Пусть S – единичный шар в $L_{2,\rho}$; $\Lambda_N \subset L_{2,\rho}$ – N -мерное подпространство; $\Lambda^N \subset L_{2,\rho}$ – подпространство коразмерности N ; $\Lambda: L_{2,\rho} \rightarrow \Lambda_N$ – непрерывный линейный оператор; $\mathcal{L}^\perp: L_{2,\rho} \rightarrow \Lambda_N$ – непрерывный оператор линейного проектирования, \mathfrak{M} – выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\rho}$.

Величины

$$b_N(\mathfrak{M}, L_{2,\rho}) = \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{N+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{N+1} \subset L_{2,\rho} \right\},$$

$$d^N(\mathfrak{M}, L_{2,\rho}) = \inf \left\{ \sup \left\{ \|f\|_{2,\rho} : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^N \right\} : \Lambda^N \subset L_{2,\rho} \right\},$$

$$d_N(\mathfrak{M}, L_{2,\rho}) = \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \left\{ \|f - g\|_{2,\rho} : g \in \Lambda_N \right\} : f \in \mathfrak{M} \right\} : \Lambda_N \subset L_{2,\rho} \right\},$$

$$\delta_N(\mathfrak{M}, L_{2,\rho}) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - \Lambda f\|_{2,\rho} : f \in \mathfrak{M} \right\} : \Lambda L_{2,\rho} \subset \Lambda_N \right\} : \Lambda_N \subset L_{2,\rho} \right\},$$

$$\Pi_N(\mathfrak{M}, L_{2,\rho}) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - \Lambda^\perp f\|_{2,\rho} : f \in \mathfrak{M} \right\} : \Lambda^\perp L_{2,\rho} \subset \Lambda_N \right\} : \Lambda_N \subset L_{2,\rho} \right\}$$

называют, соответственно, *бернштейновским*, *гельфандовским*, *колмогоровским*, *линейным* и *проекционным* N -поперечниками множества в пространстве $L_{2,\rho}$.

Мы будем пользоваться монотонностью указанных поперечников по N , а также тем фактом, что в гильбертовом пространстве для них выполняются соотношения [7,8]:

$$b_N(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}) \leq d^N(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}) \leq d_N(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}) = \delta_N(\mathfrak{M}; H_2) = \Pi_N(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}). \quad (16)$$

Приведем определение классов функций, для которых вычислим значения приведенных выше N -поперечников. Пусть $m, r \in \mathbb{N}, 0 < p \leq \infty, 0 < H < 1, g \geq 0$ – суммируемая на интервале $(0, H)$, неэквивалентная нулю измеримая функция. Через $HW_{2,p}^r(\Omega_m, g)$ обозначим класс, состоящий из функций $f \in L_{2,\rho}^r$, у которых $D^r f$ удовлетворяет условию

$$\int_0^H \Omega_m^p(D^r f, t)g(t)dt \leq 1.$$

Теорема 3. Пусть $N \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, K = 0, 1, 2, \dots; 0 < p \leq \infty, 0 < H < 1, g \geq 0$ – суммируемая на интервале $(0, H)$ неэквивалентная нулю измеримая функция. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \gamma_{\frac{N(N+1)}{2}+K}(HW_{2,p}^r(\Omega_m, g); L_{2,\rho}) = \\ & = E_{N-1}(HW_{2,p}^r(\Omega_m, g))_{2,\rho} = N^{-\frac{r}{2}} \left\{ \int_0^H (1 - e^{-Nt})^{mp} g(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\gamma_v(\cdot)$ – любой из перечисленных выше v -поперечников, а

$$E_{N-1}(HW_{2,p}^r(\Omega_m, g))_{2,\rho} := \sup \{ E_{N-1}(f)_{2,\rho} : f \in HW_{2,p}^r(\Omega_m, g) \}.$$

Доказательство. Так как треугольная частная сумма $(N-1)$ -го порядка

$$S_{N-1}(f; x, y) := \sum_{0 \leq k+l \leq N-1} c_{kl}(f) H_k(x) H_l(y)$$

ряда Фурье-Эрмита (1) функции $f \in L_{2,\rho}$ содержит $N(N+1)/2$ линейно независимых элементов и поскольку $N(N+1)/2 \geq N-1$, то пользуясь неравенством (10), соотношениями (16) и определением класса $HW_{2,p}^r(\Omega_m, g)$ для любого $k = 0, 1, 2, \dots, N$, получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} \gamma_{\frac{N(N+1)}{2}+k} (HW_{2,p}^r(\Omega_m, g); L_{2,\rho}) &\leq d_{\frac{N(N+1)}{2}+k} (HW_{2,p}^r(\Omega_m, g); L_{2,\rho}) \leq \\ &\leq E_{N-1}(HW_{2,p}^r(\Omega_m, g))_{L_{2,\rho}} \leq N^{-\frac{r}{2}} \left\{ \int_0^h (1-e^{-Nt})^{mp} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для оценки снизу указанных выше N -поперечников в подпространстве $\mathcal{P}_{(N+1)(N+2)/2}$ алгебраических многочленов вида (3) рассмотрим многочлен

$$P_N(x, y) = \sum_{0 \leq k+l \leq N} a_{kl}(P_N) H_k(x) H_l(y) \quad (19)$$

и покажем, что шар

$$S_{(N+1)(N+2)/2} := \left\{ P_N \in \mathcal{P}_{(N+1)(N+2)/2} : \|P_N\|_{2,\rho} \leq N^{-\frac{r}{2}} \left\{ \int_0^h (1-e^{-Nt})^{mp} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}} \right\}$$

принадлежит классу $HW_{2,p}^r(\Omega_m, g)$. В силу равенства (6) получаем

$$\begin{aligned} \Omega_m(D^r P_N, t)_{2,\rho} &= \left\{ \sum_{0 \leq k+l \leq N} (1-e^{-(k+l)t})^{2m} (k+l)^r c_{kl}^2(P_N) \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq N^{r/2} (1-e^{-Nt})^m \left\{ \sum_{0 \leq k+l \leq N} c_{kl}^2(P_N) \right\}^{1/2} \\ &\leq N^{r/2} (1-e^{-Nt})^m \|P_N\|_{2,\rho}. \end{aligned} \quad (20)$$

Левую и правую часть неравенства (20), возведя в степень p , ($0 \leq p \leq \infty$), умножим на функцию g и интегрируем обе части полученного неравенства по переменной t в пределах от 0 до H . В итоге будем иметь

$$\int_0^H \Omega_m^p(D^r P_N, t) g(t)_{2,\rho} \leq N^{p/2} \|P_N\|_{2,\rho}^p \int_0^H (1-e^{-Nt})^{mp} g(t) dt \leq 1.$$

Этим включение $S_{(N+1)(N+2)/2} \subset HW_{2,p}^r(\Omega_m, g)$ доказано. Имея ввиду, что

$$\frac{N(N+1)}{2} + k \leq \frac{(N+1)(N+2)}{2} - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N$$

и учитывая соотношения (16) и определение бернштейновского N -поперечника, получаем

$$\begin{aligned} \gamma_{\frac{N(N+1)}{2}+k} (HW_{2,p}^r(\Omega_m, g); L_{2,\rho}) &\geq \gamma_{\frac{(N+1)(N+2)}{2}-1} (HW_{2,p}^r(\Omega_m, g); L_{2,\rho}) \geq \\ &\geq b_{\frac{(N+1)(N+2)}{2}-1} (HW_{2,p}^r(\Omega_m, g); L_{2,\rho}) \geq b_{\frac{(N+1)(N+2)}{2}-1} \left(S_{\frac{(N+1)(N+2)}{2}}; L_{2,\rho} \right) \\ &\geq N^{-r/2} \left\{ \int_0^H (1 - e^{-Nt})^{mp} g(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned} \quad (21)$$

Сопоставляя оценку сверху (18) и оценку снизу (21), получаем требуемые равенства (17). Теорема 3 доказана.

Экстремальная задача вычисления точной верхней грани модуля коэффициентов Фурье на некоторых классах функций одной переменной для конкретных систем ортогональных с весом полиномов рассмотрена, например, в цитированных выше работах [9, 10]. Аналогичный вопрос представляет интерес и для рассматриваемых нами классов функций двух переменных.

Следствие 3. Пусть $k+l = 0, 1, 2, \dots, N$; $N \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $H \in (0, 1)$, $0 < p \leq \infty$.

Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sup \{ |c_{kl}(f)| : f \in HW_{2,p}^r(\Omega_m, g) \} &= \\ &= N^{-r/2} \left\{ \int_0^H (1 - e^{-Nt})^{mp} g(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned} \quad (22)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}$ и $N \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\begin{aligned} c_{kl}(f) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y) f(x, y) H_k(x) H_l(y) dx dy = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y) (f(x, y) - S_{N-1}(f; x, y)) H_k(x) H_l(y) dx dy = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left\{ \rho(x, y)^{1/2} (f(x, y) - S_{N-1}(f; x, y)) \right\} \left\{ \rho(x, y)^{1/2} H_k(x) H_l(y) \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (23)$$

где $S_{N-1}(f)$ – частичная треугольная сумма $(N-1)$ -го порядка функции $f \in L_{2,\rho}^{(m)}$. Используя неравенство Коши-Буняковского и формулу (4) из равенства (23), получаем

$$|c_{kl}(f)| \leq \|f(x, y) - S_{N-1}(f)\|_{2,\rho} = E_{N-1}(f)_{2,\rho}. \quad (24)$$

Из неравенства (24), учитывая (17), получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} \sup\{|c_{kl}(f)| : f \in HW_{2,p}^r(\Omega_m, g)\} &\leq E_{N-1}(HW_{2,p}^r(\Omega_m, g)) = \\ &= N^{-r/2} \left\{ \int_0^H (1 - e^{-Nt})^{mp} g(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned} \quad (25)$$

Легко показать, что функция

$$\tilde{f}(x, y) := N^{-r/2} \left(\int_0^H (1 - e^{-Nt})^{mp} g(t) dt \right)^{-1/p} H_N(x) H_0(y)$$

принадлежит шару $S_{(N+1)(N+2)/2} \subset HW_{2,p}^r(\Omega_m, g)$, а потому функция $\tilde{f} \in HW_{2,p}^r(\Omega_m, g)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup\{|c_{kl}(f)| : f \in HW_{2,p}^r(\Omega_m, g)\} &\geq |c_{kl}(\tilde{f})| = \\ &= N^{-r/2} \left\{ \int_0^H (1 - e^{-Nt})^{mp} g(t) dt \right\}^{-1/p}. \end{aligned} \quad (26)$$

Равенство (22) является следствием неравенств (25) и (26). Следствие 3 доказано.

В завершении статьи отметим, что некоторые результаты для "гиперболических", "треугольных" и "круговых" сумм Фурье получены соответственно в работах [11], [12] и [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Серё Г. Ортогональные многочлены. – М.:Физматгиз, 1962.
2. Abilov V.A., Abilova F.V., Abilov M.V. Some problems of the approximation of functions by "hyperbolic" Fourier-Hermite sums in the space $L_2(\mathbb{R}^2, e^{-x^2-y^2})$. – Analysis Mathematica, 2013, v. 39, №1, pp. 247-257.
3. Абилов В.А., Абилова Ф.М. Некоторые вопросы сходимости кратных рядов Фурье-Эрмита. – ЖВМ и МФ, 2001, т. 41, №11, с. 1637-1657.
4. Алексеев Д.В. Приближение полиномами функций одной переменной в метрике Чебышева-Эрмита – Вестник МГУ, Мех. Матем., 6(1997), с. 68-71.
5. Богачев В.И. Гауссовские меры. – М.:Наука, 1997.
6. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.:Наука, 1977.
7. Pinkus A. *n*-Widths in Approximation Theory, Springer, – Berlin, 1985.
8. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.:МГУ, 1976.
9. Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций. – Укр. мат. журнал, 2013, №65(12), с. 1604-1621.

10. Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита и поперечники функциональных классов. – Матем. заметки, 2014, №95 (5), с. 666-684.
11. Джурахонов О.А. Скорость сходимости "гиперболических" частных сумм двойного ряда Фурье по ортогональным многочленам Фурье-Эрмита. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2020, №4(181), с. 7-13.
12. Shabozov M. Sh., Dzhurakhonov O. A. Upper bounds for approximation of some classes of bivariate functions by triangular Fourier-Hermite sums in the space $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. – Analysis Mathematica, 2019, v. 45, №4, pp. 823-840.
13. Джурахонов О. Приближение функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье-Чебышева. – Владикавказский математический журнал. 2020, т. 22, вып. 2, с. 5-17.

О.А.ЧЎРАХОНОВ

СУРАТИ НАЗДИКШАВИИИ СУММАҲОИ "СЕКУНЧАГИИ" ХУСУСИИ ҚАТОРИ ФУРЬЕ БО ПОЛИНОМҲОИ ОРТОГОНАЛИИ ФУРЬЕ-ЭРМИТ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола, сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини функсияи дутағйирёбанда бо ёрии суммаҳои "секунчагии" қатори Фурье бо полиномҳои ортогоналии Фурье-Эрмит барои синфҳои функсияҳои $L_2^{(r)}(D)$ муайян карда шудаанд. Қимати аниқи n -кутхро барои синфҳои нишондодашуда ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин, суммаҳои "секунчагӣ" модули бефосилагӣ, бисераъзоги ортогоналӣ, нобаробариҳо.

O.A.JURAKHONOV

SPEED OF CONVERGENCE "TRIANGULAR" PARTIAL SUMS OF THE DOUBLE FOURIER SERIES ON THE FOURIER-HERMITE ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Tajik National University

In work are exact upper bounds approximations for bivariate functions by "triangular" partial sums of the double Fourier series on the Fourier-Hermite on orthogonal polynomials classes $L_2^{(r)}(D)$ of functions are calculated. N -widths of some classes of functions in $L_{2,\rho}(R^2)$ are evaluated.

Key words: best approximation, "triangular" sums, modulus of continuity, orthogonal polynomials, inequalities.

УДК 517.3

Х.ФИРДАВСИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРОГО
СЛУЧАЯ МОДЕЛЬНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРА
С СУПЕРСИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ

Кулябский государственный университет им. А.Рудаки

Поступила в редакцию 06.12.2021 г.

В статье для модельного интегрального уравнения в зависимости от корней характеристического уравнения найдены общие интегральные представления решений через произвольные постоянные. Из интегральных представлений следует, что для модельного интегрального уравнения существуют случаи, когда однородное интегральное уравнение может иметь не нулевые решения, то есть теория этих интегральных уравнений существенно отличается от классической теории интегральных уравнений Вольтера. Найдены условия для параметров интегрального уравнения, при выполнении которых неоднородное интегральное уравнение имеет единственное решение, то есть в этом случае теории этих интегральных уравнений совпадают с классической теорией интегральных уравнений Вольтера.

Ключевые слова: метод вариации произвольных постоянных, представление общего решения, суперсингулярные ядра, общее решение, модельное уравнение, граничная фиксированная сингулярность, особое интегральное уравнение типа Вольтера.

Пусть $\Gamma = \{x : a < x < b\}$ – множество точек на вещественной оси. На Γ рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \sum_{j=1}^4 \int_a^x \left[K_j(x,t) (\omega_a^\alpha(x) - \omega_a^\alpha(t))^{j-1} \right] \frac{\varphi(t) dt}{(t-a)^\alpha} = f(x), \quad (1)$$

где $K_j(x,t)$ ($1 \leq j \leq 4$) – заданные непрерывные функции в прямоугольнике

Адрес для корреспонденции: Фирдавси Холмухаммад. 735360, Республика Таджикистан, г. Куляб, ул. С.Сафарова, 16, Кулябский государственный университет. E-mail: shm94fs94@gmail.com.

$\bar{R} = \{(x, t) : a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$, $f(x)$ – заданная функция на $\bar{\Gamma}$, $\varphi(x)$ – искомая функция,

$$\omega_a^\alpha(x) = [(\alpha - 1)(x - a)^{\alpha - 1}]^{-1}, \quad \alpha > 1$$

Интегральное уравнение (1) будем исследовать, предполагая, что $K_j(a, a) \neq 0$ ($1 \leq j \leq 4$)

Следуя [1], решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $\varphi(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $\varphi(a) = 0$ с асимптотическим поведением

$$\varphi(x) = o[(x - a)^{\gamma_1}], \quad \gamma_1 > 4(\alpha - 1) \text{ при } x \rightarrow a \quad (2)$$

Интегральное уравнение (2) представим в следующем виде

$$\varphi(x) + \sum_{j=1}^4 \int_a^x [K_j(a, a)(\omega_a^\alpha(x) - \omega_a^\alpha(t))^{j-1}] \frac{\varphi(t) dt}{(t-a)^\alpha} = f_1(x), \quad (3)$$

где

$$f_1(x) = f(x) - \sum_{j=1}^4 \int_a^x [K_j(x, t) - K_j(a, a)(\omega_a^\alpha(x) - \omega_a^\alpha(t))^{j-1}] \frac{\varphi(t) dt}{(t-a)^\alpha}, \quad (4)$$

Интегральное уравнение (3) назовем характеристическим интегральным уравнением, соответствующим общему уравнению (1).

Таким образом, задача сводится к изучению следующего характеристического уравнения:

$$\varphi(x) + \sum_{j=1}^4 \int_a^x [A_j(\omega_a^\alpha(x) - \omega_a^\alpha(t))^{j-1}] \frac{\varphi(t)}{(t-a)^\alpha} = f(x), \quad (5)$$

где A_j ($1 \leq j \leq 4$) – известные постоянные.

Предположим, что решение интегрального уравнения (1) существует и принадлежит классу $C^4(\Gamma)$. Кроме того, предположим, что $f(x) \in C^4(\Gamma)$.

Дифференцируя обе части уравнения (5) 4 раза и каждый раз, умножая на $(x - a)^\alpha$ и обозначая $D_\alpha^x = (x - a)^\alpha \frac{d}{dx}$, приходим к решению следующего вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка

$$\begin{aligned} (D_a^x)^4 (\varphi(x)) + A_1 (D_a^x)^3 (\varphi(x)) - A_2 (D_a^x)^2 (\varphi(x)) + 2A_3 (D_a^x) (\varphi(x)) - 6A_4 \varphi(x) = \\ = (D_a^x)^4 (f(x)). \end{aligned} \quad (6)$$

Решение однородного уравнения (6) как в [1]-[6] будем искать в виде $\varphi(x) = \exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)]$. Тогда $(D_a^x)^j (\varphi(x)) = \lambda^j \exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)]$, $(1 \leq j \leq 4)$.

Подставляя эти значения $(D_a^x)^j (\varphi(x))$ $(1 \leq j \leq 4)$ в однородное уравнение (6), после сокращения на $\exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)]$, приходим к решению следующего алгебраического уравнения:

$$\lambda^4 + A_1 \lambda^3 - A_2 \lambda^2 + 2A_3 \lambda - 6A_4 = 0. \quad (7)$$

Пусть корни уравнения (7) комплексно-сопряженные, то есть $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$ и $\lambda_3 = m + in$, $\lambda_4 = m - in$, тогда общее решение однородного уравнения (6) даётся формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \exp[-a\omega_a^\alpha(x)] (C_1 \cos(b\omega_a^\alpha(x)) + C_2 \sin(b\omega_a^\alpha(x))) + \\ + \exp[-m\omega_a^\alpha(x)] (C_3 \cos(n\omega_a^\alpha(x)) + C_4 \sin(n\omega_a^\alpha(x))). \end{aligned} \quad (8)$$

Используя метод вариации произвольных постоянных, увидим, что общее решение неоднородного дифференциального уравнения (6) даётся формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \exp[-a\omega_a^\alpha(x)] (C_1 \cos(b\omega_a^\alpha(x)) + C_2 \sin(b\omega_a^\alpha(x))) + \\ + \exp[-m\omega_a^\alpha(x)] (C_3 \cos(n\omega_a^\alpha(x)) + C_4 \sin(n\omega_a^\alpha(x))) + \frac{1}{\Delta} \int_a^x [((a^4 - 6a^2b^2 + b^4)\lambda_1 + \\ + (4ab^3 - 4a^3b)\lambda_2) \sin b(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)) + ((a^4 - 6a^2b^2 + b^4)\lambda_2 - \\ - (4ab^3 - 4a^3b)\lambda_1) \cos b(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))] \exp[a(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))] \frac{f(t)dt}{(t-a)^\alpha} + \\ + \frac{1}{\Delta} \int_a^x [((m^4 - 6m^2n^2 + n^4)\lambda_3 + (4mn^3 - 4m^3n)\lambda_4) \sin n(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)) + \\ + ((m^4 - 6m^2n^2 + n^4)\lambda_4 - \\ - (4mn^3 - 4m^3n)\lambda_3) \cos n(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))] \exp[m(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))] \frac{f(t)dt}{(t-a)^\alpha} \equiv \\ \equiv N_1(C_1, C_2, C_3, C_4, f(x)), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$\Delta =$

$$= nb \left((n^2 + m^2)^2 + (a^2 + b^2)^2 - 2n^2b^2 + 2m^2b^2 + 2a^2n^2 + 6a^2m^2 - 4ma(a^2 + b^2 + n^2 + m^2) \right)$$

$$\lambda_1 = n(n^2 + m^2 + a^2 - b^2 - 2am), \quad \lambda_2 = 2nb(m - a), \quad \lambda_3 = b(a^2 + b^2 - n^2 + m^2 - 2am),$$

$$\lambda_4 = 2nb(a - m). \quad (10)$$

В этом случае имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть в уравнении (5) параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что все корни характеристического уравнения (7) комплексно сопряжены с положительными вещественными частями. Функция $f(x) \in C(\overline{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x) = o \left[\exp \left[-\mu \omega_a^\alpha(x) \right] (x-a)^{\varepsilon_1} \right], \quad \varepsilon_1 > 4(\alpha - 1), \quad \mu = \max(a, m) \quad \text{при } x \rightarrow a. \quad (11)$$

Тогда интегральное уравнение (5) всегда разрешимо и его общее решение дается при помощи формулы (9) и (10), где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Пусть параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что корни характеристического уравнения (7) комплексно сопряжены с отрицательными вещественными частями, то есть $a < 0, m < 0$. Функция $f(x) \in C(\overline{\Gamma})$, $f(a) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f(x) = o \left[(x-a)^{\varepsilon_2} \right], \quad \varepsilon_2 > \alpha - 1, \quad \text{при } x \rightarrow a. \quad (12)$$

Тогда интегральное уравнение (5) имеет единственное решение, которое даётся формулой

$$\varphi(x) \equiv N_1 [0, 0, 0, 0, f(x)]. \quad (13)$$

Итак, доказана

Теорема 2. Пусть в интегральном уравнении (5) параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что корни характеристического уравнения (7) комплексно сопряжены с отрицательными вещественными частями. Функция $f(x) \in C(\overline{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (12). Тогда интегральное уравнение (5) в классе $C(\overline{\Gamma})$, обращающееся в нуль в точке $x = a$, имеет единственное решение, которое дается при помощи формулы (13).

Пусть параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что корни характеристического уравнения (7) комплексно сопряжены, причем два из корней отрицательны с вещественной частью и

два остальных положительны с вещественной частью, то есть $a < 0, m > 0$. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma}), f(a) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f(x) = o\left[\exp\left[-a\omega_a^\alpha(x)\right](x-a)^{\varepsilon_3}\right], \quad \varepsilon_3 > \alpha - 1, \quad \text{при } x \rightarrow a. \quad (14)$$

Тогда интегральное уравнение (5) всегда разрешимо и его общее решение даётся формулой

$$\phi(x) \equiv N_1[0, 0, C_3, C_4, f(x)]. \quad (15)$$

Итак, доказана

Теорема 3. Пусть в интегральном уравнении (5) параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что корни характеристического уравнения (7) комплексно сопряжены, причем два из корней имеют отрицательную, вещественную часть и два остальных с положительной вещественной частью. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma}), f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (14). Тогда интегральное уравнение (5) всегда разрешимо и его общее решение дается при помощи формулы (15), где C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Пусть два из корней уравнения (7) вещественные, разные и положительные, а два остальных комплексно-сопряженные с положительной вещественной части, то есть $k_1 = \lambda_1, k_2 = \lambda_2$ и $k_3 = a + ib, k_4 = a - ib$, тогда общее решение однородного уравнения (6) даётся формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & C_1 \exp\left[-\lambda_1 \omega_a^\alpha(x)\right] + C_2 \exp\left[-\lambda_2 \omega_a^\alpha(x)\right] + \\ & + \exp\left[-a\omega_a^\alpha(x)\right] \left(C_3 \cos(b\omega_a^\alpha(x)) + C_4 \sin(b\omega_a^\alpha(x))\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Используя метод вариации произвольных постоянных можно убедиться, что если решение неоднородного дифференциального уравнения (6) существует, то оно даётся формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & C_1 \exp\left[-\lambda_1 \omega_a^\alpha(x)\right] + C_2 \exp\left[-\lambda_2 \omega_a^\alpha(x)\right] + \\ & + \exp\left[-a\omega_a^\alpha(x)\right] \left(C_3 \cos(b\omega_a^\alpha(x)) + C_4 \sin(b\omega_a^\alpha(x))\right) + \\ & + \frac{b(a^2 + b^2 + \lambda_2^2 - 2a\lambda_2)\lambda_1^4}{\Delta} \int_a^x \exp\left[\lambda_1(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))\right] \frac{f(t)dt}{(t-a)^\alpha} - \\ & - \frac{b(a^2 + b^2 + \lambda_2^2 - 2a\lambda_2)\lambda_1^4}{\Delta} \int_a^x \exp\left[\lambda_1(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))\right] \frac{f(t)dt}{(t-a)^\alpha} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta} \int_a^x \left[\left((a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k_1 + (4ab^3 - 4a^3b)k_2 \right) \sin(b(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))) + \right. \\
& \left. + \left((a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k_2 - (4ab^3 - 4a^3b)k_1 \right) \cos(b(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))) \right] \times \\
& \times \exp \left[a(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)) \right] \frac{f(t)dt}{(t-a)^\alpha} \equiv N_2(C_1, C_2, C_3, C_4, f(x),
\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta &= b(\lambda_1 - \lambda_2) \left((a^2 + b^2)(\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 + a^2 + b^2 - 2a(\lambda_1 + \lambda_2)) - \right. \\
& \quad \left. - \lambda_1\lambda_2(b^2 - 3a^2 + 2a\lambda_1 + 2a\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2) \right) \\
k_1 &= (\lambda_2 - \lambda_1) \left(a(\lambda_1 + \lambda_2) - a^2 + b^2 - \lambda_1\lambda_2 \right), \quad k_2 = -b(\lambda_2 - \lambda_1) (\lambda_1 + \lambda_2 - 2a).
\end{aligned} \tag{18}$$

Теорема 4. Пусть в уравнении (5) параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) вещественные, разные и положительные и два остальных комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением

$$\begin{aligned}
f(x) &= o \left[\exp \left[-\mu_1 \omega_a^\alpha(x) \right] (x-a)^{\varepsilon_4} \right], \\
\varepsilon_4 &\succ 3(\alpha - 1), \mu_1 = \max(\lambda_1, \lambda_2, a) \text{ при } x \rightarrow a.
\end{aligned} \tag{19}$$

Тогда интегральное уравнение (5) всегда разрешимо и его общее решение дается при помощи формулы (17) и (18), где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Пусть параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что двух из корней характеристического уравнения (7) вещественные, разные и отрицательные, а две остальные комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью, то есть $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, a > 0$. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f(x) = o \left[\exp \left[-a \omega_a^\alpha(x) \right] (x-a)^{\varepsilon_5} \right], \quad \varepsilon_5 \succ \alpha - 1, \text{ при } x \rightarrow a. \tag{20}$$

Тогда интегральное уравнение (5) всегда разрешимо и его общее решение даётся формулой

$$\varphi(x) \equiv N_2(0, 0, C_3, C_4, f(x)). \tag{21}$$

Итак, доказана

Теорема 5. Пусть в интегральном уравнении (5) параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) вещественные, разные и отрицательные, а два остальных комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (20). Тогда интегральное уравнение (5) всегда разрешимо и его общее решение дается при помощи формулы (21), где C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Пусть параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) вещественные, разные и положительные, а два остальных комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью, то есть $(\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, a < 0)$. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f(x) = o \left[\exp \left[-\lambda \omega_a^\alpha(x) \right] (x-a)^{\varepsilon_6} \right], \quad \varepsilon_6 > \alpha - 1, \quad \lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2) \quad \text{при } x \rightarrow a. \quad (22)$$

Тогда интегральное уравнение (5) всегда разрешимо и его общее решение дается формулой

$$\varphi(x) \equiv N_2 [C_1, C_2, 0, 0, f(x)]. \quad (23)$$

Итак, доказана

Теорема 6. Пусть в интегральном уравнении (5) параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) вещественные, разные и положительные, а два остальных комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (22). Тогда интегральное уравнение (5) всегда разрешимо и его общее решение дается при помощи формулы (23), где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пусть параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) вещественные и разные, причем один положительный, другой отрицательный, а два остальных корня комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью, то есть $(\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, a > 0)$. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f(x) = o \left[\exp \left[-\lambda_1 \omega_a^\alpha(x) \right] (x-a)^{\varepsilon_7} \right], \quad \varepsilon_7 > \alpha - 1, \quad \text{при } x \rightarrow a. \quad (24)$$

Тогда интегральное уравнение (5) всегда разрешимо и его общее решение дается формулой

$$\varphi(x) \equiv N_2 [C_1, 0, C_3, C_4, f(x)], \quad (25)$$

где C_1, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Итак, доказана

Теорема 7. Пусть в интегральном уравнении (5) параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) вещественные и разные, причем один положительный, другой отрицательный, а два остальных комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (24). Тогда интегральное уравнение (5) в классе $C(\bar{\Gamma})$, обращающееся в нуль в точке $x = a$, всегда разрешимо, и его общее решение дается при помощи формулы (25), где C_1, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Замечание: Аналогично можно рассмотреть случаи, когда $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $a < 0$, $(\lambda_1, \lambda_2) < 0$, $a < 0$.

Пусть два из корней уравнения (7) вещественные и равные, а два остальных комплексно-сопряженные, то есть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\lambda_3 = a + ib$, $\lambda_4 = a - ib$, тогда общее решение однородного уравнения (6) дается формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & (C_1 + C_2 \omega_a^\alpha(x)) \exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] + \\ & + \exp[-a \omega_a^\alpha(x)] (C_3 \cos(b \omega_a^\alpha(x)) + C_4 \sin(b \omega_a^\alpha(x))). \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда решение неоднородного дифференциального уравнения (6) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & (C_1 + C_2 \omega_a^\alpha(x)) \exp[-\lambda \omega_a^\alpha(x)] + \\ & + \exp[-a \omega_a^\alpha(x)] (C_3 \cos(b \omega_a^\alpha(x)) + C_4 \sin(b \omega_a^\alpha(x))) + \\ & + \frac{k_1 \lambda^4}{\Delta} \int_a^x \exp[\lambda(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))] \frac{f(t) dt}{(t-a)^\alpha} + \\ & + \frac{k_2}{\Delta} \int_a^x (\lambda^4(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)) + 4\lambda^3) \exp[\lambda(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))] \frac{f(t) dt}{(t-a)^\alpha} + \\ & + \frac{1}{\Delta} \int_a^x \left[((a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k_3 - (4ab^3 - 4a^3b)k_2) \sin(b(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(t))) - \right. \\ & \left. - ((a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k_1 + (4ab^3 - 4a^3b)k_3) \cos(b(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(t))) \right] \times \\ & \times \exp[a(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(t))] \frac{f(t) dt}{(t-a)^\alpha} \equiv \\ & \equiv N_3(C_1, C_2, C_3, C_4, f(x)). \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\Delta = b(\lambda - a)^4 + b^5 + 2a^2b^3 + 2b^3\lambda^2 - 4ab^3\lambda$$

$$k_1 = 2ab - 2b\lambda, \quad k_2 = b^3 + a^2b + b\lambda^2 - 2ab\lambda, \quad k_3 = a^2 - b^2 - \lambda^2 - 2a\lambda. \quad (28)$$

Теорема 8. Пусть в уравнении (5) параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) вещественные, равные и положительные, а два остальных комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x) = o\left[\exp\left[-\lambda\omega_a^\alpha(x)\right](x-a)^{\varepsilon_8}\right], \quad \varepsilon_8 > 2(\alpha-1), \quad \text{при } x \rightarrow a. \quad (29)$$

Тогда интегральное уравнение (5) всегда разрешимо и его общее решение дается при помощи формулы (27) и (28), где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Пусть параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) вещественные, равные и положительные, а два остальных комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью, то есть $\lambda > 0, a < 0$. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f(x) = o\left[\exp\left[-\lambda\omega_a^\alpha(x)\right](x-a)^{\varepsilon_9}\right], \quad \varepsilon_9 > 2(\alpha-1), \quad \text{при } x \rightarrow a. \quad (30)$$

Тогда интегральное уравнение (5) всегда разрешимо и его общее решение дается формулой

$$\varphi(x) \equiv N_3(C_1, C_2, 0, 0, f(x)), \quad (31)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Итак, доказана

Теорема 9. Пусть в интегральном уравнении (5) параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) вещественные, равные и положительные, а два остальных комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (30). Тогда интегральное уравнение (5) в классе $C(\bar{\Gamma})$, обращающееся в нуль в точке $x = a$, всегда разрешимо, и его общее решение дается при помощи формулы (31).

Пусть параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) вещественные, равные и отрицательные, а два остальных комплексно-

сопряженные с положительной вещественной частью, то есть $\lambda < 0, a > 0$. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma}), f(a) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f(x) = o\left[\exp\left[-a\omega_a^\alpha(x)\right](x-a)^{\varepsilon_{10}}\right], \varepsilon_{10} > \alpha - 1, \text{ при } x \rightarrow a. \quad (32)$$

Тогда интегральное уравнение (5) всегда разрешимо и его общее решение даётся формулой

$$\varphi(x) \equiv N_8(0, 0, C_3, C_4, f(x)), \quad (33)$$

где C_3, C_4 – произвольные постоянные

Итак, доказана

Теорема 10. Пусть в интегральном уравнении (5) параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) вещественные, равные и отрицательные, а два остальных комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma}), f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (32). Тогда интегральное уравнение (5) в классе $C(\bar{\Gamma})$, обращающееся в нуль в точке $x = a$, всегда разрешимо и его общее решение дается при помощи формулы (33).

Пусть параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) вещественные, равные и отрицательные, а два остальных комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью, то есть $\lambda < 0, a < 0$. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma}), f(a) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f(x) = o\left[(x-a)^{\varepsilon_{11}}\right], \varepsilon_{11} > 2(\alpha - 1), \text{ при } x \rightarrow a. \quad (34)$$

Тогда интегральное уравнение (5) имеет единственное решение, которое даётся формулой

$$\varphi(x) \equiv N_3(0, 0, 0, 0, f(x)). \quad (35)$$

Итак, доказана

Теорема 11. Пусть в интегральном уравнении (5) параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) вещественные, равные и отрицательные, а два остальных комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma}), f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (34). Тогда интегральное уравнение (5) в классе $C(\bar{\Gamma})$, обращающееся в нуль в точке $x = a$, имеет единственное решение, которое дается при помощи формулы (35).

Пусть корни уравнения (7) комплексно-сопряженные и равные, то есть $k_1 = k_2 = a + ib$ и $k_3 = k_4 = a - ib$, тогда общее решение однородного уравнения (6) даётся формулой

$$\varphi(x) = \exp[-a\omega_a^\alpha(x)] \times \left((C_1 + C_2\omega_a^\alpha(x)\sin(b\omega_a^\alpha(x))) + (C_3 + C_4\omega_a^\alpha(x)\cos(b\omega_a^\alpha(x))) \right). \quad (36)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \exp[-a\omega_a^\alpha(x)] \times \\ & \times \left((C_1 + C_2\omega_a^\alpha(x)\sin(b\omega_a^\alpha(x))) + (C_3 + C_4\omega_a^\alpha(x)\cos(b\omega_a^\alpha(x))) \right) + f(x) - \\ & - \frac{1}{2b^2} \int_a^x \left[(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)) + (4a^3 - 12ab^2) \cos(b(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))) - \right. \\ & \left. - ((4a^3b - 4ab^3)(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)) - (4b^3 - 12a^2b) \sin(b(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)))) \right] \times \\ & \times \exp[a(\omega_a^\alpha(x) - \omega_a^\alpha(t))] \frac{f(t)dt}{(t-a)^\alpha} + \\ & + \frac{1}{2b^3} \int_a^x \left[(a^4 - 6a^2b^2 + b^4) \sin(b(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))) - \right. \\ & \left. - (4ab^3 - 4a^3b) \cos(b(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x))) \right] \exp[a(\omega_a^\alpha(x) - \omega_a^\alpha(t))] \frac{f(t)dt}{(t-a)^\alpha} \equiv \\ & \equiv N_4(C_1, C_2, C_3, C_4, f(x)). \end{aligned} \quad (37)$$

Теорема 12. Пусть в уравнении (5) параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что все корни характеристического уравнения (7) комплексно-сопряженные и равные с положительной вещественной частью. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x) = o\left[\exp[-a\omega_a^\alpha(x)](x-a)^{\varepsilon_{12}}\right], \quad \varepsilon_{12} \succ 2(\alpha-1), \quad \text{при } x \rightarrow a. \quad (38)$$

Тогда интегральное уравнение (5) всегда разрешимо и его общее решение дается при помощи формулы (37), где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Пусть параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что корни характеристического уравнения (7) комплексно-сопряженные и равные с отрицательной вещественной частью, то есть $a < 0$. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f(x) = o\left[(x-a)^{\varepsilon_{13}}\right], \quad \varepsilon_{13} \succ 2(\alpha-1), \quad \text{при } x \rightarrow a. \quad (39)$$

Тогда интегральное уравнение (5) имеет единственное решение, которое даётся формулой

$$\varphi(x) \equiv N_4(0,0,0,0, f(x)). \quad (40)$$

Итак, доказано:

Теорема 13. Пусть в интегральном уравнении (5) параметры A_j ($1 \leq j \leq 4$) такие, что два из корней характеристического уравнения (7) комплексно-сопряженные и равные с отрицательной вещественной частью. Функция $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением (39). Тогда интегральное уравнение (5) в классе $C(\bar{\Gamma})$, обращающееся в нуль в точке $x = a$, имеет единственное решение, которое дается при помощи формулы (40).

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджабов Н. Интегральные уравнения типа Вольтера с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе, 2007, 222 с.
2. Раджабов Н., Фирдавси Х. К теории одного класса суперсингулярного интегрального уравнения типа Вольтера. – Известия НАНТ, 2021, №1(182), с. 7-24.
3. Rajabov N. Volterra Type Integral Equations with Super-singularity Kernels. Functional Analysis in Interdisciplinary Applications, Astana, Kazakhstan, October 2017, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol. 216, pp. 333-340.
4. Раджабов Н., Раджабова Л. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. – LAP Lambert Academic Publishing, Германия, 2012, 502 с.
5. Rajabov N. About New Class of Volterra Type Integral Equations with Boundary Singularity in Kernels. In books “Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory”. – Springer, USA, pp. 41-60.
6. Раджабов Н. Об одном классе модельного сверхсингулярного интегрального уравнения, обобщающем одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сверхсингулярной точкой в ядре. – Материалы VII Международной научной конференции, 8-9 октября 2015 г., с. 202-205.
7. Раджабов Н., Кадиров Г.М., Сатторов А. К теории одного класса вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения высших порядков. Вестник Таджикского национального университета. – Душанбе, 2014, №1/1(126), с. 3-5.
8. Раджабов Н., Кадиров Г. К теории одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с левой граничной сверхсингулярной точкой. – Труды международной научной конференции по “Дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами”. – Душанбе, 2003, с. 128-130.
9. Rajabov N. To theory one class of Volterra type Integral Equation with fixed boundary singularity in Kernel. – Doklady Academy of Sciences, 2014, v. 459, №1, pp. 1-5.
10. Rajabov N. A New Method for Investigating a New Class of the Volterra Type Integral Equation with a Boundary Singularity in the Kernel. Abstract book. – The 3rd Abu Dhabi University Annual International Conference “Mathematical Science and its Applications”, Abu Dhabi University 2014, pp. 69-72

Х.ФИРДАВСИ

ТАСВИРИ ИНТЕГРАЛИИ ҲАЛ БАҶЗЕ ҲОЛАТҲОИ МОДЕЛИИ МУОДИЛАИ ИНТЕГРАЛИИ ВОЛТЕР БО ЯДРОИ БАҶЗИЁД СИНГУЛЯРӢ

Донишгоҳи давлатии Кӯлоб

Дар мақола барои муодилаи интегралӣ моделӣ вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикӣ тасвирҳои умумии интегралӣ ба воситаи доимиҳои ихтиёрӣ ёфта шудааст. Аз тасвирҳои интегралӣ дида мешаванд, ки барои муодилаи моделӣ ҳолатҳое мавҷуданд, ки барои онҳо муодилаи якҷинса метавонад ҳалли ғайринулӣ дошта бошад, яъне назарияи чунин муодилаҳои интегралӣ аз назарияи муодилаҳои интегралӣ классикии Волтер фарқ мекунанд. Шартҳо нисбатан ба параметрҳои муодилаи интегралӣ ёфта шудаанд, ки дар вақти иҷро шудани онҳо муодилаи ғайриҷинса ҳалли ягона дорад, яъне дар ҳолати хусусӣ назарияи ингуна муодилаҳо бо назарияи муодилаҳои классикии Волтер ҳамчун шуда метавонанд.

Калимаҳои калидӣ: методи вариатсияи доимӣ, тасвири умумии ҳал, ядроҳои супер-сингулярӣ, ҳалҳои умумӣ, муодилаҳои моделӣ, махсусияти қайдкардашудаи сарҳадӣ, ҳалҳои ғайринулии муодилаи якҷинса, муодилаи интегралӣ Волтер.

Kh.FIRDAVSI

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS FOR A CASE OF A MODEL VOLTERRA INTEGRAL EQUATION WITH A SUPERSINGULAR KERNELS

Kulyab State Universiti

In the article, for a model integral equation, depending on the roots of the characteristic equation, general integral representations of solutions in terms of arbitrary constants are found. It follows from integral representations that for a model integral equation there are cases when a homogeneous integral equation can have non-zero solutions, that is, the theory of these integral equations differs significantly from the classical theory of Volterra integral equations. The conditions are found for the parameters of the integral equation, under which the inhomogeneous integral equation has a unique solution, that is, in this case, the theories of these integral equations coincide with the classical theory of Voltaire integral equations.

Key words: method of variation of arbitrary constants, representation general solution, super-singular kernels, general solution, model equation, boundary fixed singularity, special Voltaire-type integral equation.

УДК 517.95

С.БАЙЗАЕВ, Б.М.ДЖУМАЕВ*

ОБ ОБЩЕМ РЕШЕНИИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ
УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С КОМПЛЕКСНЫМИ
ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

*Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики,
*Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова
Поступила в редакцию 10.11.2021 г.*

В статье рассматриваются переопределенные системы уравнений в частных производных – обобщенные системы Коши-Римана со многими переменными с периодическими коэффициентами. Найдена формула общего решения однородной системы. В двумерном случае получены формулы общего решения, а также ограниченных и периодических решений неоднородной системы.

Ключевые слова: переопределенная система, уравнение в частных производных, общее решение, ограниченные решения, периодические решения.

1. Рассмотрим переопределённую систему уравнений в частных производных с n независимыми переменными $z = (z_1, \dots, z_n)$ вида

$$w_{\bar{z}_j} + a_j w = f_j(z), \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где a_j и f_j – заданные функции переменной z , определённые во всем C^n – n -мерное комплексное евклидово пространство.

Случай $a_j = 0$ рассматривал Л.Хёрмандер (см. [1], с. 312), когда a_j и f_j заданы в полицилиндре система (1) исследована в работах Л.Г.Михайлова и других авторов (см.,

Адрес для корреспонденции: Байзаев Саттор, 735700, Республика Таджикистан, г.Худжанд, 17-й мкр., д.1, Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики.
E-mail: sattor_bayzoev@rambler.ru

напр., [2], [3]), в которых получено представление общего решения через интегральные операторы Векуа и Коши.

Мы будем исследовать систему (1) в предположении, что a_j и f_j принадлежат $C_{2\pi}$ – пространство непрерывных в C^n функций $f(z_1, \dots, z_n)$, удовлетворяющих условиям двоякопериодичности [4]:

$$f(z_1, \dots, z_j + h_j, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_n), \quad (2)$$

здесь $h_j \in \{2\pi, 2\pi i\}$.

При условии, что функции a_j и f_j принадлежат C_1 – класс функций, имеющих непрерывные частные производные первого порядка, необходимым и достаточным условием полной разрешимости системы (1) будут равенства (см. [2], с. 86):

$$\partial_{\bar{z}_k} a_j = \partial_{\bar{z}_j} a_k, \quad (3)$$

$$\partial_{\bar{z}_j} f_k - \partial_{\bar{z}_k} a_j + a_k f_j - a_j f_k = 0, \quad j \neq k. \quad (4)$$

Введем операторы, определённые в $C_{2\pi}$ (см. [5], с. 4):

$$T_j f = f_o^j \bar{z}_j - 2i \sum_{k \neq 0} k^{-1} f_k^j e^{i(k, z_j)}, \quad (5)$$

где $k = k_1 + ik_2 \in Z^2$ – целочисленная решетка в C^1 , $(k, z_j) = k_1 x_j + k_2 y_j$, f_k^j – коэффициенты Фурье функции f по переменной z_j . Отметим, что ряд в правой части формулы (5) сходится в пространстве $L_2(K^n)$ (K – основной квадрат периодов) и в обобщенном смысле верны следующие равенства:

$$(T_j f)_{\bar{z}_j} = f, \quad T_j(f_{\bar{z}_j}) = f - f_o^j. \quad (6)$$

Если функция f удовлетворяет условию Гёльдера по каждой переменной, то первое равенство из (6) будет выполнено в классическом смысле.

Введем также операторы: $S_j f = T_j f - f_o^j \bar{z}_j$, $j = 1, 2$. Очевидно, что $S_j f \in C_{2\pi}$, то есть операторы S_j действуют в пространстве $C_{2\pi}$.

Для функций $a_k \in C_{2\pi}$ определим следующие средние значения:

$$a_{k, j} = \gamma_j \int_{K^j} a_k(z) d\omega_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (7)$$

где $\gamma_j = (2\pi)^{-2j}$, $d\omega_j = dz_1 \cdots dz_j$. Положим $a_{k,0} = a_k(z)$, среднее значение функции a_k по переменной z_j обозначим через $[a_k]_j$. Очевидно, что

$$[a_k]_1 = a_{k,1}. \quad (8)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть коэффициенты однородной системы, соответствующей (1), принадлежат $C_{2\pi}$ и выполнены условия (3). Тогда общее решение этой системы представляется в виде

$$w(z) = e^{-\Omega(z)} \varphi(z), \quad (9)$$

где

$$\Omega(z) = \sum_{j=1}^n T_j a_{j,j-1}, \quad (10)$$

$\varphi(z)$ – произвольная аналитическая по z функция.

Эта теорема будет доказана методом математической индукции. Поэтому случай $n = 2$ рассмотрим отдельно.

2. Пусть в системе (1) $n = 2$. Для удобства систему запишем в виде

$$\begin{cases} w_{\bar{z}_1} + a(z_1, z_2)w = f(z_1, z_2), \\ w_{\bar{z}_2} + b(z_1, z_2)w = g(z_1, z_2). \end{cases} \quad (11)$$

В этом случае критерии (3), (4) выглядят так:

$$a_{\bar{z}_2} = b_{\bar{z}_1}, \quad (12)$$

$$-ag + bf + f_{\bar{z}_2} - g_{\bar{z}_1} = 0. \quad (13)$$

Теорема 2. Пусть коэффициенты однородной системы, соответствующей (11), принадлежат $C_{2\pi}$ и удовлетворяют условию (12). Тогда общее решение этой системы даётся формулой

$$w(z_1, z_2) = e^{2i\text{Im}(\bar{a}_0 z_1 + \bar{b}_0 z_2)} \omega_1(z_1, z_2) \omega_2(z_2) \Phi(z_1, z_2), \quad (14)$$

где a_0, b_0 – средние значения функций a, b соответственно, $\omega_1 = e^{-S_1 a}$, $\omega_2 = e^{-S_2 b}$, Φ – произвольная аналитическая по z_1, z_2 функция.

Доказательство. Если в первом уравнении однородной системы, соответствующей (11), зафиксировать переменную z_2 , то общее решение этого уравнения имеет вид (см. [6], с. 44):

$$w(z_1, z_2) = e^{-T_1 a} \varphi(z_1, z_2), \quad (15)$$

где φ – аналитическая по z_1 функция. Подставляя $w(z_1, z_2)$ во второе уравнение указанной системы, имеем:

$$-(T_1 a)_{\bar{z}_2} \varphi + \varphi_{\bar{z}_2} + b\varphi = 0. \quad (16)$$

Покажем, что коэффициенты Фурье a_o^1 и b_o^2 являются постоянными. Действительно, в силу условия (12) и формулы Грина (см. [7], с. 28) имеем

$$4\pi^2 \partial_{\bar{z}_2} a_o^1 = \iint_K \partial_{\bar{z}_2} a(z_1, z_2) dz_1 = \iint_K \partial_{\bar{z}_1} b(z_1, z_2) dz_1 = \frac{1}{2i} \int_{\partial K} b(t_1, z_2) dt_1. \quad (17)$$

В силу периодичности функции b по переменной z_1 контурный интеграл в (17) равен нулю, поэтому дwoякопериодическая функция $a_o^1(z_2)$ является аналитической, и согласно теореме Лиувилля она будет постоянной. Аналогично можно показать, что $b_o^2 \equiv const$ и легко увидеть, что $a_o^1 = a_o$, $b_o^2 = b_o$.

Далее имеем

$$(T_1 a)_{\bar{z}_2} = T_1(\partial_{\bar{z}_2} a) = T_1(\partial_{\bar{z}_1} b) = b(z_1, z_2) - b_o^1(z_2),$$

в силу (12) и второго равенства из (6). Отсюда и из (16) получим: $\varphi_{\bar{z}_2} + b_o^1 \varphi = 0$. Следовательно, $\varphi(z_1, z_2) = e^{-T_2 b_o^1} \psi(z_1, z_2)$, здесь ψ – произвольная аналитическая по z_1, z_2 функция. Тогда формула (15) примет вид

$$w(z_1, z_2) = e^{-T_1 a - T_2 b_o^1} \psi(z_1, z_2). \quad (18)$$

Теперь покажем, что функция w , определенная формулой (18), является решением однородной системы, соответствующей (11). Действительно, в силу первого равенства из (6) и аналитичности функции ψ , имеем

$$w_{\bar{z}_1} = e^{-T_1 a - T_2 b_o^1} (-T_1 a)_{\bar{z}_1} \psi(z_1, z_2) = -aw,$$

то есть первое уравнение указанной системы удовлетворяется.

Далее, с учетом условия (12) и второго равенства из (6), получим:

$$(T_1 a)_{\bar{z}_2} = T_1(a_{\bar{z}_2}) = T_1(b_{\bar{z}_1}) = b_1 - b_0^1, \quad (T_2 b_0^1)_{\bar{z}_2} = b_0^1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} w_{\bar{z}_2} &= e^{-T_1 a - T_2 b_0^1} (-T_1 a - T_2 b_0^1)_{\bar{z}_2} \psi(z_1, z_2) = \\ &= e^{-T_1 a - T_2 b_0^1} \left[-b + b_0^1 - (T_2 b_0^1)_{\bar{z}_2} \right] \psi(z_1, z_2) = -b e^{-T_1 a - T_2 b_0^1} \psi(z_1, z_2) = -b w, \end{aligned}$$

то есть w удовлетворяет и второму уравнению указанной однородной системы.

Таким образом, формула (18) определяет общее решение однородной системы, соответствующей (11).

Осталось привести формулу (18) к виду (14). Так как $T_1 a = S_1 a + a_0 \bar{z}_1$, $T_2 b_0^1 = S_2 b_0^1 + b_0 \bar{z}_2$, то из (18) имеем: $w(z_1, z_2) = e^{-S_1 a - S_2 b_0^1} e^{-a_0 \bar{z}_1 - b_0 \bar{z}_2} \psi(z_1, z_2)$. Пусть $\Phi(z_1, z_2) = e^{-a_0 \bar{z}_1 - b_0 \bar{z}_2} \psi(z_1, z_2)$. Тогда

$$w(z_1, z_2) = e^{-S_1 a - S_2 b_0^1} e^{-a_0 \bar{z}_1 - b_0 \bar{z}_2 + \bar{a}_0 \bar{z}_1 + \bar{b}_0 \bar{z}_2} \Phi(z_1, z_2),$$

откуда получаем представление (14). Теорема 2 доказана.

3. Ограниченные и периодические решения однородной системы. Если $w(z_1, z_2)$ ограниченное во всем C^2 решение однородной системы, соответствующей (11), то аналитическая функция $\Phi(z_1, z_2)$ будет ограниченной в C^2 и в силу теоремы Лиувилля $\Phi(z_1, z_2) \equiv c$, c – постоянная. Поэтому все ограниченные в C^2 решения однородной системы даются формулой

$$w(z_1, z_2) = e^{2im(a_0 \bar{z}_1 + b_0 \bar{z}_2)} \omega_1(z_1, z_2) \omega_2(z_2) c. \quad (19)$$

Если $2a_0, 2b_0 \in Z^2$, то все $w \in C_{2\pi}$, в противном случае однородная система в пространстве $C_{2\pi}$ имеет только нулевое решение. Если только $2a_0 \in Z^2$ ($2b_0 \in Z^2$), то все решения (19) будут периодическими по z_1 (по z_2).

Если нас интересуют решения $w(z_1, z_2)$, растущие на бесконечности не быстрее полинома, то есть удовлетворяющие условию: $|w(z_1, z_2)| \leq M(1 + |z_1| + |z_2|)^N$, M – положительная постоянная, зависящая от w , N – целое неотрицательное число, то опять в силу теоремы Лиувилля функция $\Phi(z_1, z_2)$ будет полиномом $P_N(z_1, z_2)$ по z_1 и z_2 степени не выше N и решение однородной системы имеют вид

$$w(z_1, z_2) = e^{2i\text{Im}(\bar{a}_0 z_1 + \bar{b}_0 z_2)} \omega_1(z_1, z_2) \omega_2(z_2) P_N(z_1, z_2). \quad (20)$$

4. Общее решение неоднородной системы. Рассмотрим неоднородную систему (11). Для этой системы справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть в системе (11) $a, b, f, g \in C_{2\pi} \cap C_1$, выполнены условия полной разрешимости (12), (13), и средние значения функций a и b равны нулю. Тогда общее решение этой системы даётся формулой

$$w(z) = e^{-T_1 a} \left\{ T_1(e^{T_1 a} f) + e^{-T_2 b_0^1} \left[T_2(e^{T_2 b_0^1} h) + \psi(z) \right] \right\}, \quad (21)$$

где $\psi(z)$, $z = (z_1, z_2)$ произвольная аналитическая функция переменных z , h – среднее значение функции $e^{T_1 a} g$ по переменной z_1 .

Доказательство. Учитывая формулу общего решения (14) соответствующей однородной системы, достаточно проверить, что функция

$$\omega(z_1, z_2) = e^{-T_1 a} \left[T_1(e^{T_1 a} f) + e^{-T_2 b_0^1} T_2(e^{T_2 b_0^1} h) \right]$$

является частным решением системы (11). Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \omega_{\bar{z}_1} = & -(T_1 a)_{\bar{z}_1} e^{-T_1 a} T_1(e^{T_1 a} f) + f - \\ & - e^{-T_1 a - T_2 b_0^1} \left[a + (T_2 b_0^1)_{\bar{z}_1} \right] T_2(e^{T_2 b_0^1} h) + e^{-T_1 a - T_2 b_0^1} \left[T_2(e^{T_2 b_0^1} h) \right]_{\bar{z}_1}. \end{aligned}$$

Так как b_0^1 и h зависят только от z_2 , то в силу первого соотношения из (6), получим: $\omega_{\bar{z}_1} = -a e^{-T_1 a} \left[T_1(e^{T_1 a} f) + e^{-T_2 b_0^1} T_2(e^{T_2 b_0^1} h) \right] + f$ или $\omega_{\bar{z}_1} = -a \omega + f$, то есть ω удовлетворяет первому уравнению системы (11).

Далее находим

$$\begin{aligned} \omega_{\bar{z}_2} = & -(T_1 a)_{\bar{z}_2} e^{-T_1 a} T_1(e^{T_1 a} f) + e^{-T_1 a} \left[T_1(e^{T_1 a} f) \right]_{\bar{z}_2} - \\ & - \left\{ (T_1 a + T_2 b_0^1)_{\bar{z}_2} T_2(e^{T_2 b_0^1} h) - \left[T_2(e^{T_2 b_0^1} h) \right]_{\bar{z}_2} \right\} e^{-T_1 a - T_2 b_0^1}. \end{aligned}$$

Вычислим производные, используя условия (12), (13) и равенства (6):

$$(T_1 a)_{\bar{z}_2} = T_1(a_{\bar{z}_2}) = T_1(b_{\bar{z}_1}) = b(z_1, z_2) - b_0^1(z_2);$$

$$\left[T_1(e^{T_1 a} f) \right]_{\bar{z}_2} = T_1 \left\{ e^{T_1 a} \left[(T_1 a)_{\bar{z}_2} f + f_{\bar{z}_2} \right] \right\} = T_1 \left\{ e^{T_1 a} \left[(b - b_0^1) f + f_{\bar{z}_2} \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= T_1 \left\{ e^{T_1 a} (a g + g_{\bar{z}_1}) - e^{T_1 a} b_0^1 f \right\} = T_1 \left[\left(e^{T_1 a} g \right)_{\bar{z}_1} \right] - b_0^1 T_1 (e^{T_1 a} f) = \\
&= e^{T_1 a} g - h(z_2) - b_0^1 T_1 (e^{T_1 a} f).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\omega_{\bar{z}_2} &= (b_1^0 - b) e^{-T_1 a} T_1 (e^{T_1 a} f) + e^{-T_1 a} \left[e^{T_1 a} g - h - b_1^0 T_1 (e^{T_1 a} f) \right] - \\
&- \left[(b - b_1^0) T_2 (e^{T_2 b_1^0} h) + b_1^0 T_2 (e^{T_2 b_1^0} h) - e^{T_2 b_1^0} h \right] e^{-T_1 a - T_2 b_1^0}
\end{aligned}$$

или после сокращений

$$\omega_{\bar{z}_2} = -b e^{-T_1 a} \left[T_1 (e^{T_1 a} f) + e^{-T_2 b_1^0} T_2 (e^{T_2 b_1^0} h) \right] + g = -b \omega + g,$$

то есть ω удовлетворяет и второму уравнению системы (1). Теорема 3 доказана.

5. Доказательство теоремы 1. Пусть функция $w(z)$ – решение однородной системы, соответствующей (1). Покажем, что найдется аналитическая по z функция $\varphi(z)$, для которой верно представление (9).

Доказательство проведем методом математической индукции. При $n = 2$ справедливость представления вида (9) установлено при доказательстве теоремы 2 (см. формулу (18)).

Пусть представление (11) верно для $n > 2$. Покажем справедливость этого представления для $n + 1$. Так как

$$w_{\bar{z}_k} + a_k(z_1, \dots, z_{n+1}) w = 0, \quad k = \overline{1, n+1}, \quad (22)$$

то в силу индуктивного предположения существует такая аналитическая по z_1, \dots, z_n функция $\varphi(z_1, \dots, z_{n+1})$, что верно равенство

$$w = e^{-\Omega_n} \varphi, \quad (23)$$

где $\Omega_n = \sum_{j=1}^n T_j a_{j, j-1}$. Подставляя (23) в $(n+1)$ -ое равенство из (22), имеем

$$\varphi_{\bar{z}_{n+1}} + (a_{n+1} - \partial_{\bar{z}_{n+1}} \Omega_n) \varphi = 0. \quad (24)$$

Так как

$$\partial_{\bar{z}_{n+1}} \Omega_n = T_1 (\partial_{\bar{z}_{n+1}} a_1) + \sum_{j=2}^n \gamma_{j-1} T_j \left[\int_{K^{j-1}} \partial_{\bar{z}_{n+1}} a_j(z_1, \dots, z_{n+1}) dz_1 \cdots dz_{j-1} \right],$$

то в силу (3), второго равенства из (6) и (8), получим

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}_{n+1}} \Omega_n &= T_1(\partial_{\bar{z}_1} a_{n+1}) + \sum_{j=2}^n \gamma_{j-1} T_j \left[\int_{K^{j-1}} \partial_{\bar{z}_j} a_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1}) dz_1 \cdots dz_{j-1} \right] = \\ &= a_{n+1} - [a_{n+1}]_1 + \sum_{j=2}^n \gamma_{j-1} \int_{K^{j-1}} \left\{ a_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1}) - [a_{n+1}]_j \right\} dz_1 \cdots dz_{j-1}.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая определения выражений a_{kj} и $[a]_j$, будем иметь

$$\partial_{\bar{z}_{n+1}} \Omega_n = a_{n+1} - [a_{n+1}]_1 + \sum_{j=2}^n (a_{n+1, j-1} - a_{n+1, j}) = a_{n+1} - a_{n+1, n}.$$

Подставим это выражение в (24): $\varphi_{\bar{z}_{n+1}} + a_{n+1, n} \varphi = 0$. Отсюда $\varphi = e^{-T_{n+1} a_{n+1, n}} \psi$, где ψ – аналитическая по z_{n+1} функция и в силу (23) получим

$$w = e^{-\Omega_n - T_{n+1} a_{n+1, n}} \psi = e^{-\Omega_{n+1}} \psi. \quad (25)$$

Так как φ – аналитическая по z_1, \dots, z_n и $a_{n+1, n}$ при $n > 1$ не зависит от z_1, \dots, z_n , то из предыдущего равенства следует, что функция ψ является аналитической по z_1, \dots, z_n . Тогда соотношение (25) показывает, что функция w представляется в виде (9).

Теперь покажем, что функция, определенная формулой (9), является решением однородной системы, соответствующей (1). Имеем

$$w_{\bar{z}_k} = -e^{-\Omega} \Omega_{\bar{z}_k} \varphi, \quad (26)$$

$$\Omega_{\bar{z}_k} = \sum_{j=1}^n \partial_{\bar{z}_k} (T_j a_{j, j-1}). \quad (27)$$

Обозначим $B_{kj} = \partial_{\bar{z}_k} (T_j a_{j, j-1})$, $1 \leq k \leq n$. Тогда по свойству оператора T_j

$$B_{11} = \partial_{\bar{z}_1} (T_1 a_{1, 0}) = a_{1, 0} = a_1(z) \quad (28)$$

и при $k > 1$

$$B_{k1} = \partial_{\bar{z}_1} (T_1 a_{1, 0}) = \partial_{\bar{z}_1} ([a_1]_1 \bar{z}_1) - 2i \sum_{l \neq 0} l^{-1} \partial_{\bar{z}_1} a_{1l}^1 \cdot e^{i(l, z_1)}. \quad (29)$$

Подставляя в (29) выражения для a_{1l}^1 , с учетом (3), получим

$$B_{k1} = \gamma_1 \left[\bar{z}_1 \int_K \partial_{\bar{z}_1} a_k dz_1 - 2i \sum_{l \neq 0} l^{-1} \left(\int_K \partial_{\bar{z}_1} a_k e^{-i(l, z_1)} dz_1 \right) e^{i(l, z_1)} \right]. \quad (30)$$

Для интегралов, входящих в (30) применяя формулу Грина и учитывая периодичность функций $a_k(z)$ и $a_k(z)e^{-i(l, z_1)}$, получим

$$\int_K \partial_{\bar{z}_1} a_k dz_1 = (2i)^{-1} \int_{\partial K} a_k dt_1 = 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \int_K \partial_{\bar{z}_1} a_k \cdot e^{-i(l, z_1)} dz_1 &= \int_K \left[\partial_{\bar{z}_k} (a_k e^{-i(l, z_1)}) + \frac{il}{2} a_k e^{-i(l, z_1)} \right] dz_1 = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\partial K} a_k e^{-i(l, t_1)} dt_1 + \frac{il}{2} \int_K a_k e^{-i(l, z_1)} dz_1 = \frac{il}{2\gamma_1} a_{kl}^1. \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда и из (30) будем иметь

$$B_{k1} = \sum_{i \neq 0} a_{kl}^1 e^{i(l, z_1)} = a_k(z) - a_{k,1}, \quad k > 1. \quad (33)$$

Функция $a_{j, j-1}$ при $j > 1$ не зависит от переменных z_1, \dots, z_{j-1} , поэтому

$$B_{kj} = 0 \text{ при } j > k. \quad (34)$$

Пусть теперь $1 < j < k$. Тогда с учетом (3) и (7) имеем

$$B_{kj} = \gamma_{j-1} \gamma_1 \left\{ \bar{z}_j \int_{K^{j-1}} \left(\int_K \partial_{\bar{z}_j} a_k dz_j \right) d\omega_{j-1} - 2i \sum_{l \neq 0} l^{-1} e^{i(l, z_j)} \int_{K^{j-1}} \left[\int_K \partial_{\bar{z}_j} a_k e^{-i(l, z_j)} dz_j \right] d\omega_{j-1} \right\}.$$

Подобно равенствам (32) и (31), находим: $\int_K \partial_{\bar{z}_1} a_k e^{-i(l, z_j)} dz_j = \frac{il}{2\gamma_1} a_{kl}^j$,

$\int_K \partial_{\bar{z}_j} a_k dz_j = 0$. Следовательно, с учетом (7)

$$\begin{aligned} B_{kj} &= \gamma_{j-1} \int_{K^{j-1}} \left[a_{kl}^j e^{i(l, z_j)} \right] d\omega_{j-1} = \\ &= a_{k, j-1} - \gamma_j \int_{K^j} a_k(z) d\omega_j = a_{k, j-1} - a_{k, j}, \quad 1 < j < k. \end{aligned} \quad (35)$$

Наконец при $j = k$ находим

$$B_{kk} = \partial_{\bar{z}_k} (T_k a_{k, k-1}) = a_{k, k-1}. \quad (36)$$

Формулы (28), (33)-(36) определяют все значения B_{kj} . Поэтому в силу этих формул и (27), получим: $\Omega_{\bar{z}_1} = B_{11} = a_1(z)$, $\Omega_{\bar{z}_2} = B_{21} + B_{22} = [a_2(z) - a_{2,1}] + a_{2,1} = a_2(z)$,

...

$$\Omega_{\bar{z}_k} = B_{k1} + B_{k2} + \dots + B_{k,k-1} + B_{kk} = [a_k(z) - a_{k,1}] + [a_{k,1} - a_{k,2}] + \dots + [a_{k,k-2} - a_{k,k-1}] + a_{k,k-1} = a_k(z).$$

Подставляя в (26), имеем: $w_{\bar{z}_k} = -e^{\Omega} a_k \varphi$, то есть $w_{\bar{z}_k} + a_k w = 0$.

Итак, формула (9) определяет общее решение однородной системы, соответствующей (1). Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – М.: Мир, 1986, т. 2, 455 с.
2. Михайлов Л. Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. – Душанбе: Дониш, 2017, 134 с.
3. N. Taghizadeh, A. Neirameh. Generalization of some overdetermined systems of complex partial differential equations. – Journal of King Saud University – Science, 2011, №23, pp. 175-177.
4. Ахиезер И.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970, 304 с.
5. Байзаев С. О периодических решениях нелинейной обобщенной системы Коши-Римана. – Доклады АН ТаджССР, 1979, т. 22, №1, с. 3-6.
6. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости. – Новосибирск, НГУ, 1999, 74 с.
7. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988, 509 с.

С.БАЙЗАЕВ, Б.М.ЧУМАЕВ*

ОИД БА ҲАЛЛИ УМУМИИ СИСТЕМАИ БАРЗИЁДМУАЙЯНШУДАИ МУОДИЛАҲО БО ҲОСИЛАҲОИ ХУСУСИИ КОЭФФИЦИЕНТҲОЯШ ДАВРИИ КОМПЛЕКСӢ

Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон,

**Донишгоҳи давлатии Хучанд ба номи академик Б.Ғафуров*

Дар мақола системаи барзиёдмуайяншудаи муодилаҳои бо ҳосилаҳои хусусӣ – системаи умумикардшудаи Коши-Римани бисёртағйирёбандаи коэффитсиентҳояш даврӣ баррасӣ гардидааст. Формулаи ҳалли умумии системаи якҷинса муайян карда шудааст. Дар ҳолати дученака формулаи ҳалли умумӣ, инчунин ҳалҳои маҳдуд ва даврии системаи ғайриякҷинса ёфта шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: системаи барзиёдмуайяншуда, муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусӣ, ҳалли умумӣ, ҳалли маҳдуд, ҳалли даврӣ.

S.BAIZAEV, B.M.JUMAEV*

GENERAL SOLUTION OF AN OVERDETERMINED SYSTEM PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH COMPLEX PERIODIC COEFFICIENTS

Tajik state university of law, business and politics,

**Khujand state university named after academician B. Gafurov*

The article deals with overdetermined systems of partial differential equations – generalized Cauchy-Riemann systems with many variables with complex periodic coefficients. A formula for the general solution of a homogeneous system is found. In the two dimensional case, formulas for the general solution, as well as for bounded and periodic solutions of an inhomogeneous system are obtained.

Key words: overdetermined systems, partial differential equations, general solution, bounded solution, periodic solution.

УДК 517.95

Д.С.САФАРОВ, С.К.МИРАТОВ

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Бохтарский государственный университет им. Н.Хусрава

Поступила в редакцию 15.11.2021 г.

В работе для одной нелинейной системы уравнений второго порядка с оператором Лапласа с постоянными отклонениями аргумента найдены точные решения с помощью эллиптической функции Якоби на плоскости гомеоморфизма уравнения Бельтрами.

Ключевые слова: эллиптическая система, двоякопериодическое решение, эллиптический синус, дельта-амплитуда.

На комплексной плоскости \mathbb{C} рассмотрим эллиптическую систему уравнений в комплексной форме

$$\begin{aligned} w_{\bar{z}\bar{z}} + ew_z w_{\bar{z}} + dw_z^2 + aw(z) + bw^3(z) = \\ = \alpha w(z + h_1)w(z + h_2) + \beta \prod_{j=3}^6 w(z + h_j), \end{aligned} \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $4\partial_{\bar{z}\bar{z}} = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ – дифференциальный оператор Лапласа, $w(z) = u(x, y) + i\vartheta(x, y)$ – искомая функция, $a, b, d, e, \alpha, \beta, h_j, j = \overline{1, 6}$ – комплексные постоянные.

В рассматриваемой работе находим решение уравнения (1) с помощью эллиптических функций Якоби [1,2,3], при определенных значениях коэффициентов и отклонения $h_j, j = \overline{1, 6}$.

Адрес для корреспонденции: Сафаров Джумабой, Миратов Сафархон Кудратович. 735140, Республика Таджикистан, г. Бохтар, ул. Айни 67, Бохтарский государственный университет им.Н.Хусрава. E-mail: safarov-5252@mail.ru; safarkhonop@mail.ru

Сперва находим решение уравнения (1), когда $\alpha = \beta = 0$. В этом случае мы имеем нелинейную эллиптическую систему уравнений второго порядка вида [4]

$$w_{\bar{z}z} + ew_z w_{\bar{z}} + dw_z^2 + aw(z) + bw^3(z) = 0. \quad (2)$$

В работе [5] найдено двоякопериодическое решение обобщенного уравнения Дуффинга

$$w_{\bar{z}z} + aw(z) + bw^3(z) = 0, \quad (3)$$

с помощью функции Якоби $\operatorname{sn}(z)$ – эллиптический синус.

Решение уравнения (3) получается на плоскости гомеоморфизма уравнения Бельтрами

$$f_{\bar{z}} - qf_z = 0, \quad |q| \neq 1, \quad (4)$$

удовлетворяющее условиям

$$f(0) = 0, \quad f(z + \tau_j) = f(z) + \tilde{\tau}_j, \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

$\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2$ – постоянные, причём $\operatorname{Im}(\tau_2 / \tau_1) \neq 0, \operatorname{Im}(\tilde{\tau}_2 / \tilde{\tau}_1) \neq 0$.

В монографии [6] методами И.Н.Векуа [7], с привлечением аппарата теории эллиптических функций Вейерштрасса [1] показано, что когда $q = q(z)$ – двоякопериодическая функция с основными периодами τ_1, τ_2 и $|q(z)| \leq q_0 < 1$, то уравнение (4) всегда имеет однолистное решение $\omega(z)$, удовлетворяющее условиям (5). Такое решение названо основным квазипериодическим решением и оно обладает свойствами квазиконформного отображения плоскости \mathbb{C}_z на \mathbb{C}_ω [7].

Тогда в силу свойства решений уравнения (4), всякое его двоякопериодическое обобщенное решение представимо в виде [7]

$$f(z) = \Phi(\omega(z)), \quad (6)$$

где $\Phi(\omega)$ – эллиптическая функция на плоскости \mathbb{C}_ω .

Функции вида (6) названы обобщенными эллиптическими функциями, и её основные свойства с приложениями к теории нелинейных эллиптических уравнений изучены в монографии [6].

В случае, когда в уравнении (4) $q = \operatorname{const}$ и $|q| \neq 0$, то его однолистное решение, удовлетворяющее условиям (5) имеет вид

$$\omega(z) = z + q\bar{z}, \quad |q| \neq 1, \quad (7)$$

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(z + \tau_j) = \omega(z) + \tilde{\tau}_j,$$

здесь $\tilde{\tau}_j = \tau_j + q\bar{\tau}_j$, $j = 1, 2$.

Эта функция, при $|q| \neq 1$, параллелограмм $\Omega = \mathbb{C}_z$, с вершинами $0, \tau_1, \tau_1 + \tau_2, \tau_2$ квазиконформно отображает в параллелограмм плоскости $\Omega' = \mathbb{C}_\omega$, с сохранением ориентации $0, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_2$, если $|q| < 1$.

Исходя из этих соображений докажем, что уравнение (3) является порождающим для уравнения (2), а затем при определенных значениях $h_j, j = \overline{1, 6}$, находим решение уравнения (1).

Все мероморфные двоякопериодические решения уравнения

$$\varphi''(u) + a_1\varphi(u) + b_1\varphi^3(u) = 0, \quad (8)$$

где u – комплексная переменная, при определенных условиях, находится с помощью эллиптических функций Якоби – эллиптический синус $snu = sn(u, k)$, $cnu = cn(u, k)$ – эллиптический косинус, $dnu = dn(u, k)$ – дельта амплитуды. Здесь k – модуль функции, является элементом построения функций Якоби.

В теории модулярных функций [1,2] доказывается, что если комплексное постоянное число k^2 такое, что $k^2 \neq 0, 1$, то существует эллиптическая функция snu , удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{dsnu}{du}\right)^2 = (1 - sn^2u)(1 - k^2 sn^2u),$$

здесь k^2 – функции аргумента $\tau, Im\tau > 0$ [2, 3, 8].

Дифференцируя это уравнение, получим, что функция snu удовлетворяет также дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2snu}{du^2} + (1 + k^2)snu - 2k^2 sn^3u = 0. \quad (9)$$

С помощью функции snu определяются остальные функции, эллиптический косинус $-cnu$ и функции дельта-амплитуды $-dnu$. Функция snu имеет основные периоды $-4K, 2iK'$, для cnu основные периоды $-4K, 2K + 2iK'$, а для dnu основные периоды $-2K, 4iK'$, где

$$K = K(k) = \int_0^1 \left[(1-t^2)(1-k^2t^2) \right]^{-\frac{1}{2}} dt,$$

$$K' = K'(k') = \int_0^1 \left[(1-t^2)(1-k'^2 t^2) \right]^{-\frac{1}{2}} dt, \quad (10)$$

где k' – дополнительный модуль, удовлетворяет условию $k^2 + k'^2 = 1$ и при $k' \rightarrow +1$, $k \rightarrow 0$.

Период K и K' на комплексной плоскости $k^2 = \lambda$, $\lambda \neq 0, 1$ будут однозначными аналитическими функциями k , если плоскость разрезана от 0 до $-\infty$ и от 0 до $+\infty$ [1, 5, 8].

При $0 < k^2 < 1$ периоды K, K' – вещественны. Из (9) сразу заключаем, что функция $\varphi(u) = snu$ при $a_1 = 1 + k^2$, $b_1 = 2k^2$, когда $a_1 \neq 1$, $a_1 \neq 2$ и $b_1 \neq 0$, $b_1 \neq 2$ является решением уравнения (8).

Лемма 1. Пусть $\varphi(u)$ удовлетворяет уравнению Дуффинга

$$\varphi''(u) + \frac{a}{q}\varphi(u) + \frac{b}{q}\varphi^3(u) = 0, \quad (11)$$

где a, b, q – постоянные, причём $|q| \neq 1, |q| \neq 0$, тогда функция

$$w(z) = A\varphi(u) = A\varphi(z + q\bar{z}), \quad (12)$$

при $|e| \neq |d|, q = -d/e$ удовлетворяет уравнению (2).

Лемма 2. Если $\varphi(u)$ двоякопериодическое решение уравнения (11) с периодами \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 , $Im(\tilde{T}_2 / \tilde{T}_1) > 0$, то функция вида (12) является двоякопериодическим решением уравнения (2) с периодами T_1, T_2

$$T_1 = \frac{\tilde{T}_1 - q\tilde{T}_1}{1 - |q|^2}, \quad T_2 = \frac{\tilde{T}_2 - q\tilde{T}_2}{1 - |q|^2},$$

причём, при $|q| < 1$, $Im(T_2 / T_1) > 0$.

Легко видеть, что если $\varphi(u)$ решение уравнения (11), то функция

$$w(z) = A\varphi(z + q\bar{z} + c) = A\varphi(u + c),$$

также является решением уравнения (2), для любого постоянного c .

Поэтому, мы можем найти точное решение уравнения (2) с помощью эллиптической функции Якоби на плоскости гомеоморфизма уравнения Бельтрами. При этом мо-

доль k^2 и постоянное A , в представлении (12), как q , будут найдены через коэффициенты уравнения.

Приступим к нахождению решения уравнения (1), что при $\alpha = \beta = 0$ дает решение уравнения (2). Решение уравнения (1) зависит от свойства отклонения $h_j, j = \overline{1, 6}$:

все отклонения h_j – кратны периодам решению порождающего уравнения, то есть решению уравнения (3) или (8).

не все h_j – кратны периодам решению порождающего уравнения.

Находим решение уравнения (1) во втором случае.

Лемма 3. Пусть $\varphi(z)$ двоякопериодическое решение уравнения (1) с периодами $\tau_1, \tau_2, \text{Im}(\tau_2 / \tau_1) \neq 0$ и постоянные $h_j, j = 1, 2, 3, 4, 5$ кратны τ_1 или τ_2 , тогда $\varphi(z)$ удовлетворяет уравнению вида

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{z}} + e\varphi_z\varphi_{\bar{z}} + d\varphi_z^2 + a\varphi(z) + b\varphi^3(z) = \\ = \varphi^2(z) [\alpha + \beta\varphi(z)\varphi(z+h_6)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Обратно, если $\varphi(z)$ двоякопериодическое решение уравнения (13) с периодом τ_1, τ_2 и $h_j, j = \overline{1, 5}$ кратны периодам τ_1 или τ_2 , то $\varphi(z)$ удовлетворяет уравнению (1). В этом смысле уравнения (1) и (13) функционально-эквивалентные уравнения [9].

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$w(z) = \text{Asn}(z + q\bar{z}, k) = \text{Asnu} = \varphi(u), \quad (14)$$

с неизвестными постоянными параметрами: $A, |q| \neq 1, k^2 \neq 0, 1$.

Функция $w(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$w_{\bar{z}} + (1+k^2)qw(z) - \frac{2qk^2}{A^2}w^3(z) = 0, \quad (15)$$

и имеет периоды

$$T_1 = 4 \frac{K - q\bar{K}}{1 - |q|^2}, T_2 = 2i \frac{K' - q\bar{K}'}{1 - |q|^2} \quad (16)$$

где K, K' имеет вид (10) и $k^2 \neq 0; 1, k'^2 \neq -1; 0$.

Теперь, принимая в (14) $q = -d/e, |d| \neq |e|$, будем предполагать, что k^2 – априори известно. После подстановки в (1) находим k^2 .

Функция snu на полупериоде iK' удовлетворяет функциональному уравнению [2]

$$\varphi(u)\varphi(u+iK') = \frac{1}{k},$$

k – модуль функции.

Теперь, при условии, что $h_j, j = \overline{1,5}$ – кратны T_1 или T_2 , а $h_6 = T_2 / 2$, сопоставляя уравнение (15) с уравнением (1) получим, что его решение можно представить в виде (14), если параметры $A, q, q = -d / e, k^2$ и его коэффициенты связаны условиями

$$q(1+k^2) = a, 2qk^2 = -bA^2, k\alpha + \beta A^2 = 0. \quad (17)$$

Из этой системы находим

$$k^2 = \frac{a}{q} - 1, a \neq q, a \neq 2q, \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{4q}{b^2}(a-q), A^2 = \frac{2}{b}(a-q).$$

Подставляя k^2 и $k'^2 = 2 - a / q$ в формулы (10), находим значения периодов $K(k) = K, K'(k') = K'$ через коэффициенты уравнения (1).

Теорема 1. Пусть в уравнении (1) все коэффициенты отличны от нуля $a \neq q, a \neq 2q, q = -d / e, |d| \neq |e|, \alpha^2 = \frac{4q}{b^2}(a-q)\beta^2$ и модуль функции k^2 и дополнительный модуль k'^2 , для функции snu вычислены формулами

$$k^2 = \frac{a}{q} - 1, k'^2 = 2 - \frac{a}{q}, a \neq q, a \neq 2q.$$

Тогда, если $h_j, j = \overline{1,5}$ кратны периодам T_1 и T_2 , имеющие вид (16), а $h_6 = T_2 / 2$, то уравнение (1) допускает решение вида

$$w(z) = \pm \sqrt{\frac{2}{b}(a-q)} sn\left(z - \frac{d}{e}\bar{z}, k\right).$$

Таким же путем можно найти решение уравнения (1) с помощью функции snu и dnu .

Теперь будем искать решение уравнения (1) с помощью функции дельта - амплитуды

$$w(z) = Adn(z + q\bar{z}, k) = Adnu. \quad (18)$$

Функция $w(z)$ имеет периоды

$$T_1 = 2 \frac{K - q\bar{K}}{1 - |q|^2}, \quad T_2 = 4i \frac{K' - q\bar{K}'}{1 - |q|^2}, \quad |q| \neq 1, \quad k^2 \neq 0; 1, \quad k'^2 \neq -1; 0,$$

и удовлетворяет уравнению

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + (k^2 - 2)qw(z) + \frac{2q}{A^2}w^3(z) = 0, \quad (19)$$

а также, функциональному соотношению

$$dn(u + 2K)dn(u + K) = dnudn(u + K) = k'.$$

Теперь, воспользуясь этим соотношением, берем в (1) $h_j, j = \overline{1, 5}$ так, чтобы были кратными T_1 или T_2 , а $h_6 = T_1 / 2$ и сопоставляя (19) с уравнением (1) мы увидим, что его решение можно представить в виде (18), если параметры $A, q = -d/e, |d| \neq |e|$ и k^2 с его коэффициентами связаны условиями

$$(k^2 - 2)q = a, \quad 2q = bA^2, \quad \alpha + k'\beta A^2 = 0. \quad (20)$$

Отсюда находим

$$k^2 = 2 + \frac{a}{q}, \quad a \neq -q, \quad a \neq -2q, \quad (21)$$

$$A^2 = \frac{2q}{b}, \quad \frac{\alpha^2 b^2}{4q^2 \beta^2} = 1 - \left(2 + \frac{a}{q}\right).$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $a \neq -q, a \neq -2q, q = -d/e, |d| \neq |e|$, модуль функции dn равен $k^2 = 2 + a/q$ и коэффициенты уравнения связаны условием

$$\alpha^2 b^2 + 4q^2 \beta^2 + 4qa\beta^2 = 0.$$

Тогда, если отклонения $h_j, j = \overline{1, 5}$ кратны периодам T_1 или T_2 и $h_6 = T_1 / 2$, то уравнение (1) имеет решение, представимое в виде

$$w(z) = \pm i \sqrt{\frac{2d}{be}} dn\left(z - \frac{d}{e}\bar{z}, k\right).$$

Аналогичным образом можно найти решение уравнения (1) через функции sn с основными периодами $4K$ и $2K + 2iK'$.

Замечание. Теоремы 1,2 верны и в случае, когда в уравнении (1) $h_3 = h_1, h_4 = h_2, h_1, h_2$ – некратны периодам, h_5 – кратен периодам, а h_6 как в условии этих теорем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970, 304 с.
2. Гурвиц А., Курант Р. Теории функций. – М.: Наука, 1968, 664 с.
3. Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. Курс современного анализа. – Л.-М.: Государственное технико-теоритическое издательство, 1934, 468 с.
4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981, 448 с.
5. Сафаров Д.С. Точное решение обобщенного уравнения Дуффинга. – Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и ее приложения». – Худжанд, 2003, с. 139-140.
6. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения. – Душанбе, 2012, 190 с.
7. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. – М.: Наука, 1959, 629 с.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1973, 736 с.
9. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.П. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971, 296 с.

Ў.С.САФАРОВ, С.Ў.МИРАТОВ

ЎАЛЛИ АНИЌИ ЯЌ СИСТЕМАИ МУОДИЛАЎОИ ҒАЙРИХАТТИИ НАМУДИ ЭЛЛИПТИКӢ БО АРГУМЕНТЎОИ ФАРЌКУНАНДА

Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н.Хусрав

Дар қор барои яқ системаи муодилаҳои ғайрихаттии тартиби дуум бо оператори Лаплас бо фарқкунандаҳои доимии аргумент, ҳалҳои аниқ бо ёрии функсияҳои эллиптикии Якоби дар ҳамвории гомеоморфизми муодилаи Белтрами ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: системаи эллиптикӣ, ҳалҳои дудаврдошта, синуси эллиптикӣ, дельта-амплитуда.

D.S.SAFAROV, S.K.MIRATOV

EXACT SOLUTION OF ONE NONLINEAR SYSTEM OF ELLIPTIC-TYPE EQUATIONS WITH A DEVIATING ARGUMENT

Bokhtar State University named after N.Khusrav

In this paper, for one nonlinear system of equations of the second order with the Laplace operator with constant deviations of the argument, exact solutions are found using the Jacobi elliptic function on the homeomorphism plane of the Beltrami equation.

Key words: elliptic system, double-periodic solution, elliptic sine, delta-amplitude.

УДК 517.957

М.СУЛТОНЗОДА

**О РАЗРЕШИМОСТИ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА
В ПРОСТРАНСТВЕ КУДРЯВЦЕВА**

Таджикский педагогический институт в г. Пенджикенте

Поступила в редакцию 12.05.2022 г.

В работе изучается однозначная разрешимость вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов недивергентного вида во всем евклидовом пространстве со степенным вырождением на бесконечности. Решение задачи ищется в весовом пространстве Л.Д.Кудрявцева. Также рассматривается задача о нахождении решения исследуемого дифференциального уравнения, стабилизирующегося к заданному многочлену на бесконечности.

Ключевые слова: эллиптический оператор, недивергентный вид, степенное вырождение, пространство Кудрявцева, стабилизация к многочлену.

1. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с вырождением хорошо изучена в случае, когда исследуемый оператор заранее задан в дивергентной форме (см. [1-6] и имеющиеся в них библиографию). При таких исследованиях существенно используется аппарат полуторалинейных форм в гильбертовом пространстве. В случае, когда исследуемый эллиптический оператор задается в недивергентной форме, возникают некоторые трудности, и поэтому этот случай изучен лишь в отдельных работах (см. [7-9]) и только для операторов, заданных в ограниченной области со степенным вырождением на всей границе области. Здесь мы изучаем разрешимость вариационной задачи Дирихле в пространстве Л.Д.Кудрявцева для эллиптических операторов недивергентного вида, заданных во всем пространстве и вырождающихся на бесконечности.

Адрес для корреспонденции: Султонзода Мунзир Тошпулод. 735500, Республика Таджикистан, г. Пенджикент, проспект Рудаки, 106, Таджикский педагогический институт в г. Пенджикенте, E-mail: smunzir93@gmail.com

Пусть \mathbb{R}^n – n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ – длина мультииндекса k . Обозначим через $u^{(k)}(x)$ обобщенную в смысле С.Л.Соболева производную функции $u(x)$ мультииндекса k . Далее вводим обозначение $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$.

Пусть r – некоторое натуральное и β – вещественное числа, и пусть $p \in (1, +\infty)$. В работе Л.Д.Кудрявцева [10] впервые было введено пространство $W_{p;\beta}^r(\mathbb{R}^n)$ функций $u(x)$, определенных во всем пространстве \mathbb{R}^n и имеющих все обобщенные производные $u^{(k)}(x), |k| \leq r$, с конечной нормой

$$\|u; W_{p;\beta}^r(\mathbb{R}^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int d^{p\beta}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx + \int_{K_R} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad (1)$$

где K_R – шар достаточно большого радиуса $R > 0$ с центром в начале координат. Здесь и далее, для удобства записи, во всех интегралах по всему пространству \mathbb{R}^n мы опускаем область интегрирования.

Пусть $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – класс бесконечно дифференцируемых в \mathbb{R}^n функций с компактным носителем. Замыкание $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме (1) обозначим через $\dot{W}_{p;\beta}^r(\mathbb{R}^n)$, а

через $\left(\dot{W}_{p;\beta}^r(\mathbb{R}^n)\right)'$ обозначим пространство антилинейных функционалов,

определенных на $\dot{W}_{p;\beta}^r(\mathbb{R}^n)$, снабженное нормой сопряженного пространства. При этом

действие функционала $F \in \left(\dot{W}_{p;\beta}^r(\mathbb{R}^n)\right)'$ на функцию $v \in \dot{W}_{p;\beta}^r(\mathbb{R}^n)$ обозначим через

$\langle F, v \rangle$.

Отметим некоторые свойства этого пространства в виде следующей теоремы.

Теорема 1. 1) Если $n/p - \beta \notin \{1, 2, \dots, r\}$, то справедливо неравенство

$$\left\{ \int d^{p\beta + pr - p|k|}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq M_0 \|u; W_{p;\beta}^r(\mathbb{R}^n)\| \quad (2)$$

для всех $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2) если $\beta \geq n/2 - 1$, то множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в пространстве $W_{2;\beta}^r(\mathbb{R}^n)$,

то есть $W_{2;\beta}^r(\mathbb{R}^n) = \dot{W}_{2;\beta}^r(\mathbb{R}^n)$;

3) если же $\beta < n/2 - 1$, то пространство $W_{2,\beta}^r(\mathbb{R}^n)$ разлагается в сумму

$$W_{2,\beta}^r(\mathbb{R}^n) = \mathring{W}_{2,\beta}^r(\mathbb{R}^n) + \mathcal{P}_{r-1, [r+\beta-n/2]}(\mathbb{R}^n), \quad (3)$$

где $\mathcal{P}_{r-1, [r+\beta-n/2]}(\mathbb{R}^n)$ – конечномерное пространство многочленов, точная степень которых лежит между числами $[r + \beta - n/2]$ и $(r-1)$. Здесь $[\delta]$ – целая часть числа δ .

2. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u](x) = \sum_{|k| \leq 2r} a_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (4)$$

Вводим, связанную с этим оператором, полуторалинейную форму

$$B[u, v] = \int_{\mathbb{R}^n} L[u](x) \overline{v(x)} dx, \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

и представим ее в виде

$$B[u, v] = B_1[u, v] + B_2[u, v], \quad (5)$$

где

$$B_1[u, v] = \sum_{|k| \leq r} \int a_k(x) u^{(k)}(x) \overline{v(x)} dx,$$

$$B_2[u, v] = \sum_{r+1 \leq |k| \leq 2r} \int a_k(x) u^{(k)}(x) \overline{v(x)} dx.$$

Пусть коэффициенты $a_k(x)$, $|k| \leq r$, удовлетворяют условию

$$|a_k(x)| \leq M_1 d^{2\beta+2r-|k|}(x).$$

Тогда, используя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} |B_1[u, v]| &\leq M_1 \sum_{|k| \leq r} \int_{\mathbb{R}^n} d^{2\beta+2r-|k|}(x) |u^{(k)}(x)| |v(x)| dx \leq \\ &\leq M_1 \sum_{|k| \leq r} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} d^{2\beta+2r-2|k|}(x) |u^{(k)}(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \times \\ &\quad \times \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} d^{2\beta+2r} |v(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq M_2 \|u; W_{2,\beta}^r(\mathbb{R}^n)\| \|v; W_{2,\beta}^r(\mathbb{R}^n)\|. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь мы также воспользовались неравенством (2).

Далее предположим, что коэффициенты $a_k(x), r+1 \leq k \leq 2r$, оператора (4) имеют производные до порядка $|k| - r$ включительно и удовлетворяют условию

$$|a_{k+l+l''}^{(l')} (x)| \leq M_2 d^{2\beta+r-l''}. \quad (8)$$

Интегрируя по частям, представим форму $B_2[u, v], u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, в виде

$$\begin{aligned} B_2[u, v] &= \sum_{|k|=r, 1 \leq |l| \leq r} (-1)^{|l|} \int_{\mathbb{R}^n} u^{(k)}(x) \overline{\left(a_{k+l}(x) v(x) \right)^{(l)}} dx = \\ &= \sum_{|k|=r, 1 \leq |l'|+|l''| \leq r} (-1)^{|l'|+|l''|} C_{l', l''} \int_{\mathbb{R}^n} u^{(k)}(x) \overline{\left(a_{k+l'+l''}(x) \right)^{(l')}} \left(v(x) \right)^{(l'')} dx. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условия (8) следует, что

$$|B_2[u, v]| \leq \sum_{|k|=r, 1 \leq |l'|+|l''| \leq r} \int_{\mathbb{R}^n} d^{2\beta+r-l''}(x) |u^{(k)}(x)| |v^{(l'')} (x)| dx.$$

Далее, используя неравенство Коши-Буняковского и неравенство (2), имеем

$$\begin{aligned} |B_2[u, v]| &\leq \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\mathbb{R}^n} d^{2\beta}(x) |u^{(k)}(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \times \\ &\times \left\{ \sum_{1 \leq |l| \leq r} \int_{\mathbb{R}^n} d^{2\beta+2r-2|l|}(x) |v^{(l)}(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq M_2 \|u; W_{2, \beta}^r(\mathbb{R}^n)\| \|v; W_{2, \beta}^r(\mathbb{R}^n)\|. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу равенства (5) из (7), (9) следует

$$|B[u, v]| \leq M_6 \|u; W_{2, \beta}^r(\mathbb{R}^n)\| \|v; W_{2, \beta}^r(\mathbb{R}^n)\|$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Это неравенство позволяет нам изучить разрешимость следующей вариационной задачи Дирихле для оператора (4).

Задача D_0 . Для заданного функционала $F \in \left(\dot{W}_{2, \beta}^r(\mathbb{R}^n) \right)'$ требуется найти

функцию $U \in \dot{W}_{2, \beta}^r(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую уравнению

$$B[U, w] = \langle F, w \rangle \quad \forall w \in \dot{W}_{2, \beta}^r(\mathbb{R}^n). \quad (10)$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 2. Пусть $n/2 - \beta \notin \{1, 2, \dots, r\}$, выполнены условия (6), (8) и пусть существует положительное число \varkappa , такое, что

$$\operatorname{Re} B[u, u] \geq \varkappa \|u; W_{2;\beta}^r(\mathbb{R}^n)\|^2$$

для всех $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\dot{W}_{2;\beta}^r(\mathbb{R}^n)\right)'$ вариационная задача

Дирихле (10) имеет единственное решение и при этом выполняется неравенство

$$\|U; W_{2;\beta}^r(\mathbb{R}^n)\| \leq C_0 \|F; (W_{2;\beta}^r(\mathbb{R}^n))\|,$$

где число $C_0 > 0$ не зависит от выбора функционала F .

Далее рассмотрим задачу о нахождении решений дифференциального уравнения с оператором (4), стабилизирующихся к заданному многочлену на бесконечности.

Задача D_1 . Для заданного функционала $F \in \left(\dot{W}_{2;\beta}^r(\mathbb{R}^n)\right)'$ и заданного многочлена $P(x)$ степени $\rho \in [0, r-1]$ требуется найти решение $V \in W_{2;\beta}^r(\mathbb{R}^n)$ уравнения

$$B[V, w] = \langle F, w \rangle \quad \forall w \in \dot{W}_{2;\beta}^r(\mathbb{R}^n), \quad (11)$$

удовлетворяющее условию

$$V(x) - P(x) \in \dot{W}_{2;\beta}^r(\mathbb{R}^n). \quad (12)$$

Согласно теореме 1, задача D_1 имеет смысл при условии $\beta < n/2 - 1$, то есть выполняется разложение (3).

Доказана следующая теорема:

Теорема 3. Пусть $\beta < n/2 - 1$, и выполнены условия теоремы 2. Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\dot{W}_{2;\beta}^r(\mathbb{R}^n)\right)'$ и заданного многочлена P вариационная задача Дирихле (11), (12) имеет единственное решение.

Отметим, что функция $V(x)$, удовлетворяющая условию (12), называется стабилизирующейся к многочлену $P(x)$ на бесконечности. Стабилизационные задачи для

обыкновенных дифференциальных уравнений в общей постановке изучены в работе Л.Д.Кудрявцева [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М, Лирозкин П.И, Мирошин Н.В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. – Известия вузов. Математика, 1988, №8, с. 4-30.
2. Мирошин Н.В. Внешняя задача Дирихле для вырождающегося эллиптического оператора. – Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1979, т. 150, с. 198-211.
3. Мирошин Н.В. Спектральные внешние задачи для вырождающегося эллиптического оператора. – Известия вузов. Математика, 1988, №8, с. 47-55.
4. Мирошин Н.В. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением. – Труды Математического института РАН, 1992, т. 194, с. 179-195.
5. Исохов С.А., Рахмонов Б.А. О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле во всем пространстве, связанной с некоэрцитивной формой. – Уфимский математический журнал, 2020, т.12, №1, с. 13-29.
6. Исохов С.А., Кужмуратов А.Я. О вариационной задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов. – Доклады Академии наук (Россия), 2005, т. 403, №2, с. 165-168.
7. Исохов С.А., Куджмуродов А.Ё., Султонзода М. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2021, т. 64, №9-10, с. 524-529.
8. Исохов С.А., Хакназаров К.Э. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида в ограниченной области. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2020, т. 63, №5-6, с. 308-314.
9. Исохов С.А., Хакназаров К.Э. Вариационная задача Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида. – Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2021, т. 64, №7-8, с. 393-400.
10. Кудрявцев Л.Д. Теоремы вложения для классов функций, определенных на неограниченных областях. – ДАН СССР, 1963, т. 153, с. 530-532.
11. Кудрявцев Л.Д. Стабилизационные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Дифференциальные уравнения, 1993, т. 29, №12, с. 2056-2078.

М.СУЛТОНЗОДА

ОИД БА ҲАЛШАВАНДАГИИ МАСЪАЛАИ ВАРИАЦИОНИИ ДИРИХЛЕ БАРОИ ОПЕРАТОРҲОИ ЭЛЛИПТИКИИ НАМУДИ ҒАЙРИДИВЕРГЕНТӢ ДАР ФАЗОИ КУДРЯВТСЕВ

Донишкадаи педагогии Тоҷикистон дар ш. Панҷакент

Дар мақола ҳалшавандагии яққимматаи масъалаи вариационии Дирихле барои операторҳои эллиптикии шакли ғайридивергентӣ дар тамоми фазои Евклидӣ бо таназзулбеии дараҷагӣ дар беохирӣ омӯхта шудааст. Ҳалли масъала дар фазои вазндори Л.Д.Кудрявтсев чуствуҷу карда мешавад. Инчунин масъалаи дарёфти ҳалли муодилаи

дифференсиалии омӯхташавандаро, ки ба бисёраъзогии додашуда дар беохирӣ устувор мешавад, баррасӣ карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: оператори эллиптикӣ, намуди ғайридивергентӣ, таназзулҳои дараҷагӣ, фазои Кудрявтсев, устуворшавӣ ба бисёраъзогӣ.

M.SULTONZODA

**ON SOLVABILITY OF VARIATIONAL DIRICHLET PROBLEM
FOR NON-DIVERGENT FORM ELLIPTIC OPERATORS
IN THE KUDRYAVTSEV SPACE**

Tajik pedagogical institute in Penjikent

In this paper, we study the unique solvability of the variational Dirichlet problem for non-divergence form elliptic operators in the whole Euclidean space with power degeneration at infinity. The solution of the problem is sought in the L.D.Kudryavtsev weighted space. We also consider the problem of finding solutions to the differential equation under study that stabilize to a given polynomial at infinity.

Key words: elliptic operator, non-divergent form, power degeneration, Kudryavtsev space, stabilization to polynomial.

УДК 523. 532

Г.И.КОХИРОВА, А.М.БУРИЕВ, С.Н.САФАРОВ, А.А.САТТОРЗОДА

**ДИНАМИКА ПОТЕНЦИАЛЬНО ОПАСНОГО АСТЕРОИДА 2009 ХО ПО
НАБЛЮДЕНИЯМ В ГИССАРСКОЙ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТО-
РИИ**

Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана

Поступила в редакцию 25.04.2022 г.

В работе представлены результаты астрометрической обработки оптических наблюдений потенциально опасного астероида (438908) 2009 ХО, проведенных в период его сближения с Землей в мае 2020 г. в Гиссарской астрономической обсерватории Института астрофизики НАНТ. Определены координаты, видимая траектория и вычислена орбита астероида. Показано, что точность астрометрических измерений не превышает 0.06" и 0.09" по прямому восхождению и склонению объекта, соответственно. Новые результаты хорошо согласуются с имеющимися динамическими данными. Показано, что в период сближения с Землей орбита астероида оставалась стабильной, следовательно, это сближение не представляло реальной опасности для Земли.

Ключевые слова: астероид, наблюдения, астрометрия, координаты, точность, траектория, орбита.

Введение

К настоящему моменту общее число открытых астероидов, сближающихся с Землей (АСЗ), составляет почти 29 тысяч, из них размером свыше 140 м – чуть больше 10 тысяч, свыше одного км – 881 [1]. Среди АСЗ имеются потенциально опасные астероиды (ПОА). К ним относят все астероиды, орбиты которых в настоящую эпоху сближаются с орбитой Земли до расстояний, меньших или равных 0.05 а.е. (около 7.5 млн. км), и абсолютная звездная величина которых не превышает 22^m. Ограничение по абсолютной звездной величине связано с тем, что при принятом значении альбедо 0.14 тела с абсолютной звездной величиной, превосходящей 22^m, имеют размеры менее 140 м. Столкно-

Адрес для корреспонденции: Кохирова Гулчехра Исроиловна, Буриев Анварджон Махмадалиевич. 736063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/5, Институт астрофизики НАНТ.
E-mail: kokhirova2004@mail.ru, anvar10@mail.ru

вление таких тел с Землей в худшем случае способно вызвать лишь локальную катастрофу. ПОА составляют примерно пятую часть всех АСЗ. На текущий момент открыто 2413 ПОА, среди которых 156 объекта имеют размеры порядка одного км и выше [1]. Одним из самых известных ПОА является астероид (99942) Апофиз, тесное сближение которого с Землей на расстоянии 0.00025 а.е. ожидается 13 апреля 2029 г. [1]. Группа ПОА потенциально может воздействовать на Землю, поэтому их траектории являются объектом пристального внимания наблюдателей и теоретиков и аккуратного отслеживания изменения их орбит в настоящем и будущем. Характеристики их размеров, состава и структуры также являются весьма важными научными целями для астрономов. В этой связи наблюдения и определение динамических и физических свойств каждого отдельного ПОА, особенно в периоды сближений с Землей, являются одной из актуальнейших задач современной астрономии.

Потенциально опасный астероид 2009 ХО

Новый астероид, сближающийся с Землей, был открыт 9 декабря 2009 г. в обсерватории Ла-Сагра в Испании и получил наименование (438908) 2009 ХО [1]. Астероид перемещается в межпланетном пространстве со скоростью свыше 21.8 км/с и период его обращения составляет 2.5 года. Абсолютный блеск астероида 2009 ХО равен $H=20.65$ звездных величин [1]. О размере астероида в имеющихся базах данных достоверных сведений не имеется. В работе [2] с использованием H и предполагая, что оптическое альбедо равно 20%, диаметр астероида оценен как 0.24 км. Минимальное межорбитальное расстояние астероида с Землей $MOID = 0.001833$ а.е. [1], следовательно, астероид может сближаться с Землей до расстояний порядка 275 тысяч км, что меньше порогового значения $MOID = 0.005$ а.е., принятого для классификации астероидов как потенциально опасных для Земли. С учетом этого, а также размера, превышающего пороговый лимит 140 м, астероид был включен в группу потенциально опасных астероидов (ПОА) [1].

Элементы орбиты ПОА 2009 ХО, принадлежащего группе Аполлона, приведены в табл. 1, где a – большая полуось, e – эксцентриситет, q , Q – перигелийное и афелийное расстояния, i – наклонение орбиты, ω – аргумент перигелия, Ω – долгота восходящего узла, T_j – критерий Тиссерана [1]. Астероид перемещается по низко наклоненной к эклиптике орбите, угол наклона составляет всего лишь 0.46 град., с малым перигелийным расстоянием 0.34 а.е., согласно значению критерия Тиссерана $T_j > 3.1$ [3] его орбита классифицируется как астероидная.

Таблица 1

Элементы орбиты астероида 2009 ХО

Объект	a , а.е.	e	q , а.е.	Q , а.е.	i , град.	ω , град.	Ω , град.	T_j
2009 ХО	1.858	0.544	0.848	2.869	0.349	140.611	27.875	3.80

Согласно динамическим расчетам, в период 2000-2091 гг. астероид приближался и сближился с Землей на различных расстояниях 11 раз [1]. 4 апреля 2020 г. астероид прошел перигелий своей орбиты и чуть позже в мае произошел очередной близкий подход

астероида к Земле. В ночь с 7 мая на 8 мая астероид пролетел мимо Земли на расстоянии менее 0.022 а.е. (3.3 млн. км). Отметим, что следующее сближение астероида с Землей на расстоянии 0.44 а.е. (66 млн. км) произойдет 4 июня 2025 г. [1].

Наблюдения, обработка, результаты

На телескопе АЗТ-8 Гиссарской астрономической обсерватории (ГисАО) ИА НАНТ с 20 по 23 мая 2020 г. выполнены наблюдения астероида 2009 ХО и получено несколько сотен его изображений. Телескоп имеет светосилу $D/F=700$ мм/2820 мм и снабжен ПЗС камерой CCD FLI ProLine PL09000 с полем зрения FOV 44'x44' и масштабом изображений 1.75 arcsec/pixel. Использовались стандартные широкополосные фильтры BVRI системы Джонсона-Козинса. Для уменьшения уровня шумов ПЗС камеры аппаратура была охлаждена до температуры -20°C .

С 20 по 23 мая 2020 г. в ГисАО получено 1089 снимков в фильтре R, 30 снимков в фильтрах BVI. Журнал наблюдений и геометрические аспекты астероида приведены в табл. 2, изображение астероида 2009 ХО, полученное во время наблюдений, показано на рис. 1.

Таблица 2

Журнал наблюдений астероида 2009 ХО в ГисАО

Дата	r , а.е.	Δ , а.е.	ph , град.	N x Фильтр	t , с
				ГисАО	
20.05.2020	1.113	0.102	7.684	370xR	5-60
21.05.2020	1.122	0.110	7.680	313xR	5-10
22.05.2020	1.128	0.117	7.776	10xB, 10xV, 258xR, 10xI	5-60
23.05.2020	1.136	0.125	7.950	148xR	5-30



Рис. 1. Астероид 2009 ХО, 21 мая 2020 г., АЗТ-8 ГисАО, экспозиция 50 сек.

Первичная обработка кадров выполнена по стандартной процедуре, учитывающей темновой сигнал, выравнивание полей изображений, ошибки матрицы ПЗС-камеры. За весь период наблюдений получено 1119 кадров с экспозициями 5-60 сек. Для измерений изображений астероида и звезд поля использовалась апертура фиксированного радиуса, которая позволила охватить объект полностью.

Астрометрическая обработка наблюдений была выполнена с помощью программного пакета (ПП) АПЕКС-II [4]. В качестве опорного использован астрометрический каталог UCAC5, в котором астрометрическая точность координат звезд не превышает 0.05". При измерениях использована апертура радиусом 4.5", проекция которой на небесную сферу соответствует ~585.91 км. Экваториальные координаты 2009 ХО - прямое восхождение α и склонение δ , найденные в результате астрометрических измерений кадров, приведены в табл. 3.

Таблица 3

Экваториальные координаты и видимые звездные величины в разных фильтрах ПОА 2009 ХО по наблюдениям в ГисАО

№	Дата, 2020	Момент наблюдений (UT)	α	δ	m (зв.вел.)
1	20 мая	17 ^h 54 ^m 43 ^s .77	15 ^h 14 ^m 46 ^s .73	-20 ^o 09'15".2	16.3
2	20 мая	17 55 26.97	15 14 46.84	-20 09 16.0	16.0
3	20 мая	17 56 10.17	15 14 46.92	-20 09 16.2	16.2
4	20 мая	17 56 54.24	15 14 47.11	-20 09 16.5	16.0
5	20 мая	17 58 20.64	15 14 47.32	-20 09 17.2	16.4
6	20 мая	17 59 03.84	15 14 47.40	-20 09 17.2	16.3
7	20 мая	18 30 08.35	15 14 51.96	-20 09 30.9	16.3
8	20 мая	18 30 51.55	15 14 52.03	-20 09 31.1	16.2
9	20 мая	18 32 18.81	15 14 52.25	-20 09 32.0	16.1
10	20 мая	18 33 02.01	15 14 52.35	-20 09 32.2	15.9
11	20 мая	18 33 45.216	15 14 52.47	-20 09 32.7	16.0
12	20 мая	19 50 11.328	15 15 03.54	-20 10 03.2	16.3
13	20 мая	19 50 54.528	15 15 03.65	-20 10 03.5	15.7
14	20 мая	19 51 37.728	15 15 03.76	-20 10 03.6	15.6
15	20 мая	20 22 38.784	15 15 08.29	-20 10 15.5	15.6
16	20 мая	20 23 21.984	15 15 08.36	-20 10 15.8	15.7
17	20 мая	20 24 05.184	15 15 08.50	-20 10 16.0	16.3
18	20 мая	20 24 48.384	15 15 08.55	-20 10 15.9	15.9
19	20 мая	20 25 30.720	15 15 08.66	-20 10 16.4	16.1
20	20 мая	20 26 13.920	15 15 08.77	-20 10 16.7	16.2
21	20 мая	20 57 57.312	15 15 13.45	-20 10 27.8	16.0
22	20 мая	20 58 40.512	15 15 13.55	-20 10 28.6	17.7
23	20 мая	20 59 23.712	15 15 13.63	-20 10 29.1	16.5
24	20 мая	21 00 06.912	15 15 13.70	-20 10 29.0	16.5
25	20 мая	21 00 05.012	15 15 13.85	-20 10 29.0	16.7
26	20 мая	21 01 09.332	15 15 13.96	-20 10 29.2	15.8
27	20 мая	21 02 13.651	15 15 14.07	-20 10 29.7	16.0
28	21 мая	16 36 33.984	15 18 22.14	-20 18 00.1	16.3
29	21 мая	16 37 26.688	15 18 22.16	-20 18 01.2	16.8
30	21 мая	16 38 20.256	15 18 22.37	-20 18 00.4	17.2
31	21 мая	16 39 13.824	15 18 22.50	-20 18 00.6	16.0

№	Дата, 2020	Момент наблюдений (UT)	α	δ	m (зв.вел.)
32	21 мая	16 40 07.392	15 18 22.53	-20 18 01.5	15.9
33	21 мая	17 04 28.742	15 18 25.79	-20 18 11.8	15.6
34	21 мая	17 05 34.099	15 18 25.82	-20 18 11.4	16.4
35	21 мая	17 06 39.456	15 18 25.97	-20 18 12.6	15.9
36	21 мая	17 07 44.726	15 18 26.11	-20 18 13.0	16.6
37	21 мая	17 08 50.083	15 18 26.19	-20 18 13.3	16.5
38	21 мая	17 09 55.440	15 18 26.27	-20 18 13.5	15.9
39	21 мая	17 10 07.968	15 18 26.47	-20 18 13.6	15.4
40	21 мая	17 11 01.536	15 18 26.55	-20 18 13.8	16.1
41	21 мая	17 11 54.240	15 18 26.68	-20 18 14.0	16.1
42	21 мая	17 14 34.944	15 18 26.98	-20 18 15.4	16.2
43	21 мая	17 15 28.512	15 18 27.14	-20 18 15.7	16.0
44	21 мая	17 16 22.080	15 18 27.24	-20 18 16.3	16.0
45	21 мая	17 17 15.648	15 18 27.33	-20 18 16.7	15.7
46	21 мая	17 18 09.216	15 18 27.49	-20 18 16.7	15.8
47	21 мая	17 19 01.920	15 18 27.59	-20 18 16.9	16.0
48	21 мая	17 19 55.488	15 18 27.69	-20 18 17.3	16.0
49	21 мая	17 20 49.056	15 18 27.78	-20 18 18.1	16.1
50	21 мая	17 21 42.624	15 18 27.95	-20 18 18.1	15.7
51	21 мая	17 24 23.328	15 18 28.27	-20 18 19.3	16.4
52	21 мая	17 25 16.896	15 18 28.36	-20 18 19.4	16.2
53	21 мая	17 26 10.464	15 18 28.45	-20 18 19.7	15.6
54	21 мая	17 28 50.304	15 18 28.83	-20 18 21.5	15.6
55	21 мая	17 29 43.872	15 18 28.94	-20 18 21.4	15.6
56	21 мая	17 30 37.440	15 18 29.02	-20 18 21.6	16.0
57	21 мая	17 34 10.848	15 18 29.49	-20 18 23.1	16.0
58	21 мая	17 35 04.416	15 18 29.61	-20 18 23.3	16.1
59	21 мая	17 35 57.984	15 18 29.74	-20 18 23.8	15.6
60	21 мая	17 36 51.552	15 18 29.82	-20 18 24.3	16.0
61	21 мая	17 37 45.120	15 18 29.98	-20 18 24.4	16.0
62	21 мая	17 38 38.688	15 18 30.11	-20 18 24.7	16.2
63	21 мая	17 39 32.256	15 18 30.23	-20 18 25.2	16.1
64	21 мая	17 44 00.096	15 18 30.76	-20 18 26.9	16.0
65	21 мая	17 44 52.800	15 18 30.90	-20 18 27.5	15.6
66	21 мая	17 45 46.368	15 18 31.02	-20 18 27.7	15.8
67	21 мая	17 46 39.936	15 18 31.12	-20 18 27.7	16.0
68	21 мая	17 48 27.072	15 18 31.35	-20 18 28.5	16.0
69	21 мая	17 49 20.640	15 18 31.48	-20 18 29.0	15.8
70	21 мая	17 50 13.344	15 18 31.56	-20 18 29.4	16.1
71	21 мая	17 53 47.616	15 18 32.02	-20 18 30.4	15.6
72	21 мая	17 54 40.320	15 18 32.13	-20 18 30.9	15.9
73	21 мая	17 55 33.888	15 18 32.26	-20 18 31.3	16.0
74	21 мая	17 56 27.456	15 18 32.34	-20 18 31.7	16.1
75	21 мая	17 57 20.160	15 18 32.48	-20 18 31.9	15.9
76	21 мая	17 58 13.728	15 18 32.58	-20 18 32.3	16.0
77	21 мая	17 59 07.296	15 18 32.71	-20 18 32.5	15.9
78	21 мая	18 00 08.640	15 18 32.84	-20 18 32.8	16.2
79	21 мая	18 03 34.272	15 18 33.28	-20 18 34.1	16.0
80	21 мая	18 04 26.976	15 18 33.37	-20 18 34.7	15.9
81	21 мая	18 05 20.544	15 18 33.46	-20 18 35.1	15.9
82	21 мая	18 06 14.112	15 18 33.61	-20 18 35.5	15.8
83	21 мая	18 07 07.680	15 18 33.73	-20 18 35.6	15.6

№	Дата, 2020	Момент наблюдений (UT)	α	δ	m (зв.вел.)
84	21 мая	18 08 38.400	15 18 33.81	-20 18 35.9	15.9
85	21 мая	18 08 53.952	15 18 33.97	-20 18 36.3	15.8
86	21 мая	18 09 47.520	15 18 34.04	-20 18 36.3	15.8
87	22 мая	16 43 45.120	15 21 42.01	-20 25 56.1	15.6
88	22 мая	16 45 41.760	15 21 42.21	-20 25 57.0	15.8
89	22 мая	16 46 40.512	15 21 42.34	-20 25 56.7	16.4
90	22 мая	16 54 28.800	15 21 43.30	-20 25 59.5	16.3
91	22 мая	16 55 27.552	15 21 43.38	-20 26 00.3	16.8
92	22 мая	16 57 24.192	15 21 43.59	-20 26 01.4	16.2
93	22 мая	16 58 22.080	15 21 43.69	-20 26 01.6	16.6
94	22 мая	16 59 20.832	15 21 43.79	-20 26 01.2	16.5
95	22 мая	17 08 61.440	15 21 44.84	-20 26 04.9	16.5
96	22 мая	17 13 56.064	15 21 45.46	-20 26 06.2	16.3
97	22 мая	17 14 54.816	15 21 45.53	-20 26 06.5	16.3
98	22 мая	17 16 52.320	15 21 45.75	-20 26 07.4	16.3
99	22 мая	17 17 50.208	15 21 45.87	-20 26 07.5	16.2
100	22 мая	17 18 48.960	15 21 46.03	-20 26 07.8	16.5
101	22 мая	17 22 43.104	15 21 46.37	-20 26 09.5	16.5
102	22 мая	17 26 37.248	15 21 46.84	-20 26 10.5	16.0
103	22 мая	17 27 35.136	15 21 46.92	-20 26 11.7	16.4
104	22 мая	17 32 28.032	15 21 47.49	-20 26 12.4	16.8
105	22 мая	17 33 26.784	15 21 47.62	-20 26 12.7	16.5
106	22 мая	17 34 24.672	15 21 47.75	-20 26 12.9	16.7
107	22 мая	17 35 23.424	15 21 47.81	-20 26 13.5	16.3
108	22 мая	17 36 21.312	15 21 47.93	-20 26 13.5	16.1
109	22 мая	17 37 20.064	15 21 48.03	-20 26 14.9	16.2
110	22 мая	17 42 12.096	15 21 48.59	-20 26 15.7	16.4
111	22 мая	17 43 09.984	15 21 48.70	-20 26 16.0	16.0
112	22 мая	17 44 07.872	15 21 48.82	-20 26 16.3	16.1
113	22 мая	17 45 06.624	15 21 48.95	-20 26 16.8	16.2
114	22 мая	17 46 05.376	15 21 49.00	-20 26 16.9	15.8
115	22 мая	17 47 04.128	15 21 49.14	-20 26 17.6	16.0
116	22 мая	17 48 02.016	15 21 49.28	-20 26 17.5	16.1
117	22 мая	17 51 56.160	15 21 49.69	-20 26 18.7	16.6
118	22 мая	17 52 54.048	15 21 49.79	-20 26 19.1	16.7
119	22 мая	17 53 52.800	15 21 49.91	-20 26 19.5	16.6
120	22 мая	17 54 50.688	15 21 50.00	-20 26 20.1	16.1
121	22 мая	17 55 49.440	15 21 50.10	-20 26 20.0	16.2
122	22 мая	17 56 47.328	15 21 50.21	-20 26 20.7	16.0
123	23 мая	20 34 48.000	15 25 00.72	-20 33 39.4	16.3
124	23 мая	20 35 51.936	15 25 00.80	-20 33 39.4	16.8
125	23 мая	20 39 01.152	15 25 01.14	-20 33 40.0	16.5
126	23 мая	20 41 08.160	15 25 01.31	-20 33 40.9	16.6
127	23 мая	20 42 12.096	15 25 01.38	-20 33 40.4	16.7
128	23 мая	20 44 18.240	15 25 01.62	-20 33 41.3	16.6
129	23 мая	20 46 25.248	15 25 01.78	-20 33 40.7	16.1
130	23 мая	20 49 35.328	15 25 02.11	-20 33 41.7	16.2
131	23 мая	20 51 42.336	15 25 02.32	-20 33 43.1	16.0
132	23 мая	20 54 52.416	15 25 02.61	-20 33 41.7	16.3
134	23 мая	20 55 55.488	15 25 02.80	-20 33 42.0	16.8
135	23 мая	20 56 58.560	15 25 02.84	-20 33 43.1	16.5
136	23 мая	20 58 01.632	15 25 03.00	-20 33 42.1	16.6

№	Дата, 2020	Момент наблюдений (UT)	α	δ	m (зв.вел.)
137	23 мая	21 01 11.712	15 25 03.23	-20 33 44.3	16.5
138	23 мая	21 07 31.872	15 25 03.92	-20 33 46.4	16.6
139	23 мая	21 13 52.032	15 25 04.50	-20 33 47.3	16.7

В табл. 4. представлены средние значения отклонений $(O-C)_\alpha$ и $(O-C)_\delta$ для координат α и δ , соответственно, а также их средние квадратичные ошибки σ_α и σ_δ по наблюдениям в ГисАО. Как видно, средняя по всем кадрам ошибка астрометрической редукции не превышает 0.063" и 0.093" для прямого восхождения α и склонения δ , соответственно. Видимая траектория астероида по наблюдениям в ГисАО приведена на рис. 2, где по оси абсцисс дано прямое восхождение α и по оси ординат – склонение δ . На этом графике (рис. 2) слева для сравнения приведена траектория объекта, построенная по координатам из других наблюдений [5].

Таблица 4

Средние разности $(O-C)$ и их стандартные отклонения для астероида 2009 ХО по наблюдениям в ГисАО

Дата	$(O-C)_\alpha$ "	σ_α "	$(O-C)_\delta$ "	σ_δ "
20.05.2020	-0.148	0.033	0.294	0.052
21.05.2020	-0.171	0.050	0.288	0.030
22.05.2020	-0.157	0.063	0.233	0.050
23.05.2020	-0.177	0.020	0.291	0.093

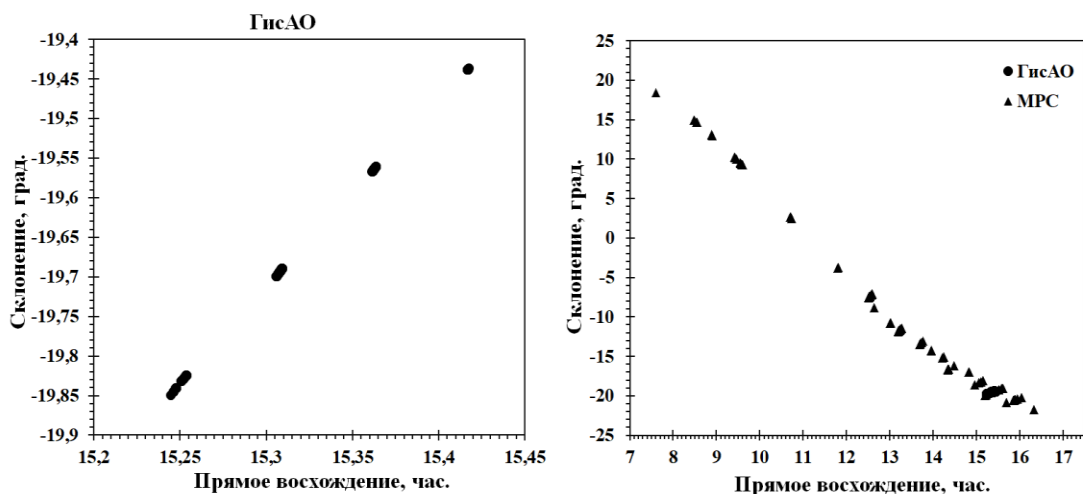


Рис. 2. Видимая траектория ПОА 2009 ХО по наблюдениям в ГисАО и данным других наблюдений в 2020 г.

Для среднего момента наблюдений с использованием 150 измерений и ПП ЭПОС [6] вычислена орбита астероида, приведенная в табл. 5. Здесь даны стандартные элементы орбиты в равноденствии 2000.0, а также n – среднее суточное движение, σ – средняя квадратичная ошибка. Для сравнения в табл. 5 приведена орбита, вычисленная на основе

693 измеренных положений астероида по наблюдениям в различных обсерваториях согласно базе данных MPC [7], и в последнем столбце приведены величины разности между вычисленной нами орбитой и орбитой MPC, обозначенные как χ . Как видно, с учетом разности моментов времени, на которые вычислена орбита, по наблюдениям в ГисАО получена орбита, близкая к орбите MPC.

Таблица 5

Сравнение орбиты астероида 2009 XO, полученной по наблюдениям обсерватории ГисАО, и орбиты MPC (J2000.0)

Элементы орбиты	ГисАО [данная работа]	[7]	χ
Кол-во положений, использованное для вычисления орбиты	150	693	-
T	JD 2458934.940	JD 2459864.467	-
$Эпоха$	2458992.5	2459600.5	-
e	0.543617±0.000021	0.543616	1E-06
a , а.е.	1.858433±0.000735	1.8584107	2.23E-05
q , а.е.	0.884805±0.000466	0.8848115	-6.5E-06
i , град.	0.349307± 0.000110	0.349631	-0.000324
ω , град.	140.610518±0.000240	140.610538	-2E-05
Ω , град.	27.874628± 0.000170	27.874694	-6.6E-05
n , град./сут.	0.389035±0.000249	0.389036	-1E-06
σ	0".370	0".320	-

Заключение

В результате наблюдений потенциально опасного астероида 2009 XO, выполненных в Гиссарской астрономической обсерватории ИА НАНТ в период его сближения с Землей в мае 2020 г.:

- определены положения объекта, построена видимая траектория;
- средняя по всем кадрам ошибка астрометрической редукации не превышает 0.063" и 0.093" для прямого восхождения α и склонения δ , соответственно, что является показателем высокой точности измерений;
- вычислена орбита астероида в период сближения с Землей, которая имеет минимальные отклонения от орбиты базы данных MPC [5].

Динамические данные, полученные на основе новых наблюдений, указывают, что сближение астероида с Землей не привело к их значительным изменениям. Орбита сохранила свою стабильность, и это сближение не представляло реальной опасности для Земли. Поскольку астероид 2009 XO еще не раз сблизится с Землей, необходимы дальнейшие наблюдения с целью контроля его динамических характеристик.

Результаты наблюдений в ГисАО находятся в хорошем соответствии с данными других наблюдений из базы Международного центра малых планет.

ЛИТЕРАТУРА

1. CNEOS (Center of Near Earth Object Studies), <https://cneos.jpl.nasa.gov>, 2022.
2. Taylor et al. Arecibo Radar Observations of 14 High-Priority Near-Earth Asteroids in CY2020 and January 2021, <https://www.naic.edu/~pradar/Taylor-R3037-HighPriority-2020.pdf>, 2022.
3. Kresak L. The discrimination between cometary and asteroidal meteors. I. The orbital criteria. – Bull. Astron. Czech, 1969, v. 20, № 4, pp.177-188.
4. Девяткин А.В., Горшанов Д.Л., Куприянов В.В., Верещагина И.А. Программные пакеты «АПЕКС-I» и «АПЕКС-II» для обработки астрономических ПЗС-наблюдений. – Астрон. Вестник, 2010, № 1, с. 74-87.
5. The International Astronomical Union. – Minor Planet Center, https://minorplanetcenter.net/db_search/show_object/438908, 2022.
6. Львов В.Н., Цекмейстер С.Д. Использование программного пакета ЭПОС для исследования объектов Солнечной системы. – Астрон. Вестник, 2012, т. 46, № 2, с. 190-192.
7. MPEC2021-Y76. <https://www.minorplanetcenter.net>, 2022.

Г.И.ҚОҶИРОВА, А.М.БУРИЕВ, С.Н.САФАРОВ, А.А.САТТОРЗОДА

ДИНАМИКА И АСТЕРОИДЫ ЭХТИМОЛАН ХАТАРНОКИ 2009 ХО АЗ РЎИ МУШОҶИДАҶОИ РАСАДХОНАИ АСТРОНОМИИ ҲИСОР

Институти астрофизикаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола натиҷаҳои коркарди астрометрии мушоҳидаҳои оптикӣ астероиди эхтимолан хатарноки (438908) 2009 ХО, ки дар Расадхонаи астрономии Ҳисори Институти астрофизикаи АМИТ дар моҳи майи соли 2020 гузаронида шудааст, оварда шудааст. Координатҳо, траекторияи намоён ва мадори астероид ҳисоб карда шуд. Нишон дода шудааст, ки саҳеҳии коркарди астрометрии тули гиреҳи фароз нисбат ба моилии астероид аз 0.06" ва 0.09" зиёд нест. Натиҷаҳои гирифта шуда бо маълумотҳои динамикӣ мувофиқати хуб доранд. Нишон дода шудааст, ки новобаста ба наздикшавӣ, мадори астероид устувор аст, ва наздикшавии астероид ба Замин боиси тағироти назаррас дар мадор нагардидаас, дар оянда ба Замин хавфи воқеъи надорад.

Калимаҳои калидӣ: астероид, мушоҳидаҳо, астрометрия, координатҳо, дақиқӣ, траектория, мадор.

G.I.KOKHIROVA, A.M.BURIEV, S.N.SAFAROV, A.A.SATTORZODA

**DYNAMICS OF POTENTIALLY HAZARDOUS ASTEROID 2009 XO FROM
OBSERVATIONS AT THE HISSAR ASTRONOMICAL OBSERVATORY**

Institute of Astrophysics of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The paper presents the results of astrometric processing of optical observations of potentially hazardous asteroid (438908) 2009 XO, carried out during its approach to the Earth in May 2020 at the Hissar Astronomical Observatory of the IA NAST. The coordinates and apparent trajectory were determined, and the orbit of the asteroid was calculated. It is shown that the accuracy of astrometric measurements does not exceed 0.06" and 0.09" in right ascension and declination of the object, respectively. New results are in good agreement with accessible dynamical data. It is shown that the asteroid orbit was stable during the period of approach; therefore, this encounter did not have a real threat for the Earth.

Key words: asteroid, observations, astrometry, coordinates, accuracy, trajectory, orbit.

УДК 541.65.654

У.Дж.РАХИМОВА, М.Х.ЭГАМОВ*

**ЭФФЕКТ СВЕТОРАССЕЯНИЯ
ПОЛИМЕРНО-ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ
СО СПОНТАННОЙ САМООРГАНИЗАЦИЕЙ СТРУКТУРЫ**

Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики,

**Худжандский научный центр НАН Таджикистана*

Поступила в редакцию 22.11.2021 г.

Исследовано светопропускание тонких полимерно-жидкокристаллических пленок с учетом спонтанной самоорганизации структур под действием управляющего электрического поля. Установлен скачкообразный рост светопропускания исследуемых пленок за счет повышения полярности полимерной матрицы с образованием водородных связей между CN-группами жидкого кристалла. Обнаружено отрицательное влияние роста толщины пленки на величину просветления, вызывающее сильное светопоглощение.

Ключевые слова: полимер, жидкий кристалл, светопропускание, ориентация, анизотропия.

Жидкокристаллический (ЖК) композитный материал представляет собой изотропную полимерную матрицу с диспергированными включениями молекул жидкого кристалла. Конфигурация и размер капель ЖК зависят от технологии изготовления композита и свойств исходных материалов. Наиболее распространенными формами ЖК капель являются сферическая и эллипсоидальная. Форма и размер капли оказывают сильное влияние на электрооптические характеристики композитного материала, так как в основе работы ЖК-композитов лежит зависимость ориентации ЖК-молекул внутри капель от управляющего электрического или магнитного поля. Следует отметить, что степень упорядоченности молекул ЖК внутри капель значительно влияет и на оптические свойства материала в целом. Такие ЖК-композиты, сочетающие полезные качества обоих компо-

Адрес для корреспонденции: Рахимова Умедахон Джурабоевна, 735700, Республика Таджикистан, Согдийская область, г. Худжанд, 19 мкр-р. дом 9. кв.43. E-mail: rakhimova0508@mail.ru

нентов, являются весьма перспективным материалом для создания электрооптических элементов, обладающих новыми электрооптическими и механическими свойствами [1-4].

В работе [5] описан способ получения ЖК-композита нового типа на основе НЖК 5 СВ и полимера поливинилового спирта (ПВС). В отличие от классических ЖК-композитов (на примере диспергированные полимером жидкие кристаллы (ДПЖК)) тонкие пленки НЖК-ПВС характеризуются устойчивым эффектом спонтанной самоорганизации структуры.

В настоящей работе представляются результаты экспериментальных исследований зависимости светорассеяния от величины управляющего электрического поля. Предпосылки для постановки работы были следующими: принцип работы ДПЖК пленок основан на эффекте светорассеяния, регулируемого внешним полем. Поскольку полимерная матрица (ПВС) является изотропным веществом, она имеет единственным показателем преломления, равный $n_p=1.532$. Исследуемые нами НЖК 5СВ являются оптически анизотропным веществом, поэтому имеют два показателя преломления – обыкновенного с $n_o=1.717$ и необыкновенного с $n_e=1.531$ излучения. Компоненты ЖК композитов выбирали таким способом, чтобы один из показателей преломления НЖК 5 СВ n_e был равен или близок к показателю преломления полимерной матрицы n_p . При отсутствии внешнего электрического поля молекулы НЖК внутри капель расположены хаотично, поэтому показатель преломления НЖК намного отличается от показателя преломления полимера. Из-за рассогласованности показателей преломления двух компонентов ($n_e \neq n_p$) световое излучение полностью рассеивается и величина светопропускания ДПЖК пленки будет равна нулю ($T=0$). Когда на ДПЖК пленку приложим электрическое поле, молекулы НЖК ориентируются преимущественно вдоль направления напряженности поля и пленка становится прозрачной, поэтому падающий свет не рассеивается, а спокойно проходит сквозь нее. Чем меньше разница между показателями преломления полимерной матрицы (ПВС) и НЖК, тем выше явление светопропускания [6,7].

Для получения композитных пленок использовали НЖК типа 4-п-пентил-4'-цианобифенил (5СВ) с положительной диэлектрической проницаемостью ($\Delta\epsilon>0$). Исследованный нами ЖК имеет нематическую фазу в интервале температур от 24°C до 38°C и был получен по каталогу Aldrich, поэтому не подвергался очистке. Компоненты ПВС и НЖК 5СВ взвешивали на электронных весах JA-001 (Guandzhou Ludmila Instrument Co.Ltd) с точностью до 0.0001 г. Гомогенную смесь разливали между двумя стеклянными подложками, расположенными параллельно друг другу и покрытыми внутренними сторонами специальными токопроводящими слоями. Толщину ячейки с ДПЖК пленкой регулировали с помощью тефлоновой пленки толщиной до 100 мкм.

Морфологию композитных пленок исследовали с помощью поляризационного микроскопа ПОЛАР-2 в режиме скрещенных поляризаторов и с выключенным анализатором. Параметры фотографирования были одинаковы для всех снимков. Электрооптические характеристики полученных образцов измеряли в инверсионном режиме направле-

ния напряженности электрического поля. С учетом толщины пленки, перерасчет напряжения (U) в напряженность E произвели следующим выражением:

$$E = \frac{U}{d}, \quad (1)$$

где U – электрическое напряжение, приложенное на образец, В; d – толщина пленки, мкм. Из полученных данных построили графики зависимости величины светопропускания (T) от напряженности электрического поля (E). (рис. 1).

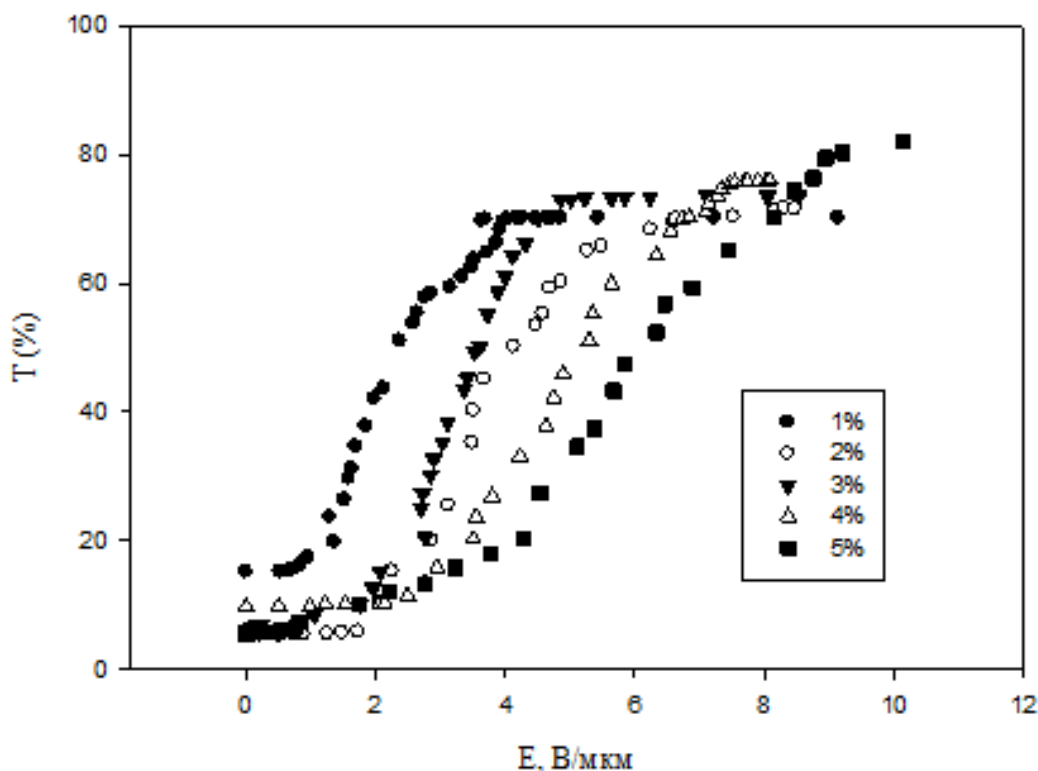


Рис. 1. Зависимость светопропускания ДПЖК пленок от напряженности электрического поля.

Из кривых, иллюстрированных на рис. 1, рассчитали значения светопропускания при перпендикулярном (T_{\perp}) и параллельном (T_{\parallel}) направлении напряженности электрического поля и направлении преимущественной ориентации молекул ЖК 5СВ по следующим формулам:

$$T_{\perp} = (T_{\max} - T_{\min}) \cdot 0.9 + T_{\min}, \quad (2)$$

$$T_{\parallel} = (T_{\max} - T_{\min}) \cdot 0.1 + T_{\min}, \quad (3)$$

где T_{\max} – максимальное пропускание при действии электрического поля; T_{\min} – минимальное светопропускание при отсутствии электрического поля. Зависимости вышеуказанных величин от концентрации ЖК компонентов в составе смеси отражены на рис. 2.

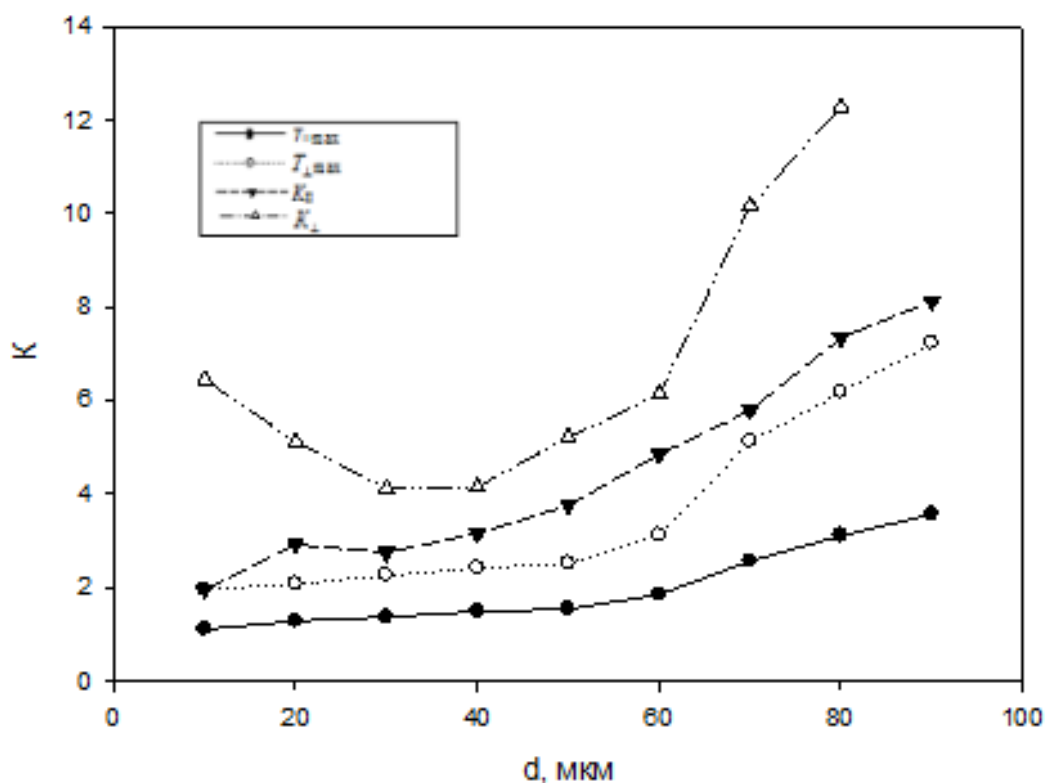


Рис. 2. Зависимость контраста (K) и светопропускания для перпендикулярной (T_{\perp}) и параллельной составляющей (T_{\parallel}) света от толщины композитной системы ДПЖК пленок.

Как видно, для всех концентраций характер зависимостей аналогичен, то есть минимальные значения напряженностей наблюдаются в интервале концентраций НЖК 2-5%, а далее намечается резкий рост напряжений ДПЖК пленок. На наш взгляд, это связано с повышением полярности полимерной матрицы и образованием большого числа водородных связей между CN -группами НЖК 5СВ и $COOH$ -группами полимерной матрицы, которые препятствуют ориентации молекул нематика вдоль напряженности приложенного электрического поля. С увеличением концентрации НЖК 5СВ в составе ПВС композитная система становится более жесткой, и распределение капель нематика по размеру увеличивается.

Согласно [8-10] морфология ДПЖК пленок сильно влияет на их оптические свойства, причем, чем ближе размер капель нематика к длине волны падающего светового излучения, тем меньше светопропускание в отсутствие электрического поля. Управляющее напряжение также тесно связано с размером капель нематика и толщиной пленки следующим соотношением, поэтому эта характеристика играет важную роль в процессе спонтанной самоорганизации структуры ПДЖК систем:

$$U = \frac{d}{R} \cdot (L^2 - 1) \cdot \left(\frac{4\pi k}{\Delta\varepsilon} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где R – средний радиус капли НЖК 5СВ; L – эллиптичность капли; d – толщина пленки ДПЖК; k – упругая постоянная; $\Delta\varepsilon$ – диэлектрическая анизотропия жидкого кристалла.

Уменьшение размера капли нематика приводит к росту поверхностной энергии сцепления между компонентами исследуемой системы. Однако, после снятия приложенного электрического поля, эта энергия снова возвращает каплю в первоначальную форму. Поэтому дальнейшее исследование было посвящено определению контраста и светопропускания ДПЖК пленок в инверсном режиме при действии электрического поля. Величину контраста образцов определяли по формуле [11]:

$$K = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{100}. \quad (5)$$

Эти данные приведены на рис. 3, из которого следует, что с ростом толщины пленок величина светорассеяния возрастает.

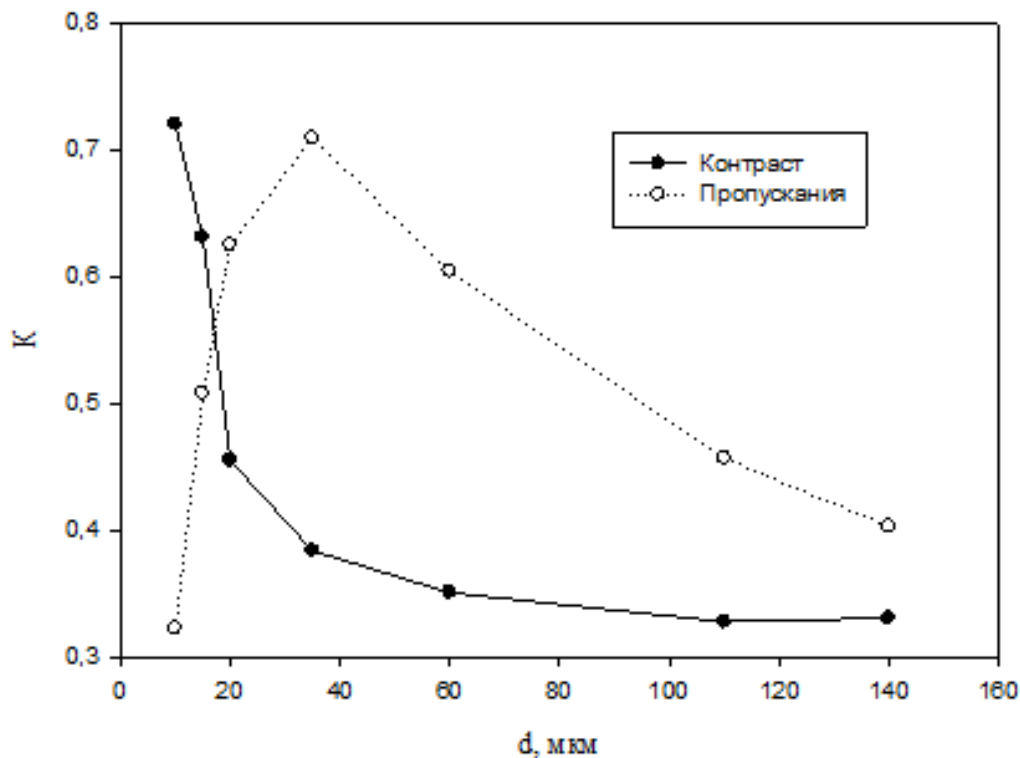


Рис. 3. Зависимость контраста (K) и пропускания (T) ДПЖК пленок от толщины при отсутствии электрического поля ($E=0$).

Наблюдаемый нами эффект связан с тем, что световое излучение проходит через большее количество капель нематика по всей толщине пленки в полном соответствии с

выражением (4). Однако, с ростом толщины ДПЖК пленки, максимальное просветление композита уменьшается, что нежелательно для использования в качестве поляризаторов, так как сопровождается сильным поглощением светового излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эгамов М.Х., Герасимов В.П., Крахалев М.Н., Прищепа О.О., Лойко В.А., Зырянов В.Я. Поляризующие свойства вытянутой пленки капсулированного полимером жидкого кристалла с примесью сурфактанта. – Оптический журнал, 2014, т. 81, с. 67.
2. Maureen K.McCamiey, Miha Ravnik, Andrew W.Artenstein, Steven M.Opal, Slobodan Zumer, Gregory P.Crawford. Detection of alignment changes at the open surface a confined nematic liquid crystal sensor. – Journal of Applied Physics, 2009, v.105, p.123504.
3. Egamov M.Kh. The structural transformation of polymer dispersed liquid crystalline films in external deformation field – Journal of Physics: Conference Series, 2018, p.012013.
4. Ravi K., Komanduri J. Escuti. Elastic continuum analysis of the crystal polarization drating. – Physical Review E, 2007, v.76, p. 021701.
5. Прищепа О.О., Эгамов М.Х., Герасимов В.П., Крахалев М.Н., Лойко В.А. Поляризаторы света на основе «полимер-ЖК-сурфактант»-пленок в качестве анизотропно-рассеивающих сред. – Изв. вузов, Физика, 2013, т. 56, № 2/2, с. 258-264.
6. Jin Ki Kim, Fumito Araoka, Soon Moon Jeong, Surajit Dhara, Ken Ishikawa, Hideo Takezoe. Bistable device using anchoring transition of nematic liquid crystals. – Applied Physics Letters, 2009, v. 95, p. 063505.
7. Yadav S.P., Pandey K.Kr., Misra A.Kr., Manohar R. Electro-Optical of Dye Doped Nematic Liquid Crystal. – Acta Physica Polonica, Ser.A, 2011, v.119, No 6, pp. 824-828.
8. Jain S.C., Roint D.K. Electro-optic response of polymer dispersed liquid-crystal films. – J. Appl. Phys. 1991, v. 70, No 11, pp. 6988-6992
9. Лойко В.А., Конколович А.В., Мискевич А.А. – ЖЭТФ, 2016, т.149, № 2, с. 200-207.
10. Muxhaylo Ledney, Igor Pinkevich. Influence of anchoring a nematic cell surface on threshold spatially periodic reorientation of a director. – Liquid Crystals, 2007, v. 34, No 5, pp. 577-583.
11. Джонс М.М., Булгакова С.А. Влияние 2,2,3,3-тетрафторпропил-2-фторакрилата на характеристики полимерных пленок с электрорегулируемой прозрачностью. – Вестник ННГУ, 2011, т. 3, № 1, с. 116-119.

У.Ҷ.РАҶИМОВА, М.Ҳ.ЭГАМОВ*

ЭФФЕКТИ ПАРОКАНИШИ РҶШНОЙ ДАР КОМПОЗИТҶОИ ПОЛИМЕРИИ КРИСТАЛЛИ МОЕЪ ДОШТА БО ТАШАККУЛЁБИИ СПОНТАНИИ СТРУКТУРА

Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон,

**Маркази илмии Хуҷанди Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола пароканиши рӯшноӣ аз қатраҳои кристалли моеи дар матритсаи полимерӣ диспергиридашуда бо назардошти ташаккулёбии спонтании структураи таҳти майдони электрикӣ тадқиқ шудааст. Афзуншавии ҷаҳишноки гузариши рӯшноӣ дар пленкаҳои омӯхта шуда аз ҳисоби зиёдшавии қутбнокии матритсаи полимерӣ бо барқароршавии бандҳои гидрогенӣ байни гуруҳҳои CN-и кристалли моеи муқаррар карда

шудааст. Таъсири манфии афзункунии ғафсии пленка ба бузургии шаффофият ошкор карда шудааст, ки боиси фурубарии рӯшноӣ мегардад.

Калимаҳои калидӣ: полимер, кристалли моеъ, рӯшноигузaronӣ, самтнокшавӣ, анизотропия.

U.J.RAKHIMOVA, M.Kh.EGAMOV*

**EFFECT OF LIGHT SCATTERING OF POLYMERIC-LIQUID CRYSTAL
COMPOSITES WITH SPONTANEOUS SELF-ORGANIZATION
OF THE STRUCTURE**

Tajik State University of Law, Business and Politics,

**Khujand Scientific Center of the NAST*

The light transmission of thin polymer-liquid-crystal films is examined taking into consideration of the spontaneous self-organization of structures under the effect of a control electric field. The abrupt increase in the light transmission of the films under study was determined due to an increase in the polarity of the polymer matrix with the formation of hydrogen bonds between the CN groups of the liquid crystal. The negative effect of the growth of the film thickness on the amount of bleaching is found, which causes light absorption.

Key words: polymer, liquid crystal, light transmission, orientation, anisotropy.

УДК 547

С.С.МАМАДШОЕВА^{1,3}, М.Ш.ХОЛОВ¹, Б.ДЖАФАРИ³, М.ДЖ.ХАЛИКОВА¹,
А.А.САИДОВ¹, Ш.Р.САМИХОВ¹, П.ЛАНГЕР², С.Ш.САФАРОВ¹

**ВОВЛЕЧЕНИЕ 8-ХЛОР-2-МЕТИЛ БЕНЗОТИАЗОЛО[3,2-А] ПИРИМИДИН-
4-ОНА И 2-БРОМ-7-ТРИФТОРМЕТИЛ – 5Н-5-ОКСО-1,3,4-ТИАДИАЗОЛО
[3,2-А] ПИРИМИДИНА В ПАЛЛАДИЙ, КАТАЛИЗИРУЕМЫЙ РЕАКЦИЮ
КРОСС-СОЧЕТАНИЯ СУЗУКИ-МИЯУРИ**

¹*Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана,*

²*Институт органической химии университета Росток, Германия,*

³*Научно-исследовательский центр экологии и окружающей среды Центральной Азии
(Душанбе)*

Поступила в редакцию 23.11.2021 г.

Реакция кросс-сочетания Сузуки – одна из самых известных реакций в области химии. Это очень эффективный метод создания углерод-углеродных связей. Она широко используется в синтезе многих молекул углерода, включая самые сложные. В данной обзорной статье основное внимание уделяется образованию углерод-углеродной связи посредством реакции кросс-сочетания, механизму и применению в синтезе продуктов. Реакция Сузуки — органическая реакция арил- и винилбороновых кислот с арил- или винилгалогенидами, катализируемая комплексами Pd(0). Реакция Сузуки широко используется в препаративной органической химии для получения полиолефинов, стиролов, а также замещенных бифенилов. Реакции углерод-углеродного кросс-сочетания являются одними из наиболее важных процессов в органической химии. Было разработано значительное количество реакций кросс-сочетания палладия Сузуки-Мияури с использованием непрерывной последовательности потоков для получения желаемых производных биарила. Наша цель состояла в том, чтобы сфокусировать наш обзор на непрерывном потоке кросс-сочетания Сузуки-Мияури с использованием катализатора палладия.

Ключевые слова: Сузуки-Мияура, палладий, кросс-сочетание, 8-хлор-2-метил бензотиазоло[3,2-а] пиримидин-4-она, 2-бром-7-трифторметил – 5Н-5-оксо-1,3,4-тиадиазоло [3,2-а] пиримидин.

Адрес для корреспонденции: Мамадшоева Сакина Саломатшоевна, 734063, г. Душанбе, Республика Таджикистан, ул. Айни, 299/2. Институт химии им. В.И.Никитина НАНТ,
E-mail: msakina1984@mail.ru

Введение. Реакция кросс-сочетания Сузуки-Мияуры [1-5] является одним из наиболее универсальных и часто используемых методов образования связи C – C. Она состоит из сочетания борорганических соединений (борорганического соединения, борорганической кислоты, сложного эфира борорганической кислоты и трифторбората калия) с арильными, алкенильными и алкинилгалогенидами. В настоящее время большое количество бороновых кислот доступны в торговле. Общий каталитический цикл Сузуки-Мияуры происходит за счет окислительного присоединения, трансметаллирования и восстановительного элиминирования [2-4, 6-8]. Среди основных реакций в органической химии образование связи C – C посредством реакции кросс-сочетания, катализируемой переходными металлами, несомненно, в последние годы данная реакция является наиболее важной и используется очень широко. Палладий наиболее широко используемый металл, позволяет синтезировать сложные и функционализированные органические молекулы, а его химический состав обладает различными интересными аспектами, такими как гетерогенный и гомогенный катализ в мягких экспериментальных условиях, совместимых со многими функциональными группами [9–13].

Окислительное присоединение

Этот этап соответствует введению переходного металла, в данном случае палладия, в связь R-X с последующим разрывом связи σ и образованием двух новых связей σ (Схема 1).

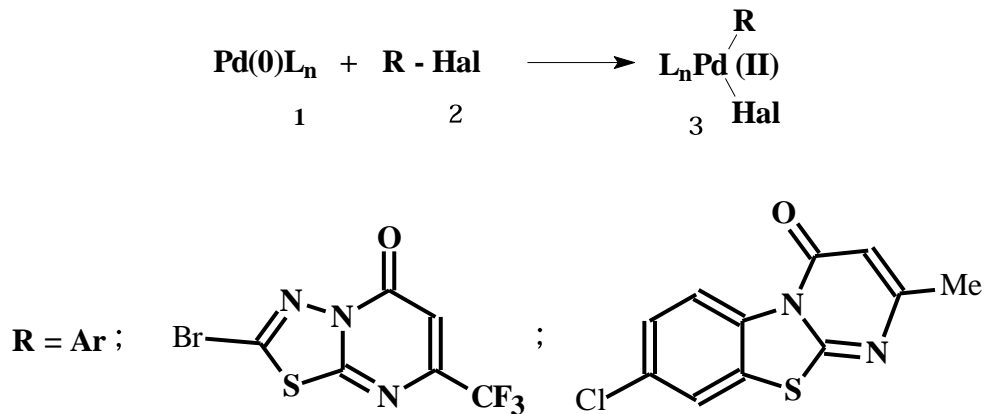


Схема 1. Окислительное присоединение Pd(0)L_n к R-Hal.

Этот процесс назван так из-за увеличения степени окисления металла, которая увеличивается на два. Это сопровождается увеличением координационного числа с новыми скоординированными частицами, расположенными в *цис*-конфигурации [14,15,16]. Следовательно, для того, чтобы происходило окислительное присоединение, предварительный комплекс металла должен быть в низкой степени окисления и координационно ненасыщенным, где n обычно равно 2 или 1 [17]. Известно также, что стадия окислительного присоединения облегчается за счет более высокой электронной плотности в метал-

лическом центре, при этом доказано, что σ -донорные лиганды, такие как третичные фосфины, увеличивают эту электронную плотность [17, 18]. Считается, что точный механизм немного отличается в зависимости от природы галогенидорганического субстрата, и предполагается, что он протекает через один из двух различных процессов: [19, 20, 17, 21, 22]. Первый пример механизма (показанный ниже) можно сравнить с нуклеофильным ароматическим замещением. Реакция замещения, в которой металл действует как нуклеофил (Схема 2).

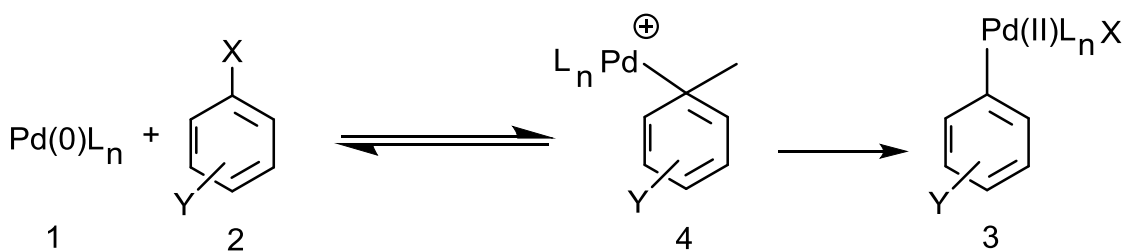


Схема 2. Механизм окислительного присоединения S_NAr .

Было обнаружено, что данные, собранные из некоторых избранных исследований [17, 23], соответствуют этому механизму, при этом расщепление арилгалогенидной связи на карбанионном промежуточном соединении 4, как полагают, формирует стадию, определяющую скорость. Это согласуется с наблюдаемой реакционной способностью арилгалогенидов по отношению к окислительному присоединению, при которой реакционная способность уменьшается с увеличением прочности связи $R-X$. Было показано, что скорость окислительного присоединения особенно увеличивается за счет присутствия электроноакцепторных групп в ароматическом кольце; особенность, также характерная для реакций типа S_NAr .

Второй возможный механизм включает образование трехцентрового переходного состояния 5, в котором атака металла по связи $R-X$ происходит как прямой согласованный процесс [17, 21] (Схема 3).

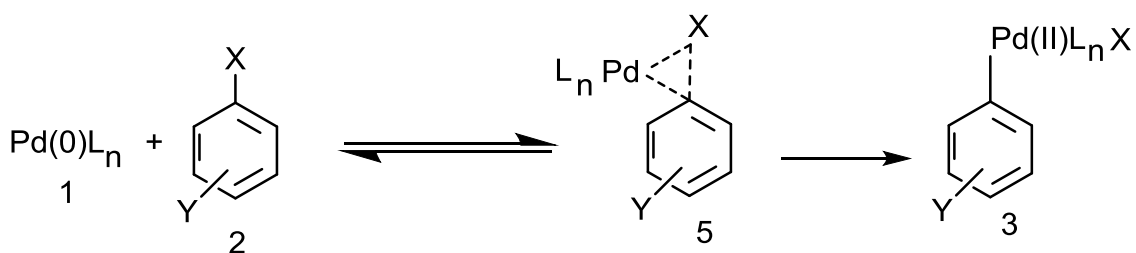


Схема 3. Согласованный механизм окислительного присоединения.

Было обнаружено, что этот механизм согласуется с большинством данных, собранных в ходе исследований стадии окислительных присоединения. [19, 24, 14, 17, 22, 15].

В случае окислительных присоединений с привлечением Pd(0)L₂ прямое образование окислительного аддукта в *транс*-конфигурации, обычно считается противопоказанным по симметрии [25]. Это недавно было доказано теоретическими исследованиями, в которых образование *транс*-комплексов непосредственно из дифосфин - палладия (0) было подтверждено как невозможный процесс [15,16]. Таким образом, полученный четырехкоординатный квадратно-плоский комплекс изначально имеет *цис*-конфигурацию 6. Полагается, что изомеризация его *транс*-изомера 7 будет происходить быстро (Схема 4).

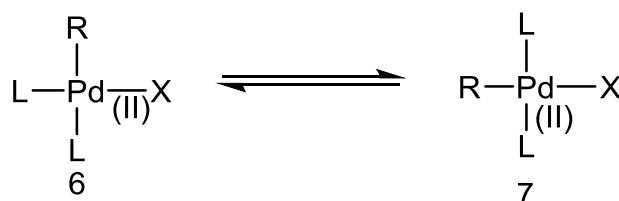


Схема 4. Изомеризация окислительного аддукта из *цис*-геометрии в *транс*-геометрию.

Эта изомеризация протекает легко, поскольку *транс*-изомер термодинамически более стабилен [14, 26] и подтверждается тем фактом, что комплексы *транс*-палладия (II) обычно наблюдаются и выделяются на этой стадии [27, 28, 18, 26] в отличие от *цис*- комплексов [29, 30].

Были предложены три возможных механизма этой изомеризации; (i) прямая перегруппировка через квазитетраэдрическое переходное состояние, возникающее в результате искажения четырехкоординатного комплекса, (ii) диссоциация лиганда с перегруппировкой образовавшихся трехкоординированных частиц с последующей повторной ассоциацией лиганда и (iii) начальное включение дополнительного лиганда в координационную сферу палладия с образованием пятикоординированного интермедиата с последующим псевдповращением и затем потерей лиганда. В теоретических исследованиях, проведенных в работах [36-37, 15, 27], обнаружено, что первый механизм обладает высоким энергетическим барьером, связанным с неблагоприятным образованием квазитетраэдрического переходного состояния [15]. Второй механизм обладал значительно меньшим энергетическим барьером и поэтому оказался более выгодным. Плавный энергетический профиль был также получен для третьего механизма, поэтому нельзя было исключить образование пятикоординатного компонента в качестве промежуточного. Однако противоречивые результаты были получены в расчетах, выполненных [16, 32], в которых не могут быть получены стабильные пятикоординатные промежуточные соединения [31]. Результаты экспериментальных исследований [30] согласуются со вторым механизмом как более вероятным описанием, хотя кинетические данные были осложнены образованием димерных частиц в среде, а также эффектами координирующих растворителей.

Изомеризация к *транс*-конфигурации обычно считается необходимым требованием перед трансметаллированием, хотя это широко распространенное мнение было оспо-

рено в некоторых вычислительных исследованиях, в которых было обнаружено, что стадия трансметаллирования протекает одинаково плавно, начиная с *цис*-изомера [15, 32].

Трансметаллирование

Трансметаллирование – это процесс, при котором металлорганические соединения, реагирующие с окислительным аддуктом с предыдущей стадии, приводят к переносу второй органической группы на комплекс палладия [33, 34, 35, 36, 37, 15, 27]. Эта стадия считается ключевой особенностью реакции кросс-сочетания Сузуки.

Согласно исходной модели каталитического цикла, этот процесс происходит между «активированным» арилборат-анионом 8 и *транс*-окислительным аддуктом 7, давая *транс*-диарилпалладиевый (II) комплекс 10 с образованием неорганической боратной соли посредством продукта 9.

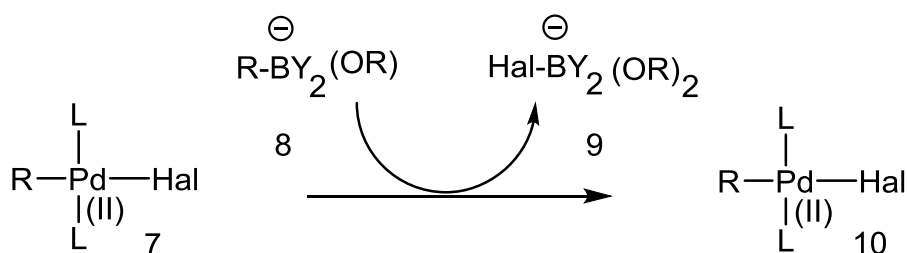


Схема 5. Стадия трансметаллирования с участием отрицательно заряженного арилборат-иона.

В этой версии процесса роль основания заключается в образовании отрицательно заряженного арилборат-иона 8. Считается, что образование этой четвертичной разновидности увеличивает нуклеофильность, то есть карбанионную природу органической группы на атоме бора, таким образом, обеспечивая перенос органической группы на центр палладия. [41]. В альтернативной версии каталитического цикла считается, что происходит замещение галогенид-иона на окислительном аддукте 7 основанием (RO^-) до трансметаллирования.

За замещением галогенид-иона (i) следует перенос арильной группы с нейтрального арилборонового субстрата 11 на комплекс (оксо) палладия (II) 12 (ii). В этом альтернативном процессе роль основания заключается в облегчении образования комплекса (оксо) палладия (II) 12, а не в образовании четвертичного борат-аниона 8. Эти (оксо) палладиевые (II) комплексы считаются более реактивными по отношению к трансметаллированию, чем галогенидные комплексы арилпалладия (II), из-за повышенной полярности связи Pd-O, которая делает центр палладия более электрофильным. [40].

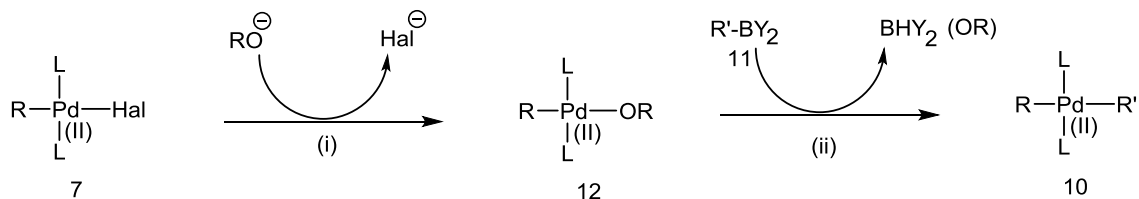


Схема 6. Стадия трансметаллирования.

Недавние исследования сложных механизмов каталитического цикла были выполнены F.Maseras и его сотрудниками. [36, 37, 15, 27]. Во время этих исследований, сосредоточенных на стадии трансметаллирования, вычисления методом DFT-Density functional theory (теория функционала плотности), показали, что «контрольная» реакция между нейтральной фенилбороновой кислотой и бромидным комплексом фенилпалладия (II) (в отсутствие основания) обладала слишком высоким энергетическим барьером, чтобы процесс был практичным [37].

Восстановительное элиминирование

Проще говоря, восстановительное расщепление (Схема 7) можно рассматривать как мономолекулярный процесс, в котором палладий (II) восстанавливается обратно до палладия (0) 1 с одновременным удалением связанного биарильного продукта 14 [4,39].

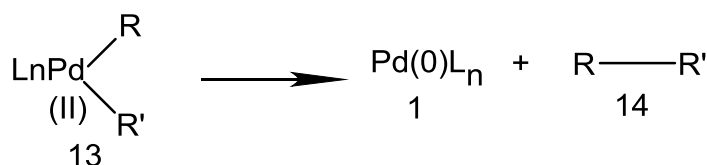


Схема 7. Восстановительное расщепление.

Затем регенерированная разновидность палладия (0) 1 может повторить стадию окислительного добавления для завершения каталитического цикла. Этот процесс может происходить только через *cis*-конфигурацию комплекса диорганопалладия (II) 13, и ему способствует пониженная электронная плотность в центре палладия вместе с увеличенным пространственным объемом вокруг металла. Утверждалось, что теоретически, если используются объемные, менее богатые электронами фосфиновые лиганды, то ожидается, что барьеры для окислительного присоединения увеличатся, тогда как барьеры для восстановительного элиминирования, с другой стороны, должны будут уменьшаться. [16]

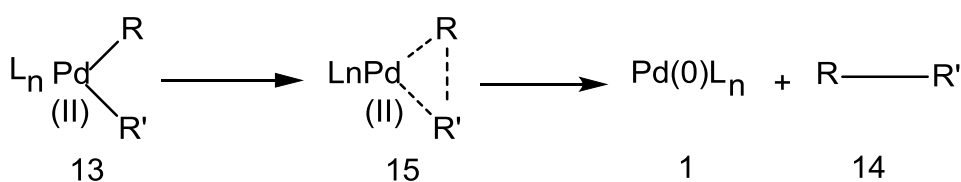


Схема 8. Согласованный процесс образования связи C-C.

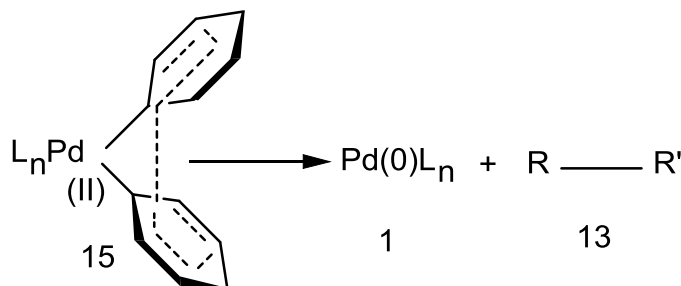


Схема 9. π -орбитали в восстановительное элиминирование.

Обсуждение результатов

Нами было вовлечено соединение 2-бromo-7-трифторметил-5-оксо-5H-1,3,4-тиадиазолпиримидинов (3) и 8-хлор-бензотиазоло[3,2-а] пиримидин-4-она 7 в палладий, катализируемый реакцию Сузуки-Мияуры. Соединение 3 было синтезировано исходя из коммерчески доступных 5-бромзамещенных 2-амино-1,3,4-тиадиазола 1 и трифторметилацетоуксусного эфира 2 (Схема 10).

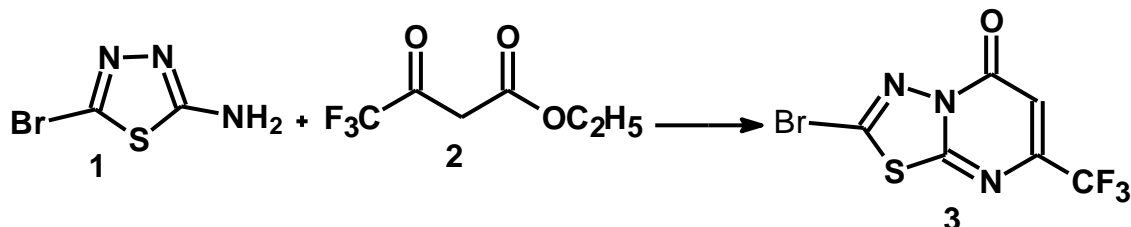


Схема 10. Реакция циклоконденсации соединения 1 и 2.

Функциональность брома далее использовалась для его дериватизации, используя палладий, катализирующий реакцию кросс-сочетания Сузуки-Мияуры $3 + \text{Ar-B(OH)}_2 \rightarrow 4$ (Схема 11).

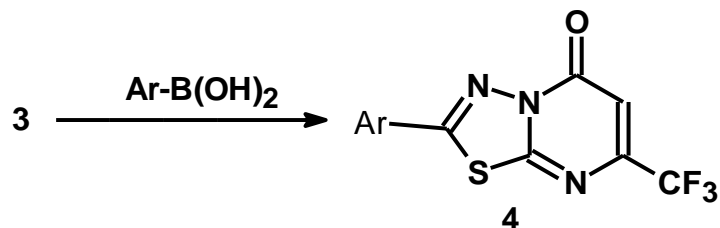


Схема 11. Условие: Ar-B(OH)_2 (1.1 эквивалент), Pd(OAc)_2 (10 мол%), Xantphos (2.0 эквивалент), K_2CO_3 (2.0 эквивалент), 1,4-диоксан (растворитель), 100°C , 16ч. 4 (выход): a) C_6H_5 (90%); b) 4- MeC_6H_4 (81%); c) 2- MeC_6H_4 (75%); d) 4- EtC_6H_4 (66%); e) 3,3-(Me) $_2\text{C}_6\text{H}_3$ (60%); f) 3,4-(Me) $_2\text{C}_6\text{H}_3$ (63%); g) 4- MeOC_6H_4 (78%); h) 3- MeOC_6H_4 (65%); i) 2- MeOC_6H_4 (45%); j) 3,3-(MeO) $_2\text{C}_6\text{H}_3$ (88%); k) 2,3-(MeO) $_2\text{C}_6\text{H}_3$ (35%); l) 4- EtOC_6H_4 (90%); m) 2- EtOC_6H_4 (40%); n) 2- FC_6H_4 (51%); o) 3- FC_6H_4 (65%); p) 3- $\text{F}_3\text{CC}_6\text{H}_4$ (55%); q) 4- $\text{F}_3\text{COC}_6\text{H}_4$ (60%); r) 3- NCC_6H_4 (55%); s) 3- $\text{N}_2\text{OC}_6\text{H}_4$ (65%); t) 3- $\text{H}_5\text{C}_6\text{H}_4$ (70%).

Соединение 7 синтезировалось присоединением коммерчески доступных 2-амино-6-хлорбензотиазола с ацетоуксусным эфиром 6 (Схема 12).

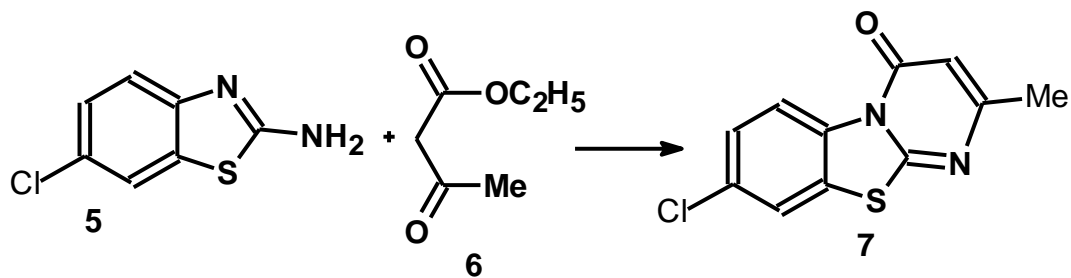


Схема 12

Мы начали наше исследование, оптимизировав синтез соединения 8 в условиях реакции Сузуки-Мияуры. Были проверены различные катализаторы, лиганды, основания и растворители (табл.)

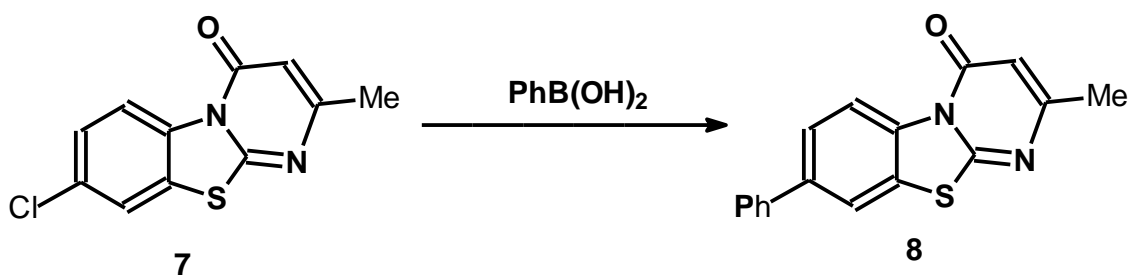


Схема 13. Реакция кросс-сочетания Сузуки для соединения 7 (7 → 8) Ph = C₆H₅).

Таблица

Оптимизация синтеза соединения 8 из 7: (Ph = C₆H₅)

Р	Катализатор [моль%]	Лиганд [моль%]	Основание [экв]	Растворитель [мл]	[%] ^a
1	Pd ₂ (dba) ₃ , 1	XPhos, 4	K ₃ PO ₄ , 2	<i>n</i> -Бутанол, 2	0
2	Pd ₂ (dba) ₃ , 1	XPhos, 4	K ₃ PO ₄ , 2	этанол, 2	0
3	Pd(PPh ₃) ₄ , 1	XPhos, 4	K ₃ PO ₄ , 2	<i>n</i> -Бутанол, 2	0
4	Pd(PPh ₃) ₄ , 4	DavePhos, 8	Na ₂ CO ₃ , 2,4	диоксан/Н ₂ О, 4:1	47
5	Pd(PPh ₃) ₄ , 4	XPhos, 8	Na ₂ CO ₃ , 2,4	диоксан/Н ₂ О, 4:1	34
6	Pd ₂ (dba) ₃ , 1	DavePhos, 8	Na ₂ CO ₃ , 2,4	диоксан/Н ₂ О, 4:1	52
7	Pd ₂ (dba) ₃ , 1	XPhos, 8	Na ₂ CO ₃ , 2,4	диоксан/Н ₂ О, 4:1	85
8	Pd ₂ (dba) ₃ , 4	XPhos, 4	Na ₂ CO ₃ , 2,4	диоксан/Н ₂ О, 4:1	42

Стало очевидно, что выбор растворителя и основания оказывает огромное влияние на результат реакции. Применение смеси растворителей на основе 1,4-диоксана и воды, Na₂CO₃ как основания, XPhos в качестве лиганда, приводило к очень хорошим выходам продукта реакции (Схема 14).

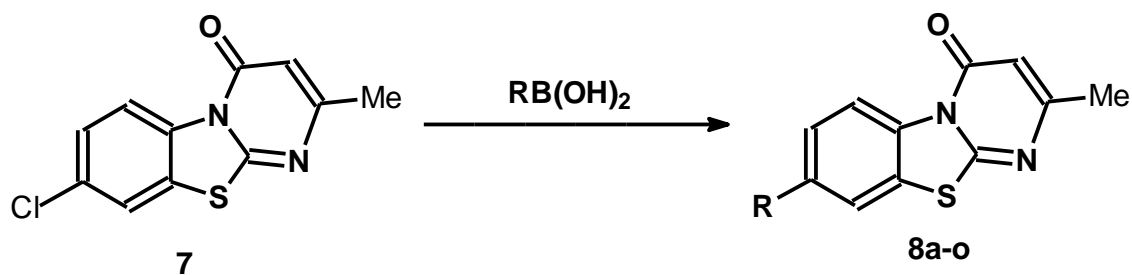


Схема 14. Синтез целевых продуктов **8a-o**: R = **a**) C₆H₄ (выход 85%); **b**) 4-MeC₆H₄ (75%); **c**) 2-MeC₆H₄ (65%); **d**) 3-MeC₆H₄ (62%); **e**) 3,3-(Me)₂C₆H₃ (67%); **f**) 4-FC₆H₄ (63%); **g**) 4-F₃CC₆H₄ (47%); **h**) хинолил-3 (50%); **i**) H₃C₆C₆H₄ (52%); **j**) 4-MeOC₆H₄ (72%); **k**) 2-MeO,3-FC₆H₃ (46%); **l**) 2-ОНСС₆H₄ (65%); **m**) 2-EtO₂СС₆H₄ (53%); **n**) Me (55%); **o**) 3-тиенил (48%). Условие: фенолбороновая кислота (1.5 эквивалент), Pd₂(dba)₃ (0.04 эквивалент), XPhos (0.08 эквивалент), K₂CO₃ (2.4 эквивалент), диоксан вода (4:1растворитель), 100 °С, 16 ч.

Выводы: 1. Соединение 2-Бром-7-трифторметил – 5Н-5-оксо-1,3,4-тиадиазоло [3,2-а] пиримидин было задействовано в реакции Сузуки-Мияуры, приводящей к соответствующему 2-арилзамещенному -7 -трифторметил – 5Н-5-оксо-1,3,4-тиадиазоло [3,2-а] пиримидину. В выбранных условиях продукты кросс-сочетания были получены от умеренного до превосходного выхода целевых продуктов. В этом контексте самый высокий выход был замечен в реакции с фенолбороновой кислотой, за ним следуют фенолбороновые кислоты, имеющие заместители в пара положении. Фенолбороновые кислоты, имеющие заместители в орто- и *мета*-положении, привели к немного низким выходам целевого продукта по сравнению с фенолбороновыми кислотами, имеющими заместители в *пара*-положении, это, по-видимому, из-за стерического препятствия.

2. Приложена функционализация легко доступных 8-хлор-2-метил бензотиазоло[3,2-а] пиримидин-4-она с применением палладия, катализируемого реакцию кросс-сочетания Сузуки. Оптимизированные условия терпимо относятся с некоторым функциональным группам, включая N- и S-гетероциклы, а также формил и сложный эфир. Арилбороновые кислоты, содержащие электронодонорные или электроакцепторные группы, привели к одинаково хорошим выходам продукта реакции. Однако, арилбороновые кислоты, содержащие стерические препятствующие *орто*-заместители, привели к более низким выходам продукта реакции, чем производные с *пара*-заместителями.

3. Эти условия позволяют получать синтез множества арилпроизводных бензотиазолопиримидин-4-она и 2-метил-бензотиазоло[3,2-а] пиримидин-4-она.

Экспериментальная часть

Исходные соединения для синтеза и растворители были доступны в торговле с чистотой более 99.5% основного компонента. Для тонкослойной хроматографии (ТСХ) были использованы пластинки марки Merck Silica 60 F254 над поверхностью алюминия

от фирмы Macherey-Nagel. Для хроматографической колонки был использован силикагель марки Fluka silica gel 60 (0.063-0.200 мм, 70-320 меш) от фирмы Fluka.

Спектры ЯМР ^1H , ^{13}C и ^{19}F были записаны на инструментах Bruker 300, 400, Advance 600, AXM 400 Varian Mercury 400. В качестве внутреннего стандарта был использован тетраметилсилан ($d=0/00$ м.д.) Для калибровки ЯМР-сигналов были использованы стандартные сигналы хлороформа (7.260 м.д. для ^1H , 77.160 м.д. для ^{13}C). Для обозначения сигналов были использованы следующие сокращения: с (синглет), д (дублет), т (триплет), дд (двойной дублет) ддд (двойной двойной дублет), пт (псевдотриплет), к (квартет), п (пентет), гепт (гептет). Инфракрасные (ИК) спектры были записаны на спектрометре марки Bruker ALPHA-P с использованием метода ослабленного, полного отражения (attenuated total reflectance). Для обозначения сигналов ИК-спектров были использованы следующие сокращения: сл (слабый), ср (средний) и сил (сильный). Рентгеноструктурный анализ монокристаллов был выполнен на Bruker-Nonius Apex X8 CCD-diffractometer.

Масс-спектры были записаны на приборе Finigal MAT 95. Масс-спектр высокого разрешения был измерен на приборе QNOF ULTIMA 3, Thermo Electron LCQ Deca (San Jose, CA) ESI-технологии. Элементный состав синтезированных соединений был выполнен в микроаналитических лабораториях университетов Майнца и Ростка.

Общая методика получения 2-арил-7-трифторметил-5Н-1,3,4-тиадиазоло[3,2-а]пиримидин-5-онов - 4a-t

Смесь 2-бromo-7-трифторметил-5Н-1,3,4-тиадиазоло[3,2-а]пиримидин-5-она 3 (1.0 экв, 0.335 ммоль), арилбороновой кислоты (1.1 экв.), ацетата палладия (II) (0.1 экв.), Хантphos (0.2 экв.) и карбоната калия (2.0 экв.) была подвергнута сильному перемешиванию и нагреванию в сухом 1,4-диоксане (2 мл) при 100°C в течение 16 часов. После охлаждения до комнатной температуры реакционную массу разбавили водой, экстрагировали этилацетатом. Органический слой был высушен безводным сульфатом натрия, а растворитель был выпарен. Твёрдое вещество было очищено хроматографической колонкой над силикагелем (ЭА: гептан).

Общая методика получения 8-арил-2-метил-бензо [4,5] тиазоло [3,2-а]пиримидин-4-онов - 8a-o

8-Хлоро-2-метил-бензо[4,5]тиазоло [3,2- а]пиримидин-4-он 31 (1.0 экв. 0.399 ммоль), арилбороновая кислота (1.5 экв.), Pd₂dba₃ (0.04 экв.), XPhos (0.08 экв.), карбонат калия (2.4 экв.) были нагреты при энергичном перемешивании в смеси 1,4-диоксана и воды (4 мл: 1 мл) при 100°C в течение 16 ч. После охлаждения до комнатной температуры реакционная масса была разбавлена водой и экстрагирована из ЭА. Органический слой был высушен безводным сульфатом натрия, и растворитель был выпарен. Оставшееся твёрдое вещество было очищено хроматографической колонкой над силикагелем (ЭА: гептан).

ЛІТЕРАТУРА

1. Miyaura N, Yamada K, Suzuki A. A. New stereospecific cross coupling by the palladium-catalyzed reaction of 1-alkenylboranes with 1-alkenyl or 1-alkynyl halides. – *Tetrahedron Lett.* 1979, v. 20, pp. 3437-3440.
2. Miyaura N, Yanagi T, Suzuki A. The palladium-catalyzed cross-coupling reaction of phenylboronic acid with haloarenes in the presence of bases. *Synt. Commun.* 1981, v.11, pp. 513-519.
3. Miyaura N, Suzuki, A. Palladium-catalyzed cross-coupling reactions of organoboron compounds. – *Chemical Reviews.* 1995, v.95, pp. 2457-2483.
4. Suzuki A. Recent advances in the cross-coupling reactions of organoboron derivatives with organic electrophiles 1995-1998. – *J. Organometallic Chemistry.* 1999, v. 576, pp.147-168.
5. Suzuki, A. Cross-coupling reactions of organoboranes: An easy way to construct C–C bonds. – *Angew. Chem. Int. Ed.* 2011, v. 50, pp. 6722-6764.
6. Amatore C, Jutand A, Le Duc, G. Kinetic data for the transmetalation/reductive elimination in palladium-catalyzed Suzuki-Miyaura reactions: Unexpected triple role of hydroxide ions used as base. – *Chem. Eur. J.* 2011, v.17, pp. 2492-2503.
7. Amatore C, Jutand A, Le Duc G. Mechanistic origin of antagonist effects of usual anionic bases (OH⁻, CO₃²⁻) as modulated by their countercations (Na⁺, Cs⁺, K⁺) in palladium-catalyzed Suzuki-Miyaura reactions. – *Chem. Eur. J.* 2012, v.18, pp. 6616-6625.
8. Brad P. Carrow, John F. Hartwig. Distinguishing between pathways for transmetalation in Suzuki-Miyara reactions. – *J. Am. Chem. Soc.* 2011, v.133, pp. 2116-2119.
9. Yin L, Liebscher, J. Carbon–carbon coupling reactions catalyzed by heterogeneous palladium catalysts. – *Chem. Rev.* 2007, v.107, pp. 133-173.
10. Barnard, C. Palladium-catalyzed C–C coupling: Then and now. – *Platin. Met. Rev.* 2008, v.52, pp. 38-45.
11. Johansson Seechurn, Carin.C.C, Kitching M.O, Colacot T.J, Sniekus, V. Palladium-catalyzed cross-coupling: A historical contextual perspective to the 2010 Nobel Prize. – *Angew. Chem. Int. Ed.* 2012, v.51, pp. 5062-5085.
12. Agrofoglio L.A, Gillaizeau I, Saito Y. Palladium-assisted routes to nucleosides. – *Chem. Rev.* 2003, v.103, pp. 1875-1916.
13. Polshettiwar V, Len C, Fihri A. Silica-supported palladium: Sustainable catalysts for cross-coupling reactions. – *Coord. Chem. Rev.* 2009, v.253, pp. 2599-2626.
14. C.Amatore, A.Jutand and A.Suarez. J.Intimate. Mechanism of Oxidative Addition to Zerovalent Palladium Complexes in the Presence of Halide Ions and Its Relevance to the Mechanism of Palladium-Catalyzed Nucleophilic Substitutions. – *J.Am. Chem. Soc.* 1993, v.115, pp. 9531-9541 and references therein.
15. A.C.Braga, G.Ujaque and F.Maseras. A DFT Study of the Full Catalytic Cycle of the Suzuki-Miyaura Cross-Coupling on a Model System. – *Organometallics* 2006, v.25, pp. 3647-3658.
16. L.J.Goossen, D.Koley, H.L.Hermann and W.Thiel. The Palladium-Catalyzed Cross-Coupling Reaction of Carboxylic Anhydrides with Arylboronic Acids: A DFT Study – *J. Am. Chem. Soc.* 2005, v.127, pp. 11102-11114.
17. J.K.Stille and K.S.Y.Lau. Mechanisms of Oxidative Addition of Organic Halides to Group 8 Transition- Metal Complexes Acc. – *Chem. Res.* 1977, v.10, pp. 434-442.
18. G.Calvin and G.E.Coates. Organopalladium Compounds. – *J.Chem. Soc.* 1960, pp. 2008-2016.
19. D.A.Widdowson and R.Wilhelm. Palladium catalysed Suzuki reactions of fluoroarenes† – *Chem. Commun.* 2003, pp. 578-579.
20. Y.M.Kim and S.Yu. Palladium(0)-Catalyzed Amination, Stille Coupling, and Suzuki Coupling of Electron-Deficient Aryl Fluorides – *J. Am. Chem. Soc.* 2003, v.125, pp. 1696-1697.

21. M.F.Semmelhack and L.Ryono. Synthesis with Low-valent Transition Metals: Replacement of Halogen with Methyl Groups Using Methyltris(triphenylphosphine)rhodium(I). – *Tetrahedron Lett.* 1973, v.14, pp. 2967.
22. C.Amatore and F.Pflüger. Mechanism of Oxidative Addition of Palladium (0) with Aromatic Iodides in Toluene, Monitored at Ultramicroelectrodes – *Organometallics*, 1990, v.9, pp. 2276-2282.
23. A.Jutand and A.Mosleh, Rate and Mechanism of Oxidative Addition of Aryl Triflates to Zerovalent Palladium Complexes. Evidence for the Formation of Cationic (σ -Aryl) palladium Complexes – *Organometallics* 1995, v.14, pp. 1810-1817.
24. T.E.Barder, S.D.Walker, J.R.Martinelli and S.L.Buchwald. Catalysts for Suzuki-Miyaura coupling processes: scope and studies of the effect of ligand structure. – *J. Am. Chem.Soc.* 2005, v.127, pp. 4685-4696.
25. G.K.Anderson and R.J.Cross, Isomerisation mechanisms of square-planar complexes – *Chem. Soc. Rev.* 1980, v.9, pp. 185-215.
26. P.Fitton and J.E.McKeon. Oxidative additions to palladium (0). – *Chem. Commun.* 1968, pp. 4-6.
27. C.Sicre, A.A.C.Braga, F.Maseras and M.M.Cid. Mechanistic insights into the transmetalation step of a Suzuki–Miyaura reaction of 2(4)-bromopyridines: characterization of an intermediate. – *Tetrahedron*, 2008, v.64, pp. 7437-7443.
28. P.Fitton, M.P.Johnson and J.E.McKeon. Oxidative additions to palladium (0). – *Chem. Commun.* 1968, pp. 6-7.
29. H.Urata, M.Tanaka and T.Fuchikami. Oxidative Addition Reaction of 1,3-Dialkyl-5-fluoro-6-iodouracils to Low-valent Transition Metal Complexes. – *Chem. Lett.* 1987, pp. 751-754.
30. A.L.Casado and P.Espinet. On the Configuration Resulting from Oxidative Addition of RX to Pd(PPh₃)₄ and the Mechanism of the cis-to-trans Isomerization of [PdRX(PPh₃)₂] Complexes (R = Aryl, X = Halide)[†]. – *Organometallics*. 1998, v.17, pp. 954-959
31. L. J.Goossen, D.Koley, H.L.Hermann and W.Thiel. Mechanistic pathways for oxidative addition of aryl halides to palladium (0) complexes: a DFT study. – *Organometallics*, 2005, v.24, pp. 2398-2410.
32. L.J.Goossen, D.Koley, H.L.Hermann and W.Thiel. Palladium Monophosphine Intermediates in Catalytic Cross-Coupling Reactions: A DFT Study. – *Organometallics*, 2006, v.25, pp. 54-67.
33. N.Miyaura and A.Suzuki. Palladium-Catalyzed Cross-Coupling Reactions of Organoboron Compounds. – *Chem. Rev.* 1995, v.95, pp. 2457-2483 and references therein.
34. N.Miyaura, Cross-coupling reaction of organoboron compounds via base-assisted transmetalation to palladium (II) complexes. – *J. Organomet. Chem.* 2002, v.653, pp. 54-57.
35. B.P.Carrow and J.F.Hartwig J.Distinguishing between pathways for transmetalation in Suzuki-Miyaura reactions. – *Am. Chem. Soc.* 2011, v. 133, pp. 2116-2119
36. A.A.C.Braga, N.H.Morgon, G.Ujaque and F.Maseras. Computational Characterization of the Role of the Base in the Suzuki-Miyaura Cross-Coupling Reaction. – *J. Am. Chem. Soc.* 2005, v.127, pp. 9298-9307.
37. A.A.C.Braga, N.H.Morgon, G.Ujaque, A.Lledós and F.Maseras, J. Computational study of the transmetalation process in the Suzuki-Miyaura cross-coupling of aryls. – *Organomet. Chem.* 2006, v.691, pp. 4459-4466.
38. A.Suzuki. Carbon–carbon bonding made easy. – *Chem. Commun.* 2005, pp. 4759-4763.
39. F.J.McQuillin, D.G.Parker and G.R.Stephenson. *Transition Metal Organometallics for Organic Synthesis.* – Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
40. A.R.Martin and Y.Yang. Palladium-Catalyzed Cross Coupling Reactions of Organoboronic Acids with Organic Electrophiles. – *Acta Chem. Scand.* 1993, v.47, pp. 221-230.

С.С.МАМАДШОЕВА^{1,3}, М.Ш.ХОЛОВ¹, Б.ЧАФАРИ², М.Ч.ХАЛИҚОВА¹, А.А.САИДОВ¹,
Ш.Р.САМИХОВ¹, П.ЛАНГЕР², С.Ш.САФАРОВ¹

**ЧАЛБ КАРДАНИ 8-ХЛОР-2-МЕТИЛ БЕНЗОТИАЗОЛО[3,2-А]
ПИРИМИДИН-4-ОНА И 2-БРОМ-7-ТРИФТОРМЕТИЛ – 5Н-5-ОКСО-1,3,4-
ТИАДИАЗОЛО [3,2-А] ПИРИМИДИН БО КАТАЛИЗАТСИЯИ ПАЛЛАДИЙ
РЕАКСИЯИ КРОСС-ОМЕЗИШИ СУЗУКЌ-МИЯУРЌ**

¹*Институти химияи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон,*

²*Институти химияи органикии университети Росток, Германия,*

³*Маркази илмӣ-таҳқиқоти экологӣ ва муҳити атрофи Осӣёи Марказӣ (Душанбе)*

Реаксияи кросс-омезиши Сузуки – яке аз маъмултарин реаксия дар соҳаи химия мебошад. Ин усул хеле босамар барои пайваст кардани карбон-карбонҳо мебошад. Он хеле васеъ дар синтези бисёр молекулаҳои карбони аз ҳама мураккаб истифода мешавад. Дар шарҳи мақолаи зерин диққати асосӣ ба бавучудоии банди карбон-карбонҳо тавассути реаксияи кросс-омезиши, механизм ва истифодабари дар синтези маҳсулотҳо дода шудааст. Реаксияи Сузукӣ – реаксияи органикии арил- ва винилбории кислота бо арил- ё винилгалогенидҳо, катализатсия бо комплекси Pd(0) мешавад. Реаксияи Сузукӣ хеле васеъ дар тайёр кардани химияи органикӣ барои ҳосил кардани полиолефинҳо, стиролҳо инчунин иваз кардани бифенилҳо истифода мебаранд. Реаксияи карбон-карбонҳо кросс-омезиши яке аз равандҳои муҳим дар химияи органикӣ ба ҳисоб меравад. Миқдори зиёди реаксияи кросс-омезишии палладий Сузукӣ-Мияурӣ бо истифодаи пай дар пайи селоб барои ихтиёри ҳосил шудани биарил коркард шудааст. Мақсади мо аз он иборат аст, ки аз шарҳи ин истифода карда пай дар пай селоби кросс-омезиши Сузукӣ-Мияурӣ бо истифодаи катализатори палладий ҳосил намоем.

Бо истифода аз катализатори палладий реаксияи кросс-омезиши Сузукӣ – Мияурӣ 8-хлор-2-метил бензотиазоло[3,2-а] пиримидин-4-он ва 2-бром-7-трифторметил – 5Н-5-оксо-1,3,4-тиадиазоло [3,2-а]пиримидин, ва 8-арил-2-метил бензотиазоло[3,2-а] пиримидин-4-он ва 2-ҷойивазкунӣ -7 -трифторметил – 5Н-5-оксо-1,3,4-тиадиазоло [3,2-а] пиримидин бо баромади хуб ҳосил карда шуд.

Калимаҳои калидӣ: Сузукӣ-Мияурӣ, палладий, кросс-омезиши, 8-хлор-2-метил бензотиазоло[3,2-а] пиримидин-4-он и 2-бром-7-трифторметил – 5Н-5-оксо-1,3,4-тиадиазоло [3,2-а]пиримидин.

S.S.MAMADSHOEVA^{1,3}, M.SH.KHOLOV¹, B.JAFARI³, M.J.KHALIKOVA¹, A.A.SAIDOV¹,
SH.R.SAMIKHOV¹, P.LANGER², S.SH.SAFAROV¹

**INVOLVING OF 8-CHLORO-2-METHYL BENZOTHAZOLO [3,2-A]
PYRIMIDIN-4-ONE AND 2-BROMO-7-TRIFLUOROMETHYL - 5H-5-OXO-
1,3,4-THIADIAZOLO [3,2-A] PYRIMIDINE IN PALLADIUM-CATALYZED
SUZUKI-MIYAUROCROSS-COUPPING REACTION**

¹*V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National Academy of Sciences of Tajikistan,*

²*Institute of Organic Chemistry, University of Rostock, Germany Institute of Chemistry,*

³*The Research Center for Ecology and Environment of Central Asia (Dushanbe)*

The Suzuki cross-coupling reaction is one of the most famous reactions in the field of chemistry. This is a very effective method for creating carbon-carbon bonds. It is widely used in the synthesis of many carbon molecules, including the most complex ones. This review article focuses on the formation of a carbon-carbon bond through a cross-coupling reaction, the mechanism and applications in the synthesis of products. The Suzuki reaction is an organic reaction of aryl and vinylboronic acids with aryl or vinyl halides, catalyzed by Pd (0). The Suzuki reaction is widely used in preparative organic chemistry to produce polyolefins, styrene, and substituted biphenyls. Carbon-carbon cross-coupling reactions are among the most important processes in organic chemistry. A significant number of Suzuki-Miyaura palladium cross-coupling reactions have been developed using a continuous sequence of streams to obtain the desired biaryl derivatives. Our goal is to focus this review on a continuous flow of Suzuki-Miyaura cross-coupling using a palladium catalyst.

Key words: Suzuki-Miyaura, palladium, cross-couplings, 8-chloro-2-methyl benzothiazolo [3,2-a] pyrimidin-4-one and 2-bromo-7-trifluoromethyl - 5H-5-oxo-1,3, 4-thiadiazolo [3,2-a] pyrimidine.

УДК 547.972

Д.Х.ЭШКУВАТОВ, Дж.ХОДЖАЕВ*, Ш.Н.ШАМСУДИНОВ*, Т.Х.АБДУЛЛАЕВ,
Дж.Н.ДЖАМШЕДОВ, И.Ф.РАХИМОВ, З.Д.НАЗАРОВА

**ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВЕННОГО И КОЛИЧЕСТВЕННОГО СОСТАВА
ФЕРУЛЛОВЫХ СМОЛ «КАМОЛИ ТОЧИК»**

Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана,

**Таджикский государственный педагогический университет им.С.Айни*

Поступила в редакцию 08.12.2021 г.

Проведено исследование образцов смол «Камоли Точик» различного происхождения с использованием ИК-спектрометрии и количественное изучение с применением метода капиллярного электрофореза. Установлен качественный и количественный состав исследуемых образцов, которые включают различные органические соединения, эфирные масла. Приведены данные, указывающие на различие состава в зависимости от способа извлечения в исследованных образцах, путем сравнения спектров ИК. Данные электрофорезам показывают различное содержание ценных продуктов в составе смол «Камоли Точик» в зависимости от способов их извлечения.

Ключевые слова: ИК-спектроскопия, ферула, терпеноиды, смолы, капиллярный электрофорез, электрофореграмма, фенольные соединения.

Известно, что в химическом составе растений семейства Зонтичных содержатся эфирные масла или смолообразные вещества, кумарины, флавоноиды [1]. В литературе имеются сведения о наличии кумаринов, эфирных масел, терпеноидов и др., в подземных и надземных органах ферул[2, 3], большинство из них относятся к группе биологически активных веществ и используются в качестве лекарственных средств и пищевых добавок.

Из смол, добываемых из различных частей, готовили такие фармацевтические смолы, как ассафетида, гольбана, сумбул, аммониякум и сапаген [4].

Инфракрасная спектроскопия в настоящее время является одним из важных физико-химических методов исследования в химии, с помощью которого можно решать задачи

Адрес для корреспонденции: Рахимов Исмаилюлло Фатхуллаевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул.Айни, 299/2, Институт химии им.В.И.Никитина НАНТ. E-mail:rif52@mail.ru

качественного и количественного анализа вещества и судить о строении молекул. Особенно широко используется инфракрасная спектроскопия для функционально-группового анализа и идентификации самых различных соединений.

Изучение химического состава соединений растительного происхождения является актуальным. Именно поэтому целью нашей работы явилось ИК – спектроскопическое исследование экстрактов различного происхождения «КТ», извлеченных из различных частей растения ферулы таджиков (*Ferula tadshikorum* M. Pimen), произрастающей на средних высотах Таджикистана.

Для ИК-спектроскопического исследования в связи с малой изученностью были выбраны смолы образцов:

1. «Катрони КТ» – смола КТ
2. «Катрони хушки КТ» – сухая смола КТ
3. «Экстракти обии КТ» – водный экстракт КТ
4. «Экстракти спиртии 40°C КТ» – экстракт из 40%-ного спиртового раствора КТ.

С помощью ИК-Фурье спектроскопии были записаны спектры образцов Камоли Точик с использованием прибора Spectrum 65 FT-IR (Perkin Elmer, Швейцария). Спектрометр оснащен приставкой нарушенного полного внутреннего отражения (НПВО), (Attenuated total reflection-ATR, MIRACLE) с кристаллом ZnSe. Каждый записанный спектр был получен в среднем из 16 сканирований, которые варьировались в диапазоне от 4000 см^{-1} - 600 см^{-1} с разрешением 4 см^{-1} . Измерения проводились на образцах, после снятия фонового спектра, записанного перед каждым анализом. Каждый спектр был проанализирован с помощью программного обеспечения Perkin Elmer Spectrum, версия 10.03.07.

Результаты исследований показали следующее:

На ИК-спектре КТ (рис. 1-4) присутствуют две широкие полосы средней интенсивности: это 3369 см^{-1} , которая относится к валентным колебаниям ОН-групп органических кислот и NH-групп аминов, а также деформационным колебаниям С-Н-ароматических соединений.

Интенсивность полос от 2966 см^{-1} , обусловлены симметричными и асимметричными валентными колебаниями СН11-группировок. Полоса средней интенсивности 1730 см^{-1} принадлежит валентным колебаниям ароматических СР-групп, что подтверждается и наличием слабой полосы деформационных колебаний [5, 6].

Слабая полоса при 1611 см^{-1} может свидетельствовать о присутствии эфирных масел с колебаниями связи $>C=C<$. Серия полос в области $1550-1351\text{ см}^{-1}$ может принадлежать деформационным колебаниям СН₃-, СН₂-группировок и ОН-группам свободных кислот, таких как феруловая 1279 см^{-1} к валентным колебаниям ОН-групп. Полоса 1030 см^{-1} , присутствующая в спектрах, относится к валентным колебаниям связи НС=СН растительных масел, а полоса 835 см^{-1} к деформационным колебаниям ароматического кольца.

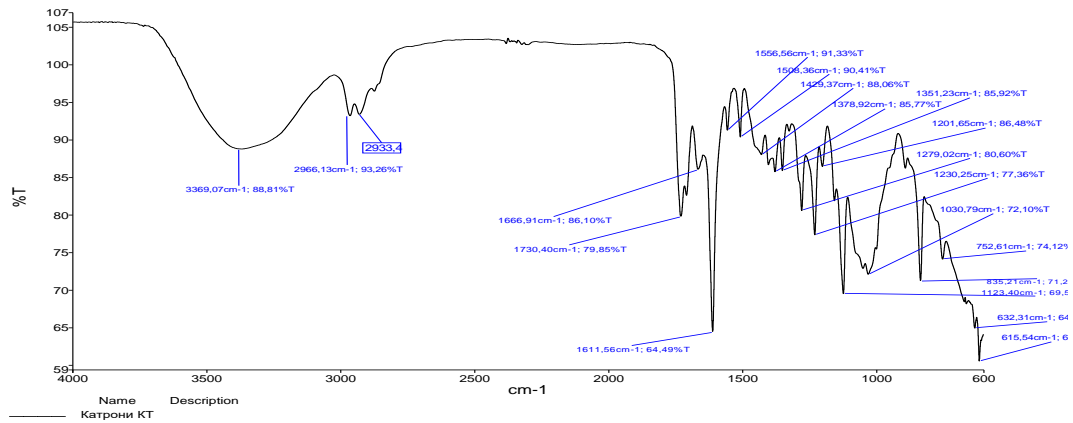


Рис. 1. ИК-спектр образца смолы «Катрони КТ».

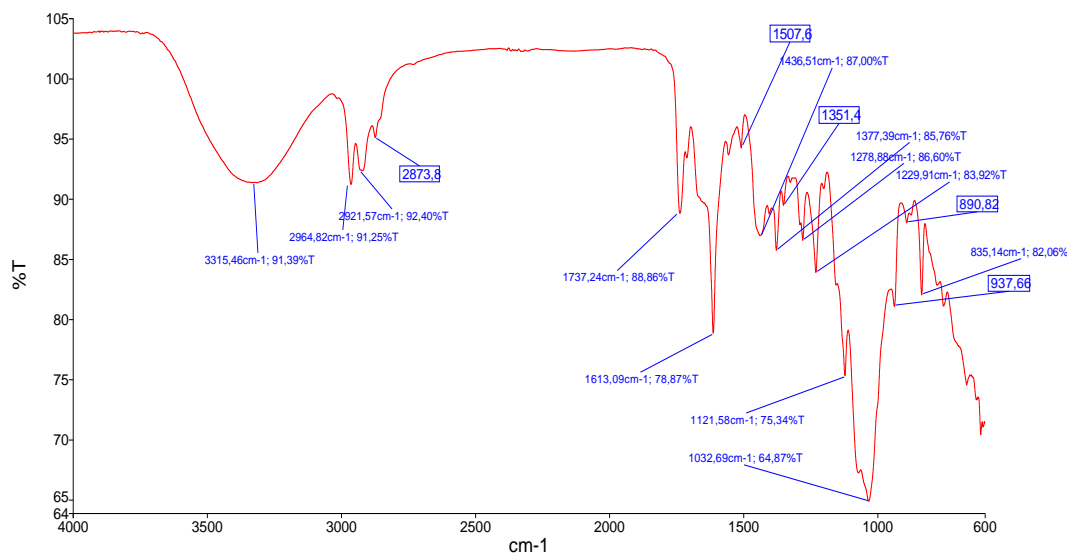


Рис. 2. ИК-спектр образца сухой смолы «Катрони хушки КТ».

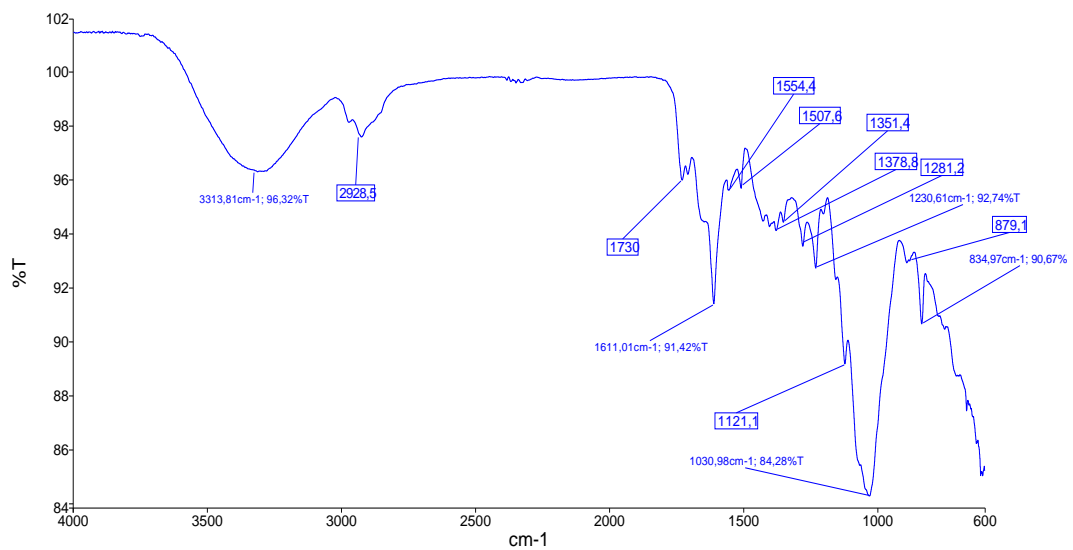


Рис. 3. ИК-спектр образца водного экстракта смолы «КТ».

Слабая полоса при 1611 см^{-1} может свидетельствовать о присутствии эфирных масел с колебаниями связи $>C=C<$. Серия полос в области $1550\text{-}1351\text{ см}^{-1}$ может принадлежать деформационным колебаниям CH_3 -, CH_2 -группировок и OH -группам свободных кислот, таких как феруловая 1279 см^{-1} к валентным колебаниям OH -групп. Полоса 1030 см^{-1} , присутствующая в спектрах относится к валентным колебаниям связи $\text{HC}=\text{CH}$ растительных масел, а полоса 835 см^{-1} к деформационным колебаниям ароматического кольца.

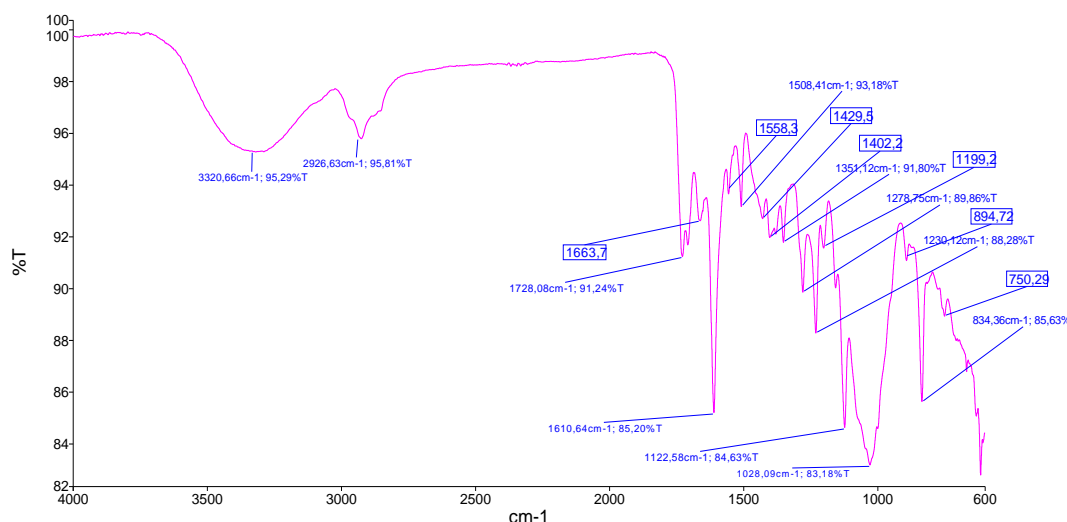


Рис. 4. ИК-спектр образца смолы «КТ» из 40%-ного спиртового экстракта.

Необходимо отметить, что указанные полосы поглощения характерны для всех исследуемых образцов.

Сравнительный анализ данных спектров путем наложения данных ИК-спектров в основном указывает на схожесть качественного состава исследуемых образцов вне зависимости от способов извлечения. В спектрах ИК смол «катрони КТ» и сухой смолы «катрони хушки КТ» присутствуют полосы поглощения в областях 2966.13 см^{-1} и 2933.4 см^{-1} , отвечающие колебаниям CH_n -группировок, тогда как в ИК спектрах водных и спиртовых экстрактах данные полосы отсутствуют. Полоса средней интенсивности в области 1730 см^{-1} не наблюдается только в спектре ИК водного экстракта КТ, а полоса 1666.91 см^{-1} наблюдается только спектре сухой смолы «катрони хушки КТ». Полоса в области 1429.37 см^{-1} отсутствует во всех образцах, кроме сухой смолы, тогда как интенсивные полосы в областях 1123.40 и 835 см^{-1} присутствуют в спектрах ИК всех образцов, кроме водного экстракта «КТ». Данные сравнения могут свидетельствовать о том, что в составе водного экстракта содержание масел присутствует в незначительном количестве.

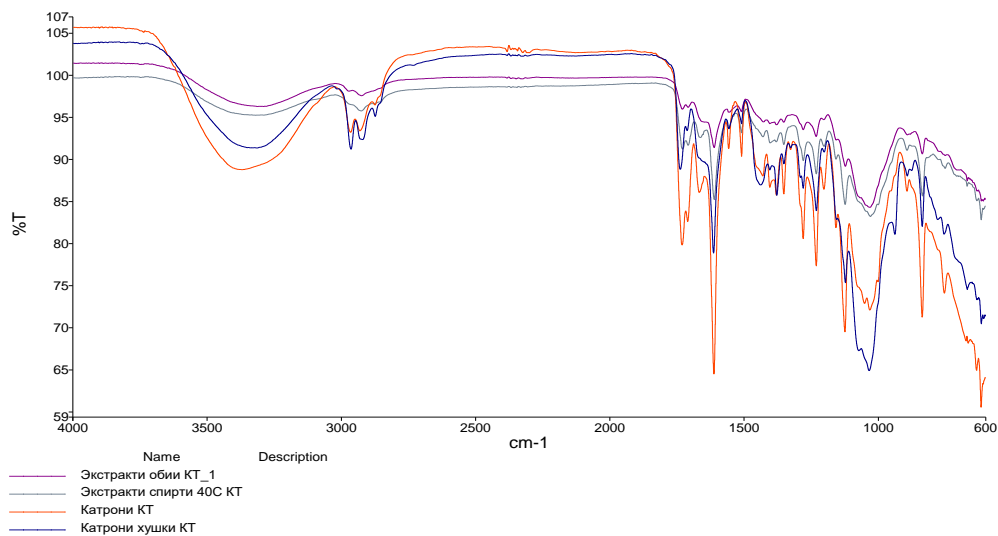


Рис. 5. ИК-спектры образцов четырех смол «КТ»

(— водный экстракт КТ, — спиртовый экстракт КТ, — смола КТ и — сухая смола КТ).

Интенсивные полосы при 1611 см^{-1} от $>C=C<$ групп, в случае со смолой «катрони хушки КТ» свидетельствуют о содержании в нем ненасыщенных органических терпеноидов. Интенсивные полосы поглощения в области 1030 см^{-1} , о высоком содержании растительных масел в составе смол «катрони хушки КТ» и «катрони КТ».

При сравнении ИК-спектров водных и спиртовых экстрактов КТ существенных различий состава веществ не наблюдаются.

Для количественной оценки состава смол, полученных из феруллы различными способами на предмет фенольных составляющих, нами был использован, часто применяемый в настоящее время, высокоэффективный метод электрофореза, которая применяется для изучения химического состава [7-9].

Для контроля содержания Фенольных соединений был использован метод капиллярного электрофореза на приборе 3D Agilent HPCE G1600X с использованием компьютерной программы Agilent Chem Station Software B.02.01 SR2. Для разделения фенольных соединений применяли капилляр размером 56 см x 50 мкм. В качестве контроля использовали стандартные фенольные соединения фирмы Sigma (2,4-дигидроксибензилэтанол, гомогентистовая кислота, сиринджовая кислота, диметоксибензойная кислота, трансинамовая кислота, синаповая кислота, транс-ферулловая кислота, катехин, эпикатехин, физетингидрат, пара-кумаровая кислота и дигидроксибензойная кислота). Калибровочная кривая построена по стандартным фенольным соединениям с концентрацией от 3 до 100 мг/л. Детектирование – УФ при помощи диодоматричного детектора, при длине волны 280 нм.

Количественный анализ проведен на основе вычисления площадей выявленных пиков фенольных соединения. Полученные результаты исследования состава смол в вод-

но-спиртовом растворе (метанол:вода) приведены на рис. 6-9. Все растворы вводили в капилляр электрофореза через 0.2 мкм мембранный фильтр

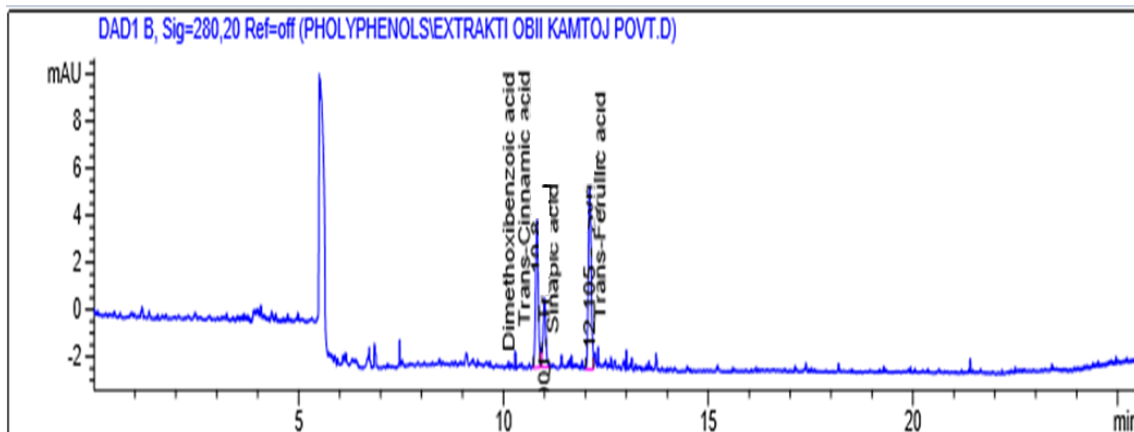


Рис. 6. Электрофореграмма фенольных соединений водного экстракта КТ.

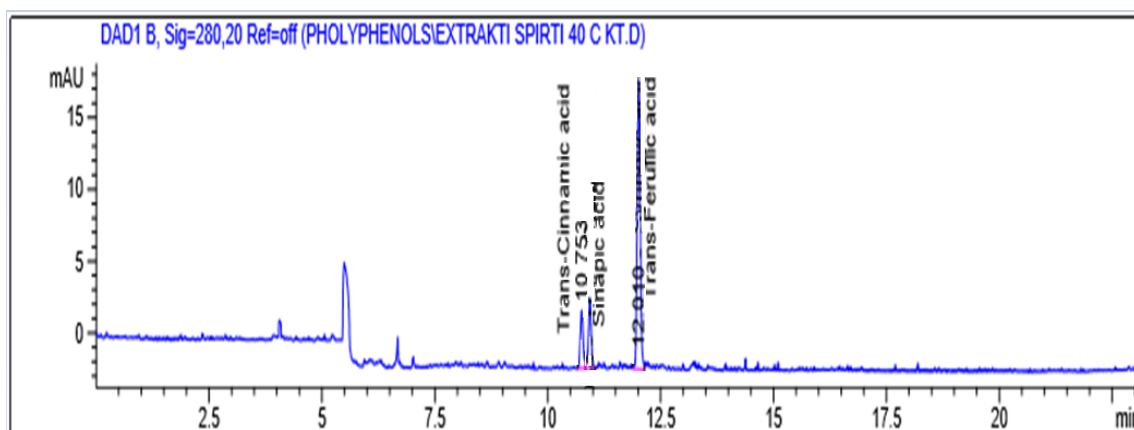


Рис. 7. Электрофореграмма фенольных соединений спиртового экстракта КТ.

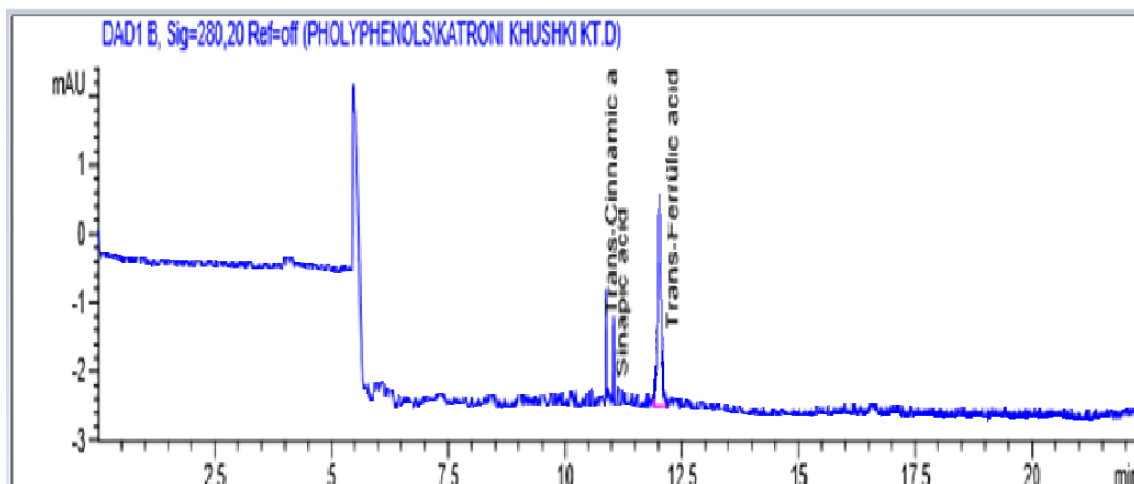


Рис. 8. Электрофореграмма фенольных соединений сухой смолы КТ.

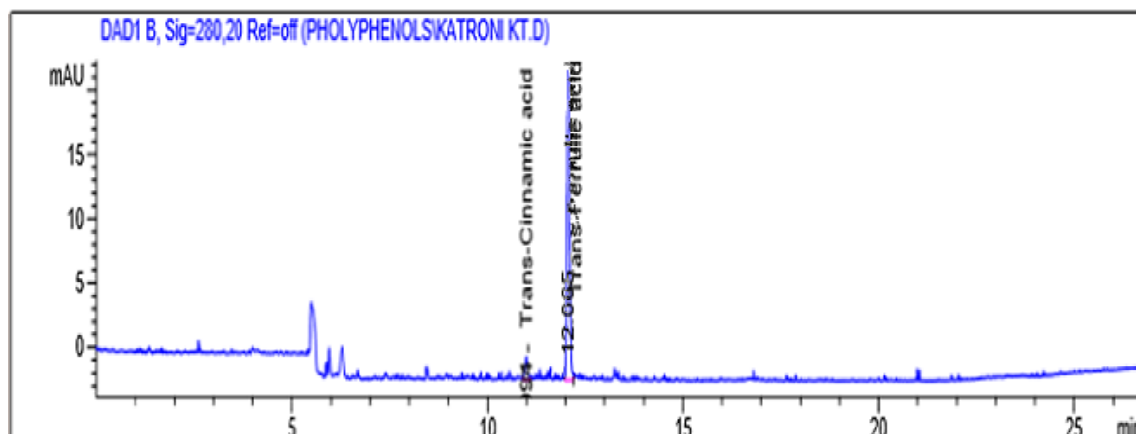


Рис. 9. Электрофореграмма фенольных соединений смолы КТ.

В качестве ведущего электролита использован боратный буфер с добавлением изопропанола.

Метод капиллярного электрофореза, позволяет идентифицировать количественное содержание состава исследуемых смол. Так, результаты количественного анализа свидетельствуют о присутствии ценных, а именно таких ароматических кислот, как диметоксибензойная кислота, транс-синнамовая кислота, синаповая кислота и транс-ферулловая кислота в образцах исследуемых смол (табл. 1).

Таблица 1

Содержание компонентов в составе различных смол, по результатам электрофореграммы

Название соединения	Содержание, мг/л			
	Водный экстракт КТ	Спиртовый экстракт КТ	Сухая смола КТ	Смола КТ
диметоксибензойная кислота	1.20	39.98	–	2.3
транс-синнамовая кислота	54.28	–	1.10	1.85
синаповая кислота	2.70	6.08	0.70	–
транс-ферулловая кислота	38.18	121.8	17.6	142.4

В водном экстракте КТ присутствуют все перечисленные кислоты в умеренном количестве, в составе спиртового экстракта КТ не выявлено присутствие транс-синнамовой кислоты, тогда как в составе сухой смолы КТ отсутствуют следы диметоксибензойной кислоты. Состав смолы КТ отличается тем, что в нем не выявлено присутствие синаповой кислоты. Транс-ферулловая кислота присутствует во всех исследуемых образцах. Максимальное содержание отмечено в составе смолы КТ – 142.4 мг/л, минимальное ее содержание отмечено в составе водного экстракта КТ – 38.18. В составе спиртового экстракта КТ ее содержание составляет 121.8 мг/л. Составы двух экстрактов КТ выгодно отличаются от других умеренных количеств транс-синнамовой кислоты в водном экстракте (54.28 мг/л) и диметилбензойной кислоты в спиртовом экстракте КТ (39.8 мг/л). Как показывает анализ количественного состава образцов смол, каждая из них отличается друг от друга выгодным содержанием того или иного компонента.

Результаты качественного анализа смол различного происхождения свидетельствуют о широком спектре их химического состава. По результатам количественного анализа с использованием электрофореграмм путем определения последовательности пиков, имеется возможность идентификации и количественного определения конкретного соединения. Капиллярный электрофорез обеспечивает высокую эффективность разделения, что является объектом наших дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Машанов В.И., Покровский А.А. Пряно-ароматические растения. – М.: Агропромиздат, 1991, 200 с.
2. Саидходжаев А.И., Никонов Г.К. Сложные эфиры корней *Ferula kuhistanica*. Химия природных соединений, 1974, № 4, с. 525-527.
3. Саидходжаев А.И., Сагитдинова Г.В., Головина Л.А., Кадыров А.Ш. Строение новых сложных эфиров из растений рода *Ferula*. V Советско-индийский симпозиум по химии природных соединений. Тезисы докладов. – Ереван, 1978, с. 80.
4. Витман К.Б. Химическое исследование сумбулевого корня и мускуса. – М.: Наука, 1986, 200 с.
5. Наканиси К. Инфракрасные спектры и строение органических соединений. – М.: «Мир», 1965, 209 с.
6. Prech Je., Vjul'mann F., Affol'ter K. Opredelenie stroenija organicheskikh soedinenij. Tablicy spektral'nyh dannyh [Determination of structure of organic compounds. Tables spectral data]. Moscow, Vinom. Laboratoriya znaniy Publ., 2006, pp. 251-318.
7. Шаповалова Е.Н., Шпигун О.А. Практикум по инструментальным методам. Часть II Хроматографические методы. Задачи и вопросы по хроматографическим методам. – М.: МГУ, 1998, 53 с.
8. Намазов А.А., Аскарлов И.Р., Саггарова Б.Н. Анализ синтетических красителей в безалкогольных напитках методом капиллярного электрофореза. – Вестник БГТУ им. В.Г.Шухова, 2011, №3, с. 120-123.
9. Мирзаев Д.М., Хошимов И.Э. Высокоэффективные методы изучения химического свойства безалкогольных напитков. – The Scientific Heritage, No 56, 2020, pp. 17-20. DOI: 10.24412/9215-0365-2020-56-3-17-20

Д.Х.ЭШҚУВАТОВ, Қ.ХОҶАЕВ*, Ш.Н.ШАМСУДИНОВ*, Т.Х.АБДУЛЛАЕВ,
Қ.Н.ҶАМШЕДОВ, И.Ф.РАҶИМОВ, З.Қ.НАЗАРОВА

ТАҲҚИҚИ ТАРКИБИ СИФАТӢ ВА МИҚДОРӢИ ҚАТРОНҲОИ ФЕРУЛЛАГИИ «КАМОЛИ ТОҶИК»

Институти химияи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон,

**Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айни*

Бо истифода аз усулҳои спектроскопияи инфрасурх (ИС) ва усули электрофорези катрағӣ таркиби сифатӣ ва миқдории намунаҳои қатрони “Камоти Тоҷик” гузаронида шуд. Муайян карда шуд, ки таркиби сифатӣ ва миқдории намунаҳои таҳқиқшаванда аз моддаҳои гуногуни органикӣ ва равшанҳои эфирӣ иборат аст. Маълумотҳо оиди

гуногунии таркибӣ ва миқдории намунаҳои таҳқиқшаванда дар робита аз усули ҷудокунии бо роҳи муқоисаи спектрҳои ИС оварда шудааст. Нишондодҳои электрофореграммаҳо ба гуногунии таркибии моддаҳои қиматбаҳо дар таркиби қатронҳои «Қамоли Тоҷик» дар вобастагӣ аз усул ва шароитҳои ҷудокунии онҳо ишора мекунад.

Қалимаҳои калидӣ: спектроскопияи ИС, ферулла, терпеноидҳо, смолаҳо, электрофорези ҷағрағӣ, электрофореграмма, пайвастиҳои фенолӣ.

D.KH.ESHQUVATOV, J.KHODZHAEV*, SH.N.SHAMSUDINOV*, T.KH.ABDULLAEV,
J.N.JAMSHEDOV, I.F.RAKHIMOV, Z.J.NAZAROVA

RESEARCH OF QUALITATIVE AND QUANTITATIVE COMPOSITION OF FERULL RESIN "KAMOLI TOJIK"

*V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National Academy of Sciences of Tajikistan,
Tajik State Pedagogical University named after S.Aini

A study of samples of resins "Kamoli Tojik" of various origins using IR spectrometry and a quantitative study using the method of capillary electrophoresis was carried out. The qualitative and quantitative composition of the samples under study has been established, which include various organic compounds, essential oils. Data are presented that indicate the difference in composition depending on the method of extraction in the studied samples by comparing the IR spectra. Electrophoregram data shows different content of valuable products in the composition of resins "Kamoli Tojik", depending on the methods of their extraction.

Key words: IR spectroscopy, ferula, terpenoids, resins, capillary electrophoresis, electrophoregram, phenolic compounds.

УДК 546.273+544.4

А.П.ТАГАЕВ

**РАЗЛОЖЕНИЕ БОРОСИЛИКАТНОГО СЫРЬЯ МЕСТОРОЖДЕНИЯ
АК-АРХАР ТАДЖИКИСТАНА «ЦАРСКОЙ ВОДКОЙ»**

*Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана
Поступила в редакцию 09.02.2022 г.*

Представлены результаты исследований, разработки и создания кислотной технологии получения полезных компонентов из боросиликатного сырья Таджикистана переработкой «царской водкой», обеспечивающей высокое извлечение составных компонентов.

Ключевые слова: разложение, боросиликатная руда, «царская водка», извлечения, оксид бора.

Бор и его соединения обладают уникальными свойствами, которые позволяют отнести их к важнейшим материалам современной техники и технологии. Это высокая твёрдость, тугоплавкость одних соединений и легкоплавкость других, способность поглощать тепловые нейтроны, высокая теплотворная способность, химическая стойкость, легирующие, дезинфицирующие и антисептические свойства, огнестойкость, способность повышать урожайность многих сельскохозяйственных культур и др.

Уровень потребления бора в любой стране характеризует уровень её технического развития, так как использование элементарного бора и его соединений в различных областях экономики способствует существенному улучшению показателей качества конструкционных и композиционных материалов в промышленности, специальных видов топлива в энергетике, товаров повседневного спроса и т.д.

Борное сырьё является одним из немногих видов полезных ископаемых, мировое производство которых за всю историю существования борной отрасли промышленности не испытало ни депрессий, ни спадов, находится на стабильном уровне, а с выявлением новых областей потребления перечень малотоннажных борных производств неуклонно возрастает.

Адрес для корреспонденции: Тагаев Алиакбар Пулотович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ, E-mail: aliakbar.tagaev91@mail.ru.

Одной из основных тенденций развития производства является расширение номенклатуры борных соединений. За последние годы разработаны и внедрены технологические процессы производства новых борных продуктов, таких как борат кальция, перборат натрия, порошкообразный борный ангидрид, октаборат натрия и другие. Подготовлены к внедрению способы получения ряда металлов [1-2].

Дальнейший научно-технический прогресс, вероятно, приведёт к открытию новых областей применения бора, благодаря уникальным свойствам этого элемента и его стабильных изотопов.

Одним из крупнейших месторождений борного сырья, которое во времена советского союза уже было подготовлено к освоению, является Ак-Архарское месторождение боросиликатной руды на Памире (Таджикистан) со средним содержанием B_2O_3 7–13%. Боросиликатный минерал данбурит содержит до 27–28% B_2O_3 . Разработана и испытана в опытно-промышленном масштабе технология обогащения руды и переработки концентратов. Боросиликатный концентрат содержал до 20% B_2O_3 при извлечении около 80%. Серьёзным препятствием для освоения месторождения были географические условия его залегания — высокогорное расположение на высоте около 4000 м над уровнем моря, а также трудная вскрываемость минерала данбурита.

Боросиликатные породы месторождения Ак-Архар Таджикистана, состоящие в основном из данбурита, пироксена, гидробороцита, кальцита, кремнезема и других сопутствующих минералов, являются перспективным сырьем для получения борной кислоты. Содержащиеся в составе боросиликатного сырья железо, алюминий и другие компоненты делают его перспективным для комплексного использования.

Ранее, в работах [4-6], были изучены химический и минералогический составы исходного боросиликатного сырья и его концентрата, а также механизм взаимодействия данного сырья различными минеральными кислотами.

Найдены оптимальные параметры процесса разложения сырья и разработана кислотная технология получения борной кислоты, солей алюминия, железа и кальция, выщелачиванием исходной и предварительно обожженной боросиликатной руды минеральными кислотами.

Дана термодинамическая оценка протекавших реакций при кислотном разложении боросиликатного сырья [7].

В данной работе приведены результаты исследования процесса разложения исходного боросиликатного сырья «царской водкой» (то есть смесь азотной и соляной кислоты, взятая в соотношении 1:3 по объему) с целью повышения вскрываемости руды без предварительного обжига.

Опыты проводили в термостатированном реакторе – сосуде с рубашкой емкостью 0.20 л, снабженном мешалкой и обратным холодильником.

После достижения необходимой температуры исходный материал загружали в реактор, добавляли к нему «царскую водку» и дозировали по стехиометрическому количе-

ству расчета образования солей железа, алюминия, кальция и борной кислоты в определенном соотношении. По окончании процесса кислотного разложения пульпу фильтровали, и определяли химический состав твердой (остатка) и жидкой (аликвотной) фаз [4, 5].

В экспериментах масса навески исходного боросиликатного сырья составляла 5 г. Исходя из имеющихся литературных данных, были изучены возможность и особенности разложения боросиликатного сырья «царской водкой». Выбор «царской водки» для разложения борного сырья вызван необходимостью получения полезных компонентов из боросиликатного сырья Таджикистана с большим выходом.

Результаты исследований влияния различных физико-химических факторов на процесс разложения боросиликатной руды «царской водкой» приведены на рис. 1.

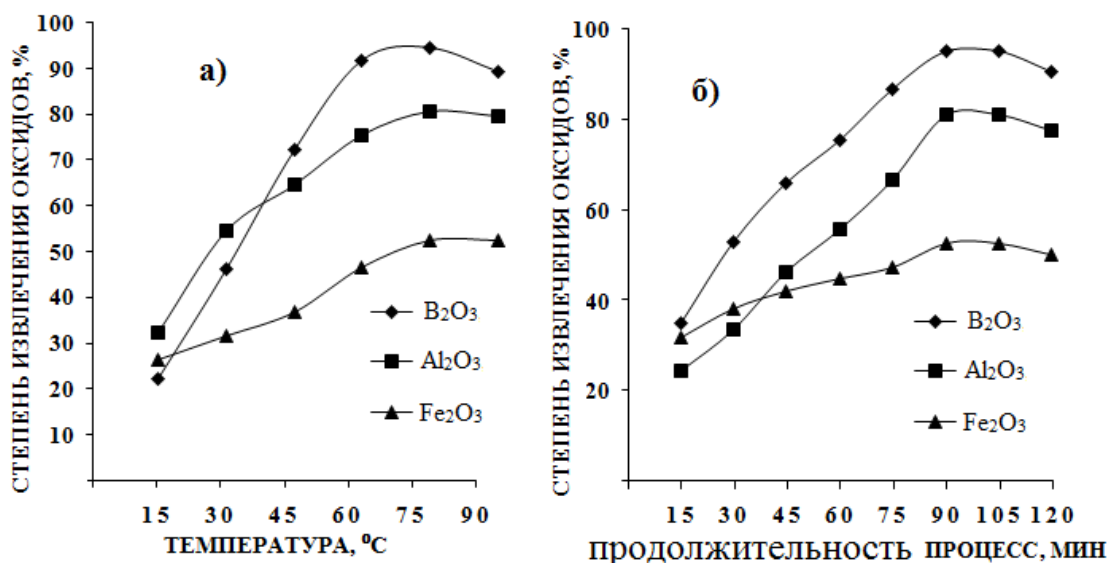


Рис. 1. Зависимости степени извлечения оксидов B₂O₃, Al₂O₃, и Fe₂O₃ из состава исходного боросиликатного руда от: а) температуры; б) продолжительности процесса.

Изучено влияние температуры на ход реакции до 90°C. Установлено, что боросиликатная руда начинает вскрываться уже при температуре 15°C. Руду обрабатывали смесью 35% соляной и 65%-ой азотной кислоты в объёмных соотношениях 3:1 при продолжительности процесса 90 мин. Как видно из рис.1а, в интервале температур от 15 до 75°C степень извлечения оксидов (B₂O₃, Al₂O₃, и Fe₂O₃) была следующей: степень извлечения B₂O₃ находилась в интервале 22.28-94.71%; Al₂O₃ – 32.19-80.63%; и Fe₂O₃ – 26.18-52.35% (рис.1а). С увеличением температуры выше 90°C степень извлечения оксидов (B₂O₃, Al₂O₃, и Fe₂O₃) падала на 1-1.5%, что связано с усложнением процесса перемешивания за счёт испарения кислотного реагента и сгущения пульпы. Особенно эффективным является интервал температуры 80-90°C, когда наблюдалось увеличение степени разложения оксидов, достигающее максимального значения.

Зависимости степени извлечения оксидов B₂O₃, Al₂O₃, и Fe₂O₃ из исходного боросиликатного сырья от продолжительности процесса выщелачивания изучали в интервале

времени от 15 до 120 мин. Как видно из рис.1б, с увеличением длительности процесса переработки от 15 до 90 мин при оптимальной температуре (90°C), степень извлечения оксидов составляла: B_2O_3 – 34.82-94.71%; Al_2O_3 – 24.03-80.63%; и Fe_2O_3 – 31.41-52.35%. Увеличение продолжительности процесса до 120 мин приводило к снижению степени извлечения оксидов B_2O_3 (90.35%), Al_2O_3 (77.4%), и Fe_2O_3 (79.73%). Видимо это связано с испарением кислоты при высокой температуре и недостатке ионов водорода в реакционной зоне для образования солей.

По результатам проведённых исследований можно рекомендовать следующие оптимальные условия кислотного разложения боросиликатной руды: продолжительность процесса кислотной обработки – 90 мин; температура кислотной разложения – 90°C; 100% стехиометрическое количество «царской водки». При этих условиях степень извлечения полезных компонентов составляла: B_2O_3 – 94.71%; Al_2O_3 – 80.63%; и Fe_2O_3 – 52.35%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кешан А.Д. Синтез боратов в водном растворе и их исследование. – Рига: изд-во АН Латв. ССР, 1955, 240 с
2. Benhossain A. C. г. Acad. Sci., 1972, v. 274, № 17, pp. 1516-1519
3. Плышевский Ю.С., Ткачев К.В., Никольский Б.А. Комплексная переработка боросиликатного сырья. Рук. деп. в ВИНТИ, № 4088-76.
4. Мирсаидов У.М., Курбонов А.С., Якубов З.Т., Курбонбеков А., Маматов Э.Д., Назаров Ш.Б. Извлечение полезных компонентов из боросиликатного сырья с различным содержанием бора кислотными методами. – Изв. АН РТ, 2015, № 2(159), с. 25-28.
5. Курбонов А.С., Мирзоев Д.Х., Назаров Ш.Б., Мисратов Ж.А., Мирсаидов У.М. Изучение особенностей разложения бор- и алюмосиликатных руд минеральными кислотами. – Изв. АН РТ, 2017, № 1(166), с. 84-87.
6. Ашуров Н.А., Маматов Э.Д., Курбонов А.С., Ятимов П., Мирсаидов У.М. Сернокислотное разложение данбурита месторождения Ак-Архар с последующим обжигом. – ДАН РТ, 2008, т. 51, № 9, с. 672-676.
7. Курбонов А.С., Тагоев М.М., Акрамзода Р., Тагаев А.П., Мирсаидов У.М. Сравнительная оценка термодинамических характеристик разложения боросиликатных руд минеральными кислотами и уксусной кислотой. – ДАН РТ, 2021, т. 64, № 5-6, с. 314-317.

А.П.ТАҒАЕВ

ТАҶЗИИ МАЪДАН БОРОСИЛИКАТИИ КОНИ АК-АРҲАРИ ТОҶИКИСТОН ТАВАССУТИ “ШАРОБИ ШОҲ”

Институти химияи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон

Дар мақола натиҷаҳои тадқиқот ва тарҳи технологияи коркарди кислотагии ба даст овардани чӯзҳои фойданоки таркиби маъдани боросиликатии Тоҷикистон бо “шароби шох” оварда шудааст, ки дарачаи баландтарини ҷудошавии қисмҳои таркибиро таъмин мекунад оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: таҷзия, маъдани боросиликатӣ, «шароби шох», чудошавӣ, оксиди бор.

A.P.TAGAEV

**DECOMPOSITION OF BOROSILICATE RAW MATERIALS FROM THE
AK-ARKHAR DEPOSIT OF TAJIKISTAN WITH "ROYAL WATER"**

V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The results of research, development and establishing of an acid technology for obtaining useful components from borosilicate raw materials of Tajikistan by processing with "royal water", which provides a high extraction of constituent components, are presented in this article.

Key words: decomposition, borosilicate ore, royal water, extraction, boron oxide.

УДК 546.621

О.А.АЗИЗОВ, Д.Т.ИСОЗОДА, И.МИРСАИДЗОДА

**ПОЛУЧЕНИЕ ЭНЕРГОЁМКИХ ВЕЩЕСТВ ИЗ МЕСТНЫХ
АЛЮМОСИЛИКАТНЫХ РУД**

*Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности
НАН Таджикистана*

Поступила в редакцию 20.04.2022 г.

В статье приведены результаты разработки способа и условия получения алюмогидрида лития взаимодействием эфирата хлорида алюминия с гидридом лития. Хлорид алюминия получен путём хлорирования непосредственно из местных алюмосиликатных руд – аргиллитов и каолиновых глин месторождения Чашма-Санга. Определены условия получения $AlCl_3$ и $LiAlH_4$ в среде эфира.

Ключевые слова: алюмосиликатная руда, хлорид алюминия, алюмогидрид лития, эфир, гидрид лития.

В последнее время становится всё более актуальной разработка возобновляемых источников энергии, альтернативных углеводородным. В этом аспекте водородная энергетика является наиболее экологически чистым источником. Многие водородсодержащие вещества относятся к энергоёмким веществам, в частности, это боро- и алюмогидриды металлов. Например, борогидрид лития – $LiBH_4$ содержит 18% водорода. Алюмогидрид лития является ключевым компонентом, который широко используется как энергоёмкое вещество для получения компонентов твёрдого ракетного топлива и других гидридных соединений [1, 2].

Настоящая работа является продолжением наших исследований [3-5], посвящённых получению гидридных соединений путём переработки местных минеральных руд. В

Адрес для корреспонденции: Азизов Олимджон Азизович, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по химической, биологической, ядерной и радиационной безопасности НАНТ. E-mail: o.azizov@cbrn.tj

ней представлены результаты получения алюмогидридов щелочных металлов, в частности алюмогидрида лития с использованием алюмосиликатных руд Таджикистана.

В качестве исходных веществ использовали аргиллиты и каолиновые глины месторождения Чашма-Санг Таджикистана. Минералогический и химический составы указанных алюмосиликатов приведены в работах [6, 7].

Экспериментальная часть

Предварительно руды обжигали при 800-900°C, затем измельчали и обрабатывали соляной кислотой для удаления ионов железа.

Для получения алюмогидрида лития необходимы гидрид лития и хлорид алюминия. Исходные реагенты – LiH с чистотой более 98% и AlCl₃ получали в среде эфира из алюмосиликатных руд (аргиллитов или каолиновых глин).

Процесс получения эфирата AlCl₃ проводится на модернизированной нами установке, представленной на рис.1.

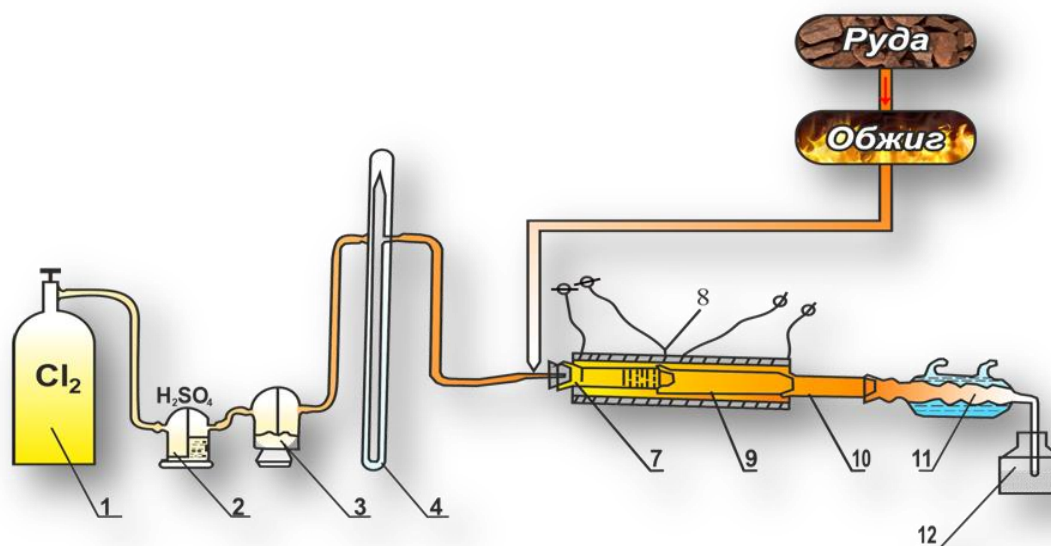


Рис. 1. Схема установки низкотемпературного хлорирования аргиллитов и каолиновых глин (1 – баллон с хлором; 2 – склянка Тищенко для жидких поглотителей (конц. H₂SO₄); 3 – склянка Тищенко для твердых поглотителей; 4 – реометр; 5 – руда; 6 – печь для обжига; 7 – реактор; 8 – электрическая печь; 9 – термопара; 10 – двухсекционная печь; 11 – холодильник; 12 – поглотитель с 10% раствором NaOH).

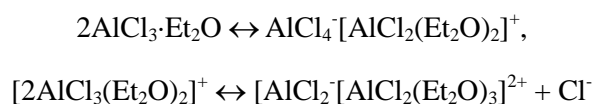
Хлорирование проводят при температуре 800-1000°C, содержание восстановителя (угля) в шихте (30%). Размер частиц алюмосиликатной руды и угля 0.1 мм.

В качестве примера можно использовать аргиллиты месторождения Чашма-Санг. В реактор помещаем 100 г аргиллитов и 30 г угля. Хлорирование проводим в соответствии с установкой (рис. 1). При температуре 800-1000°C в присутствии восстановителя возгоняется хлорид алюминия, который проходит через специальный фильтр и поглоща-

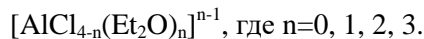
ется в диэтиловом эфире. Проведено также изучение хлорирования каолиновых глин месторождения Зидды по вышеуказанной методике.

Получение эфирата хлорида алюминия ($\text{AlCl}_3 \cdot \text{Et}_2\text{O}$) выгодно отличается от других методов, так как $\text{AlCl}_3 \cdot \text{Et}_2\text{O}$ получают непосредственно взаимодействием хлора с алюмосиликатной рудой, предварительно удаляя из руды ионы железа. Эфирный раствор AlCl_3 был анализирован на содержание алюминия и хлора.

Изучены некоторые свойства эфирата AlCl_3 . На рис. 2 и 3 представлены ЯМР-спектры эфирата AlCl_3 и сольвата $\text{AlCl}_3 \cdot \text{Et}_2\text{O}$. В спектре ЯМР²⁷ Al эфирного раствора хлорида алюминия с концентрацией 100 г/л (рис. 2) наблюдается одиночный уширенный сигнал с х.с. 101.1 м.д., характерный для координационного числа алюминия = 4, то есть в растворе существует комплекс $\text{AlCl}_3 \cdot 3\text{Et}_2\text{O}$. Следует заметить, что форма линии сигнала искажена, что свидетельствует о наложении ещё и других сигналов. При понижении температуры происходит уширение линии с появлением некоторых других сигналов с х.с. 103.7; 100.0; 92.4 м.д. Появление этих сигналов свидетельствует о наличии частиц типа AlCl_4^- (103.0 м.д.); $\text{AlCl}(\text{Et}_2\text{O})_3$ (92.4 м.д.); $\text{AlCl}_3 \cdot \text{Et}_2\text{O}$ (99.9 м.д.), то есть в растворе AlCl_3 в Et_2O происходит частичное диспропорционирование:

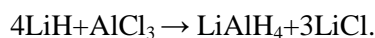


или общей формулой:



В спектре ЯМР³⁵ Cl раствора AlCl_3 наблюдается широкая линия с х.с.=+22 м.д., свидетельствующая о наличии одного типа атомов хлора и существенно ионном характере связи Al-Cl. Ширина линии определяется как квадрупольной релаксацией ³⁵Cl, так и участием атомов Cl⁻ в межмолекулярном обмене, согласно приведённой выше схеме.

Полученный эфират AlCl_3 непосредственно использовали для получения алюмогидрида лития по следующей реакции:



Задачей предложенного метода является разработка нового способа получения алюмогидрида лития при взаимодействии с хлоридом алюминия, полученного непосредственно из алюмосиликатных руд в процессе хлорирования. Кроме этого, поставленная задача достигается использованием местных сырьевых материалов Таджикистана. В ходе данного синтеза алюмогидрида лития уместно добавление 0.5-1.0 г сольвата гидрида алюминия в качестве инициатора.

Для синтеза алюмогидрида лития брали 200 г аргиллита, который подвергался процессу хлорирования при температуре 800-900°C, предварительно из руды удаляли железо. Руду смешивали с 30 г угля. Полученный эфират AlCl_3 непосредственно взаимодей-

ствует с 10 г LiH в среде диэтилового эфира. В процесс синтеза добавляли 0.5-1.0 г сольвата AlH_3 , как инициатора реакции. Общий выход составлял 93%. Получено 44.2 г LiAlH_4 .

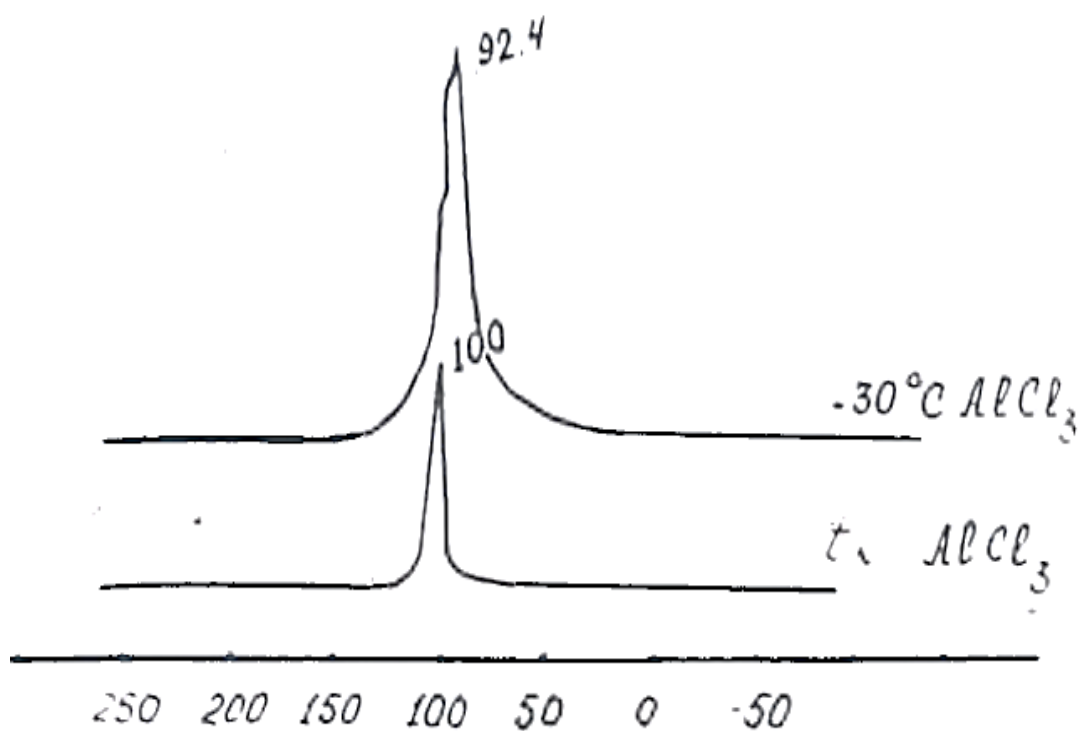


Рис. 2. Спектр ЯМР 27 Et_2O -растворов хлорида алюминия.

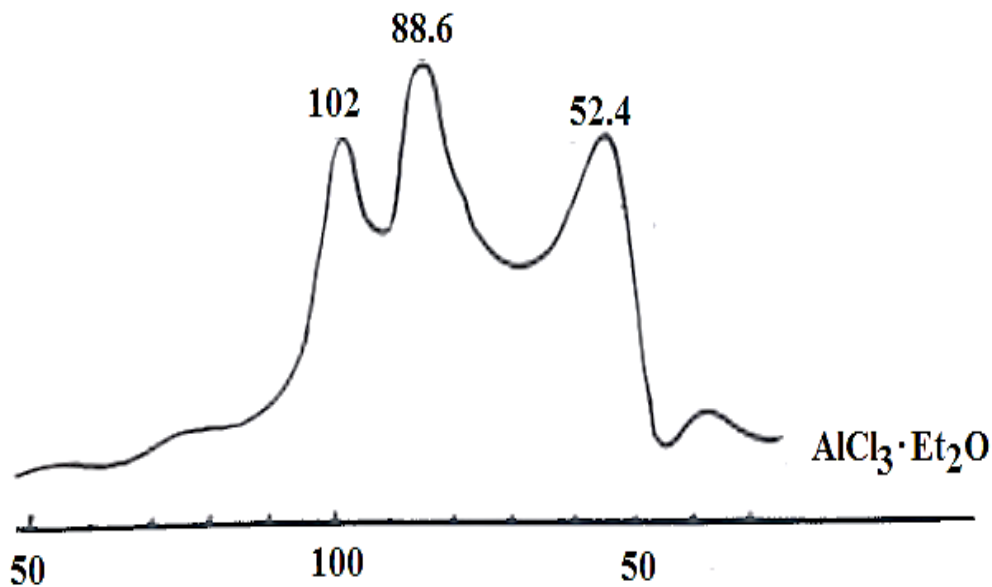


Рис. 3. Спектр ЯМР 27 Et_2O -сольватов хлорида алюминия.

Заклучение

Таким образом, показана возможность получения хлорида алюминия из алюмосиликатных руд путём хлорирующего обжига. Определены оптимальные условия проведения процесса обжига руды. Взаимодействием полученного эфирата хлорида алюминия с гидридом лития осуществлён синтез комплексного алюмогидрида лития.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигач А. Химия гидридов. – М.: Химия, 1969.
2. Мирсаидов У. Синтез, свойства и химические превращения боро- и алюмогидридов металлов. – Душанбе: Дониш, 2005, 302 с.
3. Малый патент № ТЈ 896 от 12.04.2018. Способ получения гидрида алюминия механохимическим методом. У.М.Мирсаидов, О.А.Азизов, А.Б.Бадалов, М.Ю.Акрамов. – ГПВ РТ. Бюл. №135, 2017, 6 с.
4. Малый патент № ТЈ 1109 от 19.08.2020. Способ получения алюмогидридов металлов из алюмосиликатных руд У.М.Мирсаидов, Д.Х.Мирзоев, Ш.Д.Отаев, О.А.Азизов, А.Бадалов, Ш.О.Аъзамов. – ГПВ РТ. Бюл. №163, 2020, 4 с.
5. Азизов О.А., Бадалов А., Мирсаидов И.У. Получение боро- и алюмогидридов щелочных металлов из местных сырьевых материалов Таджикистана. Сборник статей респуб. научно-теорет. конференции «Основы развития и перспективы химической науки в Республике Таджикистан», посвященной 60-летию химического факультета ТНУ и памяти д.х.н., проф., академика Академии наук РТ И.У.Нуманова, 2020, с. 308-309.
6. Мирсаидов У.М., Мирзоев Д.Х., Бобоев Х.Э. Комплексная переработка аргиллитов и каолиновых глин Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2016, 92 с.
7. Мирсаидов У.М., Маматов Э.Д. Комплексная переработка бор- и алюмосиликатных руд Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2013, 115 с.

О.А.АЗИЗОВ, Д.Т.ИСОЗОДА. И.МИРСАИДЗОДА

АЗ МАДДАҶОИ ЭНЕРГЕТИКА ГИРИФТАНИ МОДАИ МАҲАЛЛИИ АЛЮМИНОСИЛИКАТ

Агентии бехатарии химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола натиҷаҳои коркарди тарз, усул ва шарту шароити ҳосил кардани гидриди алюминийи литий бо роҳи таъсири мутақобилаи эфирати хлориди алюминий бо гидриди литий оварда шудааст. Хлориди алюминийро бевосита аз маъданҳои алюмосиликати маҳаллӣ – сангҳои сафедгил ва гилҳои каолинии қони Чашма-Санга бо роҳи хлор кардан ба даст меоранд. Шароити тайёр кардани $AlCl_3$ ва $LiAlH_4$ дар муҳити эфир муайян карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: маъданҳои алюминӣ, хлориди алюминӣ, алюмогидриди литий, эфир, гидриди литий.

O.A.AZIZOV, D.T.ISOSODA. I.MIRSAIDZODA

**OBTAINING ENERGY-INTENSIVE SUBSTANCES FROM LOCAL
ALUMINOSILICATE ORES**

*Agency for Chemical, Biological, Radiation and Nuclear Safety
of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

The article presents the results of the development of a method and a condition for acquiring lithium aluminum hydride by the interaction of aluminum chloride etherate with lithium hydride. Aluminum chloride is obtained by chlorination directly from local aluminosilicate ores - mudstones and kaolin clays of the source that originated in Chashma-Sanga. The conditions for the acquiring of $AlCl_3$ and $LiAlH_4$ in ether are determined.

Key words: aluminosilicate ores, aluminum chloride, lithium alum hydride, ether, lithium hydride.

УДК 546.273+553.08+536.722+536.421

Р.Дж.АКРАМЗОДА

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ РАЗЛОЖЕНИЯ
БОРОСИЛИКАТНЫХ РУД ТАДЖИКИСТАНА

Институт химии им. В.И. Никитина НАН Таджикистана

Поступила в редакцию 09.02.2022 г.

Дан анализ термодинамических характеристик процесса разложения боросиликатных руд при кислотном разложении. Показана вероятность протекания реакций, исходя из значений ΔG .

Ключевые слова: разложение, термодинамические характеристики, боросиликатная руда, минералы, энергия Гиббса.

Как известно, для выбора рациональных параметров реакций разложения руд различными реагентами необходимо знать термодинамические характеристики процесса разложения.

Для получения информации о возможности протекания процесса разложения и его устойчивости необходимо определение термодинамических значений ΔH_{298}° , ΔG_{298}° , $C_p = f(T)$, S_{298}° , а также энергии кристаллической решётки и значений равновесного давления. Кроме того, для термодинамических параметров необходимо рассчитать оценочные значения.

Сопоставление различных энергетических характеристик и способностей минералов к разложению воздействием различных реагентов выполнено в различных работах [1-4]. В этих работах вопрос находит своё развитие, главным образом, для минералов и руд.

Адрес для корреспонденции: Акрамзода Рустами Джурахон, 734063, г. Душанбе, Республика Таджикистан, ул. Айни, 299/2. *Институт химии им. В.И.Никитина НАНТ,*
Email: akramzoda.rustam.91@mail.ru

Боросиликаты – являются прочными соединениями, способными разлагаться при нагревании кислотами, кроме того, в раствор параллельно с различными полезными продуктами переходит борная кислота и борный ангидрид [5-9]. Выявлено, что после предварительного обжига руды в растворы слабых кислот (сернистой, уксусной, угольной и др.) также переходит B_2O_3 .

Ниже приводится термодинамическая оценка разложения боросиликатных руд минеральными кислотами.

При изучении различных химических реакций показано, что при образовании новых соединений происходит изменение их структур на электронном, атомном, ионном или молекулярном уровнях, при этом происходит поглощение или выделение теплоты, а также превращение химической энергии в другие виды энергии. Для установления химизма протекающих реакций, изучения реакционных способностей веществ, при расчёте энергий межмолекулярных связей используются значения энергетических эффектов соответствующих реакций. При изучении характеристик состояния химических систем и протекающих в них изменений необходимо знание таких термодинамических характеристик систем, как энергия Гиббса (G), энтропия (S) и энтальпия (H) [1-4].

При изучении изменения энергии Гиббса можно констатировать о принципиальных возможностях или невозможностях протекания определённых химических процессов. Если $\Delta G < 0$, то можно утверждать принципиальную возможность протекания исследуемого процесса. Как следует из уравнения $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$, на величину ΔG оказывает влияние температура, а также величина и знак значения ΔS . Также общеизвестно, что система является равновесной, если $\Delta H = 0$, а при $\Delta G > 0$ осуществление химического процесса невозможно.

А.С.Курбонов [10] определил условия разложения боросиликатных руд азотной кислотой, а также для азотнокислотного разложения выявил рациональные значения: температура обжига от 950 до 1000°C в течение 1 часа, разложение руды азотной кислотой при 90°C, концентрация HNO_3 составляла 15-20%. Также для исходной борной руды и её концентрата изучена кинетика разложения азотной кислотой.

Вычислены стандартные термодинамические значения, необходимые для изучения протекания возможных химических реакций, входящих в состав борного сырья оксидов, представленные в табл.1. Из данных табл.1 видно, что возможные реакции разложения борного сырья с азотной кислотой являются предпочтительными. В данном случае рассмотрены только оксиды веществ, которые, возможно, входят в состав борных руд.

Однако боросиликатная руда содержит различные минералы бора, а также примеси пустой породы – гранат ($3CaO \cdot Fe_2O_3 \cdot 3SiO_2$), геденбергит ($CaO \cdot FeO \cdot 2SiO_2$), кальцит, волластонит, поэтому при разложении протекают сложные гетерогенные реакции и, возможно, что для некоторых минералов ΔG будет положительно.

В [7, 8, 11] приводятся значения термодинамических характеристик оксидов, входящих в состав боросиликатной руды, при взаимодействии с серной и соляной кислотами. Результаты приведены в табл. 2 и 3.

У.Х.Усмоновой и др. [7, 8, 12] наряду с термодинамическими характеристиками боросиликатных руд определены условия разложения борной руды соляной и серной кислотами. Определены оптимальные условия протекания процесса разложения исходной борной руды. Исследована кинетика серно- и серно-кислотного разложения руды и показано, что процесс протекает в диффузионной области.

В [7, 8] изучены условия взаимодействия концентрата боросодержащего сырья месторождения Ак-Архар (Таджикистан) соляной и серной кислотами. Найдены оптимальные условия разложения концентрата борного сырья.

Также для концентрата боросодержащего сырья исследованы кинетические параметры серно-кислотного разложения. Для процесса разложения концентрата руды соляной кислотой вычислена энергия активации, величина которой составила 29.44 кДж/моль, что соответствует протеканию процесса разложения в области кинетических значений.

Для комплексной переработки боросодержащей руды месторождения Ак-Архар нами дан анализ термодинамических характеристик процесса разложения боросиликатных руд.

Таблица 1

Термодинамический анализ возможности протекания химических реакций азотнокислотного разложения оксидов, входящих в состав боросиликатного сырья

Химические реакции	ΔH_{373}° , кДж/моль·К	ΔS_{368}° , Дж/моль·К	ΔG_{368}° , кДж/моль·К	ΔG_{373}° , кДж/моль·К
$CaO + 2HNO_3 = Ca(NO_3)_2 + H_2O$	-268.26	-42.51	-255.68	-252.83
$Al_2O_3 + 6HNO_3 = 2Al(NO_3)_3 + 3H_2O$	-447.59	-497.29	-300.39	-267.07
$Fe_2O_3 + 6HNO_3 = 2Fe(NO_3)_3 + 3H_2O$	-453.60	-549.24	-291.02	-254.23
$MgO + 2HNO_3 = Mg(NO_3)_2 + H_2O$	-221.60	-108.94	-189.35	-182.05
$MnO + 2HNO_3 = Mn(NO_3)_2 + H_2O$	-189.64	-71.77	-168.40	-163.59
$K_2O + 2HNO_3 = 2KNO_3 + H_2O$	-211.61	57.87	-228.74	-232.62
$Na_2O + 2HNO_3 = 2NaNO_3 + H_2O$	-419.26	86.96	-445.00	-450.83
$8FeO + 26HNO_3 = 8Fe(NO_3)_3 + NO_2 + 13H_2O$	-2365.40	2569.32	-3125.92	-3298.06

Таблица 2

Термодинамический анализ возможности протекания химических реакций
солянокислотного разложения оксидов, входящих в состав исходного
боросиликатного сырья

Химические реакции	ΔH_{298}° , кДж/моль·К	ΔS_{298}° , Дж/моль·К	ΔG_{368}° , кДж/моль·К	ΔG_{303}° , кДж/моль·К
$CaO + 2HCl = CaCl_2 + H_2O$	-193.04	90.98	-226.52	-220.6
$Al_2O_3 + 6HCl = 2AlCl_3 + 3H_2O$	-238.80	-436.27	-78.26	-106.62
$Fe_2O_3 + 6HCl = 2FeCl_3 + 3H_2O$	-125.69	-488.75	54.17	22.40
$MgO + 2HCl = MgCl_2 + H_2O$	-2.14	22.02	-10.24	-8.81
$MnO + 2HCl = MnCl_2 + H_2O$	-46.89	16.29	-52.88	-51.82
$K_2O + 2HCl = 2KCl + H_2O$	-427.83	178.35	-493.46	-481.87
$Na_2O + 2HCl = 2NaCl + H_2O$	-354.85	28.49	-365.33	-363.48
$FeO + 2HCl = FeCl_2 + H_2O$	-107.13	-119.25	-63.25	-70.99

Таблица 3

Термодинамический анализ возможности протекания химических реакций
сернокислотного разложения оксидов, входящих в состав исходного
боросиликатного сырья

Химические реакции	ΔH_{298}° , кДж/моль·К	ΔS_{298}° , Дж/моль·К	ΔG_{368}° , кДж/моль·К	ΔG_{303}° , кДж/моль·К
$CaO + H_2SO_4 = CaSO_4 + H_2O$	-273.03	-18.33	-266.28	-267.47
$Al_2O_3 + 3H_2SO_4 = Al_2(SO_4)_3 + 3H_2O$	-181.63	-72.57	-154.92	-159.64
$Fe_2O_3 + 3H_2SO_4 = Fe_2(SO_4)_3 + 3H_2O$	-177.36	-65.50	-153.25	-157.51
$MgO + H_2SO_4 = MgSO_4 + H_2O$	-157.77	-22.47	-149.50	-150.96
$MnO + H_2SO_4 = MnSO_4 + H_2O$	-153.44	-35.95	-140.21	-142.54
$K_2O + H_2SO_4 = K_2SO_4 + H_2O$	-543.83	-7.39	-541.11	-541.59
$Na_2O + H_2SO_4 = Na_2SO_4 + H_2O$	-441.07	-12.39	-436.51	-437.31
$FeO + H_2SO_4 = FeSO_4 + H_2O$	-134.58	-40.17	-119.79	-122.40

Необходимо отметить, что термодинамический раздел физической химии посвящён изучению зависимости свойств различных минералов и их компонентов от термодинамических функций, условий существования и рассмотрения явлений, относящихся к процессам разложения.

Как видно из табл.1-3, движущая сила реакции разложения определяется изменением свободной энергии ΔG . Свободная энергия, как это видно из таблиц, является сложной функцией, зависящей от теплоты реакции (ΔH), вероятности протекания процесса (изменение энтропии – ΔS) и концентрации реагирующих компонентов.

С помощью основного уравнения химической термодинамики:

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

рассмотрены величины ΔG реакции разложения боросиликатных руд.

Реакции, имеющие положительную ΔG , вероятно, не идут без затрат внешней работы. Однако кинетические факторы дают возможность протекания процесса разложения руд.

Согласно уравнению Гиббса-Гельмгольца:

$$\Delta G = \Delta H + T \frac{d(\Delta G)}{dT},$$

которое устанавливает взаимосвязь между энергией Гиббса, теплотой реакции и теплотой реакции, можно проследить протекание процесса разложения бор- и алюмосиликатных руд (табл. 1-3). Как видно, теплота реакции изменяется с температурой, так как теплоёмкости реагирующих веществ и продуктов реакции по-разному зависят от температуры. Известно, что энтропия веществ возрастает с увеличением температуры. Следовательно, ΔG и константы равновесия, зависящие от энтропии, также изменяются с изменением температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиббс Д.В. Термодинамические работы. Пер. с англ. – М.-Л., 1950.
2. Карапетьянц Х.М. Химическая термодинамика. 2-е изд. – М.-Л., 1953.
3. Киреев В.А. Курс физической химии. 2-е изд. – М.-Л., 1956.
4. Карапетьянц М.Х., Карапетьянц М.Л. Таблица некоторых термодинамических свойств различных веществ. – М., 1961.
5. Позин М.Е. Технология минеральных солей. – Л.: Химия, 1970, ч.1. с. 791.
6. Плышевский Ю.С. – Труды УНИХИМ, Вып.8. – М., 1959.
7. Мирсаидов У.М., Маматов Э.Д. Комплексная переработка бор- и алюмосиликатных руд Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2013, с. 115.
8. Мирсаидов У.М., Курбонов А.С., Маматов Э.Д. Кислотное разложение боросиликатных руд. – Душанбе: Дониш, 2015, с. 97.
9. Мирсаидов У.М., Маматов Э.Д., Сафиев Х.С. Особенности процесса хлорного разложения бор- и алюмосиликатных руд. – Душанбе: Дониш, 2013, с. 75.
10. Курбонов А.С. Азотнокислотное разложение данбуритов месторождения Ак-Архар Таджикистана: автореф. дис. канд. хим. наук. – Душанбе, 2011, с. 24.
11. Ашуров Н.А. Кислотное разложение данбуритов месторождения Ак-Архар (Таджикистан): автореф. дис. канд. техн. наук. – Душанбе, 2009, с. 23.
12. Усмонова У.Х. Физико-химические основы разложения боросиликатных руд соляной и серной кислотами: автореф. дис. канд. хим. наук. – Душанбе, 2015, с. 24.

Р.Ҷ.АКРАМЗОДА

**РАВАНДҶОИ ТЕРМОДИНАМИКИИ ТАҶЗИЯИ МАЪДАНҶОИ
БОРОСИЛИКАТИИ ТОҶИКИСТОН**

Институти химияи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон

Тавсифи таҳлили раванди термодинамикии таҷзияи кислотагии маъданҳои боросиликати оварда шудааст. Эҳтимолияти гузариши реаксияҳо новобаста аз бузургии ΔG нишон дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: таҷзия, тавсифи термодинамикӣ, маъдани боросиликати, минералҳо, энергияи Гиббс.

R.J.AKRAMZODA

**THERMODYNAMIC PROCESSES OF DECOMPOSITION
OF BOROSILICATE ORES IN TAJIKISTAN**

V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National Academy of Sciences of Tajikistan

Analysis of the thermodynamic characteristics of decomposition process of borosilicate ores by acid is provided. The probability of reactions proceeding based on the values of ΔG is shown.

Key words: decomposition, thermodynamic characteristics, borosilicate ore, minerals, Gibbs energy.

УДК 546.11

Ш.Б.БАХРИДДИНЗОДА, Б.И.АСРОРОВ, З.Х.ГАЙБУЛЛАЕВА, А.ШАРИФОВ*

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОДОРОДА С СОЛЯМИ
ЦВЕТНЫХ МЕТАЛЛОВ**

Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими,

**Дангаринский национальный университет*

Поступила в редакцию 14.03.2022 г.

В статье рассмотрены процессы восстановления солей металлов состава полиметаллических концентратов Кони Мансур атомарным водородом. Водород, полученный газификацией угля Фон Ягноб, диссоциировал в потоке низкотемпературной плазмы при давлении 0.133 Па. Для исследования влияния атомарного водорода на процесс восстановления солей металлов изучали ИК-спектры поглощения исходного и бомбардированного атомами водорода образцов. Показана принципиальная возможность формирования металлических покрытий.

Ключевые слова: водород, атом, ион, низкотемпературная плазма, диссоциация, химическая активная частица, соли металлов, концентрат, месторождение.

Введение

В Таджикистане принята программа индустриализации страны, в которой отмечается внедрение принципиально новых прогрессивных базовых технологий [1]. Внедрение технологий на основе электронных, плазменных и радиационных процессов имеет перво-степенное значение для развития металлургической и химической отраслей народного хозяйства, которые по существу являются катализатором научно технического прогресса для всех основных отраслей народного хозяйства.

Необходимость сохранения окружающей среды, экономии энергии и реагентов заставляет технологов уделять все более пристальное внимание процессам, происходящим в низкотемпературной плазме, в которой температура атомов и молекул близка к температуре окружающей среды, в то время как электроны обладают энергией достаточной для

Адрес для корреспонденции: Гайбуллаева Зумрат Хабибовна. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. акад. Ражабовых 10, Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими.
E-mail: zumratihabib@rmbler.ru

возбуждения, диссоциации и ионизации атомов и молекул. В результате этого выход продуктов реакции больше термодинамически равновесного, рассчитанного только на основе температуры газа.

Процессы, протекающие в потоке газоразрядной низкотемпературной плазмы, являются высокоэффективными по сравнению с другими процессами получения таких материалов, как получение порошков, осаждение полимерных и неорганических пленок, плазменное анодирование, восстановление металлов из руд и концентратов и др. [2, 3].

Процессы восстановления лежат в основе современной металлургии. С помощью этих процессов получают наиболее массовый металл железо, так и большинство цветных и редких металлов [4]. В качестве химического реагента восстановителя используют твердый углерод, преимущественно в виде кокса, в меньшей степени используют газообразные восстановители: водород и его смеси с окисью углерода, полученные конверсией природного газа, газификацией твердых и жидких углеводородов, сырой природный газ [5].

Плазма: определение, свойства и применение. Характерное для последних лет использование процессов применения газоразрядной плазмы основано на таких факторах, как снижение трудозатрат и время протекания химических реакций. Однако представление о плазме как о средстве интенсификации металлургических и химических процессов не является исчерпывающим. В значительной степени применение плазменных процессов является следствием качественных изменений в задачах металлургии.

Плазменное состояние, которое считают четвертым агрегатным состоянием, в общем, является ближе к газовому. Переход от газа к плазме в отличие от других агрегатных превращений совершается постепенно по мере увеличения температуры. Следствием этой постепенности является возможность описания свойств плазмы в низкотемпературной области газовыми законами.

Термодинамические характеристики и кинетические закономерности процессов переноса и химических реакций в известной степени могут быть описаны закономерностями, аналогичными газовому состоянию. Описание особенностей плазменных процессов исследованы и рассмотрены в многочисленных работах [6-8]. Принято различать полностью ионизированную среду-плазму, образующуюся при сверхвысоких температурах, в основном с целью создания реакторов термоядерного синтеза (повышения степени ионизации возможно достигнуть также понижением давления, воздействием излучения, в том числе лазерного и введением легко ионизирующих добавок) и термическую низкотемпературную плазму. Возможности низкотемпературной плазмы как средства, позволяющего обеспечить получение материалов с улучшенными и особыми свойствами, интенсифицировать и иногда упростить технологический процесс металлургического производства, сохранить высокие технико-экономические показатели, несмотря на тенденцию вовлечения в производство бедного и трудно перерабатываемого сырья, достаточно впечатляющи. Прежде всего, практически возможное при плазменном нагреве снятие ограничений

по верхнему пределу температуры, допустимой в металлургическом агрегате, позволяет существенно расширить возможности этого основного интенсифицирующего фактора металлургии. При переводе веществ в газообразные состояния снимаются и ограничения, налагаемые агрегатным состоянием, вследствие чего время химических процессов может исчисляться микросекундами [9]. Возможность организации непрерывных малоинерционных автоматизированных процессов на основе использования низкотемпературной плазмы способствует и снижению энергозатрат. Высокие параметры процессов позволяют обеспечивать значительный объем производства при минимальных размерах реакционного пространства и ведут к сокращению производственной площади, занятой оборудованием и к уменьшению габаритов этого оборудования.

Полиметаллические концентраты Республики Таджикистан. По запасам свинцово-цинковых руд Таджикистан занимает одно из ведущих мест в мире. Из 20 изученных на территории республики месторождений и проявлений свинца и цинка, 19 свинцово-цинковых (полиметаллических) месторождений расположены в пределах горнорудного района Карамазара. В Карамазарском рудном районе Северного Таджикистана известно около 200 минеральных объектов (месторождений и рудопроявлений) свинца и цинка. В запасах полезных ископаемых учтено 24 полиметаллических месторождения. Характерной чертой этих объектов является их комплектность: наряду с основными элементами – свинцом и цинком, руды содержат в промышленных концентрациях серебро, медь, кадмий, висмут, золото, молибден, сурьму, флюорит, что значительно повышает ценность руд [10]. В настоящее время совокупный объем балансовых запасов по 16 месторождениям Таджикистана составляет более 10 млн. т свинца и почти столько же цинка. Только на месторождении Кони Мансур и минеральных объектах Алтын-Топканского рудного поля разведано более одного миллиарда тонн свинцово-цинковых руд, большая часть которых может быть отработана открытым способом. В этих рудах кроме основных минералов галенита, сфалерита, халькопирита и в извлекаемых количествах находятся еще ряд ценных попутных компонентов.

Плазмохимическое восстановление солей металлов состава полиметаллических концентратов химически активным атомарным водородом. В работе [11] описан совмещенный способ получения восстановительных газов газификацией угля месторождения Фон Ягноб и переработка полиметаллических концентратов месторождения Кони Мансур. Полученный водород в процессе газификации, проходя через низкотемпературную газоразрядную плазму, которая создавалась в кварцевом реакторе между двумя фидерами ВЧ генератора ЛГД-12, диссоциировался на активный атомарный водород. В низкотемпературной плазме газового разряда происходят возбуждение и ионизация молекул рабочего газа, а также диссоциация молекул на свободные атомы и радикалы. В принципе, любая из этих частиц – возбужденная молекула, ион, свободный атом или радикал – может выполнять роль химически активных частиц (ХАЧ), участвующих в первичной элементарной реакции. Из атомов и молекул рабочего газа генерируются требуемые хи-

мически активные и энергетические частицы, с помощью которых обеспечивается восстановление химических соединений состава руд и концентратов [12]. Поскольку энергия электронов значительно превышает энергию тяжелых частиц, скорость процессов диссоциации и ионизации, имеющая большую пороговую энергию, определяется, главным образом, электронным ударом. Превращение молекул рабочего газа в ХАЧ, помимо диссоциации электронным ударом и прилипания к ним низкоэнергетических электронов, происходит также в результате тушения этими молекулами возбужденных электронных состояний атомов инертных или химически нейтральных газов.

В газоразрядной плазме концентрация ХАЧ определяется не термодинамическим равновесием, а стационарным состоянием, возникающим вследствие конкуренции различных процессов образования (генерации) и гибели (рекомбинации) в результате реакции восстановления, гетерогенной рекомбинации на стенках реактора и гомогенной рекомбинации внутри плазмы.

Методика и материалы. Диссоциацию молекулярного водорода, полученного по способу газификации угля [13], проводили на плазменной установке мощностью 700 Вт. Основной частью плазмообразующей системы является реактор, изготовленный из кварца, вакуумного поста и системы газоснабжения. Охлаждение стенок реактора производили струей холодной воды. Давление в рабочей зоне реактора устанавливали до 0.133 Па масляным насосом. Полученный молекулярный водород до процесса диссоциации в плазмотроне очищали прохождением его через нагретый никелевый капилляр. Молекулярный водород H_2 проходит через электрический разряд, который образуется между двумя электродами, прикрепленными к кварцевому реактору и к фидеру генератора ЛГД-12. Для уменьшения эффекта рекомбинации атомов на стенках реактора промывали HNO_3 и дистиллированной водой. Поток активизированного атомарного водорода в реакторе направляли на подложку с обрабатываемым материалом. Материалом исследования являлся хлорид цинка состава полиметаллических концентратов месторождения Кони Мансур.

Результаты и обсуждения. В работе [14] проведены исследования по изучению свойств комплексных соединений некоторых d-элементов с бензотимидом и определены характерные полосы поглощения валентных колебаний металл-хлор в интервале $324-222\text{ см}^{-1}$. Нами были исследованы в потоке низкотемпературной плазмы восстановление Zn-Cl диссоциированным водородом, полученным газификацией угля месторождения Фон Ягноб. Получены результаты ИК-спектров их поглощения. Были изучены исходные и восстановленные образцы исследуемых материалов. Для этого использовали спектрометр марки SPECORD-80 в интервале $200-400\text{ см}^{-1}$. Результаты исследований восстановления ZnCl химически активным водородом приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты восстановления соли цинка (ZnCl) атомарным водородом
в интервале 60 минут

Исходный образец		Восстановленный образец	
ν , см ⁻¹	I, %	ν , см ⁻¹	I, %
396.0	36.07	-	-
376.0	31.23	-	-
-	-	340.0	82.14
-	-	328.0	75.44
-	-	286.0	91.25
268.0	93.30	268.0	32.15
240.0	30.21	240.0	11.12

Согласно работе [15] полосы поглощения можно отнести к промежуточным соединениям ZnHCl. При изучении влияния времени бомбардировки диссоциированных атомов водорода на поверхности хлорида цинка обнаружено изменение интенсивности полос поглощения. Полученные полосы поглощения ослабевают с увеличением времени протекания реакции. При воздействии атомов водорода в течении 90 мин. Замечено осаждение пленок металлического цинка на стенки реактора, которые подтверждены химическим анализом полученного образца. Механизм образования тонких металлических пленок согласно работе [16] протекает при упругом столкновении атомов водорода с образцом. В результате происходит прямое выбивание атомов хлора из равновесных положений и передача энергии на замещение атомов водородом. В результате поверхность хлорида металла приходит в активированное состояние благодаря нарушению распределения электронной плотности в химической связи металл-хлор. Далее протекает процесс рекомбинации подлетающего атома с адсорбированным атомом водорода. Энергия, выделяемая при акте рекомбинации атомов водорода, поглощается исходным реагентом и расходуется на увеличение амплитуды колебаний атомов хлора возле равновесного состояния. Последующие этапы абсорбции и рекомбинации атомов водорода на поверхности приводят к разрыву ослабленных связей M-X и стимулируют образование связей M-H и H-X. Хлористый водород откачивается и выводится из системы. Моногидрид металла улетучивается с поверхности обрабатываемой подложки с последующей конденсацией на стенках кварцевого реактора. В результате автокаталитического процесса протекает реакция разложения гидроксида металла и образуется тонкая пленка цинка.

Выводы. В результате взаимодействия диссоциированного водорода, полученного в потоке низкотемпературной плазмы с солями металлов состава полиметаллических концентратов, показана принципиальная возможность восстановления солей хлоридов металлов атомарным водородом в целях получения тонких металлических пленок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Послание Президента Республики Таджикистан Маджлиси Оли от 26 декабря 2018 года.
2. Jeong-Hun Choi, Seung-Won Lee, Hyo-Bae Kim, Ji-Hoon Ahn. Effects of plasma conditions on sulfurization of MoO₃ thin films and surface evolution for formation of MoS₂ at low temperatures. – J.: Applied Surface Science, v.532, 2020, 147462
3. Emile Haye, Tarek Barakat, Loris Chavee, Bao-Lian Su, St'ephane Lucas, Laurent Houssiau, Jean-Jacques Pireaux, Amine Achour. Low-pressure plasma process for the dry synthesis of materials-like Au-TiO₂ nanocatalysts for toluene degradation. – J.: Applied Surface Science, v.571, 2021, 151313
4. Цветков Ю.В., Панфилов С.А. Низкотемпературная плазма в процессах восстановления. – М.: Наука, 1980, с. 359.
5. Легасов В.А., Паномарев-Степной Н.И., Процепко А.И. Атомно водородная энергетика. – Вопросы атомной науки и техники. Сер. Атомно водородная энергетика, 1976, вып.1, 533 с.
6. Barry Arklesa, Chad Bricka, Jonathan Goffa, Alain E. Kaloyerosb. The low-temperature remote-plasma-activated pulsed chemical vapor deposition route to SiN_x from 1, 3, 5-tri(isopropyl)cyclotrisilazane. – J.: Thin Solid Films, v.711, 2020, 138299
7. Bryony Ashforda, Yaolin Wang, Chee-Kok Poh, Luwei Chenb, Xin Tua. Plasma-catalytic conversion of CO₂ to CO over binary metal oxide catalysts at low temperatures. – J.: Applied Catalysis B: Environmental, v.276, 2020, 119110
8. Бардин И.И. Развитие металлургии в СССР. – М.: Наука, 1978, 347 с.
9. Gaibullaeva Z.Kh., Nasimov G.T., Nuran A., Smirnova A. Chemical, morphological, and kinetic study of lead extraction from the Koni Mansur polymetallic deposit. – J.: Hydrometallurgy. v. 183, 2019, pp. 159-165
10. Гайбуллаева З.Х., Шарифов А., Шодиев Г.Г., Хамроев Ф.Б. Способ газификации угля для производства тепла и химических веществ. Евразийский патент № 037398 от 2019.
11. Киреев В.Ю., Данилин Б.С., Кузнецов В.И. Плазмохимическое и ионно-химическое травление микроструктур. – М.: Радио и связь, 1983, 126 с.
12. Гайбуллаева З.Х., Шарифов А., Хамроев Ф.Б., Шодиев Г.Г. Способ газификации угля. – Положительное решение Евразийского патента № 202000192/25 от 22.04.20.
13. Иманкулов Б.И., Намазова Б.С., Актанова С.Т., Бойтинов Б.Т. Синтез и свойства комплексных соединений некоторых d-элементов с бензамидом. – Тез. докл. VII Всесоюз. совещ по физ-хим. анализу. – Фрунзе, 1988, с. 555-556.
14. Breisacher P., Siegel V. Formation of gaseous titanium (IV) hydride and chloro-hydrides of titanium – J. Anter. Chem. SOC, 1963, v.85, №11, pp. 1705-1706.
15. Данилин Б.С., Киреев В.Ю. Применение низкотемпературной плазмы для нанесения тонких пленок. – М.: Энергоатомиздат, 1989, 328 с.
16. Гайбуллаева З.Х., Асроров Б.И., Ш.Б. Бахриддинзода и др. Совмещенный способ получения восстановительных газов и переработка галенит содержащих концентратов. – Цветные металлы, 2022, № 1, с. 18-22.

Ш.Б.БАХРИДДИНЗОДА, Б.И.АСРОРОВ, З.Х.ГАЙБУЛЛАЕВА, А.ШАРИФОВ*

ОМУЗИШИ ТАЪСИРРАСОНИИ ГИДРОГЕН БА НАМАКҲОИ МЕТАЛЛҲОИ РАНГА

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи акад М.С.Осимӣ,

**Донишгоҳи миллии Данғара*

Дар мақола равандҳои барқарорсозии намакҳои металли таркиби концентратҳои полиметаллии Кони Мансури Ҷумҳурии Тоҷикистон бо гидроген муҳокима мекунад. Гидроген аз таркиби ангиштсангҳои Фон Ягноб бо тарзи газноккунӣ ҳудо карда шуда таҳти фишори 0.133 Па дар плазмаи низҳарорат диссоциатсия карда шудааст. Барои омӯختани таъсири гидрогени атомӣ дар ҷараёни барқарорсозии намакҳои металлӣ спектри намунаҳои аслӣ ва пас аз таъсири атомҳои гидрогенӣ ба намакҳо омӯхта шудааст. Эҳтимолияти ташаккули ҳосилшавии руйпӯшҳои металлӣ нишон дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: гидроген, атом, ион, плазмаи пастҳарорат, диссоциатсия, зарраи фъоли химиявӣ, намаки металлҳо, концентрат, кон.

Sh.BAHRIDDINZODA, B.I.ASROROV, Z.H.GAYBULLAEVA, A.SHARIFOV*

STUDY OF HYDROGEN INTERACTION WITH NON-FERROUS METALS SALTS

M.S.Osimy Tajik Technical University,

**Dangara National University*

The article discusses the processes of restoration of metal salts of the composition of polymetallic concentrates of Horse Mansur atomic hydrogen. The hydrogen obtained by the gasification of coal the background of the lamb was dissociated in the low-temperature plasma stream at a pressure of 0.133 Pa. To study the effect of atomic hydrogen on the process of restoration of metals salts, an IR spectra of absorption of the original and bombarded hydrogen atoms of samples was studied. The principal possibility of forming metal coatings is shown.

Key words: hydrogen, atom, ion, low-temperature plasma, dissociation, chemically active particle, metals salts, concentrate, deposit.

УДК 550.4(575.3)

ДЖ.Х.АМИНОВ, L.DING*, Ю.МАМАДЖАНОВ**, С.Б.АШУРАЛИЕВ, Ш.А.ОДИНАЕВ

**НОВЫЕ ДАННЫЕ О ГЕОХИМИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЯХ ГРАНИТОВ
БАЗАРДАРИНСКОГО МАГМАТИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА
(ЮЖНЫЙ ПАМИР)**

*Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии
Национальной академии наук Таджикистана,*

**Институт исследования Тибетского плато Китайской академии наук,*

***Научно-исследовательский Центр экологии и окружающей среды Центральной
Азии (Душанбе)*

Поступила в редакцию 18.05.2022 г.

В статье приведены новые данные о геохимических особенностях гранитов Базардаринского комплекса мелового возраста. Показано, что породы соответствуют плюмазитовому типу гранитов и образовались в результате дифференциации первичной магмы путем фракционной кристаллизации полевых шпатов и слюд. Также установлено, что граниты Базардаринского комплекса являются палингенными и их магмы формировались в результате плавления нижнекорового субстрата. При этом, отрицательные аномалии Ti и Nb, которые наблюдаются на спайдердиаграммах и типичны для супрасубдукционных гранитов, вероятно, унаследованы от нижнекорового источника.

Ключевые слова: Южный Памир, Базардаринский магматический комплекс, геохимия, граниты.

Введение

Базардаринский магматический комплекс объединяет два гранит-лейкогранитных массива: Базардаринский и Акджилгинский. Они разделены Базаррыкским гранодиоритовым массивом, который согласно представлениям М.А.Тютиня и М.М.Безуглого [1], является большим провесом кровли над соединяющимися на глубине Базардаринским и Акджилгинским интрузивами. Интрузивные образования комплекса прорывают терригенные

Адрес для корреспонденции: Аминов Джовид Хидоятуллоевич, старший научный сотрудник Института геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии Национальной Академии наук Таджикистана. E-mail: jovid.aminov@outlook.com

породы С-Р и Т₃ возраста [1]. Базардаринский и Акджилгинский интрузивы имеют меловой возраст и, в основном, сложены крупнозернистыми двуслюдяными – биотит-мусковитовыми литий-фтористыми гранитами и лейкогранитами. Структура двуслюдяных гранитов и лейкократовых гранитов - порфировидная. Также в эндоконтактных и апикальных зонах массивов встречаются мелко-среднезернистые мусковитовые лейкограниты, являющиеся более поздними образованиями, чем граниты ранних фаз. Во вмещающие породы, с обеих сторон контакта интрузивов, внедрены дайки аплитов и мусковитовых лейкогранитов.

Петрографические и петрохимические особенности пород Базардаринского и Акджилгинского массивов изучены некоторыми авторами [1-4]. Самой детальной, в плане описания петрографического состава пород, является работа Владимирова А.Г. [5], которая посвящена исследованию гранитоидного магматизма Южного Памира. Однако особенности редкоэлементного состава гранитов этого магматического комплекса недостаточно изучены. Это, прежде всего, связано с отсутствием полного набора редкоэлементного состава пород в предыдущих работах. В настоящей работе мы приводим новые данные о редкоэлементном составе гранитов, которые получены современными методами геохимического анализа.

Петрография гранитов Базардаринского комплекса

Граниты Базардаринского комплекса формируют 5 интрузивных фаз. Породы первой фазы представлены гранитами и кварцевыми монцонитами, которые имеют ограниченное площадное распространение, занимая <2% от общей площади массивов. Породы данной фазы установлены в виде мелких ксенолитов и ксеноблоков, которые наблюдаются среди более поздних пород лейкогранитного состава. Вторая интрузивная фаза Базардаринского комплекса сложена гранитами и лейкогранитами. Эти породы занимают ~70-75 % от общей площади массивов, слагая, таким образом, основной объем массивов. Граниты и лейкограниты второй фазы часто подвержены постмагматическому площадному изменению, выраженному в развитии вторичного мусковита, альбита и кварца. Третья интрузивная фаза сложена лейкогранитами, которые формируют пластообразные и штокообразные тела. Тела лейкогранитов третьей фазы встречаются как внутри Базардаринского массива, так и по его периферии. В четвертую фазу входят лейкограниты, образующие маломощные пластообразные и дайкообразные тела мощностью до 15-20 м в плане. В некоторых местах тела лейкогранитов четвертой фазы сгруппированы в дайковые пояса, имеющие небольшую протяженность. Пятая фаза сложена топаз-протолитионитовыми гранитами – онгонитами. Онгониты в пределах Базардаринского массива имеют ограниченное распространение и обнаружены только по левому борту сая Длинный (приток р. Элису) [5].

Граниты и кварцевые монцониты первой фазы являются порфировидными по строению, и в них выделяются порфиновые выделения калиевого шпата размером до 2.0 см в длину. Также развиты порфиновые выделения калишпата округлой формы и размерами, варьирующими в пределах от 0.5 до 1.0 см. Породы имеют гипидиоморфную и аллотриаморфную микроструктуру. Минеральный состав пород: кварц – 25-35%, плагиок-

лаз альбит-олигоклазового состава – 25-35%, микроклин – 25-30% и буро-коричневый и красный биотит – 5-8%.

Граниты-лейкограниты второй (главной) фазы Базардаринского комплекса - крупнозернистые и неравномернозернистые породы часто с порфиroidным строением, сложены кварцем - 30-40%, слабо зональным плагиоклазом - альбит-олигоклазом - 18-32% (35-30+18-5.0 % An), решетчатым микроклин-пертитом - 25-35% и слюдами - 2.0-8.0 %. Слюды в гранитах представлены как биотитом, так и мусковитом. При этом биотит преобладает над мусковитом.

Лейкограниты третьей фазы по петрографическим особенностям близки к гранитам второй фазы по их петрографическим особенностям. Они также, как граниты второй фазы, имеют порфиroidное строение, но отличаются более мелкозернистым строением и широким развитием биотита и мусковита.

Текстурно-структурные особенности и минеральный состав лейкогранитов четвертой фазы не постоянные. По строению эти породы варьируют от среднезернистых до аплитовидных. По мнению А.Г.Владимирова [5] это «очевидно, обусловлено условиями дегазации остаточных расплавов, а также степенью их отдифференцированности». Аплитовидные разновидности лейкогранитов содержат мусковит, вместе с ними также встречаются жилы аплитов. Плагиоклаз в лейкогранитах по составу более кислый (№10), а его размеры варьируют от 0.5 до 2.0 мм. В некоторых случаях в аплитовидных лейкогранитах встречаются порфиroidные выделения микроклина. В лейкогранитах четвертой фазы Базардаринского комплекса отмечается высокое содержание топаза, которое достигает 1.0-5.0 объём. % [6].

Топаз-протолитионитовые граниты – онгониты пятой фазы представлены мелкопорфиroidными тонкозернистыми породами. Порфиroidные выделения составляют 10-25 % от площади шлифа и представлены кварцем, альбитом и топазом. Основная масса пород состоит из тонкозернистого, мелкочешуйчатого агрегата, сложенного из тех же минералов и большого количества литиевой слюды.

Петрохимические особенности пород

Петрохимические особенности гранитоидов Базардаринского комплекса рассматриваются на основе анализов, проведённых авторами, а также по данным А.Г.Владимировым [5]. Нами были проанализированы четыре образца интрузивных пород, отобранных из Базардаринского, Акдиджилгинского и Базаррыкского массивов. Петрохимические анализы пород проводились на рентгено-флюоресцентном анализаторе, а содержание редких и редкоземельных элементов определялось на масс-спектрометре с индуктивно связанной плазмой в аналитической лаборатории Сианьского Института окружающей среды Земли Китайской академии наук (г. Сиань).

При статистической обработке петрогеохимических данных, полученных А.Г.Владимировым [5], выяснилось, что граниты Базардаринской рудно-магматической системы показывают достаточно близкие количества петрогенных оксидов, редких и редкоземельных элементов, распределяясь в узких диапазонах. Поэтому, для целей настоящей работы нами были отобраны представительные образцы из общей выборки автора, которые вместе с нашими результатами приведены в табл. 1.

Таблица 1

Представительные петрохимические составы пород Базардаринского магматического комплекса

№ образца	4854/2	7032	АКJ17-34(Е)*	7029	4321	7051	P296	7022/2	7024	BZDN17-07*	KBG17-51*	4962/2	АКJ17-35*
Фаза	1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	Базаррыкский массив
Состав	гр	лгр	кв-м	лгр	гр	лгр	гр	лгр	лгр	лгр	лгр	гр	грд
SiO ₂	71.65	73.24	64.72	76.22	72.06	75.36	72.10	75.78	74.52	73.94	73.62	69.79	63.17
TiO ₂	0.33	0.19	0.14	0.09	0.32	0.13	0.23	0.02	0.02	0.11	0.13	0.05	0.87
Al ₂ O ₃	13.91	14.19	18.84	12.91	13.77	13.12	14.00	15.20	15.45	13.98	14.39	14.62	15.53
ΣFeO	2.51	1.87	1.83	1.26	2.35	1.60	2.07	0.77	0.83	1.32	1.00	3.95	4.89
MnO	0.05	0.13	0.12	0.12	0.04	0.13	0.06	0.12	0.14	0.05	0.03	0.16	0.10
MgO	0.60	0.28	0.50	0.11	2.10	0.25	0.21	0.06	0.03	0.13	0.23	0.40	3.06
CaO	0.63	1.15	3.32	0.81	1.35	0.83	0.73	0.50	0.50	0.64	0.75	0.56	2.72
Na ₂ O	3.14	3.54	2.95	3.09	2.90	3.29	4.46	4.22	5.24	3.20	3.28	3.25	2.83
K ₂ O	5.87	4.75	5.29	4.73	4.24	4.53	4.78	3.22	3.15	5.57	5.50	3.13	3.18
P ₂ O ₅	0.20	0.09	0.14	0.06	0.12	0.09	0.08	0.02	0.03	0.11	0.17	0.17	0.39
П.п.п.	1.10	0.49	1.86	0.42	0.68	0.48	0.91	1.34	1.77	0.75	0.74	2.96	2.40
Сумма	99.99	99.92	99.71	99.82	99.93	99.81	99.63	101.25	101.68	99.81	99.84	99.04	99.15
K ₂ O+Na ₂ O	9.01	8.29	8.24	7.82	7.14	7.82	9.24	7.44	8.39	8.77	8.78	6.38	6.01
K ₂ O/Na ₂ O	1.87	1.34	1.79	1.53	1.46	1.37	1.07	0.76	0.60	1.74	1.67	0.96	1.12

Примечание: Содержание петрогенных оксидов указано в масс.%. Звёздочкой обозначены анализы авторов. Составы пород: гр – гранит, лгр – лейкогранит, кв-м – кварцевый монзонит, грд – гранодиорит.

Как видно из табл. 1, по содержанию кремнезёма породы Базардаринского магматического комплекса распределяются в узком диапазоне от 69.79 до 76.22 %, за исключением образца №АКJ17-34(Е). В последнем содержание SiO_2 составляет 64.72% и на классификационной TAS (ТА – total alkali = $\text{Na}_2\text{O}+\text{K}_2\text{O}$; S – silica =, SiO_2) диаграмме [7] (рис.1) занимает поле кварцевого монцонита. В табл. 1 также приведён петрохимический анализ образца №АКJ17-35 из Базаррыкского массива, являющимся проявлением другого эпизода магматической активности [1]. Анализированный образец №АКJ17-35 Базаррыкского массива на TAS диаграмме классифицируется как гранодиорит. Анализ классификационной TAS диаграммы четко показывает соответствие минерального состава гранитоидов с геохимическим, так как фигуративные точки пород Базардаринского комплекса в основном попадают в поле гранитов, и лишь один образец из первой фазы занимает поле кварцевых монцонитов. По содержанию суммы $\text{Na}_2\text{O}+\text{K}_2\text{O}$, варьирующие от 6.01 до 9.24 %, граниты изученного комплекса относятся к умеренно-щелочным магматическим породам калиевой щелочности (табл.1). Как видно, на рис. 1б граниты Базардаринского комплекса в основном являются высококалийевыми известково-щелочными образованиями, лишь отдельные составы гранитов соответствуют известково-щелочной и шшонитовой серии. Содержание TiO_2 , MgO , MnO , CaO и ΣFeO в породах низкое и варьирует в относительно узких диапазонах распределения.

Таким образом, в петрохимическом отношении породы Базардаринского комплекса указывают на их унимодальность, что свидетельствует об их формировании из единого магматического расплава, который в процессе своей эволюции в магматической камере дифференцировался и привёл к образованию всей гаммы кислых интрузивных пород. Подтверждением этому может служить поведение Na_2O и Al_2O_3 на корреляционных диаграммах с SiO_2 , на которых видно, как по мере эволюции магматического расплава концентрации натрия увеличиваются, а алюминия, наоборот, уменьшаются.

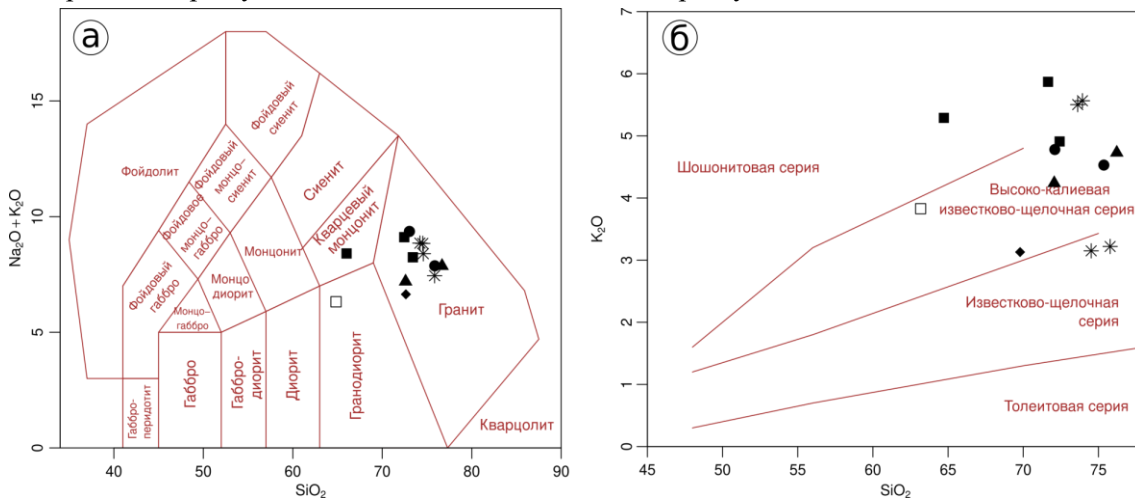


Рис. 1. а) Классификационная TAS диаграмма [7] для гранитов Базардаринского магматического комплекса. б) Классификационная диаграмма SiO_2 - K_2O . Чёрные квадраты обозначают породы первой фазы, треугольники – второй фазы, кружки – третьей фазы, звездочки – четвертой фазы, ромбик – пятой фазы и белый квадрат – гранодиорит из Базаррыкского массива.

Геохимические особенности пород

Редкоэлементный состав гранитов приведен в табл. 2. Согласно геохимической типизации гранитоидов [8], породы Базардаринского комплекса относятся к типу плюмазитовых гранитов. А по индексу концентрации граниты второй (главной) фазы, а также дополнительных интрузий, с индексом 1.5 – 21 кларков, относятся к субредкометальному и редкометальному классам. В лейкогранитах заключительных интрузивных фаз, этот индекс возрастает до 37-50, что соответствует ультраредкометальным классам [5]. На спайдер-диаграмме распределения редких элементов, где показано отношение концентрации элементов в породе к концентрации этих же элементов в примитивной мантии (рис. 2а), видно, что граниты Базардаринского комплекса обогащены крупноионными литофильными элементами.

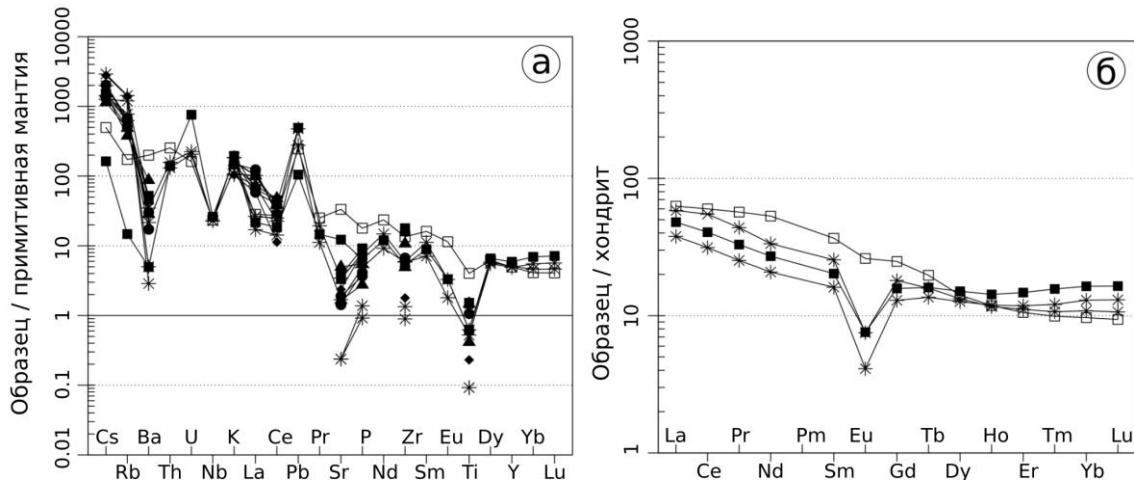


Рис. 2. а) Спайдер-диаграмма гранитов Базардаринского и Базаррыкского комплексов. Концентрация редких элементов в породах нормирована по отношению к концентрации этих же элементов в примитивной мантии [9]. Отдельные фигуративные точки, не связанные сплошными линиями, обозначают образцы, в которых проанализированы не все редкие элементы. б) Спайдер-диаграмма редкоземельных элементов в гранитах Базардаринского и Базаррыкского массивов. Содержание редкоземельных элементов в породе нормировано по составу хондрита [10]. Условные обозначения приведены в подписи к рис. 1.

При этом обеднение гранитов высокочargedными элементами тоже относительно небольшое, кроме Ti, Sr, и Zr, а концентрация других элементов, по сравнению с примитивной мантией, высокая. Это свидетельствует о том, что граниты формировались из расплава корового происхождения. Или же мантийное происхождение расплава затушевывается интенсивной дифференциацией магмы в процессе эволюции. В пользу такого происхождения могут свидетельствовать отрицательные аномалии Ti и Nb, что характерно для магматических пород супрасубдукционной зоны. Понижение степени магнезиальности $mg\# = Mg/(Fe+Mg)$ гранитов, наблюдаемое на корреляционной диаграмме $SiO_2 - mg\#$ (рис. 3), указывает на закономерное снижение значения магнезиальности по мере возрастания в породах содержания SiO_2 .

Таблица 2

Представительные геохимические составы пород Базардаринского магматического комплекса

№ образца / хим. элемент	4854/2	7032	АКJ17-34(Е)*	7029	4321	7051	P296	7022/2	7024	BZDN17-07*	KBG17-51*	4962/2	АКJ17-35*
Li	69.0	220.0	19.0	67.0	61.0	59.0	54.0	150.0	320.0	44.1	105.5	540.0	83.3
Rb	420.0	480.0	9.4	310.0	240.0	320.0	430.0	760.0	910.0	492.3	398.0	890.0	109.6
Cs	12.0	161.0	1.3	9.0	12.0	11.0	16.0	10.0	23.0	11.3	15.7	22.0	3.9
Sr	80.0	50.0	258.5	35.0	105.0	30.0	40.0	5.0	5.0	35.5	72.6	50.0	703.7
Ba	320.0	205.0	34.7	200.0	610.0	120.0	210.0	35.0	20.0	150.7	243.5	315.0	1392.5
Ga	18.0	13.0	16.3	11.0	3.0	9.0	22.0	11.0	32.0	20.9	19.2	900.0	20.6
Ge	45.0	45.0	1.3	30.0	30.0	35.0	50.0	30.0		2.0	1.4	150.0	1.3
Zn	20.0	50.0	40.6	25.0	40.0	50.0	10.0	30.0	15.0	34.3	21.2	1200.0	130.3
Zr	180.0	80.0	59.6	55.0	120.0	75.0	70.0	15.0	10.0	65.3	66.8	20.0	151.1
Be	5.0	7.0	2.0	12.0	2.0	19.0	9.0	3.0	7.0	3.1	8.8	35.0	3.3
Nb			18.6							16.4	16.2		16.7
Mo			0.1							0.5	0.4		0.9
Y			26.8							22.3	23.0		22.6
La	45.0	50.0	14.9	70.0	50.0	85.0	40.0	70.0	50.0	11.7	18.1	40.0	19.5
Ce	80.0	50.0	32.8	70.0	85.0	50.0	70.0	60.0	40.0	25.3	44.3	20.0	48.5
Pr			4.0							3.1	5.3		6.9
Nd			16.3							12.5	20.1		31.9
Sm			4.0							3.1	5.0		7.2

№ образца / хим. элемент	4854/2	7032	AKJ17-34(E)*	7029	4321	7051	P296	7022/2	7024	BZDN17-07*	KBG17-51*	4962/2	AKJ17-35*
Eu			0.6							0.3	0.6		1.9
Gd			4.1							3.4	4.7		6.4
Tb			0.8							0.7	0.8		0.9
Dy			4.9							4.1	4.3		4.5
Ho			1.0							0.9	0.8		0.9
Er			3.1							2.5	2.3		2.2
Tm			0.5							0.4	0.4		0.3
Yb			3.4							2.7	2.3		2.0
Lu			0.5							0.4	0.3		0.3
Hf			2.7							3.4	2.9		4.6
Ta			8.1							3.2	2.3		1.2
W			0.8							6.1	3.9		1.6
Pb			7.5							19.6	33.8		17.4
Th			11.8							11.1	13.4		21.6
U			15.9							4.3	4.7		3.4

Примечание: Содержание элементов-примесей приведено в г/т.

В отличие от редких элементов, редкоземельные элементы показывают небольшую разницу в содержании лёгких и тяжелых лантаноидов. В гранитах содержание тяжелых лантаноидов меньше относительно лёгких (рис. 2б). При этом в гранитах Базардаринского комплекса наблюдается отчетливая отрицательная европиевая аномалия, свидетельствующая о значимой роли фракционной кристаллизации плагиоклаза в процессе эволюции кислой магмы. Роль фракционирования плагиоклаза в процессе дифференциации магмы также подтверждается корреляционной диаграммой SiO_2 - Na_2O (рис. 3), на которой наблюдается повышение содержания Na_2O по мере возрастания содержания SiO_2 .

Таким же образом, понижение концентрации Ba от гранитов ранних фаз к поздним также указывает на фракционную кристаллизацию полевых шпатов. Отрицательная корреляция Al_2O_3 с SiO_2 (рис. 3) в гранитах свидетельствует о фракционной кристаллизации полевых шпатов и слюд, например биотита.

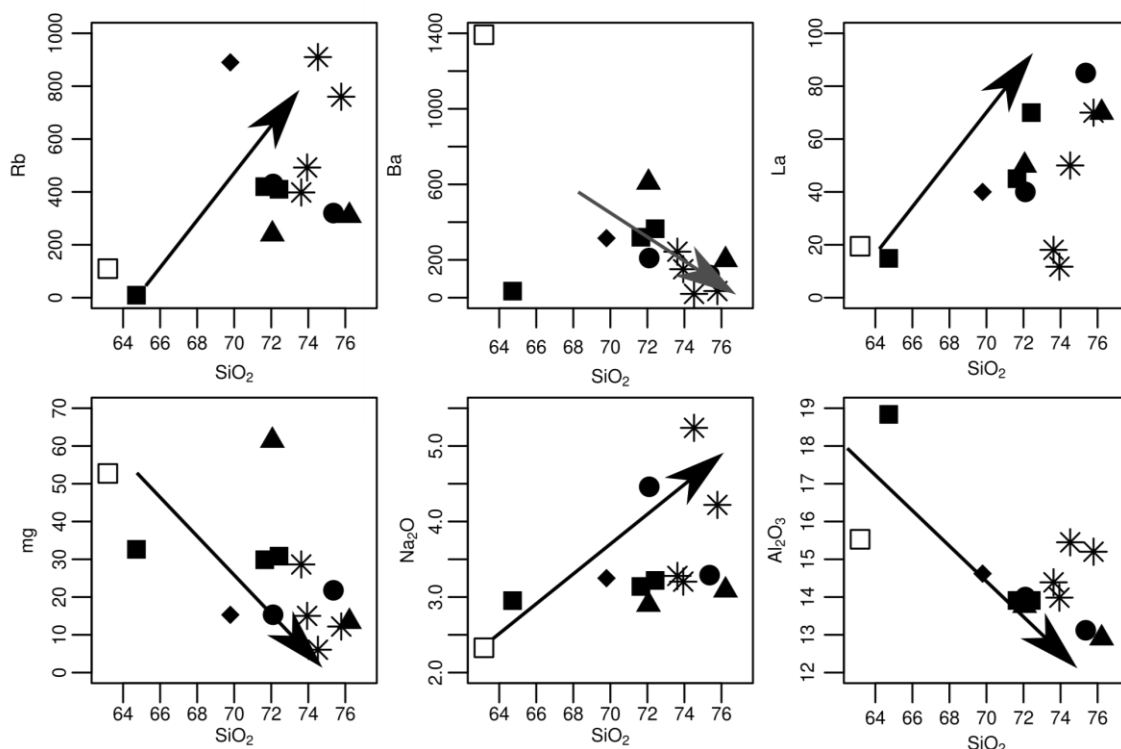


Рис. 3. Корреляционные диаграммы поведения петрогенных оксидов и элементов-примесей в гранитоидах Базардаринского магматического комплекса. Условные обозначения см. на рис. 1.

Выводы

Полученные результаты геохимического анализа и их обработка позволяют сделать следующие выводы о природе гранитов Базардаринского комплекса, а именно:

1. По петрохимическим особенностям породы Базардаринского комплекса представляют собой продукты дифференцированного корового магматического расплава и относятся в основном к высококалийной известково-щелочной серии.

3. Поведение некоторых петрогенных соединений (Na_2O , Al_2O_3) и элементов-примесей (Ba, Rb, La) в процессе эволюции магматического расплава, а также обедненность гранитов Eu указывает на важную роль фракционной кристаллизации полевых шпатов и биотита при дифференциации расплава;

4. Небольшое различие в концентрации крупноионных литофильных и высокозарядных элементов, а также преобладание легких лантаноидов над тяжелыми позволяют отнести граниты Базардаринского комплекса к коровым палингенным образованиям. Однако, наблюдаемые на спайдер-диаграмме редких элементов отрицательные аномалии Ti и Nb, указывают на вероятную их связь с субдукционным процессом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тютин М.А., Безуглый М.М. Олово-вольфрамовые рудно-магматические системы Южного Памира. В кн. Гранитоидный магматизм и оруденение Базардаринского горно-рудного района (Юго-Восточный Памир). – Новосибирск: Институт геологии и геофизики СО АН СССР, 1990, с. 3-19.
2. Безуглый М.М., Тютин М.А. Рудно-магматическая зональность Юго-Восточного Памира. – Доклады АН СССР, 1988, № 31, с. 47–49.
3. Тютин М.А. Два типа олово-вольфрамовых рудно-магматических ассоциаций Южного Памира. – Доклады АН Таджикской ССР, 1990, № 33, с. 43–46.
4. Владимиров А.Г., Беляева Р.Т. и Пономарчук В.А. Позднемезозойский магматизм Южного Памира. В кн. Гранитоидный магматизм и оруденение Базардаринского горно-рудного района (Юго-Восточный Памир). – Новосибирск: Институт геологии и геофизики СО АН СССР, 1990, с. 19-69.
5. Владимиров А.Г. Гранитоидный магматизм субдукционно-коллизионных орогенов (на примере киммеридо-альпид Южного Памира). Диссертация доктора геол.-мин. наук. – Новосибирск: Объединенный институт геологии, геофизики и минералогии СО РАН, 1992, 575 с.
6. Акелин Н.А., Лучицкая А.И., Идрисова Л.В. Минералого-геохимические особенности редкометальных гранитов на примере Базардаринского массива. – Советская геология, 1971, № 8, с. 40-54.
7. Классификация магматических (изверженных) пород и словарь терминов. Рекомендация Подкомиссии по систематике изверженных пород Международного союза геологических наук: Пер. с англ. – М.: Недра, 1997, 248 с.
8. Таусон Л.В. Геохимические типы и потенциальная рудоносность гранитоидов. – М.: Наука, 1977, 223 с.
9. Sun S.S. и McDonough W.F. Chemical and isotopic systematics of oceanic basalts: implications for mantle composition and processes. – Geol. Soc. London, Spec. Publ., 1989, 42, p. 313-345.
10. Boynton W.V. Cosmochemistry of the rare earth elements: meteorite studies. In: Henserson, P., Ed., Rare Earth Element Geochemistry, Elsevier, Amsterdam, 1984, pp.63-114. <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-444-42148-7.50008-3>

Ҷ.Ҳ.АМИНОВ, L.DING*, Ю.МАМАДҶОНОВ**, С.Б.АШУРАЛИЕВ, Ш.А.ОДИНАЕВ

**МАЪЛУМОТИ НАВ ОИД БА ХУСУСИЯТҲОИ ГЕОКИМИЁИИ
ГРАНИТҲОИ КОМПЛЕКСИ МАГМАТИКИИ БОЗОРДАРА
(ПОМИРИ ЧАНУБӢ)**

*Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи
АМИ Тоҷикистон,*

**Институти таҳқиқоти пуштакӯҳи Тибет,
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Мардумии Чин,*

***Маркази илмӣ-таҳқиқотии экология ва муҳити зисти Осиёи Марказӣ (Душанбе)*

Дар мақола маълумоти нав оид ба хусусиятҳои геохимии гранитҳои комплекси магматикии Бозордара оварда шудаанд. Нишон дода шудааст, ки чинҳои интрузивии таҳти омӯзиш ба навҳои гранитҳои плюмазитӣ тааллуқ дошта, дар натиҷаи дифференсиатсияи магмаи аввалия тавассути кристаллизатсияи фраксионӣ ба вучуд омадаанд. Инчунин, муайян карда шудааст, ки гранитҳои комплекси Бозордара палингенӣ буда ва магмаи онҳо дар натиҷаи гудозиши маводи қишри поёнии Замин пайдо шудааст. Дар ҳамин ҳол, аномалияҳои манфии Ti ва Nb, ки дар спайдер-диаграммаҳо мушоҳида мешаванд ва хоси гранитҳои супрасубдуксионӣ мебошанд, аз манбаи худ, яъне аз маводи қишри поёнӣ ба мерос гирифта шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: Помири чанубӣ, комплекси магматикии Бозордара, геохимия, гранитҳо.

J.H.AMINOV, L.DING*, Yu.MAMADJANOV**, S.B.ASHURALIEV, Sh.A.ODINAEV

**NEW DATA ON GEOCHEMICAL FEATURES OF GRANITES
FROM THE BAZARDARA MAGMATIC COMPLEX (SOUTH PAMIR)**

*Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology,
National Academy of Sciences of Tajikistan,*

**Institute of Tibetan Plateau Research, Chinese Academy of Sciences,
**Research Center for Ecology and Environment of Central Asia (Dushanbe)*

This article describes new data on geochemical features of granites from the Bazardara igneous complex. It is shown that the rocks pertain to the peraluminous type of granites and formed as a result of differentiation of the initial magma via the fractional crystallization of feldspars and micas. Also, it is established that the granites of the Bazardara igneous complex are palingenic in nature and their magma formed from a lower crustal substrate. Wherein, the negative anomalies of Ti and Nb observed on spider diagrams and are typical for the granites of suprasubduction zones, probably, are inherited from the lower crustal source.

Key words: South Pamir, Bazardara igneous complex, geochemistry, granites.

УДК 624.042

И.И.КАЛАНДАРБЕКОВ

**АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ И СХОДИМОСТИ МЕТОДА СОСРЕДОТОЧЕННЫХ
ДЕФОРМАЦИЙ**

Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими

Поступила в редакцию 15.04.2022 г.

В статье приводится оценка точности и сходимости метода сосредоточенных деформаций. Для оценки точности метода рассматривается конкретный пример по расчёту консольной балки нагруженной сосредоточенной силой. Полученные результаты сопоставлены с аналитическим решением. Приведены также решения задачи о продольных деформациях стержня с различными граничными условиями на основе метода сосредоточенных деформаций.

Ключевые слова: точность, сходимость, жёсткость, переменное поперечное сечение, дискретизация, тестовая задача, консольная балка, продольная деформация, граничные условия.

Метод упругих сосредоточенных деформаций, предложенный профессором А.Р.Ржаницыным [1], исходит из того, что связь между элементами осуществляется по линиям, разделяющим жесткие конечные элементы. Сосредоточенные деформации вызывают передачу поперечных и растягивающих усилий от двух соседних жестких элементов. Этот метод был развит в работах [2-16] с учетом специфики железобетонных конструкций при статических и динамических нагрузках .

Как известно, с уменьшением размеров элементов метода сосредоточенных деформаций (МСД) точность результатов повышается. МСД предназначен для расчета стержней переменного поперечного сечения и систем таких стержней. Изменчивость жесткости по длине элемента объясняется физической нелинейностью железобетона. Рассмотрим конкретные примеры для оценки точности и сходимости МСД.

Адрес для корреспонденции: Каландарбеков Ифтихор Имомёрбекович, 734025, Республики Таджикистан, г. Душанбе, ул. акад. Радабатовых, 10. Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими. E-mail: iftikhor791@mail.ru

Пример расчёта задачи по оценки точности. Консольная балка, нагруженная на свободном конце сосредоточенной силой P (рис. 1). Требуется определить на свободном конце балки прогиб и сопоставить его с точным решением. В данном примере влияние деформаций сдвига не учитывается.

Прогиб на конце балки при $P=1$ можно определить по формуле

$$w_{n+1} = d [n\varphi_1 + (n-1)\varphi_2 + \dots + (n-(n-1)/\varphi_n], \quad (1)$$

где n – число элементов, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – углы поворота (излома) элементов МСД.

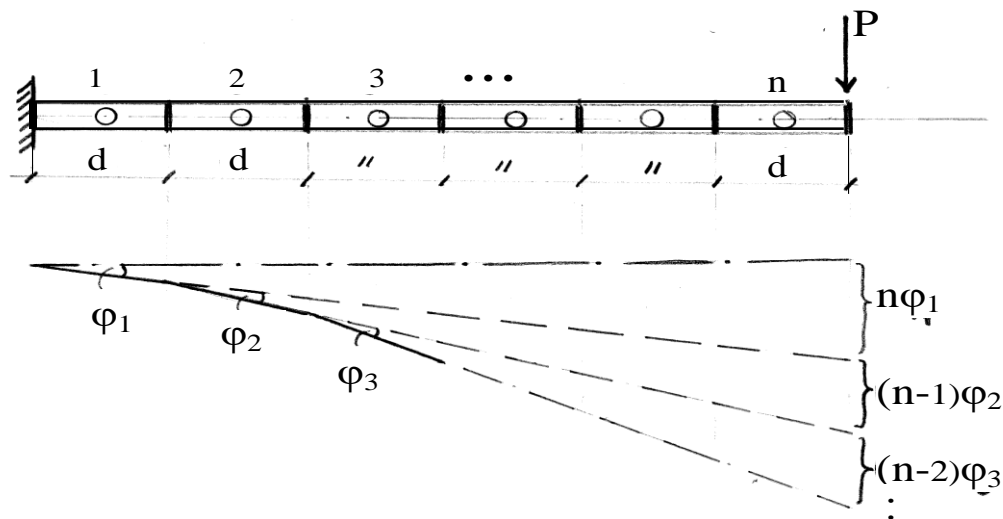


Рис. 1. Консольная балка, нагруженная сосредоточенной силой.

Углы поворота можно выразить через изгибающие моменты

$$\varphi_j = M_j / (EI / d), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где изгибающие моменты M_j по линиям сосредоточенных деформаций будут равны

$$M_j = Pd \cdot (n+1-j). \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$w_{n+1} = Pl^3 / EIn^3 [n^2 / 2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + (n-(n-1))^2],$$

откуда следует, что при $n = 3$

$$w_4 = \frac{19Pl^3}{54EI} = 0,352 \frac{Pl^3}{EI},$$

а при $n = 8$

$$w_8 = Pl^3 / 8^3 EI (32 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1) = 0.3359 \frac{172Pl^3}{8^3 EI} = 0.3359 \frac{Pl^3}{EI},$$

что на 0.8% отличается от точного решения

$$w = Pl^3 / 3EI. \quad (4)$$

В [8] представлены сравнения прогибов консольной балки, рассчитанные по МСД с аналитическими решениями по известным формулам [17] с учётом деформаций сдвига. Полученные результаты показали хорошую сходимость уже при $n=4$.

Для консольного стержня длиной $l = 120$ см, шириной $b = 20$ см, высотой $h = 40$ см, загруженной на свободном конце сосредоточенной силой $F=100$ кН, требуется определить прогиб при следующих физических и геометрических характеристиках: модуль упругости бетона $E_b = 2 \cdot 10^4$ МПа, момент инерции сечений

$$I = bh^3 / 12 = 106666.67 \text{ см}^4,$$

модуль сдвига

$$G = E / 2 (1 + \nu) = 0.8 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

С учётом деформации сдвига прогиб по МСД определяется по формуле

$$w_{n+1} = \frac{Pl^3}{EIn^3} \left[n^2 / 2 + (n-1)^2 + (n-2) + \dots + (n - (n-1))^2 \right] + \frac{Pl^2}{hn^2 GF_z} [n / 2 + (n-1) + (n-2) + \dots + (n - (n-1))],$$

где h – высота сечения балки. $F_z = F / \mu$, μ – коэффициент формы сечения.

По аналитическим решениям прогиб с учётом изгиба и сдвига будет равен

$$w = Pl^3 / 3EI + (Pl\mu / GF). \quad (5)$$

Прогиб, вычисленный по формуле (5), равняется

$$w = 10000 \cdot 120^3 / 3 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 106666.67 + 10000 \cdot 120 \cdot 1.2 / 0.8 \cdot 10^4 \cdot 800 = 0.29249 \text{ см},$$

а по формуле МСД (4), при $n = 8$, $w_8 = 0.30584$ см.

Как видно из сравнения, погрешность МСД при $n = 8$ составляет 4.5%. Увеличение погрешности в этой задаче, по сравнению с примером без учета сдвига, объясняется разницей в перемещениях от деформации сдвига.

В работе [18] с целью наглядности сопоставительного анализа рассмотрена задача продольной деформации стержня с различными граничными условиями от действия рас-

пределенной нагрузки. Дифференциальное уравнение продольных деформаций стержня жесткостью EF от действия распределенной нагрузкой $q(x)$ имеет вид

$$EF \frac{d^2 u}{dx^2} + q(x) = 0. \quad (6)$$

Точные решения этой задачи для различных граничных условий и типа нагрузки приведены в работе [19]. Эти результаты получены для следующих типов задач: стержень конечной длины L с одним закрепленным концом испытывает действия равномерно распределенной нагрузки; нагрузка по длине бруса изменяется по линейному закону $q(x) = q_0(L-x)/L$ и $N(0) = q_0 L / 2$; стержень с обоими закрепленными концами испытывает действия равномерно распределенной нагрузки; заданная нагрузка изменяется по линейному закону $q(x) = q_0(L-x)/L$.

Пример решения задачи по оценке точности МСД. Теперь рассмотрим решение задач на основе МСД о продольных деформациях стержня длины L с различными граничными условиями. Согласно сущности МСД дискретизация осуществляется путем разбиения балки на n конечные элементы с сосредоточением их деформаций в $n+1$ сечениях (рис. 2).

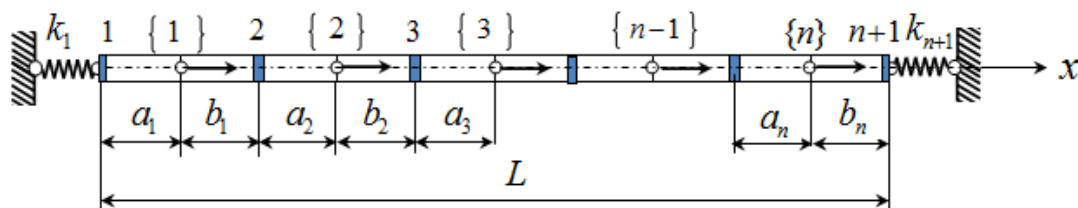


Рис. 2. Расчетная модель с n элементами.

Расчетная модель призматического стержня, состоящая из трех конечных элементов МСД с сосредоточенными деформациями в сечениях 1, 2, 3, 4 и фиктивными связями в узлах $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, а также упругоподатливыми опорами приведена на рис. 3. Равномерно распределенная нагрузка заменяется эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в узлах фиктивных связей.

Исходя из сути учёта податливости опорных закреплений в опорном сечении 1, сосредотачиваются деформации отрезка a_1 – левой части элемента $\{1\}$, а также деформация упругоподатливой опоры с жесткостью k_1 .

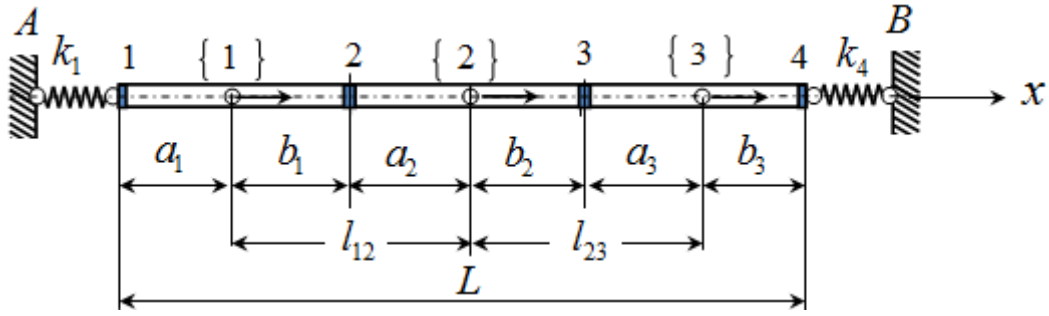


Рис. 3. Дискретная модель с тремя элементами.

При продольной деформации стержня в сечениях 1,2,3,4 возникают нормальные силы N_1, N_2, N_3, N_4 . В соответствии с законом Гука можно определить значения абсолютных деформаций в сечениях 1 и 2 конечного элемента {1}.

$$\Delta u_{11} = \frac{N_1 a_1}{EF_{11}} + \frac{N_1}{k_1}, \quad \Delta u_{21} = \frac{N_2 b_1}{EF_{21}} + \frac{N_2 \delta_{01}}{EF_{01}}, \quad (7)$$

где δ_0, EF_0 – ширина и жесткость реального шва.

Аналогично из равновесия конечных элементов {2} и {3}, получаем

$$\Delta u_{22} = \frac{N_2 a_2}{EF_{22}} + \frac{N_2 \delta_{02}}{EF_{02}}, \quad \Delta u_{32} = \frac{N_3 b_2}{EF_{32}} + \frac{N_3 \delta_{02}}{EF_{02}}, \quad (8)$$

$$\Delta u_{33} = \frac{N_3 a_3}{EF_{33}} + \frac{N_3 \delta_{03}}{EF_{03}}, \quad \Delta u_{43} = \frac{N_4 b_3}{EF_{43}} + \frac{N_4}{k_4}. \quad (9)$$

Исходя из условия неразрывности деформаций

$$\Delta u_1 = \Delta u_{11}, \quad \Delta u_2 = \Delta u_{21} + \Delta u_{22}, \quad \Delta u_3 = \Delta u_{32} + \Delta u_{33}, \quad \Delta u_4 = \Delta u_{43}, \quad (10)$$

физические уравнения (7) – (10) могут быть представлены в матричной форме

$$\lambda = \mathbf{BS}, \quad (11)$$

где λ – вектор абсолютных деформаций, \mathbf{B} – диагональная матрица податливости, \mathbf{S} – вектор внутренних усилий.

Матричное уравнение (11) можно представить в виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}^{-1} \lambda = \mathbf{C} \lambda,$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1} = \text{diag}(b_{11}^{-1} \quad b_{22}^{-1} \quad b_{33}^{-1} \quad b_{44}^{-1}) = \text{diag}(c_{11} \quad c_{22} \quad c_{33} \quad c_{44}),$$

где \mathbf{C} – матрица внутренней жесткости дискретной модели МСД. Исходя из статического равновесия каждого конечного элемента МСД, получим систему уравнений.

Систему разрешающих алгебраических уравнений представим в виде

$$\mathbf{KU} = \mathbf{P}, \quad (12)$$

где $\mathbf{U} = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ – вектор искомых перемещений.

1. Для стержня с одним закреплённым концом, аналитическое решение уравнения (6) приводит к следующим результатам:

а) для перемещений в узлах $x = L/6; L/2; 5L/6$

$$u_1 = 11/72 = 0.1528; \quad u_2 = 3/8 = 0.3750; \quad u_3 = 35/72 = 0.4861,$$

б) для нормальных сил в сечениях $x = 0; L/3; 2L/3; L$

$$N_1 = 1; \quad N_2 = 2/3; \quad N_3 = 1/3; \quad N_4 = 0.$$

Сопоставление результатов показывает, что максимальное перемещение по МСД на 2.8% отличается от аналитического решения, а нормальные силы и полное удлинение совпадают с точным решением.

2. Для стержня с обоими закреплёнными концами, решение (12) при $k_1 \rightarrow \infty$ и $k_4 \rightarrow \infty$ приводит к следующим результатам для перемещений в узлах $\{1\}, \{2\}, \{3\}$:

$$u_1 = 1/12 = 0.08333; \quad u_2 = 5/36 = 0.1388;$$

$$u_3 = 1/12 = 0.08333; \quad u = u \cdot qL^2 / EF.$$

Деформации, нормальные силы и полное удлинение будут равны

$$\Delta u_1 = u_1 - u_A = 1/12; \quad \Delta u_2 = u_2 - u_1 = 1/18;$$

$$\Delta u_3 = u_3 - u_2 = -1/18; \quad \Delta u_4 = u_B - u_3 = -1/12;$$

$$N_1 = c_{11}\Delta u_1 = 1/2; \quad N_2 = c_{22}\Delta u_2 = 1/6;$$

$$N_3 = c_{33}\Delta u_3 = -1/6; \quad N_4 = c_{44}\Delta u_4 = -1/2,$$

$$\Delta L = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 + \Delta u_4 = 0.$$

Аналитическое решение приводит к следующим результатам:

$$u(x) = q(Lx - x^2) / 2EF \quad \text{при } x = L/6; L/2; 5L/6:$$

$$u_1 = 0.06944; \quad u_2 = 0.1250; \quad u_3 = 0.06944;$$

$$u = u \cdot qL^2 / EF; \quad \Delta u_1 = 0.06944; \quad \Delta u_2 = 0.05556;$$

$$\Delta u_3 = -0.05556; \quad \Delta u_4 = -0.06944$$

Нормальная сила $N(x) = q(L - 2x) / 2$ при $x = 0; L/3; 2L/3; L$:

$$N_1 = 1/2; \quad N_2 = 1/6; \quad N_3 = -1/6; \quad N_4 = -1/2.$$

На рис. 4 результаты по МСД сравниваются с данными, полученными аналитическим методом и по МКЭ [20]. Кривая 1 соответствует стержню с одним свободным концом, а кривая 2 – с обоими закреплёнными концами.

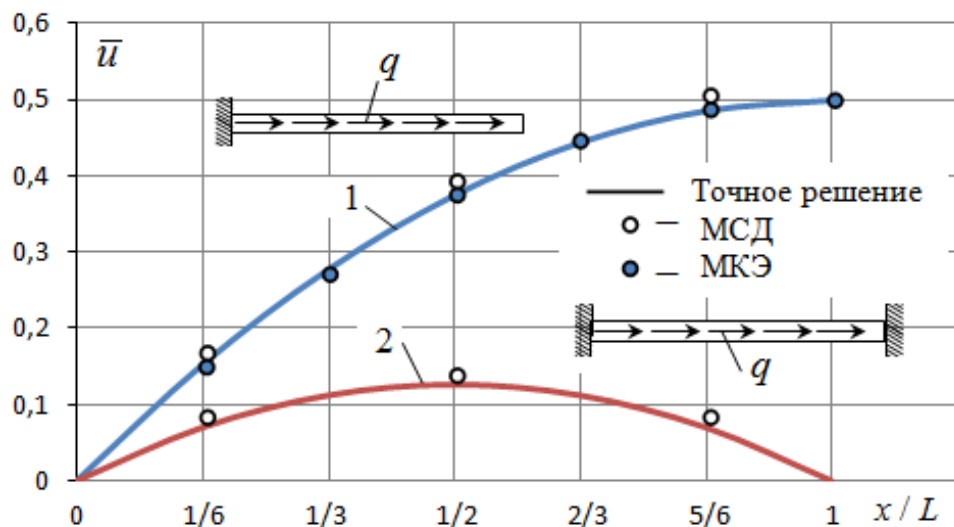


Рис. 4. Сравнение результатов.

Результаты численных экспериментов. Для анализа сходимости и точности МСД в [18] рассмотрена задача продольных деформаций призматического стержня (рис. 2). В табл. 1 представлены безразмерные перемещения центра бруса для четырех вышеизложенных задач при различных значениях n , которые сравниваются с их аналитическими решениями. Из табл.1 видно, что величина относительной погрешности аппроксимации δ зависит не только от шага аппроксимации $h = L/n$, но и от вида правой части (5), а также от граничных условий задачи.

Таблица 1

Исследование сходимости и точности МСД при различных разбиениях

Задача	n				Точное решение	$\delta, \%$			
	1	3	9	27		$n=1$	$n=3$	$n=9$	$n=27$
1	0.50	0.3889	0.3765	0.3751	0.3750	33.33	3.7	0.4	0.026
2	0.25	0.1574	0.1471	0.1460	0.1458	71.46	7.9	0.89	0.14
3	0.25	0.1389	0.1265	0.1252	0.1250	100.0	11.12	1.20	0.16
4	0.125	0.06944	0.06327	0.06259	0.06250	100.0	11.10	1.23	0.14

Вывод. Приведённые выше оценки точности МСД дают возможность судить о необходимой степени дискретизации стержня, жёсткость которого меняется в пределах пролёта по некоторому известному закону. Представленные сравнения прогибов и сил для некоторых балочных элементов показывают, что метод сосредоточенных деформаций имеет достаточную точность, необходимую для практики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницын А.Р. Расчёт сплошных конструкций методом упругих сосредоточенных деформаций. В журн.: Строй. механика и расчёт сооружений. – М.: 1980, № 5, с. 15-20.

2. Додонов М.И. Развитие и применение метода сосредоточенных деформаций к расчету проёмных диафрагм многоэтажных зданий. В журн.: Строй. механика и расчет сооружений. – М.: 1984, № 6, с. 65-69.
3. Додонов М.И. Расчёт изгибаемых пластин методом сосредоточенных деформаций. В журн.: Строй. механика и расчёт сооружений. – М.: 1986. № 2, с. 22-25.
4. Додонов М.И., Каландарбеков И. Развитие расчётных моделей дисков сборных железобетонных перекрытий при действии на них горизонтальной (ветровой) нагрузки. – М.: ВНИИИС Госстроя СССР. Реф. журнал. Строительства и архитектура, 1983, сер. 11, вып. 9, № 4058, 20 с.
5. Додонов М.И., Каландарбеков И. Теоретические исследования моделей дисков перекрытий при действии на них горизонтальной нагрузки. МИСИ Деп. в ВНИИИС Госстроя СССР. Раздел: Строительство и архитектура. – М.: 1984, вып. 4, № 4913, 9 с.
6. Додонов М.И., Каландарбеков И. Методика испытаний моделей дисков перекрытий при действии на них горизонтальной нагрузки. Реферативный журнал «Строительство и архитектура». – М.: 1983, вып. 4, 5 с.
7. Додонов М.И., Каландарбеков И. Экспериментальное исследование моделей дисков перекрытий многоэтажных зданий. Экспресс-информация. Раздел: Строительство и архитектура, – М.: 1984, серия 8, с. 5-8.
8. Каландарбеков И. Железобетонные диски перекрытий многоэтажных каркасных зданий из плит безопалубочного формования. Дисс. канд. техн. наук. – М.: 1985, 209 с.
9. Каландарбеков И., Музофирова Т.Е. Теоретические исследования дисков перекрытий многоэтажных каркасных зданий. – Хорог: Вестник ХоГУ, 2000. № 2, с. 139-150.
10. Каландарбеков И. Анализ поведения многоэтажных зданий на основе расчета с учетом упругопластических деформаций при действии мгновенного импульса. – Душанбе: ДАН РТ, 2007, т.50, № 6, с. 560-568.
11. Мамин А.Н. Сопротивление перекрытий из плит безопалубочного формования кручению и деформированию в плоскости. Автореф. дисс. канд. техн. наук. – М.: 1986, 20 с.
12. Каландарбеков И. Развитие метода сосредоточенных деформаций применительно к расчётам конструкций с учетом податливости соединений. Дисс. на соиск. ученой степ. док. техн. наук. – М.: 2009, 435 с.
13. Низомов Д.Н., Каландарбеков И. Метод сосредоточенных деформаций в решении статических и динамических задач строительной механики. – Душанбе: Ирфон, 2005, 289 с.
14. Низомов Д.Н. Каландарбеков И. Метод сосредоточенных деформаций в решении одномерных динамических задач. ДАН РТ, 2006, т.49, № 3, с. 284-288.
15. Низомов Д.Н., Каландарбеков И. Динамический расчёт многоэтажных зданий на основе метода сосредоточенных деформаций. Изв.я АН РТ, 2007, № 1(126), с. 98-106.
16. Низомов Д.Н., Каландарбеков И. Метод сосредоточенных деформаций в решении статических задач теории упругости. Изв. АН РТ, 2007, № 2(127), с. 98-106.
17. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. – М.: Наука, т.1, 1965, 363 с., т.2, 1965, 480 с.
18. Низомов Д.Н., Каландарбеков И. Метод сосредоточенных деформаций. – Душанбе: Дониш, 2015, 435 с.
19. Филин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела. – М.: Наука, т. I, 1975, 832 с., т. II, 1978, 616 с.
20. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984, 428 с.

И.И.ҚАЛАНДАРБЕКОВ

ТАҲЛИЛИ САҲЕҲӢ ВА НАЗДИКШАВИИ МЕТОДИ МУТАМАРКАЗКУНОНИИ ДЕФОРМАТСИЯҲО

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи акад. М.С.Осимӣ

Дар мақола баҳо додан ба саҳеҳӣ ва наздикшавии методи мутамарказкунии деформатсияҳо оварда шудааст. Барои муайян кардани аниқии метод мисоли мушаххас оиди ҳисоби болори консолӣ, ки дар тарафи озодаи он қувваи мутамарказ гузошта шудааст ва ин натиҷаҳо бо ҳалли аналитикӣ муқоиса карда шудаанд. Инчунин, ҳалли масъала оиди деформатсияҳои тулии меҳвар бо шартҳои гуногуни сарҳадӣ дар асоси методи мутамарказкунонии деформатсияҳо оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: саҳеҳӣ, наздикшавӣ, сахтӣ, буриши кундалангии тағйирёбанда, дискретизатсия, масъалаи тестӣ, ғайрихаттии физикавӣ, болори консолӣ, деформатсияи тулӣ, шартҳои сарҳадӣ.

I.I.KALANDARBEKOV

ANALYSIS OF ACCURACY AND CONVERGENCE LOCATION DEFORMATION METHODS

Tajik Technical University named after acad. M.S.Osimi

The article provides an estimate of the accuracy and convergence of the lumped deformation method. To assess the accuracy of the method, a specific example is presented for calculating a cantilever beam with a loaded concentrated force at its free end, and these results are compared with an analytical solution. A solution to the problem of longitudinal deformations of a rod with different boundary conditions based on the method of concentrated deformations is also given.

Key words: accuracy, convergence, stiffness, variable cross section, discretization, test problem, physical nonlinearity, cantilever beam, longitudinal deformation, boundary conditions.

УДК 551.583.13

А.А.ГУЛАХМАДОВ

**КОЛЕБАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ОСАДКОВ В ВЕРХОВЬЯХ БАССЕЙНА
РЕКИ ВАХШ**

*Институт водных проблем, гидроэнергетики и экологии
Национальной Академии наук Таджикистана
Поступила в редакцию 14.02.2022 г.*

Учитывая различную высоту бассейна реки Вахи в Центральной Азии, глобальное потепление имеет значительные последствия для водных ресурсов и изменений окружающей среды в водосборе. Целью этого исследования является использование гидроклиматических данных наблюдений для оценки трендов и величин изменчивости среднегодовой температуры воздуха и среднегодовых осадков. Долгосрочные гидроклиматические переменные оцениваются с использованием исходного теста Манна-Кендалла, модифицированного теста Манна-Кендалла (ММК) и оценки уклона Сена. Общая картина среднегодовой температуры воздуха показывает непрерывное потепление на водосборе в периоды 1960-2015 гг. Результат теста ММК показывает статистически значимое увеличение тренда среднегодовой температуры воздуха на низких станциях в период с 1960 по 2015 годы. Результаты теста ММК показывают статистически значимое уменьшение среднегодового тренда осадков только на одной станции с Z , равным -2.385 , и значением наклона, и значением p , равным -1.273 и 0.017 . Однако результаты теста ММК показывают статистически значимую тенденцию к увеличению среднегодовых осадков на станциях Ляхи со значениями Z равным 6.367 , значениями наклона равным 1.530 и значением p , равным 0.000 . Эти данные показывают явные климатические изменения в бассейне реки Вахи. Таким образом, результаты служат руководством для планирования новых национальных мероприятий по смягчению последствий и адаптации.

Ключевые слова: тренд, температура, осадки, величина уклона, высота, бассейн реки Вахш.

Адрес для корреспонденции: Гулахмадов Аминджон Абдуджабборович, 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни 14А, Институт водных проблем, гидроэнергетики и экологии НАНТ. E-mail: agulakhmadov@gmail.com

Введение

Начиная с XIX века анализируются изменения температуры приземного воздуха. Согласно пятому отчету об оценке (AR5) Межправительственной группы экспертов по изменению климата (IPCC), за период 1880–2012 гг. температура повысилась в обоих полушариях земного шара [1]. Глобальная температура повысилась на 0.85 °C [1]. По данным Гиз и др. [2] и Кристенсен и др. [3] регионы Центральной Азии страдают от глобального потепления, превышающего средний уровень. За последнее столетие в Средней Азии температура повысилась с 1 до 2 °C [2, 3]. Согласно отчету Всемирного банка [4], горная территория Таджикистана в Центральной Азии считается одной из наиболее уязвимых к последствиям изменения климата в регионе. В настоящем исследовании мы сосредоточили внимание на бассейне реки Вахш, который расположен на территории Таджикистана и Кыргызстана в Центральной Азии. На изменение климата в Таджикистане влияют высокогорные районы в результате адиабатических процессов [5]. Бассейн реки Вахш имеет огромный местный контраст температуры из-за гористого рельефа местности. Летом юго-западная часть бассейна находится под сильным влиянием сухого зноя пустынь Туркменистана и Афганистана [6]. Климат бассейна реки Вахш континентальный, под влиянием западного ветра, что приводит к большим сезонным колебаниям температур [7].

Саади и др. [8] использовали тест Манна-Кендалла (МК) и модифицированный тест Манна-Кендалла (ММК) для анализа тренда сезонных осадков в Малайзии. Результаты ММК показали тенденцию к увеличению годового количества осадков только на одной метеостанции, а на других станциях не было обнаружено значительного тренда [8]. В 1956-1961 и 1975-1985 годах тест МК показал увеличение среднего по площади тренда осадков в южной части Китая [9]. Рахман и др. использовали тест ММК для оценки годового количества осадков в различных регионах Бангладеш. Результаты показали, что в некоторых регионах эта тенденция усилилась; в других регионах она снизилась. Статистически значимых трендов в годовой структуре осадков не наблюдалось ни в одном регионе Бангладеш [10]. Испытания МК и ММК показали тренд к увеличению среднегодовых осадков в северных высокогорьях Пакистана в Гималайских хребтах [11].

Текущий анализ проводился с применением тестов МК, ММК и Сена для определения уровня значимости и величины тренда. Основные цели данного исследования - выявить наличие значительного тренда средней годовой температуры и среднегодовых осадков на четырех метеостанциях в бассейне реки Вахш в Центральной Азии в течение 1960–2015 гг.

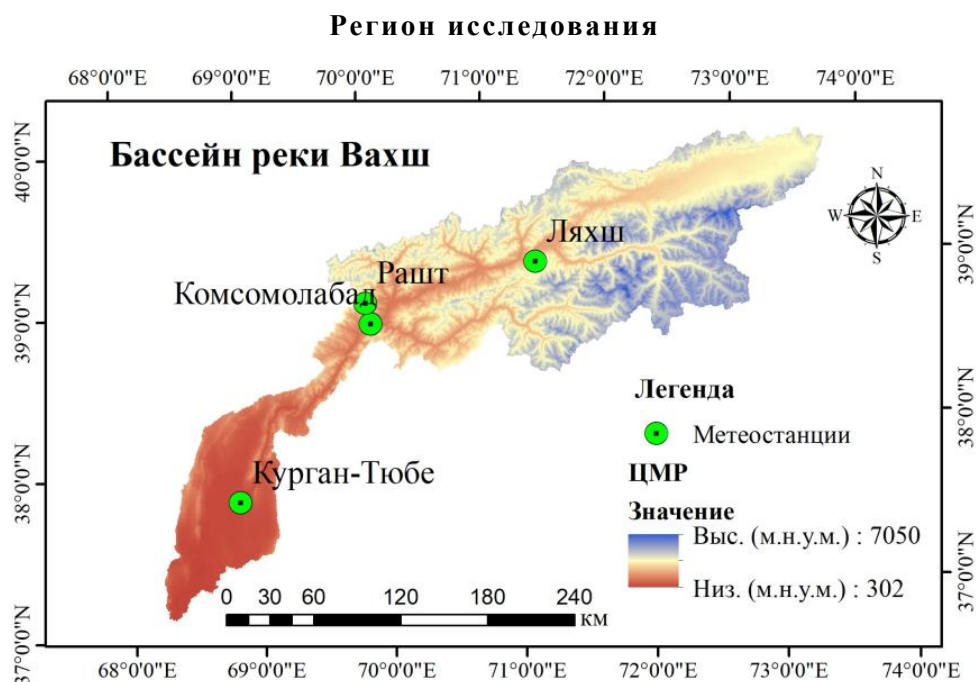


Рис. 1. Расположение бассейна реки Вахш и его метеостанции.

В этом исследовании мы использовали долгосрочные метеорологические данные, включая годовые показатели осадков и температуры, со следующих пяти метеостанций: Ляхш, Рашт, Комсомолабад, Курган-Тюбе за период с 1960 по 2015 годы, полученные от Агентства по гидрометеорологии Комитета по охране окружающей среды при Правительстве Республики Таджикистан. Используя климатические данные этих станций, мы обсудили последние тенденции изменения годовой температуры и количества осадков. Координаты метеостанций приведены в табл. 1.

Таблица 1

Станции наблюдения и информация об их местоположении.

Всемирная метеорологическая организация (ВМО)

ВМО No.	Название станции	Широта (°N)	Долгота (°E)	Высота (м)	Временной период
38744	Ляхш	39.17	71.32	1998	1960–2015
38851	Рашт	39	70.18	1316	1960–2015
38840	Комсомолабад	38.52	69.59	1258	1960–2015
38933	Курган-тюбе	37.5	68.47	427	1960–2015

Методы

Целью данного исследования была оценка долгосрочного тренда годовой температуры и количества осадков в горных и равнинных районах с использованием непараметрического теста Манна-Кендалла (МК) и модифицированного теста Манна-Кендалла (ММК), а также применения критерия Сена, наклонный подход для оценки величины

трендов [12]. В этой статье мы пропустили описание уравнений и методы по той причине, что мы представили эти уравнения в наших предыдущих исследованиях [13,14].

Результаты и их обсуждения

Рассмотрение различных климатических зон бассейна реки Вахш и понимание анализа трендов температуры и осадков является одними из наиболее важных аспектов исследований изменения климата. На основе метеорологических данных, полученных с пяти метеостанций на равнинах и в горных районах бассейна реки Вахш, были проанализированы среднегодовая температура воздуха и среднегодовое количество осадков с использованием теста Манна-Кендалла, модифицированного теста Манна-Кендалла и метода наклона Сена (табл. 2). Ниже описываются климатические характеристики четырех климатических точек с анализом трендов, а также величинные изменения тренда на каждой метеостанции.

Климатические характеристики и анализ трендов годового количества осадков и температуры

Мы представляем наши результаты по порядку, от самой высокой станции к самой низкой, чтобы понять разницу в климатических характеристиках по сезонам и ежегодные изменения климатических переменных между равнинами и высокогорными районами бассейна реки Вахш.

В районе метеостанции Ляхш низкая влажность, с умеренно теплым летом и умеренно мягкой зимой. Среднегодовая температура составляет 6.5 °C (рис. 2). Средняя температура самого холодного месяца января составляет -9°C. Средняя минимальная температура воздуха составляет -12.8°C, но при вторжении больших холодных масс воздуха она опускается до -20°C и -27°C. Средняя температура самого теплого месяца августа 20°C. Этот район расположен в отрогах северо-западных склонов Заалайского хребта [15].

Среднегодовое количество осадков за 1960-2015 гг. на станции Ляхш составило 416 мм. Во влажные годы количество осадков составляет 600-700 мм; в засушливые годы 230-300 мм. Годовое количество осадков типично с максимумом весной (март-май) и минимумом в летне-осенний период (август-сентябрь). Снежный покров появляется в конце октября, но постоянный снежный покров устанавливается во второй половине ноября. По многолетним данным на метеостанции Ляхш, максимальная зафиксированная высота снежного покрова составляет 95 см.

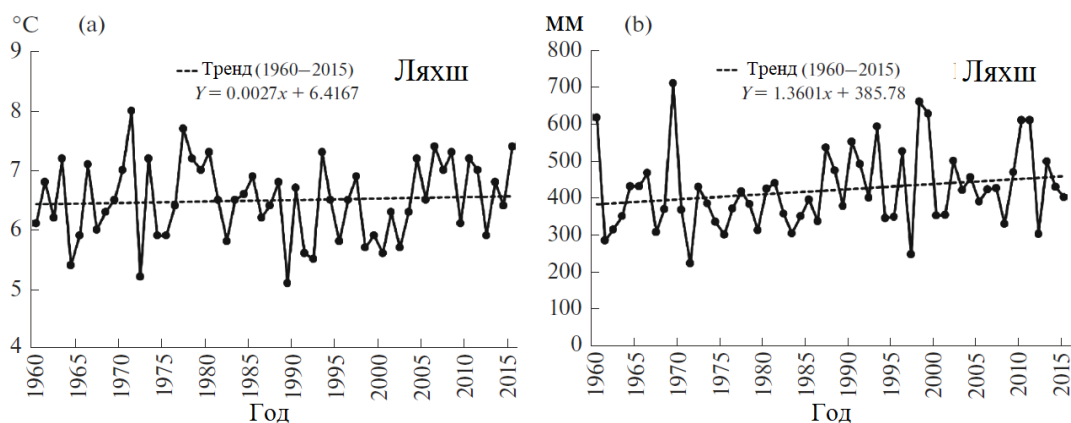


Рис. 2. Межгодовая изменчивость и динамика средней годовой температуры воздуха (а) и среднегодовых осадков (б) на метеостанции Ляхш с 1960 по 2015 г. в бассейне реки Вахш.

Результат анализа трендов в сочетании с температурой и осадками описывается для каждой опорной станции отдельно. На рис. 2а показана многолетняя среднегодовая температура воздуха на метеостанции Ляхш, которая показывает тенденцию к небольшому увеличению температуры. Кроме того, результаты испытаний оригинала МК и ММК не показали существенной тенденции к увеличению среднегодовой температуры воздуха. Тренд данных по многолетним средним годовым осадкам на станции Ляхш представлен на рис. 2б. Линия тренда среднегодовых осадков на метеостанции Ляхш имеет более крутой подъем по сравнению с линией тренда температуры. Результаты испытаний МК и ММК показали статистически значимую тенденцию к увеличению ($Z = 1.887$ и $Z = 6.367$) среднегодовых осадков на станции Ляхш с p -значением, равным 0,000. Значение наклона Сена оказалось равным 1.530. Сводка анализа трендов и значений наклона данных об осадках и температуре на станции Ляхш с 1960 по 2015 гг. представлена в табл. 2.

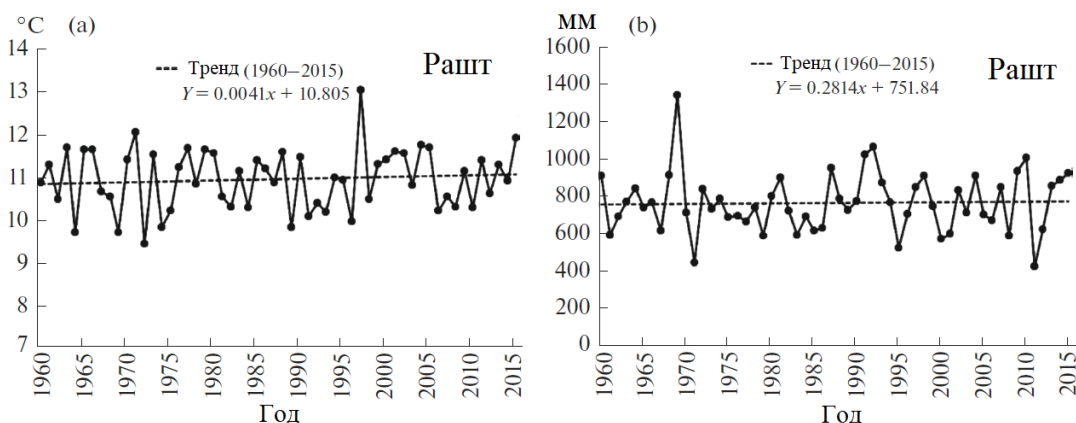


Рис. 3. Межгодовая изменчивость и тренд среднегодовой температуры воздуха (а) и среднегодовых осадков (б) на Раштской метеостанции с 1960 по 2015 гг. в бассейне реки Вахш.

Метеостанция Рашт расположена в горах Памиро-Алая в долине реки Сурхоб. Рельеф гористый и изрезанный [15]. У долины есть уклон с северо-востока на юго-запад с

постоянной шириной долины. Климат Раштского региона полувлажный, с умеренно теплым летом и умеренно мягкой зимой. Средняя годовая температура составляет 10,9 °С. Безморозный период длится в среднем 222 дня. Средняя температура самого холодного месяца января -3,5°С. Средняя минимальная температура воздуха -8,5°С; однако при вторжении крупных холодных воздушных масс она опускается до -26 или -27°С. Средняя температура самого теплого месяца августа – 23,5°С. В самые теплые месяцы температура воздуха днем поднимается до 35°С, а абсолютный максимум составляет 40°С. Средняя максимальная высота снежного покрова с 1960 по 2015 гг. составляла 43 см при максимальной высоте 92 см. На территории Раштской метеостанции преобладают восточные ветры (45% от общего количества случаев). Среднемесячная скорость ветра составляет 1,9–2,1 м/с в теплое время года и 3,5–3,6 м/с в холодное время года. Максимальная зарегистрированная скорость ветра 18–24 м/с. Снежный покров появляется в начале ноября, но постоянный снег устанавливается в первые 10 дней декабря.

На рис. 3а показан тренд данных о среднегодовой температуре воздуха на метеостанции Рашт за 1960–2015 гг. Слегка возрастающая линия тренда представляет среднегодовую температуру воздуха на станции Рашт. Результаты исходных и модифицированных тестов МК не показали статистически значимой тенденции к увеличению ($Z = 0.325$ и $Z = 1.109$) с p -значением, равным 0,268 от среднегодовой температуры на метеостанции Рашт. Среднегодовое количество осадков на станции Рашт с 1960 по 2015 г. колебалось от 399 до 1336 мм. Годовое количество осадков характеризуется максимумом в марте и апреле и небольшим количеством осадков в августе-сентябре. Линия тренда среднегодичных осадков на метеостанции Рашт показана на рис. 3б. Результаты оригинального и модифицированного теста МК показали положительную тенденцию к увеличению со значениями Z , равными 0,064 и 0,224, со значением наклона 0,075 и со значением p , равным 0,823 для среднегодовых осадков на метеостанции Рашт в период 1960-2015 гг. (табл. 2).

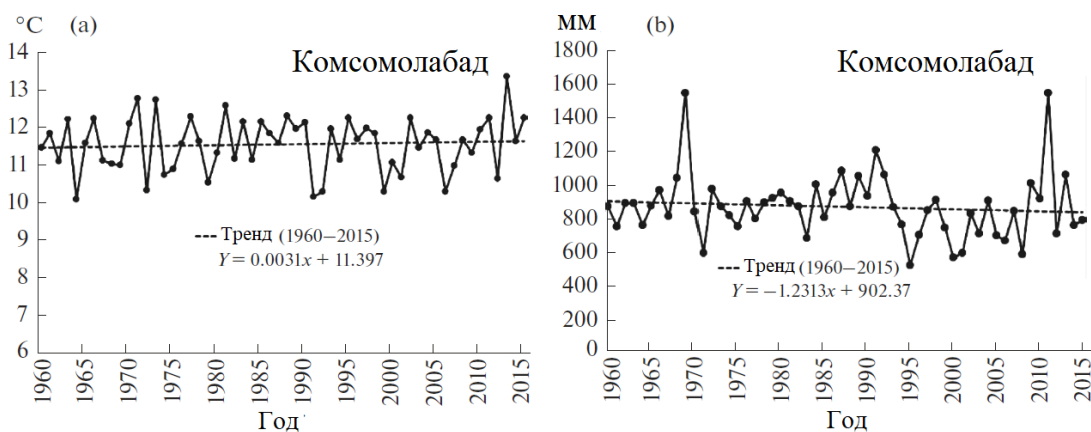


Рис. 4. Межгодовая изменчивость и динамика средней годовой температуры воздуха (а) и среднегодовых осадков (б) на метеостанции Комсомолабад с 1960 по 2015 гг. в бассейне реки Вахш.

Линия тренда продолжительных данных по средней годовой температуре воздуха со значительным трендом в районе метеостанции Комсомолабад показана на рис. 4а. В

этом районе метеостанция расположена в восточной части горного хребта Кухистан, в долине реки Вахш. Ширина долины в районе станции составляет 3–4 км, она довольно сильно террасирована. Река Вахш протекает в 2 км к югу от метеостанции Косомолабад в среднем течении водосбора. В окрестностях станции преобладают ветры с севера и северо-востока. В теплое время года среднемесячная скорость ветра колеблется от 1.4 до 1.9 м/с; в холодное время года она колеблется от 0.8 до 1.2 м/с. Снежный покров появляется в конце октября, но постоянный снежный покров устанавливается в первые 10 дней декабря. Средняя максимальная высота снега 50 см. По многолетним данным (1960-2015 гг.) максимальная высота снежного покрова составляла 90 см.

Климат станции Комсомолабад полувлажный, с теплым летом и умеренно мягкой зимой. Средняя годовая температура составляет 11.6°C. Среднемесячная температура воздуха самого холодного месяца -3°C (январь). Наш анализ данных длительных измерений показал, что минимальная средняя температура воздуха составляла -8°C с 1960 по 2015 год; при вторжении в воздух больших холодных масс температура понижается с -20 до -25°C. Август – самый теплый месяц со средней температурой 24.6°C; в жаркие месяцы дневная температура колеблется от 30 до 35°C, но абсолютный максимум составляет 42°C. Наши результаты оригинального и модифицированного теста МК для среднегодовой температуры воздуха за 1960–2015 гг. продемонстрировали положительную тенденцию к повышению. Оригинальный и модифицированный тесты МК не показали статистически значимый тренд ($Z=0.389$ и $Z=1.375$) с p -значением, равным 0.169 и значением наклона, равным 0.001, как показано в табл. 2.

Годовая линия тренда осадков на метеостанции Комсомолабад за 1960–2015 гг. показана на рис. 4b. На этой станции среднегодовое количество осадков за учетный период составило 884 мм. В частности, весенний сезон, март и апрель, характеризуется максимальным годовым количеством осадков, тогда как в августе и сентябре их почти не бывает. Среднегодовое количество осадков колеблется от 590 до 1539 мм. Результаты исходного теста МК не показали статистически значимый нисходящий тренд ($Z = -0.954$), тогда как результат модифицированного теста МК показал статистически значимый нисходящий тренд со статистикой теста (Z), равной -2.385, со значением наклона и p -значениями, равными -1.273 и 0.017.

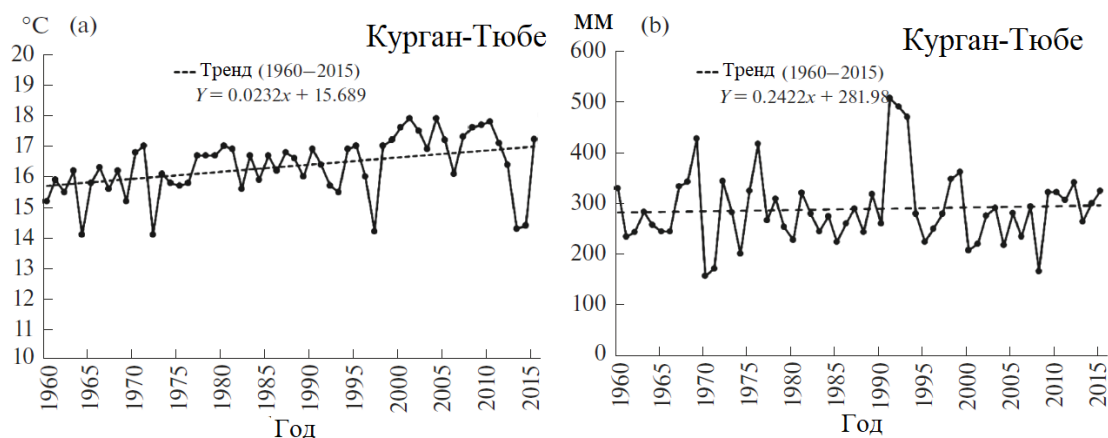


Рис. 5. Межгодовая изменчивость и динамика средней годовой температуры воздуха (а) и среднегодовых осадков (б) на метеостанции Курган-Тюбе с 1960 по 2015 гг. в бассейне реки Вахш.

На рис. 5а показана линия восходящего тренда среднегодовой температуры воздуха за последние 55 лет на метеостанции Курган-Тюбе. Станция расположена на юго-западе ниже по течению бассейна реки Вахш. В этом районе река Вахш орошает большую часть сельскохозяйственных земель в юго-западных регионах Таджикистана. Метеостанция Курган-Тюбе была открыта в 1929 году [15]. В данном исследовании эта станция расположена на самой низкой высоте (427 м) по сравнению с другими опорными станциями. В этом районе ветры северного направления преобладали в 28% от общего числа случаев. Средняя скорость ветра колеблется от 1.0 м/с в теплое время года до 1.5–1.9 м/с в холодное время года. Снежный покров неустойчивый и составляет 1-3 дня в 10 дней, в основном наблюдается с конца декабря до начала февраля. Средняя высота снежного покрова колеблется от 1 до 5 см с максимальной высотой 26 см с 1960 по 2015 год. Средняя годовая относительная влажность составляет 63% и колеблется в среднем от 40% до 81% в месяц.

Климат Курган-Тюбе сухой, с очень теплым летом и мягкой зимой. В этом нижнем течении бассейна реки Вахш самым холодным месяцем является январь, а самым жарким – июль, а средняя годовая температура воздуха составляет 15.8°C. В Курган-Тюбинской области преобладают как мягкие, так и слабые морозы. Средняя температура самого холодного месяца за 1960–2015 гг. составила 1.6°C (январь). Средняя минимальная наблюдаемая температура воздуха составила -2.5°C; однако при вторжении больших холодных масс воздуха; температура может опускаться до -15°C и -20°C. Абсолютный минимум температуры -24°C был зафиксирован в отдельные годы, но это происходит очень редко. В отдельные дни днем в зимние месяцы температура воздуха может достигать 20-22°C. Летний сезон в Курган-Тюбе жаркий и засушливый; июль – самый теплый месяц в этом регионе; средняя температура за отчетный период составила 28.5°C. В самые жаркие месяцы днем воздух прогревается до 40°C, а абсолютный максимум – 46°C. Так как средняя минимальная температура в летние месяцы составляет 15-20°C, в некоторые дни она мо-

жет снижаться до 7-10°C ночью. Оригинальные и модифицированные результаты тестов МК показали статистически значимый восходящий тренд со статистикой теста (Z), равной 4.091 и 7.989, и со значением p , равным 0.000. Значение наклона Сена составило 0.029 (табл. 2).

Наряду со значительной тенденцией к увеличению среднегодовой температуры воздуха, на метеостанции Курган-Тюбе в 1960–2015 гг. наблюдалась тенденция к увеличению среднегодовых осадков, как показано на рис. 5b. Годовое количество осадков составило 289 мм. В Курган-Тюбе годовое количество осадков с максимумом в марте – апреле и практически полное отсутствие осадков в июле – сентябре. Из общего количества осадков за год 43% выпадает весной, 45% зимой, 11% осенью и только 1% осадков летом. Исходный анализ тренда МК не показал значительного положительного тренда увеличения ($Z = 0.629$) среднегодовых осадков на метеостанции Курган-Тюбе, в то время как модифицированный тест тренда МК показал значительную положительную тенденцию к увеличению. Статистическое значение критерия Кендалла (Z) модифицированного теста МК составило 1.532, при этом значение наклона и значение p равнялись 0.385 и 0.125.

Таблица 2

Ежегодный тренд средней температуры и осадков, модифицированный и оригинальный тест Манна-Кендалла для трендов (Z) и наклон Сена на четырех метеостанциях с низкими и высокогорными высотами в бассейне реки Вахш

Среднегодовая температура (° C)						
Климатическая станция	Временной период	Z (модифицированный)	Z (оригинальный)	p -значение	Наклон	Значимость на основе модифицированного теста МК
Ляхш	1960–2015	1.243	0.602	0.214	0.003	NS
Рашт	1960–2015	1.109	0.325	0.268	0.002	NS
Комсомолабад	1960–2015	1.375	0.389	0.169	0.001	NS
Курган-тюбе	1960–2015	7.989	4.091	0.000	0.029	***
Среднегодовое количество осадков (мм)						
Климатическая станция	Временной период	Z (модифицированный)	Z (оригинальный)	p -значение	Наклон	Значимость на основе модифицированного теста МК
Ляхш	1960–2015	6.367	1.887	0.000	1.530	***
Рашт	1960–2015	0.224	0.064	0.823	0.076	NS
Комсомолабад	1960–2015	-2.385	-0.954	0.017	-1.273	**
Курган-тюбе	1960–2015	1.532	0.629	0.125	0.385	*

Проверенные уровни значимости: *** для $p < 0.001$, ** для $p < 0.01$, * для $p < 0.05$, NS для $p \geq 0.1$.

Из всех метеостанций в бассейне реки Вахш статистически значимый тренд среднегодовой температуры не был обнаружен для метеостанций Ляхш и Рашт, в то время как статистически возрастающий тренд среднегодовой температуры воздуха наблюдался для станций Комсомолабад и Курган-Тюбе. Тенденция среднегодового количества осадков не показала значимого тренда к уменьшению в Курган-Тюбе, тогда как статистически значимая тенденция к уменьшению наблюдалась на станции Комсомолабад. На станциях Ляхш и Рашт обнаружена тенденция к увеличению среднегодовых осадков. Этот вывод согласу-

ется с данными Чжана и др., которые проанализировали гидрометеорологические тенденции на юго-востоке Цинхай-Тибетского нагорья [16]. Наши результаты тренда среднегодовых осадков аналогичны результатам, полученным Ахмедом и др. [11], где тенденция к увеличению количества осадков наблюдалась в северных высокогорьях Пакистана в Гималайских хребтах. Аналогичным образом Чен и др. [9] сообщили, что в периоды 1965–1961 и 1975–1985 гг. среднегодовое количество осадков увеличилось в бассейне реки Дунцзян.

Анализ трендов количества осадков и температуры необходим для обеспечения подробной оценки воздействия изменения климата на водные ресурсы горных водосборов. Две высокогорные станции - Ляхш и Рашт четко указали на тенденцию к потеплению средней годовой температуры. Эти данные согласуются с данными Лю и др. [17] и Чин и др. [18] в Гималаях, где они наблюдали повышение температуры воздуха в высокогорных районах. Эффект повышения температуры в верхнем течении реки Вахш может ускорить таяние снега и ледников, что может повлиять на сезонность гидрологического процесса реки.

Выводы

В этом исследовании мы проанализировали среднегодовое количество осадков и среднегодовую температуру на метеостанциях на равнинах и на больших высотах в бассейне реки Вахш. Долгосрочные гидроклиматические переменные оценивались с применением оригинального теста Манна-Кендалла, модифицированного теста Манна-Кендалла (ММК) и оценки уклона Сена, которые являются широко используемыми методами для оценки трендов и изменений их величины в гидроклиматических условиях. В этом исследовании общая картина среднегодовой температуры воздуха показала постоянное потепление в водосборе, которое может иметь последствия для водообеспеченности водосбора, поскольку сток реки Вахш в основном обеспечивается за счет таяния снега и ледников. Результат теста ММК показал статистически значимое увеличение среднегодовой температуры воздуха с 1960 по 2015 г. на малых высотах 427 м на метеостанции Курган-Тюбе со статистикой Кендалла (Z), равной 7.989, и с величиной наклона и r -значением, равными 0,029 и 0,000.

Общая картина среднегодовых осадков среди четырех метеостанций указывает на тенденцию к уменьшению на одной станции на низких высотах и тенденции к увеличению на двух станциях на больших высотах и на одной станции на низкой высоте в бассейне реки Вахш. Результаты испытаний ММК выявили статистически значимую тенденцию к снижению на станции Комсомолабад с $Z = -2.385$ и величиной уклона, равной -1.273 . Среднегодовое количество осадков не показало статистически значимый восходящий тренд ($Z = 0.224$) со значением наклона, равным 0,823 и значением r , равным 0.076 на метеостанции Рашт. Результаты испытаний ММК показали статистически значимое увеличение среднегодовых осадков на Курган-Тюбе и Ляхше со значениями Z , равными 1.532 и 6.367 и значениями наклона, равными 0.385 и 1.530 и значениями r , равными

0.125 и 0.000. Анализ долгосрочных данных показал изменение температуры воздуха и условий выпадения осадков; таким образом, результаты служат руководством для составления новых национальных планов действий по смягчению последствий и адаптации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pachauri, R.K.; Allen, M.R.; Barros, V.R.; Broome, J.; Cramer, W.; Christ, R.; Church, J.A.; Clarke, L.; Dahe, Q.; Dasgupta, P. Climate change 2014: synthesis report. Contribution of Working Groups I, II and III to the fifth assessment report of the Intergovernmental Panel on Climate Change; IPCC: 2014.
2. Giese, E.; Mossig, I.; Rybski, D.; Bunde, A. Long-Term Analysis of Air Temperature Trends in Central Asia (Analyse langjähriger Zeitreihen der Lufttemperatur in Zentralasien). *Erdkunde* 2007, pp. 186-202.
3. Christensen, J.H.; Hewitson, B.; Busuioc, A.; Chen, A.; Gao, X.; Held, R.; Jones, R.; Kolli, R.K.; Kwon, W.; Laprise, R. Regional climate projections. In *Climate Change, 2007: The Physical Science Basis. Contribution of Working group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*, University Press, Cambridge, Chapter 11, 2007; pp. 847-940.
4. Давлятов Р.Р. Технический отчет проекта «PEER» в бассейне реки Амударья по территории Таджикистана. – Душанбе: Технический отчет, 2019.
5. Barry, R.G.; Chorley, R.J. *Atmosphere, weather and climate*; Routledge: 2009.
6. Williams, M.; Konovalov, V. Central Asia temperature and precipitation data, 1879-2003. Boulder, Colorado: USA National Snow and Ice Data Center 2008, 2008.
7. Нарзикулов И.К. Атлас Таджикской Советской Социалистической Республики. – М.: Атлас Таджикской Советской Социалистической Республики, 1986.
8. Sa'adi, Z.; Shahid, S.; Ismail, T.; Chung, E.-S.; Wang, X.-J. Trends analysis of rainfall and rainfall extremes in Sarawak, Malaysia using modified Mann-Kendall test. *Meteorology and Atmospheric Physics* 2019, 131, 263-277.
9. Chen, Y.D.; Zhang, Q.; Lu, X.; Zhang, S.; Zhang, Z. Precipitation variability (1956-2002) in the Dongjiang River (Zhujiang River basin, China) and associated large-scale circulation. *Quaternary International* 2011, 244, pp. 130-137.
10. Rahman, M.A.; Yunsheng, L.; Sultana, N. Analysis and prediction of rainfall trends over Bangladesh using Mann-Kendall, Spearman's rho tests and ARIMA model. *Meteorology and Atmospheric Physics* 2017, 129, pp. 409-424.
11. Ahmed, K.; Shahid, S.; Chung, E.-S.; Ismail, T.; Wang, X.-J. Spatial distribution of secular trends in annual and seasonal precipitation over Pakistan. *Climate Research* 2017, 74, pp. 95-107.
12. Hamed, K.H. Trend detection in hydrologic data: the Mann-Kendall trend test under the scaling hypothesis. *Journal of hydrology* 2008, 349, pp. 350-363.
13. Gulahmadov A.; Chen X.; Gulahmadov N.; Liu T.; Davlyatov R.; Sharofiddinov S.; Gulahmadov M. Long-Term Hydro-Climatic Trends in the Mountainous Kofarnihon River Basin in Central Asia. *Water* 2020, 12, 2140.
14. Gulahmadov N.; Chen Y.; Gulahmadov A.; Rakhimova M., Gulahmadov M. Quantifying the Relative Contribution of Climate Change and Anthropogenic Activities on Runoff Variations in the Central Part of Tajikistan in Central Asia. *Land* 2021, 10, 525.
15. Отчет метеоданных. Отдел по метеорологии Агентства по гидрометеорологии Республики Таджикистан. – Душанбе: Отчет метеоданных, 2000-2016.
16. Zhang R., Xu Z., Zuo D., Ban C. Hydro-meteorological trends in the Yarlung Zangbo river basin and possible associations with large-scale circulation. *Water* 2020, 12, 144.

17. Liu X., Cheng Z., Yan L., Yin Z.-Y. Elevation dependency of recent and future minimum surface air temperature trends in the Tibetan Plateau and its surroundings. *Global and Planetary Change* 2009, 68, 164.
18. Qin J., Yang K., Liang S., Guo X. The altitudinal dependence of recent rapid warming over the Tibetan Plateau. *Climatic Change* 2009, 97, 321.

А.А.ГУЛАХМАДОВ

ТАҒЙИРЁБИИ ҲАРОРАТИ ҲАВО ВА БОРИШОТ ДАР ҚИСМАТИ БОЛОИИ ҲАВЗАИ ДАРЁИ ВАХШ

*Институти масалаҳои об, гидроэнергетика ва экология
Академияи миллии илми Тоҷикистон*

Бо дарназардошти баландиҳои гуногуни ҳавзаи дарёи Вахш дар Осиёи Марказӣ, гармшавии глобалӣ ба захираҳои об ва тағйироти муҳити зист дар ин ҳавза таъсири назаррас дорад. Мақсади ин тадқиқот истифодаи маълумотҳои мушоҳидаи гидрометеорологӣ барои арзёбии тамоюл ва тағйирёбии ҳарорати миёнаи солонаи ҳаво ва боришоти солона мебошад. Тағйирёбандаҳои гидрометеорологии дарозмуддат бо истифода аз санчиши аслии Манн-Кендалл, санчиши тағйирёфтаи Манн-Кендалл (ММК) ва методи нишебии Сен арзёбӣ карда мешаванд. Тасвири умумии ҳарорати миёнаи солонаи ҳаво гармшавии доимиро дар ҳавза дар солҳои 1960-2015 нишон медиҳад. Натиҷаи санчиши ММК афзоиши аз ҷиҳати оморӣ назарраси тамоюли ҳарорати миёнаи солонаи ҳаво дар нуқтаҳои санчиши пастҷойгиршуда дар давраи аз 1960 то соли 2015 нишон медиҳад. Натиҷаҳои санчиши ММК коҳиши аз ҷиҳати оморӣ назарраси тамоюли миёнаи солонаи боришотро танҳо дар як истоғ бо Z баробар ба -2.385 ва арзиши нишебӣ ва арзиши r баробар ба -1.273 ва 0.017 нишон медиҳанд. Бо вучуди ин, натиҷаҳои санчиши ММК тамоюли аз ҷиҳати оморӣ муҳимро дар самти афзоиши боришоти миёнаи солона дар нуқтаҳои метеорологии Ляхш бо қиматҳои Z ба 6.367 , нишебии баробар ба 1.530 ва қиматҳои r баробар ба 0.000 нишон медиҳанд. Ин маълумотҳо тағйироти равшани иқлими ҳавзаи дарёи Вахшро нишон медиҳанд. Ҳамин тариқ, натиҷаҳо барои банақшагирии чорабиниҳои нави миллии оид ба кам кардани таъсир ва мутобиқшавиро роҳнамоӣ мекунанд.

Калимаҳои калидӣ: тамоюл, ҳарорат, боришот, нишебӣ, баландӣ, ҳавзаи дарёи Вахш.

A.A.GULAKHMADOV

**VARIATIONS OF THE TEMPERATURE AND
PRECIPITATION IN THE VAKHSH RIVER BASIN**

Institute of water problems, hydropower and ecology National Academy of Sciences Tajikistan

Given the various altitudes of the Vakhsh River Basin (VRB) in Central Asia, global warming has significant implications for water resources and environmental changes in the catchment. The aim of this study is to use observational climate data to evaluate the annual mean air temperature and annual mean precipitation trends and magnitudinal variability. The long-term hydro-climatic variables are evaluated employing the original Mann–Kendall test, modified Mann–Kendall (MMK) test, and Sen’s slope estimator. The general pattern of the annual mean air temperature reveals continuous warming in the catchment over the 1960–2015 time periods. The MMK test result shows a statistically significant increase in the annual mean air temperature trend in the low elevation stations during the 1960 to 2015 time period. The results of the MMK test reveal a statistically significant decrease in the annual mean precipitation trend solely in one station with a Z of -2.385 and a slope value and p -value of -1.273 and 0.017 , respectively. However, the results of the MMK test exhibit a statistically significant increasing trend in annual mean precipitation in the stations Lyakhsh with Z values of 6.367 , slope values of 1.530 , and p -values of 0.000 . This findings show pronounced climatic change in the VRB. Thereby, the results provide guidance for planning new national mitigation and adaptation activities.

Key words: temperature and precipitation trend, slope value, elevation, Vakhsh river basin.

УДК 551.324.63

А.КАЮМОВ, Х.К.КАБУТОВ, Х.Д.НАВРУЗШОЕВ

**ДИНАМИКА ИЗМЕНЕНИЯ ОЛЕДЕНЕНИЯ БАССЕЙНА РЕКИ САРЫГУН
В РАЙОНЕ ОЗЕРА КАРАКУЛЬ**

*Государственное научное учреждение “Центр изучения ледников
Национальной академии наук Таджикистана”*

Поступила в редакцию 31.05.2022 г.

Приведены результаты изучения динамика изменения площади оледенения бассейна реки Сарыгун за период 1977-2018 гг. с использованием спутниковых снимков Landsat 2 MSS – 1977, Landsat 5 TM – 1994, Landsat 5 TM – 1998, Landsat 7 ETM – 2008 и Landsat 8 OLI / TIRS – 2018г., обработка которых осуществлена полуавтоматическим методом с коррекцией границ в затененных и заморенных участках. Установлено, что за исследуемый период площадь оледенения бассейна реки Сарыгун уменьшилась на 9% (1.3 км²). Полученные результаты позволили подтвердить, что степень деградации ледников зависит как от площади поверхности, так и их экспозиции.

Ключевые слова: река Сарыгун, оледенение, ледник, космические снимки, ГИС, Landsat, площадь ледника, деградация ледника.

В условиях глобального потепления и роста численности населения земли, повсеместно ощущается дефицит водных ресурсов, и Таджикистан не является исключением. Многие исследователи утверждают, что за последние 60 лет, наблюдается сокращение площади оледенения в мире, в особенности ледников, 0.1 км². При этом, исследования изменения температурного режима поверхности земли свидетельствуют о ежегодном его увеличении, особенно за последние десятилетия [6]. По данным ВМО самыми жаркими, за весь период инструментальных наблюдений, были 2010-2020 гг.

После распада СССР, начиная с 1990 гг., из-за труднодоступности объектов и дороговизны исследований, деятельность по изучению оледенения в Таджикистане, к сожа-

Адрес для корреспонденции: Кабутов Хусрав Курбонджонович. 734025, Республика Таджикистан, Душанбе, пр. Рудаки, 33, Государственное научное учреждение “Центр изучения ледников НАНТ”. E-mail: kabutov.khusrav@gmail.com

лению, резко сократилась. Естественно, что и публикации с данными состояния оледенения, особенно Восточного Памира, также незначительны [6].

Первые маршрутные исследования ледников Октябрьский (№275), ледник № 3, № 300, описание их поверхности были проведены в рамках Таджикско-Памирской комплексной экспедиции АН СССР в 1933 г. Однако полномасштабные исследования начались только в 1946 г., а аэрофотосъемки, с целью каталогизации ледников, были получены методом аэровизуального осмотра ледников на вертолёте с последующим дешифрированием аэрофотоснимков в 1971г. [5]. Современные исследования на восточном Памире в работах Minguang Lv [13]. Следует отметить, что эти и другие подобные работы носят фрагментарный характер.

Цель исследования – изучение динамики оледенения притока реки Акджилга, бассейна реки Сарыгун озера Каракуль за период с 1977 по 2018 гг.

Район исследования.

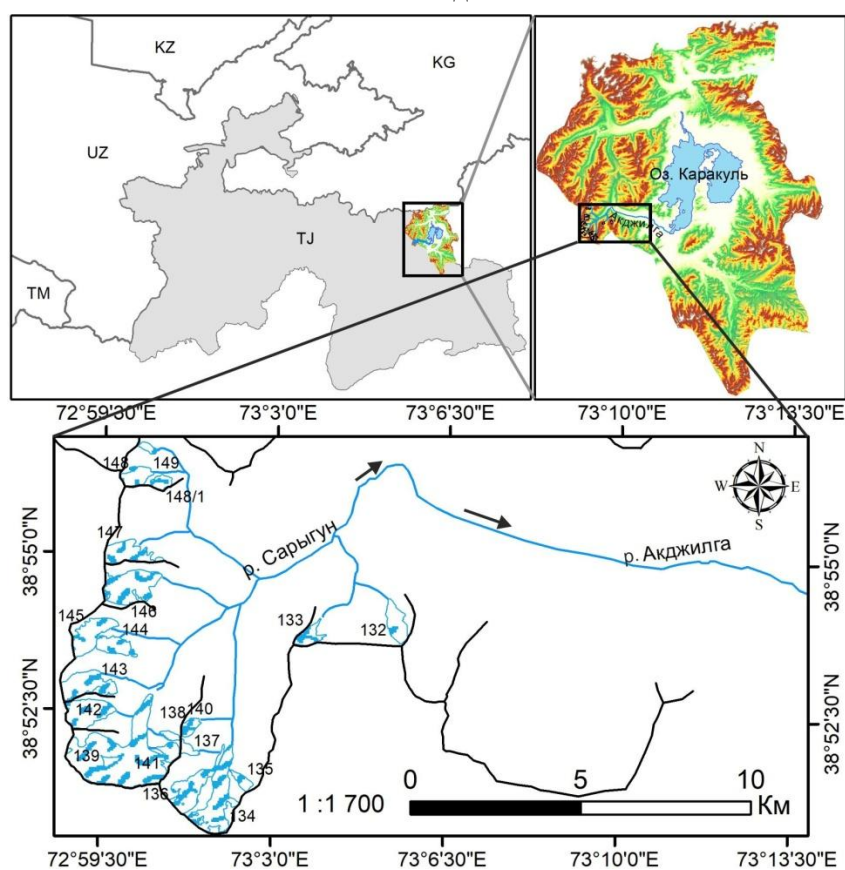


Рис. 1. Бассейн реки Сарыгун, приток озера Каракуль.

Бассейн оз. Каракуль, расположенный в северной части Восточного Памира, площадь его водосбора составляет 4210 км^2 в центре замкнутой котловины, на высоте 3914 м. над ур. м. и со всех сторон окружено горными хребтами, (на севере Заалайский хребет, на юге хребет Музкол, на западе хребет Зулумарт, а на востоке Сарыкольский хребет), с вы-

сотой до 5500-6000 м. Отличительной особенностью данного озера является то, что оно бессточное, вода в нем горько-соленая. Следует отметить, что в озеро впадают несколько рек, основные – это реки Караджилга, Караарт, Музкол и Акджилга. А река Сарыгун является правым притоком реки Акджилга [5].

Морфологические типы 18 ледников в бассейне реки Сарыгун однотипны, причем 14 ледников – долинные, ассиметрично долинные, и другие типы долинных ледников. В то же время здесь расположены 3 склоновых и 1 висячий ледник.

Методы исследования

Дешифрование ледников осуществлялось с использованием спутниковых снимков (Landsat 2-5-7-8 скаченные с портала earthexplorer.usgs.gov) [11].

Ввиду того, что в промежуток конца августа - начала сентября месяца ледники максимально освобождены от сезонного снега, идентификация и определение контуров ледников бассейна реки Сарыгун осуществлялись с использованием спутниковых снимков именно этого периода (табл. 1). Для уменьшения погрешности при определении контуров ледников отбор спутниковых снимков производился с учетом состояния облачности [1, 2, 4].

Таблица 1

Спутниковые снимки, которые были использованы

№	Тип спутника	Дата съемки	Комбинация каналов
1	Landsat 02 MSS	1977.09.28	SWIR-NIR-RED
2	Landsat 05 MSS/TM	1994.09.01	SWIR-NIR-RED
3	Landsat 05 MSS/TM	1998.09.12	SWIR-NIR-RED
4	Landsat 07 ETM+	2008.07.29	SWIR-NIR-RED
5	Landsat 08 OLI/TIRS	2018.09.03	SWIR-NIR-RED

Идентификация производилась полуавтоматическим методом, включающим в себя дешифровку ледников с использованием многозональных изображений. Ввиду того, что автоматическая классификация имеет свои недостатки и зоны (затенение, сезонный снежный покров, поверхностная морена) и требует ручной коррекции, то полученные полигоны далее редактировались в ручном экспертном режиме. Практика показывает, что вышеизложенная методика повышает достоверность и наиболее практична в использовании [7, 8, 10].

Для определения высот были использованы радарные снимки ALOS. Радарная съемка: L-диапазон с пространственным разрешением: от 7 м. до 100 м. в зависимости от режима съемки. Эти снимки были получены с электронного ресурса «<https://search.asf.alaska.edu>» [12]. В программе ArcGIS 10.5, используя функцию создания класса линейных объектов изолиний из растровой поверхности, были построены гипсометрические линии высот [9].

Результаты

Проведенная оцифровка ледников бассейна реки Сарыгун и определение их площади охватывает период с 1977 по 2018 гг. (табл. 2). На основе полученных результатов дешифровки спутниковых снимков за данный период, установлено уменьшение площади почти на всех ледниках, за исключением ледника №135. Более подробные данные об изменении площади ледников приведены в табл. 2.

Таблица 2

Площади ледников по данным дистанционного зондирования с 1977 по 2018 гг

Река Сарыгун приток р. Акджилга. Бассейн оз. Каракуль							
№ ледника	Тип	Экспозиция	Площадь ледников км ²				
			1977 г.	1994 г.	1998 г.	2008 г.	2018 г.
132	Долинный	СЗ	0.59	0.55	0.54	0.54	0.53
133	Долинный	СВ	0.41	0.41	0.41	0.33	0.33
134	Долинный, часть сложно долинный	С	1.49	1.46	1.46	1.43	1.36
135	Склоновый, часть сложно долинный	СЗ	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18
136	Долинный, часть сложно долинный	С	1.01	0.94	0.94	0.89	0.89
137	Долинный	В	0.16	0.16	0.17	0.15	0.14
138	Карово долинный	СВ	0.24	0.22	0.26	0.21	0.21
139	Долинный	С	3.85	3.76	3.75	3.7	3.66
140	Долинный	З	0.14	0.14	0.14	0.13	0.12
141	Висячий	З	0.25	0.25	0.25	0.25	0.24
142	Долинный	В	0.97	0.97	0.98	0.94	0.92
143	Склоновый	В	1	1	0.99	0.93	0.89
144	Склоновый	С	0.54	0.52	0.52	0.47	0.46
145	Долинный	СВ	0.81	0.81	0.81	0.79	0.79
146	Долинный	В	1.32	1.28	1.27	1.23	1.23
147	Склоновый	СВ	0.84	0.81	0.82	0.74	0.7
148	Асимметрично долинный	В	0.71	0.68	0.69	0.62	0.58
149	Долинный	В	0.14	0.13	0.13	0.11	0.11
Всего			14.65	14.27	14.31	13.64	13.34

Проведенные исследования позволили констатировать факт уменьшения общей площади ледников исследуемого бассейна с 1977 по 2018 гг. на 9% (1.3 км²). При этом уменьшение площади за первую декаду составило 0.38 км², за вторую декаду установлено незначительное уменьшение площади, а третья декада характерна уменьшением площади оледенения на 0.67 км². Относительно четвертой декады следует отметить, что площадь оледенения бассейна уменьшилась на 0.30 км².

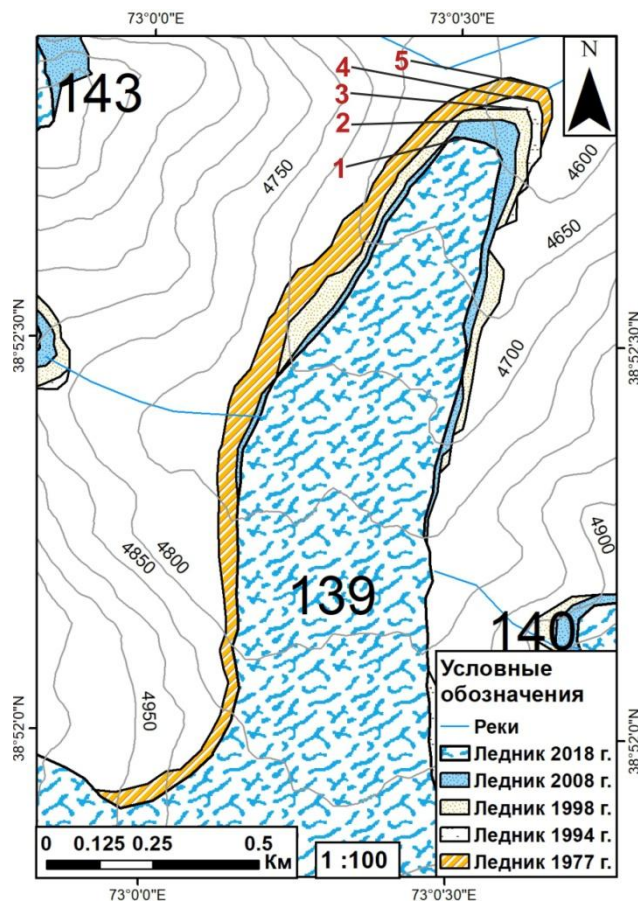


Рис. 2. Отступ ледника №139.

На рис. 2. показаны пронумерованные границы ледника. Каждая граница определена спутниковыми снимками. Линия 1 показывает состояние границы ледника на 2018 г. Линия 2 показывает границу ледника на 2008 г. Как видно из рис. 2 ледник с 2008 по 2018 гг. отступил на 80 м. С 1998 по 2008 гг. отступ ледника составляет (линии 3,2) 40 м. С 1994 по 1998 гг. (линии 4, 3) отступ ледника составляет 30 м. Линии 4, 5 показывают состояние ледника на 1977 по 1994 гг., отступ ледника равен 50 м. В сумме с 1977 по 2018 годы ледник отступил на 200 метров.

На основе полученных данных проведен анализ и оценка деградации ледников в зависимости от экспозиции [3] и установлено, что ледники с Восточными и Северо-восточными экспозициями наиболее подвержены деградации, чем ледники Северной, Западной и Северо-западной экспозиции (рис. 3).

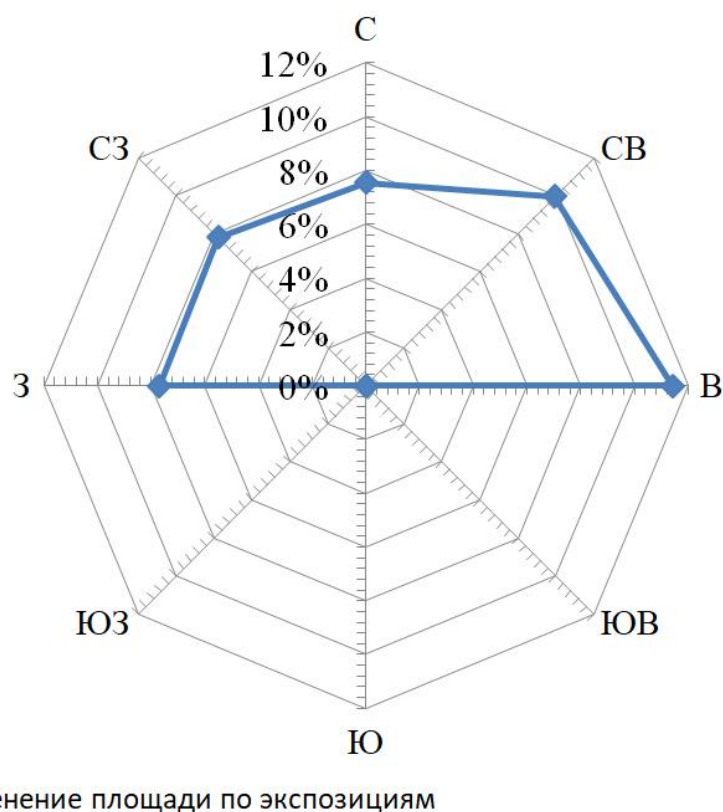


Рис. 3. Сокращение площади оледенения бассейна по экспозиции в процентах за период 1977-2018 гг.

Проведенный анализ динамики деградации ледников в зависимости от типа ледников позволил выявить, что наиболее подверженными являются асимметрично долин-ные, склоновые и карово-долинные ледники (табл. 3).

Таблица 3.

Изменение площади оледенения бассейна по типу, в процентах

№	Тип ледников	Уменьшение площади в %
	Долинный	-7%
	Долинный, часть сложно-долинный	-10%
	Склоновый, часть сложно-долинный	0%
	Карово-долинный	-13%
	Висячий	-4%
	Склоновый	-14%
	Асимметрично долинный	-18%

Обсуждение результатов

Анализ результатов проведенных исследований и анализа данных дистанционного зондирования показал сокращение площади ледников в бассейне реки Сарыгун. В част-

ности с 1977 по 1994 годы потеря площади составила 0.38 км² или -3% от общей площади оледенения, а с 1994 по 1998 гг. площадь оледенения почти не изменилась. В то же время выявлено, что с 1998 по 2008 годы уменьшение площади оледенения составило максимальное значение, то есть около -5% общей площади оледенения. Установлено, что с 2008 по 2018 гг. уменьшение площади оледенения составило всего -2% процента общей площади оледенения. Наибольшее уменьшение площади оледенения исследуемого района соответствует периоду 1998-2008 гг.. За данный промежуток времени основную свою площадь потеряли ледники с Восточным и Северо-восточным расположением с площадью от 0.10 км² до 0.30 км², потерявшие около 20% своей площади, а ледники таких же экспозиций, но с площадями от 0.40 км² до 0.70 км² потеряли около 10% своей площади, то есть подтверждается тезис о том, что маленькие ледники тают быстрее и теряют большую часть своей площади. Установлено также, что остальные ледники бассейна, независимо от их площади и экспозиции, имели незначительные изменения своей площади.

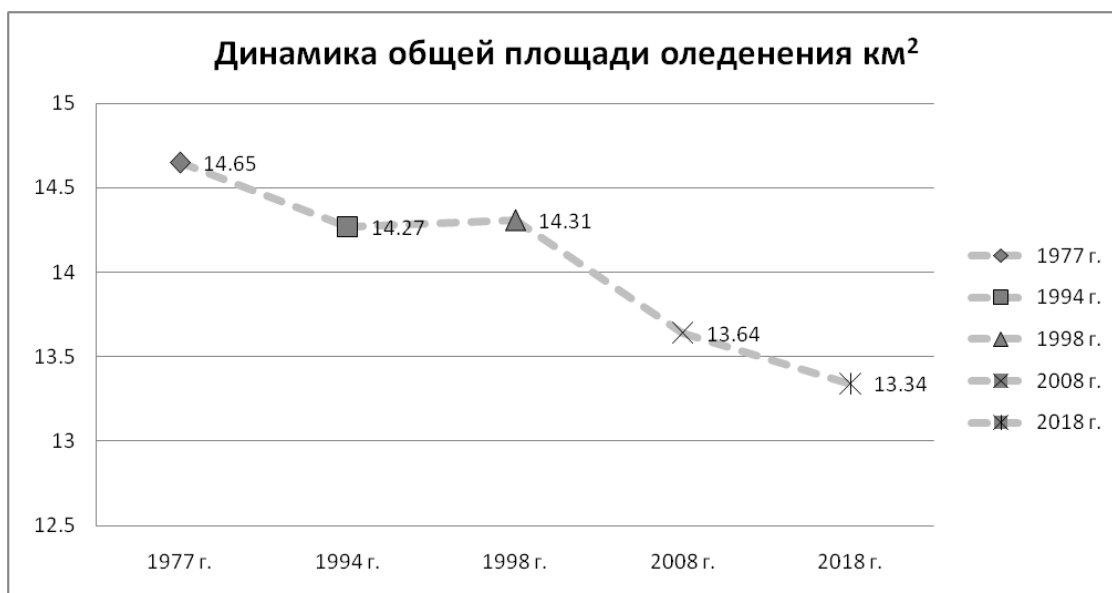


Рис. 4. Динамика площади оледенения.

Выводы

Установлено, что за исследуемый период (1977-2018) уменьшение площади оледенения бассейна реки Сарыгун составило 9% (1,3 км²). Выявлено, что наиболее критичным периодом были 1998-2008 гг., когда потеря площади оледенения составила наибольшее значение – около 5%.

Определено, что ледники с Восточными и Северо-восточными экспозициями наиболее подвержены деградации, потеря площадей которых составила около 10% своей площади, в то же время выявлено, что ледники Северной, Западной и Северо-западной экспозиции потеряли около 8%. По типу наиболее уязвимыми являются асимметрично долинные, склоновые и карово-долинные ледники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананичева М.Д., Капустин Г.А. Оценка изменений ледников гор Бырранга по космическим снимкам и Каталогу ледников СССР. – Лёд и Снег, 2010, №3 (111), с. 19-26.
2. Ананичева М.Д., Капустин Г.А. Изменение ледников гор Сунтар Хаята и хр. Черского по данным Каталога ледников СССР и космическим снимкам 2001-2003 гг. – Материалы гляциологических исследований, 2006, №101, с. 163-168.
3. Глазырин Г.Е. Влияние площади и ориентации ледников на их сокращение при изменении климата. – Материалы гляциологических исследований, 2007, №103, с. 118-122.
4. Десинов Л.В., Коновалов В.Г. Дистанционный мониторинг многолетнего режима оледенения Памира. – Материалы гляциологических исследований, 2007, №103, с. 129–133.
5. Каталог ледников СССР, т. 14, вып. 3, ч.17-18. – Л.: Гидрометеиздат, 1975, 37 с.
6. Каюмов А. Махмадалиев Б., Новиков В. Третье национальное сообщение Республики Таджикистан по Рамочной конвенции ООН об изменении климата. – Душанбе, 2014, 167 с.
7. Китов А.Д. Дистанционные методы мониторинга нивально-гляциальных образований.
8. Коновалов В.Г. Каталогизация горных ледников и генерализация их распределения по материалам дистанционного зондирования. – Сборник: Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса, т. 7, 2010, с. 43-55.
9. Ананичева М.Д. Оценка площадей, объёмов и высот границы питания ледниковых систем Северо-Востока России по космическим снимкам начала XXI в. – Лёд и Снег, 2014, № 1, с. 125.
10. Осипов Э.Ю. Инвентаризация ледников Восточного Саяна по материалам космических съёмок. – Лёд и Снег, 2017, т. 57, № 4, с. 483-497.
11. Электронный ресурс: USGS. <https://earthexplorer.usgs.gov/>
12. Электронный ресурс: NASA EARTHDATA. <https://search.asf.alaska.edu/>
13. Lv, M., Guo, H., Lu, X., Liu, G., Yan, S., Ruan, Z., Ding, Y., and Quincey, D. J.: Characterizing the behaviour of surge- and non-surge-type glaciers in the Kingata Mountains, eastern Pamir, from 1999 to 2016, The Cryosphere, 13, 219–236 p., <https://doi.org/10.5194/tc-13-219-2019>, 2019.

А.ҚАЮМОВ, Х.Қ.КАБУТОВ, Ҳ.Д.НАВРУЗШОЕВ

ДИНАМИКАИ ПИРЯХҲОИ ДАРӢИ САРИГУН ДАР МИНТАҚАИ КУЛИ ҚАРОКӢЛ

*Муассисаи давлатии илмии «Маркази омӯзиши пиряхҳои
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон»*

Натиҷаҳои омӯзиши динамикаи тағирёбии масоҳати пиряхҳои ҳавзаи дарёи Саригун дар солҳои 1977-2018 оварда шудаанд бо истифода аз тасвирҳои мохворай Landsat 2 MSS – 1977, Landsat 5 TM – 1994, Landsat 5 TM – 1998, Landsat 7 ETM – 2008 ва Landsat 8 OLI / TIRS – 2018, ки бо ислоҳи сарҳадҳо дар ҷойҳои сояфкан ва монешшуда бо тарзи дастӣ сурат гирифт. Муайян карда шудааст, ки дар давраи таҳқиқшаванда дар ҳавзаи дарёи Саригун 9% (1,3 км²) майдони пиряхҳо кам шудааст. Натиҷаҳои бадастомада

тасдиқ намуданд ки таназзули пирахҳо ҳам аз масоҳат ва ҳам аз ҷойгиршавии онҳо вобаста аст.

Калимаҳои калидӣ: дарёи Саригун, пирахҳо, аксҳои моҳвораӣ, GIS, Landsat, масоҳати пирах, таназзули пирах.

A.KAYUMOV, H.K.KABUTOV, H.D.NAVRUZSHOYEV

**DYNAMICS OF CHANGING THE GLACIATION OF THE SARYGUN RIVER
BASIN IN THE AREA OF LAKE KARAKUL**

*The state Scientific Institution "Center for the Study of Glaciers
of the National Academy of Sciences of Tajikistan"*

The results of studying the dynamics of changes in the glaciation area of the Sarygun river basin for the period 1977-2018 are presented using satellite images Landsat 2 MSS – 1977, Landsat 5 TM – 1994, Landsat 5 TM – 1998, Landsat 7 ETM – 2008 and Landsat 8 OLI / TIRS – 2018, which were processed by a semi-automatic method with boundary correction in shaded and waterlogged areas . It was found that during the study period, the area of glaciation in the Sarygun river basin decreased by 9% (1.3 km²) of the area of glaciation. The obtained results made it possible to confirm that the degree of degradation of glaciers depends both on the surface area and on their exposure.

Key words: Sarygun river, glaciation, glacier, space images, GIS, Landsat, glacier area, glacier degradation.

ПАМЯТИ УЧЁНОГО

АКАДЕМИК ЗАФАР ДЖУРАЕВИЧ УСМАНОВ

(26.08.1937 – 13.10.2021)



13 октября 2021 года на восемьдесят пять пятом году жизни скончался академик Национальной академии наук Таджикистана, заведующий отделом математического моделирования Института математики им.А.Джураева, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки Республики Таджикистан, лауреат Государственной премии Таджикистана в области науки и техники имени Абу Али ибн Сино, лауреат премии Академии наук Республики Таджикистан им. С.У.Умарова Зафар Джураевич Усманов, известный учёный с мировым именем, внесший огромный вклад в развитие математики, механики и информатики. Скромный, общительный, гибкий и интеллигентный таджикский математик Зафар Джураевич Усманов

являлся из числа тех современных учёных, чьи научные достижения сегодня служат всему цивилизованному миру.

Научные исследования З.Д.Усманова по теоретической математике относятся к теории дифференциальных уравнений и геометрии в целом. Прежде всего, к уравнениям с частными производными. Им впервые построена теория решений обобщённых систем Коши-Римана с сингулярной точкой, которая явилась естественным развитием классических теорий аналитических и обобщённых аналитических функций. Результаты этих исследований были использованы для изучения деформаций поверхностей с особыми точками. В частности, совместно с членом-корреспондентом АН СССР, лауреатом Ленинской премии Н.В.Ефимовым, им впервые обнаружено явление жёсткости «в малом» классе бесконечно дифференцируемых поверхностей. Эти достижения были отмечены в докладе

Главного учёного секретаря Президиума АН СССР в числе важнейших достижений Академии наук СССР в области математики.

В 80-е годы З.Д.Усманов занялся изучением собственного времени произвольных процессов. Он построил пространственно-временные метрики типа Минковского для динамических процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями; процесса теплопроводности, процесса распространения тепла, процесса колебания струны, гравитационного поля. Эти его исследования являлись развитием концепции Г.Лейбница о природе времени, которая не смогла противостоять идее И.Ньютона об универсальном времени. Признанием заслуг академика Усманова З.Д. явилось утверждение его заведующим кафедрой «Натуральные метрики процессов» Международного виртуального института «Феномен времени» при МГУ им М.В.Ломоносова.

Особо большое место в научной работе З.Д.Усманова занимают прикладные исследования. Он разработал математическую модель для определения состояния коллекции в произвольный момент времени, что позволило развить математические и информационные основы для проектирования системы компьютерного контроля за состоянием коллекционного материала. Эта научная работа была отмечена в докладе Главного учёного секретаря Президиума АН СССР в числе важнейших достижений Академии наук СССР в области информатики. Необходимость исследований по проблеме коллекции была подсказана ему выдающимся генетиком Н.В.Тимофеевым-Рессовским и его учеником, академиком АН РТ П.Д.Усмановым. Его научные достижения в области прикладной математики, такие как построение и развитие математической модели для описания эволюции спиральных форм раковин на примере гастропод, построение и развитие математической модели для определения градаций недостаточности печени; построение и развитие математической модели динамики пустынного сообщества заповедника «Тигровая балка»; разработка проекта оптимальной раскладки таджикских, английских и русских букв, а также алфавита языка эсперанто на компьютерной клавиатуре совместно со своими учениками стали настоящим достоянием отечественной науки.

Следует отметить, что Зафару Джураевичу также принадлежит серия научных произведений в области развития национальной экономики. В их число входят научные разработки учёного в области автоматизированной системы распределения незапаренных коконов по кокономотальным автоматам (для Душанбинского шёлкокомбината); автоматизированного распределения сырья по технологической цепи (для Душанбинского шёлкокомбината); системы распознавания сырья в транспортирующих ёмкостях и контроля их загрузки (для Душанбинского шёлкокомбината); математической модели организации процесса обогащения экстрагента; математической модели взаимодействия природных и антропогенных систем горного региона на примере бассейна реки Вахш и другие. Необходимо отметить, что Зафар Усманов непосредственно занимался внедрением результатов научных исследований в производство. Под его руководством были осуществлены разработка и внедрение автоматизированной системы распределения запаренных коконов по

кокономотальным автоматам для Душанбинской шелкомотальной фабрики, разработка математических основ оптимизации процесса обогащения экетрагента в технологической цепи противоточной экстракции с внедрением результатов к практическому извлечению облепихового масла из жома, а также разработка математических основ автоматического проектирования прорезных канавок мотальных барабанчиков для завода «Таджиктекстильмаш».

Под его руководством было разработано большое количество систем автоматической обработки элементов текстовой информации на таджикском языке, таких как: компьютерный алфавит; N-граммы букв; структура слогов; слоговая структура слов; словоформы и словоупотребления; анаграммы; N-граммы слов; морфы; префиксы и постфиксы; корни; словосочетания и разновидность предложений. Также им были созданы пакеты компьютерных программ и веб-приложений для реализации актуальных задач: автоматическая система проверки орфографии, пакеты автоматического синтеза и распознавания устной речи, системы голосового управления конечного автомата, а также автоматическая система машинного перевода.

Зафар Джураевич Усманов родился 26 августа 1937 года в г. Душанбе, . отец - Усманов Джура – историк, журналист, мать – Усманова (Асророва) Хамро, партийный и государственный работник, брат – академик Академии наук Республики Таджикистан Усманов П.Д.. По окончании средней школы в 1954 году поступил на механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, полный курс которого окончил в 1959 году с дипломом с отличием и в этом же году поступил в очную аспирантуру отделения механики МГУ.

С 1962 г. по 1970 – научный сотрудник математического коллектива АН РТ.

В дальнейшем:

- 1970-1973 – начальник ВЦ, (заместитель заведующего) Отдела математики с ВЦ Академии наук Республики Таджикистан;
- 1973-1976 – заместитель директора по научной части Математического института с ВЦ Академии наук Республики Таджикистан;
- 1976-1984 – начальник Вычислительного центра Академии наук Республики Таджикистан;
- 1984-1988 – академик-секретарь Отделения физико-математических, химических и геологических наук Академии наук Республики Таджикистан;
- 1988—1999 — директор Института математики Академии наук Республики Таджикистан;
- с 1999 до 13.10.2021 – заведующий Отделом математического моделирования Института математики Академии наук Республики Таджикистан.

Зафар Джураевич Усманов в 1976 году избран членом-корреспондентом, а в 1981 г. академиком Академии наук Республики Таджикистан. С 1985 г. по 1990 г. был де-

путатом Верховного Совета Таджикской ССР, и с 1986 г. по 1991 г. – член Ревизионной Комиссии ЦК КП Таджикистана.

Академик Усманов З.Д. являлся профессором Московского энергетического института (Технический университет), Волжский филиал г. Волжский (1997-2011 гг.); заведующим кафедрой «Натуральных метрик процессов» Виртуального института междисциплинарного изучения времени, МГУ (с 1999-2021 гг.).

Перу выдающегося таджикского учёного З.Д. Усманова принадлежат более 200 научных работ по математике и информатике, в том числе 5 монографий. З.Д. Усманов по результатам своих работ выступал с докладами и сообщениями на многочисленных международных конференциях и симпозиумах в странах СНГ, Германии, Австрии, Испании, Швейцарии, Польши, Болгарии, Израиле, Иране и Турции.

Усманов З.Д. подготовил 31 кандидата наук по специальностям дифференциальные уравнения, геометрия, информатика, гидромеханика, гидравлика и история математики и 1 доктора наук по водным проблемам, был научным организатором системной подготовки при Институте математики около 30 кандидатов физико-математических наук по современным проблемам информатики.

З.Д. Усманов – в числе первых таджиков, получивших учёную степень доктора наук по математике. Он стоял у истоков развития прикладной математики и информатики и его с полным правом можно назвать родоначальником этих направлений исследований в Таджикистане. Остались его научные труды, идеи, наставления и назидания, которыми с чувством искренней благодарности дорожат его ученики, и осуществление которых будет самой светлой памятью.

Трудно передать словами горечь утраты такого Ученого и Человека, как Зафар Джураевич Усманов, ставшего для Национальной академии наук Таджикистана авторитетным учёным, руководителем и организатором и то наследие, которое он оставил, будет опорой для его учеников по продолжению его идей и творческих планов, что, несомненно, будет светлой памятью, и он останется в благодарных сердцах своих соратников и коллег, родных и близких, учеников и друзей.

*Ак.НАНТ Фарход Рахими, ак.НАНТ Рахмонов З.Х.,
ак.НАНТ Илолов М.И. ак.НАНТ Шабозов М.,
ак.НАНТ Раджабов Н.Р.,
чл.-корр.НАНТ Кохирова Г.И., чл.-корр.НАНТ Исхоков С.А.*