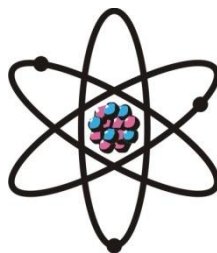


**ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК**

Журнал основан
в январе 1952 г.



№ 4 (189)
2022 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Г.И.Кохирова – главный редактор, член-корреспондент, доктор физико-математических наук; **С.А.Исхоков** – зам. главного редактора, член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **С.Х.Абдулаева** – ответственный секретарь; **О.Амирзода** – доктор технических наук; **Х.М.Ахмедов** – академик, доктор химических наук; **П.Б.Бабаджанов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Бадалов** – член-корреспондент, доктор химических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **С.Р.Мавлони** – кандидат геолого-минералогических наук; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **Д.Н.Низомов** – член-корреспондент, доктор технических наук, профессор; **С.О.Одинаев** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Т.Х.Салихов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

М.Ш.Шабозов, Ш.С.Шоинбекова. Некоторые точные неравенства в теории совместных приближений функций в пространстве Харди $H_q, q \geq 1$ 7

А.Захурбеков. Приближение периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в L_2	17
Х.М.Хуромонов. Точные значения n -поперечников некоторых классов функций в пространстве B_2	26
Д.А.Кодиров. Наилучшие приближения функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля в L_2	35
О.Х.Каримов, З.Дж.Хакимова. Коэрцитивные оценки и разделимость нелинейного эллиптического дифференциального оператора в весовом пространстве.....	47
Е.М.Мухсинов. Разрешимость задачи преследования для дифференциальной игры с несколькими дробными производными в банаховом пространстве	56

ФИЗИКА

Ф.Шокир. Математическое моделирование квантовых систем с высоким значением спина	66
Д.С.Кучакшоев, А.Г.Джабаров, А.Холов. Определение удельной теплоемкости стёкол на основе боратов висмута	77

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

М.Т.Жумаев, Л.С.Солиев. Строение диаграммы фазового комплекса системы $\text{Na,Mg SO}_4,\text{Cl-H}_2\text{O}$ при 0°C	84
---	----

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

М.Д.Бобоёров, К.О.Бобоев, Х.М.Назаров, Б.Б.Баротов, У.М.Мирсаидов. Характерные особенности урановых руд месторождений Таджикистана	90
Р.Дж.Акрамзода, Ф.А.Назаров, М.М.Тагоев, А.С.Курбонов, А.С.Давлатов. Термодинамические характеристики процессов разложения борного сырья путём активации с NaOH и CaCl_2	97

ГЕОЛОГИЯ

Ф.А.Файзиев. Литолого-петрографический фактор размещения серебряных и серебросодержащих месторождений Северного и Центрального Таджикистана	105
--	-----

ЭНЕРГЕТИКА

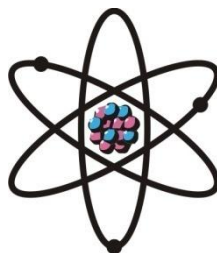
М.А.Салиев, В.А.Маслов, С.Ф.Абдуллаев, Х.М.Ахмедов. Исследование влияния пылевой бури на работу солнечной фотоэлектрической установки.....	115
Х.Халиков. Экономическая эффективность энергетики Таджикистана	125

РАДИАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ

М.З.Ахмедов. Радоновый мониторинг территории Таджикистана	134
Ш.Н.Ишратов, С.В.Муминов, М.З.Ахмедов. Радиационный контроль питьевых вод методом измерение суммарной альфа- и бета-активности	140

ШҮЪБАИ
ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,
ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА

Маҷалла аз моҳи
январӣ соли 1952
нашр мешавад



№ 4 (189)
с. 2022

ҲАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:

Кохирова Г.И. – сармуҳаррир, узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика; **С.А.Исҳоков** – муовини сармуҳаррир, узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **С.Ҳ.Абдулоева** – котиби масъул; **О.Амирзода** – доктори илмҳои техникӣ; **Ҳ.М.Аҳмедов** – академик, доктори илми химия; **А.Бадалов** – узви вобаста, доктори илми химия, профессор; **П.Б.Бобочонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **И.Н.Ғаниев** – академик, доктори илми химия, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **С.Р.Мавлони** – кандидати илмҳои геология ва минералогия; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор; **С.Х.Неъматуллоев** – академик, доктори илмҳои техникӣ; **Д.Н.Низомов** – узви вобаста, доктори илмҳои техникӣ, профессор; **С.О.Одинаев** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Ф.Раҳимӣ** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҳ.Раҳмонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Рачабов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Т.Х.Салихов** – доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **А.Р.Файзиев** – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва минералогия, профессор; **Ҷ.Х.Холиқов** – академик, доктори илми химия, профессор.

МУНДАРИҶА

МАТЕМАТИКА

М.Ш.Шабозов, Ш.С.Шоинбекова. Баъзе нобаробариҳои аниқ дар назарияи наздиққунии беҳтарини яқҷояи функсия дар фазои Харди $H_q, q \geq 1$	7
А.Захурбеков. Наздиққунии функсияҳои даврии дутағйирёбанда ба воситаи суммаҳои “доирави”-и Фурйе дар L_2	17
Х.М.Хуромонов. Қиматҳои аниқи n -кутҳҳои баъзе синфи функсияҳо дар фазои B_2	26
Д.А.Кодиров. Наздиққунии беҳтарини функсияҳо ба воситаи суммаи Фурйе аз рӯи функсияҳои хоси масъалаи Штурм-Лиувилл дар L_2	35
О.Х.Каримов, З.Дж.Ҳакимова. Баҳоҳои коэрситивӣ ва ҷудошавандагии операторҳои ғайриҳагтии эллиптикӣ дар фазои вазндор.....	47

Е.М.Мухсинов. Ҳалшавандагии масъалаи таъкибкунӣ барои бозихои дифференциалӣ бо якчанд ҳосилаҳои касрӣ дар фазои Банах 56

ФИЗИКА

Ф.Шоқир. Моделсозии математикии системаҳои квантӣ бо қимати баланди спин 66

Д.С.Кучакшоев, А.Г.Қабборов, А.Холов. Муайян кардани гармиғунҷоиши хоси шишаҳо дар асоси боратҳои висмут 77

ХИМИЯИ ҒАЙРИОРГАНИКӢ

М.Т.Жумаев, Л.С.Солиев. Сохтори диаграммаи комплекси фазагии системаи $\text{Na,Mg||SO}_4,\text{Cl-H}_2\text{O}$ дар ҳарорати 0°C 84

ХИМИЯИ ФИЗИКАВӢ

М.Д.Бобоёров, К.О.Бобоев, Х.М.Назаров, Б.Б.Баротов, У.М.Мирсаидов. Хусусиятҳои конҳои маъданҳои урандори Тоҷикистон 90

Р.Қ.Ақрамзода, Ф.А.Назаров, М.М.Тағоев, А.С.Қурбонов, А.С.Давлатов. Тавсифи равандҳои термодинамикии таҷзияи маъданҳои бордошта бо роҳи фаолгардони бо NaOH ва CaCl_2 97

ГЕОЛОГИЯ

Ф.А.Файзиев. Омили литологӣ-петрографӣ паҳншавӣ дар конҳои нукра ва нукрадори Тоҷикистони Шимолӣ ва Марказӣ 105

ЭНЕРГЕТИКА

М.А.Салиев, В.А.Маслов, С.Ф.Абдуллоев, Х.М.Аҳмедов. Таҳқиқи таъсири тӯфони ҷангӣ ба кори дастгоҳи фотоэлектрикии офтобӣ 115

Ҳ.Ҳаликов. Самаранокии иқтисодии энергетикаи Тоҷикистон 125

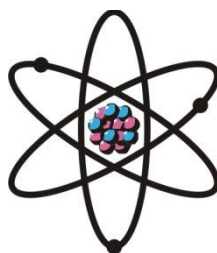
АМНИЯТИ РАДИАТСИОНИ

М.З.Аҳмедов. Мониторинги радонӣ дар ҳудуди Тоҷикистон 134

Ш.Н.Ишратов, С.В.Муминов, М.З.Аҳмедов. Назорати радиатсионии обҳои нӯшоқӣ бо усули ҷенкунии фаъолнокии умумии алфа- ва бета-зарраҳо 140

**DEPARTMENT OF
PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES**

The journal was established
in January 1952



№ 4 (189)
2022

EDITORIAL BOARD

G.I.Kokhirova Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; Prof. **S.A.Iskhokov**, Doctor of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **S.H.Abdulaeva**, Secretary; **O.Amirzoda**, Doctor of Engineering; **Kh.M.Akhmedov**, Doctor of Chemistry; Prof. **P.B.Babadzhanov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **A.Badalov**, Doctor of Chemistry; Prof. **A.R.Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **M.I.Holov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **I.N.Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **D.Kh.Khalikov**, Doctor of Chemistry; **S.R.Mavloni**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **U.M.Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; **S.Kh.Negmatullaev**, Doctor of Engineering; Prof. **D.N.Nizomov**, Doctor of Engineering; Prof. **S.O.Odinaev**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **N.R.Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **F.Rakhimi**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.Kh.Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **T.Kh.Salihov**, Doctor of Engineering.

CONTENTS

MATHEMATICS

M.Sh.Shabozov, Sh.S.Shoinbekova. Some sharp inequalities in the theory of simultaneous approximation of functions in the Hardy space H_q , $q \geq 1$ 7

A.Zahurbekov. Approximation of periodic functions of two variables by “circular” Fourier sums in L_2 17

Kh.M.Khuromonov. Exact values of n -widths of some classes of functions in the space B_2 26

D.A.Qodirov. Best approximations of functions by Fourier series with respect to own functions of the Sturm-Liouville problem in L_2 35

O.Kh.Karimov, Z.J.Khakimova. Coercive estimates and separability of a nonlinear elliptic differential operator in a weighted space..... 47

E.M.Mukhsinov. Solvability of the pursuit problem for a differential games with several fractional derivatives in a Banach space..... 56

PHYSICS

F.Shokir. Mathematical simulation of quantum systems with high spin..... 66

D.S.Kuchakshoev, A.G.Dzhabarov, A.Kholov. Specific heat capacity determination glasses based on bismuth borates..... 77

INORGANIC CHEMISTRY

M.T.Jumaev, L.Soliev. Structure of the diagram of the phase complex of the system Na,Mg||SO₄,Cl-H₂O at 0°C..... 84

PHYSICAL CHEMISTRY

M.D.Boboyorov, K.O.Boboev, Kh.M.Nazarov, B.B.Barotov, U.M.Mirsaidov. Characteristic features of uranium ore deposits in Tajikistan 90

R.J.Akramzoda, F.A.Nazarov, M.M.Tagoev, A.S.Kurbonov, A.S.Davlatov. Thermodynamic characteristics of the decomposition processes of boron raw material by activation with NaOH and CaCl₂ 97

GEOLOGY

F.A.Fayziev. Lithological-petrographic factor of silver and silver-containing deposits in Northern and Central Tajikistan..... 105

ENERGETICS

M.A.Saliev, V.A.Maslov, S.F.Abdullaev, Kh.M.Akhmedov. Investigation of the influence of a dust storm on the operation of a solar photoelectric installation 115

Kh.Khalikov. Economic efficiency of the energy industry of Tajikistan 125

RADIALOGICAL SAFETY

M.Z.Ahmedov. Radon monitoring in the territory of Tajikistan..... 134

Sh.N.Ishratov, S.V.Muminov, M.Z.Akhmedov. Radiation control of drinking water by the method of measuring total alpha and beta activity 140

УДК 517.5

М.Ш.ШАБОЗОВ, Ш.С.ШОИНБЕКОВА *

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ТЕОРИИ СОВМЕСТНЫХ
ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ H_q , $q \geq 1$

Институт математики им. А.Джусраева НАН Таджикистана,

**Хорогский государственный университет им. М.Назаршоева*

Поступила в редакцию 03.05.2022 г.

В работе найдено точное значение наилучших совместных приближений некоторых классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди H_q , усреднённые модули непрерывности которых ограничены сверху заданной мажорантой.

Ключевые слова: точные неравенства, наилучшее приближение, тригонометрический полином, модуль непрерывности, совместное приближение.

1. В экстремальных задачах теории приближения функций точные неравенства позволяют установить связи между различными свойствами функций, среди которых наиболее важными являются связи между конструктивными и структурными свойствами функций. Поэтому хорошо известное неравенство Джексона-Стечкина, содержащее оценки величины наилучшего приближения функции полиномами посредством модуля непрерывности её произвольной производной, интенсивно изучалось во многих работах (см., например, [1-5] и литературу, приведенную в них). Следует отметить, что наиболее существенные результаты окончательного характера получены на классах периодических функций. В последнее время аналогичные задачи рассматриваются на классах функций аналитических в круге [6-15]. Здесь мы продолжим исследования в этом направлении.

Пусть $f(z)$ – произвольная аналитическая в единичном круге $U := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ функция:

Адрес для корреспонденции: Шабозов Мирганд Шабозович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Институт математики НАНТ. E-mail: shabozov@mail.ru

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (1)$$

Множество всех таких функций обозначим через $A(U)$.

Пространство Харди H_q , $q \geq 1$ состоит из всех функций $f(z) \in A(U)$ с конечной нормой

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть \mathcal{P}_n - множество алгебраических комплексных полиномов степени не более n вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Равенством

$$E_n(f)_q = \inf \{ \|f - p_n\|_q : p_n \in \mathcal{P}_n \}$$

определим величину наилучшего приближения функции $f(z)$ элементами $p_n \in \mathcal{P}_n$ в норме пространства H_q , $q \geq 1$.

Пусть \mathbb{Z}_+ - множество целых неотрицательных чисел. Через $f_a^{(r)}(z)$ обозначим производную r -го порядка по аргументу t . При этом $f_a'(z) = f'(z) \cdot z'_t = f'(z) \cdot zi$, и для $r \geq 2$ полагаем:

$$f_a^{(r)}(z) = \left\{ f_a^{(r-1)}(z) \right\}'_a.$$

Производную $f_a^{(r)}(z)$ вычисляем равенством

$$f_a^{(r)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^r c_k \rho_k e^{ikt} = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^r c_k z^k,$$

а ее граничное значение обозначим через $F_a^{(r)}(t)$. Положим также

$$H_{q,a}^{(r)} := \left\{ f \in H_q, \|f_a^{(r)}\|_q < \infty \right\}.$$

Имея целью установить связь наилучших приближений аналитических в круге функций $f \in A(U)$ с гладкостью граничных значений $f(e^{it}) := F(t)$, потребуем, чтобы

производная $f_a^{(r)}(z)$ по аргументу принадлежала пространству $H_q, q \geq 1$. При этом производную $F_a^{(r)}(t)$ граничных значений $f_a^{(r)}(z)$ определим из предельного равенства

$$F_a^{(r)}(t) = \lim_{\rho \rightarrow 1} \left\{ i^r \sum_{k=1}^{\infty} c_k k^r \rho^k e^{ikt} \right\}.$$

Гладкость граничных значений $F(t)$ будем характеризовать порядком производной $F_a^{(r)}(t)$ и её модулем непрерывности:

$$\omega(F_a^{(r)}, \delta)_q := \sup_{|h| \leq \delta} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_a^{(r)}(t+h) - F_a^{(r)}(t)|^p dt \right\}^{1/p}.$$

Поскольку для $f \in H_{q,a}^{(r)}$ наравне с функциями $f(z)$ и $f_a^{(r)}(z)$, все промежуточные производные $f_a^{(s)}(z)$ ($s = 1, 2, \dots, r-1$) также принадлежат пространству $H_q, q \geq 1$, то представляет интерес отыскания точных значений совместных приближений

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_q := \inf \left\{ \|f_a^{(s)} - p_{n-1,a}^{(s)}\|_q : p_n \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} \quad (2)$$

на некотором подмножестве функций $\mathfrak{M} \subseteq H_{q,a}^{(r)}$, где $n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, q \geq 1$. Другими словами, требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1,a}^{(s)}(\mathfrak{M})_q := \sup \left\{ E_{n-s-1}(f_a^{(s)})_q : f \in \mathfrak{M} \right\}. \quad (3)$$

Чтобы вычислить значение величины (3) нам понадобится следующая основная

Теорема 1. Пусть $f \in H_{q,a}^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+, q \geq 1$). Тогда для любых $n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_q \leq \frac{1}{n^{r-s}} E_{n-1}(f_a^{(r)})_q. \quad (4)$$

Существует функция $f_0 \in H_{q,a}^{(r)}$, для которой неравенство (4) обращается в равенство.

Доказательство. Пусть $p_{n-1}(f_a^{(r)}, z)$ – полином наилучшего приближения производной $f_a^{(r)}(z)$ в метрике пространства $H_q, q \geq 1$:

$$E_{n-1}(f_a^{(r)})_q = \|f_a^{(r)} - p_{n-1}(f_a^{(r)})\|_q.$$

Угловые граничные значения функции $R(z) = f_a^{(r)}(z) - p_{n-1}(f_a^{(r)}, z)$, $|z| < 1$ будем обозначать через $R(e^{it})$. Выражая коэффициенты Тейлора $c_k = c_k(f)$ функции $f \in H_{q,a}^{(r)}$ по формуле

$$c_k(f) = \frac{(ik)^{-r}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} R(e^{i\theta}) d\theta, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+$$

и полагая

$$d_k(f) = \frac{(-ik)^{-s} \cdot i^{-(r-s)}}{2\pi(2n-k)^{r-s}} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} R(e^{i\theta}) d\theta, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r, s \in \mathbb{Z}_+, \quad r \geq s,$$

в силу схемы рассуждений [7], получаем

$$\begin{aligned} f^{(s)}(e^{it}) - \sum_{k=1}^{n-1} (ik)^s c_k e^{ikt} - \sum_{k=1}^{n-1} (ik)^s d_k e^{ikt} &= \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} (ik)^s c_k e^{ikt} - \sum_{k=1}^{n-1} (ik)^s d_k e^{ikt} = \\ &= \frac{i^{-(r-s)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(e^{i\theta}) \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{r-s}} e^{-ik(\theta-t)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2n-k)^{r-s}} e^{-ik(\theta-t)} \right\} d\theta = \\ &= \frac{i^{-(r-s)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} R(e^{i(t+\theta)}) \cdot \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{r-s}} e^{-i(k-n)\theta} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2n-k)^{r-s}} e^{-i(k-n)\theta} \right\} d\theta = \\ &= \frac{i^{-(r-s)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} R(e^{i(t+\theta)}) \left\{ \frac{1}{n^{r-s}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^{r-s}} e^{-ik\theta} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2n-k)^{r-s}} e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\theta} \frac{1}{(n+k)^{r-s}} \right\} d\theta = \\ &= \frac{i^{-(r-s)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} R(e^{i(t+\theta)}) \left\{ \frac{1}{n^{r-s}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^{r-s}} \cos k\theta \right\} d\theta. \end{aligned}$$

Таким образом, для некоторого полинома $p_{n-1}^{(s)}(z)$, зависящего от функции $f(z)$ и её производных $f^{(s)}(z)$ ($s = 1, 2, \dots, r$), справедлива формула

$$\begin{aligned} f^{(s)}(e^{it}) - p_{n-1}^{(s)}(e^{it}) &= \\ &= \frac{i^{-(r-s)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} R(e^{i(t+\theta)}) \left\{ \frac{1}{n^{r-s}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\theta}{(n+k)^{r-s}} \right\} d\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Легко убедиться, что числовая последовательность $\{(n+k)^{-(r-s)}\}$ является выпуклой вниз, и её общий член стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. В силу теоремы 1.5 [18, с.294] функция

$$\varphi_{n,r,s}(t) := \frac{1}{n^{r-s}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{(n+k)^{r-s}}$$

является неотрицательной и интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$ функцией. Из (5) получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f_a^{(s)})_q &\leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_a^{(s)}(e^{it}) - p_{n-1}^{(s)}(e^{it})|^q dt \right\}^{1/q} = \\ &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{i^{-(r-s)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} R(e^{i(t+\theta)}) \varphi_{n,r,s}(\theta) d\theta \right|^q dt \right\}^{1/q}. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу обобщённого неравенства Минковского из (6) имеем

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_q \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{-in\theta} \varphi_{n,r,s}(\theta)| d\theta \cdot \|R\|_q = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \|R\|_q \quad (7)$$

и так как $\|R\|_q = E_{n-1}(f_a^{(r)})_q$, то окончательно из (7) получаем

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_q \leq n^{-(r-s)} E_{n-1}(f_a^{(r)})_q,$$

и неравенство (4) доказано. Знак равенства в (4) для функции $f_0(z) = z^n \in H_{q,a}^{(r)}$ проверяется непосредственным вычислением, чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Пусть $T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k$ – частная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда Тейлора (1).

Проведя аналогичные рассуждения, как при доказательстве теоремы 1, нетрудно доказать неравенство

$$\|f_a^{(s)} - T_{n-1,a}^{(s)}(f)\|_q \leq n^{-(r-s)} \|f_a^{(r)} - T_{n-1,a}^{(r)}(f)\|_q, \quad (8)$$

которая также для $f_0(z) = z^n$ обращается в равенство. Из неравенств (4) и (8) вытекает

Следствие 1. В условиях теоремы 1 при любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $q \geq 1$ справедливы равенства

$$\sup_{f \in H_{q,a}^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f_a^{(s)})_q}{E_{n-1}(f_a^{(r)})_q} = \frac{1}{n^{r-s}}, \quad (9)$$

$$\sup_{f \in H_{q,a}^{(r)}} \frac{\|f_a^{(s)} - T_{n-1,a}^{(s)}(f)\|_q}{\|f_a^{(r)} - T_{n-1,a}^{(r)}(f)\|_q} = \frac{1}{n^{r-s}}. \quad (10)$$

Через $W_a^{(r)}H_q$ ($r \in \mathbb{Z}_+, W_a^{(0)}H_q = H_q, q \geq 1$) обозначим множество функций $f \in H_{q,a}^{(r)}$, у которых $\|f_a^{(r)}\|_q \leq 1$.

Теорема 2. Для любых чисел $n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+,$ при любых $q \geq 1$ справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_a^{(r)}H_q) = \sup_{f \in W_a^{(r)}H_q} E_{n-1}(f_a^{(s)})_q = \frac{1}{n^{r-s}}. \quad (11)$$

Доказательство. Для любой функции $f \in W_a^{(r)}H_q$ имеем

$$E_{n-1}(f_a^{(r)})_q \leq \|f_a^{(r)}\|_q \leq 1,$$

а потому из неравенства (4) вытекает оценка сверху величины в левой части (11):

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_a^{(r)}H_q) \leq \frac{1}{n^{r-s}}. \quad (12)$$

Для функции $f_1(z) = \frac{z^n}{n^r} \in W_a^{(r)}H_q$ ($n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, q \geq 1$) имеем

$$E_{n-1}(f_{1,a}^{(s)})_q = \frac{1}{n^{r-s}}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s,$$

пользуясь этой формулой запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_a^{(r)}H_q) \geq E_{n-1}(f_{1,a}^{(s)})_q = \frac{1}{n^{r-s}}. \quad (13)$$

Равенство (11) следует из сопоставления неравенств (12) и (13). Теорема 2 доказана.

2. Основные результаты. Имеет место следующее утверждение

Теорема 3. Для любых $r, n \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_q \leq \frac{1}{4n^{r-s-1}} \int_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t) dt \quad (14)$$

и равенство достигается на функции $f_0(z) = z^n$.

Доказательство. В [1] доказано, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_q \leq \frac{1}{4n^{r-1}} \int_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_q dt.$$

Отсюда, полагая $r = 0$, имеем

$$E_{n-1}(f)_q \leq \frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega(f, t)_q dt.$$

В полученном неравенстве f заменим на $f_a^{(r)}$:

$$E_{n-1}(f_a^{(r)})_q \leq \frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_q dt.$$

Применяя неравенство (4), отсюда будем иметь

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_q \leq \frac{1}{4n^{r-s-1}} \int_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_q dt,$$

и неравенство (14) доказано. Непосредственным вычислением можно убедиться, что в (14) знак равенства реализуется функцией $f_0(z) = z^n$, чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Введём теперь класс функций $W_a^{(r)}H_q(\Phi)$, для которых найдем точное значение величины (3).

Пусть функция $\Phi(u)$ определена, неотрицательна и выпукла вниз на отрезке $[0, \pi]$, $\lim_{u \rightarrow 0+} \Phi(u) = \Phi(0) = 0$. Класс функций $W_a^{(r)}H_q(\Phi)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $q \geq 1$) состоит из всех функций $f \in H_{q,a}^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $q \geq 1$), удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, t)_q dt \leq \Phi(\pi/n), n \in \mathbb{N}.$$

Имеет место следующая

Теорема 4. Если для любых чисел λ и t , $0 \leq \lambda < 1$, $0 < t \leq \pi$ выполняются неравенства

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{4} \lambda \leq \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)} \leq \frac{\lambda}{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \lambda}, \quad (15)$$

то

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_a^{(r)}H_q(\Phi)) = \frac{1}{4n^{r-s-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (16)$$

Доказательство. Неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_a^{(r)}H_q(\Phi)) \leq \frac{1}{4n^{r-s-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (17)$$

сразу вытекает из (14). С другой стороны, для любого полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ оценим модуль непрерывности [8]

$$\omega(p_{n,a}^{(r)}, t)_q \leq \begin{cases} 2n^r \sin \frac{nt}{2} \|p_n\|_q, & 0 \leq t \leq \pi/n, \\ 2n^r \|p_n\|_q, & t > \pi/n. \end{cases}$$

Следовательно, если $m \geq n$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/m} \omega(p_{n,a}^{(r)}, t)_q dt &\leq 4n^{r-1} \left\{ 1 - \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{m} \right\} \|p_n\|_q = \\ &= 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{n}{m} \cdot \|p_n\|_q, \end{aligned}$$

а если $m < n$, то имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/m} \omega(p_{n,a}^{(r)}, t)_q dt &= \left(\int_0^{\pi/n} + \int_{\pi/n}^{\pi/m} \right) \omega(p_{n,a}^{(r)}, t)_q dt \leq \\ &\leq 4n^{r-1} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \right\} \cdot \|p_n\|_q. \end{aligned}$$

Если положить $\pi n^{-1} = \lambda t$, $\pi m^{-1} = t$, то для значения полученных интегралов из последних неравенств и условия (15) следует, что сфера

$$S_{n+1} := \left\{ p_n(x) : \|p_n\| = \frac{1}{4n^{r-1}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\}$$

принадлежит классу $W_a^{(r)} H_q(\Phi)$. Поэтому вводим в рассмотрение функцию

$$g(z) = \frac{z^n}{4n^{r-1}} \Phi \left(\frac{\pi}{n} \right),$$

очевидно принадлежащую сфере S_{n+1} , а значит и классу $W_a^{(r)} H_q(\Phi)$. Поскольку при любом $s = 0, 1, \dots, r$

$$g_a^{(s)}(z) = \frac{(in)^s \cdot z^n}{4n^{r-1}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{n} \right), \quad E_{n-1}(g_a^{(s)}) = \frac{1}{4n^{r-s-1}} \Phi \left(\frac{\pi}{n} \right),$$

то имеем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_a^{(r)} H_q(\Phi)) \geq E_{n-1}(g_a^{(s)}) = \frac{1}{4n^{r-s-1}} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{n} \right). \quad (18)$$

Требуемое равенство (16) сразу следует из сопоставления неравенств (17) и (18). Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К.И. О наилучшем приближении одного класса аналитических функций. – Изв. АН СССР, серия матем., 1958, т. 22, с. 631-640.
2. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 . – Матем. заметки, 1967, т. 2, с. 513-522.
3. Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Поля Г. Неравенства. – М.: Иностранная литература, 1948.
4. Корнейчук Н.П. О наилучшем равномерном приближении дифференцируемых функций. – Докл. АН СССР, 1961, т. 141, с. 304-307.
5. Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Дж.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций. – Докл. АН СССР, 1962, т. 154, с. 514-515.
6. Корнейчук Н.П. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций. – Изв. АН СССР, серия матем., 1971, т. 35, с. 93-124.
7. Тайков Л.В. О наилучших линейных методах приближения классов B' и H' . – Успехи матем. наук, 1963, т. 18, №4, с. 183-189.
8. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1967, т. 1, №2, с. 155-162.
9. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций. – Матем. заметки, 1977, т. 22, №2, с. 285-295.
10. Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшие приближения в смысле А.Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций. – Матем. заметки, 1986, т. 40, №3, с. 341-351.
11. Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций. – Матем. заметки, 1995, т. 57, №1, с. 30-39.
12. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$. – Матем. заметки, 2009, т. 85, №3, с. 323-329.
13. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 . – Матем. заметки, 2000, т. 6, №5, с. 796-800.
14. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций. – ДАН России, 2002, т. 382, №6, с. 747-749.
15. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди. – Труды ИММ УрО РАН, 2021, т. 27, №4, с. 240-256.
16. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.: Гостехиздат, 1950, 336 с.
17. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М. - Л.: Наука, 1964.
18. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965, т. 1, 576 с.

М.Ш.ШАБОЗОВ, Ш.С.ШОИНБЕКОВА *

**БАЪЗЕ НОБАРОБАРИҲОИ АНИҚ ДАР НАЗАРИЯИ НАЗДИККУНИИ
БЕҲТАРИНИ ЯКҶОЯИ ФУНКСИЯ ДАР ФАЗОИ ХАРДИ $H_q, q \geq 1$**

*Институти математикаи ба номи А. Ҷураеви
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,
Донишгоҳи давлатии Хоруг ба номи М.Назаршоев

Дар мақола қимати аниқи наздиккунии беҳтарини якҷояи баъзе синфи функсияҳои дар давраи воҳидӣ аналитикӣ, ки ба фазои Харди H_q тааллуқ доранд ва модули бефосилагии миёнаи онҳо аз боло ба воситаи мажоранта маҳдуд аст, ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: нобаробариҳои аниқ, наздиккунии беҳтарин, бисёрраъзогиҳои тригонометрӣ, модули бефосила, наздиккунии якҷоя.

M.Sh.SHABOZOV, Sh.S.SHOINBEKOVA *

**SOME SHARP INEQUALITIES IN THE THEORY OF SIMULTANEOUS
APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN THE HARDY SPACE $H_q, q \geq 1$**

*A.Dzhuraev Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Tajikistan,
M.Nazarshoev Khorog State University

In paper the sharp value of the best simultaneous approximation of some classes of functions analytic in the unit circle, belonging to the Hardy space H_q , and the averaged modulus of continuity bounded from above with a given majorant was found.

Key words: sharp inequality, best approximation, trigonometric polynomial, modulus of continuity, simultaneous approximation.

УДК 517.5

А.ЗАХУРБЕКОВ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ
“КРУГОВЫМИ” СУММАМИ ФУРЬЕ В L_2

*Таджикский национальный университет
Поступила в редакцию 11.03.2022 г.*

В работе найдено среднеквадратическое приближение периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье. Оценки скорости сходимости ряда Фурье по тригонометрической системе для функций двух переменных характеризуются обобщенным модулем непрерывности.

Ключевые слова: ряд Фурье, обобщенный модуль непрерывности, “круговые” суммы Фурье.

1. Введение. В [1] найдены точные верхние грани наилучших среднеквадратических приближении периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в пространстве $L_2 := L_2(Q)$. Здесь полученные в [1] результаты обобщаются на случай совместного приближения функций и ее промежуточных частных производных двойными частными суммами Фурье и их частными производными.

Приводим нужные нам для дальнейшего определения и известные факты. Пусть $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ двух переменных, 2π -периодических по каждой переменной с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

Адрес для корреспонденции: Захурбеков Алишер. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр.Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: zahurbekov_a94@mail.ru

Пусть функции $f \in L_2$ разложены в формальный ряд Фурье

$$f(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{kl}(f) e^{i(kx+ly)}, \quad (1)$$

где

$$c_{kl}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\text{а } \mathcal{S}_R := \left\{ p_R(x, y) : p_R(x, y) = \sum_{k^2+l^2 < R^2} a_{kl} e^{i(kx+ly)} \right\}.$$

Тогда, как хорошо известно [1, 2],

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_R(f) &:= \inf \{ \|f - p_R\| : p_R \in \mathcal{S}_R \} = \\ &= \|f - S_R(f)\| = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$S_R(f; x, y) = \sum_{k^2+l^2 < R^2} c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)}$$

есть “круговая” частичная сумма ряда (3), а

$$\rho_{k,l}^2(f) = |c_{k,l}(f)|^2 + |c_{-k,l}(f)|^2 + |c_{k,-l}(f)|^2 + |c_{-k,-l}(f)|^2.$$

Пусть $D := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа второго порядка.

Определим рекуррентно $D^r := D(D^{r-1})$, $r \in \mathbb{N}$, $D^0 := E$. Через $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}(D)$

обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых существуют частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dots$$

и для которых $D^r f \in L_2$. В [1] при всех $s = 0, 1, \dots, r$ доказано соотношение

$$\mathcal{E}_R(D^s f) = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} (k^2+l^2)^{2s} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (3)$$

Пользуясь функцией

$$T(x, u; y, v; h) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{i[k(x-u)+l(y-v)]} \cdot h^{k^2+l^2},$$

где $h \in (0, 1)$, введем в рассмотрение оператор

$$\mathcal{F}_h(f) := \mathcal{F}_h f(x, y) = \iint_{(Q)} f(u, v) T(x, u; y, v; 1-h) dudv, \quad (4)$$

который назовем оператором обобщенного сдвига. Ряд простейших свойств оператора (4) отмечены в [1]. В частности, легко проверить, что

$$\mathcal{F}_h(e^{i(mx+ny)}) = (1-h)^{n^2+m^2} \cdot e^{i(mx+ny)}, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Полагая

$$\Delta_h f = \mathcal{F}_h f - f = (\mathcal{F}_h - E)f,$$

$$\Delta_h^v f := \Delta_h(\Delta_h^{v-1} f) = (\mathcal{F}_h - E)^v f = \sum_{j=0}^v (-1)^{v-j} \binom{v}{j} \mathcal{F}_h^j(f),$$

где

$$\mathcal{F}_h^0 f = Ef = f, \quad \mathcal{F}_h^j f := \mathcal{F}_h(\mathcal{F}_h^{j-1} f), \quad j = \overline{1, v}; \quad v \in \mathbb{N};$$

E – единичный оператор в пространстве L_2 , равенством

$$\Omega_v(f, t) := \sup\{\|\Delta_h^v f\| : 0 < h \leq t\}, \quad t \in (0, 1)$$

определим обобщенный модуль непрерывности функции $f \in L_2$.

В [1, 2] доказано, что для любой функции $f \in L_2$

$$\Omega_v(f, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} (1 - (1-t)^{k^2+l^2})^v \rho_{kl}^2(f),$$

а отсюда, в силу равенства $\rho_{kl}^2(D^r f) = (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{kl}^2(f)$, получаем

$$\Omega_v(D^r f, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(1 - (1-t)^{k^2+l^2}\right)^v (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{kl}^2(f).$$

Имеет место следующая

Теорема 1. При любых $v, R \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и $h \in (0, 1)$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{A}_r}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; h)} = \frac{1}{(1 - (1-h)^{R^2})^\nu}. \quad (5)$$

Доказательство. В работе [1] доказано, что при любых $\nu, R \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0,1)$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{A}_r}} \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f, h)} = \frac{1}{(1 - (1-h)^{R^2})^\nu}.$$

Отсюда для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, для которых $m^2 + n^2 \geq R^2$, $R \in \mathbb{N}$ и $h \in (0,1)$, получаем неравенство

$$\mathcal{E}_R(f) \leq R^{-2R} \left(1 - (1-h)^{R^2}\right)^{-\nu} \Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; h).$$

Полагая сначала в полученном неравенстве $r = 0$, затем, заменяя f на $\mathcal{D}^r f$, будем иметь

$$\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^r f) \leq \left(1 - (1-h)^{R^2}\right)^{-\nu} \Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; h). \quad (6)$$

Применив к неравенству (6) доказанную в [1] формулу

$$\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f) \leq \frac{1}{R^{2(r-s)}} \cdot \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^r f), \quad (7)$$

имеем

$$\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f) \leq R^{-2(r-s)} \cdot \left(1 - (1-h)^{R^2}\right)^{-\nu} \Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; h).$$

Так как полученное неравенство верно для любой функции $f \in L_2^{(r)}$, то из него следует оценка сверху для величины, стоящей в левой части равенства (5):

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{A}_r}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; h)} \leq \frac{1}{(1 - (1-h)^{R^2})^\nu}. \quad (8)$$

Для получения противоположного неравенства введем в рассмотрение функцию

$$f_0(x, y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r)},$$

для которой имеем

$$\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f_0) = (m^2 + n^2)^{2s} = R^{2s},$$

$$\mathcal{D}_\nu(\mathcal{D}^r f_0, t) = (m^2 + n^2)^{2r} (1 - (1-h)^{m^2+n^2})^\nu = R^{2r} (1 - (1-h)^{R^2})^\nu.$$

Пользуясь этими равенствами, запишем

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{A}_r}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; h)} &\geq \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f_0)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f_0; h)} = \\ &= \frac{R^{2(r-s)} \cdot R^{2s}}{R^{2r} (1 - (1-h)^{R^2})^\nu} = \frac{1}{(1 - (1-h)^{R^2})^\nu}. \end{aligned} \quad (9)$$

Сопоставляя (8) и (9), получаем требуемое равенство (5), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Всюду далее под весовой функцией $\mu(x)$ на отрезке $[a, b]$ будем понимать неотрицательную суммируемую не эквивалентную нулю на этом же отрезке функцию.

Теорема 2. Пусть $R, \nu \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $1 \leq q < \infty$, $h \in (0, 1)$, $\mu(x)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{A}_r}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}. \quad (10)$$

Доказательство. В [1] доказано, что при любых $R, \nu \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q < \infty$, $h \in (0, 1)$, $\mu(x)$ – весовая на отрезке функция справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{A}_r}} \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f)}{\left(\int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}} &= \\ &= \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если в левой части равенства (10) полагать $\mathcal{D}^s f = g$, то в силу линейности оператора \mathcal{D} имеем $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}^{r-s} g$, это означает, что если $f \in L_2^{(r)}$, то $g \in L_2^{(r-s)}$, а потому, учитывая (11), запишем

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{A}_r}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} = \sup_{g \in L_2^{(r-s)}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(g)}{\left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^{(r-s)} g; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} =$$

$$= \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}.$$

Теорема 2 доказана.

В нашей работе [1] доказано, что при любых $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_R^2(\mathcal{D}^s f) \leq (\mathcal{E}_R^2(f))^{1-s/r} \cdot (\mathcal{E}_R^2(\mathcal{D}^r f))^{s/r}. \quad (12)$$

Отсюда вытекает, что помимо функций f и $\mathcal{D}^r f$ производные $\mathcal{D}^s f$ ($s = \overline{1, r-1}$) также принадлежат пространству L_2 . Поэтому представляет несомненный интерес изучение поведения величин $\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)$ на самом классе $L_2^{(r)}$ или на некотором классе $\mathfrak{M}^r \subseteq L_2^{(r)}$. Таким образом, требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_R^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup \{ \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f); f \in \mathfrak{M}^{(r)} \}. \quad (13)$$

Пусть $H \in (0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, $\nu, R \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, φ – весовая на $[0, H]$ функция. Через $HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu; \mu)$ обозначим класс, состоящий из функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\int_0^H \Omega_\nu^p(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \leq 1.$$

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_R^{(s)}(HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu; \mu)) = R^{-2(r-s)} \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^\nu \mu(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (14)$$

Доказательство. Из равенства (11) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ получаем неравенство

$$\mathcal{E}(\mathcal{D}^s f) \leq \frac{1}{R^{2(r-s)}} \cdot \frac{\left(\int_0^H \Omega_\nu^p(\mathcal{D}^r f, t) \mu(t) dt \right)^{1/p}}{\left(\int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^{\nu p} \mu(t) dt \right)^{1/p}}.$$

Используя определение класса $HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu, \mu)$, получаем

$$\mathcal{E}_R^{(s)} \left(HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu; \mu) \right) \leq R^{-2(r-s)} \left(\int_0^H [1 - (1-t)^{R^2}]^{\nu p} \mu(t) dt \right)^{-1/q} \quad (15)$$

и оценка сверху величины, стоящей в левой части (14), получена. Для получения оценок снизу на множестве $P_R \cup L_2^{(r)}$ рассмотрим $(R+1)$ -мерный шар

$$\mathcal{B}_{R+1} := \left\{ Q_R \in \mathcal{F}_R : \|Q_R\| \leq R^{-2R} \left(\int_0^H [1 - (1-t)^{R^2}]^{\nu p} \mu(t) dt \right)^{-1/p} \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu; \mu)$. Для произвольного полинома

$$P_R(x, y) = \sum_{k^2+l^2 < R^2} a_{kl} e^{i(kx+ly)},$$

являющегося элементом шара \mathcal{B}_{R+1} , в силу возрастания элементов $(k^2 + l^2)(k = \overline{0, R-1}, l = \overline{0, R-1})$ и формулы

$$\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(1 - (1-t)^{k^2+l^2} \right)^\nu (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \Omega_\nu(\mathcal{D}^r P_R, t) &\leq \sum_{k^2+l^2 < R^2} \left(1 - (1-t)^{k^2+l^2} \right)^\nu (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) \leq \\ &\leq \left(1 - (1-t)^{R^2} \right)^\nu \cdot R^{2r} \cdot \|R_R\|. \end{aligned} \quad (16)$$

Возведя левую и правую части неравенства (16) в степень p , умножая их затем на функцию μ и интегрируя обе части полученного таким образом неравенства по переменной t в пределах от 0 до H , имеем

$$\int_0^H \Omega_\nu^p(\mathcal{D}^r P_R, t) \mu(t) dt \leq R^{2r} \cdot \|R_R\| \cdot \int_0^H \left(1 - (1-t)^{R^2} \right)^\nu \mu(t) dt \leq 1.$$

Следовательно, $\mathcal{B}_{R+1} \subset HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu; \mu)$. Имея этот факт ввиду, рассмотрим следующую функцию

$$f_1(x, y) = R^{-2r} \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^{\nu p} \mu(t) dt \right)^{-1/p} \cdot e^{i(mx+ny)},$$

где $m^2 + n^2 = R^2$, $m, n, R \in \mathbb{N}$. Для этой функции при любых $s = 1, 2, \dots, r-1$

$$\mathcal{D}^s f_1(x, y) = R^{-2(r-s)} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^{vp} \mu(t) dt \right)^{-1/p} \times \\ \times \left((im)^2 + (in)^2 \right)^{2s} \cdot e^{i(mx+ny)},$$

и, кроме того,

$$E_R(\mathcal{D}^s f_1) = R^{-2(r-s)} \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^{vp} \mu(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (17)$$

Легко вычислить, что

$$\int_0^H \Omega_v^p(\mathcal{D}^r f_1, t) \mu(t) dt = 1.$$

Пользуясь равенством (17), запишем оценку снизу указанной величины

$$\mathcal{E}_R(HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_v; \mu)) \geq E_R(\mathcal{D}^s f_1) = \\ = R^{-2(r-s)} \left(\int_0^H [1 - (1-t)^{R^2}]^{vp} \mu(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (18)$$

Требуемое равенство (14) следует из сопоставления оценок сверху (15) и снизу (18), что и завершает доказательство теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захурбеков А. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в $L_2(Q)$. – Доклады НАНТ, 2021, т. 64, №7-8, с. 368-377.
2. Абилова Ф.В., Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье двух переменных и их приложения. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2018, т. 58, №10, с. 1596-1603.

А.ЗАХУРБЕКОВ

НАЗДИККУНИИ ФУНКСИЯҲОИ ДАВРИИ ДУТАҒЙИРЁБАНДА БА ВОСИТАИ СУММАҲОИ “ДОИРАВИ”-И ФУРЙЕ ДАР L_2

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола наздиккунии миёнакватрагии функсияҳои даврии дутағйирёбанда ба воситаи суммаҳои “доиравии” Фурйе ёфта шудааст. Баҳодиҳии суръати наздикшавии қатори Фурйе аз рӯи системаи тригонометрӣ барои функсия дутағйирёбанда ба воситаи модули бефосилагии умумишуда тавсиф карда мешавад.

Калимаҳои калидӣ: қатори Фурйе, модули бефосилагии умумишуда, суммаи “доиравии” Фурйе.

A.ZAHURBEKOV

**APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY
“CIRCULAR” FOURIER SUMS IN L_2**

Tajik National University

In the article the mean-square approximation of periodic function of two variables by “circular” Fourier sums was found. Estimates of the rate of convergence the Fourier series in the trigonometric system for function of two variables are characterized by generalized modulus of continuity.

Key words: Fourier series, generalized modulus of continuity, “circular” Fourier sums.

УДК 517.5

Х.М.ХУРОМОНОВ

**ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ n -ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ B_2**

*Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана
Поступила в редакцию 30.09.2022 г.*

Для классов функций $W^{(\nu)}(\Lambda_m, \Phi)$ определённых при помощи характеристики гладкости Λ_m и мажоранты Φ , удовлетворяющих ряду условий, вычислены точные значения различных n -поперечников.

Ключевые слова: характеристики гладкости, обобщённый модуль непрерывности, верхние грани, n -поперечник, пространство Бергмана.

Пусть $U := \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости, $B_2 := B_2(U)$ – пространство Бергмана функций f аналитических в круге U с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ – элемент площади.

Отметим, что вопросы аппроксимации функций $f \in B_2$ рассмотрены в монографии [1, гл. III, с.196-278]. В работах [2-4] изучается задача отыскания точной константы в неравенствах Джексона-Стечкина между величиной наилучшего среднеквадратичного полиномиального приближения функции $f \in B_2$ и обобщённым модулем непрерывности высшего порядка.

Адрес для корреспонденции: Хуромонов Хуромон Мамадамонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Борбад, 48/5, Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана. E-mail: khuromon@mail.ru

В данной работе продолжим наши исследования в этом направлении, пользуясь характеристикой гладкости функций, введенной К.В.Руновским [5]. Указанная характеристика гладкости была использована С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [6], где также подробно изучены её свойства.

Приходим к изложению некоторых фактов, используемых нами в дальнейшем. Очевидно норму $f \in B_2$ можно определить и равенством

$$\|f\| := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho |f(\rho e^{it})|^2 d\rho dt \right)^{1/2}.$$

Символом

$$\|\Delta_h^m(f)\| := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho |\Delta_h^m(f; \rho, u; h)|^2 d\rho du \right)^{1/2}$$

обозначим норму разности m -го порядка

$$\Delta_h^m(f; \rho, u; h) := \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(\rho e^{i(\tau+kh)})$$

функции $f \in B_2$ по аргументу t в точке τ с шагом h . Обычный модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in B_2$ определим равенством

$$\omega_m(f, t) := \sup\{\|\Delta_h^m(f)\|; |h| \leq t\}. \quad (2)$$

Под усреднённой характеристикой гладкости функции $f \in B_2$ будем понимать величину

$$\Lambda_m(f, t) := \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^m(f)\|^2 dh \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Из равенств (2) и (3) следует, что при любом $t > 0$ имеет место неравенство

$$\Lambda_m(f, t) \leq \left(\frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^2(f, h) dh \right)^{1/2} \leq \omega_m(f, t).$$

Пусть \mathcal{P}_n – подпространство комплексных алгебраических полиномов степени n :

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Величину

$$E_n(f) := E(f, \mathcal{P}_n)_{B_2} = \inf \{ \|f - p_n\| : p_n \in \mathcal{P}_n \} \quad (4)$$

называют наилучшим среднеквадратичным полиномиальным приближением функции $f \in B_2$ подпространством \mathcal{P}_n . Хорошо известно, что [1]

$$E_{n-1}(f) = \|f - T_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \quad (5)$$

где

$$T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

– частичная сумма ряда Маклорена функции $f \in B_2$.

Для любых $r \in \mathbb{N}$ через $f^{(r)}(z) := d^r f / dz^r$ обозначим производную r -го порядка функции $f \in B_2$. Так как функция $f \in B_2$ аналитична в круге U , то из разложения f в ряд Маклорена

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k$$

следует, что

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \quad (6)$$

где

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1) = k! / (k-r)!, \quad k \geq r, \quad k, r \in \mathbb{N},$$

$c_k(f)$ – коэффициенты Маклорена функции f . Всюду далее положим

$$B_2^{(r)} := \{f \in B_2 : \|z^r f^{(r)}\| < \infty\}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad B_2^{(0)} \equiv B_2.$$

Пользуясь равенством (6) для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ получаем

$$\Delta_h^m(z^r f^{(r)}; \rho, u; h) = \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) \rho^k e^{iku} (1 - e^{ikh})^m.$$

Отсюда, применяя тождество Парсеваля, после некоторых простых вычислений будем иметь

$$\|\Delta_h^m(z^r f^{(r)})\|^2 = 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kh)^m.$$

Заметим, что если функция $f \in B_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, то легко доказать, что

$$E_{n-1}(z^r f^{(r)})_2 := \|z^r f^{(r)} - T_{n-1}(z^r f^{(r)})\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

Напомним, что под неравенствами типа Джексона-Стечкина понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается сверху через некоторую её характеристику гладкости самой функции или её производной заданного порядка. Введём следующее обозначение

$$J_{k,m}^2(t) := \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos kh)^m dh, k, m \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}_+. \quad (8)$$

Легко проверить, что

$$J_{k,m}(t) = J_{1,m}(kt). \quad (9)$$

Условимся в дальнейшем, в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in B_2^{(r)}$, предполагать, что $f \notin \mathcal{P}_r$.

В [7], в частности, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ и $t \in (0, 2\pi]$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}) E_{n-1}(z^s f^{(s)})_2}{\Lambda_m(z^r f^{(r)}; t/n)_2} = \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}(t)}. \quad (10)$$

В частности, из (10) при $t = \pi$ вытекает равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}) E_{n-1}(z^s f^{(s)})_2}{\Lambda_m(z^r f^{(r)}; \pi/n)_2} = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}, \quad (11)$$

где $C_n^k := n! / k!(n-k)!$ – биномиальный коэффициент.

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $1 \leq p < \infty$ и $h \in (0, 2\pi/n]$ – произвольное число, φ – весовая на $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} (\alpha_{n,r} / \alpha_{n,s}) E_{n-1}(z^s f^{(s)})_2}{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(z^r f^{(r)}; t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt) \varphi(t) dt \right)^{1/p}}. \quad (12)$$

В частности, при $\varphi \equiv 0$, $s = 0$ из (12) получаем

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(z^r f^{(r)}; t)_2 dt \right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(2^{m/2} \int_0^h J_{1,m}^p(nt) dt \right)^{1/p}}. \quad (13)$$

Пользуясь результатами теоремы 1 и 2 мы в этой статье вычислим точные значения различных n -поперечников некоторых классов функций в пространстве B_2 .

2. Точные значения n -поперечников классов функций $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ в B_2 . Для формулировки последующих результатов введем необходимые понятия и определения. Пусть \mathbb{B} – единичный шар в пространстве B_2 ; \mathcal{M} – выпуклое центрально-симметричное подмножество из B_2 ; $\mathcal{L}_n \subset B_2$ – n -мерное подпространство; $\mathcal{L}^n \subset B_2$ – подпространство коразмерности n ; $V: B_2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ – непрерывный линейный оператор, проводящий элементы пространства B_2 в \mathcal{L}_n ; $V^\perp: B_2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования B_2 на подпространство \mathcal{L}_n . Величины

$$b_n(\mathcal{M}, B_2) := \sup \left\{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon \mathbb{B} \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathcal{M} \} : \mathcal{L}_{n+1} \subset B_2 \right\},$$

$$d_n(\mathcal{M}, B_2) := \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \|f - g\|_2 : g \in \mathcal{L}_n \} : f \in \mathcal{M} \right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \right\},$$

$$\delta_n(\mathcal{M}, B_2) := \inf \left\{ \sup \left\{ \inf \{ \|f - Vf\|_2 : f \in \mathcal{M} \} : VB_2 \subset \mathcal{L}_n \right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \right\},$$

$$d^n(\mathcal{M}, B_2) := \inf \left\{ \sup \{ \|f\|_2 : f \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L} \subset B_2 \right\},$$

$$\Pi_n(\mathcal{M}, B_2) := \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \{ \|f - V^\perp f\|_2 : f \in \mathcal{M} \} : V^\perp B_2 \subset \mathcal{L}_n \right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \right\}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным n -поперечниками*. Поскольку B_2 является гильбертовым пространством, то имеют место следующие соотношения между перечисленными выше величинами [8, 9]):

$$b_n(\mathcal{M}, B_2) \leq d^n(\mathcal{M}, B_2) \leq d_n(\mathcal{M}, B_2) = \delta_n(\mathcal{M}, B_2) = \Pi_n(\mathcal{M}, B_2). \quad (14)$$

Используя определение характеристики гладкости (3), рассмотрим следующий класс функций. Пусть $\Phi(t)$, где $0 \leq t \leq 2\pi$, есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Всюду далее ее будем называть мажорантой.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и Φ – произвольная мажоранта. Символом $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные r -го порядка удовлетворяют условию

$$\Lambda_m(z^r f^{(r)}, t) \leq \Phi(t), \quad 0 < t \leq 2\pi.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, функция $J_{1,m}$ определена формулами (8) и (9) и $\lambda_n(\cdot)$ – любой из выше определённых n -поперечников. Если для произвольных $0 < t \leq 2\pi$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта Φ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/n)} \geq \sqrt{\frac{2^m}{C_{2m}^m}} \cdot J_{1,m}(nt), \quad (15)$$

то справедливы равенства

$$\lambda_n(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi), B_2) = E_{n-1}(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)) = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m} \alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (16)$$

При этом множество мажорант, удовлетворяющих неравенству (15), не пусто.

Доказательство. Для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при $t := \pi$ и $s = 0$ из формулы (10) получаем

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\alpha_{n,r} 2^{m/2} J_{1,m}(\pi/n)} \Lambda_m\left(z^r f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m} \alpha_{n,r}} \cdot \Lambda_m\left(z^r f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right).$$

Используя определение класса $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ и цепочку неравенств (14), отсюда имеем оценки сверху

$$\begin{aligned} \lambda_n(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi), B_2) &= d_n(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi); B_2) \leq \\ &\leq E_{n-1}(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)) \leq \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m} \alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Для получения оценок снизу рассматриваемых n -поперечников класса $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ в силу соотношения (14) достаточно найти оценку снизу его бернштейновского n -поперечника. Для этого в пространстве \mathcal{P}_n рассмотрим шар

$$\mathbb{B}_n^* := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\| \leq \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m} \alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}.$$

Пусть p_n – произвольный полином, принадлежащий \mathcal{P}_n . Используя формулы

$$\Lambda_m(z^r f^{(r)}, t) = \left\{ 2^m \sum_{k=1}^n \alpha_{k,r}^2 \rho_k^2(f) \cdot J_{1,m}^2(kt) \right\}^{1/2},$$

$$\Lambda_m(z^r p_n^{(r)}, t) \leq 2^{m/2} \cdot \alpha_{n,r} J_{1,m}(nt) \cdot E_{n-1}(f)_2$$

запишем

$$\Lambda_m(p_n^{(r)}, t) = \left\{ 2^m \sum_{k=1}^n k^{2r} \rho_k^2(f) J_{1,m}^2(kt) \right\}^{1/2} = \left\{ 2^m \sum_{k=1}^n \rho_k^2(f) F_t(k) \right\}^{1/2},$$

где

$$F_t(x) := x^{2r} J_{1,m}^2(xt) = \frac{x^{2r-1}}{t} \int_0^{xt} (1 - \cos h)^m dh, \quad n \leq x < \infty.$$

Учитывая, что F_t является возрастающей функцией своего аргумента, отсюда имеем:

$$\Lambda_m(p_n^{(r)}, t) \leq 2^{m/2} F_t^{1/2}(n) \|p_n\| = 2^{m/2} \alpha_{n,r} J_{1,m}(nt) \|p_n\|. \quad (18)$$

Для произвольного полинома $p_n \in \mathbb{B}_n^*$ из условия (15) получаем неравенство

$$\Lambda_m(p_n^{(r)}, t) \leq \frac{2^{m/2}}{\sqrt{C_{2m}^m}} \cdot J_{1,m}(nt) \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \Phi(t),$$

где $0 < t \leq 2\pi$. Следовательно, шар \mathbb{B}_n^* принадлежит классу $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$. Используя соотношение (14) и определение бернштейновского n -поперечника, запишем оценки снизу

$$\begin{aligned} \lambda_n(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi), B_2) &\geq b_n(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi); B_2) \geq \\ &\geq b_n(\mathbb{B}_n^*, B_2) \geq \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m} \alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Сопоставляя неравенства (17) и (19), получаем требуемые равенства (16).

В [6] доказано, что условию (15) удовлетворяет, например, функция $\Phi(t) := t^{\beta/2}$,

где

$$\beta = \frac{2^{2m}}{C_{2m}^m} - 1 \quad (0 < \beta < 2m). \quad (20)$$

Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq 2$, $\lambda_n(\cdot)$ – любой из вышеприведенных n -поперечников. Если для любых значений $t \in (0, 2\pi]$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта Φ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi^p(t)}{\Phi^p(\pi/n)} \geq \frac{\int_0^{nt} (1 - \operatorname{sinct})^{p/2} dt}{\int_0^\pi (1 - \operatorname{sinct})^{p/2} dt}, \quad (21)$$

то имеет место равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi); B_2) &= \lambda_{2n-1}(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi); B_2) = \\ &= E_{n-1}(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi); B_2) = \frac{n^{1/p-r}}{\sqrt{2}} \left\{ \int_0^\pi (1 - \operatorname{sinct})^{p/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Доказательство теоремы 4 повторяет схему рассуждений аналогичной теоремы для класса $W_2^{(r)}(\Lambda, \Phi)$ – периодических функций [6] и по понятным причинам здесь не приводится. Отметим лишь, что условию (22) удовлетворяет, например, функция $\Phi(t) := t^{\gamma/p}$, где [6, с.234]

$$\gamma := \pi / \int_0^\pi (1 - \operatorname{sinct})^{p/2} dt \quad (1 + p/2 < \gamma < 1 + p).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.-Л.: Наука, 1964.
2. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$. – ЖВММФ. 2010, т. 50, №6, с. 999-1004.
3. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам. – Труды ИММ УрО РАН. 2019, т. 25, №2, с.258-272.
4. Шабозов М.Ш., Хуромонов Х.М. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана. – Известия вузов. 2020, №2, с.74-92.
5. Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространстве L_p , $0 < p < 1$. – Матем. сб. 1994, т. 185, №8, с. 81-102.
6. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций. – Матем. заметки. 2016, т. 99, №2, с. 215-238.
7. Хуромонов Х.М., Шабозов М.Ш. Неравенства типа Джексона-Стечкина между наилучшими совместными полиномиальными приближениями и одной характеристикой гладкости в про-

- странстве Бергмана. – Владикавк. мат. журн. 2022, т. 24, вып. 1, с.109-120. DOI 10.46698/d2512-2100-1282-i.
8. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976, 325 с.
 9. Pinkus A. *n*-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985, 252 p.

Х.М.ХУРОМОНОВ

ҚИМАТҲОИ АНИҚИ *n*-ҚУТРҲОИ БАЪЗЕ СИНФИ ФУНКСИЯҲО ДАР ФАЗОИ B_2

Донишгоҳи байналмиллалии сайёҳи ва соҳибкории Тоҷикистон

Барои синфи функсия $W^{(\nu)}(\Lambda_m, \Phi)$, ки бо ёрии характеристикаи суфтагии Λ_m ва мажорантаи Φ , ки як қатор шартҳоро қаноат мекунад, қимати аниқи *n*-қутрҳои гуногун ҳисоб карда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: характеристикаи суфтагӣ, модули бефосилагии умумикардашуда, сарҳадҳои болоӣ, *n*-қутр, фазои Бергман.

Kh.M.KHUROMONOV

EXACT VALUES OF *n*-WIDTHS OF SOME CLASSES OF FUNCTIONS IN THE SPACE B_2

International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan

For function classes $W^{(\nu)}(\Lambda_m, \Phi)$ defined by the characteristic Λ_m smoothness and Φ majorant satisfying a number of conditions, the exact values of various *n*-widths are calculated.

Key words: smoothness characteristic, generalized modulus of continuity, upper bound, *n*-width, Bergman space.

УДК 517.5

Д.А.КОДИРОВ

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ФУРЬЕ ПО
СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В L_2

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 19.05.2022 г.

В статье найдены точные значения верхних граней наилучших приближений суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности. Также получены точные неравенства типа Джексона-Стечкина, в которых величины наилучших приближений оцениваются сверху как через обобщённый модуль непрерывности, так и через \mathcal{J} -функционалы r -ых производных.

Ключевые слова: наилучшие приближения, обобщённый модуль непрерывности, \mathcal{J} -функционал, задачи Штурма-Лиувилля, n -поперечник.

1. Введение и предварительные факты и понятия. Пусть

$$\mathcal{D} := -\frac{1}{p(x)} \left(\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{d}{dx} \right] - q(x) \right) -$$

дифференциальный оператор второго порядка Штурма-Лиувилля, где функции $p, q \in C[a, b]$, $k \in C^1[a, b]$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ для $x \in [a, b]$.

Напомним (см., например, [1, с.346]), что задача Штурма-Лиувилля состоит в отыскании решений на отрезке $[a, b]$ уравнения

$$\mathcal{D}[u] = \lambda u, \tag{1}$$

удовлетворяющих однородным краевым условиям

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0,$$

Адрес для корреспонденции: Кодиров Далер Абдушукурович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: daler-kodirov@bbk.ru

$$\gamma u(b) + \mu u'(b) = 0, \quad \gamma^2 + \mu^2 \neq 0. \quad (2)$$

Очевидно, что сформулированная задача всегда имеет нулевое решение, не представляющее интереса, а потому задачу (1)-(2) надо рассматривать как задачу на собственные значения оператора \mathcal{D} . Искомые нетривиальные решения называются собственными функциями этой задачи, а значения λ , при которых такие решения существуют, её собственными значениями. Хорошо известны следующие свойства собственных значений и собственных функций оператора \mathcal{D} :

1) существует счётное множество собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$:
 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \dots$;

2) каждому собственному значению λ_n соответствует единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция $u_n(x)$;

3) собственные функции $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образуют на отрезке $[a, b]$ ортогональную с весом $p(x)$ систему

$$\int_a^b p(x) u_k(x) u_n(x) dx = 0, \quad n \neq k,$$

которую в силу свойства 2 можно считать ортонормированной.

Пусть $L_2 := L_2(p(x), [a, b])$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ с весом $p(x)$ и конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int_a^b p(x) f^2(x) dx \right)^{1/2};$$

4) система собственных функций оператора \mathcal{D} полна в пространстве $L_2(p(x), [a, b])$;

5) при граничных условиях $u(a) = u(b) = 0$ и $q(x) \geq 0$ собственные значения λ_n , $n \in \mathbb{N}$ – положительны.

Всюду далее именно этот случай и будем рассматривать. Пусть функция $f \in L_2$ и

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) u_k(x), \quad c_k(f) = \int_a^b p(x) f(x) u_k(x) dx \quad (3)$$

– её ряд Фурье. Через

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f) u_k(x)$$

обозначим частные суммы $(n-1)$ -го порядка ряда Фурье (3). Положим

$$\mathcal{P}_n := \left\{ p_n(x) : p_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k u_k(x) \right\}.$$

Равенством

$$E_{n-1}(f) = \inf \{ \| f - p_{n-1} \| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in L_2$ подпространством \mathcal{P}_{n-1} алгебраическими многочленами степени не более $n-1$. Хорошо известно, что

$$E_{n-1}(f) = \| f - S_{n-1}(f) \| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (4)$$

Введём в рассмотрение функцию

$$T(x, y; h) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) u_k(y) h^k, \quad (5)$$

где $h \in (0, 1)$, $x, y \in [a, b]$, равенство в (5) понимается в смысле сходимости в пространстве L_2 . В монографии [2, с.272] доказано, что в ряде частных случаев для функции T можно указать и явное выражение.

Рассмотрим оператор $\mathcal{F}_h : L_2 \rightarrow L_2$ вида

$$\mathcal{F}_h f(x) = \int_a^b p(t) f(t) T(x, t; 1-h) dt. \quad (6)$$

Отметим ряд простых свойств оператора (6):

1) для любых двух функций $f, g \in L_2$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_h(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}_h f + \mu \mathcal{F}_h g;$$

2) $\| \mathcal{F}_h f \| \leq \| f \|$;

$$3) \mathcal{F}_h(u_k(x) u_l(y)) = (1-h)^{k+l} u_k(x) u_l(y);$$

4) $\| \mathcal{F}_h f - f \| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0+$.

Пусть $f \in L_2$. Определим конечные разности первого и высших порядков функции f равенствами

$$\Delta_h f(x) := \mathcal{F}_h f(x) - f(x) = (\mathcal{F}_h - \mathbb{I})f(x),$$

$$\Delta_h^m f(x) := \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (\mathcal{F}_h - \mathbb{I})^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \mathcal{F}_h^k f(x),$$

где $\mathcal{F}_h^0 f(x) = \mathbb{I}f(x) = f(x)$, $\mathcal{F}_h^k f(x) = \mathcal{F}_h(\mathcal{F}_h^{k-1} f(x))$, $k = 1, 2, \dots, m$, \mathbb{I} – единичный оператор в пространстве L_2 . Величину

$$\Omega_m(f; \delta) := \sup\{\|\Delta_h^m f(x)\|; 0 < h \leq \delta\} \quad (7)$$

будем называть обобщённым модулем непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$. Пусть $\mathcal{D}^0 f := f$, $\mathcal{D}^1 f := \mathcal{D}f$ и при любом $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, где \mathcal{D} – оператор Штурма-Лиувилля. Через $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых $\mathcal{D}^r f \in L_2$, а функция f удовлетворяет граничным условиям

$$f^{(l)}(a) = f^{(l)}(b), \quad l = 1, 2, \dots, 2r.$$

Справедлива следующая

Лемма 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $t \in (0, 1)$. Тогда для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ справедливо равенство

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1-t)^k)^{2m} \lambda_k^{2r} c_k^2(f). \quad (8)$$

Доказательство. Учитывая свойство 3 оператора \mathcal{F}_h и формулу (5), равенство (6) запишем в виде

$$\mathcal{F}_h f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-h)^k c_k(f) u_k(x).$$

Пользуясь этим равенством и представлением (1) ряда Фурье для разностей первого и высших порядков, получаем следующих формул

$$\begin{aligned} \Delta_h f(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} [1 - (1-h)^k] c_k(f) u_k(x), \\ \Delta_h^m f(x) &= (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (1-h)^k]^m c_k(f) u_k(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя равенство Парсеваля из (9), в силу свойства 3 собственных функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, имеем

$$\|\Delta_h^m f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (1-h)^k]^{2m} c_k^2(f),$$

откуда в силу равенства (7) получаем

$$\Omega_m^2(f, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (1-t)^k]^{2m} c_k^2(f). \quad (10)$$

Если функция $f \in L_2^{(r)}$, то в силу равенства

$$c_k(\mathcal{D}^r f) = \lambda_k^r c_k(f), \quad (11)$$

из (10) вытекает, что

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f; t) = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (1-t)^k]^{2m} \lambda_k^r c_k^2(f), \quad (12)$$

чем и завершаем доказательство леммы 1.

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть $m \in \mathbb{N}, t \in (0, h)$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)} = [1 - (1-h)^n]^{-m}. \quad (13)$$

Доказательство. Из равенства (12) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ и монотонном возрастании λ_k ($k = 1, 2, \dots$) получаем

$$\begin{aligned} \Omega_m^2(\mathcal{D}^r f; t) &\geq \sum_{k=n}^{\infty} [1 - (1-t)^k]^{2m} \lambda_k^{2r} c_k^2(f) \geq \\ &\geq \min_{k \geq n} \{ [1 - (1-t)^k]^{2m} \lambda_k^{2r} \} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) = \\ &= [1 - (1-t)^n]^{2m} \lambda_n^{2r} \cdot E_{n-1}^2(f), \end{aligned}$$

откуда сразу следует оценка сверху для величины в левой части равенства (8):

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)} \leq [1 - (1-h)^n]^{-m}. \quad (14)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу указанной величины введём в рассмотрение функцию $f_0(x) = u_n(x)$, где $u_n(x)$ n -я собственная функция оператора \mathcal{D} .

Очевидно, что $f_0 \in L_2^{(r)}$

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \mathcal{D}^r f_0(x) = \lambda_n^r f_0(x), \quad (15)$$

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0; t) = \lambda_n^r [1 - (1-t)^n]^m. \quad (16)$$

Пользуясь равенствами (16), запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)} &\geq \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f_0)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0; t)} = \\ &= \frac{\lambda_n^r \cdot 1}{\lambda_n^r [1 - (1-t)^n]^m} = [1 - (1-h)^n]^{-m}. \end{aligned} \quad (17)$$

Сопоставляя неравенства (14) и (17), получаем требуемое равенство (13). Теорема 1 доказана.

Всюду далее под весовой функцией на отрезке $[0, h]$ будем понимать неотрицательную суммируемую функцию μ , не эквивалентную нулю на этом же отрезке. Имеет место следующее общее утверждение

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, $\mu(t)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^n]^{mp} \mu(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (18)$$

Доказательство. Из (13) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ следует неравенство

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t) \geq [1 - (1-t)^n]^m \lambda_n^r E_{n-1}(f). \quad (19)$$

Возведем обе части (19) в степень p ($1 \leq p < \infty$), затем умножим на весовую функцию μ и проинтегрируем по переменному t по отрезку $[0, h]$, где $h \in (0, 1)$. В итоге после возведения в степень $1/p$ ($1 \leq p < \infty$) вновь полученного неравенства, приходим к следующему соотношению

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/p} \geq \lambda_n^r E_{n-1}(f) \left(\int_0^h [1 - (1-t)^n]^{mp} \mu(t) dt \right)^{1/p}.$$

Так как последнее неравенство имеет место для любой функции $f \in L_2^{(r)}$, то из него следует оценка сверху величины в левой части (18):

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/p}} \leq \left(\int_0^h [1 - (1-t)^n]^{mp} \mu(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (20)$$

Пользуясь равенствами (16), запишем оценки снизу

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/p}} \geq \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f_0; t) \mu(t) dt \right)^{1/p}} = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^n]^{mp} \mu(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (21)$$

Требуемое равенство (18) следует из сопоставления оценки сверху (20) с оценкой снизу (21), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

3. Применение \mathcal{K} -функционалов. В теории приближения функций часто используется идея замены аналитически сложной функции f , достаточно гладкой функции g , так чтобы возникающей при этом погрешности было достаточно мало. Наиболее эффективная реализация этой идеи основана на методе \mathcal{K} -функционала Петре в теории интерполяционных пространств (см., например [3]). \mathcal{K} -функционалы нашли применение также при решении экстремальных задач теории приближения функций [4, 5].

Пользуясь ранее введенными обозначениями, определим в рассматриваемом нами случае \mathcal{K} -функционал

$$\mathcal{K}_m(f, t^m) := \mathcal{K}_m(f, t^m; L_2, L_2^{(m)}) = \inf \left\{ \|f - g\| + t^m \|D^m g\| : g \in L_2^{(m)} \right\}, \quad (22)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $t \in (0, 1)$. Определённый интерес представляет вычисление точных значений экстремальных величин, подобных приведенной в равенстве (13), где вместо модуля непрерывности (12) будет использован \mathcal{K} -функционал (22).

Теорема 3. При любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}_m(\mathcal{D}^r f, 1 / \lambda_n^m)} = 1. \quad (23)$$

Доказательство. Воспользовавшись формулами (4) и (11) для любой функции $f \in L_2^{(r)}$, будем иметь

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &= \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{2r}} c_k^2(f) \right\}^{1/2} \leq \frac{1}{\lambda_n^r} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(\mathcal{D}^r f) \right\}^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\lambda_n^r} E_{n-1}(\mathcal{D}^r) \leq \frac{1}{\lambda_n^r} \| \mathcal{D}^r f - S_{n-1}(g) \|, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$S_{n-1}(g, x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(g) u_k(x)$$

– частная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда Фурье функции $g \in L_2^{(m)}$ по ортонормированной системе собственных функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^n$ на отрезке $[a, b]$ с весом $p(x)$. В силу равенств (4), (10) и (24) для произвольной функции $g \in L_2^{(m)}$ имеем

$$\|g - S_{n-1}(g)\| = E_{n-1}(g) \leq \frac{1}{\lambda_n^m} E_{n-1}(\mathcal{D}^m g). \quad (25)$$

Учитывая соотношение (25), из неравенства (24) получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &\leq \frac{1}{\lambda_n^r} \left\{ \|\mathcal{D}^r f - g\| + \|g - S_{n-1}(g)\| \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n^r} \left\{ \|\mathcal{D}^r f - g\| + \frac{1}{\lambda_n^m} \|\mathcal{D}^m g\| \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как левая часть неравенства (26) не зависит от функции $g \in L_2^{(m)}$, то переходя в правой части (26) к нижней грани по всем функциям g , принадлежащим $L_2^{(m)}$, и используя определение \mathcal{K} -функционала, будем иметь

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\lambda_n^r} \mathcal{K}_m \left(\mathcal{D}^r f, \frac{1}{\lambda_n^m} \right).$$

Отсюда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}_m(\mathcal{D}^r f, 1/\lambda_n^m)} \leq 1. \quad (27)$$

Получим оценку снизу рассматриваемой экстремальной величины. С этой целью, используя формулу (11), для произвольного обобщённого полинома

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(G_n) u_k(x), \quad a_k(G_n) \in \mathbb{R},$$

имеем

$$\mathcal{D}G_n(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^r a_k(G_n) u_k(x). \quad (28)$$

Так как

$$\|G_n\| = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k^2(G_n) \right\}^{1/2},$$

то учитывая, что последовательность $\{\lambda_k^r\}_{k=1}^n$ является монотонно возрастающей, то из (28) следует, что

$$\|D^r G_n\| = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2r} a_k^2(G_n) \right\}^{1/2} \leq \lambda_n^r \|G_n\|. \quad (29)$$

Пусть далее в соотношении (22) функция $g = 0$ или $g = G_n$. Тогда в силу (29) из (22) получим

$$\mathcal{H}_m(G_n, t^m) \leq \min \{ \|G_n\|; t^m \|D^m G_n\| \}. \quad (30)$$

Рассмотрим ранее введённую нами функцию $f_0(x) = u_n(x) \in L_2^{(r)}$, для которой имеют место равенства и на основании (29) и (30)

$$\mathcal{H}_m(D^r f_0, 1/\lambda_n^m) \leq \frac{1}{\lambda_n^m} \|D^{r+m} f_0\| = \frac{1}{\lambda_n^m} \lambda_n^{m+r} = \lambda_n^r. \quad (31)$$

Пользуясь неравенством (31), получим

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\mathcal{H}_m(D^r f, 1/\lambda_n^m)} \geq \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f_0)}{\mathcal{H}_m(D^r f_0, 1/\lambda_n^m)} \geq 1. \quad (32)$$

Требуемое равенство (23) вытекает из сопоставления неравенств (27) и (32).

Пусть \mathcal{B} – единичный шар в пространстве L_2 ; $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n ; $\mathcal{L} : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор; $\mathcal{L}^\perp : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования; \mathfrak{M} – выпуклое центрально-симметричное множество из L_2 . Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) := \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon \mathcal{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - g\| : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda_n \subset L_2 \},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\| : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf \{ \inf \{ \|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\| : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным* n -*поперечниками* множества \mathfrak{M} в пространстве L_2 .

Между перечисленными выше n -поперечниками в гильбертовом пространстве L_2 имеют место следующие соотношения:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \quad (33)$$

Функцию $\Phi(t)$, являющуюся неубывающей на $[0, \infty)$, называют k -мажорантой [6, с.24], если функция $\Phi(t)/t^k$ не возрастает на $[0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = 0$. В случае $k=1$ функцию Φ , удовлетворяющую указанным условиям, называют просто мажорантой.

Пусть Φ – произвольная мажоранта. Символом $W^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$, где $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные $f^{(r)}$ удовлетворяют ограничению

$$\mathcal{K}_m(f^{(r)}, t^m) \leq \Phi(t^m), \quad t > 0.$$

Теорема 4. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда имеет место равенство

$$\lambda_n(W^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi); L_2) = E_{n-1}(W^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)) = \frac{1}{\lambda_n^r} \Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right), \quad (34)$$

где

$$E_{n-1}(W^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)) := \sup\{E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)\},$$

$\lambda_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n -поперечников.

Доказательство. Из неравенства (27) в силу соотношения (33) и определения класса $W^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} \lambda_n(W^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi); L_2) &\leq d_n(W^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi); L_2) \leq \\ &\leq E_{n-1}(W^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)) \leq \frac{1}{\lambda_n^r} \Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Для получения оценки снизу указанных n -поперечников введём в рассмотрение $(n+1)$ -мерный шар

$$S_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n^r} \Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right) \right\}. \quad (36)$$

Поскольку мажоранта Φ удовлетворяет условию $\Phi(t_1)/t_1 \geq \Phi(t_2)/t_2$ для $0 < t_1 < t_2 < \infty$, то отсюда следует неравенство

$$\Phi(t_1^m)/\Phi(t_2^m) \geq (t_1/t_2)^m. \quad (37)$$

В силу неравенства (29) для любого полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ имеем

$$\|p_n^{(r+m)}\| \leq \lambda_n^{r+m} \|p_n\|. \quad (38)$$

Пусть $0 < t < 1/\lambda_n$. Применяя неравенство (36), в котором полагаем $t_1 := t$ и $t_2 := 1/\lambda_n$, а также формулы (30) и (38), для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{S}_{n+1}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(p_n^{(r)}, t^m) &\leq t^m \|p_n^{(r+m)}\| \leq t^m \lambda_n^{r+m} \|p_n\| \leq \\ &\leq (t\lambda_n)^m \cdot \Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right) \leq \Phi(t^m). \end{aligned} \quad (39)$$

Пусть теперь $1/\lambda_n \leq t < \infty$. Тогда на основании неравенств (29) и (30) для любого $p_n \in \mathcal{S}_{n+1}$ запишем

$$\mathcal{K}_m(p_n^{(r)}, t^m) \leq \|p_n^{(r)}\| \leq \frac{1}{\lambda_n^r} \|p_n\| \leq \Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right) \leq \Phi(t^m). \quad (40)$$

Включение $\mathcal{S}_{n+1} \in W^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi)$ следует из неравенств (39) и (40). Следовательно, согласно определению бернштейновского n -поперечника, имеем

$$\lambda_n(W^{(r)}(\mathcal{K}_m, \Phi); L_2) \geq b_n(W^{(r)}(\mathcal{S}_{n+1}, L_2)) \geq \frac{1}{\lambda_n^r} \Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right). \quad (41)$$

Требуемые равенства (34) получаем из соотношений (35) и (41), чем и завершаем доказательство теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В.С. Уравнение математической физики. – М.: Наука, 1976, 527 с.
2. Сегё Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматлит. 1962, 500 с.
3. Butzer P.L., Duchoff H., Gorlich E., Stens R.L. Best trigonometric approximation, functional order derivatives and Lipschitz classes. – Canad. J. Math. 1977, v. 29, №4, pp.781-793.
4. Вакарчук С.Б. О K -функционалах и точных значениях n -поперечников некоторых классов в пространствах $C(2\pi)$ и $L_1(2\pi)$. – Матем. заметки, 2002, т. 71, №5, с. 522-531.
5. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. K -функционалы и точные значения n -поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_2((1-x^2)^{-1/2}; [-1, 1])$. – Изв. ТулГУ. 2014, №1, ч.1, с. 83-97.
6. Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наукова думка. 1992, 225 с.

Д.А.КОДИРОВ

**НАЗДИККУНИИ БЕҲТАРИНИ ФУНКСИЯҶО БА ВОСИТАИ СУММАИ
ФУРЬЕ АЗ РЀИ ФУНКСИЯҶОИ ХОСИ МАСЪАЛАИ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ
ДАР L_2**

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола қимати аниқи сарҳади саҳеҳи наздиккунӣ ба воситаи суммаи Фурье аз рӯи функсияҳои хоси масъалаи Штурм-Лиувилл барои баъзе синфи функсияҳо, ки аз рӯи модули бифосилагии умумикардашуда тавсиф карда шудаанд, ёфта шудааст. Ҳамчунин нобаробарии намуди Чексон-Стечкин, ки дар онҳо бузургии наздиккунии беҳтарин аз боло ҳам ба воситаи \mathcal{N} -функционали ҳосилаи тартиби r -ум баҳо дода шудааст, исбот карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарин, модули бифосилагии умумикардашуда, \mathcal{N} -функционал, масъалаи Штурм-Лиувилл, n -кутр.

D.A.QODIROV

**BEST APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS BY FOURIER SERIES WITH
RESPECT TO OWN FUNCTIONS OF THE STURM-LIOUVILLE PROBLEM
IN L_2**

Tajik National University

In the article, the exact values of the upper bounds of the best approximations by the Fourier sums with respect to the eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem are found on some classes of functions characterized by a generalized modulus of continuity. We also obtain exact inequalities of the Jackson-Stechkin type, in which the values of the best approximations are estimated from above both in terms of the generalized modulus of continuity and in terms of the \mathcal{N} -functionals of the r -th derivatives.

Key words: best approximations, generalized modulus of continuity, \mathcal{N} -functional, Sturm-Liouville tasks, n -width.

УДК 517.948

О.Х.КАРИМОВ, З.ДЖ.ХАКИМОВА

КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ И РАЗДЕЛИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В
ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Институт математики им. А.Джусраева НАН Таджикистана

Поступила в редакцию 17.05.2022 г.

В работе получены коэрцитивные оценки для нелинейного эллиптического дифференциального оператора в весовом пространстве, и на основе коэрцитивных оценок доказана его разделимость. Исследована коэрцитивная разрешимость нелинейного эллиптического уравнения в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Ключевые слова: эллиптический оператор, коэрцитивные неравенства, нелинейность, разделимость, весовые гильбертовы пространства.

1. В настоящей работе исследуется разделимость нелинейного эллиптического дифференциального оператора вида

$$L[u] = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x,u)u(x) = f(x), \quad u(x) \in W_{2,loc}^2(R^n),$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, а $V(x,z)$ – положительная функция.

Работа посвящена установлению коэрцитивных оценок и доказательств теорем разделимости нелинейного эллиптического дифференциального оператора в весовом пространстве. На основе полученных коэрцитивных оценок исследуется коэрцитивная разрешимость нелинейного эллиптического дифференциального оператора второго порядка в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$. Проблемой "разделимости дифференциальных выражений" впервые занимались математики В.Н.Эверитт и М.Гирц. Они подробно

Адрес для корреспонденции: Каримов Олимджон Худойбердиевич. 734063, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики НАНТ. E-mail: karimov_olim@mail.ru

изучали разделимость оператора Штурма-Лиувилля. Дальнейшее развитие этой теории принадлежит К.Х.Бойматову, М.Отелбаеву и их ученикам. Основная часть опубликованных работ по этой теории относится к линейным операторам. Существуют лишь отдельные работы, в которых рассматриваются нелинейные дифференциальные операторы, представляющие собой слабые нелинейные возмущения линейных операторов. Случай, когда исследуемый оператор нелинейный, то есть его нельзя представить в виде слабого возмущения линейного оператора, рассмотрен лишь в некоторых отдельных работах. Полученные здесь результаты также относятся к этому малоизученному случаю. На основе разделимости рассматриваемого эллиптического оператора исследуется коэрцитивная разрешимость нелинейного эллиптического дифференциального уравнения в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$. Данная работа обобщает результаты работы [16] для нелинейного случая и для случая весового пространства.

2. Введем пространство $L_{2,\rho}(R^n)$ с конечной нормой

$$\|u; L_{2,\rho}(R^n)\| = \left\{ \int_{R^n} \rho(x) |u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\rho(x) \in C^1(R^n)$ – положительная функция.

Пространство $L_{2,\rho}(R^n)$ является гильбертовым пространством, и в нём скалярное произведение определяется с помощью равенства

$$(u, v; L_{2,\rho}(R^n)) = \int_{R^n} \rho(x) u(x) \overline{v(x)} dx.$$

В пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x, u)u(x) = f(x), \quad u(x) \in W_{2,loc}^2(R^n), \quad (1)$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, а $V(x, z)$ – положительная функция.

Определение 1. Уравнение (1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называются разделимыми в $L_{2,\rho}(R^n)$, если

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad V(x, u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$$

для всех $u(x) \in L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ таких, что $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$.

В дальнейшем предположим, что $V(x, z) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C})$. Для формулировки основного результата введем функции

$$F(x, \xi, \eta) = V^{\frac{1}{2}}(x, z), \quad \xi = \operatorname{Re} z, \quad \eta = \operatorname{Im} z,$$

$$Q(x, \xi, \eta) = V(x, z), \quad \xi = \operatorname{Re} z, \quad \eta = \operatorname{Im} z.$$

Пусть для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ функция $F(x, \xi, \eta)$ удовлетворяет условиям

$$\left\| a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} F^{-1} \right\|^2 \leq \sigma_1, \quad (2)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} F^{-1} \right\|^2 \leq \sigma_2, \quad (3)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F}{\partial x_i} F^{-\frac{3}{2}} \right\|^2 \leq \sigma_3, \quad (4)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \mu + \nu \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \omega; \mathbb{C} \right\| \leq \delta_1 \left\| F^{\frac{1}{2}} \Omega; \mathbb{C} \right\|. \quad (5)$$

Также предполагается, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x_i} F^{-2} \right\|^2 \leq \sigma_5, \quad (6)$$

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} \mu + \nu \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) \omega; \mathbb{C} \right\| \leq \delta_2 \|F\Omega; \mathbb{C}\|. \quad (7)$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2) - (7) и пусть числа $\sigma_j, (j = \overline{1, 4}), \delta_1, \delta_2$ такие, что

$$\sigma_1 + \sigma_2 < \frac{4}{3n^2}, \quad \frac{2}{n^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} < 1 - \delta_1, \quad \frac{2}{n^2(\sigma_1 + \sigma_2)} < 1 - \delta_2 \quad (8)$$

Тогда уравнение (1) разделяется в $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^n)$, и для всех функций $u(x) \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^n) \cap W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$ таких, что $f(x) \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^n)$ справедливы включения

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, V(x, u(x))u(x) \in L_{2,\rho}(R^n),$$

$$a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{2,\rho}(R^n), \quad i=1,2,\dots,n; \quad j=1,2,\dots,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\| \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\| + \|V(x, u)u; L_{2,\rho}(R^n)\| +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\| \leq M \|f(x); L_{2,\rho}(R^n)\|, \quad (9)$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

Далее остановимся на основных моментах доказательства этой теоремы. Сначала сформулируем без доказательства две вспомогательные леммы (см.[17])

Лемма 1. Пусть в уравнении (1) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_{2,\rho}(R^n)$, и функция $u(x)$ принадлежит классу $L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$. Тогда функции $V^{\frac{1}{2}}u(x)$, $a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{2,\rho}(R^n)$ ($j=1,2,\dots,n$) принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (2) -(5), и пусть функция $u(x)$ из класса $L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$ является решением уравнения (1) с правой частью $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$. Тогда функции

$$F^{\frac{3}{2}}(x, u(x))u(x), a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad j=1,\dots,n,$$

принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.

3. Переходим к непосредственному доказательству теоремы 1. Из равенства

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta)u \rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta)u \rangle +$$

$$+ \langle V(x, u)u(x), \rho\varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta)u \rangle$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon(x)Q(x,u)u \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon Q(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle + B_1^{(\varepsilon)}(u) + B_2^{(\varepsilon)}(u) + \quad (10)$$

$$+ B_3^{(\varepsilon)}(u) + B_4^{(\varepsilon)}(u) + B_5^{(\varepsilon)}(u) + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon(x)Q(x,u)u \rangle,$$

где

$$B_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} Q(x,u)u \rangle,$$

$$B_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon \left(\operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial Q(x,u)}{\partial \xi} + \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial Q(x,u)}{\partial \eta} \right) u \rangle,$$

$$B_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial x_i} u \rangle,$$

$$B_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \varphi_\varepsilon Q(x,u)u \rangle,$$

$$B_5^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} Q(x,u)u \rangle.$$

Здесь и далее значения $F(x,u)$, $\frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi}$, $\frac{\partial F(x,u)}{\partial \eta}$ взяты в точке

$$(x_1, \dots, x_n, \operatorname{Re}u(x), \operatorname{Im}u(x)).$$

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $B_j^\varepsilon(u)$, $j = \overline{1,5}$, находим, что функционал $B_1^\varepsilon(u) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Относительно функционалов $B_m^\varepsilon(u)$, $m = \overline{2,5}$ получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} |B_2^\varepsilon(u)| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial \xi} \operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial x_i} u \rangle \right| \leq \\ &\leq \delta_2 \sum_{i,j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|B_3^\varepsilon(u)| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \left\langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial x_i} u \right\rangle \right| \leq \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\beta_1}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\beta_1} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial Q}{\partial x_i} u \right\|^2 \right\} \leq \\
&\leq \frac{\beta_1}{2} \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2 \sigma_4}{2\beta_1} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} V u\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|B_4^\varepsilon(u)| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \left\langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x_i} Q u \right\rangle \right| \leq \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\beta_1}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\beta_1} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}} u \right\|^2 \right\} \leq \\
&\leq \frac{\beta_1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2 \sigma_2}{2\beta_1} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} V u\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|B_5^\varepsilon(u)| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \left\langle a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \varphi_\varepsilon V^{\frac{1}{2}} u \right\rangle \right| \leq \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\beta_1}{2} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{1}{2\beta} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} V^{-1} V u \right\|^2 \right\} \leq \\
&\leq \frac{\beta_1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n^2 \sigma_1}{2\beta_1} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} V u\|^2.
\end{aligned}$$

Здесь β_1 – произвольное положительное число; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4$ и δ_2 – константы из условий (2), (3), (6) и (7).

На основе полученных оценок из равенства (10) имеем

$$\begin{aligned}
|\langle f, \varphi_\varepsilon V u \rangle| &\geq \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4)}{2\beta_1} \right) \cdot \langle V u, \varphi_\varepsilon V u \rangle - |B_1^\varepsilon(u)| + \\
&\quad + \left(1 - \frac{3}{2}\beta_1 - \delta_2 \right) \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и затем переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим неравенство

$$\begin{aligned} & \|f; L_{2,\rho}(R^n)\| \|Vu; L_{2,\rho}(R^n)\| \geq |(f, Vu)| \geq \\ & \geq \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4)}{2\beta_1}\right) \cdot (Vu, Vu) + \\ & + \left(1 - \frac{3}{2}\beta_1 - \delta_2\right) \cdot \sum_{j=1}^n \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее подбираем положительное число β_1 так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{n^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4)}{2\beta_1} < 1, \quad 3\beta_1 + 2\delta_2 < 1.$$

Теперь из полученных неравенств после несложных преобразований имеем коэрцитивное неравенство (9). Из него следует разделимость нелинейного оператора (1) в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Everitt W.N., Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators. – Proc. London Math. Soc., 1971, vol. 23, pp. 301-324.
2. Everitt W.N., Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions. – Proc. London Math. Soc., 1972, vol. 24, pp. 149-170.
3. Everitt W.N., Gierz M. Some inequalities associated with certain differential operators. – Math. Z., 1972, vol. 126, pp. 308-326.
4. Everitt W.N., Gierz M. Inequalities and separation for Schrodinger-type operators in $L_2(R^n)$. – Proc. Roy. Soc. Edinburg, Sect A. 1977, vol. 79, pp. 149-170.
5. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости ДАН СССР. 1973, т. 213, №5, с. 1009-1011.
6. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения. – Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР, 1984, т. 170, с. 37-76.
7. Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка ДАН СССР, 1988, т. 301, №5. с. 1033-1036.
8. Бойматов К.Х., Шарипов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака. – Доклады Академии наук России, 1992, т. 326, №3. с. 393-398.
9. Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка. – Математические заметки, 1989, т. 46, № 6, с. 110-112.
10. Otelbaev Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n . – Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР, 1983, т. 161, с. 195-217.
11. Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Оспанов К.Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения. – Доклады Академии наук России, 2010, т. 435, №3. с. 310-313.

12. Zayed E.M.E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem – J. Math. Anal. Appl., 2008, vol. 337, pp. 659-666.
13. Zayed E.M.E., Salem Omram. Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert International. – J. Math. Combin. 2010, vol. 4, pp. 13-23.
14. Zayed E.M.E., Mohamed A.S., Atia H.A. Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces. – J. Math. Anal. Appl., 2007, vol. 336, pp. 81-92.
15. Zayed E.M.E. Separation for an elliptic differential operators in a weighted its application to an existence and uniqueness theorem Dynamits of continuous, discrete and impulsive systems. – Series A: Mathematical Analysis. 2015, 22, pp. 409-421.
16. Mohamed A.S., Atia H.A. Separation of the general second elliptic differential operator potential in the weighted Hilbert spaces. – Applied Mathematics and Computation. 2005, №162, pp. 155-163.
17. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами. – Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2014, №3(157), с. 42-50.
18. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2015, т. 58, №8, с. 665-673.
19. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом. – Уфимский математический журнал, 2017, т. 9, №1, с. 55-62.
20. Каримов О.Х. О коэрцитивной разрешимости уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2018, т. 61, №11-12, с. 829-836.
21. Karimov O.Kh. On the separation property of nonlinear second-order differential operators with matrix coefficients in weighted spaces. – Journal of mathematical sciences, 2019, vol. 241, №5, pp. 589-595.

О.Х.КАРИМОВ, З.ДЖ.ХАКИМОВА

БАҶОҶОИ КОЭРСИТИВӢ ВА ҶУДОШАВАНДАГИИ ОПЕРАТОРҶОИ ҒАЙРИХАТӢИ ЭЛЛИПТИКӢ ДАР ФАЗОИ ВАЗНДОР

Институти математикаи ба номи А. Ҷураевӣ

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Дар мақола баҳоҳои коэрцитивии оператори ғайрихаттии эллиптикӣ дар фазои вазндор татқиқ карда шуда, дар асоси баҳои коэрцитивӣ ҷудошавандагии ин оператор исбот шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *оператори эллиптикӣ, нобаробариҳои коэрцитивӣ, ғайрихаттӣ, ҷудошавандагӣ, фазои вазндори Гилбертӣ.*

O.Kh.KARIMOV, Z.J.KHAKIMOVA

**COERCIVE ESTIMATES AND SEPARABILITY OF A NONLINEAR ELLIPTIC
DIFFERENTIAL OPERATOR IN A WEIGHTED SPACE**

Institute of Mathematics. A. Juraeva National Academy of Sciences of Tajikistan

We obtain coercive estimates for a nonlinear elliptic differential operator in a weighted space and prove its separability based on coercive estimates. The coercive solvability of a nonlinear elliptic equation in the weighted space $L_{2,\rho}(R^n)$ is studied.

Key words: elliptic operator, coercive inequalities, nonlinearity, separability, weighted Hilbert spaces.

УДК 519.837.2

Е.М.МУХСИНОВ

**РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ДРОБНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

*Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики
Поступила в редакцию 26.04.2022 г.*

В данной работе рассматривается разрешимость задачи преследования в смысле Л.С.Понтрягина в банаховом пространстве для квазилинейной дифференциальной игры, когда динамика игры описывается линейным дифференциальным уравнением с несколькими дробными производными Герасимова-Капуто.

Ключевые слова: дифференциальная игра с несколькими дробными производными, банахово пространство, задача преследования, время преследования.

Последние годы интенсивно исследуются дифференциальные игры, описываемые дифференциальными уравнениями дробного порядка, ибо многие физико-химические процессы в условиях конфликта или неопределенности сводятся к таким дифференциальным играм [1, с.256], [2, с.401].

В данной работе впервые рассматривается задача преследования в смысле Л.С.Понтрягина [3, с.308] для квазилинейной дифференциальной игры в банаховом пространстве, когда динамика игры описывается линейным дифференциальным уравнением с несколькими дробными производными Герасимова-Капуто [4, с.86].

В сепарабельном банаховом пространстве X рассмотрим дифференциальную игру, описываемую линейным дифференциальным уравнением с несколькими дробными производными Герасимова-Капуто

Адрес для корреспонденции: Мухсинов Едгор Мирзоевич. 735700, Республика Таджикистан, г. Худжанд, 17мкр-н, д.2, E-mail: mukhsinov@gmail.com

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^n D_t^{\alpha_k} A_k z(t) + f(u(t), v(t), t) \quad (1)$$

и замкнутым терминальным множеством $M \subset X$, где заканчивается игра.

В игре (1) $t \geq 0$, $z(t) \in X, Y, Z$ – сепарабельные банаховы пространства, $U([0, \infty), Y)$ – множество всех измеримых отображений, действующих из $[0, \infty)$ в Y , $u(\cdot) \in U([0, \infty), Y)$ – управления преследования, $\vartheta(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$ – управления убегающего, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m = [\alpha] + 1$, $m_k = [\alpha_k] + 1$, $A_k : X \rightarrow X$ – линейные ограниченные операторы, $k = 1, 2, \dots, n$. В дальнейшем предполагаем, что отображение $f : [0, \infty) \times Y \times Z \rightarrow X$ измеримо по $t \in [0, \infty)$ и непрерывно по $(u, v) \in Y \times Z$ и существует такая локально интегрируемая функция $\eta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, что при всех $u \in Y$, $v \in Z$, $t \in [0, \infty)$ имеет место неравенство $\|f(u, v, t)\| \leq \eta(t)$. Это предположение обеспечивает локально интегрируемость отображения $t \rightarrow f(u(t), v(t), t)$ по Бохнеру.

Из работы [4, с.92] следует, что когда $t \rightarrow f(u(t), v(t), t)$ непрерывное отображение, то задача Коши (1) с начальными условиями

$$z^{(l)}(0) = z_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

имеет единственное решение вида

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l + \int_0^t Z(t-s) f(u(s), v(s), s) ds \quad (3)$$

из класса $C^{m-1}([0, \infty), X)$, где

$$Z_l(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\lambda^\alpha \mathbf{I} - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha-l-1} \mathbf{I} - \sum_{k=n_l}^n \lambda^{\alpha_k-l-1} A_k \right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$t > 0, \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3, \gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_o, \arg \lambda \in (-\pi, \pi)\},$$

$$\gamma_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi, \lambda \in [-r_o, +\infty)\}, \gamma_3 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -r_o]\},$$

$$r_o = (2An)^{\frac{1}{\alpha-\alpha_n}}, A = \max \left\{ \frac{1}{2n}, A_k : k = 1, 2, \dots, n \right\},$$

$$n_l = \min \{k \in \{1, 2, \dots, n\} : l < m_k - 1\},$$

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^n \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda.$$

Поэтому, следуя А.Фридману [5, с.95] и Ю.С.Осипову [6, с.1314], дадим следующее

Определение 1. Если отображение $t \rightarrow f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо, то решением задачи Коши (1) с начальными условиями (2) и соответствующим управлением $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ будем называть отображение (3), где интеграл понимается в смысле Бохнера [7, с.93].

Для дифференциальной игры (1) дадим определение о возможности завершения преследования в смысле Л.С.Понтрягина [8, с.104].

Определение 2. В игре (1) из начального положения $z^o = (z_o, z_1, \dots, z_{m-1})$ возможно завершение преследования, если существует число $T = T(z^o) \geq 0$ такое, что для любого управления убегания $v(\cdot) \in U([0, T], Z)$ в каждый момент $t \in [0, T]$, зная уравнение (1) и значения $v(t)$ и $z(s)$, $0 \leq s < t$, можно выбрать значение $u(t)$ таким образом, что $u(\cdot) \in U([0, T], Y)$ и $z(T_1) \in M$ при некотором $T_1 \in [0, T]$, где $z(\cdot)$ – решение задачи (1), (2), соответствующее управлениям $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$. При этом число $T = T(z^o)$ называется гарантированным временем преследования.

Теперь сформулируем задачу преследования в смысле определения 2.

Задача преследования. Найти множество начальных положений, из которых в игре (1) возможно завершение преследования.

Для доказательства теорем о возможности завершения преследования нам понадобятся следующие понятия и леммы.

Пусть E – полное сепарабельное метрическое пространство, 2^E – множество всех замкнутых подмножеств E . Отображение $y: [0, \infty) \rightarrow E$, обладающее свойством $y(t) \in P(t)$ называется селектором отображения $P: [0, \infty) \rightarrow 2^E$.

Из [9, с.219] следует следующая

Лемма 1 (о существовании измеримого селектора). Если отображение $P: [0, \infty) \rightarrow 2^E$ измеримо, то у него существует измеримый селектор.

В дальнейшем X, Y – полные сепарабельные метрические пространства, Z – полное метрическое пространство, $U([0, \infty), Z)$ – множество всех измеримых отображений, действующих из $[0, \infty)$ в Z . Тогда в силу леммы 1 из работ ([10, с.56], [11, с.86]) следует следующая важная

Лемма 2 (о существовании измеримого селектора у неявно заданного отображения). Пусть отображения $P: [0, \infty) \rightarrow 2^Y$ и $\varphi: [0, \infty) \rightarrow X$ измеримы, а отображение $g: Y \times Z \times [0, \infty) \rightarrow X$ непрерывно по $(u, v) \in Y \times Z$ и измеримо по $t \in [0, \infty)$. Если для любых $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$ и почти всех $t \in [0, \infty)$ имеет место включение $\varphi(t) \in g(P(t), v(t), t)$, то отображение $t \rightarrow \{u \in P(t): \varphi(t) = g(u, v(t), t)\}$ замкнутозначно, измеримо и имеет измеримый селектор, то есть существует измеримое отображение $u(\cdot): [0, \infty) \rightarrow Y$ такое, что $u(t) \in P(t)$ и $\varphi(t) = g(u(t), v(t), t)$ для почти всех $t \in [0, \infty)$.

Пусть E – топологическое пространство, 2^E – множество непустых замкнутых подмножеств топологического пространства E . Отображение $P: [0, \infty) \rightarrow 2^E$ называется замкнутым (секвенциально замкнутым), если его график $\Gamma(P)$ является замкнутым (секвенциально замкнутым) множеством в топологическом пространстве $[0, \infty) \times E$. Здесь секвенциальная замкнутость множества $\Gamma(P) \subset [0, \infty) \times E$ понимается в том смысле, что если произвольные последовательности $t_n \in [0, \infty)$ и $x_n \in P(t_n)$ такие, что $t_n \rightarrow t$ и $x_n \rightarrow x$, то $t \in [0, \infty)$ и $x \in P(t)$. Видно, что из замкнутости отображения $P: [0, \infty) \rightarrow 2^E$ следует его секвенциальная замкнутость, но обратное, вообще говоря, не верно. Если же, E – метрическое пространство, то замкнутость отображения $P: [0, \infty) \rightarrow 2^E$ эквивалентна его секвенциальной замкнутости.

Справедлива следующая

Лемма 3. Пусть E – separable линейное топологическое пространство, отображение $\varphi: [a, b] \rightarrow E$ непрерывно, а отображение $P: [a, b] \rightarrow 2^E$ секвенциально замкнуто. Тогда множество $\{t \in [a, b]: \varphi(t) \in P(t)\}$ замкнуто.

Доказательство. Если $t_n \in [a, b]$, $t_n \rightarrow t$, $\varphi(t_n) \in P(t_n)$, то в силу непрерывности φ имеем: $\varphi(t_n) \rightarrow \varphi(t)$. Поэтому, из секвенциальной замкнутости отображения P имеем: $\varphi(t) \in P(t)$, которое означает, что множество $\{t \in [a, b]: \varphi(t) \in P(t)\}$ замкнуто. Лемма доказана.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) начальное положение $z^o = (z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$ такое, что при некотором $T \geq 0$ имеет место включение

$$\sum_{l=0}^{m-1} Z_l(T) z_l \in W_1(T), \quad (4)$$

где

$$W_1(t) = M - \int_0^t \bigcap_{v \in Z} Z(t-s) f(Y, v, s) ds, \quad t \in [0, T];$$

2) многозначное отображение $t \rightarrow W_1(t)$, $t \in [0, T]$ – секвенциально замкнуто. Тогда из начального положения z^0 возможно завершение преследования с гарантированным временем преследования $T_0 = \min \{t \in [0, T]: \text{для которых выполняется (4)}\}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы для любого допустимого измеримого управления убегания $v(\cdot)$ выбираем такое допустимое измеримое управление преследования $u(\cdot)$, что для решения $z(\cdot)$ задачи Коши (1), (2), соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, имеет место включение $z(T_0) \in M$. В силу леммы 3 из секвенциально замкнутости отображения $t \rightarrow W_1(t)$ следует, что множество $\{t \in [0, T]: \text{для которых выполняется равенство (4)}\}$ замкнуто.

Поэтому, учитывая соотношение (4), заключаем, что существует точка $m \in M$ и интегрируемый селектор $\omega(\cdot)$ многозначного отображения

$$s \rightarrow \bigcap_{v \in Z} Z(T_0 - s) f(Y, v, s), \quad s \in [0, T_0],$$

что имеет место равенство

$$\sum_{l=0}^{m-1} Z_l(T_0) z_l = m - \int_0^{T_0} \omega(s) ds. \quad (5)$$

Допустим, что убегавший выбрал произвольное допустимое управление $v(\cdot) \in U([0, T_0], Z)$. Тогда все условия леммы 2 выполняется, ибо X, Y – сепарабельные банаховы пространства, отображение $(u, v, s) \rightarrow f(u, v, s)$ непрерывно по (u, v) и измеримо по t , а отображение $s \rightarrow \omega(s)$ и многозначное отображение $s \rightarrow \bigcap_{v \in Z} Z(T_0 - s) f(Y, v, s)$ измеримы. Следовательно, в силу леммы 2 существует такое измеримое управление преследования $u(\cdot) \in U([0, T_0], Y)$, что имеет место равенство

$$\omega(s) = Z(T_0 - s) f(u(s), v(s), s) \quad (6)$$

для почти всех $s \in [0, T_0]$.

Поэтому, учитывая равенства (5) и (6) для решения задачи (1), (2) соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на отрезке $[0, T_0]$ в силу (3), имеем:

$$\begin{aligned} z(T_0) &= \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(T_0) z_l + \int_0^{T_0} Z(T_0 - s) f(u(s), v(s), s) ds = \\ &= m - \int_0^{T_0} \omega(s) ds + \int_0^{T_0} Z(T_0 - s) f(u(s), v(s), s) ds = \\ &= m - \int_0^{T_0} Z(T_0 - s) f(u(s), v(s), s) ds + \int_0^{T_0} Z(T_0 - s) f(u(s), v(s), s) ds = \\ &= m \in M, \text{ то есть } z(T_0) \in M. \end{aligned}$$

Следовательно, из начального положения z^o возможно завершение преследования за время T_0 . Описанный в доказательстве способ выбора $u(t)$ осуществляется исходя из информации о $v(t)$ и z^o . Если при выборе $u(t)$ использовать информацию о $v(t)$ и $z(s)$, $0 \leq s \leq t$, то время достижения терминального множества M будет не более числа T_0 . Поэтому, в этом случае, из начального положения z^o возможно завершение преследования с гарантированным временем преследования T_0 .

Теорема доказана.

В теореме 2 интегрируемая функция $h: [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ такая, что $\int_0^T h(s) ds = 1$.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1) терминальное множество M выпукло, а множество $Z(T-s)F(Y, v, s)$ при любых $v \in Z, s \in [0, T]$ замкнуто;

2) начальное положение $z^o = (z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$ такое, что при некотором $T \geq 0$ имеет место включение

$$\sum_{l=0}^{m-1} Z_l(T) z_l \in W_2(h(\cdot), T), \quad (7)$$

где

$$W_2(h(\cdot), T) = \begin{cases} M, & \text{при } T = 0, \\ \int_0^T \bigcap_{v \in Z} [h(s)M - Z(T-s)f(Y, v, s)] ds, & \text{при } T > 0; \end{cases}$$

3) многозначное отображение $t \rightarrow W_2(h(\cdot), t)$, $t \in [0, T]$ секвенциально замкнуто.

Тогда из начального положения z^o возможно завершение преследования с гарантированным временем преследования $T_o = \min\{t \in [0, T] : \text{для которых выполняется (7)}\}$.

Доказательство. Рассуждая как в теореме 1 из секвенциальной замкнутости отображения $t \rightarrow W_2(h(\cdot), t)u$ из соотношения (7), заключаем, что для некоторой интегрируемой функции $h(\cdot) \in \Omega(T_o)$ существует интегрируемый селектор $\omega(\cdot)$ отображения

$$s \rightarrow \bigcap_{v \in Z} [h(s)M - Z(T_o - s)f(Y, v, s)], \quad s \in [0, T_o],$$

что имеет место равенство

$$\sum_{l=0}^{m-1} Z_l(T_o) z_l = \int_0^{T_o} \omega(s) ds. \quad (8)$$

Допустим, что убегающий выбрал произвольное допустимое управление $v(\cdot) \in U([0, T_o], Z)$. Тогда $\omega(s) \in h(s)M - Z(T_o - s)f(Y, v(s), s)$, $s \in [0, T_o]$ и в силу условия 1) не пустое множество

$$\Pi(s) = (h(s)M - Z(T_o - s)f(Y, v(s), s)) \cap h(s)M$$

замкнуто. Тогда в силу лемм 1 и 2 существует измеримый селектор $p(s) \in \Pi(s)$, управления преследования $u(\cdot) \in U([0, T], Y)$ и измеримое отображение $m(\cdot) : [0, T] \rightarrow M$ такие, что $p(s) = h(s)M - Z(T_o - s)f(u(s), v(s), s) = h(s)m(s)$ для почти всех $s \in [0, T]$. Следовательно,

$$\omega(s) = h(s)m(s) - Z(T_o - s)f(u(s), v(s), s). \quad (9)$$

Поэтому, учитывая (3), (8), (9), выпуклость M и равенство ([12], с.272)

$$\int_0^{T_o} h(s)M ds = \left(\int_0^{T_o} h(s) ds \right) M,$$

для решения $z(\cdot)$ задачи Коши (1), (2), соответствующего управлению $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на $[0, T_o]$, имеем:

$$\begin{aligned}
 z(T_o) &= \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(T_o) z_l + \int_0^{T_o} Z(T_o - s) f(u(s), v(s), s) ds = \\
 &= \int_0^{T_o} \omega(s) ds + \int_0^{T_o} Z(T_o - s) f(u(s), v(s), s) ds = \\
 &= \int_0^{T_o} (h(s)m(s) - Z(T_o - s) f(u(s), v(s), s)) ds + \\
 &\quad + \int_0^{T_o} Z(T_o - s) f(u(s), v(s), s) ds \\
 &= \int_0^{T_o} h(s)m(s) ds - \int_0^{T_o} Z(T_o - s) f(u(s), v(s), s) ds + \\
 &\quad + \int_0^{T_o} Z(T_o - s) f(u(s), v(s), s) ds = \int_0^{T_o} h(s)m(s) ds \in \int_0^{T_o} h(s)M ds = \\
 &= \left(\int_0^{T_o} h(s) ds \right) M = M, \text{ то есть } z(T_o) \in M.
 \end{aligned}$$

Следовательно, как в теореме 1, заключаем, что из начального положения z^o возможно завершение преследования с гарантированным временем преследования T_o . Теорема доказана.

Полученные результаты обобщают результаты работы:

[8, с.104], где динамика игры описывается дифференциальным уравнением дробного порядка с одним дробным производным;

[12, с.272], где динамика игры описывается квазилинейным дифференциальным уравнением;

[13, с.2003], где динамика игры описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением в конечномерном пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чикрий А.А., Матичин И.И. О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными. – Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011, т.17, №2, с.256-270.

2. Маматов М.Ш., Алимов Х.Н. Дифференциальные игры преследования дробного порядка с нелинейными управлениями. – Вестник российских университетов. Математика. 2020, 25:132, с. 401-409.
3. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования. – Математический сборник. 1980, т.112 (154), №3, с. 307-331.
4. Федоров В.Е., Бойко К.В., Фуонг Т.Д. Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными. – Математические заметки СВФУ. 2021, т.28, №3, с. 85-104.
5. Friedman A. Differential Games of Pursuit in Banach Space. – Journal of Mathematical analysis and applications. 1969, vol.25, pp. 93-113.
6. Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами. – Доклады АН СССР. 1975, т. 223, №6, с.1314-1317.
7. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИИЛ, 1962, с. 832
8. Мухсинов Е.М. О разрешимости задачи преследования для квазилинейной дифференциальной игры дробного порядка в банаховом пространстве. Сборник статей международной научно-практической конференции на тему « О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач». – Душанбе, 2021, с. 103-106.
9. Rockafellar T.R. Convex Integral Functionals and Duality Contribution to nonlinear functional analysis. – Academic Press, Inc., New York and London. 1971, pp. 215-236.
10. Castaing C.M. Valadier Convex analysis and measurable multifunctions. – Lecture Notes Math. 1977, v. 580, pp. 1-278.
11. Parthasarathy T. Selection Theorems and their Applications. – Lecture Notes in Mathematics, 1972, 263, pp. 1-101.
12. Мухсинов Е.М. О задаче преследования в банаховом пространстве. – Доклады АН Тадж. ССР, 1983, т. 26, №5, с. 270-274.
13. Сатимов Н.Ю. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх. – Дифференциальные уравнения, 1973, т. 9, № 11, с. 2000-2009.

Е.М.МУХСИНОВ

**ҲАЛШАВАНДАГИИ МАСЪАЛАИ ТАЪҚИБКУНИ БАРОИ БОЗИҲОИ
ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО ЯКЧАНД ҲОСИЛАҲОИ КАСРӢ
ДАР ФАЗОИ БАНАХ**

Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон

Дар кори мазкур, дар фазои Банах барои бозиҳои дифференсиалии квазихаттӣ дар ҳоле, ки динамикаи бозӣ бо муодилаи дифференсиалии хаттӣ бо якчанд ҳосилаҳои касрии Герасимов-Капуто дода мешавад, ҳалшавандагии масъалаи таъқибкунӣ ба маънои Л.С.Понтрягин дида шудааст.

Калимаҳои калидӣ: бозии дифференсиалӣ бо якчанд ҳосилаҳои касрӣ, фазои Банах, масъалаи таъқибкунӣ, вақти таъқибкунӣ.

E.M.MUKHSINOV

**SOLVABILITY OF THE PURSUIT PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL
GAMES WITH SEVERAL FRACTIONAL DERIVATIVES
IN A BANACH SPACE**

Tajik state university of law, business and politics

In this paper, the solvability of the pursuit problem in the sense of L.S.Pontryagin in a Banach space for a quasi-linear differential game, when the game dynamics is described by a linear differential equation with several Gerasimov-Caputo fractional derivatives was considered.

Key words: differential game with several fractional derivatives, Banach space, pursuit problem, pursuit time.

УДК 519.6 + 530.1

Ф.ШОКИР

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ
С ВЫСОКИМ ЗНАЧЕНИЕМ СПИНА

*Физико-технический институт им. С.У.Умарова
Национальной академии наук Таджикистана*

В данной работе применением метода Майораны проведено математическое моделирование состояния квантовых систем со спиновым числом $S = j\hbar$. Получено выражение для корреляционных функций ориентированных состояний в общем случае: $j \geq \frac{1}{2}$.

Ключевые слова: представление Майораны, сфера Блоха, математическое моделирование, квантовые системы, спин, корреляционные функции.

Введение. Исследование квантовых систем с высоким значением спина $|\psi\rangle^{(S>j\hbar)}$ $\left(j > \frac{1}{2}\right)$ имеет важное фундаментальное значение, в том числе в физике элементарных частиц, для классификации запутанности в симметричных квантовых состояниях, изучения бозе-конденсата с высокими спинами, расчета геометрических фаз систем с большим спином, статистики хаотических квантово-динамических систем и т.д. [1]. Однако непосредственная геометрическая интерпретация квантовых состояний с высоким значением спина $\left(S > \frac{1}{2}\hbar\right)$ является проблематичной, поскольку довольно сложно визуализировать процессы, текущие в многомерном пространстве \mathbb{R}^D ($D \geq 4$). В данном случае, описание квантовой системы с SU(2)-симметрией и её эволюции с помощью метода Майораны

Адрес для корреспонденции: Фарход Шокир. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/1, Физико-технический институт им. С.У.Умарова НАНТ. E-mail: farhod0475@mail.ru

[2] предоставляет нам интуитивно понятный способ изучения систем с $S > \frac{1}{2}\hbar$ именно с геометрической точки зрения. Напомним, что двухуровневое чистое квантовое спиновое состояние $\left(|\psi\rangle^{(S=\pm\frac{1}{2}\hbar)} \right)$ может быть описано точкой на сфере Блоха S^2 (рис.1а), а его эволюция может быть однозначно представлена траекторией точки (P') на данной сфере [1, 2]. В работе [2] Майорана показал, что задачу можно существенно упростить, включая больше точек ($2S$) на комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$, которую можно идентифицировать со сферой Блоха S^2 , вместо одной точки на многомерной геометрической структуре более высокого измерения $\left(|\psi\rangle_{(2S)}^{(S>j\hbar)}, j > \frac{1}{2} \right): S^D \in \mathbb{R}^{D+1}, D \geq 3$. Заметим, что сфера S^2 эквивалента фактор группам $S^3/S^1, SU(2)/U(1), SO(3)/SO(2)$ [3, 4].

Исследованию квантовых систем с высоким значением спина с помощью представления Майораны посвящен ряд работ, в области систем со смешанными спинами [1], квантовой запутанности [5], суперпозиция квантовых состояний кутрита – как квантовой ячейки с тремя возможными состояниями ($|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$) [6], обобщенных когерентных состояний [7], адиабатических и сверхадиабатических процессов в трехуровневых системах [8] и т.д. В частности, в работе [1] предложено решение проблемы описания двухспиновой системы на сфере Блоха, где представлен практический метод решения вопроса эволюции системы со смешанными спинами $\left(S, \frac{1}{2} \right)$ с помощью $4S+1$ точек на сфере S^2 .

Новому пониманию геометрии симметричных запутанных состояний посвящена работа [5], где получено аналитическое выражение в случае чистых состояний как функции наименьшего собственного значения блоховской матрицы. В работе [6] исследован вопрос майорановского геометрического представления кутрита, где пара точек на единичной сфере S^2 представляет его квантовые состояния. В указанной работе предложен метод экспериментальной реализации кутритной системы с помощью ядерного магнитного резонанса, ориентированной в жидкокристаллической среде. В работе [7], основанной на когерентных состояниях, предложен метод обобщения представления Майораны (1) для общей симметрии. То есть, выбирая обобщенное когерентное состояние в качестве эталонного состояния, дается более общее представление Майораны как для конечных, так и для бесконечных систем. На основе данного метода авторами работы [7] проведено исследование состояния сжатого вакуума для трех различных симметрий: Гейзенберга-Вейля, $SU(2)$ и $SU(1,1)$ и определено влияние параметра сжатия на распределение точек на сфере Блоха.

В настоящей работе применением метода Майораны представления квантового чистого состояния со спиновым числом $S > j\hbar$ ($j \geq \frac{1}{2}$) в терминах $2S$ симметричных состояний с $S = \frac{1}{2}\hbar$ проведены расчёты для корреляционных функций $F_k(S)$ при $j \geq \frac{1}{2}$. Получено выражение для функций $\mathbb{P}_{cor}(F_k(S))$, описывающих вероятность согласования ориентированных спиновых систем $|\psi\rangle_{(2S)}^{(j\hbar)}$ в общем случае: $j \geq \frac{1}{2}$.

Постановка задачи. Напомним, что в работе [2] для комплексных чисел $\zeta_s(x_s, y_s)$ получено следующее выражение (полином Майораны)

$$a_0 \zeta^{2s} + a_1 \zeta^{2s-1} + \dots + a_{2s} = 0, \quad (1)$$

$$a_r = (-1)^r \frac{C_{s-r}}{\sqrt{(2s-r)!r!}},$$

где $2S$ комплексных корней (ζ_s) при обратной стереографической проекции на сферу Блоха (рис. 1а) образуют $2S$ точек, описывающих динамику единичных изовекторов с началом в центре сферы S^2 [1–4]. Таким образом метод, разработанный в работе [2] позволяет в рамках трехмерного пространства ($S^D \in \mathbb{R}^{D+1}$, $D < 3$) построить выражение для состояния квантовой спиновой системы $|\psi\rangle_{(2S)}^{(j\hbar)}$ ($j \geq \frac{1}{2}$) в виде суперпозиции системы $2S$ ($S = \pm \frac{1}{2}\hbar$) частиц:

$$|\psi\rangle_{(2S)}^{(j\hbar)} = C_s |\psi\rangle_s^{(\hbar/2)} + C_{s-1} |\psi\rangle_{s-1}^{(\hbar/2)} + \dots + C_{-s} |\psi\rangle_{-s}^{(\hbar/2)}. \quad (2)$$

На первом этапе исследований в работе [3] на основе метода Майораны определен общий вид системы полиномов (1):

$$\sum_{r=0}^{2S} (-1)^r \mathbb{N}_r^{(S)} C_{S-r} \zeta^{2S-r} = 0,$$

$$\mathbb{N}_r^{(S)} = \begin{cases} 1, & r = 0 \cup r = 2S \\ \sqrt{\left(\mathbb{N}_{r-1}^{(S-\frac{1}{2})}\right)^2 + \left(\mathbb{N}_r^{(S-\frac{1}{2})}\right)^2}, & 0 < r < 2S \end{cases}.$$

Заметим, что коэффициенты $C_S \left(S = j\hbar, j \geq \frac{1}{2} \right)$ удовлетворяют условию нормировки (рис. 1)

$$\sum_{r=0}^{2S} |C_r|^2 = 1.$$

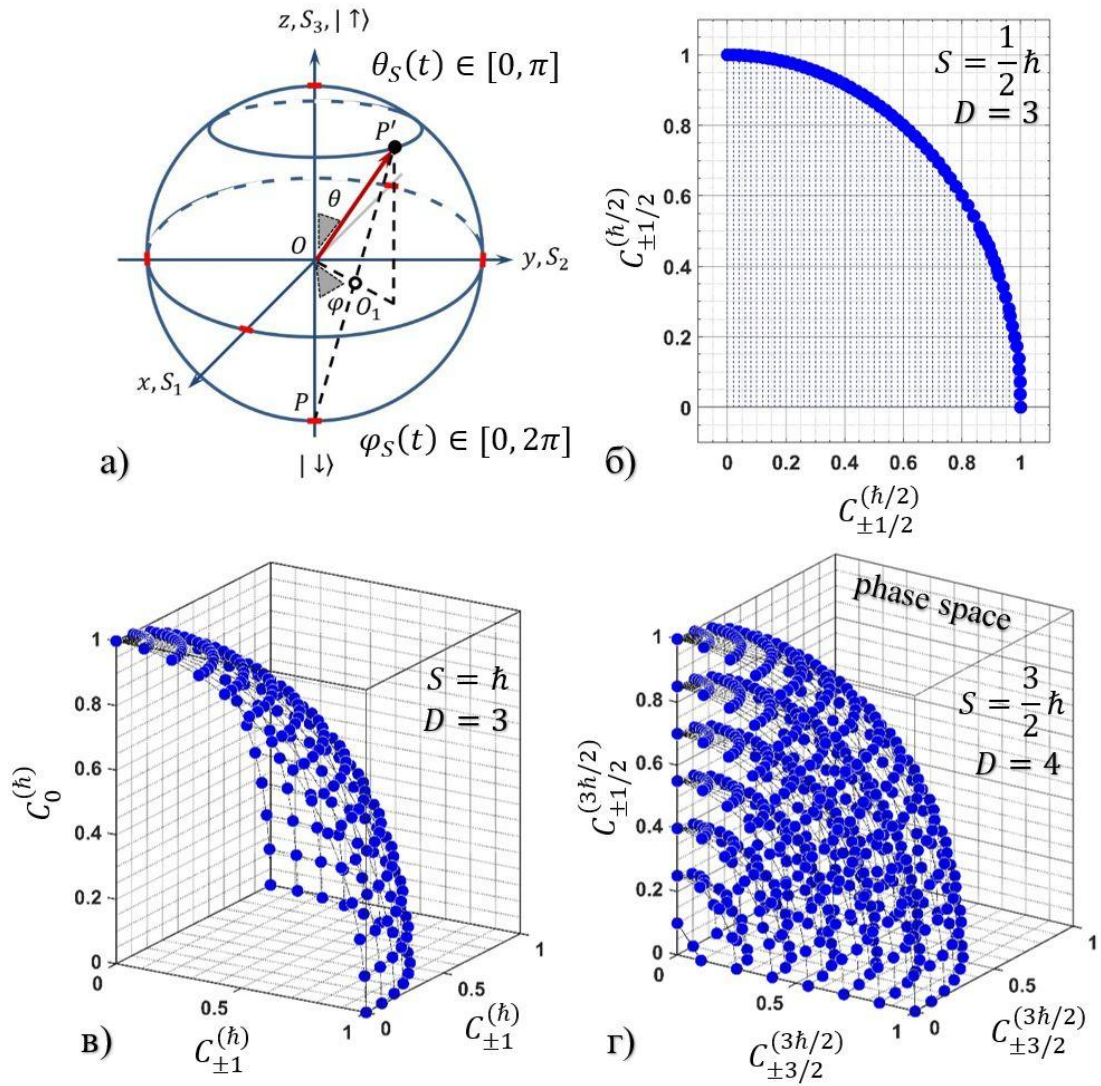


Рис. 1. Сфера Блоха S^2 : а). Форма распределения значений $C_r^{(S\hbar)}$; б) $S = \frac{1}{2}$; в) $S = 1$; г) $S = \frac{3}{2}$
(в фазовом пространстве сферы S^3).

Область значений C_S ($S > j\hbar$, $j \geq \frac{1}{2}$) для состояний с $j = \pm \frac{1}{2}$ (б), $j = \pm 1$ (в) и $j = \pm \frac{3}{2}$ (г – фазовое пространство для $S^3 \in \mathbb{R}^4$) приведена на рис. 1б, рис. 1в и рис. 1г соответственно.

Представление Майораны квантовых спиновых систем посредством $(2S)$ репрезентативных точек (P') становится особенно простым в случае ориентированных состояний: $\angle POP' = \pi$ (рис. 1а), где каждое из двух состояний $|\psi\rangle_{(2S)}^{(OP)}$, $|\psi\rangle_{(2S)}^{(OP')}$ обладает спиновым числом $m\hbar$, $m'\hbar$ кратным $\frac{1}{2}\hbar$. В общем случае вероятность согласования данных состояний при $\angle POP' = \alpha$ определена в работе [2] в следующем виде:

$$\mathbb{P}_{cor}(F(\hbar)) = F_1 F_2^2, \quad (3),$$

$$F_1(\alpha, j, m, m') = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^{4j} (j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!,$$

$$F_2(\alpha, r, j, m, m') = \sum_{r=0}^{2j} \frac{(-1)^r \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^{2r-m+m'}}{r!(r-m+m')!(j+m-r)!(j-m'-r)!}.$$

Проведённые расчёты. Вычислим значения $\mathbb{P}_{cor}(F_k(S))$ для ориентированных (рис. 2) квантовых систем с различными спиновыми числами $S = j\hbar$: $j \geq \frac{1}{2}$.

1) $S = \frac{1}{2}\hbar$. Базовое (фермионное) состояние с единственной точкой $\zeta_{1/2}$ на сфере Блоха S^2 и двумя значениями конца единичного изовектора $\overline{OP'}$ в нижнем $|\downarrow\rangle$ ($\alpha_1 = 0$) и верхнем $|\uparrow\rangle$ ($\alpha_2 = 2\pi n$) (точнее в диаметрально противоположных) полюсах сферы S^2 (рис. 2а):

$$\mathbb{P}_{cor} \left(F \left(j = \frac{1}{2}, m, m' = \pm \frac{1}{2} \right) \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

2) $S = \hbar$. Двухмодовая бозонная система с двумя репрезентативными точками ζ_1 и состояниями спина – $|\uparrow, \uparrow\rangle$, $|\uparrow, \downarrow\rangle$, $|\downarrow, \uparrow\rangle$, $|\downarrow, \downarrow\rangle$ (рис. 2б):

$$\mathbb{P}_{cor} \left(F(j=1, m, m' = \pm 1) \right) = \cos^4 \frac{\alpha}{2} ,$$

$$\mathbb{P}_{cor} \left(F(j=1, m, m' = 0) \right) = \cos^2 \alpha .$$

3) $S = \frac{3}{2} \hbar$. Система с тремя точками $\zeta_{3/2}$ (рис. 2в):

$$\mathbb{P}_{cor} \left(F \left(j = \frac{3}{2}, m, m' = \pm \frac{3}{2} \right) \right) = \cos^6 \frac{\alpha}{2} ,$$

$$\mathbb{P}_{cor} \left(F \left(j = \frac{3}{2}, m, m' = \pm \frac{1}{2} \right) \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left[3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \right]^2 .$$

4) Общий случай $\left(j \geq \frac{1}{2} \right)$: $S = \frac{n}{2} \hbar$: $n = 1, 2, 3, \dots$ с $2S$ точками ζ_S :

$$\mathbb{P}_{cor} \left(F(S) \right) = \begin{cases} \cos^{4S} \frac{\alpha}{2} & |m|, |m'| = S_{\frac{n}{2}\hbar} \\ \frac{1}{G} \cos^{4(S-1)} \frac{\alpha}{2} \Psi_{(1)}^2(S) & |m|, |m'| = S_{\frac{n}{2}\hbar-1} \\ \frac{1}{G^2} \cos^{4(S-2)} \frac{\alpha}{2} \Psi_{(2)}^2(S) & |m|, |m'| = S_{\frac{n}{2}\hbar-2} \\ \dots & \dots \\ q_k \cos^{4(S-k)} \frac{\alpha}{2} \Psi_{(k)}^2(S) & |m|, |m'| = S_{\frac{n}{2}\hbar-k} \end{cases} , \quad (3^*)$$

$$\Psi_k^2(S) = C_k^{(j)} \cos^k \alpha + C_{k-1}^{(j-1)} \cos^{k-1} \alpha + \dots + C_1^{(2)} \cos^1 \alpha + C_0^{(1)} ,$$

$$q_k = G^{-k} , \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots , \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Для общего случая $\mathbb{P}_{cor} \left(F(S) \right)$ (3*) коэффициенты C_k^S имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
C_0^{(j)} = \{1, j_1 \\
C_1^{(j)} = 2 \begin{cases} 1-S, & j_1 \\ S, & j_2 \end{cases} \\
C_2^{(j)} = 2 \begin{cases} 2S^2 - 9S + 8, & j_1 \\ -2(2S^2 - 5S + 2), & j_2 \\ S(2S - 1), & j_3 \end{cases} \\
C_3^{(j)} = 2 \begin{cases} -3^{-1}(2S^3 - 21S^2 + 64S - 57), & j_1 \\ 2S^3 - 15S^2 + 31S - 18, & j_2 \\ -2S^3 - 9S^2 + 10S - 3, & j_3 \\ 3^{-1}(2S^3 - 3S^2 + S), & j_4 \end{cases} \\
C_4^{(j)} = 3^{-1} \begin{cases} 2^{-1}(4S^4 - 76S^3 + 491S^2 - 1283S + 1152), & j_1 \\ -2(4S^4 - 60S^3 + 299S^2 - 591S + 396), & j_2 \\ 3(4S^4 - 44S^3 + 155S^2 - 211S + 96), & j_3 \\ -2(4S^4 - 28S^3 + 59S^2 - 47S + 12), & j_4 \\ 2^{-2}(2S - 3)(2S - 2)(2S - 1)S, & j_5 \end{cases} \\
\vdots
\end{array} \right. \quad (4)$$

Как было указано выше, на рис. 2 на основе представления Майораны (1) приведено графическое описание ориентированных состояний ($\alpha(|\downarrow\rangle) = 0$, $\alpha(|\uparrow\rangle) = 2\pi n$, $n = 1, 2, 3, \dots$) квантовых спиновых систем (на примерах с $S = j\hbar$ ($j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$)), которые более удобны для проведения теоретических расчетов.

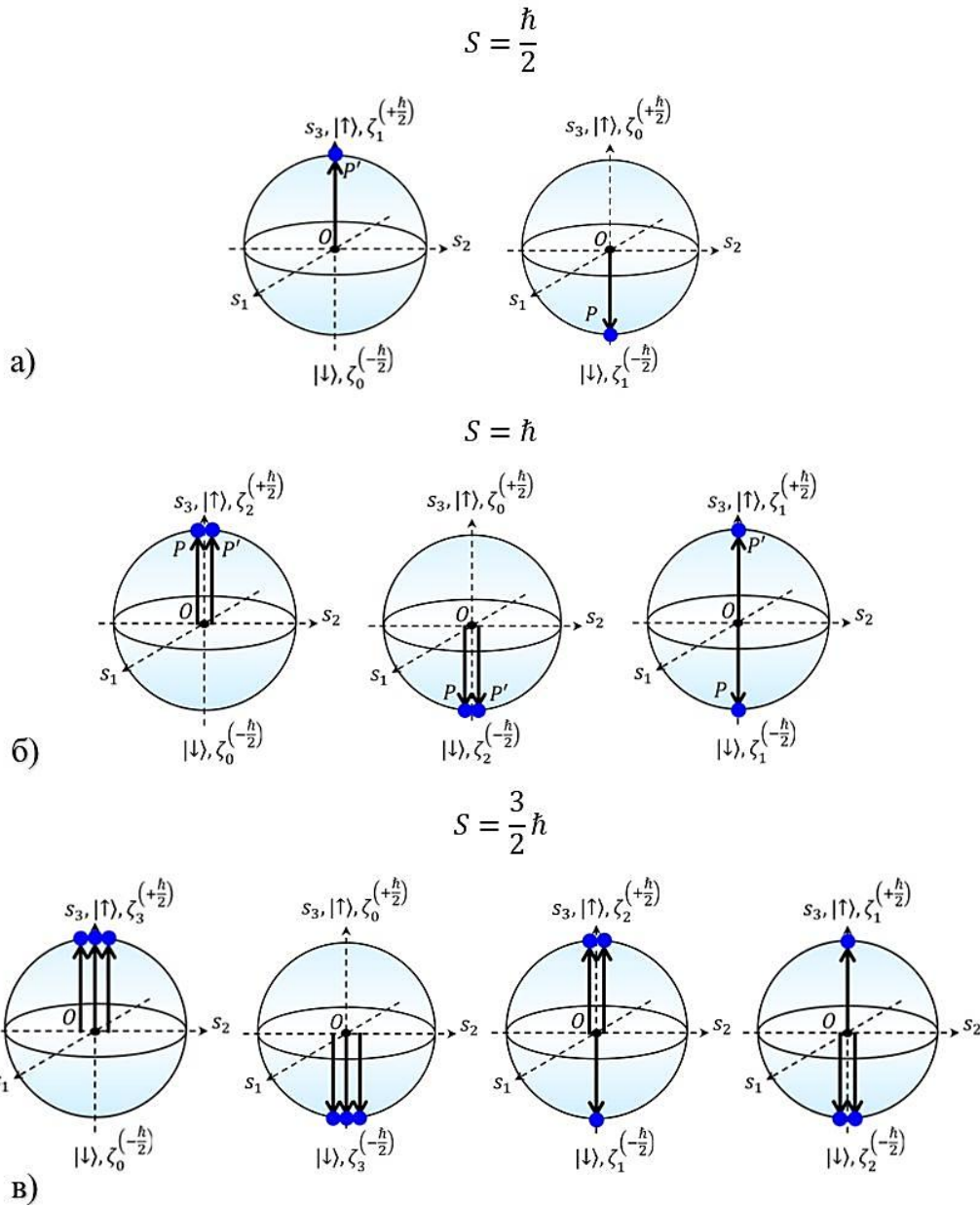


Рис. 2. Представление Майораны ориентированных квантовых спиновых систем в виде $2S$ симметричных состояний на сфере Блоха S^2 при: а) $S = \frac{1}{2} \hbar$; б) $S = \hbar$; в) $S = \frac{3}{2} \hbar$.

На рис. 3 приведено распределение значений $\mathbb{P}_{cor}(F(S))$ (3^*) – вероятности согласования ориентированных спиновых систем $|\psi\rangle_{(2S)}^{(j\hbar)}$ (2) при различных значениях S . С увеличением значений $\Delta_{j,m,m'} = |j| - |m|$ наблюдается сужение $E(\mathbb{P})$ – области значений $\mathbb{P}_{cor}(F(S))|_{2\pi k}$ (рис. 3а – рис. 3г), которая стремится к локализации по дискретным

значениям $2\pi k$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) (рис. 3д). При этом некоторые возмущения $E(\mathbb{P})$ (рис. 3б – рис. 3д), очевидно, являются следствием влияния полиномиальной функции $\Psi_k^2(S)$ (3*), (4).

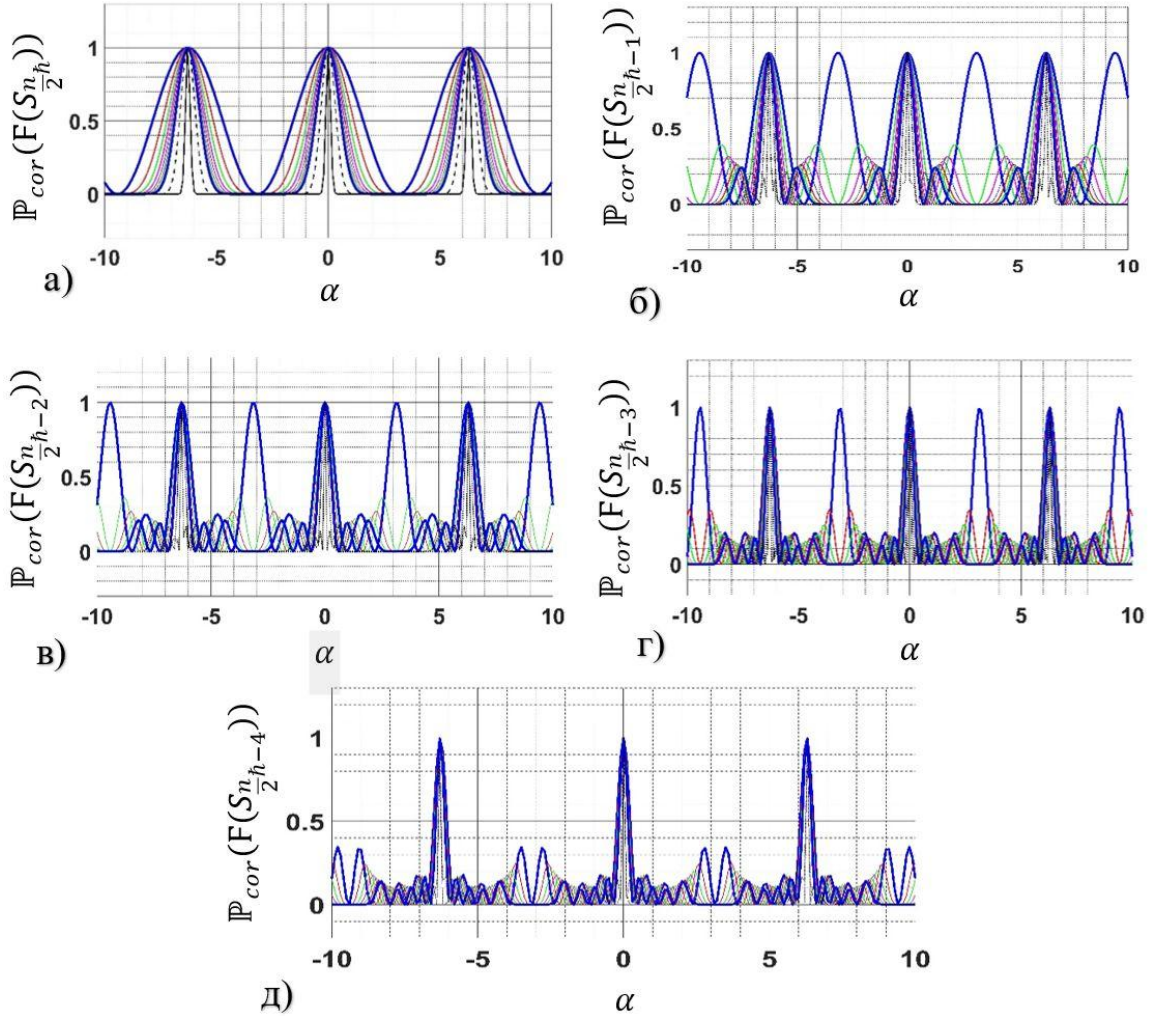


Рис. 3. Распределение значений $\mathbb{P}_{cor}(F(S))$ (3*) при различных значениях S :

$$\text{а) } \frac{n}{2}\hbar ; \text{б) } \frac{n}{2}\hbar - 1 ; \text{в) } \frac{n}{2}\hbar - 2 ; \text{г) } \frac{n}{2}\hbar - 3 ; \text{д) } \frac{n}{2}\hbar - 4 .$$

Заключение. Представление Майораны является эффективным, интуитивно понятным способом для исследования фундаментальных свойств многомерных квантовых состояний. Данный метод имеет также чрезвычайно широкий спектр практических и перспективных применений, начиная от квантовой оптики, позволяющей проектировать произвольные квантовые состояния из когерентных до высокоточной генерации распределенной многокубитной запутанности для крупномасштабных квантовых коммуникационных и вычислительных сетей [8, 9]. В настоящей работе представлены

результаты расчетов по применению метода Майораны для описания корреляционных функций, а также вероятности согласования ориентированных квантовых систем $|\psi\rangle_{(2S)}^{(j\hbar)}$ (2) при различных значениях спинового числа $S = j\hbar$. В частности, определен общий вид функции распределения вероятности согласования ориентированных спиновых систем $\mathbb{P}_{cor}(\mathbf{F}(S))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Su Y., Yao F., Liang H., Che Y., Fu L., Wang X. Majorana stellar representation for mixed-spin ($s, 1/2$) systems. – Chinese Phys. B 30, 2021, pp. 030303 (1–8).
2. Majorana E. Atomi orientati in campo magnetico variabile. – Nuovo Cim 9, 1932, pp. 43-50.
3. Шокиров Ф.Ш. Представление Майораны для квантовых спиновых систем. – Известия НАНТ, 2022, №1 (186), с. 62-70.
4. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Математическое моделирование нелинейных динамических систем квантовой теории поля: монография. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017, 375 с.
5. Bohnet-Waldraff F., Braun D., Giraud O. Quantumness of spin-1 states. – Physical Review A 93, 012104 (2016), 012104 (1-10).
6. Dogra S., Dorai K. Arvind. Majorana representation, qutrit Hilbert space and NMR implementation of qutrit gates. – J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 51 (2018) 045505 (1–11).
7. Liu H., Fu L., Wang X. Coherent-State Approach for Majorana Representation. – Commun. Theor. Phys., 2017, v. 67, №611, pp. 611-618.
8. Dogra S., Vepsalainen A., Paraoanu G.S. Majorana representation of adiabatic and superadiabatic processes in three-level systems. – Physical Review Research, 2020, v. 2, pp. 043079 (1–12).
9. Zhong, Y., Chang, HS., Bienfait, A. et al. Deterministic multi-qubit entanglement in a quantum network. Nature 590, 571–575 (2021). <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03288-7>.

Ф.ШОКИР

МОДЕЛСОЗИИ МАТЕМАТИКИИ СИСТЕМАҲОИ КВАНТӢ БО ҚИМАТИ БАЛАНДИ СПИН

*Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар ин мақола, бо истифода аз усули Майорана моделсозии математикии ҳолатҳои системаҳои квантӣ бо адади спинии $S = j\hbar$ гузаронида шудааст. Намуди функсияҳои коррелятсионии ҳолатҳои самтнок барои ҳолати умумии $j \geq \frac{1}{2}$ муайян карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: тафсири Майорана, сфераи Блох, тарҳрезии математикӣ, системаҳои квантӣ, спин, функсияҳои коррелятсионӣ.

F.SHOKIR

**MATHEMATICAL SIMULATION OF QUANTUM SYSTEMS
WITH HIGH SPIN**

S.U.Umarov Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Tajikistan

In this work, using the Majorana method, mathematical modeling of the state of quantum systems with spin number $S = j\hbar$ was performed. An expression for the correlation functions of oriented states in the general case $j \geq \frac{1}{2}$ is obtained.

Key words: Majorana representation, Bloch sphere, mathematical modeling, quantum systems, spin, correlation functions.

УДК 53; 536.6; 544.236.2

Д.С.КУЧАКШОЕВ, А.Г.ДЖАБАРОВ, А.ХОЛОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ СТЁКОЛ НА ОСНОВЕ БОРАТОВ ВИСМУТА

Физико-технический институт им. С.У. Умарова НАН Таджикистан

Поступила в редакцию 21.02.2022 г.

Создана экспериментальная установка с компьютерной регистрацией температуры образца в условиях непрерывного нагревания и охлаждения. Приведена методика определения удельной теплоёмкости, содержания аморфной и кристаллической фаз стёкол на основе боратов висмута, дана интерпретация некоторых наблюдаемых эффектов.

Ключевые слова: удельная теплоёмкость, стеклование, вязкость, аморфная и кристаллическая фазы, молекулярная подвижность, кластер.

Наши многочисленные попытки [1] и попытки других исследователей [2] в течение длительного времени получить кристаллизующиеся соединения на основе оксидов бора, висмута и натрия показали, что в широком наборе концентраций образуются многофазные системы, в которых не обнаружены тройные соединения В, Вi и Na. Тем не менее, было выяснено, например, что при концентрациях Bi_2O_3 в соединениях с тетраборатом натрия меньше 30 мольных процентов охлаждением расплава гомогенизированной смеси получают прозрачные стёкла [3], свойства которых зависят от состава и технологических факторов изготовления образцов (температура расплава, время выдержки расплава, скорость охлаждения при отливке образцов).

С целью изучения особенностей формирования стеклообразных образцов на основе боратов висмута с добавлением натрия была создана экспериментальная установка (схема приведена на рис.1), разработана методика определения температурной зависимо-

Адрес для корреспонденции: Кучакшоев Давлатназар Соибназарович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1. Физико-технический институт им. С.У. Умарова НАНТ, E-mail: k.davlat@mail.ru.

сти удельной теплоёмкости, которая определялась методом сравнения с теплоёмкостью эталона, не обладающего тепловыми эффектами в исследованном интервале температур.

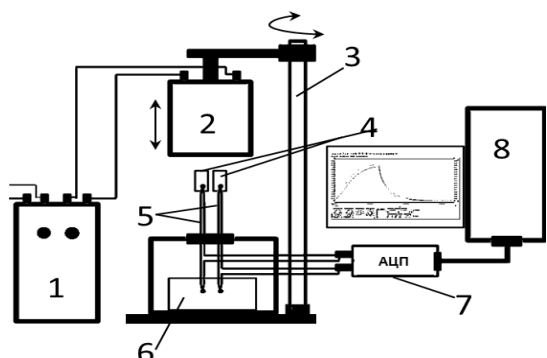


Рис. 1. Схема установки для определения удельной теплоёмкости твёрдых тел: 1 – источник питания нагревателя; 2 – нагреватель, закреплённый на подъёмно-поворотном механизме, установленном на вертикальной стойке; 3, 4 – платиновые тигли; 5 – дифференциальные термопары для измерения температуры образцов; 6 – термостат холодных спаев термопар; 7 – программируемый АЦП Disco2; 8 – компьютер.

Измерения проводились в условиях непрерывного охлаждения образцов в окружающую среду, которые соответствовали условиям охлаждения расплава при получении образцов от температуры расплава до комнатной температуры. В качестве эталона использовали пустой платиновый тигель, теплоёмкость которого во всём измеряемом интервале температур известна и заимствована из источника [4]. Небольшие кусочки бората висмутового образца стекла помещали в платиновый тигель с крышкой 4, предварительно измерив их массу. Тигель размещали на измерительном спае одной из термопар 5, опускали нагреватель 2, включали источник питания нагревателя 1 и запускали программу регистрации термо-ЭДС измерительных термопар, сигнал с которых через программируемый АЦП 7 подавался в USB порт компьютера 8. Сигнал регистрировался в непрерывном режиме и отражался на экране монитора в виде временной зависимости термо-ЭДС. Затем сохранённые данные в виде текстового файла подвергались дальнейшей математической обработке и анализу в математическом пакете OriginLab 2015.

На рис. 2 приведён пример расчёта температурных зависимостей: модуля скоростей охлаждения эталонного образца (пустой платиновый тигель) V_t и исследованного стеклообразного образца состава $2\text{Bi}_2\text{O}_3 + \text{V}_2\text{O}_3$ в платиновом тигле V_x ; удельных теплоём-

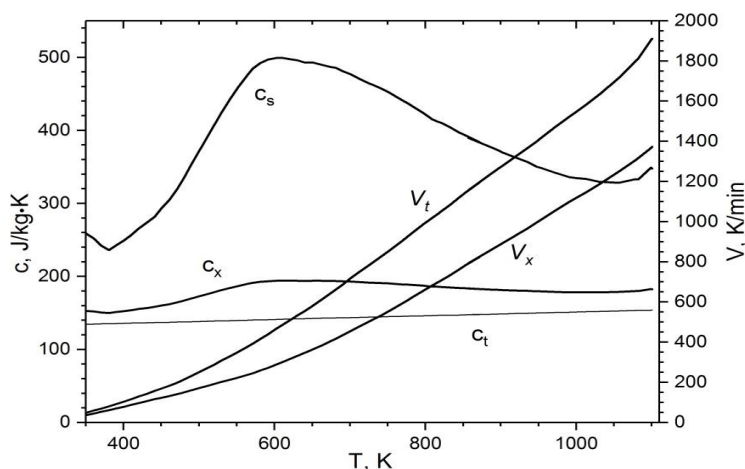


Рис. 2. Пример расчёта температурных зависимостей $c_t(T)$, $c_x(T)$, $c_s(T)$, $V_t(T)$, $V_x(T)$.

костей тигля с образцом c_x и образца c_s по известной температурной зависимости удельной теплоёмкости эталона (платины) c_t .

Расчёты основаны на известном уравнении Ньютона-Рихмана [5]

$$dQ = -\alpha \cdot (T - T_0) \cdot dS \cdot dt \quad (1)$$

или, поскольку $dQ = c \cdot \rho \cdot dV \cdot dT$, можно записать

$$c \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = -\alpha \cdot (T - T_0) \cdot S \quad (2)$$

$$c \cdot m \cdot \frac{dT}{dt} = -\alpha \cdot (T - T_0) \cdot S \quad .$$

Перепишав последнее уравнение для пустого тигля (соответствующие величины обозначим индексом t) и тигля с образцом (индекс x), полагая, что $\alpha_t \approx \alpha_x$, получим выражение для расчёта удельной теплоёмкости c_x тигля с образцом:

$$c_x = c_t \frac{m_t \left(\frac{dT}{dt} \right)_t}{m_x \left(\frac{dT}{dt} \right)_x} \quad (3)$$

Из свойства аддитивности теплоёмкости следует, что $C_x = C_t + C_s$ или

$$c_x \cdot m_x = c_s \cdot m_s + c_t \cdot m_t \quad (4)$$

Тогда искомая удельная теплоёмкость образца может быть рассчитана по формуле:

$$c_s = \frac{c_x \cdot m_x - c_t \cdot m_t}{m_s} \quad (5)$$

На рис. 2 кривая c_x рассчитана по формуле (3), а кривая c_s – по формуле (5).

Кривые, представленные на рис. 3, также рассчитаны по формуле 5 и изображены как температурные зависимости удельной теплоёмкости, отнесённые к её максимальному значению стеклообразных и кристаллических образцов, отличающихся по химическому составу и физическим свойствам.

Подробно особенности поведения температурной зависимости удельной теплоёмкости по каждой группе соединений будут рассмотрены в следующих статьях. В данной работе изложены общие замечания о влиянии релаксационных процессов и скорости охлаждения расплава на процессы стеклования, формирования структуры образцов и на значения рассчитываемой теплоёмкости.

Рассмотрим следующие группы веществ: 1 – $\alpha \cdot \text{Vi}_2\text{O}_3 + (1-\alpha) \cdot \text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$; 2 – $1 \cdot (2\text{B}_2\text{O}_3 - \text{Vi}_2\text{O}_3) + \beta \cdot \text{NaOH}$; 3 – $1 \cdot (\text{B}_2\text{O}_3 - 2\text{Vi}_2\text{O}_3) + \beta \cdot \text{NaOH}$. На рис. 3 кривые 1, 6 и 9 соответствуют исходным веществам $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$, $2\text{B}_2\text{O}_3 - \text{Vi}_2\text{O}_3$ и $\text{B}_2\text{O}_3 - 2\text{Vi}_2\text{O}_3$ в своих группах, к которым добавляли Vi_2O_3 (в 1 группе) и NaOH (во 2 и 3 группах). Все кривые, представленные на рис. 3, проходят через максимум. Его величина и положение зависят от состава и структуры образцов. Ниспадающий участок со стороны низких температур, начиная от температуры максимума (температуры стеклования), соответствует процессу стеклования образцов при их охлаждении. Стеклование характеризует процесс замораживания коллективной подвижности большой группы атомов – кластеров (по литературным данным состоящих из 100-150 атомов в неорганических стёклах [6]). Времена релаксации, характерные для таких кластеров при температурах в области стеклования составляют сотни секунд. При температурах выше температуры стеклования в неорганических стёклах, и боратных в частности, наблюдается высокоэластичное состояние, проявляющееся в способности к большим упругим деформациям без вязкого течения, которое проявляется при ещё больших температурах. Полагают, что молекулярные процессы в высокоэластичном состоянии и в условиях вязкого течения характеризуются подвижностью тех же молекулярных кластеров, которые определяют специфику процессов стеклования.

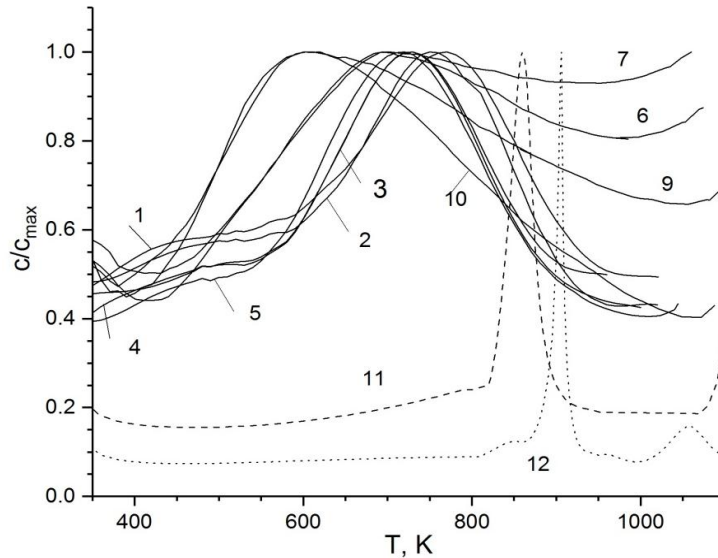


Рис. 3. Температурные зависимости относительной удельной теплоёмкости c/c_{\max} . Стёкла: $\alpha \cdot \text{Vi}_2\text{O}_3 + (1-\alpha) \cdot \text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$: $\alpha_1=0$, $\alpha_2=10$, $\alpha_3=20$, $\alpha_4=30$, $\alpha_5=30\%$; $1 \cdot (2\text{B}_2\text{O}_3 - \text{Vi}_2\text{O}_3) + \beta \cdot \text{NaOH}$: $\beta_6=0$, $\beta_7=4\%$; $1 \cdot (\text{B}_2\text{O}_3 - 2\text{Vi}_2\text{O}_3) + \beta \cdot \text{NaOH}$: $\beta_9=0$, $\beta_{10}=30\%$. Здесь α и β – мольные доли. Кристаллы: $\text{Vi}_{24}\text{B}_2\text{O}_{39}$ – 11; Vi_2O_3 – 12.

Из трёх исходных веществ наибольшей вязкостью (наименьшей подвижностью) обладает расплав (850°C) $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$, наименьшей – $2\text{B}_2\text{O}_3 - \text{Vi}_2\text{O}_3$. Вязкость расплава оценивалась визуально по скорости течения расплава при его переливании из платинового тигля в керамический. Из рис. 3 видно, что чем меньше вязкость (больше подвижность) тем

выше располагается высокотемпературный участок максимума удельной теплоёмкости, приближаясь к действительным значениям теплоёмкости, которые для неорганических стёкол при температурах выше температуры стеклования превышают значения удельной теплоёмкости при температуре стеклования. Как следует из рис. 2, молекулярные процессы на рассматриваемом высокотемпературном участке протекают при больших скоростях охлаждения от начальной скорости ~ 1400 К/мин до ~ 300 К/мин в области максимума удельной теплоёмкости. При таких скоростях охлаждения подвижность кластеров, состоящих из большого числа атомов, для $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$ оказывается замороженной, а вклад в теплоёмкость вносят локальные колебания молекул, которые имеют место при комнатной температуре и далёкой от температуры стеклования. В этом случае, как видно из рис. 3, расчётная удельная теплоёмкость оказывается близкой к комнатной. В случае $\alpha \cdot \text{Bi}_2\text{O}_3 + (1 - \alpha) \cdot \text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$ и $1 \cdot (2\text{B}_2\text{O}_3 - \text{Bi}_2\text{O}_3) + \beta \cdot \text{NaOH}$ в силу меньшей вязкости и меньших времён релаксации подвижность больших молекулярных кластеров оказывается замороженной частично, что приводит к значительному увеличению рассчитываемой удельной теплоёмкости (значительно превышающей значения вблизи комнатной температуры) в условиях проведения эксперимента при больших скоростях охлаждения. По мере уменьшения температуры образцов скорость охлаждения также существенно уменьшается, происходит постепенное «размораживание» подвижности молекулярных кластеров, а удельная теплоёмкость растёт. Так продолжается до температуры стеклования. При меньших температурах с ростом времён релаксации наступает процесс структурного стеклования. При температурах выше температуры стеклования введение в состав стёкол натрия (рис. 3) приводит к двум эффектам: введение больших концентраций натрия в стёкла всех трёх групп (кривые 2, 3, 4, 5 и 10) приводит к увеличению вязкости и уменьшению расчётной (кажущейся) удельной теплоёмкости до значений при температурах близких к комнатной; введение малых добавок натрия (до 4-5%, кривая 7) даёт эффект уменьшения вязкости (повышается подвижность, однородность, уменьшается кристалличность, проявляется разрыхляющее действие натрия), что приводит к значительному росту удельной теплоёмкости.

Свободное охлаждение бората висмутовых стёкол в окружающую среду, которое протекает при больших скоростях охлаждения, приводит, во-первых, в силу ярко выраженных релаксационных процессов к значительному уширению интервала температур процесса стеклования. Во-вторых, приводит к подавлению молекулярной подвижности кластеров в высокотемпературной области, следствием чего является занижение значений удельной теплоёмкости по сравнению со значениями, полученными при стандартных скоростях нагрева. В-третьих, сочетание больших времён релаксации, больших скоростей охлаждения сказывается на молекулярной структуре получаемых образцов, образуются неоднородности, различного характера, образуется аморфная (стеклообразная) и кристаллическая фазы.

Для кристаллических веществ в этих условиях температурная зависимость удельной теплоёмкости обнаруживает максимумы в узкой области температур. На рис. 3 максимумы теплоёмкости на кривой 11 при 859 К и при 1055 К на кривой 12 соответствуют процессу кристаллизации соединения $\text{Vi}_{24}\text{V}_2\text{O}_{39}$ и Vi_2O_3 в α -форме, соответственно. Кристаллизация протекает в режиме переохлаждённой жидкости. Наблюдаемые температуры кристаллизации на 39 К в случае $\text{Vi}_{24}\text{V}_2\text{O}_{39}$ и на 35 К в случае α -формы Vi_2O_3 меньше температур кристаллизации в условиях медленного охлаждения. Полуширина этих максимумов значительно больше максимума на кривой 12 при 905К, который соответствует фазовому переходу Vi_2O_3 в γ -форму (его температура близка к температуре 908 К перехода δ -формы в γ -форму). Уширение максимумов свидетельствует о вкладе релаксационных процессов в кристаллизацию $\text{Vi}_{24}\text{V}_2\text{O}_{39}$ и Vi_2O_3 в α -форму.

Содержание аморфной фазы χ_a в получаемых образцах определяли по рентгеновским дифрактограммам, как отношение площадей фона (A_f) и спектра A_s , которые рассчитывали с помощью программ Search-Match и OriginLab – $\chi_a = \frac{A_f}{A_s}$, $\chi_{cr} = 1 - \chi_a$, где χ_{cr} – содержание кристаллической фазы.

Поскольку дифрактограммы получали порошковым методом, то рассчитанное содержание аморфной фазы оказывалось несколько завышенным, содержание кристаллической фазы, наоборот, заниженным. В связи с этим такое определение этих величин носит оценочный характер.

Пример определения площадей приведён на рис.4.

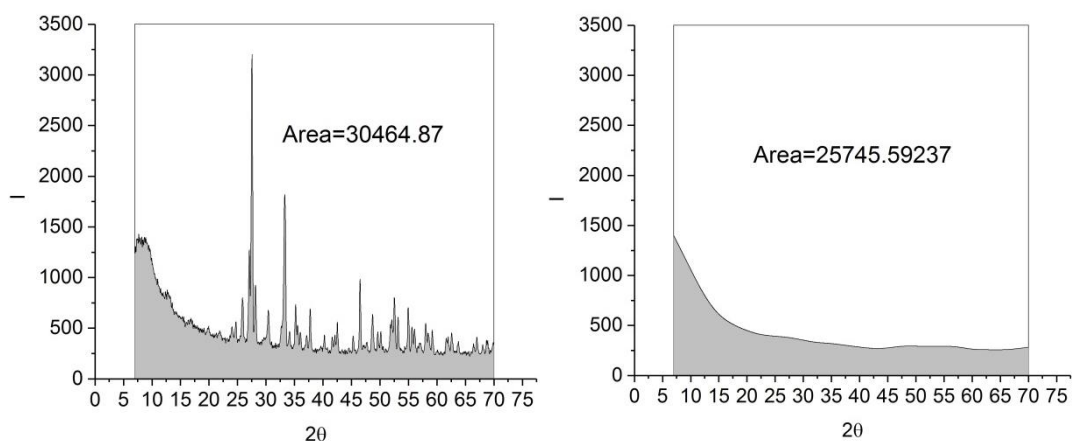


Рис. 4. Пример расчета площадей спектра (слева) и фона (справа).

В связи с высказанными выше замечаниями становится очевидным необходимость дополнительного отжига (длительной выдержки) образцов при температурах близких к температуре стеклования для образования однородной структуры получаемых стёкол.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кучакшоев Д.С., Джабаров А.Г. Дифференциально-термический анализ бинарной системы $\text{Bi}_2\text{O}_3 + \text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$. – ДАН РТ, 2015, т. 58, №12, с.1096-1099.
2. Каргин Ю.Ф., Егорышева А.В. Фазовые взаимоотношения в системе $\text{Na}_2\text{O}-\text{Bi}_2\text{O}_3-\text{B}_2\text{O}_3$. – ЖНХ, 2005, т. 50, № 12, с. 2068-2071.
3. Кучакшоев Д.С., Джабаров А.Г., Холов А. Свойства стёкол на основе соединений Bi_2O_3 и $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$. – ДАН РТ, 2020, т. 63, №7-8, с. 488-493.
4. Зиновьев В.И. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. Справ., изд., – М.: Металлургия, 1989, 384 с.
5. Дульнев Г. Н., Тихонов С. В. Основы теории тепломассообмена. – СПб: СПб ГУИТМО, 2010, 93с.
6. Сандитов Д.С., Бартенев Г.М. Физические свойства неупорядоченных структур. – Новосибирск: Наука, 1982, 258 с.

Д.С.КУЧАКШОЕВ, А.Г.ЧАББОРОВ, А.ХОЛОВ

МУАЙЯН КАРДАНИ ГАРМИҒУНҶОИШИ ХОСИ ШИШАҶО ДАР АСОСИ БОРАТҶОИ ВИСМУТ

*Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дастгоҳи таҷрибавӣ бо ба қайдгирии компютери ҳарорати намуна дар шароити гармкунӣ ва хунуккунӣ бефосила сохта шудааст. Усули муайян кардани гармиғунҷоиши хос, таркиби фазаҳои аморфӣ ва кристаллии шишаҷо дар асоси боратҳои висмут пешниҳод карда шуд, баъзе аз таъсири мушоҳидашуда шарҳ дода шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: гармиғунҷоиши хос, гузариши шишагӣ, часпакӣ, фазаҳои аморфӣ ва кристаллӣ, ҳаракатнокии молекулавӣ, кластер.

D.S.KUCHAKSHOEV, A.G.DZHABAROV, A.KHOLOV

SPECIFIC HEAT CAPACITY DETERMINATION GLASSES BASED ON BISMUTH BORATES

S.U.Umarov Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Tajikistan

An experimental setup with computer registration of the sample temperature under conditions of continuous heating and cooling has been created. A technique for determining the specific heat capacity, the content of amorphous and crystalline phases of glasses based on bismuth borates is presented, and some observed effects are interpreted.

Key words: specific heat capacity, glass transition, viscosity, amorphous and crystalline phases, molecular mobility, cluster.

УДК 541.123.6

М.Т.ЖУМАЕВ, Л.СОЛИЕВ

**СТРОЕНИЕ ДИАГРАММЫ ФАЗОВОГО КОМПЛЕКСА СИСТЕМЫ
Na,Mg||SO₄,Cl-H₂O ПРИ 0°C**

*Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни
Поступила в редакцию 11.02.2022 г.*

Методом трансляции исследованы диаграммы строения фазового комплекса системы Na,Mg||SO₄,Cl-H₂O при 0°C. Установлено, что для исследованной системы при 0°C характерно наличие 2 невариантных точек, 5 моновариантных кривых и 4 дивариантных поля. На основе полученных данных впервые построена её диаграмма фазового комплекса при данной температуре.

Ключевые слова: диаграмма, фазовый комплекс, невариантные точки, моновариантные кривые, дивариантные поля.

Сульфаты и хлориды натрия и магния являются составными частями морских и океанических вод, а также продуктами испарения этих вод (соляные залежи). Поэтому данная четырёхкомпонентная система является составной частью более сложной шестикомпонентной взаимной системы Na,K,Mg,Ca||SO₄,Cl-H₂O известная как «морская». Закономерности строения фазового комплекса системы Na,Mg||SO₄,Cl-H₂O, других четырёх- и пятикомпонентных систем, составляющих основы вышеприведённой шестикомпонентной системы, определяют условия растворения и кристаллизации соответствующих солей. Знания этих закономерностей необходимы для создания оптимальных температурных и концентрационных параметров переработки этих вод и соляных залежей.

Система Na,Mg||SO₄,Cl-H₂O при 0°C исследована методом растворимости [1]. Как показывает опыт, работы по экспериментальному изучению многокомпонентных систем требуют значительных, материальных и временных затрат, а также сложности в установ-

Адрес для корреспонденции: Жумаев Маъруфжон Тагоймуротович. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки 121, Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни. E-mail: soliev.litfullo@yandex.com; jumaev_m@bk.ru

лении фазового состава осадков из-за их многообразия. Поэтому, является целесообразным предварительное прогнозирование возможных фазовых равновесий в таких системах, что позволит значительно уменьшить эти временные и материальные затраты. Для этой цели нами использован метод трансляции [2], который вытекает из принципа совместности элементов строения n и $n+1$ компонентных систем в одной диаграмме [3, 4]. Метод трансляции позволит на основании данных о фазовых равновесиях в частных n – компонентных системах прогнозировать возможные фазовые равновесия на геометрических образах общей $n+1$ компонентной системы и с учетом правила фаз Гиббса, а также основных принципов физико-химического анализа [5] построить диаграмму ее фазового комплекса.

Четырёхкомпонентная взаимная система $\text{Na, Mg} \parallel \text{SO}_4, \text{Cl} - \text{H}_2\text{O}$ включает следующие трёхкомпонентные системы: $\text{Na}_2\text{SO}_4 - \text{MgSO}_4 - \text{H}_2\text{O}$; $\text{NaCl} - \text{MgCl}_2 - \text{H}_2\text{O}$; $\text{Na}_2\text{SO}_4 - \text{NaCl} - \text{H}_2\text{O}$ и $\text{MgSO}_4 - \text{MgCl}_2 - \text{H}_2\text{O}$. Они при 0°C исследованы методом растворимости [6], и для них характерны следующие инвариантные точки с равновесными твёрдыми фазами (табл. 1).

Таблица 1

Фазовые равновесия в инвариантных точках системы $\text{Na, Mg} \parallel \text{SO}_4, \text{Cl} - \text{H}_2\text{O}$ при 0°C на уровне трёхкомпонентных составов

Инвариантные точки	Равновесные твёрдые фазы	Инвариантные точки	Равновесные твёрдые фазы
Система $\text{Na}_2\text{SO}_4 - \text{MgSO}_4 - \text{H}_2\text{O}$		Система $\text{Na}_2\text{SO}_4 - \text{NaCl} - \text{H}_2\text{O}$	
E_1^3	Мб + Mg·12	E_3^3	Га + Мб
Система $\text{NaCl} - \text{MgCl}_2 - \text{H}_2\text{O}$		Система $\text{MgSO}_4 - \text{MgCl}_2 - \text{H}_2\text{O}$	
E_2^3	Би + Га	E_4^3	Би + Эпс

В табл. 1 и далее E – обозначение инвариантной точки, где верхний индекс указывает на кратность точки, а нижний индекс – на порядковый номер точки. Приняты следующие условные обозначения равновесных твёрдых фаз: Мб – мирабилит $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$; Би – бишофит $\text{MgCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$; Га – галит NaCl ; Mg·12 - $\text{MgSO}_4 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$; Эпс – эпсомит $\text{MgSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$.

На основании данных табл. 1 можно построить диаграмму фазового комплекса исследуемой системы в виде «развёртки» четырёхгранной призмы (рис. 1).

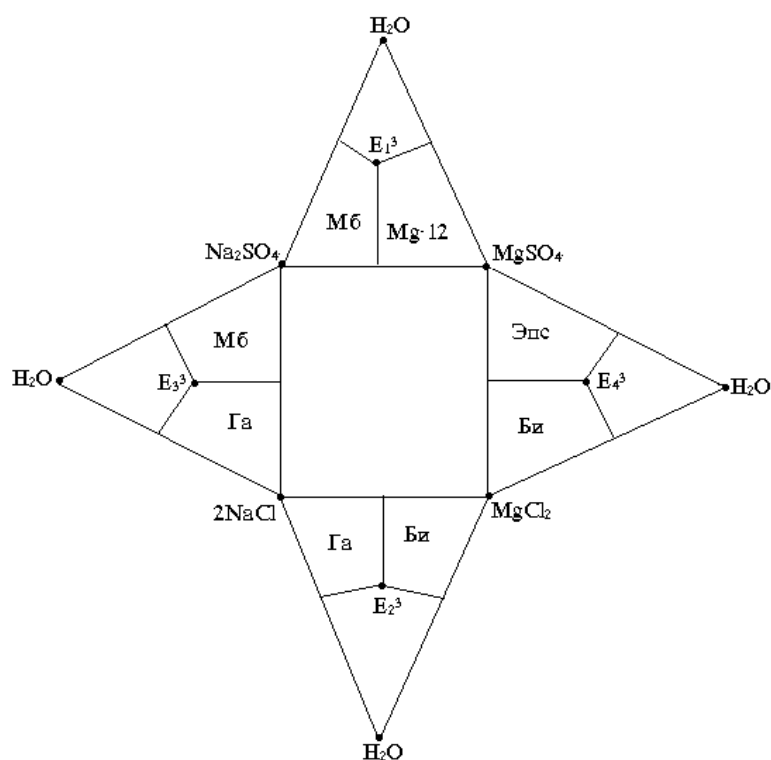
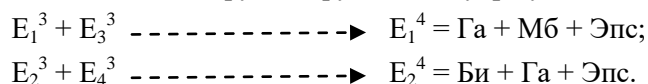


Рис. 1. Диаграмма фазового комплекса системы $\text{Na, Mg}||\text{SO}_4, \text{Cl-H}_2\text{O}$ при 0°C на уровне трёхкомпонентного состава в виде «развёртки» призмы.

При переходе системы с n -компонентного состояния в $n+1$ компонентное состояние (в нашем случае с 3-х компонентного состояния в четырёхкомпонентное состояние) геометрические образы (точки, кривые, поля) n – компонентных систем трансформируются (точки превращаются в кривые, кривые – в поля и т.д.). Трансформированные геометрические образы транслируются (переносятся) на уровень четырёхкомпонентного состава и, пересекаясь (согласно требованиям правила фаз Гиббса и своих топологических свойствах), образуют элементы строения системы на $n+1$ компонентном уровне. Например, пересечение моновариантных кривых, образованных из невариантных точек трёхкомпонентных систем при трансляции их на уровень четырёхкомпонентного состава, математически можно выразить как сочетания тройных невариантных точек разноимённых систем, отличающихся друг от друга на одну фазу:



Как видно из табл. 1 и рис. 1 сульфат магния в трёхкомпонентной системе $\text{Na}_2\text{SO}_4\text{-MgSO}_4\text{-H}_2\text{O}$ находится как равновесная твёрдая фаза в виде $\text{MgSO}_4 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$. При переходе системы из 3-х компонентного в четырёхкомпонентное эта фаза под воздействием хлорида магния как очень гигроскопического вещества, теряет часть своей кристаллизационной воды и превращается в $\text{MgSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ (эпсомит).

Графическая трансляция геометрических образов исследуемой системы с трёхкомпонентного уровня на четырёхкомпонентный уровень показана на рис. 2.

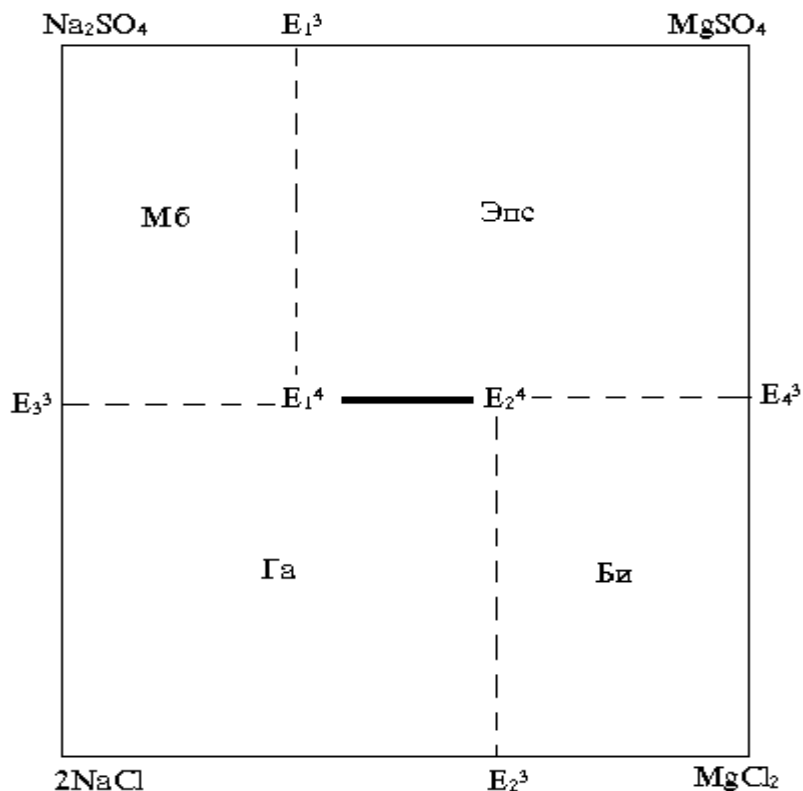
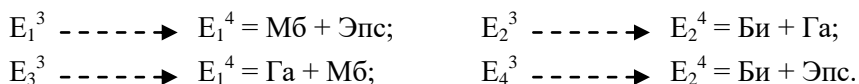


Рис. 2. Совмещенная диаграмма фазового комплекса системы $\text{Na, Mg}||\text{SO}_4, \text{Cl}-\text{H}_2\text{O}$ при 0°C , построенная методом трансляции.

На рис. 2 совмещены элементы строения (точки, кривые, поля) системы $\text{Na, Mg}||\text{SO}_4, \text{Cl}-\text{H}_2\text{O}$ при 0°C на уровнях трёх-четырёхкомпонентного составов. В частности пунктирные линии со стрелками отражают моновариантные кривые, образованные при трансляции невариантных точек уровня четырёхкомпонентного состава, где стрелки указывают на направления трансляции. Фазовый состав осадков на них идентичен фазовому составу транслированных тройных невариантных точек:



Моновариантная кривая, проходящая между четверными невариантными точками, характеризуется следующим фазовым составом осадков:



Построенную схематическую диаграмму фазового комплекса системы $\text{Na, Mg}||\text{SO}_4, \text{Cl}-\text{H}_2\text{O}$ при 0°C методом трансляции (рис. 2) можно фрагментировать по дивариантным полям [7], где будут отражены контуры поля кристаллизации отдельных равновесных твёрдых фаз (табл. 2).

Таблица 2

Равновесные твёрдые фазы и контуры дивариантных полей системы $\text{Na, Mg} \parallel \text{SO}_4, \text{Cl} - \text{H}_2\text{O}$ при 0°C

Равновесные твёрдые фазы полей	Контуры полей на диаграмме (рис. 2)	Равновесные твёрдые фазы полей	Контуры полей на диаграмме (рис. 2)
Мб		Эпс	
Га		Би	

Таким образом, строение фазового комплекса системы $\text{Na, Mg} \parallel \text{SO}_4, \text{Cl} - \text{H}_2\text{O}$ при 0°C показывает, что для неё при данной температуре характерно наличие двух четверных инвариантных точек, которые соответствуют равновесным твёрдым фазам с насыщенным раствором, пяти моновариантных кривых, отраженных равновесными двумя твёрдыми фазами с насыщенным раствором и четырёх дивариантных полей, которые соответствуют равновесиям индивидуальных твёрдых фаз (составным части системы) с насыщенными этими фазами растворов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник экспериментальных данных по растворимости многокомпонентных водно-солевых систем. т. II., кн. 1-2. – СПб.: Химиздат, 2004, 1248 с.
2. Солиев Л. Прогнозирование диаграмм фазовых равновесий многокомпонентных водно-солевых систем методом трансляции. – М.: Деп. в ВИНТИ АН СССР, 1987, № 8990-В87, 1987, 28 с.
3. Горощенко Я.Г. Физико-химический анализ гомогенных и гетерогенных систем. – Киев: Наукова думка, 1978, 490 с.
4. Горощенко Я.Г. Массцентрический метод изображения многокомпонентных систем. – Киев: Наукова думка, 1982, 264 с.
5. Аносов В.Г. Озерова М.И., Фиалков Ю.Я. Основы физико-химического анализа. – М.: Наука, 1976, 503 с.
6. Справочник экспериментальных данных по растворимости многокомпонентных водно-солевых систем. т. I., кн. 1-2. – СПб.: Химиздат, 2004, 1152 с.
7. Солиев Л. Схематические диаграммы фазовых равновесий многокомпонентных систем, - Журнал неорганической химии, 1988, т.33, № 5, с.1305-1310.

М.Т.ЖУМАЕВ, Л.СОЛИЕВ

СОХТОРИ ДИАГРАММАИ КОМПЛЕКСИ ФАЗАГИИ СИСТЕМАИ

Na,Mg||SO₄,Cl-H₂O ДАР ҲАРОРАТИ 0°C

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айнӣ

Бо ёрии усули транслятсия сохтори комплекси фазагии системаи Na,Mg||SO₄,Cl-H₂O барои ҳарорати 0°C омӯхта шудааст. Муқаррар карда шудааст, ки барои системаи омӯхташуда дар ҳарорати 0°C 2 нуқтаи нонвариантӣ, 5 хатти моновариантӣ ва 4 майдони дивариантӣ хос мебошад. Дар асоси маълумотҳои ба дастоварда маротибаи аввал диаграммаи комплекси фазагии он барои ҳарорати додашуда сохта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: диаграмма, комплекси фазагӣ, нуқтаҳои нонвариантӣ, хатҳои моновариантӣ, майдонҳои дивариантӣ.

М.Т.ЖУМАЕВ, L.SOLIEV

STRUCTURE OF THE DIAGRAM OF THE PHASE COMPLEX

OF THE SYSTEM Na,Mg||SO₄,Cl-H₂O AT 0°C

S.Ainy Tajik State Pedagogical University

Using the translation method, the phase equilibria of the Na,Mg||SO₄,Cl-H₂O system at 0°C were studied. It has been established that the system under study at 0°C is characterized by the presence of 2 invariant points, 5 monovariant curves, and 4 divariant fields. Based on the data obtained, its diagram at a given temperature was firstly constructed.

Key words: diagram, phase complex, invariant points, monovariant curves, divariant fields.

УДК 539.01-539.12;621.039

М.Д.БОБОЁРОВ, К.О.БОБОЕВ, Х.М.НАЗАРОВ, Б.Б.БАРОТОВ, У.М.МИРСАИДОВ

**ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ УРАНОВЫХ РУД МЕСТОРОЖДЕНИЙ
ТАДЖИКИСТАНА**

*Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности
НАН Таджикистана*

Поступила в редакцию 06.04.2022 г.

Приводятся результаты исследований химического и минералогического состава урановых руд месторождений Таджикистана. Установлено, что основными минералами руд являются кварц, альбит, мусковит, пирит, уранинит и урановая слюда.

Ключевые слова: месторождения, минералы, силикат, уран, кварц, проба, анализ, радионуклид.

Поиски промышленных урановых руд в Таджикистане начались в 1940-х годах и вскоре увенчались открытием целого ряда месторождений. До этого момента на севере республики с 1926 года было известно месторождение урансодержащих руд Табошар, из руд которого периодически добывался радий.

В 1940 году наличие урана было также установлено на месторождении Адрасман, где с середины 30-х годов прошлого века добывался висмут [1-3].

Наличие урановых руд в Табошарском и Адрасманском районах северного Таджикистана сразу выдвинуло данные территории, как приоритетные по организации промышленной добычи и переработке этих руд [4].

В настоящее время запасы богатого уранового сырья в северном Таджикистане истощены. Истощение запасов богатых металлами руд требует развития технологий, направленных на разработку бедных месторождений. Перспективным становится получение урановых концентратов из хвостов и забалансовых бедных руд.

Целью работы является изучение характерных особенностей урановых руд месторождений Таджикистана.

Адрес для корреспонденции: Бобоёров Мехровар, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по ХБРЯ безопасности НАНТ. E-mail: info@nrso.tj

Изучение вещественного и химического состава урановых руд проводилось с использованием рентгено-флуоресцентного анализа (РФА) на вакуумном спектрометре типа AxiosmAXAdvanced и при помощи рентгеновского дифрактометра ULTIMA-IV фирмы Rigaku (производство Японии). Минералогический состав урановых руд месторождения «Западный Таджикистан» определяли рентгенофазовым анализом на приборе ДРОН-3 с цифровой обработкой на медном аноде (35 кВ и 20 мА) и никелевым фильтром. Основными минералами руды являются кварц, альбит, мусковит, пирит, уранинит и урановая слюда (рис.1).

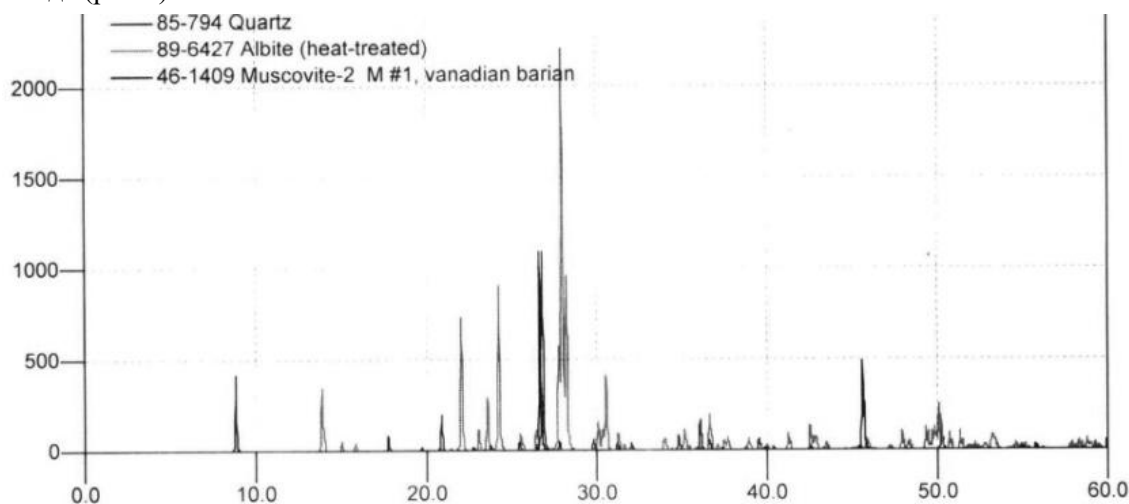


Рис. 1. Рентнограмма руды месторождения «Западный Таджикистан» до выщелачивания.

Для определения радионуклидного состава руды месторождения «Западный Таджикистан» был проведен гамма-спектрометрический анализ на гамма-спектрометре Канберра с полупроводниковым детектором и цифровой обработкой Жени 2000. Результаты обработки спектра приведены в табл.1.

Таблица 1

Радионуклидный состав руды месторождения «Западный Таджикистан»

Радионуклиды	Средневзвешенная активность, кБк/кг
⁴⁰ K	4.687399E-001
²¹² Pb	4.273295E-002
²¹⁴ Bi	1.591636E+001
²¹² Bi	3.230948E-002
²¹⁴ Pb	1.369677E+001
²²⁶ Ra	3.269666E+001
²²⁷ Th	7.211119E-001
²²⁸ Ac	5.077794E-002
²³¹ Pa	4.435027E-001
²³⁵ U	6.201537E-001
²³⁸ U	2.109164E+000

С учётом того, что руда является силикатной, для её выщелачивания можно порекомендовать серноокислотный метод.

Для определения радионуклидного состава урановых руд месторождения «Северный Таджикистан-2» также был проведен гамма-спектрометрический анализ на гамма-спектрометре Канберра. Результаты обработки спектра приведены в табл. 2.

Основными минералами руды месторождения «Северный Таджикистан-2» являются кварц, альбит, ортоклаз и урановая слюда (рис. 2 и табл. 3).

Содержание урана в руде составляет 0.2%. С учётом того, что руда является силикатной, для её выщелачивания можно рекомендовать сернокислотный метод.

Также изучался состав урановых руд месторождения «Центральный Таджикистан». Результаты рентгено-дифракционного анализа проб 635 и 660 приведены в табл. 5.

Таблица 2

Радионуклидный состав урановых руд месторождения «Северный Таджикистан-2»

Радионуклиды	Средневзвешенная активность, Бк/кг	
	руда	отвал
^{40}K	-	951±39
^{210}Pb	3927±557	1520±215
^{211}Bi	333±12	-
^{212}Bi	164±9	37±2
^{212}Pb	309±19	64±4
^{214}Bi	4548±48	2380±25
^{214}Pb	5015±152	2277±67
^{219}Rn	258±14	152±8
^{226}Ra	5551±927	2864±341
^{227}Th	250±9	120±4
^{228}Ac	270±5	58±1
^{228}Th	408±470	2742±274
^{231}Pa	108±6	40±2
^{231}Th	48±6	-
^{234}Pa	10±3	-
$^{234}\text{Pa-M}$	1835±326	577±67
^{234}Th	7448±749	900±107
^{235}U	300±12	62±4
$^{238}\text{U+dau}$	4734±345	699±51

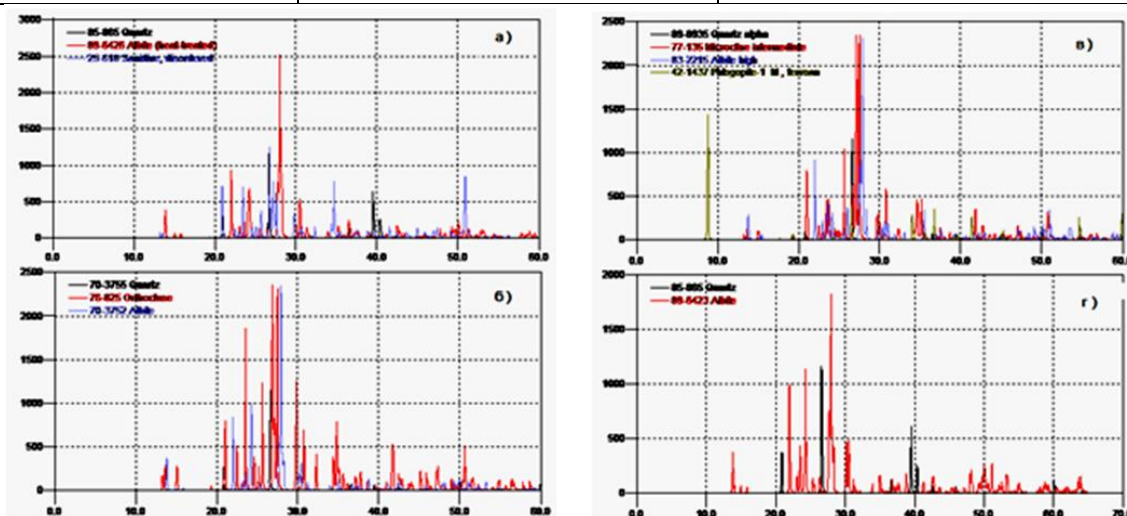


Рис. 2. Рентгенограмма урановой руды месторождения «Северный Таджикистан-2».

Таблица 3

Минералогический состав проб, отобранных из месторождения
«Северный Таджикистан-2»

Наименование проб	Минерал	Содержание, %		
		№1	легкая фракция	серый
Руда	Кварц – SiO ₂	87.67	90.64	92.99
	Альбит – Na(AlSi ₃ O ₈)	12.33	-	-
	Альбит – (K _{0.88} Na _{0.10} Ca _{0.009} Ba _{0.012})(Al _{1.005} Si _{2.995} O ₈)	-	2.48	-
	Ортоклаз – (Na _{0.98} Ca _{0.02})(Al _{1.02} Si _{2.98} O ₈)	-	6.88	-
	Альбит – K(Si _{0.75} Al _{0.25}) ₄ O ₈	-	-	1.67
	Микроклин – K _{0.2} Na _{0.8} AlSi ₃ O ₈	-	-	2.09
	Флогопит – K(Mg, Fe) ₃ (Al, Fe)Si ₃ O ₁₀ (OH,F) ₂	-	-	3.25
Отвал	Кварц – SiO ₂	88.16	-	-
	Альбит – Na(AlSi ₃ O ₈)	11.84	-	-

Таблица 4

Содержание элементов в составе проб, отобранных из месторождения
«Северный Таджикистан-2»

Наименование проб	Содержание элементов											
	Sr	Pb	As	Zn	Cu	Ni	Co	Mn	V	Cr	Fe ₂ O ₃	U*
	мг/кг											%
Руда	174	-	4	864	43	14	19	144	72	94	2	0.16
Отвал	165	526	123	177	37	6	4	144	79	94	5	0.06

Примечание: *Содержание урана определено объемным методом.

Таблица 5

Минералогический состав проб 635 и 660, отобранных из месторождения
«Центральный Таджикистан»

Проба 635		Проба 660	
Минерал	%	Минерал	%
Кварц	36.1	Кварц	34.5
Кальцит	6.9	Кальцит	3.0
Плагиоклазы (альбит)	23.2	Плагиоклазы (альбит)	30.7
Магнетит	1.1	Плагиоклазы (анортит)	2.9
Гематит	1.3	Магнетит	1.7
И/С ССМ*	25.5	И/С ССМ*	21.0
Хлорит	6.0	Хлорит	6.3

Примечание: *Иллит-сметит - смешаннослойный минерал с преобладанием иллитовых межслоёв.

На рис. 3 отражены зависимости интенсивности от угла вращения для проб 635 и 660.

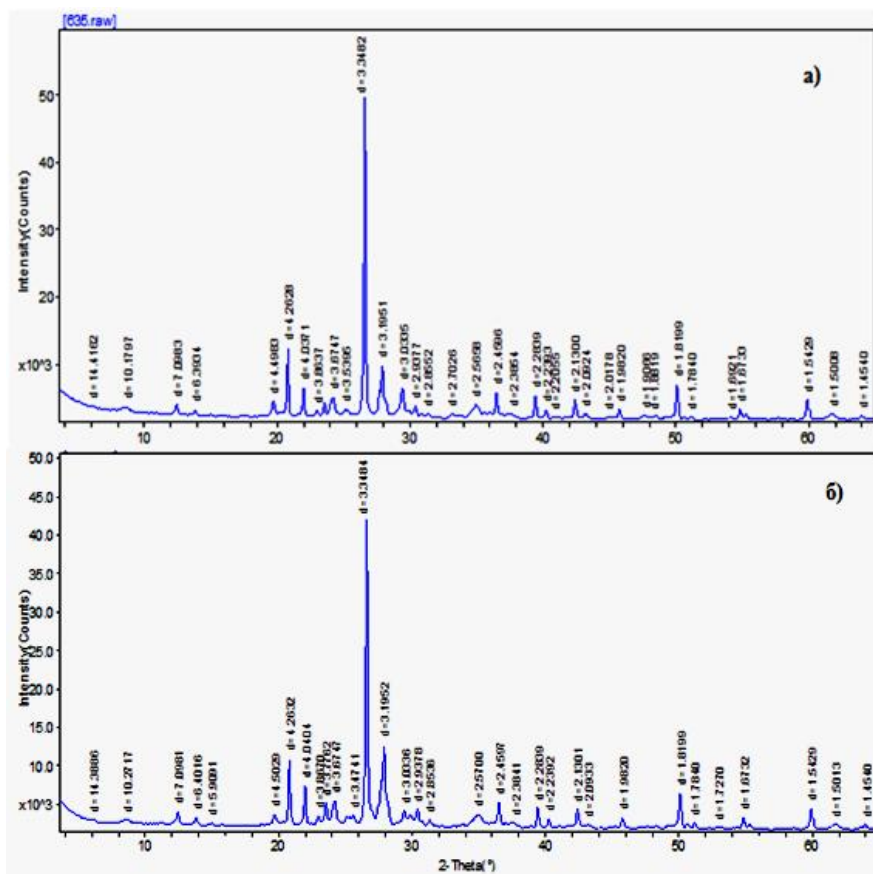


Рис. 3. Зависимости интенсивности от угла вращения для проб 635 (а) и 660 (б).

Из приведённых в табл. 5 данных можно сделать вывод, что урановая руда месторождения «Центральный Таджикистан» является силикатной и пригодна для серноокислотно-выщелачивания.

С целью уточнения удельной активности урана в пробах из данного месторождения использовался гамма-спектрометрический анализ. Для анализа было взято шесть проб из разных канав месторождения, однако расчёт по результатам анализа был проведён только для изотопов урана. Результаты определения удельной активности изотопов урана (с указанием погрешностей измерения) представлены в табл. 6.

На гамма-спектрометре производства «Baltic Scientific Instruments» калибровка по энергии проводилась с использованием стандартного препарата, содержащего радионуклид ^{228}Th , излучающий гамма-кванты в энергетическом диапазоне от 20 до 3000 кэВ. Анализ гамма-спектров и расчёт активности исследуемого радионуклида выполнялся с использованием программного обеспечения «SpectraLineGP». Программа входит в состав семейства продуктов Lsrm2010.

Таблица 6

Результаты измерения удельной активности изотопов урана на гамма-спектрометре
Canberra

Наименование проб	Удельная активность, Бк/кг	
	^{235}U	^{238}U
К-629	61.44±6.85	-
К-635	1494.16±156.49	63865±8498.5
К-647	211.20±13.86	22914.56±7284.06
К-649	225.9±8.23	49296.68±4647.18
К-659	2553.14±78.81	496035.8±41104.74
К-660	4221.07±125.24	792335.1±62259.54

Идентификация радионуклидов проводилась по энергии гамма-линий и их интенсивности. Определение энергии и интенсивности гамма-линий осуществлялось с помощью калибровочных кривых. Перечень определяемых нуклидов ограничивался теми нуклидами, гамма-линии которых имели квантовый выход не менее 1-3%. Результаты определения удельной активности изотопов урана (с указанием погрешностей измерения) представлены в табл.7. Данные табл. 7 показывают, что удельная активность изотопов урана в пробах месторождения «Центральный Таджикистан» очень высока.

Таблица 7

Результаты измерения удельной активности изотопов урана на гамма-спектрометре
Baltic Scientific Instruments

Наименование проб	Удельная активность, Бк/кг	
	^{235}U	^{238}U
К-635	1510±139	64235±9019
К-647	223±14	21900±7370
К-629	70±8	15268±1603
К-649	213±10	48700±4867
К-659	2590±88	493324±42109
К-660	4300±120	770544±63762

Заключение

По химическому и минералогическому составу урановые руды месторождений Таджикистана относятся в основном к силикатным и карбонатным.

Удельная активность изотопов урана в некоторых пробах, отобранных из различных месторождений Таджикистана, относительно высока. Это позволяет в дальнейшем рассматривать данные месторождения в качестве объектов для переработки урановых руд.

ЛИТЕРАТУРА

1. Негин Е.А. и [др.]. Советский атомный проект. – Нижний Новгород-Арзамас-16: Изд-во «Нижний Новгород», 1995, 205 с.
2. Соболев А.И., Коренков И.П., Вербов В.В. и [др.]. Естественные, антропогенные и техногенные источники облучения человека. – М.: Прима, 1995, 92 с.

3. Mirsaidov U., Khakimov N. From History of Reception of Nature Uranium. – International Conference on Fifty Years of Nuclear Power – the Next Fifty Years. – Obninsk, 2004. – Door of Extended Synopses. – М., 2004, pp.162-163.
4. Разыков З.А., Гусаков Э.Г., Марущенко А.А. и [др.]. Урановые месторождения Таджикистана. – Худжанд: ООО «Хуросон», 2001, 212 с.

М.Д.БОБОЁРОВ, К.О.БОБОЕВ, Х.М.НАЗАРОВ, Б.Б.БАРОТОВ, У.М.МИРСАИДОВ
ХУСУСИЯТҲОИ КОНҲОИ МАЪДАНҲОИ УРАНДОРИ ТОҶИКИСТОН

Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии АМИ Тоҷикистон

Натиҷаҳои таҳқиқоти химиявӣ ва минерологии таркиби маъданҳои урандори Тоҷикистон нишон дода шудаанд. Муайян карда шудааст, ки минералҳои асосии таркиби маъдан кварс, албит, мусковит, пирит, уранинит ва слюдаи уран.

Калимаҳои калидӣ: кон, минералҳо, силикат, уран, кварс, намуна, таҳлил, радионуклид.

M.D.BOBOYOROV, K.O.BOBOEV, KH.M.NAZAROV, B.B.BAROTOV, U.M.MIRSAIDOV
**CHARACTERISTIC FEATURES OF URANIUM ORE DEPOSITS IN
TAJIKISTAN**

Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety and Security Agency NAS Tajikistan

The results of the studies chemical and mineralogical composition of uranium ores from Tajikistan deposits are presented. It has been identified that the main ore minerals are quartz, albite, muscovite, pyrite, uraninite and uranium mica.

Key words: deposits, minerals, silicate, uranium, quartz, sample, analysis, radionuclide.

УДК 544.273+542.92+536.722+536.421

Р.Дж.АКРАМЗОДА, Ф.А.НАЗАРОВ, М.М.ТАГОЕВ, А.С.КУРБОНОВ, А.С.ДАВЛАТОВ

**ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССОВ
РАЗЛОЖЕНИЯ БОРНОГО СЫРЬЯ ПУТЁМ АКТИВАЦИИ С NaOH И CaCl₂**

Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана

Поступила в редакцию 14.02.2022 г.

Приведены результаты влияния температуры на значения энергии Гиббса рассматриваемых процессов. Представлены зависимости ΔG от температуры процесса переработки борных руд месторождения Ак-Архар спеканием со щёлочью и хлоридом кальция. Рассчитана энергия активации соответствующих протекающих процессов.

Ключевые слова: термодинамические характеристики, разложение, минералы, активация, энергия Гиббса.

Метод активации минерального сырья путём спекания с различными реагентами является перспективным методом [1-6]. В работах [1, 2] найдены оптимальные параметры разложения боросиликатных руд с использованием NaOH для исходной борной руды и концентрата борной руды.

Авторы работ [1, 7] изучили кинетику разложения исходного и предварительно обожжённого борного сырья при спекании с NaOH, рассчитали энергию активации протекающих процессов, которая соответственно была равна 16.78 и 14.39 кДж/моль, что свидетельствует о протекании данных процессов в диффузионной и кинетической областях значений.

Также проведены исследования кинетики разложения концентрата и предварительно обожжённого концентрата боросиликатного сырья при спекании с NaOH [1, 3]. Найдены величины энергии активации данных процессов, которые составили, соответст-

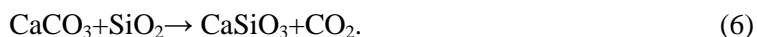
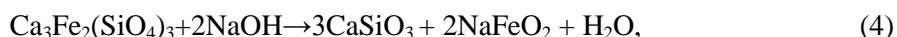
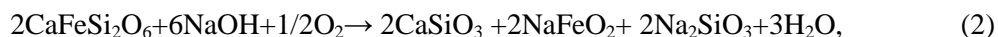
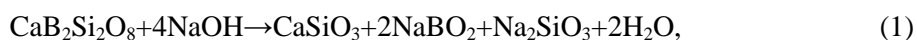
Адрес для корреспонденции: Акрамзода Рустами Джурахон, 734063, г. Душанбе, Республика Таджикистан, ул. Айни, 299/2. Институт химии им. В.И.Никитина НАНТ. E-mail: akramzoda.rustam.91@mail.ru

венно, 15.10 и 14.11 кДж/моль, таким образом, данные процессы протекают в диффузионной области значений.

Проведена разработка принципиальной технологической схемы по переработке боросиликатного сырья месторождения Ак-Архар спекательно-щелочным методом, включающая следующие этапы: обжиг сырья при температуре от 900 до 950°C, спекание со щёлочью, выщелачивание водой при 80°C, фильтрация полученной пульпы, кристаллизация полученных при разложении продуктов, их разделение и высушивание [1].

В работах [1, 5] приведены результаты термодинамического анализа процесса переработки боросиликатных руд месторождения Ак-Архара спеканием со щёлочью.

При переработке боросиликатных руд Ак-Архара щёлочью вероятно протекание процессов разложения минералов, входящих в состав боросиликатных руд, которые выражаются следующими уравнениями:



Значения термодинамических характеристик компонентов рассматриваемых систем [8] приведены в табл.1. Расчёты произведены по следующим уравнениям:

$$\Delta H_p^0 = \sum \Delta fH_{\text{кон.продукт}}^0 - \sum \Delta fH_{\text{исх.вещ-во}}^0,$$

$$\Delta S_p^0 = \sum \Delta S_{\text{кон.продукт}}^0 - \sum \Delta S_{\text{исх.вещ-во}}^0,$$

$$\Delta G_p^0 = \Delta H_p^0 - T\Delta S_p^0.$$

Таблица 1

Термодинамические характеристики веществ

№	Вещество	$\Delta_f H_{298}^0$, кДж/моль	S_{298}^0 , Дж/моль·град
1	$\text{CaB}_2\text{Si}_2\text{O}_8$ _{кр}	-3882.75	154.8
2	$\text{CaBSiO}_4(\text{OH})$ _{кр}	-2465.60	110.0
3	$\text{CaFeSi}_2\text{O}_6$ _{кр}	-2849.30	166.5
4	$\text{Ca}_3\text{Fe}_2(\text{SiO}_4)_3$ _{кр}	-5806.56	341.0
5	$\text{NaAl}_3\text{H}_2\text{Si}_3\text{O}_{12}$	-5932.50	284.5
6	CaCO_3 _{кр}	-1206.83	91.7
7	CO_2 _{газ}	-393.50	213.6
8	H_2O _ж	-285.84	70.0
9	SiO_2 _{кр}	-905.40	43.5
10	NaOH _{кр}	-425.93	64.43
11	CaSiO_3 _{кр}	-1635.23	80.75
12	NaBO_2 _{кр}	-976.13	73.51
13	Na_2SiO_3 _{кр}	-1563.56	113.8
14	NaFeO_2 _{кр}	-698.48	88.28
15	NaAlO_2 _{кр}	-1134	70.71
16	O_2 _г	0	205

Результаты расчёта термодинамических характеристик предполагаемых реакций (1)-(6) в исследуемых системах приведены в табл. 2.

Таблица 2

Термодинамические характеристики рассматриваемых реакций

№ реакции	ΔH_{298}^0 , кДж/моль	ΔS_{298}^0 , Дж/моль·град	ΔG_{298}^0 , кДж/моль
(1)	-135.02	69.05	-155.597
(2)	-395.38	-47.92	-383.1
(3)	-5.67	49.93	-20.5193
(4)	69.93	19.81	64.02662
(5)	-181.94	103.59	-212.81
(6)	83.17	159.85	35.5347

Из табл.2 видно, судя по значениям энергии Гиббса, что при стандартных условиях термодинамическую вероятность самопроизвольного протекания имеют реакции (1), (2), (3) и (5). Вероятности протекания процессов (1) и (5) способствуют энтальпийный и энтропийный факторы. Для реакции (2) доминирующим является энтальпийный фактор при отрицательном влиянии энтропийного фактора. Для реакции (3) с повышением температуры возрастает положительное влияние энтропийного фактора на вероятность протекания процесса.

Значения энергии Гиббса процессов (4) и (6) указывают о термодинамической невозможности протекания их при стандартных условиях. Повышение температуры способствует протеканию этих процессов, но для (6) в большей степени, в силу большого значения энтропийного фактора.

В табл. 3 приведены результаты влияния температуры на значения энергии Гиббса рассматриваемых процессов. На рис.1 представлены зависимости ΔG от температуры процесса переработки боратных руд месторождения Ак-Архар спеканием со щёлочью и хлоридом кальция.

Таблица 3

Значения энергии Гиббса (ΔG^0 , кДж/моль) при различных температурах

№ реакции	ΔG_{473}^0	ΔG_{573}^0	ΔG_{673}^0	ΔG_{773}^0	ΔG_{873}^0	ΔG_{973}^0	ΔG_{1073}^0	ΔG_{1173}^0	ΔG_{1223}^0
(1)	-167.68	-174.59	-181.49	-188.40	-195.30	-202.21	-209.11	-216.02	-219.47
(2)	-374.71	-369.92	-365.13	-360.33	-355.55	-350.75	-345.96	-341.17	-338.77
(3)	-29.24	-34.22	-39.21	-44.19	-49.17	-54.15	-59.14	-64.12	-66.61
(4)	60.56	58.58	56.60	54.62	52.64	50.66	48.67	46.69	45.70
(5)	-230.94	-241.30	-251.66	-262.01	-272.37	-282.73	-293.09	-303.45	-308.63
(6)	7.56	-8.42	-24.41	-40.39	-56.38	-72.36	-88.35	-104.33	-112.33

Как видно из табл. 3 и рис.1, повышение температуры способствует протеканию всех рассматриваемых процессов, за исключением реакции (2). Для реакции (6) начало самопроизвольного протекания наступает при температуре $T=573$ К. Значение этой температуры определено по формуле $\Delta G_p^0 = \Delta H_p^0 - T\Delta S_p^0 = 0$.

Исследовано также разложение концентрата борной руды спеканием с CaCl_2 . Термодинамический анализ процесса спекания с CaCl_2 также показывает, что повышение температуры способствует протеканию процессов получения CaB_2O_4 и CaSiO_3 [1-3].

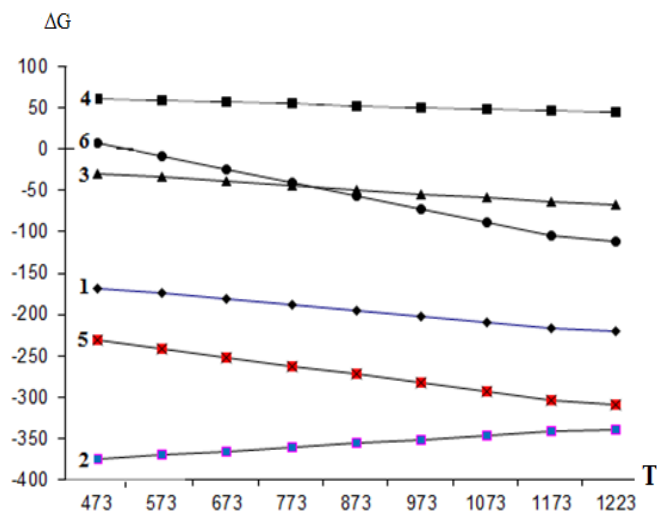
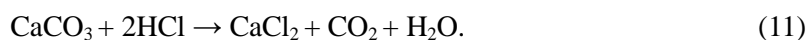
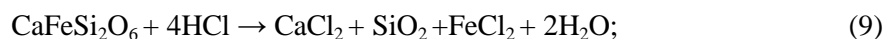
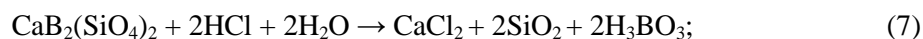


Рис. 1. Зависимости ΔG от температуры: 1 – данбурит, 2 – пироксены, 3 – датолит, 4 – гранат, 5 – гидрослюда, 6 – кальцит.

В работах [9, 10] в качестве активатора использовали хлорид кальция и активированный уголь. При спекании боросиликатных руд в присутствии хлорида кальция, угля и кислорода воздуха происходит разрушение внутренних конструкций упорных минералов, при этом частично образуются бораты и силикаты кальция, которые легко растворяются в минеральных кислотах. Термическую обработку смеси боросиликатной руды, хлорида кальция и активированного угля проводили при температуре 800-850°C. При этом протекают следующие реакции:



В табл. 4 и 5 представлены рассчитанные для каждой реакции термодинамические характеристики процесса.

Таблица 4

Расчёт термодинамических реакций, протекающих при взаимодействии минералов боросиликатной руды с HCl

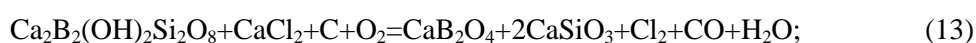
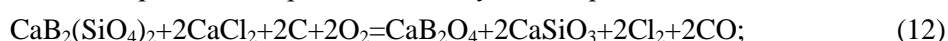
№	ΔH_{298}^0 , кДж/моль	ΔS_{298}^0 , Дж/моль·град	ΔG_{298}^0 , кДж/моль
(7)	1244.67	-32.36	1254.16
(8)	349.84	63.62	331.19
(9)	1236.92	59.48	1219.48
(10)	2763.46	98.72	2734.52
(11)	411.13	233.23	342.76

Таблица 5

Значения энергии Гиббса (ΔG^0 , кДж/моль) рассматриваемых реакций при различных температурах

№ реакции	ΔG^0_{298}	ΔG^0_{308}	ΔG^0_{318}	ΔG^0_{328}	ΔG^0_{338}	ΔG^0_{348}	ΔG^0_{358}	ΔG^0_{368}
(7)	1254.156	1254.48	1254.804	1255.127	1255.451	1255.774	1256.098	1256.422
(8)	331.1898	330.5536	329.9174	329.2812	328.645	328.0088	327.3726	326.7364
(9)	1219.483	1218.889	1218.294	1217.699	1217.104	1216.509	1215.915	1215.32
(10)	2734.52	2733.533	2732.546	2731.559	2730.571	2729.584	2728.597	2727.61
(11)	342.7586	340.4263	338.094	335.7617	333.4294	331.0971	328.7648	326.4325

При совместном спекании боросиликатных руд месторождения Ак-Архар с хлоридом кальция имеется вероятность протекания следующих процессов:



Значения термодинамических характеристик компонентов рассматриваемых систем приведены в табл. 6. Расчёты произведены по следующим уравнениям:

$$\Delta H^0_p = \sum \Delta_f H^0_{\text{кон.продукт}} - \sum \Delta_f H^0_{\text{исх. вещ-во}}$$

$$\Delta S^0_p = \sum \Delta S^0_{\text{кон.продукт}} - \sum \Delta S^0_{\text{исх. вещ-во}}$$

$$\Delta G^0_p = \Delta H^0_p - T\Delta S^0_p.$$

Таблица 6

Термодинамические характеристики веществ

№	Вещество	$\Delta H^0_{\text{обр}}$, кДж/моль	S^0 , Дж/моль·град
1	$\text{CaB}_2\text{Si}_2\text{O}_{8\text{кр}}$	-3882.75	154.80
2	$\text{Ca}_2\text{B}_2(\text{OH})_2\text{Si}_2\text{O}_8$	-2465.60	110.00
3	$\text{CaMgB}_6\text{O}_{11} \cdot 6\text{H}_2\text{O}_{\text{кр}}$	-6479.73	366.50
5	C	0	5.740
6	O ₂	0	205.04
7	CO _{газ}	-393.50	213.60
8	H ₂ O _{газ}	-241.80	188.70
9	SiO _{2кр}	-905.40	43.50
10	CaCl ₂	-796.30	108.37
11	CaB ₂ O ₄	-2031.08	105.02
12	CaSiO ₃	-1635.23	80.75
13	Cl ₂	0	222.98
14	MgCl ₂	-644.80	89.54
15	Fe ₂ O ₃	-822.16	87.45
16	CaAl ₂ O ₄	-2326.18	114.22
17	CO	-110.52	197.54

Как следует из значений табл. 6, что, судя по значениям энергии Гиббса, при стандартных условиях термодинамическую вероятность самопроизвольного протекания имеют реакции (12)-(14). Вероятности протекания процессов (12) и (14) способствуют энтальпийный и энтропийный факторы.

Результаты расчёта термодинамических характеристик предполагаемых реакций (12)-(14) в исследуемых системах приведены в табл. 7.

Таблица 7

Термодинамические характеристики рассматриваемых реакций

№ реакции	ΔH^0_{298} , кДж/моль	ΔS^0_{298} , Дж/моль·град	ΔG^0_{298} , кДж/моль
(12)	-47.23	314.50	-140.95
(13)	-209.38	352.66	-314.47
(14)	-965.11	1172.50	-1314.52

В табл. 8 приведены результаты влияния температуры на значения энергии Гиббса рассматриваемых процессов. Как видно из табл. 8 и рис. 2, повышение температуры способствует протеканию всех рассматриваемых процессов. Значение этой температуры определено по формуле: $\Delta G_p^0 = \Delta H_p^0 - T\Delta S_p^0 = 0$.

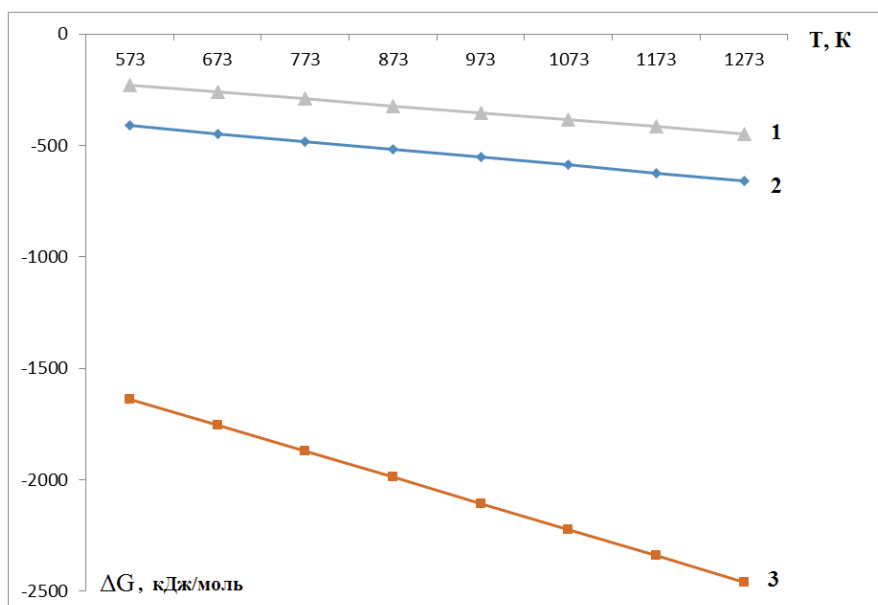


Рис. 2. Зависимости ΔG от температуры разложения минералов борсодержащей руды:

1 – данбурит, 2 – даголит, 3 – гидроборцит.

Таблица 8

Значения энергии Гиббса (ΔG^0 , кДж/моль) при различных температурах

№ реакции	ΔG^0_{573}	ΔG^0_{673}	ΔG^0_{773}	ΔG^0_{873}	ΔG^0_{973}	ΔG^0_{1073}	ΔG^0_{1173}	ΔG^0_{1273}
(12)	-227.439	-258.889	-290.339	-321.789	-353.239	-384.689	-416.139	-447.589
(13)	-411.454	-446.72	-481.986	-517.252	-552.518	-587.784	-623.05	-658.316
(14)	-1636.95	-1754.2	-1871.45	-1988.7	-2105.95	-2223.2	-2340.45	-2457.7

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров Ф.А. Спекательно-щелочная переработка боросиликатных руд Таджикистана: автореф. дис. ... канд. хим. наук. – Душанбе, 2018.
2. Курбонов А.С., Назаров Ф.А., Давлатов Д.О. [и др.]. Спекательный способ переработки концентрата борсодержащей руды Таджикистана в присутствии едкого натрия. – ДАН РТ, 2017, т.60, №5-6, с.242-246.
3. Курбонов А.С., Назаров Ф.А., Мисратов Ж.А. [и др.]. Сравнительная оценка разложения боросиликатных руд кислотами и щёлочью. – Изв. АН РТ, 2016, №4(165), с.71-75.
4. Назаров Ф.А., Курбонов А.С., Якубов З.Т. [и др.]. Кинетика процесса спекания обожжённого боросиликатного концентрата с NaOH. – ДАН РТ, 2017, т.60, №7-8, с.329-332.
5. Назаров Ф.А., Курбонов А.С., Баротов А.М. [и др.]. Переработка боросиликатной руды методом спекания. – ДАН РТ, 2017, т.60, №7-8, с.329-332.
6. Курбонов А.С., Назаров Ф.А., Назаров Ш.Б. [и др.]. Термодинамический анализ процессов, протекающих при спекании боросиликатных руд со щёлочью. – ДАН РТ, 2017, т.60. № 11-12. с.583-586.
7. Назаров Ф.А., Курбонов А.С., Якубов З.Т. [и др.]. Кинетика процесса спекания обожжённой исходной боросиликатной руды в присутствии NaOH. – ДАН РТ, 2017, т.60, №11-12, с.583-586.
8. Термодинамические константы веществ: Справочник под ред. В.П. Глушко. – М., 1978, с.521.
9. Курбонов А.С., Якубов З.Т., Назаров Ф.А. [и др.]. Хлорное и кислотное разложение боросиликатных руд Таджикистана. – VIII Международная научно-практическая конференция «Перспективы развития науки и образования». – Душанбе, 2016, с.23-25.
10. Мирсаидов У.М., Сафиев Х.С. Комплексная переработка низкокачественного алюмосодержащего сырья: Монография. – Душанбе, 1998.

Р.Ҷ.АКРАМЗОДА, Ф.А.НАЗАРОВ, М.М.ТАҒОЕВ, А.С.ҚУРБОНОВ, А.С.ДАВЛАТОВ

ТАВСИФИ РАВАНДҲОИ ТЕРМОДИНАМИКИИ ТАҶЗИЯИ МАЪДАНҲОИ БОРДОШТА БО РОҶИ ФАОЛГАРДОНИ БО NaOH ВА CaCl₂

Институти кимиёи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон

Натиҷаҳои таъсиррасонии ҳарорат ба бузургии энергияи Гиббси равандҳои баррасишаванда оварда шудааст. Вобастагии ΔG аз ҳарорати раванди коркарди маъдани боросиликатиҳои кони Ак-Архар, гудозиш бо ишқор ва хлориди калсий оварда шудааст. Энергияи фаълшавии гузариши равандҳои дахлдор ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: тавсифи термодинамикӣ, таҷзия, минералҳо, фаълшавӣ, энергияи Гиббс.

R.J.AKRAMZODA, F.A.NAZAROV, M.M.TAGOEV, A.S.KURBONOV, A.S.DAVLATOV

**THERMODYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE DECOMPOSITION
PROCESSES OF BORON RAW MATERIAL BY ACTIVATION WITH
NaOH AND CaCl₂**

V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National Academy of Sciences of Tajikistan

The results of temperature impact to the values of Gibbs energy of the considered processes are presented. The dependences of ΔG on the temperature of the process of during processing of borate ores from the Ak-Arkhar deposit by baking with alkali and calcium chloride are presented. The activation energy of the relevant ongoing processes is calculated.

Key words: thermodynamic characteristics, decomposition, minerals, activation, Gibbs energy.

УДК 553.078.4 +553.412 (575.3)

Ф.А.ФАЙЗИЕВ

**ЛИТОЛОГО-ПЕТРОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКТОР РАЗМЕЩЕНИЯ
СЕРЕБРЯНЫХ И СЕРЕБРОСОДЕРЖАЩИХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ
СЕВЕРНОГО И ЦЕНТРАЛЬНОГО ТАДЖИКИСТАНА**

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 27.10.2021 г.

На локализацию оруденения в серебряных и серебросодержащих месторождениях Северного и Центрального Таджикистана влияют различные факторы. Но наиболее благоприятными условиями размещения минерализации являются пористость и деформируемость горных пород, карбонатные породы, зона изменения пород вдоль разрывных нарушений, физико-механические свойства вмещающей среды, скарны и скарнированные образования.

Ключевые слова: фактор, серебряные и серебросодержащие месторождения, оруденение, рудное тело, литологический состав, Северный и Центральный Таджикистан.

Состав пород, безусловно, оказывает влияние на размещение оруденения. Однако в каждом конкретном случае, степень его проявления различна и в значительной степени зависит от многих факторов. Как видим из табл. 1, серебряные и серебросодержащие месторождения распространены как в изверженных (интрузивных и эффузивных), так и в осадочных породах. Рассматривая степень благоприятности вмещающих пород для свинцово-цинковых месторождений на рудоотложения Карамазара Ф.И.Вольфсон [1] указывал, что «этот ряд, очевидно, следует начинать с известняков, но при отсутствии последних благоприятными для рудоотложения могут оказаться и другие породы вплоть до сплошных сланцевых толщ». Наиболее ярким примером этому, могут быть локализации оруденения в пределах Такелийского рудного поля. Так, оруденение в этом рудном поле известно в гранитоидах, лабрадоровых, диабазовых и роговообманковых порфиридах, дацитовых порфирах, известняковых и аркозовых конгломератах и песчаниках, известняках. Но отмечается и некоторая избирательная локализация отдельных типов оруденения

Адрес для корреспонденции: Файзиев Фотех Абдувакилович, 7734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки 17, Таджикский национальный университет. E-mail: foteh81@mail.ru

к определенным породам [2]. Так, преобладающее большинство мышьяковых месторождений со значительным количеством серебра залегают в алюмосиликатных породах (гранитоиды Гайнаккана, аркозовые конгломераты и песчаники Южной Каптарханы, дацитовые порфиры Западной Каптарханы, диабазовые порфириты нижних горизонтов Сассыкская и частично Западного Такели), тогда как полиметаллические руды с промышленным содержанием серебра в смешанной карбонатно-алюмосиликатной среде (известняково-аркозовые песчаники Учочака, известняково-дацитовые туффиты и конгломераты верхней части Западной Каптарханы, известняки на контакте с гранодиорит-порфирами Восточной Каптарханы). В качестве основного показателя рудоконтролирующего влияния литологического состава пород в Такелийском рудном поле, Ю.С.Шихиным [3] было принято соотношение в них карбонатной и алюмосиликатной составных частей. Выяснилось, что оптимальные условия для оруденения возникают при примерно равном (40-60%) соотношении этих компонентов. С изменением этого соотношения интенсивность минерализации резко снижается.

Таблица 1

Типы пород на размещении серебряных и серебросодержащих месторождений Северного и Центрального Таджикистана

Типы пород	Возраст вмещающих пород	Морфогенетические типы рудных тел	Месторождения
Карбонатные отложения (известняки мергелистые, песчанистые, доломитовые и доломиты) на контакте с гранитоидами	D ₁ – C ₂	Пластообразные, линзовидные, неправильные тела, столбы, гнезда, вкрапленники	Зарнисор, Ташбулак, Чалата, Сардоб, Сассыксай, Кансай, Королево, Окурдаван, Шевчукское, Восточный Канташ, Западная и Восточная Каптархана
Карбонатные отложения на контакте с эффузивами	D ₁ – C ₂	Весьма неправильной формы рудные тела	Мышиккол, Перевальное, Пайбулак, Учкатлы
Карбонатные отложения в контакте с терригенными породами	D ₁ – C ₁	Жилы, прожилки, штокверки, пласты	Северный Зарнисор, Перевальное, Ташгезе, Мирхант, Мушистон, Кони нукра, Такфон, Симич
Песчано-сланцевые толщи	O – S	Жилы, гнезда, линзы, неправильные тела	Караулхана
Аркозовые конгломераты, известняково-кремнистые конглобрекции	C ₁ – C ₂	Жилы, гнезда, линзы	Южная Каптархана
Эффузивные породы кислого и среднего состава	C ₂ – P ₁	Вытянутые жилеобразные тела	Большой Канимансур, Чукурджилга, Замбарак, Тарыэкан, Караташкатын, Канташ, Пайбулак, Чашлы
Интрузивные породы (гранитоиды)	C ₂ – C ₃	Жилы, жилеобразные тела, рудные столбы и сложные крутопадающие залежи	Канджол, Школьное, Четсу, Гайнаккан, Сардоб, Сангисафед

В распределении месторождений в породах Зарнисорского рудного узла наблюдается широкий разброс. На месторождении Зарнисор рудные тела расположены на контакте различных пород. В нижних частях месторождения на глубине 1000 м руды размещены

на контакте гранодиоритов Кураминского типа с известняками девона [4]. Определенная часть оруденения находится на контакте гранодиорит-порфиров, кварцевых порфиров с песчаниками и известняками. Некоторая часть располагалась в зоне экзоконтакта среди известняков девона и массивных известняков карбона. Вмещающими породами оруденения на месторождении Чалата являются известняки, сланцы и гранодиориты. На Ташбулаке руды локализованы на контакте известняков и гранодиоритов карамазарского типа. Благоприятным условием для локализации оруденения на месторождении Ташгезе является экзоконтактовая зона, то есть среди известняков и доломитов $D_{2+3}+C_1$, редко в песчаниках и конгломератах. На месторождении Сардоб руды распределены на контакте сланцев с порфировидными гранитами и гранодиоритами, тогда как в Перевальное они локализованы между эффузивами с одной стороны и сланцами и известняками с другой. В Мышикколе – на стыке карбонатных пород и эффузивов (андезитовых порфиритов) C_2 , которые прорваны дайками гранодиорит-порфиров, гранит-порфиров, кварцевых порфиров и диабазовых порфиритов. На месторождении Пайбулак оруденение наблюдается среди эффузивов и в подчиненном количестве известняков с дайками гранит-порфиров и кварцевых порфиров.

Карбонатная среда, как вмещающая, является наиболее благоприятной для развития полиметаллического оруденения в Кансайском рудном поле [5]. 90% всех известных месторождений (Кансай, Новый Камарсай, Шевчуковское, Акташ и др.) приурочены к известнякам живетского и низов франского (калькаратусовый горизонт) ярусов и к инфльтрационным скарнам, развитым по ним, в меньшей степени к биметасоматическим скарнам.

В локализации оруденения в Кансайском рудном поле существенную роль играет химический состав скарнов. Ю.А.Розанов [6] отмечает, что пористость гранатовых скарнов с сульфидами в 1.5-3 раза меньше, чем пористость неоруденелых скарнов. Также им отмечена преимущественная приуроченность богатых, нередко сплошных сульфидных руд, к пироксеновым и пироксен-гранатовым скарнам, имевшим до оруденения наибольшую эффективную пористость. Вкрапленное и прожилково-вкрапленное оруденение расположены в относительно менее пористых гранатовых и эпидот-гранатовых скарнах.

Иногда рудоносные растворы, циркулируя вдали от карбонатных пород, в основном известняков и доломитов, локализуются в очень плотных породах - в песчано-сланцевых толщах, аркозовых конгломератах, известняково-кремнистых конглобрекциях (Караулхана, Южная Каптархана).

На месторождении Караулхана вмещающая среда влияет на формирование рудных тел и перераспределение парагенезисов по вертикали [7]. Например, в жиле 25 кварц метасоматический, брекчиевидный, с тонкораспыленным пиритом при выходе из песчаников в гранодиориты сменяется мелко-тонкозернистым с анкеритом, а на горизонте штольни 3 – серебро-золото-кварц-кальцитовым минеральным парагенезисом.

О литологическом контроле оруденения на месторождении Замбарак отмечал А.Азизов [8]. Например, рудные тела 21, 25 северо-западной части рудного поля расположены в висячем боку Северо-Западного разлома в андезито-дацитовых порфиритах и их

туфоконгломератах, а в лежащем боку наиболее благоприятные рудоносные породы – сферолиты шурабсайской свиты. Элементы залегания рудных тел примерно одинаковые: азимут простирания 225° , угол падения 65° юго-восток, склонение северо-восточное.

Строгий литологический контроль оруденения наблюдается в серебряных и сербросодержащих месторождениях Центрального Таджикистана [9]. Он выражается в приуроченности оруденения к карбонатным породам сланцево-известково-доломитовых толщ. Это, в первую очередь, связано с повышенной способностью карбонатов к обменным реакциям и их благоприятное влияние к процессам метасоматического замещения.

Также этому способствует понижение давления в связи с реакциями растворения, интенсивным выносом углекислоты, уменьшением объемов метасоматически изменяемых известняков и доломитов и образованием в них зон повышенной трещиноватости [10]. Литологический фактор связан не только с повышенной реакционной способностью карбонатов, но и с анизотропностью физико-механических свойств вмещающих пород, то есть свойствами проницаемости, пористости, пластичности, хрупкости, различно реагирующих на тектонические усилия.

Карбонаты, как хрупкие породы и благоприятные для развития разрывных нарушений под воздействием одностороннего давления легко дробились, образуя структуры, благоприятные для циркуляции растворов. Рудоносные растворы интенсивно выщелачивали карбонаты с образованием прожилок, гнезд и вкрапленников и способствовали развитию метасоматических процессов. В ряде случаев серебро-оловянное оруденение размещается не только в приконтактной зоне карбонатов со сланцами, но и перемещаются на более значительные расстояния в карбонатную (доломит) среду. Подобная тенденция наблюдается на Казнок-Мушистонском (на месторождениях Мушистон, Кони нукра и др.) и Пети-Такфонском (Такфон, Симич) рудных полях.

Сланцы перекрывают карбонатные толщи и являются своеобразным экраном, преградившим путь восходящим рудоносным растворам. Сланцы, кроме экранирующей роли, видимо, еще служили кислотно-щелочными контрастными барьерами на пути движения растворов и стимулировали, вероятно, к выпадению серебряных и сопутствующих их минералов.

При интенсивных предрудных межформационных подвижках на контакте сланцев с карбонатами нередко образуется сплошной слой глинки трения или милониты. Действительно, этот слой, как слабо проницаемый, для ювенильных флюидов, служит дополнительным экраном на пути рудообразующих растворов. Эти процессы очень четко выделяются на месторождениях Мирхант и Кони нукра. Также в ряде случаев на контакте двух литологически разных пород – карбонатов и терригенных пород наблюдается зона брекчирования, мощностью до 50 м и зоны милонитизации терригенных пород, мощностью до 180 м.

На распределении оруденения влияет не только литолого-петрографический состав, но и физико-механические свойства той или иной породы. Одним из важных факторов контроля оруденения является пористость и проницаемость, значение которых повышается в результате гидротермально-метасоматических процессов. О влиянии физиче-

ских свойств горных пород на локализацию серебряного оруденения в пределах Срединного Тянь-Шаня написали многие исследователи [11-16]. Ими отмечено, что на характер распределения оруденения влияют специфические для каждого месторождения свои литолого-петрографические особенности пород. Например, для неизмененных гранодиоритов месторождения Канджол характерно высокое значение объемной массы, в среднем 2.67 г/см^3 , и низкое значение пористости – 0.6% [12]. Гидротермальные изменения пород (серицитизация, эпидотизация, каолинитизация) привели к снижению объемной массы в среднем до 2.62 г/см^3 и увеличению эффективной пористости до $1.8-3.9\%$. Преимущественно повышенные значения пористости наблюдаются в зонах тектонического дробления горных пород, например в местах развития глинки трения и достигают $16-20\%$ и даже более. Объемная масса снижается в окварцованных и кальцитизированных разностях до 2.6 г/см^3 . Соответственно изменяются пористость и другие параметры. Следовательно, с появлением рудных минералов объемная масса гранодиоритов увеличивается до 2.83 г/см^3 и пористость достигает 2.7% . Высокие значения пористости характерны для интенсивно измененных, эпидотизированных и каолинитизированных разностей гранодиоритов – $2.5-3.9\%$. Плотностные характеристики оруденелых пород повышаются. Объемная масса таких пород достигает $2.69-2.76 \text{ г/см}^3$. В связи с закрытием части пор рудным веществом пористость уменьшается до $1.3-1.8\%$, а при развитии окварцевания пористость падает до 0.8% .

Результаты опробования более 6000 м горных пород и около 4000 анализов проб дали возможность А.Р.Файзиеву с соавторами [14] выявить продуктивность вулканогенных толщ на месторождении Большой Канмансур. В целом, продуктивность тавакской и сферолитовой толщ очень близки, соответственно 0.75 и 0.80 , а коэффициент рудоносности тарыэканской толщ заметно ниже – 0.65 . Соответственно ниже в этой толще среднее содержание металлов $75-78\%$ по месторождению против $95-110\%$ для тавакской и $104-107\%$ для сферолитовой толщ.

По своим физико-механическим свойствам рудовмещающие вулканиты месторождения Большой Канмансур подразделены на две группы [16]. Первая группа включает породы тарыэканской, сферолитовой и нижних горизонтов тавакской толщ. Состав их изменяется от липаритов до трахилипаритов. Текстура их брекчиевидная, полосчатая и сферолитовая. Они характеризуются высокой пористостью ($8.38-12.47\%$) и низкими прочностными свойствами (прочность на сжатие $649-1448 \text{ кгс/см}^2$, прочность на растяжение $47-85 \text{ кгс/см}^2$), причем пористость пород находится в прямой зависимости от степени гидротермального изменения: с увеличением степени изменения пород увеличивается их пористость. Вторая группа объединяет породы кушайнакской и верхних горизонтов тавакской толщ, для которых характерна массивная текстура и порфирировая структура. Пористость их низкая ($1.83-5.57\%$), а прочностные характеристики, напротив, высокие (прочность на сжатие $970-2251 \text{ кгс/см}^2$, прочность на растяжение $83-152 \text{ кгс/см}^2$). Эти группы отличаются друг от друга и по другим физико-механическим параметрам – объемному весу, водонасыщению, магнитной восприимчивости и скорости продольной волны. Например, объемный вес для пород первой группы колеблется от 2.34 до 2.58 , в сред-

нем 2.42 г/см³, тогда как для кушайнакской и верхних горизонтов тавакской толщ он выше – 2.41-2.70, в среднем 2.53 г/см³. В породах тарыэканской, сферолитовой и нижних горизонтов тавакской толщ водонасыщение колеблется от 1.24 до 4.68, в среднем из 6-и анализов 3.47%. Для кушайнакской и верхних горизонтах тавакской толщ водонасыщение ниже – 0.68-3.52, в среднем 2.24%.

Отметим, что М.И.Власова и С.В.Николаев [17], проводившие исследования физико-механических свойств вулканитов некоторых месторождений Восточного Карамазара (Тарыэкан, Замбарак и др.) отмечали, что породы, благоприятные для размещения полиметаллического оруденения, имеют высокую эффективную пористость - 6.7-13.1%, то есть более интенсивное проявление свинцово-цинковой минерализации наблюдается в породах тарыэканской и сферолитовой толщ по сравнению с андезито-дацитовыми порфиритами верхнекушайнакской толщ.

Е.Г.Краснов и И.Н.Брагин [18], изучая эффузивные породы Адрасман-Канимансурского рудного поля, обращали внимание на литологический контроль отдельных типов минерализации. Кварц-гематитовая минерализация имеет наибольшее развитие в средних по составу породах верхнекушайнакской толщ, тогда как барит-свинцовая и свинцово-цинковая минерализации локализуются преимущественно в кислых по составу породах тарыэканской и сферолитовой толщ. Эффузивные породы, к которым приурочена медно-висмутовая минерализация, характеризуются средним и умеренно кислым составом.

Исследованиями М.М.Фозилова [19] в различных участках месторождения Большой Канимансур также установлен литологический фактор на размещение оруденения. По его данным, кварц-барит-карбонатные и барит-флюорит-галенитовые жилы и прожилки размещаются в кислых эффузивах, в особенности, если наблюдается переслаивание эффузивов и туфов. Тогда как, серебряное оруденение локализуется как среди кислых, так и среди средних пород, но основное количество этого типа минерализации тяготеет к кислым эффузивам и туфам.

По данным Х.К.Куддусова с соавторами [15] эффективная пористость на месторождении Большой Канимансур зависит не только от петрографического состава, но и от условий образования и удаленности от зон тектонических нарушений. Так, минимальная эффективная пористость характерна для диабазовых порфиритов – 0.3% и фельзит-порфиритов – 2.3-2.4%, а максимальная для фельзолипаритов 4-4.2% и сферолитовых липаритов – 6-6.3%. В этом направлении увеличивается концентрация рудных компонентов и мощность оруденелой зоны.

Гранодиориты на месторождении Канджол характеризуются незначительной эффективной пористостью (0.49-0.8%). Слабо измененные гранодиориты резко повышают общую и эффективную пористость почти в 2 раза. Максимальная пористость отмечается в серицитизированных гранодиоритах, где она увеличивается до 6%. Такие участки располагаются вблизи рудных тел или на некотором удалении от них. Например, на расстоянии 0.5-1 м от рудных тел пористость гранодиоритов снижается до 1.5-2%, породы становятся менее серицитизированными, значительно окварцованными, количество кремнезе-

ма увеличивается на 4-5%. Увеличение кремнезема обязано гидротермальному кварцу, который, безусловно, выполняет часть пор.

Для количественной характеристики измененных вмещающих пород был произведен силикатный анализ отобранных проб (табл. 2). При сопоставлении данной таблицы обнаружили, что в процессе гидротермальной проработки гранодиоритов важное значение имел процесс выщелачивания. Из анализов видно, что глинозем несомненно является подвижным компонентом, и в наиболее измененных гранодиоритах количество его уменьшается до 5-14 %, вместо 16-18 % в малоизмененных. K_2O также подвержен выносу из наиболее измененных пород. Содержание Fe_2O_3 в наиболее серицитизированных породах увеличивается, вероятно, вследствие окисления FeO и выделения сульфидов. Количество закисного железа уменьшается. Характерен вынос SiO_2 из интенсивно серицитизированных пород, за исключением участков, которые подвергались окварцеванию. Наряду с выщелачиванием отмечается привнос карбонатов, на что указывает увеличение CaO , MnO и, возможно Fe_2O_3 .

Таблица 2

Химический анализ пород, вес. %

Компоненты	Гранодиориты	Слабо серицитизированные гранодиориты	Интенсивно серицитизированные гранодиориты	Хлоритизированные гранодиориты
SiO_2	62.31	61.94	60.94	66.65
MnO	0.59	0.79	1.56	1.16
SO_2	3.82	3.54	4.73	1.76
Fe_2O_3	0.63	0.63	2.25	1.17
Al_2O_3	16.09	15.43	14.45	14.35
Na_2O	1.35	0.18	0.13	0.43
K_2O	6.52	6.52	4.34	3.86
CaO	0.26	0.04	0.11	0.16
MgO	2.92	3.64	4.14	2.64
P_2O_5	1.40	1.14	1.38	1.35
Прочие	3.40	5.70	5.80	5.32
Сумма	99.31	99.55	99.83	98.85
Объемный вес, г/см ³	2.66	2.66	2.59	2.63
Пористость, %	0.70	3.03	6.0	3.85

Из анализа табл. 2 видно, что сумма потерь при выщелачивании больше, чем привнос. Таким образом, пористость и серицитизация гранодиоритов взаимно обусловлены.

Измененные породы представляют в нашем случае благоприятную для рудоотложения вмещающую среду, на которую наложен более поздний самостоятельный процесс оруденения, сопровождаемый собственными окколорудными изменениями.

На месторождении Канджол дорудная тектоническая деятельность и последующие гидротермальные изменения резко повысили пористость вмещающих рудные тела пород.

На этом месторождении В.М.Турлычкиным [20] были определены упругие параметры для гранодиоритов и фельзитов. Эти данные свидетельствуют о существенных различиях пористости и упругих свойств в этих породах. Для гранодиоритов характерны наиболее высокие значения модуля упругости ($6.06-10.31 \cdot 10^5$ кг/см²) и низкие значения эффективной пористости (0.58-1.71%). Измененные гранодиориты являются малопроницаемыми и весьма прочными. Трещиноватость в гранодиоритах может возникнуть при значительных напряжениях, что и наблюдается вблизи крупных разломов, по которым происходили значительные подвижки. Отложение серебряных руд, возможно, и было лишь в трещиноватых гидротермально проработанных гранодиоритах и в приоткрытых оперяющих трещинах.

Фельзиты характеризуются значительно более высокой пористостью (2.87-5.98%), значения модуля упругости ниже ($E_m=6.34-7.26 \cdot 10^5$ кг/см²) и, в целом, близки к гранодиоритам. Фельзиты более благоприятны для развития в них вкрапленного оруденения. На участке Терекликан (Канджол) отмечают, что фельзиты более трещиноваты, вкрапленное оруденение и минерализация по тонким трещинкам чаще отмечаются в фельзитах, чем в гранодиоритах, что в какой-то степени согласуется с вышеприведенными данными.

Пористость горных пород в Кансайском рудном поле колеблется от 0.18 (окварцованные белые доломиты) до 13% и более (известковые скарны) [12]. По степени увеличения эффективной пористости в этом рудном поле породы располагаются в следующем порядке: белые сахаровидные доломиты (0.54-0.60%), магнезиальные флогопитовые скарны (0.88%), светло-серые известняки (0.84-1.10%), интрузивные породы (1%), роговообманковые сиениты (1.10-1.83%), дацитовые порфириды (2.20-2.42%), сульфидные руды, замещающие скарны (2.40%), эпидозиты 3-4%, гранат-пироксеновые скарны (5.08%), известковистые скарны (в среднем 6-9%). Здесь гидротермальные растворы в породах с незначительной пористостью имеют высокую скорость движения и препятствуют метасоматическому отложению рудных минералов. Однако в очень пористых породах приток свежих порций растворов происходит постепенно и образуется метасоматическое отложение руд. В случае наложения сульфидной минерализации на измененные породы пористость уменьшается на 20-30%, вследствие частичного заполнения открытых пор. Таким образом, наиболее благоприятными условиями для рудоотложения являются пористость и деформируемость горных пород, которые характерны известковистым скарнам.

В пределах Зарнисорского рудного узла в зависимости от состава рудовмещающих пород физико-механические свойства их изменяются в широких пределах [21]. Например, удельный вес пород колеблется от 2.63 (кварцевые порфиры) до 3.044 г/см³ (для гранат-пироксен-эпидотовых скарнов), объемный вес от 2.463 (в контакте минерализованных скарнов с измененными карбонатными породами) до 3.610 г/см³ для минерализованных гранат-пироксеновых скарнов. Водонасыщенность пород колеблется от 0.22 (мраморизованные известняки) до 3.11% (гранатовые скарны). Эффективная пористость в породах Зарнисорского рудного узла варьирует весьма широко от 0.44-0.73 (для мраморизованных известняков) до 10.2-14.45% (в контакте минерализованных скарнов с измененными карбонатными породами). В целом, данные вышеотмеченных исследователей показывают,

что наиболее повышенную пористость имеют скарнированные породы и скарны. Наиболее благоприятные условия для локализации оруденения являются карбонатные породы повышенной пористости, то есть контакты интрузий с вмещающими породами, а также зоны измененных пород (серицитизированных, хлоритизированных) вдоль разрывных нарушений. Рудные минералы заполняют поровое пространство и метасоматически замещают скарновые минералы [15]. При этом происходит уменьшение величины пористости горных пород.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольфсон Ф.И. Проблемы изучения гидротермальных месторождений. – М.: Госгеолтехиздат, 1962, 212 с.
2. Шихин Ю.С., Байков В.Н., Ищенко Е.Н. и др. Геологический очерк. – В кн.: Геология и минеральные комплексы Западного Карамазара. – М.: Недра. 1972, с. 18-105.
3. Шихин Ю.С. Состав горных пород как фактор контроля гидротермального оруденения (на примере Карамазара). – Геол. рудн. мест. №3, 1992, с. 31-46.
4. Файзиев А.Р., Файзиев Ф.А. Рудноформационные типы серебряных месторождений Таджикистана. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2015, №3 (160), с. 92-99.
5. Файзиев Ф.А., Файзиев А.Р., Ятимов С.Б. О сереброносности скарново-полиметаллических месторождений Западного Карамазара (Северный Таджикистан). – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2018, №1 (170), с. 97-106.
6. Розанов Ю.А. О некоторых особенностях физических свойств известняков и доломитов различного происхождения. – Труды ИГЕМ АН СССР, вып. 43, 1961, с. 66-78.
7. Файзиев Ф.А., Файзиев А.Р. Серебро-золоторудный формационный тип оруденения в Таджикистане. – Геол. и геоф. Юга России. 2018, №1, с. 109-117.
8. Азизов А. Новые данные о морфоструктурных особенностях месторождения Замбарак. – Узб. геол. журн., 1979, №2, с. 74-76.
9. Файзиев Ф.А., Файзиев А.Р., Каюмарси М. Серебряная минерализация в Центральном Таджикистане. – Изв. УГГУ. Екатеринбург. 2017, вып. 4 (48), с. 18-22.
10. Павловский А.Б. Закономерности размещения, формационные типы и перспективы оловянного оруденения в Центральном Таджикистане. – В кн.: Геология и полезные ископаемые бассейна реки Зеравшан. – Душанбе: Дониш, 1989, с. 64-80.
11. Розанов Ю.А., Кристальный Б.В., Некрасов Е.М., Пашковская М.Д. Изменения пористости рудовмещающих пород некоторых месторождений Северного Таджикистана. – Тр. ИГЕМ АН СССР, 1961, вып. 41, с. 171-177.
12. Розанов Ю.А., Титов В.Н. Роль физико-механических свойств горных пород в локализации оруденения в Кансайском рудном поле. – В кн.: Геология свинцово-цинковых месторождений Кансайского рудного поля. – М.: Наука, 1965, с. 143-153.
13. Сафонов Ю.Г., Лукин Л.И. Канимансурское рудное поле. – В кн. Особенности структур гидротермальных рудных месторождений. – М.: Наука, 1968, с. 108-127.
14. Файзиев А.Р., Пулатов М., Куддусов Х.К., Суворов П.К. О роли физико-механических и структурных факторов в локализации оруденения на одном из месторождений Карамазара. – ДАН Тадж. ССР. 1984, т. 27, № 5, с. 277-280.
15. Куддусов Х.К., Николаев С.В., Дзайнуков А.Б. и др. Роль физико-механических свойств горных пород в рудолокализации (на примере Карамазара). – Душанбе: Дониш, 1984, 222 с.
16. Файзиев А.Р. Минералогия и условия образования полиметалльного месторождения Большой Канимансур (Срединный Тянь-Шань). – Душанбе: Дониш, 2008, 416 с.

17. Власова М.И., Николаев С.В. Пористость эффузивных пород Восточного Карамазара и ее влияние на локализацию полиметаллического оруденения. – Вестник МГУ, 1959, № 4, с. 85-94.
18. Краснов Е.Г., Брагин И.Н. О формах связи оруденения с эффузивами в пределах Восточного Карамазара. – Мат. междуведомост. совещ. по пробл. «Рудоносность вулканогенных формаций». – М.: Недра, 1965, с. 308-310.
19. Фозилов М.М. Литологический контроль оруденения на месторождениях Адрасман-Канимансурского рудного поля. – ДАН РТ, 2008, т. 51, №12, с. 839-843.
20. Турлычкин В.М. Канджольское рудное поле. – В кн.: Геология и минеральные комплексы Западного Карамазара. – М.: Недра, 1971, с. 368-382.
21. Рахимов Ш.Х. Геолого-структурные условия локализации скарново-полиметаллических месторождений Карамазара. – Ташкент: Фан, 1978, 144 с.

Ф.А.ФАЙЗИЕВ

ОМИЛИ ЛИТОЛОГИЙ-ПЕТРОГРАФИИ ПАҲНШАВИ ДАР КОНҲОИ НУҚРА ВА НУҚРАДОРИ ТОҶИКИСТОНИ ШИМОЛӢ ВА МАРКАЗӢ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар паҳншавии маъдан дар конҳои нуқра ва нуқрадори Тоҷикистони Шимолӣ ва Марказӣ омилҳои гуногун таъсир мерасонанд. Аммо шароити мусоидтарин барои ҷойгиршавии минерализатсия чуқурӣ ва деформатсияи чинсҳои кӯҳӣ, чинсҳои карбонатӣ, минтақаи тағйирёбии чинсҳои кӯҳӣ, хусусиятҳои физикӣ-механикии муҳити ғунҷонанда, скарнҳо ва пайдоишоти скарнӣ мебошанд.

Калимаҳои калидӣ: омил, конҳои нуқра ва нуқрадор, маъдан, ҷисми маъдан, таркиби литологӣ, Тоҷикистони Шимолӣ ва Марказӣ.

F.A.FAYZIEV

LITHOLOGICAL-PETROGRAPHIC FACTOR OF SILVER AND SILVER- CONTAINING DEPOSITS IN NORTHERN AND CENTRAL TAJIKISTAN

Tajik National University

Various factors influence the localization of mineralization in the silver and silver-bearing deposits of Northern and Central Tajikistan. But the most favorable conditions for the placement of mineralization are porosity and deformability of rocks, carbonate rocks, a zone of rock alteration along faults, physical and mechanical properties of the host environment, skarns and skarn formations.

Key words: factor, silver and silver-containing deposits, mineralization, ore body, lithological composition, Northern and Central Tajikistan.

УДК 620.92

М.А.САЛИЕВ, В.А.МАСЛОВ*, С.Ф.АБДУЛЛАЕВ*, Х.М.АХМЕДОВ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПЫЛЕВОЙ БУРИ НА РАБОТУ
СОЛНЕЧНОЙ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ**

Центр инновационного развития науки и новых технологий

Национальной академии наук Таджикистана,

**Физико-технический институт им. С.У.Умарова*

Национальной академии наук Таджикистана

Поступила в редакцию 10.05.2022 г.

Пылевое вторжение (ПВ) в Центральной Азии наблюдалось в период с 3 по 15.11.2021г. По данным, опубликованным в интернете такое явление ПВ с длительностью 2 недели наблюдается впервые за 150 лет. В данной работе приведены результаты оперативного изучения влияния ПВ на работу солнечной фотоэлектрической установки (СФЭУ). В статье представлены также результаты исследования ПВ 4 ноября 2021 г. в г. Худжанде. При ПВ амплитуда дневной температуры уменьшилась на 12.5°C, а ночной температуры повысилась на 8.4°C. Температурный эффект за период 15.10.21-13.11.21 составил +1.88°C. Траектория воздушных масс, принесших пылевое облако 4.11.2021 в г. Худжанд, началась за 7 суток над Ираном (36.884°с.ш. 43.006°в.д.).

Ключевые слова: пылевое вторжение, солнечная фотоэлектрическая установка (СФЭУ), суточная выработка электроэнергии, температурный эффект.

Исследование влияния пылевого загрязнения атмосферы на работу солнечных энергетических установок является актуальной задачей при проектировании солнечных электрических станций, технического и экономического обоснования их строительства для отдельных регионов РТ.

В работах [1, 2] показано значительное уменьшение выработки солнечных коллекторов от аэрозольного загрязнения атмосферы.

Адрес для корреспонденции: Ахмедов Хаким Мунавварович, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33. Центр инновационного развития науки и новых технологий НАНТ.
E-mail: ahmedovhakim48@gmail.com

Целью настоящей работы является исследование и оценка влияния пылевой бури, возникшей при ПВ, на параметры работы и выработку электроэнергии СФЭУ в период длительного пылевого вторжения.

Пылевое вторжение в Центральной Азии наблюдалось в период с 3 по 15.11.2021г. По данным, опубликованным в интернете, такое явление ПВ продолжительностью 2 недели наблюдается впервые за 150 лет. В данной работе приведены результаты оперативного изучения влияния пылевой бури, возникшей при ПВ на работу СФЭУ. Экспериментальная солнечная установка, методика определения выработки электрической и тепловой энергии по данным мониторинга выходных параметров солнечных энергетических установок приведены в работах [3-7]. Методика определения относительной прозрачности атмосферы и коэффициента облачности местности по данным выработки солнечных установок описана в [4, 6]. Экспериментальные исследования проводились с помощью СФЭУ площадью 1.8 м² из поликристаллического кремния с информационной системой (ИС) на основе микрокомпьютера. Результаты мониторинга выходной мощности СФЭУ до и после пылевого вторжения показаны на рис.1, где приведены для сравнения данные с 2 по 8 ноября 2021 г.

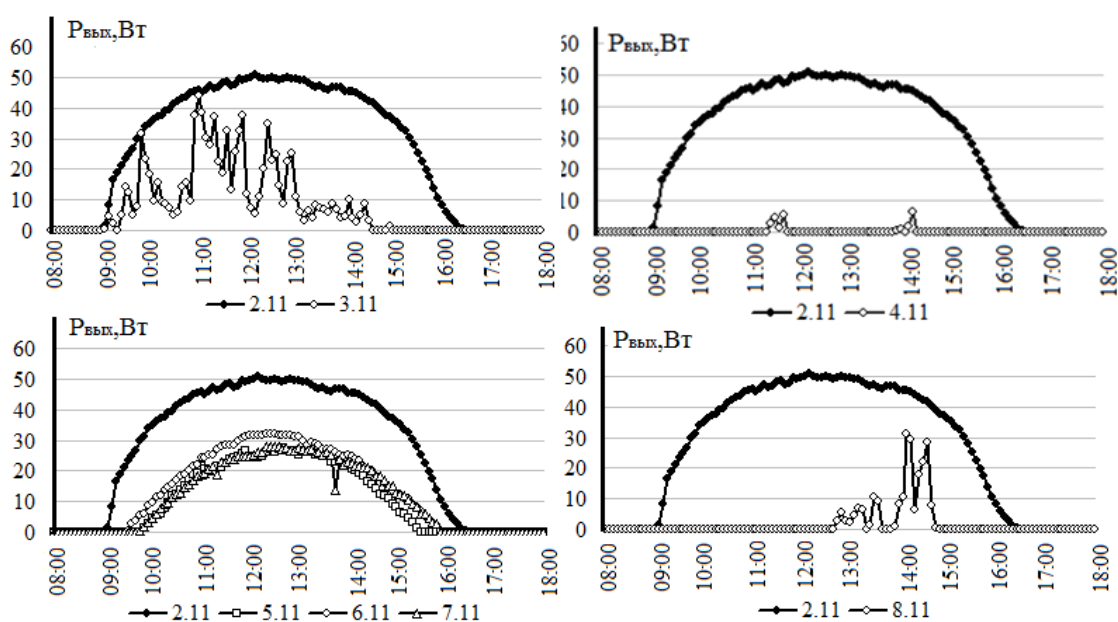


Рис. 1. Мониторинг выходной мощности СФЭУ до и после ПВ.

ПВ влияет на прозрачность атмосферы и приводит к уменьшению выработки электроэнергии солнечных установок. На рис.1 видно, что перед ПВ 3 ноября 2021г. наблюдалась переменная облачность. Пылевое вторжение началось во второй половине дня, после 14:30, вначале как пылевая буря (ПБ), то есть с мощными порывами ветра, мощность выработки электроэнергии при этом становится близкой к нулю. С этого момента также наблюдается температурный эффект, который заключается в увеличении температуры воздуха ночью и её уменьшении днем в течение двух суток до 5 ноября.

Уменьшение выработки электроэнергии из-за пылевого загрязнения атмосферы наблюдалось в течение двух недель до 17 ноября.

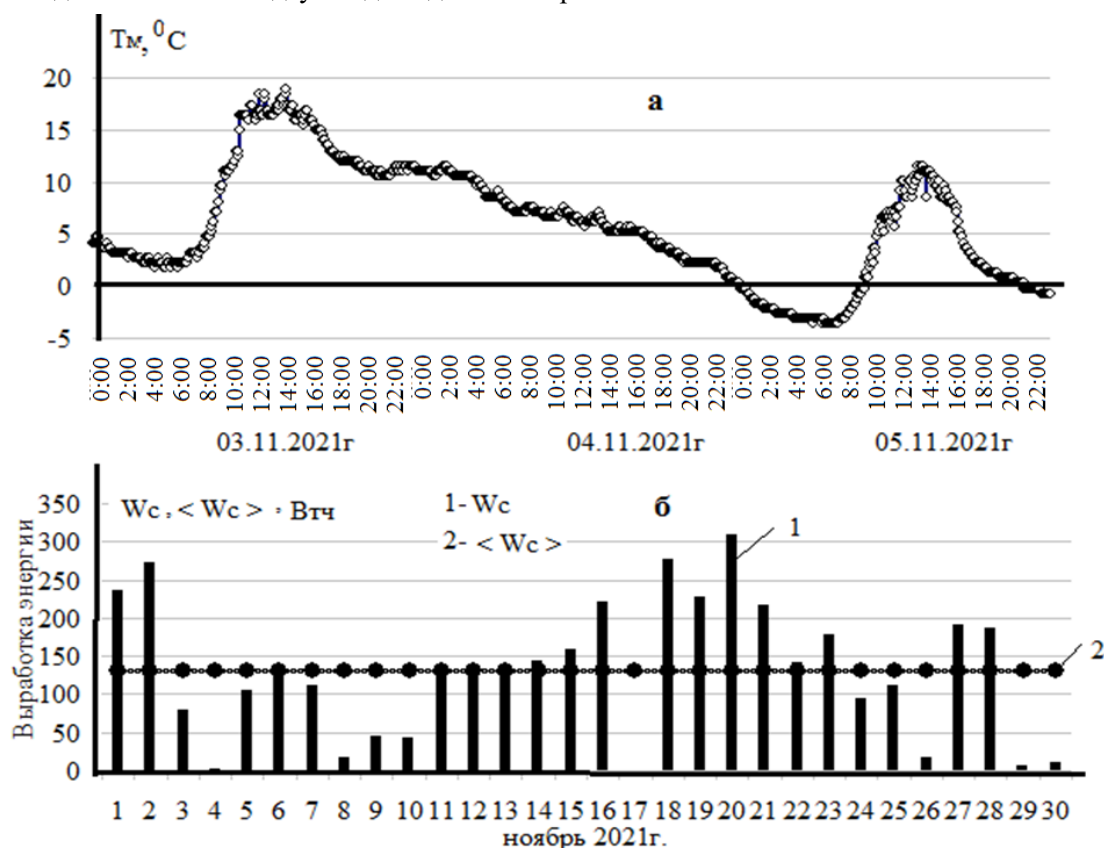


Рис. 2. Изменение температуры фотоэлектрического модуля T_m (а); суточная W_c и среднесуточная $\langle W_c \rangle$ выработка электроэнергии (б).

Результаты мониторинга температуры фотоэлектрического модуля T_m приведены на рис. 2а. Как видно, обычный суточный ход температуры модуля T_m нарушился из-за уменьшения интенсивности солнечного излучения (СИ) на модуль в дневное время и за счет изменения процесса охлаждения модуля днем и ночью из-за температурного эффекта ПВ 3-4 ноября 2021г.

Таким образом, суточное колебание температуры воздуха местности и температура фотоэлектрического модуля при ПВ резко отличается от обычных ясных дней. Осаждение пыли на поверхность панелей также уменьшает поступление СИ и выработку электроэнергии. Частицы пыли остаются в атмосфере до их уноса потоками ветра или дождевыми осадками.

Данные мониторинга суточной выработки электроэнергии W_c в ноябре 2021г. показаны на рис. 2б. Средняя суточная выработка $\langle W_c \rangle$ составила 131 Втч.

Месячная выработка электроэнергии за ноябрь W_m составила 3.93 кВтч.

Максимальная суточная выработка $W_{c\max}$ составила 309.6 Втч. (20.11.21), при минимальной выработке 2 Втч (04.11.21).

Относительная месячная прозрачность атмосферы $T_{\text{атм}}$ и месячный коэффициент облачности местности $k_{\text{обл}}$ для данного угла установки фотоэлектрического модуля даются выражениями [3]

$$T_{\text{атм}} = \langle W_c \rangle / W_{\text{сmax}} \quad \text{и} \quad k_{\text{обл}} = 1 - T_{\text{атм}}.$$

Выработка электроэнергии резко уменьшилась из-за ПВ 3 и 4 ноября. В следующие сутки (6 и 7 ноября) наблюдался рост выработки электроэнергии и улучшение прозрачности атмосферы, когда пыль слабо осаждалась и рассеивалась. Суточная выработка электроэнергии в отдельные дни относительно выработки в ясные дни до начала ПВ (см. рис.2.б) уменьшилась от 2 раз (6 ноября) – 274/132, до 137 раз (4 ноября) – 274/2. В последующие дни (8, 9, 10 ноября) наблюдалось резкое уменьшение выработки за счет поступления пыли из соседних областей Узбекистана (см. рис.1 и рис. 2а).

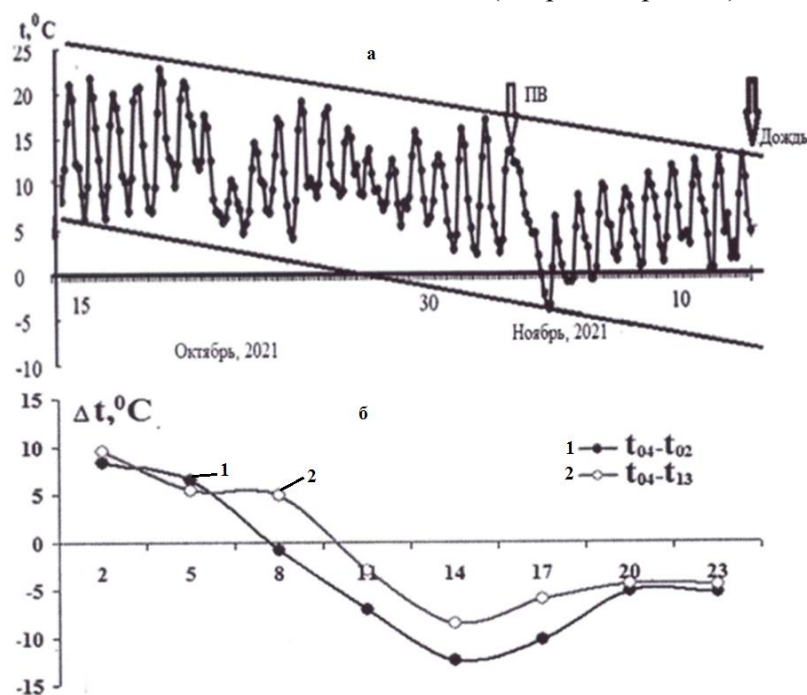


Рис. 3. Вариации температуры приземного слоя воздуха в г. Худжанде осенью 2021 г.(а); разность хода температуры в чистый день ((1) – до ПВ (02.22.2021), (2) – после ПВ (13.11.2021)) и температуры в день ПВ (4.11.2021) (б).

Выработка электроэнергии СФЭУ увеличилась 16 ноября из-за улучшения оптической прозрачности атмосферы (см.рис. 2б). Суточная выработка электроэнергии установки в следующий дождливый день (17.11.2021) уменьшилась до нуля. Проведем расчет по данным мониторинга выработки электроэнергии установкой за ноябрь 2021 г., приведенного на рис. 3:

$$T_{\text{атм}} = \langle W_c \rangle / W_{\text{сmax}} = 0.131 \text{ кВтч} / 309.6 \text{ кВтч} = 0.423,$$

$$k_{\text{обл}} = 1 - T_{\text{атм}} = 1 - 0.423 = 0.577.$$

Относительная месячная прозрачность атмосферы $T_{\text{атм}}$ составила 42.3%. Относительная месячная облачность местности $k_{\text{обл}}$ составила 57.7%.

Получены оценки уменьшения выработки электроэнергии СФЭУ по данным средней $\langle W_c \rangle$ и максимальной суточной выработке $W_{\text{сmax}}$ за первую и вторую половину ноября с 1 по 15 и с 16 по 30 ноября.

$$T_{\text{атм}}(1) = \langle W_c \rangle / W_{\text{сmax}} = 0.116 \text{ кВтч} / 366 \text{ кВтч} = 0.317,$$

$$k_{\text{обл}}(1) = 1 - T_{\text{атм}}(1) = 1 - 0.317 = 0.683.$$

$$T_{\text{атм}}(2) = \langle W_c \rangle / W_{\text{сmax}} = 0.146 \text{ кВтч} / 300 \text{ кВтч} = 0.487,$$

$$k_{\text{обл}}(2) = 1 - T_{\text{атм}}(2) = 1 - 0.23 = 0.513.$$

Уменьшение выработки электроэнергии СФЭУ из-за ПВ в первой половине с 1 по 15 ноября составило 68.3%, при прозрачности неба 31.7%.

Уменьшение выработки за счет облачности и дождливой погоды во второй половине с 16 по 30 ноября составило 51.3%, при прозрачности 48.7%.

Таблица

Коэффициент корреляции суточной выработки электроэнергии СФЭУ с другими параметрами атмосферы

Параметр	r
Температура воздуха на уровне 2м (°C)	0.061
Температура поверхности Земли (°C)	-0.02
Температура воздуха в диапазоне 2м (°C)	0.43
Максимальная температура воздуха на уровне 2 м (°C)	0.31
Минимальная температура воздуха на уровне 2 м (°C)	-0.018
Удельная влажность воздуха на уровне 2 м (г/кг)	-0.317
Относительная влажность на уровне 2 м (%)	-0.39
Осадки (мм/день)	-0.35
Давление атмосферного воздуха (кПа)	-0.08
Скорость ветра на уровне 2 м (м/с)	-0.28
Скорость ветра на уровне 10 м(м/с)	0.142
Максимальная скорость ветра на уровне 10 м (м/с)	0.15
Минимальная скорость ветра на уровне 10 м (м/с)	0.102
Скорость ветра в диапазоне 10 м (м/с)	0.132
Направление ветра на уровне 10 м	-0.45
Скорость ветра на уровне 50 м (м/с)	0.221
Максимальная скорость ветра на уровне 50 м (м/с)	0.324
Минимальная скорость ветра на уровне 50 м (м/с)	0.012
Скорость ветра в диапазоне 50 м (м/с)	0.39
Направление ветра на уровне 50 м (м/с)	-0.471
Коротковолновая нисходящая радиация всей поверхности неба (кВт-ч/м ² /день)	0.69
Чистая поверхность неба коротковолновая нисходящая радиация (кВт-ч/м ² /день)	0.4
Индекс инсоляции всего чистого неба (безразмерный)	0.69
Длинноволновая нисходящая освещенность всей поверхности неба (Вт/м ²)	-0.662
Общая PAR всей поверхности неба (Вт/м ²)	0.66
Суммарная PAR поверхность ясного неба (Вт/м ²)	0.34
УФ-А-излучение всей поверхности неба (Вт/м ²)	0.64
УФ-В- излучение всей поверхности неба (Вт/м ²)	0.53
УФ-индекс поверхности всего неба (безразмерный)	0.55

В таблице приведены коэффициент корреляции суточной выработки электроэнергии СФЭУ и другие параметры атмосферы. Приведенные параметры атмосферы получены из данных спутникового зондирования атмосферы г.Худжанда (40.275° с.ш.; 69.639° в.д, высота 349 м. над ур. м.) [8]. Как видно из таблицы высокая корреляция суточной выработки электроэнергии СФЭУ обнаружена с коротковолновой нисходящей радиацией всей поверхности неба и с индексом инсоляции всего чистого неба (0.69), а также с общей фотоактивной радиацией (ФАР) всей поверхности неба (0.66). Для УФ радиации с компонентами А и В обнаружена корреляция с суточной выработкой электроэнергии СФЭУ 0.55; 0.64 и 0.53, соответственно.

Для остальных параметров атмосферы значения коэффициента корреляции незначительные (или средние).

На рис. 3а представлена вариация температуры в ноябре 2021 года в г. Худжанде [9]. Пылевое вторжение 4 ноября существенно изменило температурный режим региона, поскольку пыль находилась в атмосфере долгое время, до 13 ноября, пока не начался ливневый дождь.

При сравнении хода температуры в день с высокой запыленностью воздуха (4.11.2021) и в дни с чистой атмосферой после ПВ (2.11.2021) и до ПВ (13.11.2021) обнаружены значительные отличия. Амплитудные значения дневной температуры уменьшились на -12.5°C , а в ночное время повысились на $+8.4^{\circ}\text{C}$ (рис. 3б). Детально вариации температурных параметров приведены на рис. 4.

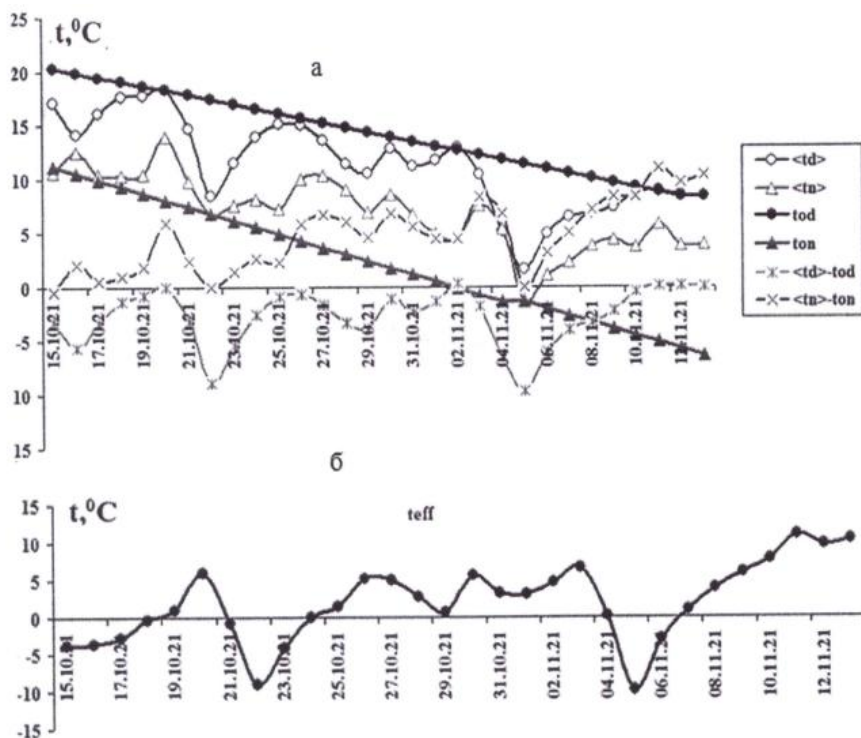


Рис. 4. Расчёт температурного эффекта за период 15.10.2021 по 13.11.2021

На рис. 4а отражены результаты применения метода огибающего для оценки степени похолодания и потепления за период с 15.10.21 по 13.11.21. Рассчитаны среднедневные (t_d) и средненочные температуры (t_n). Прямая линия над среднедневными значениями температуры (t_{od}) указывает ход среднедневной температуры при отсутствии ПВ. Прямая линия (t_{on}) над средненочными температурами указывает ход средненочной температуры воздуха при отсутствии ПВ. Разность ($t_n - t_{on}$) дает величину ночного потепления для каждой ночи. Разность ($t_d - t_{od}$) определяет величину дневного похолодания для каждой ночи. На рис. 4б иллюстрировано вычисление температурного эффекта аэрозоля для каждого дня ПВ. Суммарный эффект дал значение температурного эффекта $+1.88^\circ\text{C}$ (рис. 5б), пропорционального тепловому эффекту ПВ в атмосфере.

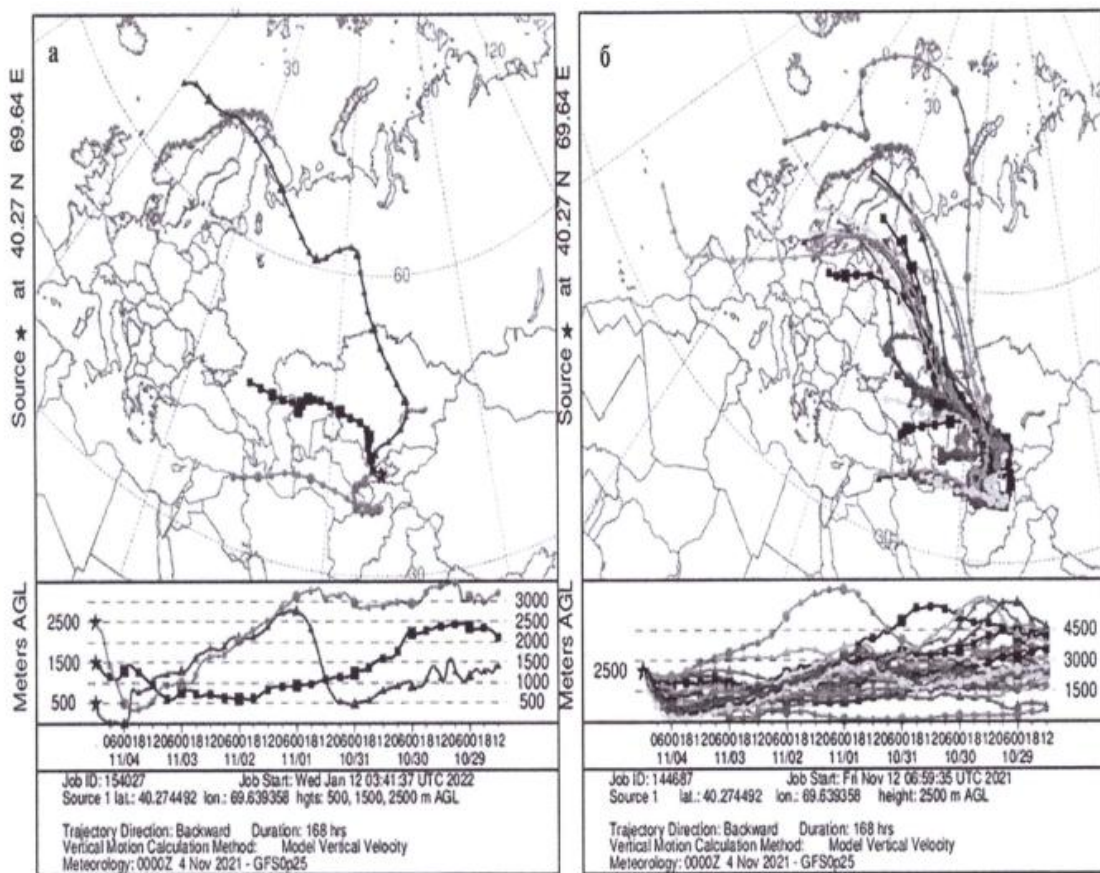


Рис. 5. Обратная траектория (за 7 дней) воздушных масс при ПВ 4.11.2021 (а – высоты 500, 1500, 2500м; б – для ансамбля из 27 траекторий.)

Восстановление обратной траектории воздушных масс за 7 дней (это характерное время пребывания водяного пара в атмосфере) до ПВ по алгоритму HYSPLIT [10-16] позволяет выявить возможные источники образования пыли (рис. 5). Траектория воздушных масс, пришедших в Худжанд на высоте 500 м 4.11.2021 началась над Норвежским морем (67.452°с.ш. , 0.091°в.д.), для высоты 1500 м – над Краснодарским краем России (46.838°с.ш. , 42.281°в.д.), и для высоты 2500м – над Ираном (36.884°с.ш. 43.006°в.д.).

Таким образом, можно предположить, что пылевое вторжение, достигшее г. Худжанд 4 ноября 2021 года, сформировалось преимущественно на территории Ирана и над пустынями Аралкум и Каракумы.

На рис. 5 приведена обратная траектория воздушных масс при ПВ 4.11.2021г. при различных высотах и для ансамбля из 27 траекторий.

Таким образом, по данным мониторинга выходной мощности, измеренной величине напряжения и тока заряда СФЭУ дана оценка влияния пылевой бури, возникшей при ПВ в г. Худжанде, на выработку электроэнергии солнечной фотоэлектрической установки. Получена оценка суммарного уменьшения выработки энергии фотоэлектрической установкой из-за ПВ в 1 половине ноября 2021г, которая составила 68.3%. Относительная прозрачность атмосферы в указанный период ПВ для приемной плоскости солнечной установки составила 31.7%. Показано, что суточная выработка установки в отдельные дни из-за пыли уменьшилась от 2 до 138 раз по сравнению с выработкой в ясные дни до начала ПВ. Установлено, что при ПВ амплитуда дневной температуры понижалась на -12.5°C , а ночной температуры повышалась на $+8.4^{\circ}\text{C}$. Температурный эффект за период 15.10.21-13.11.21 составил $+1.88^{\circ}\text{C}$. Начало 7-суточной траектории воздушных масс, переносивших ПВ 4.11.2021 в г. Худжанде находилось в окрестностях Джердж Кавлан, в Иране с координатами $36.884^{\circ}\text{с.ш. } 43.006^{\circ}\text{в.д.}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров Б.И., Салиев М.А., Назаров Р.Р., Абдуллаев С.Ф. Оценка возможностей солнечной энергии на основе точных измерений солнечной радиации. – Ученые записки ХГУ им. акад. Б.Гафурова. Естественные и эконом. науки. Худжанд, 2015, № 4, с. 35-41.
2. Назаров Б.И., Салиев М.А., Махмудов А.Н., Абдуллаев С.Ф. Расчет потока суммарной радиации на наклонную плоскость солнечных приемников в условиях аэрозольного загрязнения атмосферы. – ДАН РТ, 2015, т. 58, № 12, с. 1111-1118.
3. Назаров Б.И., Салиев М.А., Махмудов А.Н., Абдуллаев С.Ф. Влияние аэрозольного загрязнения атмосферы на работу солнечных приемников. – ДАН РТ, 2016, т. 59, № 5-6, с. 206-213.
4. Салиев М.А., Нозиров Д., Абдуллаев С.Ф., Кабутов К. Эффективность солнечной фотоэлектрической установки. – Международный науч. журнал "Инновационная наука", 2020, № 3, с. 38-43.
5. Салиев М.А., Ахмедов Х.М. Эффективность солнечной фотоэлектрической установки в реальных условиях эксплуатации. – Изв.АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук 2018, № 1, с. 57-63.
6. Салиев М.А., Юмаев Н.Р., Джураев Э., Ахмедов Х.М. Оценка влияния климатических условий на эффективность работы солнечной фотоэлектрической установки. – ДАН РТ, 2019, т. 61, № 1-2, с. 78-83.
7. Салиев М.А., Юсупова М.З., Мирзокибилова Ф.О., Ахмедов Х.М. Использование цифровой технологии контроля для оценки влияния климатических факторов на работу солнечной фотоэлектрической установки. – Изв.АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук, 2020, № 4, с.148-156.
8. Интернет ресурс: <https://power.larc.nasa.gov/data-access-viewer/>
9. Интернет ресурс: [https://rp5.ru.Погода_в_Худжанде_\(аэропорт\).](https://rp5.ru.Погода_в_Худжанде_(аэропорт).)

10. Интернет ресурс: <https://ready.arl.noaa.gov/index.php>
11. Draxler R.R., Taylor A.D. Horizontal dispersion parameters for long-range transport modeling. – Journal of Applied Meteorology. 1982, pp. 367-372.
12. Draxler R.R., Hess G.D. Description of the HYSPLIT-4 Modeling System. Silver Spring: – Air Resources Laboratory, NOAA Technical Memorandum ERL ARL-224/-1997, pp.1-22.
13. Draxler R.R. The accuracy of trajectories during ANATEX calculated using dynamic model analyses versus rawinsonde observations. – Journal of Applied Meteorology. 1991, pp.1446-1467.
14. Hurley P. PARTPUFF – A Lagrangian particle-puff approach for plume dispersion modeling applications. – Journal of Applied Meteorology. 1994, pp. 85-294.
15. Moody J.L., Galusky J.A., Galloway J.N. The use of atmospheric transport pattern recognition techniques in understanding variation in precipitation chemistry. – Atmospheric Deposition. IAHS Publ. 1989. No. 179, pp. 119-125.
16. Stein A., Draxler R.R., Rolph G.D., Stunder B.J., Cohen M., Ngan F. NOAA's HYSPLIT atmospheric transport and dispersion modeling system. – Bull.Am. Meteorol. 2015, v. 96, pp.2059-2077.

М.А.САЛИЕВ, В.А.МАСЛОВ*, С.Ф.АБДУЛЛОЕВ*, Х.М.АХМЕДОВ

ТАҲҚИҚИ ТАЪСИРИ ТЎФОНИ ЧАНГӢ БА КОРИ ДАСТГОҲИ ФОТОЭЛЕКТРИКИИ ОФТОБӢ

Маркази рушди инновационии илм ва технологияҳои нави

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

**Институтуи физика ва техникаи ба номи С.У.Умарови*

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон

Аз 3 ноябр то 15 ноябри соли 2021 тӯфони чангу ғубор (ТЧҒ) дар Осиёи Марказӣ мушоҳида шуд. Тибқи маълумоте, ки дар Интернет нашр шудааст, чунин падидаи 2-ҳафтаинаи ПБ бори аввал дар 150 сол мушоҳида шудааст. Дар ин мақола натиҷаҳои омӯзиши оперативии таъсири ТЧҒ ба кори дастгоҳи фотоэлектрикии офтобӣ (ДФЭО) оварда шудааст. Дар мақола инчунин натиҷаҳои таҳқиқоти воридшавии чанг (ВЧ) дар шаҳри Хучанд 4 ноябри соли 2021 оварда шудааст. Дар давоми ВЧ амплитудаи харорати рӯзона (-12,5°C) паст шуда, шабона (+8.4°C) баланд шудааст. Таъсири харорат дар давраи 15.10.21-13.11.21 ба +1.88°C баробор буд. Масири баръакси самти массаҳои ҳаво, ки 4 ноябри соли 2021 чангу ғуборро ба Хучанд овард 7 рӯз дар Эрон бо координатҳои 36.884° а.ш.; 43.006° т.ғ. оғоз ёфтааст.

Калимаҳои калидӣ: духули чангӣ, дастгоҳи фотоэлектрикии офтобӣ (ДФЭО), тавлиди шабонарӯзии энергияи электрикӣ, падидаи хароратӣ.

M.A.SALIEV, V.A.MASLOV*, S.F.ABDULLAEV*, Kh.M.AKHMEDOV

**INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF A DUST STORM
ON THE OPERATION OF A SOLAR PHOTOELECTRIC INSTALLATION**

*Center for Innovative Development of Science and New Technologies
of the National Academy of Sciences of Tajikistan,*

**S.U.Umarov Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

A dust intrusion (DI) over Central Asia was observed from November 3 to November 15, 2021. According to data published on the Internet, such a 2-week-long PB phenomenon has been observed for the first time in 150 years. This paper presents the results of an operational study of the influence of DI on the operation of a solar photovoltaic installation (SPVI). The article also presents the results of a study of the DI on November 4, 2021 in Khujand. During DI, daytime temperature amplitudes decreased by 12.5°C, while night temperatures increased by 8.4°C. The temperature effect for the period 15.10.21-13.11.21 was +1.88°C. The trajectory of the air masses that brought the dust cloud on November 4, 2021 in Khujand 7 days began over Iran (36.884°N. 43.006°E)

Key words: dust intrusion, solar photovoltaic device (SPED), daily electricity generation, temperature effect.

УДК 621.311

Х.ХАЛИКОВ

**ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЭНЕРГЕТИКИ
ТАДЖИКИСТАНА**

*Институт водных проблем, гидроэнергетики и экологии
Национальной академии наук Таджикистана
Поступила в редакцию 9.09.2022 г.*

Рассмотрен вопрос эффективности развития энергетики Таджикистана в современных условиях. Предложен метод оптимизации в ее составе гидро- и теплоэнергетики. Показана общая экономическая эффективность развития энергетики в условиях, когда действующий тариф существенно ниже тарифов окупаемости.

Ключевые слова: внутренняя норма доходности, вода, гидроэнергия, ГЭС, жизненный цикл, критерий безубыточности, тариф окупаемости, ТЭС, уголь, установленная мощность, финансовый поток, энергетика.

Основой энергетики Таджикистана является гидроэнергия [1,2]. Второй по объему ресурс – уголь занимает сегодня в общем объеме производства электроэнергии только 10%. Такая ситуация сложилась исторически, и в качестве объяснения обычно приводится тот факт, что энергетический ресурс ГЭС, – вода, является бесплатным, в то время как стоимость угля для ТЭС имеет реальную цену [3, 4].

В действительности тепловая энергетика кроме этого недостатка по сравнению с гидроэнергетикой имеет и определенные преимущества. Во-первых, строительство ТЭС существенно дешевле строительства ГЭС. Во-вторых, сроки строительства ТЭС значительно короче, чем у ГЭС. В-третьих, число часов использования установленной мощности ТЭС заметно больше, чем у ГЭС. При этом, в-четвертых, так как ГЭС работает в пи-

Адрес для корреспонденции: Халиков Холназар, 734002, Республика Таджикистан, Душанбе, ул. Парвина, 12, Институт водных проблем, гидроэнергетики и экологии НАНТ.
E-mail: hona-tj@mail.ru

ковом режиме, а ТЭС в базовом, то для выработки того же количества электроэнергии, установленная мощность ГЭС должна быть больше, чем у ТЭС.

В результате, как показывает сравнительный анализ, в определенных условиях ТЭС может быть экономически эффективнее, чем ГЭС [5, 6]. Рассмотрим, например, параметры, обеспечивающие одну и ту же годовую выработку электроэнергии, приведенные в табл. 1¹.

Таблица 1

Параметры	Размерность	ГЭС	ТЭС
Удельная стоимость строительства ЭС, $P_{уд}$	долл./кВт	3000	1500
Жизненный цикл ЭС, t_2	лет	50	50
Срок строительства ЭС, t_1	лет	10	1
Число часов использования установленной мощности, Ч	час/год	4000	6000
Установленная мощность ЭС, N	кВт	1.5N	N
Себестоимость электроэнергии, с	долл./кВтч	0.005	0.03 ²

В соответствие с табл. 2, ниже приведен расчет минимального тарифа окупаемости для двух этих ЭС.

Таблица 2

Финансовые потоки ГЭС и ТЭС

Инвестирование строительства за счет собственных средств

год	1	2	...	t_1	t_1+1	t_1+2	...	t_2
Строительство ЭС	P_1		P_1	P_1	—	—	—	—
Прибыль	—		—	—	П	П	П	П
Дисконт	1	q	...	q^{t_1-1}	q^{t_1}	q^{t_1+1}	...	q^{t_2-1}

Такой тариф определяется критерием безубыточности (равенство затрат и прибыли), который как для ГЭС, так и для ТЭС [7, 8, 9], может быть записан в виде:

$$P \frac{q^{t_1} - q^{t_2}}{1 - q} - P_1 \frac{1 - q^{t_1}}{1 - q} = 0, \quad (1)$$

где:

¹ Приведенные в табл.1 параметры соответствуют сегодняшним условиям в энергетике Таджикистана.

² Сегодня стоимость угля 90 долл./тн. С учетом, что из 1кг угля можно получить 3 кВтч. электроэнергии, получаем, что топливная составляющая ТЭС равна 0.03 долл./кВтч.

$$P_1 = \frac{NP_{уд}}{t_1} \quad (2)$$

$$\Pi = W(\tau - c) = NЧ(\tau - c) \quad (3)$$

Π – годовая прибыль ГЭС от выработки электроэнергии, долл.

W – годовая выработка электроэнергии ГЭС, кВтч.,

q – коэффициент дисконтирования.

Используя (1), (2) и (3), получим в явном виде уравнение для расчета тарифа безубыточности:

$$\tau_{б.у.} = c + \frac{P_{уд}}{Чt_1} \frac{(1 - q^t)}{(q^t - q^{t_2})}. \quad (4)$$

Результаты расчетов, выполненные по формуле (4) показаны на рис.1.

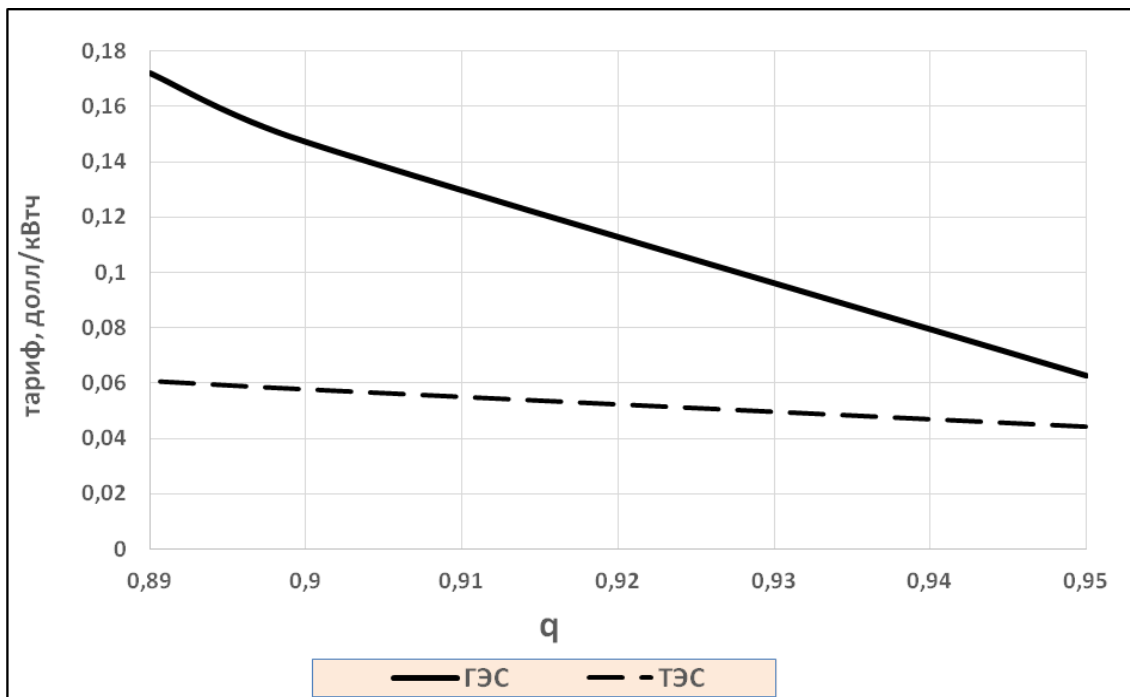


Рис. 1. Тариф окупаемости = f(q).

Графики на рис. 1 показывают, что при развитии энергетики с нулевого уровня в условиях рыночной экономики, с учетом стоимости денег во времени, тепловая энергетика была бы эффективней гидроэнергетики. Но только при тарифе на электроэнергию больше, чем 0.05÷0.06 долл./кВтч.

Сегодня в Таджикистане развитие энергетики осуществляется на базе уже существующей и довольно мощной энергосистемы, но средний тариф равен 0.027 долл./кВтч³, что существенно меньше даже тарифа окупаемости для теплоэнергетики [10, 11, 12].

В этой ситуации наиболее важным становится вопрос об оптимальных долях гидро- и теплоэнергетики в этой развивающейся энергосистеме, то есть значения « α » в уравнении общего дисконтированного финансового потока вновь строящихся ГЭС и ТЭС:

$$D^{\Sigma} = \alpha D^{ГЭС} + (1-\alpha) D^{ТЭС}, \quad (5)$$

где: α – доля ГЭС (по выработке электроэнергии) и, соответственно, $(1-\alpha)$ – доля ТЭС, в общем балансе энергосистемы, D^{Σ} , $D^{ГЭС}$ и $D^{ТЭС}$ – соответственно, финансовые потоки, общий, ГЭС и ТЭС.

$D^{ГЭС}$ и $D^{ТЭС}$, в соответствии с табл. 1, могут быть представлены в виде:

$$D^{ГЭС} = \frac{N_{уст}^{ГЭС}}{1-q} \times \left[\Psi^{ГЭС} \times (\Pi - c^{ГЭС}) (q^{t_2^{ГЭС}} - q^{t_1}) - \frac{P_{уд}^{ГЭС}}{t_2^{ГЭС}} (1 - q^{t_2^{ГЭС}}) \right]$$

$$D^{ТЭС} = \frac{N_{уст}^{ТЭС}}{1-q} \times \left[\Psi^{ТЭС} \times (\Pi - c^{ТЭС}) (q^{t_2^{ТЭС}} - q^{t_1}) - \frac{P_{уд}^{ТЭС}}{t_2^{ТЭС}} (1 - q^{t_2^{ТЭС}}) \right]$$

После подставления этих значений в общую формулу (5), получим:

$$D^{\Sigma} = \frac{\alpha \cdot N_{уст}^{ГЭС}}{1-q} \left[\Psi^{ГЭС} (\Pi - c^{ГЭС}) (q^{t_2^{ГЭС}} - q^{t_1}) - \frac{P_{уд}^{ГЭС}}{t_2^{ГЭС}} (1 - q^{t_2^{ГЭС}}) \right] +$$

$$+ \frac{(1-\alpha) \cdot N_{уст}^{ТЭС}}{1-q} \left[\Psi^{ТЭС} (\Pi - c^{ТЭС}) (q^{t_2^{ТЭС}} - q^{t_1}) - \frac{P_{уд}^{ТЭС}}{t_2^{ТЭС}} (1 - q^{t_2^{ТЭС}}) \right] \quad (6)$$

Соответствующие расчеты, выполненные по этой формуле для разных значений « q » и параметрах, приведенных в табл. 1, показаны на рис. 2, 3 и 4.

На каждом из этих рисунков все прямые $D = f(\tau)$ для разных « α » пересекаются в одной и той же точке, которую можно назвать точкой безразличия, так как в ней эффективность энергосистемы не зависит от соотношения гидро и тепловой энергетики.

Действительно, точка пересечения 2-х прямых с разными « α_i » будет решением уравнения:

³ То есть сегодня развитие энергетики в республике возможно только за счет прибыли этой, уже существующей энергосистемы, давно окупившей себя.

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha_1 \cdot N_{\text{уст}}^{\text{ГЭС}}}{1-q} \left[\Psi^{\text{ГЭС}} (\Pi - c^{\text{ГЭС}}) (q^{t_2^{\text{ГЭС}}} - q^{t_1}) - \frac{P_{\text{уд}}^{\text{ГЭС}}}{t_2^{\text{ГЭС}}} (1 - q^{t_2^{\text{ГЭС}}}) \right] + \\
& + \frac{(1 - \alpha_1) \cdot N_{\text{уст}}^{\text{ГЭС}}}{1-q} \left[\Psi^{\text{ГЭС}} (\Pi - c^{\text{ГЭС}}) (q^{t_2^{\text{ГЭС}}} - q^{t_1}) - \frac{P_{\text{уд}}^{\text{ГЭС}}}{t_2^{\text{ГЭС}}} (1 - q^{t_2^{\text{ГЭС}}}) \right] = \\
& = \frac{\alpha_2 \cdot N_{\text{уст}}^{\text{ГЭС}}}{1-q} \left[\Psi^{\text{ГЭС}} (\Pi - c^{\text{ГЭС}}) (q^{t_2^{\text{ГЭС}}} - q^{t_1}) - \frac{P_{\text{уд}}^{\text{ГЭС}}}{t_2^{\text{ГЭС}}} (1 - q^{t_2^{\text{ГЭС}}}) \right] + \\
& + \frac{(1 - \alpha_2) \cdot N_{\text{уст}}^{\text{ГЭС}}}{1-q} \left[\Psi^{\text{ГЭС}} (\Pi - c^{\text{ГЭС}}) (q^{t_2^{\text{ГЭС}}} - q^{t_1}) - \frac{P_{\text{уд}}^{\text{ГЭС}}}{t_2^{\text{ГЭС}}} (1 - q^{t_2^{\text{ГЭС}}}) \right].
\end{aligned}$$

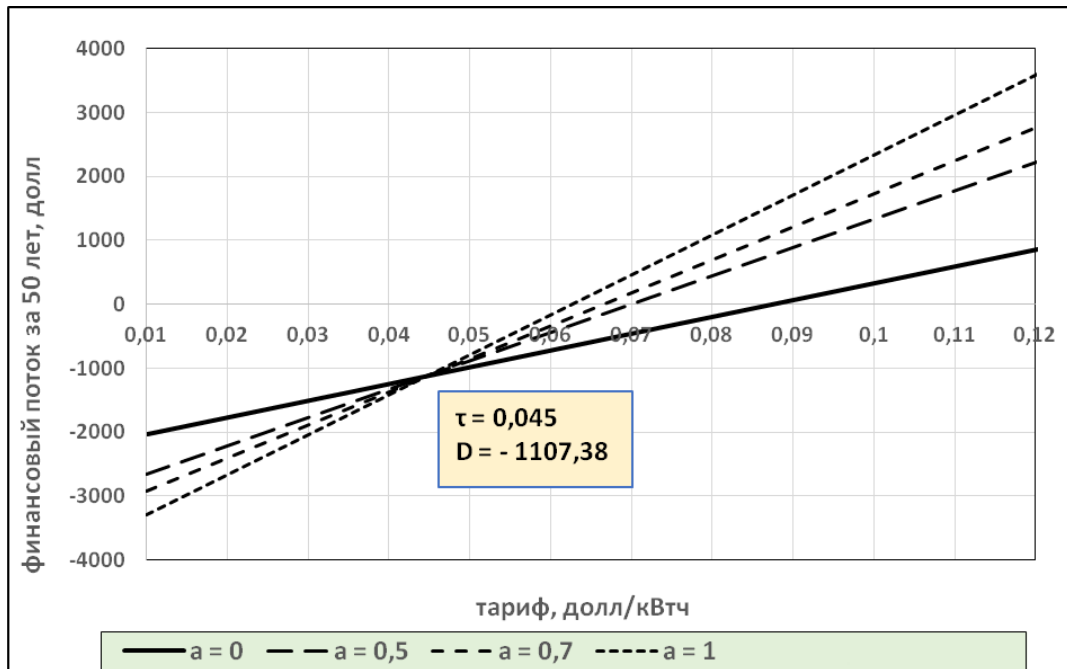


Рис. 2. Финансовый поток = f(τ), при q = 0.95.

Последнее уравнение после элементарных преобразований можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \frac{N_{\text{уст}}^{\text{ГЭС}}}{1-q} \left[\Psi^{\text{ГЭС}} (\Pi - c^{\text{ГЭС}}) (q^{t_2^{\text{ГЭС}}} - q^{t_1}) - \frac{P_{\text{уд}}^{\text{ГЭС}}}{t_2^{\text{ГЭС}}} (1 - q^{t_2^{\text{ГЭС}}}) \right] = \\
& = (\alpha_1 - \alpha_2) \left[\Psi^{\text{ГЭС}} (\Pi - c^{\text{ГЭС}}) (q^{t_2^{\text{ГЭС}}} - q^{t_1}) - \frac{P_{\text{уд}}^{\text{ГЭС}}}{t_2^{\text{ГЭС}}} (1 - q^{t_2^{\text{ГЭС}}}) \right]. \quad (7)
\end{aligned}$$

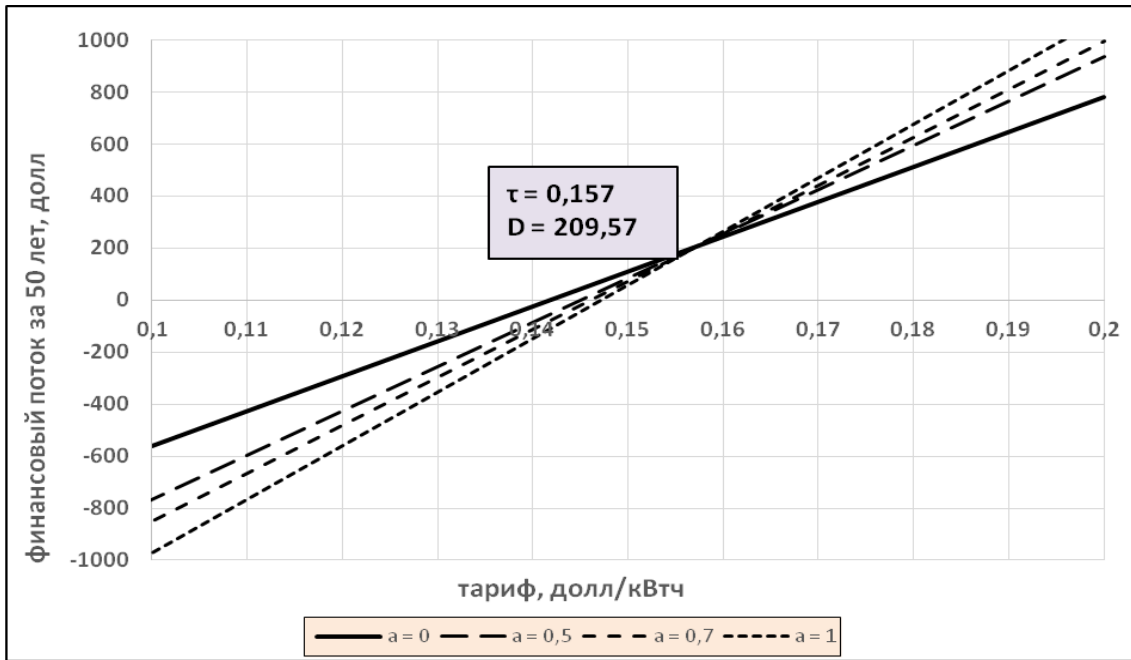


Рис. 3. Финансовый поток = $f(\tau)$, при $q = 0.90$.

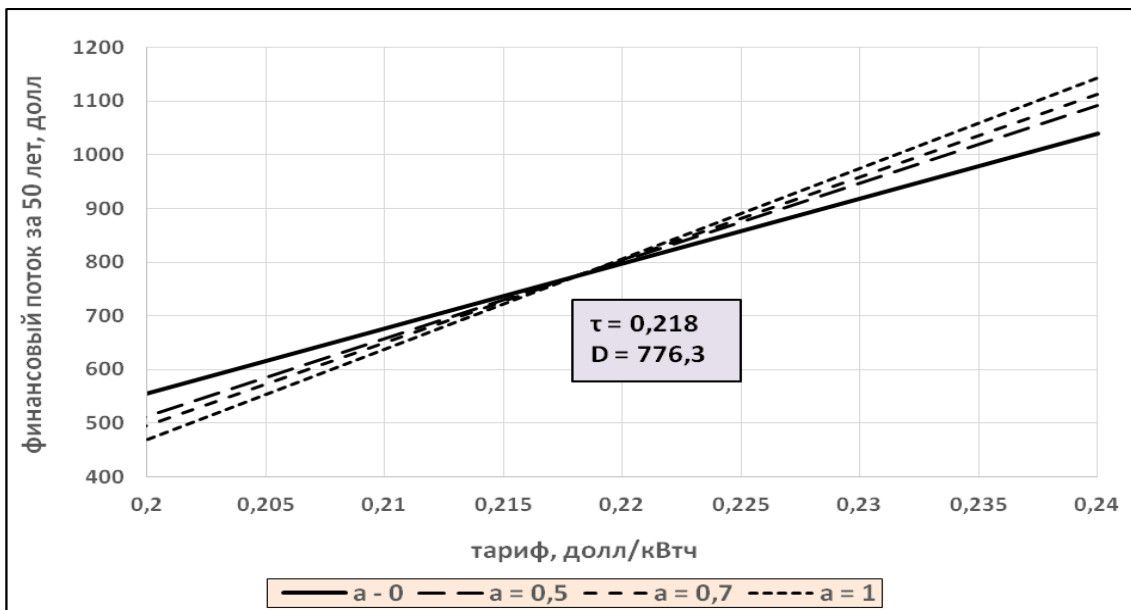


Рис. 4. Финансовый поток = $f(\tau)$, при $q = 0.89$.

В уравнении (7) правые и левые части можно сократить на общий множитель: $(\alpha_1 - \alpha_2)$, что доказывает, что его решение не зависит от значений α_1 и α_2 , то есть вообще от « α ».

В табл. 3 приведены координаты точки безразличия для рассмотренных значений « q ».

Таблица 3

q	0.89	0.9	0.95
τ	0.218	0.157	0.045
D^{Σ}	776.30	209.69	-1107.38

В соответствие с рис. 2, 3 и 4, для всех «q», при тарифах, больших приведенных в табл. 3, более эффективной является гидроэнергетика, при более низких тарифах - тепловая. То есть при сегодняшних тарифах, для ускоренного развития энергетики, первоочередное строительство ТЭС может быть одним из приоритетов. Вновь сконцентрироваться на строительстве крупных ГЭС для промышленности можно будет только после повышения тарифов, причем, как показывает наш анализ, довольно существенного.

К аналогичным выводам можно прийти, рассматривая полученные результаты с точки зрения внутренней нормы доходности (ВНД), то есть значений «q», при которых общий финансовый поток D^{Σ} , становится равным нулю. Такие значения ВНД для всех рассмотренных вариантов приведены в табл. 4.

Таблица 4

Тариф внутренней нормы доходности

q	α			
	0	0.5	0.7	1
0.89	0.154	0.165	0.168	0.172
0.9	0.142	0.145	0.146	0.147
0.95	0.087	0.070	0.066	0.063

Эти данные показывают, что для значений «q» 0.89 и 0.9, для которых (рис. 3 и 4) точки безразличия находятся выше нулевой абсциссы, увеличение доли гидроэнергетики от нуля до единицы требует повышения тарифа, а для $q = 0.95$ (рис. 1), для которого точка безразличия ниже нулевой абсциссы, увеличение доли энергетики снижает тариф, причем более существенно. То есть в первом случае более эффективна тепло-, во втором гидроэнергетика.

В заключение необходимо отметить еще один важный момент. Все рассчитанные в данной статье тарифы окупаемости энергосистемы, при любых соотношениях в ней гидро- и тепловой составляющей, существенно, как минимум в два с лишним раза выше действующих сегодня в Таджикистане тарифов на электроэнергию.

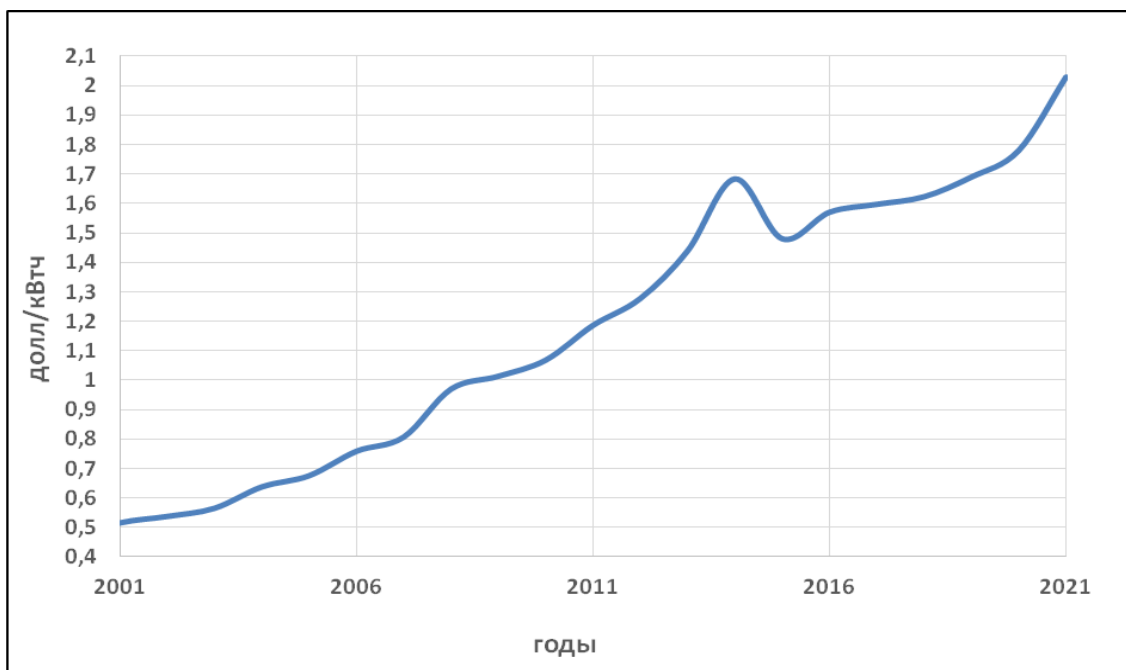


Рис. 5. Энергоэффективность энергетики Таджикистана.

Возникает вопрос, зачем нужно такое развитие энергетики - себе в убыток? Дело в том, что электроэнергия не является конечным продуктом, она только сырье или полуфабрикат, используемые в других отраслях экономики. Именно там генерируется основная прибыль, формирующая ВВП страны. Например, как показывает рис. 5, сегодня в Таджикистане каждый киловатт-час обеспечивает более 2-х долларов ВВП. Это, как минимум, в 10÷30 раз компенсирует те потери, которые имеет сама энергетика в ее развитии при действующем сегодня тарифе.

ЛИТЕРАТУРА

1. The International Journal on HYDROPOWER&DAMS.1997. World Atlas and Industry Guide.
2. Абдуллаева Ф.С., Баканин Г.В. и др. Гидроэнергетические ресурсы Таджикской ССР. – Л.: «Недра», 1965, 658 с.
3. Гидроэнергетика и устойчивое развитие. – М.: Гидротехническое строительство, 2005, №1.
4. Петров Г.Н., Ахмедов Х.М. Стратегия развития и пути повышения эффективности энергетики Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2017, 357 с.
5. Петров Г.Н., Халиков Х.Х. Гидро-угольный сценарий развития энергетики Таджикистана. – Известия АН РТ, Отд. физ.-мат., хим. и геологических наук, 2019, № 2(175), с. 79-86
6. Бабуринов Б.Л., Файн И.И. Экономическое обоснование гидроэнергостроительства. – М.: «Энергия», 1975, 121 с.
7. Ахророва А.Д., Аминджанов Р.М., Доронкин К.А. Энергетика Таджикистана: современные тенденции и перспективы устойчивого развития. – Душанбе: «Статус», 2005, 132 с.
8. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Издательство «Дело и Сервис», 2004, 368 с.
9. Четыркин Е.М. Финансовая математика. – М.: Дело, 2006, 400 с.

10. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Справочное издание, – М.: «Финансы и статистика», 1985, 487с.
11. Могиленко А.В. Энергоэффективность в энергетических рейтингах: применяемые критерии. – Энергоресурсосбережение и энергоэффективность, 2018, № 5, с. 16-22.
12. Гидроэнергетика и устойчивое развитие. – М.: Гидротехническое строительство, 2005, №1.

Ҳ.ҲАЛИКОВ

САМАРАНОКИИ ИҚТИСОДИИ ЭНЕРГЕТИКАИ ТОҶИКИСТОН

Институти масъалаҳои об, гидроэнергетика ва экология

Масъалаи самаранокии рушди энергетикаи Тоҷикистон дар замони ҳозира дида баромада шудааст. Роҳи соддакардашудаи мукамалгардонии тарқиби энергияи обу гармии пешниҳод карда шудааст. Самаранокии умумии иқтисодии рушди энергетика дар шароити, ки нархҳои амалкунанда аз нархи аслиаш паस्तтар мебошад, нишон дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: меъери даромади дохили, об, энергияи оби, СОБ, марҳилаи мавҷудият, меъери безарарноки, нархи баргардони, СГБ, ангишт, иқтидори муайянкардашуда, чараҳои молияви, энергетика.

Kh.KHALIKOV

ECONOMIC EFFICIENCY OF THE ENERGY INDUSTRY OF TAJIKISTAN

Institute of water problems, hydropower and ecology NAST

The issue of efficiency of energy development in Tajikistan in modern conditions is considered. A method of optimization in its composition of hydro- and thermal power engineering is proposed. It is shown that the overall economic efficiency of energy development is ensured even when the current tariff is significantly lower than the payback tariffs.

Key words: break-even criterion, coal, energy, financial flow, HPP, hydropower, installed capacity, internal rate of return, life cycle, payback rate, TPP, water.

УДК 623.454.862.

М.З.АХМЕДОВ

РАДОНОВЫЙ МОНИТОРИНГ ТЕРРИТОРИИ ТАДЖИКИСТАНА

*Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности
НАН Таджикистана
Поступила в редакцию 19.10.2022 г.*

В статье приведены результаты радонового мониторинга территории Таджикистана, обсуждены существующие проблемы радоновой опасности на территории Таджикистана. Приводятся состояния некоторых радоноопасных участков. Отмечается необходимость разработки радоновой программы страны.

Ключевые слова: радон, мониторинг, объёмная активность, радиоактивные отходы, гамма-излучение.

Как известно, радон (Rn) – это радиоактивный газ без запаха, цвета и вкуса. Rn образуется в процессе радиоактивного распада урана, который присутствует в различных горных породах.

Радон является одной из основных причин развития рака лёгких. По оценкам, радон вызывает от 3 до 14% всех случаев рака лёгких в зависимости от места жительства человека.

Впервые повышенная заболеваемость раком лёгких была отмечена у шахтёров, работающих в урановых рудниках и подвергающихся воздействию радона в очень высоких концентрациях. Кроме того, исследования, проведённые в СССР, Северной Америке и Китае, подтвердили, что даже очень низкие концентрации радона, которые, например, часто регистрируются в жилых помещениях, также создают риски для здоровья и способствуют развитию рака лёгких у людей во всём мире [1-3].

Увеличение средней концентрации радона за длительный период на 100 Бк/м^3 увеличивает примерно на 15-20% риск развития рака лёгких. Считается, что соотношение

Адрес для корреспонденции: Ахмедов Матин Зафарджонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по ХБРЯ безопасности НАНТ. E-mail: info@cbrn.tj

доза-ответ является линейным, то есть риск развития рака лёгких возрастает пропорционально увеличению воздействия радона. Большинство людей подвергаются наиболее сильному воздействию радона в жилых домах, где они проводят много времени. Однако рабочие места внутри зданий могут также являться источником неблагоприятного воздействия. Концентрация радона внутри зданий зависит от многих факторов: геологических особенностей, строительных материалов, от грунта и фундамента зданий [4-6].

Так как рельеф местности Таджикистана является горным, имеется много тектонических разломов, которые способствуют выделению радона на поверхность.

Эквивалентная равновесная объёмная активность (ЭРОА) радона в воздухе помещений является важной характеристикой радоноопасности территорий, учитываемой при проектировании и эксплуатации зданий различного назначения. Это связано прежде всего с тем, что ЭРОА является комплексной характеристикой, учитывающей объёмные активности (ОА) дочерних продуктов распада, таких как ^{218}Po , ^{214}Pb и ^{214}Bi , причем два последних являются гамма-излучателями. Поступление радона в воздух помещений регламентируется наличием ^{226}Ra в подстилающей поверхности в строительных материалах, слагающих структуру того или иного здания. При определении ЭРОА радона руководствуются характеристикой сдвига радиоактивного равновесия между самим радоном и его дочерними продуктами распада. Годовой режим ЭРОА радона находится в прямой зависимости от разницы внутренне-внешних температур, сезонного промерзания грунтов [7].

В связи с вышесказанным, весьма важным и своевременным для Республики Таджикистан является проведение радонового мониторинга на территории Таджикистана и составление карты, оценки радоноопасности территории и, при необходимости, разработка «радоновой программы» в стране.

В настоящей работе дана оценка радоноопасности территории Таджикистана в зависимости от наличия отходов урановой промышленности, а также результаты радонового мониторинга питьевых вод некоторых районов Таджикистана.

На территории бывшей промышленной площадки горнодобывающего предприятия северного Таджикистана сосредоточены радиоактивные отходы, образовавшиеся в результате деятельности предприятия уранового производства: отвалы горных пород, отвалы кучного выщелачивания и фабрики бедных руд, хвостохранилища (г. Истиклол). Отходы образовались в период с 1945 по 1965 гг. от производственной деятельности двух гидрометаллургических заводов и двух обогатительных фабрик по добыче урановой руды и их переработки. Табашарское урановое месторождение было основной сырьевой базой ГП «Востокредмет» до 1965 г. Общая площадь хвостохранилищ и отвалов забалансовых руд в Табашаре составляет 63 га. Мощность экспозиционной дозы (МЭД) гамма-излучения в окружении отвалов была определена на уровне 0.4-0.7 мкЗв/час и достигала 1.0-3.0 мкЗв/час в местах, где находятся отвалы забалансовых руд. Среднегодовой выброс радона с поверхности оценивается в 0.39 ТБк/год.

Опыт реализации стратегии решения радоновой проблемы, направленной на снижение индивидуальных рисков от радона в существующих зданиях, показал, что основными сложностями являются крайне низкая осведомлённость населения о радоне и его воздействии на организм человека, а также отсутствие опыта в области применения радонозащитных мероприятий. Как показывает практика, низкая информированность препятствует широкому вовлечению населения, ограничивая рамки радонового мониторинга преимущественно детскими образовательными учреждениями и рабочими местами, где соблюдение стандартов качества воздуха в помещении возведено в ранг норматива и его соблюдение является обязательным для работодателя.

Современный опыт реализации радоновых программ указывает на необходимость развития инфраструктуры взаимодействия между местными органами власти, населением, строительными организациями, образовательными учреждениями и другими заинтересованными сторонами. Целью скоординированной политики в этой области является формирование доступного для населения информационно-правового поля и создание на его основе новой сферы оказания услуг, способствующей активному вовлечению населения в процесс улучшения среды обитания.

Полученные данные по результатам радонового мониторинга свидетельствуют о том, что проблема защиты населения от воздействия радона требует комплексного изучения и оценки.

Содержание радона изменялось в зависимости от времени года, и наблюдалось повышенное содержание радона над хвостохранилищами в летний период.

Динамика объёмной активности (ОА) радона в воздухе жилых помещений различных районов Таджикистана колеблется от 55 до 70 Бк/м³ для северного Таджикистана, а для центрального Таджикистана – от 40 до 60 Бк/м³.

Проведено измерение ОА и ЭРОА радона в воздухе на территории хвостохранилищ (табл. 1).

Таблица 1

Средние значения ОА и ЭРОА радона в воздухе на исследованных территориях
Таджикистана

Места установки детекторов	Количество, штук	ОА радона, Бк/м ³	ЭРОА радона, Бк/м ³
Дигмайское хвостохранилище, пос. Гозиён			
Дигмайское хвостохранилище	105	600	240
пос. Гозиён	160	42	17
Хвостохранилище «Карта 1-9», г. Бустон			
Хвостохранилище «Карта 1-9»	34	38	15
г. Бустон	56	47	19
пос. Окарык	10	37	15
Гафуровское хвостохранилище, г. Гафуров			
Гафуровское хвостохранилище	30	55	22
г. Гафуров	70	61	24

Продолжение таблицы 1

Места установки детекторов	Количество, штук	ОА радона, Бк/м ³	ЭРОА радона, Бк/м ³
Хвостохранилища г. Истиклол и пос. Старый Табошар			
Хвостохранилище г. Истиклол	92	28	11
Поселок Старый Табошар	26	140	56
Горный район на расстоянии четыре км от г. Истиклол	10	12	5
Г. Истиклол	35	118	47
Здание бывшего полуразрушенного завода	4	1319	528
Хвостохранилище №2, поселок Адрасман			
Хвостохранилище №2	9	150	60
Поселок Адрасман	50	88	35
Отвалы месторождения Киик-Тал, г. Худжанд			
Отвалы месторождения Киик-Тал	4	42	17
г. Худжанд	76	32	13

Проведены измерения объёмной активности радона в воде родников и скважин некоторых районов Таджикистана (табл. 2).

Таблица 2

Объёмная активность R_п в воде из родников и скважин
на территории северного Таджикистана

Номер пробы	Место отбора пробы	pH	ОА радона в воде, Бк/л
Дж. Расуловский район			
1	Джамоат Дигмай, родник Чашма (№1 на расстоянии 8 км от хвостохранилища)	7.0	11.1±4
2	Джамоат Дигмай, родник Чашма (№2 на расстоянии 8 км от хвостохранилища)	7.0	19.8±8
3	Джамоат Дигмай, источник, Сассиқбулоқ (родник 3 на расстоянии 6 км от хвостохранилища)	7.2	24.9±10
4	Поселок Газиян (западная часть, скважина 1)	7.0	37.0±13
5	Поселок Газиян (средняя часть, скважина 2)	7.0	36.3±14
6	Поселок Газиян (восточная часть, скважина 3)	7.3	32.7±13
На территории Шахристана			
7	Поселок Чашмасор (родник)	6.94	7±2
8	Поселок Чашмасор (скважина)	7.13	13±5
9	Поселок Темурмалик	7.27	10±3
10	Поселок Истиклол	7.3	10±4
11	Поселок Фирдавси	7.0	7±2
12	Поселок Бустон	7.2	12
13	Поселок Себзор (скважина)	7.69	12±2
14	Поселок Чашма	7.54	10±2
15	Поселок Вогат	7.6	10±2
На территории Истравшана			
16	Поселок Ниджоми	7.9	6±4
17	Поселок Кунджоб	7.76	10±2
18	Поселок Ширинчашма	7.55	6±2
19	Поселок калачай баланд	7.7	15±2
20	Поселок Чавкандак	7.9	13±2

Анализ результатов показал, что чем ближе к хвостохранилищу находится источник, тем выше значения ОА радона в воде (родник №3 и скважина №1). Это может быть связано с просачиванием подземных вод самого хвостохранилища, что приводит к росту ОА радона в этом месте. В связи с этим необходимо организовать постоянный мониторинг указанных участков территории северного Таджикистана, при этом обратить особое внимание на водные источники, расположенные в ареале радиоактивных хвостохранилищ.

Таким образом, оценка радоновой обстановки на территории Таджикистана свидетельствует о том, что объекты уранового наследия, особенно радиоактивные хвостохранилища в г. Истиклол и Дигмайское хвостохранилище являются наиболее значимыми источниками поступления радона в воздух. Хотя с учётом климатических условий указанных хвостохранилищ, связанных с проветриваемостью и разбавлением воздуха, эксхалляция радона на радоновую обстановку в жилых зданиях, расположенных в населённых пунктах вблизи них, не оказывает существенного влияния.

Для улучшения радоновой обстановки на территории Таджикистана рекомендуется провести комплекс рекультивационных мероприятий, прежде всего на объектах уранового наследия – радиоактивных хвостохранилищах Дигмай и г. Истиклол.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеушева Г.И., Шалаев И.Л., Глушинский М.В. Количественная оценка профессионального риска смерти от рака лёгкого при подземной добыче урановых руд. – Медицинская радиология и радиационная безопасность, 2004, №2, с.13-16.
2. Крисюк Э.М. Радиационный фон помещений. – М., 1989, 120 с.
3. Коренков И.П., Польских О.Г., Соболев И.А. Радон в коммунальных и промышленных сферах, проблемы нормирования, биологическое действие, методики измерений. – М., 1993, 250 с.
4. Павлов И.В., Покровский С.С., Камнев Е.Н. Способы обеспечения радиационной безопасности при разведке и добыче урановых руд. – М.: Энергоатомиздат, 1994, 256 с.
5. Маренный А.М., Киселёв С.М. Национальные радоновые программы: Опыт реализации и задачи на перспективу. – Радиационная гигиена, 2019, т.12, Спецвыпуск, с.97-108.
6. Handbook on Indoor Radon: A Public Health Perspective. World Health Organization (WHO). WHO Press, Geneva, 2009.
7. Рахматов Н.Н., Назаров Х.М., Эрматов К.А., Бобоев Б.Д. Временная динамика концентрации радона в жилых помещениях. – Материалы X Международной научно-практической конференции «Найновите постижения на европейската наука», 2014, т.18. Биология. Экология. Здание и архитектура. София. «Бял ГРАД-БГ» ООД, с.82-85.

М.З.АХМЕДОВ

МОНИТОРИНГИ РАДОНЌ ДАР ҲУДУДИ ТОҶИКИСТОН

Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии АМИ Тоҷикистон

Дар мақола натиҷаҳои мониторинги радонӣ дар қаламрави Тоҷикистон оварда шуда, мушкилоти мавҷудаи хатари радон дар қаламрави Тоҷикистон баррасӣ шудааст.

Ҳолати баъзе минтақаҳои хатарноки радон оварда шудааст. Зарурати тартиб додани барномаи радон барои ҷумҳурӣ ба қайд гирифта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: радон, мониторинг, фаъолияти ҳаҷмӣ, партовҳои радиоактивӣ, гамма-шуоъҳо.

M.Z.AHMEDOV

RADON MONITORING IN THE TERRITORY OF TAJIKISTAN

*Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety and Security Agency
of the NAS of Tajikistan*

The article presents the results of radon monitoring of the territory of Tajikistan and discusses the existing problems of radon hazard in the territory of Tajikistan. The states of some radon hazardous areas are given. The need to develop a radon program for the country is noted.

Key words: radon, monitoring, volumetric activity, radioactive waste, gamma radiation.

УДК 504.064.2+504.43

Ш.Н.ИШРАТОВ, С.В.МУМИНОВ, М.З.АХМЕДОВ

**РАДИАЦИОННЫЙ КОНТРОЛЬ ПИТЬЕВЫХ ВОД МЕТОДОМ
ИЗМЕРЕНИЕ СУММАРНОЙ АЛЬФА- И БЕТА-АКТИВНОСТИ**

*Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности
НАН Таджикистана*

Поступила в редакцию 02.08.2022 г.

Проведены измерения удельной суммарной альфа- и бета-активности природных радионуклидов в воде источников питьевого водоснабжения некоторых районов Таджикистана и оценено санитарно-гигиеническое качество воды.

Ключевые слова: альфа- и бета-активность, природные радионуклиды, питьевая вода.

Содержание естественных радионуклидов в пресной и речной воде зависит от состава воды. Радиоактивность речных и озерных вод зависит от источника их питания. Дождевые, снеговые и ледниковые воды содержат небольшие количества солей, поэтому водоемы горных районов высоких широт, имеющие этот источник питания, практически стерильны в отношении естественных радионуклидов.

Природные радионуклиды поступают в открытые водоемы суши в основном с подземными водами. Грунтовые и пластовые воды, питая озера и реки, определяют уровень природной радиоактивности воды этих водоемов. Поэтому радиоактивность воды рек и озер подвержена значительным колебаниям. Она зависит от химического и минерального состава дренируемых или горных пород, в которых располагаются чаши озер или водосборы рек. К другому важному фактору, влияющему на степень радиоактивности воды открытых водоемов, относится климат от которого зависит степень химического выветривания горных пород, являющихся основным поставщиком природных радионуклидов [1-5].

Адрес для корреспонденции: Ахмедов Матин Зафарджонович, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАНТ. E-mail: m.akhmedov@cbrn.tj

У содержащихся в питьевой воде радионуклидов природного происхождения мощность дозы излучения обычно выше, чем у искусственно созданных радионуклидов, и поэтому они вызывают большую обеспокоенность. Наиболее эффективным способом контроля радиационных рисков является метод профилактического управления рисками, на основе концепции безопасности питьевой воды и плана обеспечения безопасности воды. При рассмотрении вопроса о принятии мер по оценке радиационных рисков и управлению этими рисками необходимо обеспечить, чтобы при этом ограниченные ресурсы не были отвлечены от других, более важных задач в области общественного здравоохранения. Следует отметить, что суммарная альфа-активность воды обусловлена содержанием в ней природных радионуклидов (радий-226, -224, -228, полоний-210, висмут-210, уран-238, -234, торий-232, -228, -230, калий-40), а суммарная бета-активность воды определяется техногенными радионуклидами (цезий-137, стронций-90) [7].

В некоторых системах питьевого водоснабжения, в частности использующих в качестве источника грунтовые воды, может содержаться радиоактивный газ радон. Хотя радон может попадать в воздух в жилых помещениях из воды, поступающей из водопроводных кранов либо при приеме душа, наиболее существенным источником радона в воздухе в помещениях является естественное скопление радона в окружающей среде. Анализ международных научных данных (UNSCEAR, 2000) показал, что в среднем 90% дозы облучения, относимой за счет радона в питьевой воде, идет в организм ингаляционным способом, а не через пищеварительный тракт. Следовательно, обычно нет необходимости устанавливать скрининговые и нормативные уровни для ограничения дозы излучения, воздействующего на организм при попадании содержащегося в питьевой воде радона через пищеварительный тракт. Контрольные замеры общего уровня альфа-радиоактивности и бета-радиоактивности будут включать излучение дочерних продуктов распада радона, являющихся основным источником доз облучения при попадании в пищеварительный тракт радона, содержащегося в системах питьевого водоснабжения.

По данным Научного комитета Организации Объединенных Наций по действию атомной радиации (НКДАР ООН), вклад питьевой воды в суммарную дозу облучения населения не является преобладающим (за исключением отдельных регионов) и обусловлен в основном, присутствующими в воде радионуклидами природных рядов урана и тория. Наибольший вклад в формирование дозы облучения за счёт потребления питьевой воды вносят изотопы урана – ^{238}U и ^{235}U , радия – ^{226}Ra и ^{228}Ra , радона – ^{222}Rn и полония – ^{210}Po в меньшей степени – свинец – ^{210}Pb и изотопы тория – ^{228}Th , ^{230}Th , ^{232}Th .

Цель настоящей работы: оценка соответствия питьевых вод некоторых источников водоснабжения Таджикистана требованиям радиационной безопасности.

Материалы и методы

Наиболее часто используемым методом анализа питьевой воды на общий уровень альфа- и бета-радиоактивности (за исключением радона) является выпаривание известного объема пробы и измерение уровня радиоактивности в полученном сухом остатке. По-

сколькo альфа-излучение легко поглощается тонким слоем твердого вещества, надежность и чувствительность данного метода определения альфа-излучения могут быть снижены при применении к пробам с высоким общим содержанием растворенных твердых веществ (ОСРТВ). При возможности следует применять стандартизированные методы определения концентрации общей альфа- и общей бета-радиоактивности.

В процессе исследования было отобрано 12 проб воды из разных источников питьевых вод, 4 из которых являлись бутилированной водой из природных источников, для продажи. Измерения удельной суммарной альфа- и бета-активности природных радионуклидов проводились в Лаборатории технических услуг при Агентстве по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАНТ.

Для измерения удельной суммарной альфа активности и удельной суммарной бета активности, пробы воды отбирались согласно ГОСТ 31861, ГОСТ 31862 и ГОСТ 17.1.5.05 в герметичные пластиковые бутылки объёмом 1,5 дм³, которые предварительно ополаскивали отбираемой водой. Отобранные пробы воды были промаркированы и отправлены в Лабораторию технических услуг Агентства. Для определения удельной суммарной альфа- и бета-активности из пробы объёмом 1,5 дм³ путем упаривания до сухого остатка, готовился опытный образец, активность которого определяли на альфа-бета-радиометре. Измерение суммарной альфа- и бета-активности в воде проводили прибором УМФ-2000 производства Российской компании «Доза».

Результаты исследований и обсуждение

В пробах обследуемых вод наибольшие значения удельной суммарной альфа-активности и бета-активности радионуклидов отмечались в образце воды «Сурхоб», в котoром альфа-активность 0.01 Бк/л, а бета-активность 0.0047 Бк/л (рис.1).

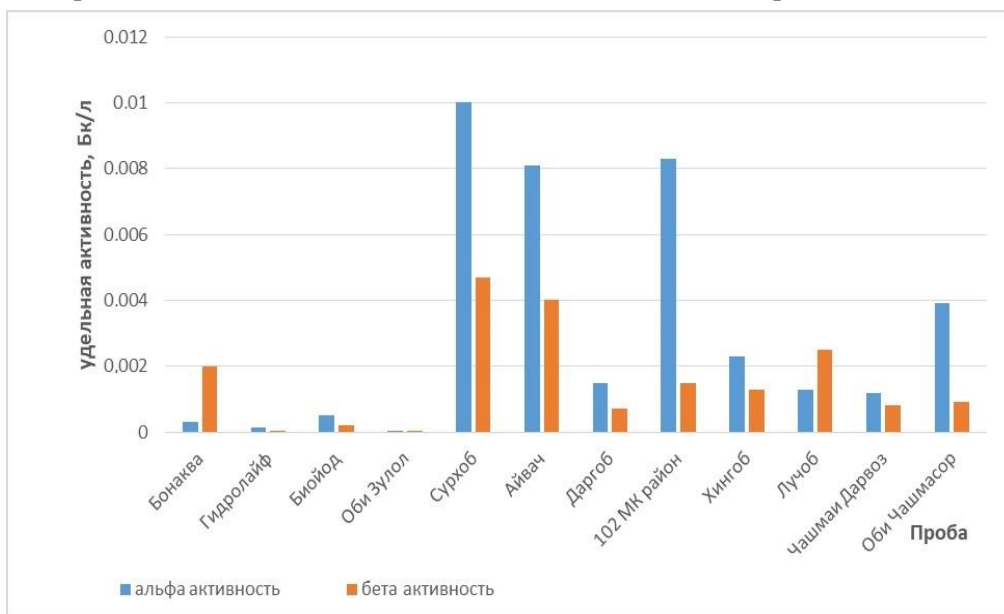


Рис. 1. Диаграмма удельной суммарной альфа- и бета-активности в пробах воды из источников водоснабжения некоторых районов Таджикистана.

Как видно из рисунка превышения в этих случаях не отмечается. Согласно Нормам радиационной безопасности Республики Таджикистан (НРБ-06) [8], в питьевой воде суммарная альфа-активность не должна превышать 0.1 Бк/л, а суммарная бета-активность – 1.0 Бк/л.

Пробы воды с самыми низкими значениями удельной суммарной альфа- и бета-активности радионуклидов воды отмечались в воде «Оби Зулол».

Эта работа является одним из первых этапов по оценке соответствия вод Таджикистана требованием радиационной безопасности. В целом в обследуемых водах не зарегистрированы повышения альфа- и бета-активности. Необходимо регулярный контроль радиологического состояния подземных вод Таджикистана, используемых для водоснабжения и бальнеологических целей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муминов С.В., Баротов Б.Б., Мухиддинова Ф.Г., Мирсаидов У.М. Удельная суммарная активность природных радионуклидов в воде источников питьевого водоснабжения Хатлонской области Республики Таджикистан. Материалы Республиканской научно-практической конференции «Современные проблемы физики конденсированное состояние и ядерная физика», посвященной 20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования». – Душанбе, 2020, с. 329.
2. Кузнецов Ю.В., Щebetковский С.М., Трусков В.И. Основы очистки воды от радиоактивных загрязнений. – М.: Энергоатомиздат, 1974, 315 с.
3. Н.С. Бабаев, В.Ф. Дёмин, Л.А. Ильин и др. Ядерная энергетика, человек и окружающая среда / Под ред. А.П. Александрова. – М.: Энергоатомиздат, 1984. 312 с.
4. Коростелёв Д.П. Обработка радиоактивных вод и газов на АЭС. – М.: Энергоатомиздат, 1988. 152 с.
5. Радиоактивное загрязнение внешней среды. Под ред. В.П. Шведова и С.И. Широкова. – М.: Атомиздат, 1962. 257 с.
6. Никифоров А.Ф., Баранова О.Ю., Балакина О.С. Сорбция радионуклидов цезия и стронция из природных вод алюмосиликатами – Вестник УГТУ-УПИ. 2006, № 12 (83), с. 327.
7. Гонтарев М.В., Малов А.И. Оценка соответствия минеральных вод требованиям радиационной безопасности. – Журнал "Успехи современного естествознания". 2017, № 5, с. 89-94.
8. Нормы радиационной безопасности (НРБ-06): СанПин 2.6.1.001-06. Утверждены приказом Директора Агентства по ядерной и радиационной безопасности Академии наук Республики Таджикистан от 25.12.2006 г. №12. Зарегистрировано в Министерстве юстиции Республики Таджикистан №237 от 16 января 2007 года.

Ш.Н.ИШРАТОВ, С.В.МУМИНОВ, М.З.АХМЕДОВ

**НАЗОРАТИ РАДИАТСИОНИИ ОБҶОИ НҶШОКӢ БО УСУЛИ
ЧЕНКУНИИ ФАЪОЛНОКИИ УМУМИИ АЛФА- ВА БЕТА-ЗАРРАҶО**

Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии АМИ Тоҷикистон

Ченкунии фаъолияти хоси умумии алфа- ва бета-радионуклидҳои табиӣ дар обҳои манбаъҳои нӯшокии баъзе минтақаҳои Тоҷикистон гузаронида шуда, сифати санитарии гигиении ин обҳо баҳо дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: алфа- ва бета-фаъолнокӣ, радионуклидҳои табиӣ, обҳои нӯшокиӣ.

Sh.N.ISHRATOV, S.V.MUMINOV, M.Z.AKHMEDOV

**RADIATION CONTROL OF DRINKING WATER BY THE METHOD
OF MEASURING TOTAL ALPHA AND BETA ACTIVITY**

*Chemical, Biological, Radiation and Nuclear Safety & Security Agency
of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

Measurements of the specific total alpha and beta activity of natural radionuclides in the water of drinking water supply sources in some regions of Tajikistan were carried out and the sanitary and hygienic quality of water was assessed.

Key words: alpha and beta activity, natural radionuclides, drinking water.