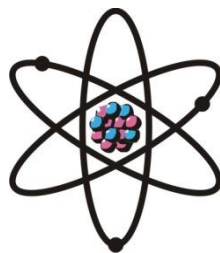


**ОТДЕЛЕНИЕ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,  
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК**

Журнал основан  
в январе 1952 г.



№ 3 (192)  
2023 г.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

**Г.И.Кохирова** – главный редактор, член-корреспондент, доктор физико-математических наук; **С.А.Исхоков** – зам. главного редактора, член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **С.Х.Абдулаева** – ответственный секретарь; **О.Амирзода** – доктор технических наук; **Х.М.Ахмедов** – академик, доктор химических наук; **Ш.Б.Бабаджанов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Бадалов** – член-корреспондент, доктор химических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **С.Р.Мавлони** – кандидат геолого-минералогических наук; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **Д.Н.Низомов** – член-корреспондент, доктор технических наук, профессор; **С.О.Одинаев** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Ф.Рахими** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Т.Х.Салихов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор.

**СОДЕРЖАНИЕ**

**МАТЕМАТИКА**

<b>А.Г.Айдармамадов, Н.У.Кадамшоев, В.Д.Сайнаков.</b> Наилучшее совместное полиномиальное приближение функций и их производных в пространстве Бергмана .....	7
<b>Г.Джангибеков, К.Ш.Файззода.</b> Задача Дирихле для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости .....	17
<b>О.А.Джурахонов.</b> Скорость сходимости частных сумм двойного ряда Фурье по ортогональным многочленам .....	29
<b>С.З.Курбаншоев, М.А.Нусайриев.</b> Исследование устойчивости решений системы стохастических дифференциальных уравнений .....	38

<b>Н.Раджабов, М.Мамадалиев, Е.Мирзоев.</b> Переопределенная линейная система интегральных уравнений Вольтерра с одной граничной и одной внутренней сингулярной линией .....	<b>43</b>
<b>Ю.Х.Хасанов.</b> Модули гладкости дробного порядка и наилучшие приближения в $L_p(1 < p < \infty)$ .....	<b>56</b>

#### **АСТРОНОМИЯ**

<b>Г.И.Кохирова, П.Б.Бабаджанов.</b> Современные сведения об объектах, сближающихся с Землей: II. Угасшие кометы и астероидно-метеороидные комплексы.....	<b>65</b>
---	-----------

#### **НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ**

<b>М.М.Тагоев, К.И.Нематуллоев, А.М.Исоев, Т.Б.Холматов, Д.Х.Мирзоев.</b> Комплексная переработка нефелиновых сиенитов с получением коагулянтов .....	<b>80</b>
<b>К.И.Нематуллоев, Н.А.Ашурзода, А.С.Курбонов, И.М.Рахимов, У.М.Мирсаидов.</b> Сернокислотное разложение магнетитовой руды месторождения Харангон Таджикистана ....	<b>85</b>

#### **ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ**

<b>В.Д.Абулхаев, М.А.Балаев, И.Н.Ганиев, Х.Х.Назарзода, Б.Д.Сайдалиев, С.О.Убайдов.</b> Диаграмма состояния системы $Tb_4Sb_3-Nd_4Sb_3$ .....	<b>91</b>
<b>З.Х.Гайбуллаева, Т.Х.Гадоев, Ф.М.Рахимов, Б.И.Асроров, А.Шарифов.</b> Кинетика газификации углерода кислородом .....	<b>97</b>
<b>Т.М.Умарова, К.Н.Пирназарова, Х.О.Одиназода.</b> Синтез и физико-химические свойства интерметаллида $AlSm$ .....	<b>103</b>

#### **ГЕОЛОГИЯ**

<b>Ф.Г.Гафуров.</b> О карбонатитовых проявлениях Таджикистана .....	<b>112</b>
<b>Ш.Ф.Валиев, С.Нусратулло.</b> Воздействия захороненных токсичных отходов рудного поля Чоре на геоэкологическую среду .....	<b>117</b>

#### **ЭНЕРГЕТИКА**

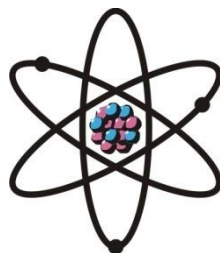
<b>М.Илолов, Ш.О.Кабилов, С.Расулов, Дж.Ш.Рахматов, Н.Ш.Юсуфбеков.</b> О выборе технологии производства зеленого водорода в Таджикистане .....	<b>124</b>
--	------------

#### **РАДИАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ**

<b>М.З.Ахмедов, Х.М.Назаров, Б.Д.Бобоев, Ш.А.Рахимбердиев, Ф.З.Шафиев, И.Мирсаидзода.</b> Радиационный фон Исфаринского района Республики Таджикистан .....	<b>132</b>
---	------------

**ШҮЪБАИ**  
**ИLMҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,**  
**ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА**

Мачалла аз мохи  
январӣ соли 1952  
нашр мешавад



№ 3 (192)  
с. 2023

---

**ХАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:**

**Кохирова Г.И.** – сармуҳаррир, узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика;  
**С.А.Исҳоков** – муовини сармуҳаррир, узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика,  
профессор; **С.Ҳ.Абдулоева** – котиби масъул; **О.Амирзода** – доктори илмҳои техникӣ; **Ҳ.М.Ах-  
медов** – академик, доктори илми химия; **А.Бадалов** – узви вобаста, доктори илми химия, про-  
фессор; **П.Б.Бобочонов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор;  
**И.Н.Ғаниев** – академик, доктори илми химия, профессор; **М.И.Илолов** – академик, доктори  
илмҳои физикаю математика, профессор; **С.Р.Мавлони** – номзади илмҳои геология ва минера-  
логия; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор; **С.Х.Неъматуллоев** – ака-  
демик, доктори илмҳои техникӣ; **Д.Н.Низомов** – узви вобаста, доктори илмҳои техникӣ, про-  
фессор; **С.О.Одинаев** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Ф.Раҳимӣ**  
– академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Ҳ.Раҳмонов** – академик, док-  
тори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Раҷабов** – академик, доктори илмҳои фи-  
зикаю математика, профессор; **Т.Х.Салихов** – доктори илмҳои физикаю математика, профес-  
сор; **А.Р.Ғайзиев** – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва минералогия, профессор;  
**Ҷ.Х.Холиқов** – академик, доктори илми химия, профессор.

**МУНДАРИҶА**

**МАТЕМАТИКА**

<b>А.Г.Айдармамадов, Н.У.Кадамшоев, В.Д.Сайнаков.</b> Наздиккунии беҳтарини полиномиалии ҳамҷояи функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо дар фазои Бергман .....	7
<b>Г.Ҷангибеков, К.Ш.Ғайзода.</b> Масъалаи Дирихле барои баъзе системаҳои муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии тартиби шаш дар ҳамворӣ.....	17
<b>О.А.Ҷӯрахонов.</b> Сурати наздикшавии суммаҳои "секунчагии" хусусии қатори Фурье бо полиномҳои ортогоналӣ.....	29
<b>С.З.Қурбоншоев, М.А.Нусайриев.</b> Тадқиқи ҳалҳои устувории системаҳои стохастикӣ муодилаҳои дифференсиалӣ.....	38
<b>Н.Раҷабов, М.Мамадалиев, Е.Мирзоев.</b> Системаи ҳатии интегралӣ барзиедмуайаншудаи намуди Волтерра бо як хати сингулярии сарҳади ва як хати сингулярии дохили .....	43

**Ю.Х.Хасанов.** Модули бефосилагии тартиби касрӣ ва наздикшавии беҳтарин дар  $L_p(1 < p < \infty)$ ..... **56**

#### **АСТРОНОМИЯ**

**Г.И.Қоҳирова, П.Б.Бобочонов.** Маълумотҳои муосир дар бораи объектҳо ба Замин наздикшаванда: II. Кометаҳои хомуш ва комплексҳои астероидию метеороидӣ ..... **65**

#### **ХИМИЯИ ҒАЙРИОРГАНИКӢ**

**М.М.Тағоев, Қ.И.Нематуллоев, А.М.Исоев, Т.Б.Холматов, Д.Х.Мирзоев.** Коркарди комплекси нефелинҳои сиенитӣ бо мақсади ба даст овардани коагулянтҳо ва шишаи моеъ. **80**

**Қ.И.Нематуллоев, Н.А.Ашурзода, А.С.Қурбонов, И.М.Рахимов, У.М.Мирсаидов.** Таҷзияи маъдани магнетитии кони Харангони Тоҷикистон бо кислотаи сулфат ..... **85**

#### **ХИМИЯИ ФИЗИКАВӢ**

**В.Д.Абулхаев, И.Н.Ғаниев, М.А.Балаев, Х.Х.Назарзода, Б.Д.Сайдалиев, С.О.Убайдов.** Диаграммаи ҳолати системаи  $Tb_4Sb_3-Nd_4Sb_3$ ..... **91**

**З.Х.Ғайбуллоева, Т.Х.Ғадов, Ф.М.Рахимов, Б.И.Асроров, А.Шарифов.** Кинетикаи бо оксиген газкунии карбон..... **97**

**Т.М.Умарова, К.Н.Пирназарова, Х.О.Одиназода.** Синтез ва хусусиятҳои физикию химиявии AlSm интерметаллид ..... **103**

#### **ГЕОЛОГИЯ**

**Ф.Ғ.Ғафуров.** Оид ба зухуроти карбонатитии Тоҷикистон ..... **112**

**Ш.Ф.Валиев, С.Нусратулло.** Таъсири партовҳои захролуди дафншудаи майдони маъдани Чоре ба муҳити геоэкологӣ ..... **117**

#### **ЭНЕРГЕТИКА**

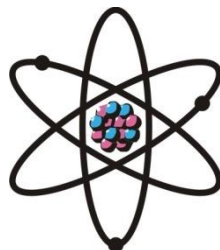
**М.Илолов, Ш.О.Кабилов, С.Расулов, Ҷ.Ш.Раҳматов, Н.Ш.Юсуфбеков.** Дар бораи интиҳоби технологияи истеҳсоли водороди сабз дар Тоҷикистон ..... **124**

#### **БЕХАТАРИИ РАДИАТСИОНӢ**

**М.З.Аҳмедов, М.Назаров, Б.Д.Бобоев, Ш.А.Раҳимбердиев, Ф.З.Шафиев, И.Мирсаидзода.** Фони радиатсионӣ дар ноҳияи Исфараи Ҷумҳурии Тоҷикистон ..... **132**

**DEPARTMENT OF  
PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,  
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES**

The journal was established  
in January 1952



*№ 3 (192)*  
2023

---

**EDITORIAL BOARD**

**G.I.Kokhirova** Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; Prof. **S.A.Iskhokov**, Doctor of of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **S.H.Abdulaeva**, Secretary; **O.Amirzoda**, Doctor of Engineering; **Kh.M.Akhmedov**, Doctor of Chemistry; Prof. **P.B.Babadzhanov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **A.Badalov**, Doctor of Chemistry; Prof. **A.R.Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **M.I.Holov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **I.N.Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **D.Kh.Khalikov**, Doctor of Chemistry; **S.R.Mavloni**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **U.M.Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; **S.Kh.Negmatullaev**, Doctor of Engineering; Prof. **D.N.Nizomov**, Doctor of Engineering; Prof. **S.O.Odinaev**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **N.R.Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **F.Rakhimi**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.Kh.Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **T.Kh.Salihov**, Doctor of Engineering.

**CONTENTS**

**MATHEMATICS**

- A.G.Aydarmamadov**, **N.U.Qadamshoev**, **V.D.Saynakov**. The best joint polynomial approximation of functions and their derivatives in Bergman space ..... 7
- G.Jangibekov**, **K.Sh.Faizzoda**. Of the Dirichlet problem for some elliptic systems of sixes-order differential equations in the plane ..... 17
- O.A.Jurakhonov**. Convergence rate particular sums of the double Fourier series in orthogonal polynomials ..... 29
- S.Z.Kurbanshoev**, **M.A.Nusayriev**. Investigation of solutions to stochastic differential-equivalent systems ..... 38
- N.Rajabov**, **M.Mamadaliyev**, **E.Mirzoev**. Volterra type overdetermined system integral equation with one boundary end one interior singular lines ..... 43
- Yu.Kh.Khasanov**. Fractional order smoothness modules and best approximations in  $L_p(1 < p < \infty)$  56

## ASTRONOMY

**G.I.Kokhirova, P.B.Babadzhanov.** Current data on near-earth objects: II. Extinct comets and asteroid-meteoroid complexes ..... 65

## INORGANIC CHEMISTRY

**M.M.Tagoev, K.I.Nematulloev, A.M.Isoev, T.B.Kholmatov, D.Kh.Mirzoev.** Complex processing of nepheline syenites with obtaining coagulants and liquid glass ..... 80

**K.I.Nematulloev, N.A.Ashurzoda, A.S.Kurbonov, I.M.Rakhimov, U.M.Mirsaidov.** Sulfuric acid decomposition of magnetite ore of the Kharangon deposit of Tajikistan ..... 85

## PHYSICAL CHEMISTRY

**V.D.Abulkhaev, M.A.Balaev, I.N.Ganiev, Kh.Kh.Nazarzoda, B.D.Saydaliev, S.O.Ubaydov.** State diagram of the  $Tb_4Sb_3$ - $Nd_4Sb_3$  system..... 91

**Z.H.Gaibullaeva, T.H.Gadoev, F.V.Rahimov, B.I.Asrorov, A.Sharifov.** Kinetics of gasification of carbon with oxygen ..... 97

**T.M.Umarova, K.N.Pirnazarova, Kh.O.Odinazoda.** Synthesis and physical-chemical properties AlSm intermetallide ..... 103

## GEOLOGY

**F.G.Gafurov.** About carbonatite appearances of Tajikistan..... 112

**Sh.F.Valiev, S.Nusratullo.** Impact of buried toxic waste of the Chore ore field on the geocological environment..... 117

## ENERGETICS

**M.Holov, Sh.O.Kabirov, S.Rasulov, J.Sh.Rahmatov, N.Sh.Yusufbekov.** On the choice of green hydrogen production technology in Tajikistan ..... 124

## RADIATION SAFETY

**M.Z.Akhmedov, Kh.M.Nazarov, B.D.Boboev, Sh.A.Rakhimberdiev, F.Z.Shafiev, I.Mirsaidzoda.** Radiation background in the Isfara district of the Republic of Tajikistan ..... 132

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А.Г.АЙДАРМАМАДОВ, Н.У.КАДАМШОЕВ, В.Д.САЙНАКОВ

**НАИЛУЧШЕЕ СОВМЕСТНОЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ  
ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА**

*Технологический университет Таджикистана*

*Поступила в редакцию 01.03.2023 г.*

*В работе решаются некоторые экстремальные задачи, связанные с наилучшей совместной полиномиальной аппроксимацией функций и с их производными в пространстве Бергмана. Решен ряд экстремальных задач наилучшего совместного приближения некоторых классов функций в пространстве  $B_2$ .*

**Ключевые слова:** наилучшее совместное приближение, аналитическая функция, модуль непрерывности, экстремальная задача.

1. Экстремальные задачи наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций ранее рассмотрены, например, в [1-6]. Здесь мы продолжим исследование в этом направлении и решим некоторые экстремальные задачи, связанные с наилучшим совместным приближением некоторых классов функций и их последовательных производных, в пространстве Бергмана  $B_2$ .

Пусть  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\mathbb{R}_+$  – соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, положительных чисел. Пусть далее  $\mathbb{C}$  – комплексная плоскость,  $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  – единичный круг в  $\mathbb{C}$ ,  $A(U)$  – множество функций  $f$ , аналитических в круге  $U$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1)$$

---

**Адрес для корреспонденции:** Айдармамадов Алишер Гуломалиевич, Кадамшоев Ноибшо Ул-фатшоевич, Сайнаков Восиф Додихудоевич. 734061, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Н. Карабаева, 63/3, Технологический университет Таджикистана. E-mail: alisher1805@mail.ru; nnoyob\_77@mail.ru; vosifvois@mail.ru.

**Определение [1].** Говорят, что функция  $f \in A(U)$  принадлежит пространству Бергмана  $B_p := B_p(U)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , если

$$\|f\|_p := \|f\|_{B_p} = \left( \frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^p d\sigma \right)^{1/p} < \infty, \quad (2)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега,  $d\sigma$  – элемент площади.

Очевидно, что интеграл (2) можно написать в следующем виде

$$\|f\|_p := \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho |f(\rho e^{it})|^p d\rho dt \right)^{1/p} < \infty. \quad (3)$$

В данной работе рассматривается только случай  $p = 2$ , когда  $B_2 := B_2(U)$  является гильбертовым пространством. Известно [7], что функция  $f \in A(U)$  имеет производные  $f^{(r)}(z)$  любых порядков  $r \in \mathbb{N}$ , которые определяются формулой

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

где

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1), \quad k \geq r, \quad k, r \in \mathbb{N},$$

а  $c_k(f)$  – коэффициенты Маклорена функции  $f$ . Всюду далее

$$B_2^{(r)} := \{f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty\}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Пусть  $\mathcal{P}_n$  – подпространство комплексных алгебраических полиномов степени не более  $n$ :

$$\mathcal{P}_n := \left\{ P_n(z) : P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Равенством

$$E_{n-1}(f)_2 := E(f, \mathcal{P}_{n-1})_2 = \inf \{ \|f - P_{n-1}\|_2 : P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \} -$$

определим наилучшее приближение функции  $f \in B_2$  элементами  $P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$  в норме пространства  $B_2$ .

Хорошо известно, что [8, с. 209]



$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \quad (4)$$

где

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

– частная сумма  $n-1$ -го порядка ряда (1). Известно, что для произвольной функции  $f \in B_2^{(r)}$  все ее промежуточные производные  $f^{(\nu)}(z)$  ( $1 \leq \nu \leq r-1$ ,  $r \geq 2$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ) также принадлежат пространству  $B_2$ , причем [9]

$$\begin{aligned} E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 &= \inf \left\{ \|f^{(\nu)} - P_{n-1}^{(\nu)}\|_2 : P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} = \\ &= \|f^{(\nu)} - S_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-\nu+1} \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где

$$S_{n-\nu-1}(f^{(\nu)}) := \sum_{k=\nu}^n a_{k,\nu} c_k(f) z^{k-\nu} = S_{n-1}^{(\nu)}(f).$$

Нам далее понадобятся следующие соотношения, доказанные в работе [4]:

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_2, \quad (5)$$

$$E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-\nu+1}, \quad (6)$$

$$E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}. \quad (7)$$

Соотношения (5)-(7) справедливы для любых чисел  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$ , а  $n > r \geq \nu$ .

Неравенство (5) обращается в равенство для функции  $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$ . Положим

$$\Delta_h^1(f; \rho, u) := f(\rho e^{i(u+h)}) - f(\rho e^{iu})$$

и равенством

$$\omega(f, t)_2 := \omega(f, t)_{B_2} = \sup \left\{ \|\Delta_h^1(f; \rho, u)\|_{B_2} : |h| \leq t \right\}$$

определим модуль непрерывности функции  $f \in B_2$ .

Простые вычисления с применением равенства Парсеваля показывают, что

$$\omega(f, t)_2 := 2 \sup_{|h| \leq t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kh). \quad (8)$$

Пользуясь равенством (8) и учитывая, что для коэффициентов Маклорена разложение в ряд Маклорена производной  $f^{(r)}(z)$  и  $f(z)$  имеет место равенство  $|c_k(f^{(r)})|^2 = \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2$ , запишем

$$\omega^2(f^{(r)}, t)_2 := 2 \sup_{|h| \leq t} \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} (1 - \cos(k-r)t) \quad (9)$$

Нам для дальнейшего понадобятся следующие утверждения из работы [10].

**Теорема А.** При любых  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq \nu$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,\nu}) E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{\left\{ \int_0^\tau \omega^2(f^{(r)}, t)_2 dt \right\}^{1/2}} = \\ & = \left\{ \frac{n-r+1}{n-\nu+1} \cdot \frac{n-r}{2((n-r)\tau - \sin(n-r)\tau)} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

**Теорема В.** Для любых чисел  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq \nu$  и  $0 < t \leq \pi / (n-r)$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r} / \alpha_{n,\nu}) E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{B_2}}{\left\{ \omega(f^{(r)}, t)_{B_2} + (n-r)^2 \int_0^t (t-\tau) \omega^2(f^{(r)}, \tau)_{B_2} d\tau \right\}^{1/2}} = \\ & = \sqrt{\frac{n-r+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{1}{(n-r)t}, \quad 0 < (n-r)t \leq \pi. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть  $\Phi(t)$ , где  $0 \leq t < 2\pi$ , есть непрерывная возрастающая функция такая, что  $\Phi(0) = 0$ . Эту функцию назовем мажорантой.

Исходя из результатов теорем А и В, вводим следующий класс функций:  $\mathcal{F}^{(r)}(\Phi)$  – класс функций  $f \in B_2^{(r)}$ , производные  $r$ -го порядка  $f^{(r)}$  которых при любых  $\tau \in (0, 2\pi]$  удовлетворяют условию

$$\int_0^\tau \omega^2(f^{(r)}, u) du \leq \Phi(\tau), r \in \mathbb{Z}_+,$$

где  $\Phi$  – некоторая мажоранта.

Аналогичным образом через  $\mathcal{F}_1^{(r)}(\omega, \tau)$  обозначим класс функций  $f \in B_2^{(r)}$ , производные  $r$ -го порядка  $f^{(r)}$  которых при любом  $\tau \in (0, 2\pi]$  удовлетворяют условию

$$\omega(f^{(r)}, \tau) + (n-r)^2 \int_0^\tau (\tau-t) \omega^2(f^{(r)}, t) dt \leq 1.$$

В этой работе требуется при любом  $n \in \mathbb{N}$  и  $s = 0, 1, \dots, r$ ;  $r \in \mathbb{N}$ ,  $n > r \geq s$  для множества  $\mathcal{M}^{(r)} \subset B_2^{(r)}$  найти точное значение следующей экстремальной величины

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathcal{M}^{(r)}) = \sup \{ E_{n-s-1}(f^{(s)}) : f \in \mathcal{M}^{(r)} \}, \quad (12)$$

где  $\mathcal{M}^{(r)}$  есть один из введенных выше классов функций  $\mathcal{F}^{(r)}(\Phi)$  или  $\mathcal{F}_1^{(r)}(\omega, \tau)$ .

Имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq s$ . Если мажоранта  $\Phi$  удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi(\tau)}{\Phi(\pi/2(n-r))} \geq \\ & \geq \frac{2}{\pi-2} \begin{cases} (n-r)\tau - \sin(n-r)\tau, & \text{при } 0 < (n-r)\tau \leq \pi, \\ 2(n-r)\tau - \pi, & \text{при } (n-r)\tau > \pi, \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

то справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{n-s-1}(\mathcal{F}^{(r)}(\Phi)) = \\ & = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

**Доказательство.** Из соотношения (5) при  $\tau = \pi/2(n-r)$  для произвольной функции  $f \in B_2^{(r)}$  получаем

$$\begin{aligned} & E_{n-s-1}(f^{(s)}) \leq \\ & \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \int_0^{\pi/2(n-r)} \omega^2(f^{(r)}, t) dt \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Используя определение класса  $\mathcal{F}^{(r)}(\Phi)$ , имеем

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ E_{n-s-1}(f^{(s)}) : f \in \mathcal{F}^{(r)}(\Phi) \right\} \leq \\ & \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \Phi \left( \frac{\pi}{2(n-r)} \right) \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (15)$$

и оценка сверху величины, расположенной слева в равенстве (14), получена. С целью получения аналогичной оценки снизу указанной величины покажем, что при любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r$ ,  $(n+1)$ -мерная сфера полиномов

$$\sigma_{n+1}^* := \left\{ p_n(z) \in \mathcal{S}_n : \|p_n\| = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \Phi \left( \frac{\pi}{2(n-r)} \right) \right\}^{1/2} \right\}$$

принадлежит классу  $\mathcal{F}^{(r)}(\Phi)$ . Для этого докажем, что для произвольного полинома  $p_n(z) \in \mathcal{S}_n$  имеет место неравенство

$$\omega^2(p_n^{(r)}, t) \leq \frac{n+r}{n-r+1} \cdot 2(1-\cos(n-r)t)_* \cdot \alpha_{n,r}^2 \|p_n\|^2, \quad (16)$$

где

$$(1-\cos t)_* := \{1-\cos t, \text{ если } 0 < t \leq \pi; 2, \text{ если } t > \pi\}.$$

В самом деле, пользуясь формулой (9) и учитывая равенство [6]

$$\max_{r \leq k \leq n} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{k+1}{k-r+1} = \alpha_{n,r}^2 \cdot \frac{n+1}{n-r+1},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \omega^2(p_n^{(r)}, t) &= 2 \sup_{|h| \leq t} \sum_{k=r}^n \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k(p_n)|}{k-r+1} (1-\cos(k-r)t) \leq \\ &\leq 2(1-\cos(n-r)t)_* \sum_{k=r}^n \alpha_{k,r}^2 \frac{k+1}{k-r+1} \cdot \frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1} \leq \\ &\leq 2(1-\cos(n-r)t)_* \max_{r \leq k \leq n} \alpha_{k,r}^2 \frac{k+1}{k-r+1} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1} = \\ &= 2(1-\cos(n-r)t)_* \max_{r \leq k \leq n} \alpha_{k,r}^2 \frac{k+1}{k-r+1} \|p_n\|^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2(1 - \cos(n-r)t) \cdot \alpha_{n,r}^2 \cdot \frac{n+1}{n-r+1} \cdot \|p_n\|^2,$$

и неравенство (16) доказано.

Учитывая (16), согласно первой части условия (13) при  $0 < (n-r)\tau \leq \pi$ , имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \omega^2(p_n^{(r)}, t) dt \leq \frac{n+1}{n-r+1} \cdot \alpha_{n,r}^2 \cdot \|p_n\|^2 \cdot 2 \int_0^\tau (1 - \cos(n-r)t) dt = \\ & = \frac{n+1}{n-r+1} \cdot \alpha_{n,r}^2 \cdot \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \frac{2}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \cdot \frac{(n-r)\tau - \sin(n-r)t}{n-r} = \\ & = \frac{2}{\pi-2} [(n-r)\tau - \sin(n-r)\tau] \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \leq \Phi(\tau). \end{aligned} \quad (17)$$

Если же  $(n-r)\tau > \pi$ , то, используя второе из неравенств (13), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \omega^2(p_n^{(r)}, t) dt \left( \int_0^{\pi/(n-r)} + \int_{\pi/(n-r)}^\tau \right) \omega^2(p_n^{(r)}, \tau) d\tau = \\ & = \frac{n+1}{n-r+1} \cdot 2(2(n-r)\tau - \pi) \alpha_{n,r}^2 \cdot \frac{\|p_n\|^2}{n-r} = \\ & = \frac{n+1}{n-r+1} \cdot 2[2(n-r)\tau - \pi] \cdot \frac{\alpha_{n,r}^2}{n-r} \cdot \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) = \\ & = \frac{2}{\pi-2} [2(n-r)\tau - \pi] \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \leq \Phi(\tau). \end{aligned} \quad (18)$$

Из (17) и (18) следует, что при выполнении условия (13) имеет место включение  $\sigma_{n+1}^* \subset \mathcal{F}^{(r)}(\Phi)$ . Теперь рассмотрим функцию

$$g_1(x) = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{z^n}{\alpha_{n,r}}.$$

Для этой функции при всех  $s = 0, 1, \dots, r$

$$g_1^{(s)}(x) = \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot z^{n-s}.$$

В силу равенства (6)

$$E_{n-s-1}(g_1^{(s)}) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}^{1/2}. \quad (19)$$

И так как

$$\|g_1\| = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}^{1/2},$$

то функция  $g_1 \in \sigma_{n+1}^*$ , а значит  $g_1 \in \mathcal{F}^{(r)}(\Phi)$ .

Поэтому, учитывая (19), запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-s-1}(\mathcal{F}^{(r)}(\Phi)) &\geq E_{n-s-1}(g_1^{(s)}) = \\ &= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{ \frac{n-r}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Требуемое равенство получаем из сравнения неравенств (15) и (20).

Л.В.Тайков [11] показал, что функция

$$\Phi_*(\tau) = \tau^{\pi/(\pi-2)}$$

является примером мажоранты, удовлетворяющей условиям (13), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $n > r \geq s$ ,  $0 < t \leq \pi / (n-r)$ . Тогда

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathcal{F}_1^{(r)}(\omega, \tau)) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{(n-r)t}. \quad (21)$$

В частности из (21) при  $t = \pi / (n-r)$  имеем

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathcal{F}_1^{(r)}(\omega, \pi / (n-r))) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}. \quad (22)$$

**Доказательство.** Из равенства (11) следует, что для произвольной функции  $f \in B_2^{(r)}$  имеет место неравенство

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}(f^{(s)}) &\leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{(n-r)t} \times \\ &\times \left\{ \omega(f^{(r)}, t) + (n-r)^2 \int_0^t (t-r) \omega^2(f^{(r)}, \tau) d\tau \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (23), учитывая определение класса  $\mathcal{F}^{(r)}(\omega, t)$ , имеем

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ E_{n-s-1}(f^{(s)}) : f \in \mathcal{F}_1^{(r)}(\omega, t) \right\} \leq \\ & \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{(n-r)t}, 0 < (n-r)t \leq \pi. \end{aligned} \quad (24)$$

Как и в предыдущих теоремах простыми вычислениями можно убедиться, что функция

$$f_2(z) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{z^n}{(n-r)t} \in \mathcal{F}_1^{(r)}(\omega, t)$$

и для этой функции

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathcal{F}_1^{(r)}(\omega, t)) \geq E_{n-s-1}(f_2^{(s)}) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{1}{(n-r)t}. \quad (25)$$

Из неравенств (24) и (25) следует равенство (21) и этим теорема 2 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана. – ДАН России, 2002, т. 383, №2, с. 171-174.
2. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближении и точных значениях поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана  $B_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . – ДАН России, 2006, т. 410, №4, с. 461-464.
3. Шабозов М.Ш., Тухлиев Д.К. О совместном приближении функций и их последовательных производных в пространстве Бергмана. – ДАН РТ, 2018, т. 61, №5, с. 419-426.
4. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратичное приближение функции комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам. – Труды ИМ и М УРО РАН, 2019, т. 25, №2, с. 258-272.
5. Шабозов М.Ш., Хуромонов Х. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана. – Изв. вузов. Матем., 2020, №2, с. 74-92.
6. Шабозов М.Ш., Кадамшоев Н.У. Точные неравенства между наилучшими среднеквадратичскими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана. – Матем. заметки, 2021, т. 110, №2, с. 266-281.
7. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1969, 240 с.
8. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.-Л.: Наука, 1964, 440 с.
9. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенство типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации. – Укр. мат. журнал, 2011, т. 63, №12, с. 1579-1601.
10. Кадамшоев Н.У. О наилучшем совместном полиномиальном приближении функций и их производных в пространстве Бергмана. – Доклады НАН Таджикистана, 2021, т.64, №11-12, с. 637-645.

11. Тайков А.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из  $L_2$ . – Матем. заметки, 1976, т. 20, №3, с. 433-438.

А.Г.АЙДАРМАМАДОВ, Н.У.КАДАМШОЕВ, В.Д.САЙНАКОВ

**НАЗДИККУНИИ БЕХТАРИНИ ПОЛИНОМИАЛИИ ҲАМЧОЯИ  
ФУНКСИЯҲО ВА ҲОСИЛАҲОИ ОНҲО ДАР ФАЗОИ БЕРГМАН**

*Донишгоҳи технологии Тоҷикистон*

Дар мақола баъзе масъалаҳои экстремалӣ, ки бо наздикшавии бехтарини полиномиалии ҳамчояи функцияҳо ва ҳосилаҳои онҳо дар фазои Бергман алоқаманданд, ҳал карда шудааст. Як қатор масъалаҳои экстремалии наздиккунии бехтарини ҳамчояи баъзе синфи функцияҳои дар фазои  $B_2$  ҳал карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** наздиккунии бехтарини ҳамчоя, функцияи аналитикӣ, модули бефосилагӣ, масъалаи экстремалӣ.

A.G.AYDARMAMADOV, N.U.QADAMSHOEV, V.D.SAYNAKOV

**THE BEST JOINT POLYNOMIAL APPROXIMATION OF FUNCTIONS AND  
THEIR DERIVATIVES IN BERGMAN SPACE**

*Technological University of Tajikistan*

In the article, we solve some extremal problems associated with the best joint polynomial approximation of a function and their derivatives in the Bergman space. Solved a number extremal problems the best joint approximation some function classes in space  $B_2$ .

**Key words:** best joint approximation, analytic function, modulus of continuity, extremal problems.

**Сведения об авторах:**

**Айдармамадов Алишер Гуломалиевич** – кандидат физико-математических наук, Технологический университет Таджикистана, заведующий кафедрой высшей математики и информатики. E-mail: alisher1805@mail.ru;

**Кадамшоев Ноибшо Улфатшоевич** – Технологический университет Таджикистана, старший преподаватель кафедры программирования и компьютерной инженерии. E-mail: nnoyob\_77@mail.ru;

**Сайнаков Восиф Додихудоевич** – кандидат физико-математических наук, Технологический университет Таджикистана, старший преподаватель кафедры высшей математики и информатики. E-mail: vosifvois@mail.ru.



УДК 517.968.2

Специальность: 1.1.2 – Дифференциальные уравнения, математическая физика

Г.ДЖАНГИБЕКОВ, К.Ш.ФАЙЗЗОДА\*

**ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ШЕСТОГО ПОРЯДКА  
НА ПЛОСКОСТИ**

*Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана,  
\*Таджикский национальный университет*

*Поступила в редакцию 06.04.2023 г.*

*В работе изучается вопрос разрешимости задачи Дирихле для эллиптической системы двух уравнений с двумя независимыми переменными шестого порядка по ограниченной области. Методом перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области найдены эффективные условия нетеровости и получена формула для подсчета индекса задачи.*

**Ключевые слова:** задача Дирихле, нетеровость, индекс задачи, сингулярный интеграл.

Хорошо известно [1]-[4], что теория двумерных сингулярных интегральных операторов тесно связана с теорией краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости. В последнее время Г.Джангибековым были получены (см. напр. [5]-[9]) эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса некоторых классов двумерных сингулярных операторов по ограниченной области. Использование этих результатов позволило, в частности, получить в работах [7] и [8] теорию разрешимости задач Дирихле и Неймана для эллиптических систем уравнений второго и четвертого порядка на плоскости, и вычислить индекс этих задач через коэффициенты системы. В данной работе изучается вопрос разрешимости задачи Дирихле для эллиптической системы двух уравнений шестого порядка на плоскости методом перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области.

---

*Адрес для корреспонденции:* Джангибеков Гулходжа. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики им. А.Джураева НАНТ. e-mail: gulkhoja@list.ru.

Пусть  $D$  – конечная односвязная область плоскости, ограниченная замкнутой кривой Ляпунова  $\Gamma$ . Рассмотрим дифференциальное уравнение 6-го порядка вида

$$\begin{aligned} & a_0(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^{-3} \partial \bar{z}^3} + b_0(z) \frac{\partial^6 \bar{\omega}}{\partial z^{-3} \partial \bar{z}^3} + a_1(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^{-4} \partial \bar{z}^2} + b_1(z) \frac{\partial^6 \bar{\omega}}{\partial z^{-4} \partial \bar{z}^2} + \\ & + a_2(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^{-5} \partial \bar{z}} + b_2(z) \frac{\partial^6 \bar{\omega}}{\partial z^{-5} \partial \bar{z}} + a_3(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^{-6}} + b_3(z) \frac{\partial^6 \bar{\omega}}{\partial z^{-6}} + \\ & + \sum_{k+j=0}^5 [a_{k,j}(z) \frac{\partial^{k+j} \omega}{\partial z^{-k} \partial \bar{z}^j} + b_{k,j}(z) \frac{\partial^{k+j} \bar{\omega}}{\partial z^{-k} \partial \bar{z}^j}] = g(z), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , коэффициенты уравнения  $a_j(z)$ ,  $b_j(z) (j=0,1,2)$  – заданные функции, непрерывные в замкнутой области  $D$ ,  $g(z) \in L^p(D)$ ,  $2 < p < \infty$ ,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

По главной части системы (1) построим матрицу-функцию

$$\mathcal{G}_z(t) = \begin{pmatrix} a_0(z) + a_1(z)t + a_2(z)t^2 + a_3(z)t^3 & b_0(z) + b_1(z)\bar{t} + b_2(z)\bar{t}^2 + b_3(z)\bar{t}^3 \\ \overline{b_0(z) + b_1(z)t + b_2(z)t^2 + b_3(z)t^3} & \overline{a_0(z) + a_1(z)t + a_2(z)t^2 + a_3(z)t^3} \end{pmatrix}.$$

Эллиптичность системы (1) означает, что для любой точки  $z \in \bar{D}$  и любого  $t : |t|=1$  должно выполняться неравенство  $\det \mathcal{G}_z(t) \neq 0$ :

$$\det \mathcal{G}_z(t) \equiv |F(z, t)|^2 - |Q(z, t)|^2 \neq 0 \quad (2)$$

для всех  $z \in \bar{D}$ ,  $|t|=1$ , где

$$F(z, t) = a_0(z) + a_1(z)t + a_2(z)t^2 + a_3(z)t^3, \quad Q(z, t) = b_0(z) + b_1(z)\bar{t} + b_2(z)\bar{t}^2 + b_3(z)\bar{t}^3.$$

Отметим, что в работах [3], [4] методом интегральных уравнений рассматривается эллиптическая система шестого порядка общего вида, однако применительно к (1) полученные результаты охватывают только случай сильно эллиптической системы, то есть когда к соответствующим интегральным уравнениям применим принцип сжатых отображений.

**Лемма 1.** Матрица-функция  $\mathcal{G}_z(z, t)$  невырождена для всех  $z \in \bar{D}$  и  $|t|=1$  ( $\det \mathcal{G}_z(z, t) \neq 0$ ) тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств

$$\sum_{n=0}^3 \Delta_n(z) > 2M(z), \quad \text{при } \forall z \in \bar{D}, \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^3 \Delta_n(z) < -2m(z), \text{ при } \forall z \in \bar{D}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_n(z) &= |a_n(z)|^2 - |b_n(z)|^2, \quad n = 0, 1, 2, 3; \\ M(z) &= \max_{|t|=1} \left[ (a_1 \bar{a}_0 - b_1 \bar{b}_0 + a_2 \bar{a}_1 - b_2 \bar{b}_1 + a_3 \bar{a}_1 - b_3 \bar{b}_1)t + \right. \\ &\quad \left. + (a_2 \bar{a}_0 - b_2 \bar{b}_0 + a_3 \bar{a}_1 - b_3 \bar{b}_1)t^2 + (a_3 \bar{a}_0 - b_3 \bar{b}_0)t^3 \right]; \\ m(z) &= \min_{|t|=1} \left[ (a_1 \bar{a}_0 - b_1 \bar{b}_0 + a_2 \bar{a}_1 - b_2 \bar{b}_1 + a_3 \bar{a}_1 - b_3 \bar{b}_1)t + \right. \\ &\quad \left. + (a_2 \bar{a}_0 - b_2 \bar{b}_0 + a_3 \bar{a}_1 - b_3 \bar{b}_1)t^2 + (a_3 \bar{a}_0 - b_3 \bar{b}_0)t^3 \right]. \end{aligned}$$

Множество всех полиномиальных матриц вида  $\mathcal{G}_z(t) = |F(z, t)|^2 - |Q(z, t)|^2$ , удовлетворяющих условию  $\det \mathcal{G}_z(t) > 0 (< 0)$  для всех  $z \in \bar{D}$ , обозначим через  $\mathcal{G}^+$  ( $\mathcal{G}^-$ ).

Две матрицы  $\mathcal{G}_z^1, \mathcal{G}_z^2$  из класса  $\mathcal{G}^+$  назовем гомотопными и обозначим через  $\mathcal{G}_z^1 \sim \mathcal{G}_z^2$ , если существует семейство полиномиальных матриц  $\mathcal{G}_z^+(\tau)$  из  $\mathcal{G}^+$  непрерывно зависящих от действительного параметра  $\tau: 0 \leq \tau \leq 1$ , такое, что

$$\mathcal{G}^+(0) \equiv \mathcal{G}_z^1, \quad \mathcal{G}^+(1) \equiv \mathcal{G}_z^2.$$

Две эллиптические системы из множества всех эллиптических систем (1) с одинаковой главной частью, такой, что  $\mathcal{G}_z(\sigma) \in \mathcal{G}^+$  можно тогда и только тогда соединить непрерывным путем в  $\mathcal{G}^+$ , если характеристические матричные полиномы этих систем гомотопны.  $F(z, t)$  – есть комплексный невырождающийся полином степени три. Пусть  $q_1(z), q_2(z), q_3(z)$  – комплексные корни уравнения

$$F(z, t) = 0. \quad (5)$$

Согласно условию (2) эти корни не лежат на границе единичного круга  $|t|=1$ , то есть

$$|q_j(z)| \neq 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Возможны, априори, 4 случая:

1.  $|q_j(z)| > 1$ , для всех  $j = 1, 2, 3$ ;
2.  $|q_1(z)| < 1 \text{ и } |q_j(z)| > 1$  для  $j = 2, 3$ ;

3.  $|q_j(z)| < 1$ , для  $j = 1, 2$  и  $|q_3(z)| > 1$ ;

4.  $|q_j(z)| < 1$ , для всех  $j = 1, 2, 3$ .

Таким образом, соотношение гомотопии разбивает  $\mathcal{G}^+$  на 4 класса гомотопии - связанные открытые компоненты:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{класс } \nu_0 : \text{ то есть когда выполняются неравенства 1. для } \forall z \in D; \\ \text{класс } \nu_1 : \text{ то есть когда выполняются неравенства 2. для } \forall z \in D. \\ \text{класс } \nu_2 : \text{ то есть когда выполняются неравенства 3. для } \forall z \in D. \\ \text{класс } \nu_3 : \text{ то есть когда выполняются неравенства 4. для } \forall z \in D. \end{array} \right. \quad (6)$$

Эти классы образуют полную систему множества  $\mathcal{G}^+$ , то есть  $\mathcal{G}_z^1$  и  $\mathcal{G}_z^2$  из  $F^+$  принадлежат некоторому классу  $\nu_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) тогда и только тогда, когда  $\mathcal{G}_z^1 \sim \mathcal{G}^1$ .

**Лемма 2.** Пусть матрица  $\mathcal{G}_z(t) \in \mathcal{G}^+$ . Тогда  $\mathcal{G}^+$  принадлежит классу  $\nu_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\Delta_j(z) > M(z) + (M^2(z) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq j}}^3 |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2)^{1/2} \quad \forall z \in \bar{D}, \quad (7)$$

где

$$\lambda_{j,n} = \bar{a}_j a_n - b_j \bar{b}_n, \quad \mu_{j,n} = \bar{a}_j b_n - b_j \bar{a}_n.$$

1. Пусть  $\mathcal{G}_z(t)$  из  $\mathcal{G}^+$  принадлежит гомотопическому классу  $\nu_0$ . Тогда согласно лемме 2 будет

$$\Delta_0(z) = |a_0(z)|^2 - |b_0(z)|^2 > 0 \quad \text{для всех } z \in \bar{D}.$$

Исключая из уравнения (1) величину  $\frac{\partial^6 \bar{\omega}}{\partial \bar{z}^3 \partial z^3}$ , мы придем к следующей записи

любой системы из гомотопического класса  $\nu_0$

$$\begin{aligned} & \Delta_0(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial \bar{z}^3 \partial z^3} + \lambda_{0,1}(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial \bar{z}^4 \partial z^2} + \lambda_{0,2}(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial \bar{z}^5 \partial z} + \lambda_{0,3}(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial \bar{z}^6} + \\ & + \mu_{0,1}(z) \left( \frac{\partial^6 \omega}{\partial \bar{z}^4 \partial z^2} \right) + \mu_{0,2}(z) \left( \frac{\partial^6 \omega}{\partial \bar{z}^5 \partial z} \right) + \mu_{0,3}(z) \left( \frac{\partial^6 \omega}{\partial \bar{z}^6} \right) + T(\omega) = g(z), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $T(\omega)$  – дифференциальный оператор низшего порядка.

Обозначим через  $W_p^6(D) \cap C^2(\bar{D})$  – пространство комплекснозначных функций  $\omega(z)$ , обладающих в  $D$  обобщенными производными шестого порядка, непрерывными вместе с производными в  $\bar{D}$ . Без ограничения общности далее будем считать, что область  $D$  является единичным кругом с центром в начале координат:  $D = \{z : |z| < 1\}$ .

**Задача Дирихле.** Найти функцию  $\omega(z)$  из класса  $W_p^6(D) \cap C^2(\bar{D})$ , удовлетворяющую внутри  $G$  уравнению (1), а на ее границе  $\Gamma$  трем краевым условиям

$$\omega(z)|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2}|_{\Gamma} = 0, \quad (9)$$

где  $\frac{\partial \omega}{\partial n}$  – означает производную по направлению внешней нормали в точках контура  $\Gamma$ .

Известно [3],[4], что любая комплекснозначная функция класса  $W_p^6(D) \cap C^2(\bar{D})$ , ( $p > 2$ ) удовлетворяющая на границе  $\Gamma$  однородным краевым условиям (9), представляется в виде

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D G_6(z, \zeta) f(\zeta) ds_{\zeta}, \quad (10)$$

с произвольной комплекснозначной плотностью  $f(z) \in L_p(D)$ ,  $p > 1$ , где  $G_6(z, \zeta)$

функция Грина уравнения  $\Delta^3 \omega \equiv \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^3 \partial \bar{z}^3} = 0$  в ограниченной области  $D = \{z : |z| < 1\}$ :

$$G_6(z, \zeta) = \frac{|\zeta - z|^4}{4\pi} \ln \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 - |\zeta - z|^2 (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) + \frac{1}{2} (1 - |z|^2)^2 (1 - |\zeta|^2)^2.$$

Посчитаем производные функции  $\omega(z)$ . Очевидно, что все производные от функции  $\omega(z)$  по  $z$  и  $\bar{z}$  до 5-го порядка дают интегральные операторы с непрерывными ядрами или с ядрами, имеющими слабую особенность и, следовательно, являются вполне непрерывными в  $L_p(D)$  ( $1 < p < \infty$ ) операторами. Введем следующие обозначения

$$\sigma_0(z, \bar{\zeta}) = \frac{1}{4\pi} |\zeta - z|^4 \ln |\zeta - z|^2,$$

$$\sigma_1(z, \bar{\zeta}) = -\frac{1}{4\pi} |\zeta - z|^4 \ln |1 - z\bar{\zeta}|^2 - \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^k}{k\pi} |\zeta - z|^{2(2-k)} [(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)]^k,$$

$$(Uf)(z) = \iint_D \sigma_0(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_{\zeta}, \quad (Vf)(z) = \iint_D \sigma_1(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_{\zeta}.$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\frac{\partial^3 U}{\partial z^3} = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2}{\zeta - z} f(\zeta) ds_\zeta. \quad (11)$$

Дифференцируя равенство (11)  $3+n$  раз по  $z$  и  $3-n$  раз по  $\bar{z}$ , будем иметь

$$\frac{\partial^6 U}{\partial z^{3+n} \partial \bar{z}^{3-n}} = \begin{cases} \frac{(-1)^n n}{\pi} \iint_D \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{n-1}}{(\zeta - z)^{n+1}} f(\zeta) ds_\zeta \equiv (S_{-n} f)(z), & \text{если } n = 1, 2, 3; \\ f(z), & \text{если } n = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Переходим теперь к оператору  $(Vf)(z)$ . Дифференцируя  $V$  по  $z$   $3+n$  раз и по  $\bar{z}$   $3-n$  раз, найдем

$$\frac{\partial^{2m} V}{\partial z^{3+n} \partial \bar{z}^{3-n}} = \iint_D K_{v_0, n}(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta, \quad n = 1, 2, 3,$$

где ядро  $K_{v_0, n}(z, \bar{\zeta})$  имеет вид

$$K_{v_0, n}(z, \bar{\zeta}) = \frac{(-1)^{3-n}}{2\pi \cdot (n-1)!} \sum_{k=0}^2 C_{3+n}^k (-1)^k 2 \dots (3-k) \cdot (2+n-k)! \times \quad (13)$$

$$\times \frac{(\zeta - z)^{2-k} (\bar{\zeta} - \bar{z})^{n-1} \bar{\zeta}^{3+n-k}}{(1 - z\bar{\zeta})^{3+n-k}},$$

причем, если точка  $\zeta$  попадает на границу единичного круга  $\Gamma$ , то есть  $|\zeta| = 1$ , то

$$\frac{(\zeta - z)^{2-k} (\bar{\zeta} - \bar{z})^{n-1} \bar{\zeta}^{3+n-k}}{(1 - z\bar{\zeta})^{3+n-k}} = \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{n-1}}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Подставляя значения производных из (12), (13) в исходное дифференциальное уравнение (8), для определения функции  $f(z)$  получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение:

$$(A_0 f)(z) \equiv \Delta_0(z) f(z) + \sum_{n=1}^3 \lambda_{0, n}(z) (S_{-n}^* f)(z) + \mu_{0, n}(z) \overline{(S_{-n}^* f)(z)} + (Tf)(z) = g(z), \quad (14)$$

где

$$(S_n^* f)(z) = \iint_D K_{3+n, 3-n}(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta,$$

$$K_{3+n, 3-n}(z, \bar{\zeta}) = \frac{(-1)^n n}{\pi} \left( \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{n-1}}{(\zeta - z)^{n+1}} + K_{n_0, n}(z, \bar{\zeta}) \right), n = 1, 2, 3,$$

$T$  – вполне непрерывный в  $L^p(D)$ ,  $p > 2$  оператор.

Здесь следует отметить, что интегральный оператор с ядром  $K_{3+n,3-n}(z, \bar{\zeta})$  во внутренних точках области  $D$  имеет особенность порядка 2, поэтому интеграл нужно понимать в смысле главного значения по Коши. Что касается точек границы, то есть когда  $\zeta \in \Gamma, \bar{\zeta} = 1/\zeta$ , то нетрудно проверить, что в этом случае  $K_{3+n,3-n}(z, \bar{\zeta}) = 0$ . Интегральное уравнение (7) относится к двумерным сингулярным интегральным уравнениям с четными характеристиками по ограниченной области, которые изучены в работах [5]-[9]. Соответствующая оператору  $A_0$  матрица-символ имеет вид

$$\mathcal{G}_{A_0}^0(z, t) = \begin{pmatrix} \Delta_0(z) + \sum_{n=1}^3 \lambda_{0,n}(z)t^n & \sum_{n=1}^3 \mu_{0,n}(z)t^{-n} \\ \sum_{n=1}^3 \overline{\mu_{0,n}(z)t^n} & \Delta_0(z) + \sum_{n=1}^3 \overline{\lambda_{0,n}(z)t^{-n}} \end{pmatrix}, z \in \bar{D}, |t|=1.$$

В силу результатов [16] для нетеровости оператора  $A^0$  необходимо и достаточно, чтобы матрицы  $\mathcal{G}_{A_0}^0(\tau, t)$  ( $\tau \in \Gamma, |t|=1$ ) имели нулевые частные индексы. По символу  $\mathcal{G}_{A_0}(z, t)$  построим матрицу  $\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t)$ , где  $\tau \in \Gamma, |t|=1$ . Показывается, что для  $\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t)$  справедливо представление:

$$\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t) = R_0^-(\tau, t)R_0^+(\tau, t),$$

где  $R_0^-(\tau, t)$  по переменной  $t$  аналитически продолжима в нижнюю, а  $R_0^+(\tau, t)$  - в верхнюю полуплоскость, причем их определители нигде в нуль не обращаются, то есть матрица  $\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t)$  имеет нулевые частные индексы. Тогда из [10] следует, что оператор  $A_0$  н в  $L^p(D)$  ( $1 < p < \infty$ ).

Далее посчитаем индекс оператора  $A_0$ . Поскольку полином  $F(z, t)$  внутри единичного круга  $|t| < 1$  корней не имеет, то его можно представить в виде

$$F(z, t) = \lambda_{0,n}(z) \prod_{j=1}^3 (t - q_j^-(z)),$$

где  $|q_j^-(z)| > 1$ . Учитывая это, построим семейство матриц-функций

$$\mathcal{G}_{A_0}^\rho(z, t, \rho) = \begin{pmatrix} F(z, t, \rho) & Q(z, t, \rho) \\ Q(z, t, \rho) & F(z, t, \rho) \end{pmatrix},$$

непрерывно зависящее от параметра  $\rho: 0 \leq \rho \leq 1$ , где

$$F(z, t, \rho) = \lambda_{0,n}(z) \prod_{j=1}^3 (\rho t - q_v^-(z))$$

$$Q(z, t, \rho) \rho \varphi(\rho) Q(z, t), 0 \leq \rho \leq 1,$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{N}, & \text{когда } 0 \leq \rho \leq \rho_0 < 1, \\ \frac{1}{N} \left( \varepsilon + \frac{N - \varepsilon}{1 - \tau_0} \right) (\rho - \tau_0), & \text{когда } \rho_0 \leq \rho \leq 1, \end{cases}$$

$\tau_0$  – вещественное число, близкое к 1,

$$N = \sup |P(z, t, \tau)|, \quad \varepsilon = \inf |Q(z, t, \tau)|,$$

где супремум (инфимум) берётся по всем  $z \in \bar{D}$ ,  $|t|=1$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$ . По матрицам  $\mathcal{G}_{A_\rho^0}(z, t, \rho)$  построим семейство интегральных операторов  $A_\rho^0$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$  вида (8).

Нетрудно заметить, что

$$|F(z, t, \rho)| > |Q(z, t, \rho)|,$$

и  $\text{Ind}_{|t|=1} F(z, t, \rho) = 0$ ,  $\forall z \in \bar{D}$ ,  $|t|=1$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$ , то есть операторы  $A_\rho^0$ , нётеровы. Поскольку  $A_1^0 = A_0$  и  $A_0^0 = -\Delta_0(z) q_1^-(z) \cdot q_2^-(z) \cdot q_3^-(z) I$ , то индекс оператора  $A_0$  равен нулю.

**Теорема 1.** Пусть матрица  $\mathcal{G}_z(t)$  из  $\mathcal{G}^+$  принадлежит гомотопическому классу  $\nu_0$ . Для того чтобы задача (9) для эллиптической системы (8) в классе  $W_p^6(D) \cap C^2(\bar{D})$  ( $2 < p < \infty$ ) была фредгольмовой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Delta_j(z) > M(z) + (M^2(z) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq j}}^3 |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2)^{1/2} \quad \forall z \in \bar{D}. \quad (15)$$

2. Пусть теперь  $\mathcal{G}_z(t)$  из  $\mathcal{G}^+$  принадлежит гомотопическому классу  $\nu_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

Тогда, согласно лемме 2, будет

$$\Delta_j(z) = |a_j(z)|^2 - |b_j(z)|^2 > 0 \text{ для всех } z \in \bar{D}.$$

Исключая из уравнения (1) величину  $\frac{\partial^6 \bar{\omega}}{\partial z^{3+j} \partial \bar{z}^{-3-j}}$ , мы придём к следующей записи

любой системы из гомотопического класса  $\nu_j$  ( $j = 1, 2, 3$ )



$$\Delta_j(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^{-3+j} \partial z^{3-j}} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq j}}^3 \lambda_{j,n}(z) \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^{-3+n} \partial z^{3-n}} + \mu_{j,n}(z) \frac{\partial^6 \bar{\omega}}{\partial z^{3+n} \partial z^{-3-n}}. \quad (16)$$

Подставляя значения производных из (12),(13) в дифференциальное уравнение (16), для определения функции  $f(z)$  получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} (A_j f)(z) &\equiv \\ &\equiv \Delta_j(z)(S_j^* f)(z) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq j}}^3 \lambda_{j,n}(z)(S_{-n}^* f)(z) + \mu_{j,n}(z) \overline{(S_{-n}^* f)(z)} + (Tf)(z) = g(z), \end{aligned} \quad (17)$$

где при  $n = 0$  выражение  $(S_0^* f)(z)$  означает  $f(z)$ .

Далее по символу  $\mathcal{G}_{A_j}(z, t)$  построим граничную матрицу-функцию

$$\mathcal{G}_{A_j}(\tau, t) = \begin{pmatrix} F(\tau, t) & Q(\tau, t) \\ Q(\tau, t) & F(\tau, t) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} F(\tau, t) &= \Delta_j(\tau)t^j + \sum_{n=0, n \neq j}^3 \lambda_{j,n}(\tau)t^n, \\ Q(\tau, t) &= \sum_{n=0, n \neq j}^3 \mu_{j,n}(\tau)t^{-n}, \quad \tau \in \Gamma, |t|=1. \end{aligned}$$

Устанавливается, что матрица  $\mathcal{G}_{A_j}(\tau, t)$  при выполнении условия

$$\mu_{j,0}(\tau) = \overline{a_j(\tau)b_0(\tau)} - b_j(\tau)\overline{a_0(\tau)} \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma$$

факторизуется с нулевыми частными индексами  $\mathcal{G}_{A_j}(\tau, t) = R_j^-(\tau, t)R_j^+(\tau, t)$ , где матрица  $R_j^+(\tau, t)$  аналитически продолжима внутри единичного круга  $|t| \leq 1$ , и нули ее определителя лежат вне круга, а  $R_j^-(\tau, t)$  аналитически продолжима вне единичного круга  $|t| \leq 1$ , и нули ее определителя лежат внутри круга  $|t| \leq 1$ , причем условие  $\mu_{j,0}(\tau) \neq 0 \quad \tau \in \Gamma$  необходимо для нетеровости оператора  $A_j$  в пространстве  $L_{\beta-2/p}^p(D)$ .

Перейдем теперь к вычислению индекса оператора  $A_j$ . Оператор  $A$  принадлежит классу  $\nu_j$ , причем выполнено условие (10) и  $Ind_{|t|=1} F(z, t) = j \neq 0$ , ( $j = 1, 2, 3$ ). Тогда

многочлен  $P(z, t)$  имеет  $j$  нулей  $q_k^+(z)$  ( $k = 1, \dots, j$ ) внутри круга  $|t| \leq 1$  и  $3 - j$  нулей  $q_k^-(z)$  ( $k = j+1, \dots, 3$ ) вне круга  $|t| \leq 1$ . Поэтому  $F(z, t)$  можно представить в виде

$$F(z, t) = \lambda_{j,n}(z) \prod_{k=1}^j (t - q_k^+(z)) \prod_{k=j+1}^3 (t - q_k^-(z)),$$

Учитывая это, построим семейство матриц-функций

$$\mathcal{G}_{A_j^\tau}(z, t, \rho) = \begin{pmatrix} F(z, t, \rho) & Q(z, t, \rho) \\ Q(z, t, \rho) & F(z, t, \rho) \end{pmatrix},$$

непрерывно зависящее от параметра  $\rho: 0 \leq \tau \leq 1$ , где

$$F(z, t, \rho) = \lambda_{j,n}(z) \prod_{k=1}^j (t - \tau q_k^+(z)) \prod_{k=j+1}^3 (\tau t - q_k^-(z)),$$

$$Q(z, t, \rho) = \mu_{j,0}(z) + \tau \varphi(\rho) \left( \sum_{n=1, n \neq 0, j}^3 \mu_{j,n}(z) t^{-n} \right), z \in \bar{D},$$

а  $\varphi(\tau)$  определяется так же, как в предыдущем случае.

Построив теперь по матрицам  $\mathcal{G}_{A_j}(z, t, \rho)$  семейство интегральных операторов  $A_j^\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , типа (1), заметим, что они н, ибо

$$|F(z, t, \rho)| > |Q(z, t, \rho)|, \quad \forall z \in \bar{D}, \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

и  $\mu_{j,0}(z) \neq 0$ ,  $z \in \Gamma$ .

Так как  $A_j^1 = A_j$  и

$$A_j^0 = \lambda_{j,n}(z) q_{j+1}^+(z) \dots q_3^+(z) S_{-j} + \mu_{j,0}(z) K,$$

то, применив к оператору  $A_j^0$  результаты работы [5], получим, что индекс оператора  $A$  равен  $\varkappa = -2j \text{Ind}_\Gamma \mu_{j,0}(\tau)$ .

**Теорема 2.** Пусть матрица  $\mathcal{G}_z(t)$  из  $\mathcal{G}^+$  принадлежит гомотопическому классу  $\nu_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Для того чтобы задача (9) для эллиптической системы (16) в классе  $W_p^6(D) \cap C^2(\bar{D})$  ( $2 < p < \infty$ ) была нетеровой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Delta_j(z) > M(z) + (M^2(z) + \sum_{n=0, n \neq j}^3 |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2)^{1/2} \quad (18)$$

и  $\mu_{j,n}(\tau) \neq 0$  для  $\forall z \in \bar{D}, \tau \in \Gamma,$

где

$$\lambda_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)a_n(z)} - b_j(z)\overline{b_n(z)}, \mu_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)b_n(z)} - b_j(z)\overline{a_n(z)}.$$

При этом, если выполнено (18), то индекс задачи равен

$$\varkappa = -2j \text{Ind}_{\Gamma} \mu_{j,0}(\tau),$$

Аналогичный результат имеет место и для задачи Неймана для уравнения (1).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959, 672 с.
2. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений – М.: Гостехиздат, 1948, 296 с.
3. Дыбов П.Т. О разрешимости первой краевой задачи для дифференциального уравнения эллиптического типа шестого порядка. – ДАН СССР, 1972, том 202, 6, с. 1251-1253.
4. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1987, 415 с.
5. Джангибеков Г. О нетеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами. – ДАН СССР, 1988, т. 300, 2, с. 272-276.
6. Джангибеков Г. Нетеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов. – Изв. ВУЗов. матем. 1991, 1, с. 19-28.
7. Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости. – ДАН России, 1993, т. 330, 4, с. 415-417.
8. Джангибеков Г., Худжаназарова Г. О задаче Дирихле для эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка на плоскости. – ДАН России, 2004, т. 398, 2. 398:2, с. 151-155.
9. Джангибеков Г., Одинабеков Д.М., Худжаназарова Г.Х. Об условиях нетеровости и индексе одного класса сингулярных интегральных операторов по ограниченной односвязной области. – Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2019, 2, с. 9-14.
10. Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I-II. – Journal of Operator Theory, v. 11, 1984, pp. 41-76, 199-214.

Г.ЦАНГИБЕКОВ, К.Ш.ФАЙЗЗОДА\*

### МАСЪАЛАИ ДИРИХЛЕ БАРОИ БАЪЗЕ СИСТЕМАҲОИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ШАШ ДАР ҲАМВОРӢ

*Институти математикаи ба номи А. Ҷураеви АМИ Тоҷикистон,*

*\*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола ҳалшавандагии масъалаи Дирихле барои системаҳои ду муодилаҳои дифференсиалии эллиптикӣ аз ду тағйирёбандаҳои новобастаи тартиби шаш дар соҳаи

маҳдуд омӯхта мешавад. Бо усули ба таври эквивалентӣ гузаштан ба муодилаҳои интегралӣ сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд шартҳои эффективноки нетеровӣ будан ёфта шуда, формула барои ҳисоб намудани индекси масъала ҳосил карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** масъалаи Дирихле, нетеровӣ будан, индекси масъала, интегралӣ сингулярӣ.

G.JANGIBEKOV, K.Sh.FAIZZODA \*

## OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR SOME ELLIPTIC SYSTEMS OF SIXES-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE PLANE

*A.Dzhuraev Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Tajikistan,  
\*Tajik National University*

In this note we consider the Dirichlet problem for some elliptic systems of sixes-order with two functions of two variables differential equations in the plane. The problem may be reduced, in an equivalent way, to two-dimensional singular integral equations in the simply connected domain in the complex plane. For these systems effective necessary and sufficient conditions for the property Neter obtained along with a formula for computing the index of the Dirichlet problem is given.

**Key words:** Dirichlet problem, Noetherian property, operator index, singular integral operator.

### **Сведения об авторах:**

**Г.Джангибеков** – доктор физико-математических наук, Институт математики им.А.Джураева НАН Таджикистана, главный научный сотрудник. E-mail: gulkhoja@list.ru;

**К.Ш.Файззода** – Таджикский национальный университет, докторант.

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

О.А.ДЖУРАХОНОВ

**СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ЧАСТНЫХ СУММ ДВОЙНОГО РЯДА ФУРЬЕ  
ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ**

*Таджикский национальный университет*

*(Поступила в редакцию 25.07.2023 г.)*

*В работе вычислены точные верхние грани приближения функций двух переменных "треугольными," "гиперболическими" частичными суммами двойного ряда Фурье по ортогональным многочленам на некоторых классах функций  $L_2^{(r)}(D)$ .*

**Ключевые слова:** наилучшие приближения, "треугольные" суммы, "гиперболические" суммы, модуль непрерывности, ортогональные многочлены.

Приведем определение и обозначение нужные нам в дальнейшем из работ [1, 2]. Обозначим через  $\mu(t)$  весовую функцию, заданную на интервале  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , которая обращается в нуль лишь на множество меры нуль. Если же интервал  $(a, b)$  бесконечен, то кроме этого, должны абсолютно сходиться моменты  $n$ -го порядка функции  $\mu(t)$

$$\int_a^b t^n \mu(t) dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Следуя [1], будем рассматривать весовые функции, являющиеся решениями дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}(A(\mu, t)u) = B(\mu, t)u,$$

где  $A(\mu, t)$ ,  $B(\mu, t)$  – многочлены не выше второй и первой степени соответственно, а также удовлетворяющие на концах интервала  $(a, b)$  условиям

---

**Адрес для корреспонденции:** Джурахонов Олимджон Акмалович. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр.Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: olim1974@mail.ru

$$A(\mu, t)\mu(t)t^k \Big|_{t=a,b} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Классические ортогональные многочлены Лагерра, Эрмита, Якоби удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка [2, ст.12]

$$D(\mu, t)u = \left( A(\mu, t) \frac{d^2 u}{dt^2} + B(\mu, t) \frac{du}{dt} \right) = -\lambda_n(\mu)u, \quad (1)$$

где

$$\lambda_n(\mu) = -nB'(t) - \frac{1}{2}n(n-1)A''(t).$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mu_1, x) &= A(\mu_1, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B(\mu_1, x) \frac{\partial}{\partial x}, & \mathcal{D}(\mu_2, y) &= A(\mu_2, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B(\mu_2, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ D &:= \mathcal{D}(\mu; x, y) = \mathcal{D}(\mu_1, x) + \mathcal{D}(\mu_2, y), \end{aligned} \quad (2)$$

дифференциальные операторы второго порядка.

В силу формулы (1) числа  $\lambda_n(\mu) \in \mathbb{Z}_+$  являются собственными значениями оператора  $D(\mu, t)$ , а соответствующие им собственные функции  $u(\mu, t)$  - ортогональными многочленами, соответствующими им весовыми функциями. В зависимости от вида функции получаем следующие системы ортогональных полиномов соответственно, Лагерра, Эрмита, Якоби [2, ст.30].

Для полиномов Чебышева-Лагерра  $L_n^{(\alpha)}(t)$ :

$$(a, b) = (0, +\infty), \quad \mu(t) = t^\alpha e^{-t}, \quad \alpha > -1, \quad A(\mu, t) = t,$$

$$B(\mu, t) = 1 + \alpha - t, \quad \lambda_n(\mu) = n.$$

Для полиномов Чебышева-Эрмита  $H_n(t)$ :

$$(a, b) = (-\infty, +\infty), \quad \mu(t) = e^{-t^2}, \quad A(\mu, t) = 1,$$

$$B(\mu, t) = -2t, \quad \lambda_n(\mu) = 2n.$$

Для полиномов Чебышева-Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ :

$$(a, b) = (-1, 1), \quad \mu(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1, \quad A(\mu, t) = 1-t^2,$$

$$B(\mu, t) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)t, \quad \lambda_n(\mu) = n(n + \alpha + \beta + 1).$$

Обозначим через  $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}(Q)$ , где  $Q = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  – пространство суммируемых с квадратом функций  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  с весом  $\mu := \mu(x, y) = \mu_1(x)\mu_2(y)$  и конечной нормой

$$\|f\|_{2,\mu} := \|f\|_{L_{2,\mu}(Q)} = \left( \iint_{(Q)} \mu(x, y) f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

Пусть  $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  и  $\{Q_l(y)\}_{l=0}^{\infty}$  две полные ортонормированные системы многочленов, соответственно с весовыми функциями  $\mu_1(x)$  и  $\mu_2(y)$ . Рассмотрим двойной ряд Фурье функции  $f \in L_{2,\mu}(Q)$ ,  $\mu := \mu(x, y) := \mu_1(x)\mu_2(y)$ :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}(f) P_k(x) Q_l(y), \quad (3)$$

где

$$c_{kl}(f) = \iint_{(Q)} \mu_1(x) \mu_2(y) f(x, y) P_k(x) Q_l(y) dx dy \quad (4)$$

– коэффициенты Фурье-Эрмита функции  $f$ , а равенство в (3) понимается в смысле сходимости в метрике пространства  $L_{2,\mu}$ . Обозначим через

$$S_{N-1}(f; x, y) := \sum_{0 \leq k+l \leq \gamma(N)} c_{kl}(f) P_k(x) Q_l(y)$$

$$\tilde{S}_{N-1}(f; x, y) := \sum_{\bar{n} \cdot \bar{m} \leq \gamma(N)} c_{kl}(f) P_k(x) Q_l(y),$$

где  $\gamma(N) = \max(\lambda_N(\mu_1), \lambda_N(\mu_2), \bar{k} = \max(1, k), k = 0, 1, \dots; N = 4, 5, \dots)$ , соответственно, "треугольную," "гиперболическую" сумму  $(N-1)$ -го порядка ряда (1) Фурье-Эрмита функции  $f \in L_{2,\mu}$ . Если  $N-1$  - совокупность полиномов двух переменных  $x$  и  $y$  степени не более  $(N-1)$  вида

$$P_{N-1}(x, y) = \sum_{0 \leq k+l < N-1} a_{kl} x^k y^l, \quad (5)$$

$$\tilde{P}_{N-1}(x, y) = \sum_{\bar{k} \cdot \bar{l} < N-1} a_{kl} x^k y^l, \quad (6)$$

то, как хорошо известно (см., например, [3, с.155]),

$$E_{N-1}(f)_{2,\mu} := E_{N-1}(f)_{L_{2,\mu}(\mathbb{R}^2)} = \inf \{ \|f - P_{N-1}\|_{2,\mu} : P_{N-1} \in \mathcal{P}_{N-1} \} =$$

$$= \|f - S_{N-1}\|_{2,\mu} = \left( \sum_{k+l \geq \gamma(N)} c_{kl}^2(f) \right)^{1/2}. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E_{N-1}(f)_{2,\mu} &:= E_{N-1}(f)_{L_{2,\mu}(\mathbb{R}^2)} = \inf \left\{ \|f - \tilde{P}_{N-1}\|_{2,\mu} : \tilde{P}_{N-1} \in \mathcal{P}_{N-1} \right\} = \\ &= \|f - \tilde{S}_{N-1}\|_{2,\mu} = \left( \sum_{\bar{k} \cdot \bar{l} \geq \gamma(N)} c_{kl}^2(f) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Через  $L_{2,\mu}^{(r)} := L_{2,\mu}(\mathcal{D}^r)$  ( $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $L_{2,\mu}^{(0)} \equiv L_{2,\mu}$ ) обозначим класс функций  $f \in L_{2,\mu}$ , имеющих обобщенные частные производные

$$\frac{\partial^s f}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i+j=s, \quad s=1,2,\dots,2r, \quad r \in \mathbb{N}$$

в смысле Леви [4] такие, что все они принадлежат пространству  $L_{2,\mu}$  и для которых  $\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu} < \infty$ , где положено,  $\mathcal{D}^0 f = f$ ,  $\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ .

Введём в рассмотрение функцию

$$T(x,t; y, \tau; h) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} P_k(x) P_l(t) Q_l(y) Q_l(\tau) h^{k+l}. \quad (9)$$

И здесь знак равенства понимается в смысле сходимости двойного ряда, стоящего в правой части равенства (9) в пространстве  $L_2(Q \times Q; \mu(x,y)\mu(t,\tau))$ . Хорошо известно, что в ряде частных случаев, например для систем ортонормированных полиномов Эрмита, Чебышева, Лагерра, для функции  $T(x,t; y, \tau; h)$  можно указать явные выражения (см., например, [5, с.190,194]).

В пространстве  $L_{2,\mu}(Q)$  рассмотрим следующий оператор [1]

$$F_h f(x, y) = \iint_{(Q)} \mu_1(t) \mu_2(\tau) f(t, \tau) T(x, t; y, \tau; 1-h) dt d\tau, \quad (10)$$

который будем называть оператором обобщенного сдвига.

Легко проверить, что оператор (10) обладает следующими простыми свойствами:

- 1)  $F_h(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F_h(f_1) + \beta F_h(f_2)$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $F_h(\lambda f) = \lambda F_h(f)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- 3)  $\|F_h(f)\|_{2,\mu} \leq \|f\|_{2,\mu}$ ;
- 4)  $F_h P_k(x) Q_l(y) = (1-h)^{k+l} P_k(x) Q_l(y)$ ;
- 5)  $\|F_h(f) - f\|_{2,\mu} \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$ .



Для функции  $f \in L_{2,\mu}(Q)$  определим конечные разности первых и высших порядков равенствами:

$$\begin{aligned}\Delta_h^1 f(x, y) &:= F_h f(x, y) - f(x, y) = (F_h - E)f(x, y), \\ \Delta_h^m f(x, y) &:= \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f(x, y))) = \\ &= \Delta_h^1((F_h - E)^{m-1} f(x, y)) = (F_h - E)^{m-1} \Delta_h^1 f(x, y) = \\ &= (F_h - E)^m f(x, y) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} F_h^i f(x, y), \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2,\end{aligned}$$

где

$$F_h^0 f(x, y) = f(x, y), \quad F_h^i f(x, y) = F_h(F_h^{i-1} f(x, y)), \quad i = \overline{1, m}.$$

$E$  – единичный оператор в пространстве  $L_{2,\mu}(Q)$ . Величину

$$\Omega_m(f, t)_{2,\mu} := \sup \{ \|\Delta_h^m(f)\|_{2,\mu} : 0 < h \leq t \}, \quad (11)$$

где  $0 < t < 1$ , будем называть обобщенным модулем непрерывности  $m$ -го порядка функции  $f \in L_{2,\mu}(Q)$ .

Используя формулу (9), представим оператора (10) в следующем виде

$$\begin{aligned}F_h f(x, y) &= \iint_{(Q)} \mu(t, \tau) f(t, \tau) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} P_k(x) P_k(t) Q_l(y) Q_l(\tau) (1-h)^{k+l} \right\} dt d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \iint_{(Q)} \mu(t, \tau) f(t, \tau) P_k(t) Q_l(\tau) dt d\tau \right\} P_k(x) Q_l(y) (1-h)^{k+l} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}(f) P_k(x) Q_l(y) (1-h)^{k+l}, \quad (12)\end{aligned}$$

где знак равенства в полученном соотношении понимается в смысле сходимости в метрике пространства  $L_{2,\mu}(Q)$ . Для произвольной функции  $f \in L_{2,\mu}(Q)$  в силу (12) и (3) имеем:

$$\Delta_h^1 f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}(f) P_k(x) Q_l(y) \{ (1-h)^{k+l} - 1 \}. \quad (13)$$

На основании метода математической индукции и формулы (13) для любого  $m \in \mathbb{N}$  получаем

$$\Delta_h^m f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}(f) P_k(x) Q_l(y) \{(1-h)^{k+l} - 1\}^m.$$

Отсюда, воспользовавшись тем, что система полиномов  $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  ортонормирована в пространстве  $L_{2,\mu_1}[a, b]$ , а система полиномов  $\{Q_l(y)\}_{l=0}^{\infty}$  ортонормирована в  $L_{2,\mu_2}[c, d]$ , применяя равенство Парсеваля, получаем

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^m f(x, y)\|_{2,\mu}^2 &= \iint_{(Q)} \mu_1(x) \mu_2(y) |\Delta_h^m f(x, y)|^2 dx dy = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - (1-h)^{k+l})^{2m} c_{kl}^2(f), \quad 0 < h < 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Из равенства (11) и (14) следует, что

$$\Omega_m^2(f, t)_{2,\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - (1-t)^{k+l})^{2m} c_{kl}^2(f). \quad (15)$$

В [1] доказано, что для любого  $f \in \mathbb{L}_2^r(D)$ , справедливо соотношение

$$c_{kl}(f) = (-1)^r \frac{1}{(\lambda_k(\mu_1) + \lambda_l(\mu_2))^r} c_{kl}(D^r f).$$

Тогда, пользуясь этим равенством, имеем

$$\begin{aligned} \Omega_m^2(D^r f, t)_{2,\mu} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - (1-t)^{k+l})^{2m} c_{kl}^2(D^r f) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} [1 - (1-t)^{k+l}]^{2m} (\lambda_k(\mu_1) + \lambda_l(\mu_2))^{2r} c_{kl}^2(f) \geq \\ &\geq \sum_{k+l \geq \gamma(N)} [1 - (1-t)^{k+l}]^{2m} (\lambda_k(\mu_1) + \lambda_l(\mu_2))^{2r} c_{kl}^2(f). \end{aligned}$$

Так как  $\lambda_k(\mu_1) \geq k$ ,  $\lambda_l(\mu_2) \geq l$ , то

$$\begin{aligned} \Omega_m^2(D^r f, t)_{2,\mu} &\geq \sum_{k+l \geq \gamma(N)} [1 - (1-t)^{k+l}]^{2m} (k+l)^{2r} c_{kl}^2(f) \geq \\ &\geq [1 - (1-t)^{\gamma(N)}]^{2m} (\gamma(N))^{2r} \sum_{k+l \geq \gamma(N)} c_{kl}^2(f). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k+l \geq \gamma(N)} c_{kl}^2(f) \leq \left[1 - (1-t)^{\gamma(N)}\right]^{-2m} (\gamma(N))^{-2r} \Omega_m^2(D^r f, t)_{2,\mu}. \quad (16)$$

Аналогично, имеем

$$\sum_{\bar{k} \cdot \bar{l} \geq \gamma(N)} c_{\bar{k}\bar{l}}^2(f) \leq \left[1 - (1-t)^{2\sqrt{\gamma(N)}}\right]^{-2m} \left(2\sqrt{\gamma(N)}\right)^{-2r} \Omega_m^2(D^r f, t)_{2,\mu}. \quad (17)$$

Условимся, что далее в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям  $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$  всегда подразумевать, что  $f \notin \mathcal{P}_{N-1}$ . Под весовой функцией  $g(t)$  на отрезке  $[0, h]$  будем понимать всякую неотрицательную измеримую суммируемую неэквивалентную нулю на  $[0, h]$  функцию. При этих условиях имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть  $m, N \in \mathbb{N}$ ,  $r = 0, 1, \dots$ ,  $\gamma(N) = 4, 5, \dots$ ,  $0 < p \leq \infty$ ,  $h \in (0, 1)$ ,  $g(t)$  – весовая на отрезке  $(0, 1)$  функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\gamma^r(N) E_{N-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\mu} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} = \left\{ \int_0^h \left(1 - (1-t)^{\gamma(N)}\right)^{mp} g(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}}. \quad (18)$$

**Теорема 2.** Пусть  $m, N \in \mathbb{N}$ ,  $r = 0, 1, \dots$ ,  $\gamma(N) = 4, 9, 16, \dots$ ,  $0 < p \leq \infty$ ,  $h \in (0, 1)$ ,  $g(t)$  – весовая на отрезке  $(0, 1)$  функция. Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\left(2\sqrt{\gamma(N)}\right)^r E_{N-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\mu} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} \leq \left\{ \int_0^h \left(1 - (1-t)^{2\sqrt{\gamma(N)}}\right)^{mp} g(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}}, \quad (19)$$

причём при каждом фиксированном  $N = 4, 9, 16, \dots$  константа в правой части неравенства (19) уменьшена быть не может.

**Доказательство.** Из (16) для произвольной функции  $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$  получаем неравенство

$$E_{N-1}(f) \leq \left[1 - (1-t)^{\gamma(N)}\right]^{-m} (\gamma(N))^{-r} \Omega_m(D^r f, t)_{2,\mu}. \quad (20)$$

Обе части неравенства (20) возведем в степень  $p$  ( $0 < p \leq \infty$ ) и умножим на весовую функцию  $g(t)$ . Полученное неравенство интегрируем по отрезку  $[0, h]$  ( $0 < h < 1$ ) и возведем в степень  $1/p$  ( $0 < p \leq \infty$ ), в итоге получаем

$$\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\mu} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}} \geq \gamma^r(N) \left\{ \int_0^h [1 - (1-t)^{\gamma(N)}]^{mp} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot E_{N-1}(f)_{2,\mu}.$$

Последнее неравенство справедливо для любой функции  $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ , а потому из него вытекает оценка сверху для экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (18):

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\gamma^r(N) E_{N-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\mu} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} \leq \left\{ \int_0^h [1 - (1-t)^{\gamma(N)}]^{pm} g(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}}. \quad (21)$$

С другой стороны, нетрудно проверить, что функция  $f_0(x, y) := P_{\gamma(N)}(x)Q_0(y)$ ,  $\gamma(N) = 4, 5, \dots$  принадлежит классу  $L_{2,\mu}^{(r)}$  и в силу равенств (7) и (15) имеем

$$E_{N-1}(f_0)_{2,\mu} = 1, \Omega_m(D^r f_0, t)_{2,\mu} = \gamma^r(N) [1 - (1-t)^{\gamma(N)}]^m. \quad (22)$$

Пользуясь равенствами (20), получаем оценку снизу указанной экстремальной характеристики

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\gamma^r(N) E_{N-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\mu} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} &\geq \frac{\gamma^r(N) E_{N-1}(f_0)_{2,\mu}}{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(D^r f_0, t)_{2,\mu} g(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}} = \\ &= \left\{ \int_0^h [1 - (1-t)^{\gamma(N)}]^{pm} g(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Требуемое равенство (18) получаем из сопоставления неравенства (21) и (23), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Теорема 2 доказывается аналогично. Заметим, что частный случай теорем 1 и 2 ранее рассмотрен в статьях [6,7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абилов В.А., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, т. 55, №7, с. 1109-1117.
2. Никифоров А.Ф., Уваров И.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1978.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981, 542 с.
4. Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Перев. с англ. Н.Я. Виленкина. – М.: Наука, 1966, 266 с.
6. Джурахонов О.А. Скорость сходимости "гиперболических" частных сумм двойного ряда Фурье по ортогональным многочленам Фурье-Эрмита. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2020, 4(181), с. 7-13.
7. Shabozov M.Sh., Dzhurakhonov O.A. Upper bounds for approximation of some classes of bivariate functions by triangular Fourier-Hermite sums in the space  $L_{2,\mu}(\mathbb{R}^2)$ . – Analysis Mathematica, 2019, v.45, №4, pp.823-840.

О.А.ЌЎРАХОНОВ

## СУРАТИ НАЗДИКШАВИИ СУММАҲОИ "СЕКУНЧАГИИ" ХУСУСИИ ҚАТОРИ ФУРЬЕ БО ПОЛИНОМҲОИ ОРТОГОНАЛӢ

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола, сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини функсияи дутағйирёбанда бо ёрии суммаҳои "секунчагӣ" ва "гиперболии" қатори Фурье бо полиномҳои ортогоналӣ ба-рои синфҳои функсия  $L_2^{(r)}(D)$  муайян карда шудаанд.

**Калимаҳои калидӣ:** наздиккунии беҳтарин, суммаҳои секунчагӣ, сумма гиперболӣ, модули бефосилагӣ, бисераъзогиб ортогоналӣ.

O.A.JURAKHONOV

## CONVERGENCE RATE PARTICULAR SUMS OF THE DOUBLE FOURIER SERIES IN ORTHOGONAL POLYNOMIALS

*Tajik National University*

In work exact upper bounds approximations for bivariate functions by "triangular" and "hyperbolic" partial sums of the double Fourier series on the orthogonal polynomials on classes  $L_2^{(r)}(D)$  of functions are calculated.

**Key words:** best approximation, "triangular" sums, "hyperbolic" sums, modulus of continuity, orthogonal polynomials.

### Сведения об авторе:

Джурахонов Олимджон Акмалович – кандидат физико-математических наук, Таджикский национальный университет, доцент кафедры. E-mail: olim1974@mail.ru

УДК 517.9

Специальность: 1.1.2. Дифференциальные уравнения, математическая физика

С.З.КУРБАНШОЕВ, М.А.НУСАЙРИЕВ\*

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ  
СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Российско-Таджикский (Славянский) университет,*

*\*Таджикский технический университет им.академика М.С.Осими*

*Поступила в редакцию 31.05.2023 г.*

*Под устойчивостью решений в теории обычных дифференциальных уравнений понимают свойство решения уравнения, которое мало изменяется в течении неограниченного промежутка времени при малом изменении начальных условий, то есть исследуется устойчивость решения при постоянно действующих возмущениях. Аналогичная задача для стохастических дифференциальных уравнений рассматривается в данной работе.*

**Ключевые слова:** функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость, стохастические дифференциальные уравнения.

Данная работа посвящена исследованию устойчивости решений системы стохастических дифференциальных уравнений, и найдены достаточные условия устойчивости решений исследуемых уравнений с помощью функции Ляпунова.

Исследуется система линейных стохастических дифференциальных уравнений [1]

$$dX = AXdt + HXdw(t), \quad (1)$$

где  $w(t)$  – винеровский случайный процесс, удовлетворяющий условиям

$$\langle w(t) \rangle = 0, \quad \langle dw(t) \rangle = 0, \quad \langle w^2(t) \rangle = t \quad (t > 0),$$

$$\langle dw(t) \cdot dw(t) \rangle = dt.$$

---

**Адрес для корреспонденции:** Курбанишоев Сафарали Завкибекович. 734025, Республика Таджикистан г. Душанбе, ул. Мирзо Турсунзаде, 30, Российско-Таджикский (Славянский) университет.  
E-mail: ksz-1@mail.ru

$X$  – нормированное пространство,  $A$  – неслучайные  $n$ -мерные функции соответствующих аргументов,  $t \in [0, T]$ .  $H$  – операторная функция (случайное поле), линейно отображающая  $X$  в  $X$ .

Пусть  $C$  – положительно определенная матрица. Вводим функцию Ляпунова [2, 3] в виде квадратичной формы

$$v(X) = X^* C X. \quad (2)$$

Находим дифференциал функции  $v(X)$  в силу системы уравнений (1)

$$dv(X) = v(X + dX) - v(X) = (X^* + X^* A^* dt + X^* H^* dw(t)) \times \\ \times C (X + AXdt + HXdw(t)).$$

Учитывая, что

$$\langle dw(t) \rangle = 0, \quad \langle dw(t) \cdot dw(t) \rangle = dt,$$

находим равенство

$$\frac{d \langle dv(X) \rangle}{dt} = X^* A^* C X + X^* C A X + X^* H^* C H X. \quad (3)$$

Отсюда находим следующий результат.

**Теорема 1.** Если квадратичная форма

$$w(x) \equiv X^* (A^* C + C A + H^* C H) X$$

является отрицательно определенной, то нулевое решение системы уравнений (1) является асимптотически устойчивым в среднем квадратичном.

**Теорема 2.** Если квадратичная форма

$$w(x) \equiv X^* \left( A^* C + C A + \sum_{k=1}^n H_k^* C H_k \right) X$$

является отрицательно определённой, где  $*$  – знак транспонирования, то нулевое решение системы линейных стохастических дифференциальных уравнений

$$dX = AXdt + \sum_{k=1}^n H_k X dw_k(t), \quad (4)$$

где  $w_k(t)$  – независимые винеровские процессы

$$\langle dw_k(t) dw_j(t) \rangle = 0 \quad (k \neq j),$$

$$\langle dw_k(t)dw_k(t) \rangle = dt,$$

асимптотически устойчивы в среднем квадратичном. Квадратичная форма

$$w(x) = X^* \left( A^*C + CA + \sum_{k=1}^n H_k^*CH_k \right) X$$

является отрицательно определенной.

Полученные простые результаты можно перенести на систему нелинейных стохастических дифференциальных уравнений

$$dX = F(X)dt + H(X)dw(t), \quad F(0) = 0, H(0) = 0, \quad (5)$$

где  $dw(t)$  – стандартный винеровский случайный процесс.

Введём квадратичную положительно определенную функцию Ляпунова  $v(X) = X^*CX$ . Находим

$$\langle dv(X) \rangle \geq X^*CF(X)dt + F^*(X)CXdt + H^*(X)CH(X)dt,$$

откуда приходим к теореме

**Теорема 3.** Если функция

$$w(X) = X^*CF(X) + F^*(X)CX + H^*(X)CH(X) \quad (6)$$

является отрицательно определенной, то нулевое решение системы стохастических дифференциальных уравнений (5) является асимптотически устойчивым в среднем квадратичном.

Если функция  $w(X)$  является положительно определенной, то нулевое решение системы уравнений (5) является неустойчивым.

**Пример.** Исследуем устойчивость нулевого решения нелинейного стохастического дифференциального уравнения

$$dx(t) = ax(t)dt + x^3(t)dw(t). \quad (7)$$

Используем положительно-определенную функцию Ляпунова [3]

$$v(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Находим функцию

$$w(x) = ax^2 + x^6.$$



Если  $a < 0$ , то нулевое решение уравнения (7) асимптотически устойчиво в среднем квадратичном. Если  $a \geq 0$ , нулевое решение уравнения (7) неустойчиво.

Рассмотрим систему нелинейных стохастических дифференциальных уравнений

$$dX = F(X)dt + \sum_{k=1}^n H_k(X)dw_k(t), \quad (8)$$

где  $F(X)$ ,  $H_k(X)$  – дифференцируемые вектор-функции.

$$F(0) = 0, \quad H_k(0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

**Теорема 4.** Пусть  $v(X) = X^*CX$  – положительно определенная квадратичная форма. Нулевое решение системы уравнений (8) асимптотически устойчиво в среднем квадратичном, если

$$w(X) = X^*CF(X) + F^*(X)CX + \sum_{k=1}^n H_k^*(X)CH_k(X)$$

является отрицательно определенной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Из-во Наукова думка, 1968, 353с.
2. Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.Н. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Из-во РУДН, 1996, 258с.
3. Валеев К.Г., Финин Г.С. Построение функций Ляпунова. – Киев: Наукова думка, 1981, 412с.

С.З.ҚУРБОНШОЕВ, М.А.НУСАЙРИЕВ\*

#### ТАДҚИҚИ ҲАЛЛҲОИ УСТУВОРИИ СИСТЕМАҲОИ СТОХАСТИКИИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ

*Донишгоҳи (Славянии) Россияву Тоҷикистон,*

*\*Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.Осимӣ*

Устувории ҳалҳо дар назарияи муодилаҳои дифференсиалии оддӣ ҳамчун хосияти ҳалли муодилаҳои фаҳмида мешавад, ки дар муддати номаҳдуди вақт бо тағйирёбии каме барои шартҳои ибтидоӣ тағйир меёбад, яъне дар зери изтиробҳои доимӣ таъсиркунанда тадқиқ карда мешаванд. Дар ин мақола масъалаи асосӣ барои муодилаҳои дифференсиалии стохастикӣ баррасӣ карда мешавад.

**Калимаҳои калидӣ:** функцияи Ляпунов, устувории асимптотикӣ, муодилаҳои дифференсиалии стохастикӣ.

S.Z.KURBANSHOEV, M.A.NUSAYRIEV\*

**INVESTIGATION OF SOLUTIONS TO STOCHASTIC  
DIFFERENTIAL-EQUIVALENT SYSTEMS**

*Russian-Tajik (Slavonic) University,*

*\*M.Osimi Tajik Technical University*

The stability of solutions in the theory of ordinary differential equations is understood as the property of solutions to an equation that changes little over an unlimited period of time with a small change in the initial conditions, i.e. is investigated under permanent perturbations. A similar problem for stochastic differential equations is considered in this paper.

**Key words:** Lyapunov function, asymptotically stable, stochastic differential equations.

**Сведения об авторах:**

**Курбаншоев Сафарали Завкибекович** – доктор физико-математических наук, профессор, Российско-Таджикский (Славянский) университет. E-mail: ksz-1@mail.ru

**Нусайриев Мастибек Алиёрбекович** – кандидат физико-математических наук, Таджикский технический университет им. М.С.Осими, доцент кафедры высшей математики. E-mail: mastibek82@mail.ru

УДК 917.962

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный, функциональный анализ  
1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Н.РАДЖАБОВ, М.МАМАДАЛИЕВ, Е.МИРЗОЕВ

**ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВ-  
НЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ И ОДНОЙ  
ВНУТРЕННЕЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ**

*Таджикский национальный университет*

*Поступила в редакцию 15.03.2023 г.*

*Изучена переопределенная линейная система интегральных уравнений с одной граничной и одной внутренней сингулярной линией. Изучены свойства полученных решений. На этой основе в тех случаях, когда общее решение содержит произвольные постоянные, ставятся и исследуются граничные задачи.*

**Ключевые слова:** переопределенная система интегральных уравнений, граничные сингулярные линии, внутренние сингулярные линии, многообразия решений, граничные задачи.

Через  $D$  обозначим прямоугольник  $D = \{(x, y) : a < x < a_0, b < y < b_0\}$ . Соответственно обозначим  $\Gamma_1 = \{a < x < a_0, y = b\}$ ,  $\Gamma_2 = \{x = a, b < y < b_0\}$ . На  $\Gamma_1$  фиксируем точку  $x=c$ . Тогда  $\Gamma_1$  разбивается на две части:  $\Gamma_1^1 = \{a < x < c, y = b\}$ ,  $\Gamma_1^2 = \{c < x < a_0, y = b\}$ . Далее обозначим  $D_1 = \{(x, y) : a < x < c, b < y < b_0\}$ ,  $D_2 = \{(x, y) : c < x < a_0, b < y < b_0\}$ . В области  $D / \{x = c, b < y < b_0\}$  рассмотрим следующую переопределённую систему интегральных уравнений:

---

*Адрес для корреспонденции:* Раджабов Нусрат, 734025. Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17. Таджикский национальный университет. E-mail: nusrat38@mail.ru.

$$\begin{cases} \varphi(x, y) + \int_c^x \frac{A(t)\varphi(t, y)}{|t-c|} dt = f(x, y) \\ \varphi(x, y) + \int_b^y \frac{B(s)\varphi(x, s)}{s-b} ds = g(x, y) \end{cases}, \quad (1)$$

где  $A(x), B(y), f(x, y), g(x, y)$  – заданные функции соответственно на  $\Gamma_1, \Gamma_2, D$ ,  $\varphi(x, y)$  – искомая функция.

Решение системы (1) будем искать в классе функций  $\varphi(x, y) \in C(\bar{D})$ ,  $\varphi(c, b) = 0$  с асимптотическим поведением:

$$\varphi(x, y) = 0 \left[ |x-c|^\varepsilon (y-b)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } (x, y) \rightarrow (c, b).$$

Систему (1) будем изучать при предположении, что  $A(c \pm 0) \neq 0, B(b) \neq 0$ .

Проблеме исследования переопределенной линейной системы интегральных уравнений Вольтерра с сингулярными и сверхсингулярными ядрами посвящены работы [1-3] и литература, указанная в них. Проблеме исследования переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных с регулярными и сингулярными коэффициентами посвящены работы [4-7].

Пусть в системе (1) основным уравнением является второе уравнение системы (1).

Пусть во второе уравнение системы (1),  $B(b) < 0, g(x, b) = 0$  с асимптотическим поведением

$$g(x, y) = 0 \left[ (y-b)^{\gamma_9} \right], \quad \gamma_9 > |B(b)|, \text{ при } y \rightarrow b. \quad (2)$$

Тогда согласно [8] решение второго уравнения системы (1) выражается равенством

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & (y-b)^{|B(b)|} \exp[-W_B^1(y)] C_2(x) + g(x, y) - \\ & \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left( \frac{y-b}{s-b} \right)^{|B(b)|} \frac{B(s)g(x, s)}{s-b} ds \equiv M[C_2(x), g(x, y)], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $C_2(x)$  – произвольная функция точек  $\bar{\Gamma}_1$ , причём  $C_2(c) = 0$ , с асимптотическим поведением

$$C_2(x) = 0 \left[ |x-c|^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow c, \quad (4)$$

$g(c, y) = 0$  с асимптотическим поведением

$$g(x, y) = 0[|x - c|^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } x \rightarrow c. \quad (5)$$

$$W_B^1(y) = \int_b^y \frac{B(s) - B(b)}{s - b} ds.$$

Найденное решение, из (3) подставляя в первое уравнение системы (1), после некоторых преобразований, приходим к следующему равенству

$$\begin{aligned} & (y - b)^{|B(b)|} \exp[-W_B^1(y)] \left[ C_2(x) + \int_c^x \frac{A(t)C_2(t)}{t - c} dt \right] = \\ & = f(x, y) - g(x, y) - \int_c^x \frac{A(t)g(t, y)}{t - c} dt \\ & + \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left( \frac{y - b}{s - b} \right)^{|B(b)|} \frac{B(s)g(x, s)}{s - b} ds \\ & + \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left( \frac{y - b}{s - b} \right)^{|B(b)|} \frac{B(s)ds}{s - b} \int_c^x \frac{A(t)g(t, s)}{t - c} dt. \end{aligned}$$

Умножая обе части данного равенства на  $(y - b)^{-|B(b)|} \exp[W_B^1(y)]$ , получим

$$\begin{aligned} C_2(x) + \int_c^x \frac{A(t)C_2(t)}{t - c} dt & = \exp[W_B^1(y)](y - b)^{|B(b)|} [f(x, y) - g(x, y)] - \\ & \int_c^x \frac{\left( \exp[W_B^1(y)](y - b)^{|B(b)|} A(t)g(t, y) \right)}{t - c} dt + \int_b^y \exp[W_B^1(s)](s - b)^{|B(b)| - 1} B(s)g(x, s) ds \\ & + \int_b^y \exp[W_B^1(s)](s - b)^{|B(b)| - 1} B(s) ds \int_c^x \frac{A(t)g(t, s)}{t - c} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу условия независимости левой части равенства (6) от  $x$ , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left[ \exp[W_B^1(y)](y - b)^{|B(b)|} (f(x, y) - g(x, y)) \right] + \\ & + B(y) \left[ \exp[W_B^1(y)](y - b)^{|B(b)| - 1} \left( g(x, y) + \int_c^x \frac{A(t)g(t, y)}{t - c} dt \right) \right] \end{aligned}$$

$$-\int_c^x \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\exp[W_B^1(y)](y-b)^{B(b)} A(t)g(t,y)}{t-c} \right] dt = 0. \quad (7)$$

Равенство (7) перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned} B(y) \left[ \exp[W_B^1(y)](y-b)^{B(b)-1} \left( g(x,y) + \int_c^x \frac{A(t)g(t,y)}{t-c} dt \right) \right] = \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \exp[W_B^1(y)](y-b)^{B(b)} (f(x,y) - g(x,y)) - \right. \\ \left. - \int_c^x \frac{\exp[W_B^1(y)](y-b)^{B(b)} A(t)g(t,y)}{t-c} dt \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

В равенстве (8), произведя операцию дифференцирования, получим следующее условие совместности:

$$B(y)f(x,y) + (y-b) \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \right) - \int_c^x \frac{A(t)(y-b) \frac{\partial g(t,y)}{\partial y}}{t-c} dt = 0. \quad (9)$$

Принимая во внимание равенство (8), формулу (6) представим в виде

$$\begin{aligned} C_2(x) + \int_c^x \frac{A(t)C_2(t)}{t-c} dt = \\ = \exp[W_B^1(y)](y-b)^{B(b)} [f(x,y) - g(x,y)] - \int_c^x \frac{\exp[W_B^1(y)](y-b)^{B(b)} A(t)g(t,y)}{t-c} dt \\ - \int_b^y \frac{\partial}{\partial s} \left[ \exp[W_B^1(s)](s-b)^{B(b)} (f(x,s) - g(x,s)) - \right. \\ \left. - \int_c^x \frac{\exp[W_B^1(s)](s-b)^{B(b)} A(t)g(t,s)}{t-c} dt \right] ds. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу условия (2)  $\left[ (y-b)^{B(b)} g(x,y) \right]_{y=b} = 0$ . Далее, пусть существует предел

$$\left[ (y-b)^{B(b)} f(x,y) \right]_{y=b} = f(x). \quad (11)$$

Тогда равенство (10) принимает следующий вид

$$C_2(x) + \int_c^x \frac{A(t)C_2(t)}{|t-c|} dt = f(x). \quad (12)$$

Таким образом, для нахождения неизвестной функции  $C_2(x)$  получили одномерное интегральное уравнение типа Вольтерра с внутренней сингулярной точкой, теория которой разработана в [8]. Причем решение интегрального уравнения (12) мы должны искать в классе функций, для которой  $C_2(c) = 0$  с асимптотическим поведением (4). Согласно [8] решение интегрального уравнения (12) при  $A(c+0) < 0$ ,  $A(c-0) > 0$ ,  $A(x)$  в точке  $x = c$  имеет разрыв первого рода, удовлетворяет условию Гельдера, даётся формулой

$$C_2(x) = \begin{cases} (c-x)^{A(c-0)} \exp[-W_A^-(x)] c_1 + K_c^- [f(x)], & x \in \Gamma_1^1 \\ (x-c)^{-A(c+0)} \exp[W_A^+(x)] c_2 + K_c^+ [f(x)], & x \in \Gamma_1^2 \end{cases}, \quad (13)$$

где  $c_1, c_2$  произвольные постоянные,

$$W_A^-(x) = \int_x^c \frac{A(c-0) - A(t)}{c-t} dt, \quad W_A^+(x) = \int_c^x \frac{A(t) - A(c+0)}{t-c} dt,$$

$$K_c^- [f(x)] = f(x) + \int_x^c \left( \frac{c-x}{c-t} \right)^{A(c-0)} \frac{\exp[W_A^-(t) - W_A^-(x)]}{c-t} A(t) f(t) dt,$$

$$K_c^+ [f(x)] = f(x) - \int_c^x \left( \frac{t-c}{x-c} \right)^{A(c+0)} \frac{\exp[W_A^+(x) - W_A^+(t)]}{t-c} A(t) f(t) dt,$$

когда  $f(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ ,  $f(c) = 0$  с асимптотическими поведением

$$f(x) = 0 \left[ (c-x)^{\gamma_1} \right], \quad \gamma_1 > A(c-0), \quad \text{при } x \rightarrow c-0, \quad (14)$$

$$f(x) = 0 \left[ (x-c)^{\gamma_2} \right], \quad \gamma_2 > A(c+0), \quad \text{при } x \rightarrow c+0. \quad (15)$$

Подставляя данное значение  $C_2(x)$  из (13) в формулу (3), находим общее решение системы (1) в следующем виде

$$\varphi(x, y) =$$

$$= \begin{cases} M \left[ (c-x)^{A(c-0)} \exp[-W_A^-(x)] c_1 + K_c^- [f(x)], g(x,y) \right], & (x,y) \in D_1 \\ M \left[ (x-c)^{-A(c+0)} \exp[W_A^+(x)] c_2 + K_c^+ [f(x)], g(x,y) \right], & (x,y) \in D_2 \end{cases}. \quad (16)$$

Таким образом, доказана

**Теорема 1.** Пусть в системе интегральных уравнений (1)  $f(x,y) \in C(\bar{D})$ ,  $g(x,y) \in C(\bar{D})$ ,  $A(c-0) > 0$ ,  $A(c+0) < 0$ ,  $B(b) < 0$ ,  $g(x,b) = 0$  с асимптотическим поведением (5), существует предел вида (11). Причём  $f(c) = 0$  с асимптотическими поведением (14), (15). Функции  $f(x,y)$ ,  $g(x,y)$  удовлетворяют условию совместности (9).

Неоднородная система интегральных уравнений (1) всегда разрешима, её общее решение содержит две произвольные постоянные и выражается равенством (16), где  $C_1, C_2$  произвольные постоянные.

Пусть во втором уравнении системы (1)  $B(b) > 0$ ,  $g(x,b) = 0$  с асимптотическим поведением  $g(x,y) = 0 \left[ (y-b)^\varepsilon \right]$ ,  $\varepsilon > 0$ , при  $y \rightarrow b$ .

Тогда, согласно [8] второе уравнение системы (1) имеет единственное решение, которое выражается равенством

$$\varphi(x,y) = g(x,y) - \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left( \frac{s-b}{y-b} \right)^{B(b)} \frac{B(s)g(x,s)}{s-b} ds. \quad (17)$$

Подставляя данное значение  $\varphi(x,y)$  в первое уравнение системы (1), получим условие совместности в этом случае.

$$g(x,y) - \int_b^y \exp[-W_B^1(y)] \left( \frac{s-b}{y-b} \right)^{B(b)} \frac{B(s)g(x,s)}{s-b} ds + \int_c^x \left[ g(t,y) - \int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left( \frac{s-b}{y-b} \right)^{B(b)} \frac{g(t,s)}{s-b} ds \right] \frac{A(t)dt}{|t-c|} = f(x,y). \quad (18)$$

Таким образом, доказана.

**Теорема 2.** Пусть в системе (1)  $f(x,y) \in C(\bar{D})$ ,  $g(x,y) \in C(\bar{D})$ ,  $B(b) > 0$ ,  $f(a,b) = 0$  с асимптотическим поведением,

$$f(x,y) = 0 \left[ |x-c|^\varepsilon (y-b)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } (x,y) \rightarrow (a,b).$$



$g(x, b) = 0$  с асимптотическим поведением

$$g(x, y) = 0 \left[ (y - b)^\varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0 \text{ при } y \rightarrow b.$$

Функции  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  удовлетворяют условию совместности (18).

Тогда система (1) имеет единственное решение, которое выражается равенством (17).

**Замечание 1.** При выполнении всех условий теоремы 1, решение вида (16) обладает свойствами

$$\left[ (c - x)^{-A(c-0)} \left[ \varphi(x)(y - b)^{B(b)} \right]_{y=b} \right]_{x=c-0} = C_1 \quad (19)$$

$$\left[ (x - c)^{A(c+0)} \left[ \varphi(x)(y - b)^{B(b)} \right]_{y=b} \right]_{x=c+0} = C_2. \quad (20)$$

Интегральное представление (16), его свойства (19), (20) дают возможность для системы интегральных уравнений (1), ставить и исследовать следующую задачу типа Коши.

**Задача  $R_1$ .** Требуется найти решение системы интегральных уравнений (1) из класса  $C(\bar{D})$  при  $A(c-0) > 0$ ,  $A(c+0) < 0$ ,  $B(b) < 0$  по граничным условиям

$$\left[ (c - x)^{-A(c-0)} \left[ \varphi(x)(y - b)^{B(b)} \right]_{y=b} \right]_{x=c-0} = E_1 \quad (21)$$

$$\left[ (x - c)^{A(c+0)} \left[ \varphi(x)(y - b)^{B(b)} \right]_{y=b} \right]_{x=c+0} = E_2, \quad (22)$$

где  $E_1$ ,  $E_2$  – заданные постоянные.

**Решение задачи  $R_1$ .** Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда, используя интегральное представление (16), его свойства (19), (20), а также условия (21), (22), находим  $C_1 = E_1$ ,  $C_2 = E_2$ . Подставляя найденные значения  $C_1$  и  $C_2$  в формулу (16), находим решение задачи  $R_1$  в виде

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} M \left[ (c - x)^{A(c-0)} \exp[-W_A^-(x)] E_1 + K_c^- [f(x)], g(x, y) \right], & (x, y) \in D_1 \\ M \left[ (x - c)^{-A(c+0)} \exp[W_A^+(x)] E_2 + K_c^+ [f(x)], g(x, y) \right], & (x, y) \in D_2 \end{cases}. \quad (23)$$

**Теорема 3.** Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда задача  $R_1$  имеет единственное решение, которое дается формулой (23).

Пусть в системе интегральных уравнений (1), основным уравнением является первое уравнение. Тогда, если при  $A(c-0) > 0$ ,  $A(c+0) < 0$  решение первого уравнения системы (1) существует, то согласно [8], представимо в виде

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} (c-x)^{A(c-0)} \exp[-W_A^-(x)] c_1(y) + K_c^- [f(x, y)], & (x, y) \in D_1 \\ (x-c)^{-A(c+0)} \exp[W_A^+(x)] c_2(y) + K_c^+ [f(x, y)], & (x, y) \in D_2 \end{cases}, \quad (24)$$

где  $c_1(y)$ ,  $c_2(y)$  произвольные функции точек  $\Gamma_2$ .

Решение вида (24) существует, если  $A(x)$  в окрестности точек  $x = c$  удовлетворяет условию Гельдера, то есть условию

$$|A(x) - A(c \pm 0)| H_A |x - c|^{\delta_1}, \quad \delta_1 < 1 \quad (25)$$

функция  $f(x, y) \in C(\bar{D})$ ,  $f(c, y) = 0$ , со следующей асимптотической формулой

$$f(x, y) = o[(c-x)^{\delta_2}], \quad \delta_2 > A(c-0) \text{ при } x \rightarrow c-0, \quad (26)$$

$$f(x, y) = o[(x-c)^{\delta_3}], \quad \delta_3 > A(c+0) \text{ при } x \rightarrow c+0. \quad (27)$$

Подставляя найденное значение  $\varphi(x, y)$  из равенства (23) во второе уравнение системы (1), после некоторых преобразований, приходим к следующим равенствам

$$C_1(y) + \int_b^y \frac{B(s)C_1(s)}{s-b} ds = (c-x)^{-A(c-0)} \exp[W_A^-(x)] \cdot \left[ g(x, y) - K_c^- [f(x, y)] - \int_b^y \frac{B(s)K_c^- [f(x, s)]}{s-b} ds \right], \quad (28)$$

когда  $x \in \Gamma_1^1$  и

$$C_2(y) + \int_b^y \frac{B(s)C_2(s)}{s-b} ds = (x-c)^{A(c+0)} \exp[-W_A^+(x)] \cdot \left[ g(x, y) - K_c^+ [f(x, y)] - \int_b^y \frac{B(s)K_c^+ [f(x, s)]}{s-b} ds \right], \quad (29)$$

когда  $x \in \Gamma_1^2$

В силу независимости левой части равенств (28), (29) от переменного  $x$ , имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[ (c-x)^{-A(c-0)} \exp[W_A^-(x)] (g(x,y) - f(x,y)) \right] + \\
& (c-x)^{-A(c-0)-1} \exp[W_A^-(x)] A(x) \left[ f(x,y) + \int_b^y \frac{B(s)f(x,s)}{s-b} ds \right] - \\
& - \int_b^y \frac{B(s)f(x,s)}{s-b} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (c-x)^{-A(c-0)} \exp[W_A^-(x)] f(x,s) \right] ds = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[ (x-c)^{A(c+0)} \exp[-W_A^+(x)] (g(x,y) - f(x,y)) \right] + \\
& (x-c)^{A(c+0)-1} \exp[-W_A^+(x)] A(x) \left[ f(x,y) + \int_b^y \frac{B(s)f(x,s)}{s-b} ds \right] = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Используя эти равенства и замечая, что когда функция  $f(x, y)$  удовлетворяет условиям (26), (27), тогда

$$\left[ (c-x)^{-A(c-0)} f(x, y) \right]_{x=c-0} = 0, \quad \left[ (x-c)^{A(c+0)} f(x, y) \right]_{x=c+0} = 0. \tag{32}$$

Пусть существуют следующие пределы

$$\left[ (c-x)^{-A(c-0)} g(x, y) \right]_{x=c-0} = g_1(y), \quad x \in \Gamma_1^1, \tag{33}$$

$$\left[ (x-c)^{A(c+0)} g(x, y) \right]_{x=c+0} = g_2(y), \quad x \in \Gamma_1^2. \tag{34}$$

При выполнении условий (32) и существовании пределов (33) и (34), задача сводится к решению следующих одномерных интегральных уравнений

$$C_1(y) + \int_b^y \frac{B(s)C_1(s)}{s-b} ds = g_1(y), \quad x \in \Gamma_1^1, \tag{35}$$

$$C_2(y) + \int_b^y \frac{B(s)C_2(s)}{s-b} ds = g_2(y), \quad x \in \Gamma_1^2. \tag{36}$$

Согласно [8], если решение интегральных уравнений (35) и (36) при  $B(b) < 0$  существуют, тогда они даются формулами

$$C_1(y) = (y-b)^{|B(b)|} \exp[-W_B^1(y)] C_1 + g_1(y) -$$

$$\int_b^y \exp[W_B^1(s) - W_B^1(y)] \left(\frac{y-b}{s-b}\right)^{|B(b)|} \frac{B(s)g_1(s)}{s-b} ds \equiv T_1[C_1, g_1(y)], \quad (37)$$

$$C_2(y) = T_1[C_2, g_2(y)], \quad (38)$$

где  $W_B^1(y) = \int_b^y \frac{B(s) - B(b)}{s-b} ds$ .

Решение видов (37), (38) существует, если  $B(y)$  в окрестности точек  $y = b$  удовлетворяет условию Гёльдера,  $g_j(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$  ( $j=1,2$ ),  $g_j(b) = 0$  с асимптотическим поведением

$$g_j(y) = O\left[(y-b)^{\delta_4}\right], \quad \delta_4 > |B(b)|, \quad \text{при } y \rightarrow b, (j=1,2). \quad (39)$$

Подставляя данное значение  $C_j(y)$  ( $j=1,2$ ) в равенство (24), находим общее решение системы интегральных уравнений (1) в этом случае

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} (c-x)^{A(c-0)} \exp[-W_A^-(x)] T_1[C_3, g_1(y)] + K_c^- [f(x, y)], & (x, y) \in D_1 \\ (x-c)^{-A(c+0)} \exp[W_A^+(x)] T_1[C_4, g_2(y)] + K_c^+ [f(x, y)], & (x, y) \in D_2 \end{cases}, \quad (40)$$

где  $C_3, C_4$  – произвольные постоянные.

Итак доказана

**Теорема 4.** Пусть в системе интегральных уравнений (1) функция  $A(x)$  в окрестности точек  $x = c$  удовлетворяет условию Гельдера (25),  $f(x, y) \in C(\overline{D})$ ,  $g(x, y) \in C(\overline{D})$ ,  $A(c-0) > 0$ ,  $A(c+0) < 0$ ,  $B(b) < 0$ ,  $f(c \pm 0, y) = 0$  с асимптотическими поведением (26), (27), существует предали видов (33), (34). Причём  $g_2(b) = 0$  с асимптотическими поведением (39). Функции  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  удовлетворяют условию совместности (30), (31).

Тогда неоднородная система интегральных уравнений (1) всегда разрешимая, её общее решение содержит две произвольные постоянные и выражается равенством (40), где  $C_3, C_4$  произвольные постоянные.

**Замечание 2.** При выполнении всех условий теоремы 4, решение вида (16) обладает свойствами

$$\left[ (y-b)^{B(b)} \left[ \varphi(x,y)(c-x)^{-A(c-0)} \right]_{x=c-0} \right]_{y=b} = C_3, \quad (41)$$

$$\left[ (y-b)^{B(b)} \left[ \varphi(x,y)(x-c)^{A(c+0)} \right]_{x=c+0} \right]_{y=b} = C_4. \quad (42)$$

Интегральное представление (41), его свойства (41), (42) дают возможность в этом случае, для системы интегральных уравнений (1), ставить и исследовать следующую задачу типа Коши

**Задача  $R_2$ .** Требуется найти решение системы интегральных уравнений (1) из класса  $C(\bar{D})$  при  $A(c-0) > 0$ ,  $A(c+0) < 0$ ,  $B(b) < 0$  по граничным условиям

$$\left[ (y-b)^{B(b)} \left[ \varphi(x,y)(c-x)^{-A(c-0)} \right]_{x=c-0} \right]_{y=b} = E_3, \quad (43)$$

$$\left[ (y-b)^{B(b)} \left[ \varphi(x,y)(x-c)^{A(c+0)} \right]_{x=c+0} \right]_{y=b} = E_4, \quad (44)$$

где  $E_3, E_4$  – заданные постоянные.

**Решение задачи  $R_2$ .** Пусть выполнены все условия теоремы 4. Тогда, используя интегральное представление (40), его свойства (41), (42), а также условия (43), (44), находим  $C_3 = E_3, C_4 = E_4$ . Подставляя найденные значения  $C_3$  и  $C_4$  в формулу (40), находим решение задачи  $R_2$  в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \\ &= \begin{cases} (c-x)^{A(c-0)} \exp[-W_A^-(x)] T_1[E_3, g_1(y)] + K_c^- [f(x,y)], & (x,y) \in D_1 \\ (x-c)^{-A(c+0)} \exp[W_A^+(x)] T_1[E_4, g_2(y)] + K_c^+ [f(x,y)], & (x,y) \in D_2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (45)$$

**Теорема 5.** Пусть выполнены все условия теоремы 4. Тогда задача  $R_2$  имеет единственное решение, которое дается формулой (45).

**Замечание 1.** Утверждение, подобное теореме 1, получено во всех остальных возможных случаях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Раджабов Н. Переопределенная линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверх-сингулярные интегральные уравнения типа Вольтерра третьего рода с логарифмическими и сверх-сингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе: изд-во ТНУ, 2021, 317с.
2. Раджабов Н. Переопределенная линейная система трех интегральных уравнений Вольтерровского типа с тремя сингулярными областями. – Известия НАНТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2021, №3(184), с. 46-61.

3. Раджабов Н. Переопределенная линейная система двух интегральных уравнений Вольтерровского типа с двумя фиксированными граничными сингулярными линиями в ядре. – Мат-лы международной науч. конф. «Современные проблемы математики и физики», посвященной 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б.Сабитова (12-15 сентября 2021 г. Стерлитамак), 2021, с. 85-90.
4. Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. – Актобе, 2018, 463с.
5. Мохамед Эль-саед Абдель-Ааль, Раджабов Н. Переопределенная линейная система второго порядка, с сингулярными и сверх-сингулярными линиями. – LAPLAMBERT Academic Publishing, Germany, 2011, 234 p.
6. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределенные системы дифференциальных уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. – Душанбе: Дониш, 1986 г.
7. Гайшун И, В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. – Минск: Наука и техника, 1983 г.
8. Раджабов Н. Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. – Душанбе: Деваштич, 2007, 218 с.

Н.РАЦАБОВ, М.МАМАДАЛИЕВ, Е.МИРЗОЕВ

**СИСТЕМАИ ХАТИИ ИНТЕГРАЛИИ БАРЗИЕДМУАЙАНШУДАИ НАМУДИ  
ВОЛТЕРРА БО ЯК ХАТИ СИНГУЛЯРИИ САРХАДИ ВА ЯК ХАТИ  
СИНГУЛЯРИИ ДОХИЛИ**

*Донишгоҳи миллии Тоҷикистон*

Дар мақола барои системаи ду муодилаи хатии интегралӣ барзиедмуайаншудаи намуди Волтерра бо як хати сарҳадии сингулярӣ ва як хати дохилии сингулярӣ, тасвирҳои гуногуни интегралӣ ба воситаи доимиҳои ихтиёрӣ, ёфта шудаанд. Ба ғайр аз ин ҳолатҳое омӯхта шудаанд, ки система ҳалли ягона дорад.

**Калимаҳои калидӣ:** системаи барзиед муайаншудаи интегралӣ, хати сарҳадии сингулярӣ, хати дохилии сингулярӣ, тасвирҳои интегралӣ, масалаҳои канорӣ.

N.RAJABOV, M.MAMADALIEV, E.MIRZOEV

**VOLTERRA TYPE OVERDETERMINED SYSTEM INTEGRAL EQUATION  
WITH ONE BOUNDARY END ONE INTERIOR SINGULAR LINES**

*Tajik National University*

In this work for one two system over determined Volterra type integral equation with one boundary and one interior singular lines, integral representation manifold solution by arbitrary constants is found. Besides found cases, for him consideration system have unique solution.

**Key words:** over determined system integral equation, boundary singular lines, interior singular lines, integral representation, boundary value problems.

**Сведения об авторах:**

**Раджабов Нусрат** – доктор физико-математических наук, академик НАНТ, Таджикский национальный университет, профессор кафедры математического анализа и теории функций. E-mail: nusrat38@mail.ru;

**Мамадалиев Мухаммадали Иноятулович** – Таджикский национальный университет, доктор PhD кафедры математического анализа и теории функций. E-mail: mamadaliyev2023@internet.ru;

**Мирзоев Е.** – Таджикский национальный университет, магистр кафедры математического анализа и теории функций. mirzoyev2020@internet.ru.

УДК 517.51

Специальность: 1.1.1 – Вещественный, комплексный, функциональный анализ

Ю.Х.ХАСАНОВ

**МОДУЛИ ГЛАДКОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И НАИЛУЧШИЕ  
ПРИБЛИЖЕНИЯ В  $L_p(1 < p < \infty)$**

*Российско-Таджикский (Славянский) университет*

*Поступила в редакцию 07.02.2023 г.*

*Рассматриваются измеримые  $2\pi$ -периодические функции  $f(x) \in L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ), и с помощью известных соотношений между величиной наилучшего приближения  $E_n(f)_{L_p}$  и модулем гладкости  $\omega_n(f; t)_{L_p}$  установлены зависимости между модулями гладкости дробных порядков и наилучшими приближениями функции  $f(x)$  тригонометрическими полиномами в  $L_p$ . В заметке для функций  $f(x) \in L_p$  ( $1 < p < \infty$ ) доказаны более точные в смысле порядка зависимости, отражающие влияние метрики пространства  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ) и найдены двусторонние оценки между модулями гладкости различных порядков.*

**Ключевые слова:** периодические функции, тригонометрические полиномы, модуль гладкости дробного порядка, наилучшие приближения, ряды Фурье, неравенство Минковского, преобразование Абеля.

Пусть  $f(x) \in L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) периодическая периода  $2\pi$  функция и

$$\|f(x)\|_{L_p} = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$f(x)_{L_\infty} = \operatorname{vraisup}_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| < \infty.$$

При  $x, h, \alpha > 0$  и

---

*Адрес для корреспонденции:* Хасанов Юсуфали. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М.Турсунзаде, 30, РТСУ. E-mail: yukhas60@mail.ru.



$$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f[x + (\alpha - k)h],$$

рассмотрим

$$\omega_\alpha(f; t)_{L_p} = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^\alpha f(x)\|_{L_p},$$

которую называют модулем гладкости порядка  $\alpha$  функции  $f(x) \in L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) и наилучшие приближения функции  $f(x)$  тригонометрическими полиномами в пространстве  $L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ )

$$E_n(f)_{L_p} = \inf_{a_k} f(x) - \sum_{k=-n}^n a_k \exp(ikx)_{L_p}.$$

Между величиной наилучшего приближения  $E_n(f)_{L_p}$  и модулем гладкости  $\omega_\alpha(f; t)_{L_p}$  известны следующие зависимости [1].

**Теорема А.** Если  $f(x) \in L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) и  $\alpha > 0$ , то

$$E_n(f)_{L_p} \leq C_1(\alpha) \omega_\alpha\left(f; \frac{1}{n+1}\right)_{L_p}. \quad (1)$$

**Теорема В.** В предположениях теоремы А имеет место

$$\omega_\alpha\left(f; \frac{1}{n+1}\right)_{L_p} \leq C_2(\alpha) (n+1)^{-\alpha} \sum_{k=0}^n (k+1)^{\alpha-1} E_k(f)_{L_p}, \quad (2)$$

$C_1(\alpha)$ ,  $C_2(\alpha)$  – положительные константы, зависящие от  $\alpha$ .

При целых  $\alpha > 0$  оценки (1) и (2) хорошо известны [1, с.274, 345], а для произвольных  $\alpha > 0$  [2, с.398, 399].

В настоящей заметке для функций  $f(x) \in L_p$  ( $1 < p < \infty$ ) получены более точные в смысле порядка зависимости, отражающие влияние метрики пространства  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ).

**Теорема 1.** Если  $f(x) \in L_p$  ( $1 < p < \infty$ ) и  $\alpha > 0$ , то

$$\omega_\alpha\left(f; \frac{1}{n+1}\right)_{L_p} \leq C_1(\alpha, p) (n+1)^{-\alpha} \left[ \sum_{k=1}^n k^{\beta\alpha-1} E_{k-1}^\beta(f)_{L_p} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad (3)$$

где  $\beta = \min(2, p)$ ,  $C_1(\alpha, p)$  – положительная константа, зависящая от  $\alpha$  и  $p$ .

**Теорема 2.** Если  $f(x) \in L_p$  ( $1 < p < \infty$ ), то

$$\omega_\alpha \left( f; \frac{1}{n+1} \right)_{L_p} \geq C_2(\alpha, p)(n+1)^{-\alpha} \left[ \sum_{k=1}^n k^{\gamma\alpha-1} E_k^\gamma(f)_{L_p} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (4)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\gamma = \max(2, p)$ ,  $C_2(\alpha, p)$  – константа, зависящая от  $\alpha$  и  $p$ .

**Доказательство теоремы 1.** Пусть

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \quad (A_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

– ряд Фурье функции  $f(x) \in L_p$  ( $1 < p < \infty$ ), и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k(x) \quad (\tilde{A}_k(x) = -b_k \cos kx + a_k \sin kx)$$

– ряд Фурье функции  $\tilde{f}(x)$ . Введем функцию  $g(x) = f(x) + i\tilde{f}(x)$  с рядом Фурье

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x), \quad c_k(x) &= A_k(x) + i\tilde{A}_k(x) = c_k \exp(ikx) \\ &= (a_k - ib_k) \exp(ikx), \quad c_0 = \frac{a_0}{2}. \end{aligned}$$

Так как

$$S_n(g; x) = \sum_{k=-n}^n c_k(x) = S_n(f; x) + i\tilde{S}_n(f; x),$$

то в силу известного неравенства (см. [4])

$$\|f(x) - S_n(f; x)\|_{L_p} \leq M(p)E_n(f)_{L_p} \quad (1 < p < \infty) \quad (5)$$

следует, что при  $1 < p < \infty$  имеет место следующее соотношение

$$\|g(x) - S_n(g; x)\|_{L_p} \leq M_1(p)E_n(f)_{L_p}. \quad (6)$$

Пусть  $2^{-m-1} \leq h \leq 2^{-m}$ . Тогда с помощью неравенства Минковского, благодаря оценке (6), получим, что

$$\|\Delta_h^\alpha f(x)\|_{L_p} \leq \|\Delta_h^\alpha g(x)\|_{L_p} \leq M(\alpha, p)E_{2^{m-1}}(f)_{L_p} + \sigma(f), \quad (7)$$

где

$$\sigma(f) = \left\| \Delta_h^\alpha S_{2^m-1}(g; x) \right\|_{L_p}.$$

Нетрудно показать, что

$$\Delta_h^\alpha S_{2^m-1}\left(g; x - \frac{\alpha h}{2}\right) = \sum_{k=-(2^m-1)}^{2^m} \left(2i \sin \frac{kh}{2}\right)^\alpha \cdot c_k(x). \quad (8)$$

Тогда, в силу известного соотношения (см. [3, с. 335])

$$B(p) \left\| \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} \Delta_\mu^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p} \leq \|f(x)\|_{L_p} \leq C(p) \left\| \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} \Delta_\mu^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p}, \quad (9)$$

где

$$\Delta_\mu = \sum_{k=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_k(x), \quad 1 < p < \infty,$$

получим

$$\sigma(f) \leq C_1(\alpha, p) \left\| \left( \sum_{\mu=1}^m \left| \sum_{k=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_k(x) \sin^\alpha \frac{kh}{2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p}. \quad (10)$$

Так как при  $2^{-\mu-1} \leq h \leq 2^{-\mu}$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\sum_{k=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} \left| \sin^\alpha \frac{kh}{2} - \sin^\alpha \frac{(k+1)h}{2} \right| \leq 2^{\mu\alpha+1} h^\alpha,$$

то применяя преобразование Абеля к

$$\sum_{k=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_k(x) \sin^\alpha \frac{kh}{2},$$

с помощью неравенства Минковского, используя оценку (5), будем иметь

$$\left\| \sum_{k=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_k(x) \sin^\alpha \frac{kh}{2} \right\|_{L_p} \leq B_1(\alpha, p) E_{2^\mu-1}(f)_{L_p} h^\alpha 2^{\mu\alpha}.$$

В силу монотонного убывания величин  $\{E_n(f)_{L_p}\}$  отсюда следует, что для  $1 < p < \infty$

$$\left\| \sum_{k=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_k(x) \sin^\alpha \frac{kh}{2} \right\|_{L_p}^p \leq B_2(\alpha, p) h^{\alpha p} \sum_{k=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} E_{k-1}^p(f)_{L_p} k^{p\alpha-1}. \quad (11)$$

Пусть  $1 < p \leq 2$ . Так как  $\frac{p}{2} \leq 1$ , то из (10), благодаря (11), получим

$$\begin{aligned} \sigma(f) &\leq C_2(\alpha, p) \left\{ \sum_{\mu=1}^m \left\| \sum_{k=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_k(x) \sin^\alpha \frac{kh}{2} \right\|_{L_p}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_3(\alpha, p) (n+1)^{-\alpha} \left[ \sum_{k=1}^n k^{\alpha p-1} E_{k-1}^p(f)_{L_p} \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Так как, кроме того, при  $1 < \gamma < \infty$

$$E_{2^{m-1}}(f)_{L_p} \leq C(\alpha) n^{-\alpha} \left[ \sum_{k=1}^n k^{\gamma\alpha-1} E_{k-1}^\gamma(f)_{L_p} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (12)$$

то из (7) и полученных оценок следует, что при  $1 < p \leq 2$  и  $2^{-m-1} \leq h \leq 2^{-m} < (n+1)^{-1}$

$$\omega_\alpha \left( f; \frac{1}{n+1} \right)_{L_p} \leq C_4(\alpha, p) (n+1)^{-\alpha} \left[ \sum_{k=1}^n k^{\alpha p-1} E_{k-1}^p(f)_{L_p} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Если  $2 \leq p < \infty$ , то применяя обобщенное неравенство Минковского к правой части (10), получим

$$\sigma(f) \leq C_5(\alpha, p) \left\{ \sum_{\mu=1}^m \sum_{k=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_k(x) \sin^\alpha \frac{kh}{2} \right\}_{L_p}^{\frac{1}{2}}.$$

С помощью оценки (11) отсюда находим

$$\sigma(f) \leq C_6(\alpha, p) (n+1)^{-\alpha} \left[ \sum_{k=1}^n k^{2\alpha-1} E_{k-1}^2(f)_{L_p} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Используя (12) при  $\gamma = 2$ , получим из (7), что для  $2 < p < \infty$  ( $\alpha > 0$ )

$$\omega_\alpha \left( f; \frac{1}{n+1} \right)_{L_p} \leq C_7(\alpha, p) (n+1)^{-\alpha} \left[ \sum_{k=1}^n k^{2\alpha-1} E_{k-1}^2(f)_{L_p} \right]^{\frac{1}{2}},$$

что и требовалось доказать.

**Доказательство теоремы 2.** Пусть  $2^m \leq n \leq 2^{m+1}$  и  $h = (n+1)^{-1}$ . Рассмотрим при любом  $1 < \gamma < \infty$  величину

$$\sigma_{\alpha,\gamma}(f) = \left[ \sum_{k=1}^n k^{\gamma\alpha-1} n^{-\gamma\alpha} E_{k-1}^\gamma(f)_{L_p} \right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

В силу (9) имеем

$$\sigma_{\alpha,\gamma}(f) \leq M(\alpha,\gamma) \left[ \sum_{k=1}^{m+1} 2^{\gamma\alpha k} n^{-\gamma\alpha} \left\| \left( \sum_{\mu=k}^{\infty} \Delta_\mu^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p}^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (13)$$

Пусть  $1 < p \leq 2$ ,  $\gamma = 2$ . По обобщенному неравенству Минковского, из (12) получаем

$$\sigma_{\alpha,2}(f) \leq M(\alpha,2) \left[ \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=1}^{m+1} 2^{2\alpha k} n^{-2\alpha} \sum_{\mu=k}^{\infty} \Delta_\mu^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (14)$$

К конечной сумме, стоящей в скобках под интегралом, применим преобразование Абеля и тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha,2}(f) &\leq M_1(\alpha,2) \left\{ \left[ \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=1}^m 2^{2\alpha k} n^{-2\alpha} \Delta_k^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right]^{\frac{1}{p}} + \left[ \int_0^{2\pi} \left( \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \Delta_\mu^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = \\ &= M_1(\alpha,2) \{I_1 + I_2\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Оценим сумму в правой части (15). Сначала займемся получением оценки  $I_2$ . В силу (6), (9) и неравенства (1) находим, что

$$I_2 \leq M_2(\alpha,p) E_n(f)_{L_p} \leq M_3(\alpha,p) \omega_\alpha \left( f; \frac{1}{n+1} \right)_{L_p}. \quad (16)$$

Займемся теперь получению оценки  $I_1$ . Применяя (9), будем иметь

$$I_1 \leq M_4(\alpha,p) \left[ \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=1}^m 2^{2\alpha k} n^{-\alpha} \Delta_k \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (17)$$

Для дальнейшей оценки правой части  $I_1$  дважды применяем известную теорему Марцинкевича [3, с. 346] и, принимая во внимание (8), из (17) получим

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq M_5(\alpha, p) \left\| \sum_{k=1}^m k^\alpha n^{-\alpha} A_k(x) \right\|_{L_p} \leq M_6(\alpha, p) \Delta_h^\alpha S_n(f; x)_{L_p} \leq \\
&\leq M_7(\alpha, p) \Delta_h^\alpha f(x)_{L_p} \leq M_8(\alpha, p) \omega_\alpha \left( f; \frac{1}{n+1} \right)_{L_p}. \quad (18)
\end{aligned}$$

В силу (14), из оценок (15), (16), (18) вытекает утверждение теоремы 2 при  $1 < p \leq 2$ .

Пусть теперь  $2 < p < \infty$  и  $\gamma = p$ . Так как  $\frac{2}{p} < 1$ , то благодаря соотношению (9), из оценки (13) следует, что

$$\sigma_{\alpha, p}(f) \leq M_9(\alpha, p) \left[ \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=1}^{m+1} 2^{2\alpha k} n^{-2\alpha} \sum_{\mu=k}^{\infty} \Delta_\mu^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (19)$$

Выражение справа в (19) такое же, как и в неравенстве (14). Следовательно, повторяя рассуждения для оценки  $\omega_\alpha \left( f; \frac{1}{n+1} \right)_{L_p}$  в случае  $1 < p \leq 2$ , приходим к утверждению теоремы для  $2 < p < \infty$ . Теорема 2 полностью доказана.

Из теорем А, В, 1, 2 и свойств модулей гладкости при любом  $\alpha > 0$  [1] вытекают следующие соотношения между модулями гладкости различных порядков.

**Следствие.** Если функция  $f(x) \in L_p$  ( $1 < p < \infty$ ), то при  $0 < \beta < \alpha$  и  $0 < h \leq \frac{1}{2}$  имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned}
\omega_\beta(f; h)_{L_p} &\leq B(\alpha, p) h^\beta \left\{ \int_h^1 \omega_\alpha^\gamma(f; t)_{L_p} t^{-(\beta\gamma+1)} dt \right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \gamma = \min(2, p); \\
\omega_\beta(f; h)_{L_p} &\geq C(\alpha, p) h^\beta \left\{ \int_h^1 \omega_\alpha^\delta(f; t)_{L_p} t^{-(\beta\delta+1)} dt \right\}^{\frac{1}{\delta}}, \quad \delta = \max(2, p).
\end{aligned}$$

Заметим, что два последних соотношения при натуральных  $\alpha$  и  $\beta$  получены М.Ф.Тиманом [4, с. 11].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Наука, 1960, 624 с.
2. Taberski R. Differences, moduli and derivatives of fractional orders. – Roczn. Pol. tow. mat. ser. 1, v.19, №2, 1977, pp. 389-400.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965, т. 2, 537 с.
4. Тиман М.Ф. Аппроксимация и свойства периодических функций. – Киев: Наукова думка, 2009, 376 с.

Ю.Х.ХАСАНОВ

### МОДУЛИ БЕФОСИЛАГИИ ТАРТИБИ КАСРӢ ВА НАЗДИКШАВИИ

#### БЕХТАРИН ДАР $L_p(1 < p < \infty)$

*Донишгоҳи (Славянии) Россияву Тоҷикистон*

Функсияи ченшавандаи даврш  $2\pi$ -и  $f(x)$  дар фазои  $L_p(1 \leq p \leq \infty)$  дида мешавад. Аз хосиятҳои маълуми наздикшавии беҳтарин  $E_n(f)_{L_p}$  ва модули бифосилагии тартиби касрӣ  $\omega_n(f;t)_{L_p}$  истифода бурда, чунин муносибатҳо барои ин бузургҳо дар фазои  $L_p$ , тавассути бисёрназгиҳои тригонометрӣ, нишон дода шудаанд. Барои функсияҳои  $f(x) \in L_p(1 < p < \infty)$  муносибатҳои нисбатан аниқ, ки ба метрикаи фазои  $L_p(1 < p < \infty)$  дахлат мекунад исбот карда шуда, баҳоҳои дутарафаи байни модулҳои суфтагии тартибҳои гуногун оварда мешаванд.

**Калимаҳои калидӣ:** функсияҳои даврӣ, полиномҳои тригонометрӣ, модули суфтагии тартиби касрӣ, наздикшавии беҳтарин, қатори Фурйе, нобаробарии Минковский, тақдирҳои Абел.

Yu.Kh.KHASANOV

### FRACTIONAL ORDER SMOOTHNESS MODULES AND BEST

#### APPROXIMATIONS IN $L_p(1 < p < \infty)$

*Russian-Tajik (Slavonic) University*

This note considers measurable  $2\pi$ -periodic functions  $f(x)$  that belong to the space  $L_p(1 \leq p \leq \infty)$ . Using the previously known relations between the value of the best approximation  $E_n(f)_{L_p}$  and the modulus of smoothness  $\omega_n(f;t)_{L_p}$ , we establish the relationship between the moduli of smoothness of fractional orders and the best approximations of the function  $f(x)$  by trigonometric polynomials in  $L_p$ . For functions  $f(x) \in L_p(1 < p < \infty)$ , we obtain more

exact dependencies in terms of the order, reflecting the influence of the metric of the space  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ), and find two-sided estimates for moduli of smoothness of different orders.

**Key words:** periodic functions, trigonometric polynomials, modules of smoothness of fractional order, best approximations, Fourier series, Minkowski inequality, Abel transform.

**Сведения об авторе:**

**Хасанов Юсуфали Хасанович** – доктор физико-математических наук, Российско-Таджикский (Славянский) университет, профессор кафедры информатики и информационных технологий.  
E-mail: yukhas60@mail.ru.



УДК 523.6

Специальность: 1.3.1 – Физика космоса, астрономия

Г.И.КОХИРОВА, П.Б.БАБАДЖАНОВ

**СОВРЕМЕННЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОБЪЕКТАХ,  
СБЛИЖАЮЩИХСЯ С ЗЕМЛЕЙ:**

**II. УГАСШИЕ КОМЕТЫ И АСТЕРОИДНО-МЕТЕОРОИДНЫЕ  
КОМПЛЕКСЫ**

*Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана*

*Поступила в редакцию 15.03.2023 г.*

*Во второй части обзорной работы, посвященной современным представлениям об объектах, сближающихся с Землей, излагаются имеющиеся сведения о динамических и физических свойствах ядер угасших комет. Рассмотрено, что среди известных на текущий момент астероидов, сближающихся с Землей, небольшую фракцию составляют угасшие ядра комет или их фрагменты. Внешне они не отличаются от истинных астероидов, однако значительно различаются от них по динамическим и физическим свойствам. Следовательно, для их различения необходимо изучать и динамические, и физические параметры объектов. Показано, что некоторые известные метеороидные рои наряду с бесчисленным множеством мелких метеороидов содержат и крупные «угасшие» фрагменты кометных ядер, выявленные среди астероидов, сближающихся с Землей. Метеороидный рой и такие тела, принадлежащие ему, образуют астероидно-метеороидный комплекс. Приводятся наблюдательные и теоретические сведения, подтверждающие сложившийся современный уровень знаний об околоземных объектах.*

**Ключевые слова:** угасшая комета, астероид, метеороид, метеороидный рой, метеорный поток, околоземный объект, комплекс, орбита, эволюция.

**Введение.** Настоящая работа является продолжением обзора, опубликованного ранее. Поэтому считаем необходимым напомнить, что популяцию малых тел Солнечной системы образуют астероиды, кометы и метеороиды, причем последние являются продуктами разрушения астероидов и комет. Популяцию околоземных объектов составляют астероиды и кометы, сближающиеся с Землей (АСЗ, КСЗ), угасшие короткопериодические

---

*Адрес для корреспонденции:* Кохирова Гулчехра Исроиловна. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бухоро, 22, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: Kokhirova2004@mail.ru

кометные ядра, метеороиды, принадлежащие метеороидным роям, и спорадические метеороиды. Кроме того, мы считаем, что метеороидные рои, орбиты которых имеют перигелийные расстояния, удовлетворяющие условию менее 1.3 а.е., а также известные астероидно-метеороидные комплексы, состоящие из родственных роев и АСЗ, также относятся к ОЗО. В первой части обзора были подробно рассмотрены основные характеристики астероидов и комет, сближающихся с Землей, полученные к настоящему времени в результате наблюдений и теоретических подходов. Настоящий, второй, раздел обзора содержит сложившиеся основные сведения об угасших кометах и астероидно-метеороидных комплексах.

**Угасшие ядра комет.** Популяция АСЗ состоит из двух групп объектов. Большая по численности группа состоит из истинных астероидов, то есть каменных или железо-каменных тел. Гораздо меньшую часть составляют «потухшие» или «спящие» кометные ядра (см., например, [1-17]). Угасшие ядра комет являются конгломератами замерзших газов и твердых частиц и представляют конечное состояние кометных ядер после многократного прохождения через перигелий. В периоды прохождения перигелия происходит интенсивный выброс газов и пыли кометой, при этом некоторые из пылевых частиц не могут покинуть поверхность ядра или возвращаются на нее, и в результате со временем поверхность ядра покрывается толстой тугоплавкой корой. Она препятствует проникновению тепла вовнутрь и ослабляет интенсивность пыле- и газовой выделений, таким образом предотвращая дальнейшую сублимацию подкорковых льдов. Такое тело содержит значительное количество летучих примесей и имеет очень слабую структуру.

Возможность покрытия ядра кометы тугоплавкой корой показали результаты спектральных наблюдений комет, изучения комет посредством космических аппаратов и лабораторного моделирования кометных явлений. Спектры многих комет показали наличие большого количества молекулярного углерода  $C_2$ ,  $C_3$  и их положительных ионов [18-20]. Исследования кометы Галлея с помощью КА «Джотто» в непосредственной близости от поверхности ядра показали, что большая часть пылевых частиц состоит преимущественно из элементов Н, С, N, О [21,22]. Оптический спектрометр на КА «Вега-2» и масс-спектрометр на КА «Джотто» зарегистрировали большое содержание атомарного и молекулярного углерода С,  $C_2$ ,  $C_3$  и их ионов в непосредственной близости от ядра кометы. Источник и возможный физический механизм образования тугоплавких веществ, в частности ионов многоатомного углерода, вблизи ядра на больших гелиоцентрических расстояниях комет были невыясненными. В решении этой задачи большой вклад принадлежит методу лабораторного моделирования кометных явлений (см., например, [23,24]). Результаты лабораторного моделирования показывают, на поверхностном слое формирующегося конкретного ядра, первоначально состоявшего из замороженных легколетучих веществ, могут образоваться более сложные, в том числе тугоплавкие и органические вещества. С течением времени под действием солнечного ветра и космических лучей состав и структура поверхностного слоя ядра изменяются, обогащаясь тугоплавкими веществами. Лабораторные эксперименты показали, что поверхностный слой кометного ядра должен покрываться слоем

вещества типа графита (см., например, [23]). Этот же слой является источником ионов многоатомного углерода (и других сложных молекулярных ионов), наблюдавшихся КА «Джотто» и «Вега-2» вблизи ядра кометы Галлея [21,22]. Наличием темного тугоплавкого графитоподобного слоя на поверхности ядра качественно можно объяснить малую величину альбедо поверхности ядра кометы Галлея, наблюдаемой КА «Вега-1» и «Вега-2» [25]. Исследования кометы 67P посредством КА «Розетта» выявили наличие органических и полимерных соединений на комете, а также существование очень темных областей на ее поверхности, высоковероятно, ядро также подверглось процессу покрытия корой. Отметим, что органические и полимерные соединения присущи и АСЗ, изучение частиц пыли, собранной с поверхности астероида Итокава КА Хиябуса, показало наличие в нем органического вещества, представленного как нанокристаллическим графитом, так и неупорядоченным полиароматическим углеродом [26].

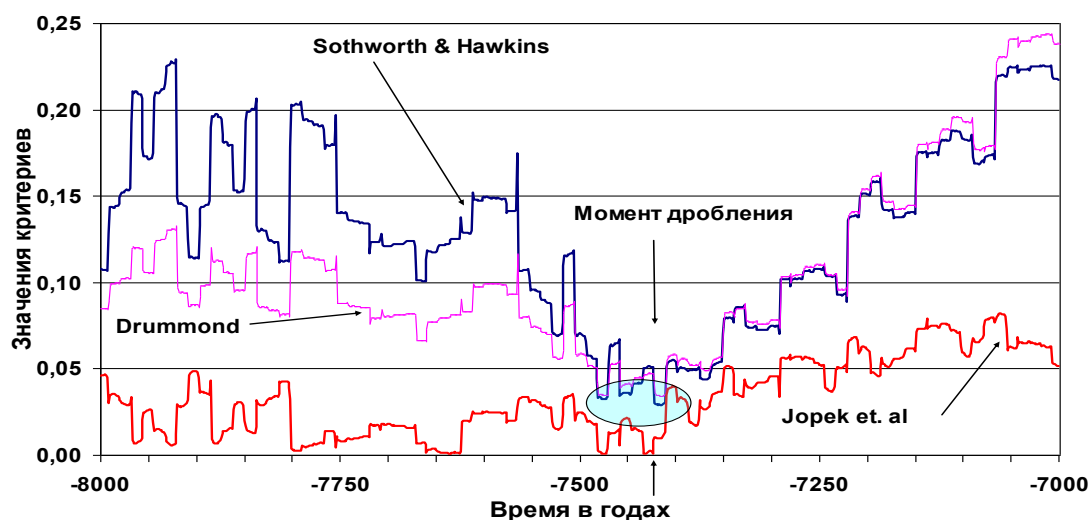
В работе [3] предложены следующие определения для описания существующих объектов кометной природы. Неактивной кометой называют ядро кометы, которая активна в некоторой части своей орбиты, но в настоящее время она находится в той части орбиты, где потери летучестей незначительны и нет видимой комы. Термином «спящая» комета обозначено ядро кометы, которая когда-то была активной и потом утратила способность генерировать кому, видимую в любой части ее нынешней орбиты. «Спящая» комета может быть реактивирована, когда она перебрасывается вследствие возмущений на меньшее перигелийное расстояние. Или реактивация возможна, если в результате столкновения с другим телом удаляется поверхностная тугоплавкая кора и свежие ледяные субстанции начинают сублимировать с поверхности, увлекая за собой пылевые частицы [3].

Впервые гипотеза о том, что некоторые из астероидов групп Аполлона, Амура и Атона являются "угасшими" кометами, то есть кометами, ядра которых покрыты толстой (до 10 м) пылевой корой или же вообще растерявшие все замерзшие газы, была предложена Эпиком [1]. В пользу реальности существования угасших ядер комет говорит и тот факт, что, как показано в работе [27], средняя продолжительность активной фазы всех комет в области  $q < 1.5$  а.е. составляет менее 200 оборотов, что значительно короче их динамического времени жизни в околоземном пространстве. Следовательно, можно ожидать, после завершения активной фазы кометы переходят в фазу астероидоподобных угасших (спящих) кометных ядер, если под действием сильных гравитационных воздействий больших планет или столкновений с другими мелкими телами они не распадутся на отдельные фрагменты и не прекратят свое существование [3]. Таким образом, большую часть срока своей жизни комета может провести в «высохшем» состоянии в виде АСЗ. Внешне для наземного наблюдателя угасшие кометные ядра выглядят также как астероиды, из-за чего различить их практически невозможно и при обнаружении они каталогизируются как АСЗ.

К настоящему времени имеется множество достоверных фактов, подтверждающих гипотезу Эпика. Существование астероидов, отождествленных с «потухшими» или «спящими» кометами, например, таких как 2060 Хирон (1977 UB), 4015 Вилсон-Харингтон (1979

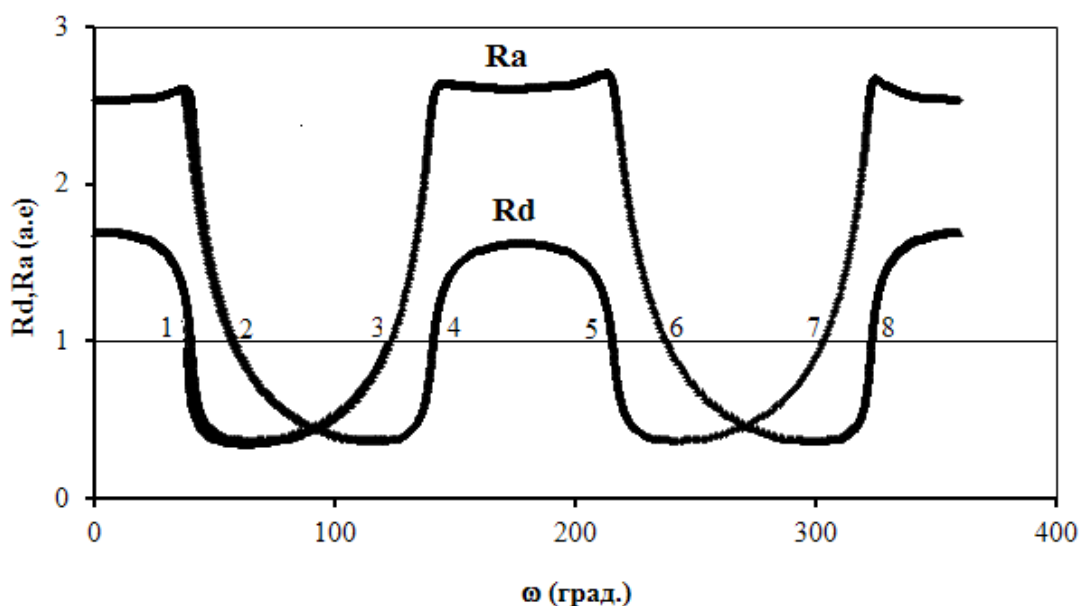
VA), 119P/Паркер-Хартли (1989 E1, 1986 TF), действительно подтверждает кометное происхождение части астероидов, пересекающих орбиту Земли. В [2] сделано предположение, что астероиды 3200 Фазтон, 2101 Адонис, 2201 Олджато, 2212 Гефест, а также 3552 Дон Кихот (1983 SA) и 6063 Ясон (1984 KB) с большой вероятностью имеют кометное происхождение, и что их физические свойства подтверждают это предположение. Согласно [28], возмущения в магнитном поле солнечного ветра, связанные с 2201 Олджато [29], аномальное радиоэхо от 2101 Адониса [30] и УФ-избыток в спектре отражения 2201 Олджато наводят на мысль, что эти астероиды являются высохшими кометами.

Очевидным доказательством реальности угасших комет служит объект 107P/Вилсон-Харрингтон, открытый в 1949 г. как активная комета, затем утерянный и вновь открытый в 1979 году как астероид, сближающийся с Землей, (4015) 1979 VA. Позже в 1992 г. было подтверждено, что этот АСЗ в действительности является кометой 107P/Вилсон-Харрингтон, утратившей какие-либо признаки кометной активности [4,5]. Примером обратного хода событий служит комета 96P/Мачхолца 1, открытая в 1986 г. Специальные поиски этой кометы по вычисленным эфемеридам на пластинках, полученных на телескопах с большим полем зрения и предельной звездной величиной до  $+19^m$  до момента открытия кометы, не дали результата [31]. Хотя, по крайней мере три из четырех ее прохождений перигелия были очень благоприятны для наблюдений [32]. Наиболее логичное объяснение этого факта заключается в предположении, что вплоть до 1986 г. комета находилась в неактивном или «спящем» состоянии [31, 32]. Дальнейшие исследования динамических свойств показали, что комета 96P/Мачхолца 1 и АСЗ 2003 EN1 с большой вероятностью имеют общее происхождение, распад общего родителя на эти два крупных фрагмента произошел почти 9.5 тысяч лет назад, и астероид 2003EN1 в реальности является угасшим фрагментом кометы [33]. На рис.3 приведен график зависимости трех критериев схожести орбит кометы 96P/Мачхолца 1 и АСЗ 2003 EN1 от времени, из которого видно, что все три критерия имели минимальные величины примерно 9.5 тыс. лет назад, следовательно, на этот момент приходится максимальное совпадение орбит и с высокой вероятностью тогда и произошла фрагментация родительской кометы. В настоящий момент активная комета 96P/Мачхолц 1, околоземный объект 2003 EN1, являющийся угасшим фрагментом ядра прародительской кометы, и метеороидный рой Квадрантид с его восемью метеорными потоками образуют астероидно-метеороидный комплекс Квадрантид [10,33-40].



**Рис. 3.** Критерии близости орбит кометы 96P/Мачхолца 1 и АСЗ 2003 ЕН1 вблизи момента дробления [33].

Другой пример угасшего ядра кометы связан с потенциально опасным околоземным астероидом 2015 ТВ145, открытым 10 октября 2015 г. В период сближения с Землей на минимальном расстоянии 31 октября того же года получены первые радиолокационные изображения астероида в обсерватории Аресибо (США), выполнены и оптические наблюдения астероида, включая инфракрасный диапазон излучения. Найдено, что размер объекта составляет 600 м, что он имеет почти сферическую фигуру и совершает полный оборот вокруг своей оси за 5 часов. Темные участки в центре астероида, выявленные по радионаблюдениям, могут быть следами ударного кратера. Установлено, что астероид отражает только 6% солнечного света, то есть является достаточно темным объектом. На основе этого факта и кометоподобной орбиты астероида было предположено, что на самом деле этот объект является ядром угасшей кометы. Нами исследована эволюция орбиты АСЗ 2015 ТВ145 на интервале времени 100 тыс. лет под действием планетных возмущений. Показано, что астероид за один цикл изменения аргумента перигелия его орбиты, это примерно 40 тыс. лет, пересекает орбиту Земли восемь раз (рис. 4). Следовательно, если объект имеет кометную природу, то он может иметь родственный метеороидный рой, порождающий восемь метеорных потоков, наблюдаемых на Земле. Вычислены параметры теоретических потоков, связанных с 2015 ТВ145 и во всех опубликованных каталогах проведен поиск наблюдаемых потоков идентичных теоретически предсказанным потокам. Оказалось, что семь из восьми предсказанных метеорных потоков отождествлены с наблюдаемыми активными потоками. Сделан вывод, что околоземный объект 2015 ТВ145 действительно с высокой вероятностью является угасшим ядром родительской кометы выявленного роя [15, 41].



**Рис. 4.** Изменения радиус-векторов восходящего  $R_a$  и нисходящего  $R_d$  узлов орбиты астероида 2015ТВ145 в зависимости от аргумента перигелия  $\omega$ . Положения пересечений с орбитой Земли указаны цифрами 1-8.

АСЗ 3552 Дон Кихот, включенный в группу активных астероидов [7, 42], согласно постоянной Тиссерана  $T_j=2.31$  имеет типичную кометоподобную орбиту. В [43] определили, что геометрическое альbedo астероида 3552 в полосе  $V$  равно 0.02, что типично для кометных ядер [44]. Кометное происхождение астероида было предсказано со 100% вероятностью и на основе динамического моделирования [6]. В [45] также предположили кометное происхождение астероида 3552 Дон Кихот. Однако на тот момент никаких признаков активности у астероида не было зарегистрировано, поэтому было предположено, что объект является ядром угасшей кометы [2,3]. Позже, в 2009 г. зарегистрирована кометная активность в виде выброса газа  $\text{CO}_2$  [46], повторившаяся в 2017 г. [47]. В 2018 г. впервые выявлена эпизодическая пылевая активность этого объекта, на основании новых исследований сделано заключение, что астероид 3552, действительно, является ядром угасшей кометы, которая вновь проявила активность [17, 46-48].

Таким образом, наблюдательные открытия и теоретические разработки за последние десятилетия привели к общему мнению о том, что, по крайней мере, некоторые астероиды, в частности, с орбитами пересекающие орбиту Земли, на самом деле могут быть потухшими ядрами комет или их фрагментами. Угасшие ядра могут напоминать примитивные астероиды С, Р и D- типов. Имеющиеся динамические оценки заключаются в том, что менее половины астероидов групп Аполлона и Атона могут быть угасшими ядрами комет, хотя неопределенность этой оценки довольно велика. На основе вычисления эволюции орбит АСЗ и критерия выявления угасших комет по метеорному признаку нами показано, что среди общего числа АСЗ открытых до 2005 г. 5% составляют угасшие ядра комет [8].

«Высохшее» кометное ядро при столкновении с Землей произведет явление подобное Тунгусскому. Таким образом, астероиды, сближающиеся с Землей, как из первого, так и из второго источников представляют опасность для Земли, хотя и по-разному. Совершенно очевидно, что для решения этих проблем и проблемы кометно-астероидной опасности необходимы дальнейшие подробные физические исследования АСЗ и других необычных ОЗО.

**Астероидно-метеороидные комплексы.** АСЗ кометного происхождения (или угасшие ядра комет) и их родственные метеороидные рои образуют комплексы околоземных объектов (ОЗО), которые имеют очень схожие орбиты и, вероятно, общее родительское тело. Астероидно-метеороидные комплексы являются результатом разрушения большей кометы и, следовательно, эти "астероиды" на самом деле являются угасшими фрагментами кометы.

Как было отмечено, по наземным наблюдениям сложно различить АСЗ различного происхождения. На больших расстояниях от Земли они выглядят внешне одинаково. Поэтому очень важно использовать критерии в дополнение к наблюдениям, которые могут помочь нам надежно определить природу конкретных астероидов. Такие критерии позволят идентифицировать АСЗ как угасшие кометные ядра, найти метеороидные рои и метеорные потоки, связанные с ними, установив таким способом астероидно-метеороидные комплексы и, в конечном итоге, определить долю вымерших комет в популяции астероидов. Одним из возможных критериев является наличие метеороидных роев, образованных угасшими кометными ядрами в период их кометной активности. Поскольку метеорный поток может быть произведен только метеороидным роем, пересекающим орбиту Земли, то поиск угасших комет в популяции АСЗ посредством выявления связанных метеороидных роев и метеорных потоков может быть очень надежным. Данный подход, названный «метеорным» признаком, создан и развит в Институте астрофизики НАН Таджикистана под руководством академика П.Б.Бабаджанова. Детали метода, этапы его реализации и некоторые результаты по определению доли угасших кометных ядер среди АСЗ детально изложены в монографии [8]. Результаты, полученные на основе применения данного метода, апробированы и опубликованы, их надежность и достоверность не вызывает сомнений.

Применение данного метода позволило выявить ряд астероидно-метеороидных комплексов. Самым известным, достаточно изученным и подтвержденным является астероидно-метеороидный комплекс Таурид. В результате исследований этого комплекса выявлено более 40 астероидов кометной природы размерами несколько деkamетров, двигающихся наряду с кометой 2P/Энке по орбитам, находящимся внутри роя Таурид [9, 49-57]. Метеороидный рой Таурид, комета 2P/Энке, являющаяся родителем роя, и более 40 астероидов, сближающихся с Землей, в действительности являющимися угасшими фрагментами родительской кометы, образуют кометно-астероидно-метеороидный комплекс Таурид. Рой Таурид порождает метеорные потоки и субпотоки, наблюдаемые на Земле ежегодно в период октябрь-ноябрь и май-июнь.

За последние 15 лет в научной школе академика П.Б.Бабаджанова были выявлены более 10 астероидно-метеороидных комплексов – Йота-Акварид, Сигма-Каприкорнид,

Дельта-Писцид, Хи-Скорпиид, Виргинид, Бета-Либрид, Либриды-Лупид, исследован комплекс Квадрантид, добавлены новые ОЗО в комплекс Таурид [8-14, 33, 57-66]. Нами показано, что некоторые метеороидные рои связаны не с одним, а с несколькими астероидами, сближающимися с Землей, кометного происхождения. Это означает, что в ансамбле данного роя двигаются несколько ОЗО декаметровых размеров, которые в будущем могут также вторгнуться в земную атмосферу и породить ярчайшие болиды. Каждый из этих комплексов состоит из соответствующего метеороидного роя (порождающего метеорные потоки) и нескольких ОЗО кометной природы. Они имеют схожие орбиты и произошли от одной родительской кометы, т.е. от нее остался ее рой и несколько крупных угасших фрагментов.

В табл. 3-4, в качестве примеров, приведены основные параметры астероидно-метеороидных комплексов Хи-Скорпииды [14] и Виргиниды [13, 60, 61, 64-67]. Отметим, что комплекс Виргинид включает четыре субсемейства АСЗ кометного происхождения и метеороидных роев. В табл. 3-4 для каждого комплекса (субкомплекса) даны названия наблюдаемых метеорных потоков (жирным шрифтом), наименования связанных с ними ОЗО, средние орбиты метеорных потоков и элементы орбит родственных с ними ОЗО:  $q$  – перигелийное расстояние,  $e$  – эксцентриситет,  $i$  – наклон,  $\lambda$  – долгота Солнца, соответствующая активности потока,  $\alpha_g$  – прямое восхождение и  $\delta_g$  – склонение геоцентрического радианта,  $V_g$ -геоцентрическая скорость. Под названием метеорного потока, если имеется, приведено его обозначение согласно базе данных метеорных потоков МАС [68]. Здесь также даны значения  $D_{SH}$  критерия [69], который определяет меру сходства орбит метеорного потока и ОЗО. Когда  $D_{SH}$  не превышает значения 0.25, то предполагается, что эти два тела имеют общее происхождение. Во всех приведенных случаях были обнаружены ОЗО, которые могут быть родительскими телами наблюдаемых метеорных потоков. Величины  $D_{SH}$  критерия удовлетворяют условию  $D_{SH} \leq 0.25$ , следовательно, исследуемые ОЗО и метеорные потоки имеют схожие орбиты. Близость положений радиантов, скоростей и периодов активности также указывают на возможную связь ОЗО и метеорных потоков и позволяют сделать вывод, что данные комплексы образовались в результате распада гигантских родительских комет. Отметим также, что рассмотренные метеороидные рои содержат крупные фрагменты своих родительских комет.



Таблица 3

Элементы орбиты околоземных объектов и средние орбиты метеорных потоков  
в астероидно-метеороидном комплексе Хи-Скорпииды (Равноденствие 2000.0)

Название объектов	$q$ (а.е.)	$e$	$i^\circ$	$\lambda^\circ$	$\alpha^\circ$	$\delta^\circ$	$V_g$ (км/с)	$D_{SH}$
<b>χ-Скорпииды</b>	<b>0.71</b>	<b>0.77</b>	<b>6</b>	<b>74</b>	<b>248</b>	<b>-13</b>	<b>21</b>	-
<b>δ-Скорпииды</b>	<b>0.69</b>	<b>0.76</b>	<b>0</b>	<b>70</b>	<b>240</b>	<b>-21</b>	<b>20</b>	-
<b>β-Либриды</b>	<b>0.76</b>	<b>0.53</b>	<b>3</b>	<b>217</b>	<b>224</b>	<b>-9</b>	<b>18</b>	-
<b>σ-Либриды</b>	<b>0.61</b>	<b>0.77</b>	<b>6</b>	<b>237</b>	<b>234</b>	<b>-28</b>	<b>25</b>	-
2003 HP32	0.63	0.76	3	83	258	-19	21	0.14
2006 WX29	0.67	0.71	4	77	251	-15	20	0.09
2007 VH189	0.72	0.72	6	75	245	-11	19	0.09
2007 WT3	0.70	0.70	7	76	248	-11	19	0.07
2007 WY3	0.64	0.77	11	77	254	-8	22	0.13
2008 UM1	0.69	0.72	6	68	241	-10	20	0.12

Таблица 4

Элементы орбиты околоземных объектов и средние орбиты метеорных потоков  
в астероидно-метеороидном комплексе Виргиниды (Равноденствие 2000.0)

Название объектов	$q$ (а.е.)	$e$	$i^\circ$	$\lambda^\circ$	$\alpha^\circ$	$\delta^\circ$	$V_g$ (км/с)	$D_{SH}$	Источник
<b>α-Виргиниды (00021AVB)</b>	<b>0.72</b>	<b>0.72</b>	<b>7</b>	<b>30</b>	<b>203</b>	<b>3</b>	<b>18</b>	-	
<b>h-Виргиниды (00343 HVI)</b>	<b>0.74</b>	<b>0.73</b>	<b>1</b>	<b>39</b>	<b>204</b>	<b>-12</b>	<b>18</b>	-	[70]
1998 FR11	0.80	0.71	7	51	207	-18	17	0.21	[8]
1999 UZ5	0.82	0.68	2	46	206	-6	16	0.16	[8]
1998 SH2 (PHA)	0.74	0.72	3	13	184	3	19	0.15	[8]
2009 HS44	0.77	0.70	2	29	193	-11	18	0.11	[61]
2009 SM98	0.78	0.67	6	35	204	4	17	0.12	[61]
2010 EK44 (PHA)	0.65	0.77	9	29	208	3	22	0.02	[61]
2010 FD7	0.81	0.68	6	30	197	9	16	0.19	[61]
2011 BE38 (PHA)	0.76	0.71	7	19	191	10	18	0.15	[61]
2011 EF17 (PHA)	0.60	0.74	4	21	199	-2	22	0.02	[61]
2014 EQ12 (PHA)	0.68	0.74	11	17	195	10	20	0.13	[61]
2012 SW20 (PHA)	0.82	0.66	9	35	204	11	16	0.12	[61]
2012 TT256	0.77	0.71	2	36	200	-5	17	0.04	[61]
2013 TE135 (PHA)	0.62	0.74	5	21	199	-1	22	0.12	[61]
2014 GN1	0.71	0.73	2	10	183	2	20	0.20	[61]
<b>Сев.η-Виргиниды (00011EVI)</b>	<b>0.46</b>	<b>0.81</b>	<b>5</b>	<b>357</b>	<b>185</b>	<b>3</b>	<b>26</b>	-	[70]
<b>Южн.η-Виргиниды (00011EVI),</b>	<b>0.50</b>	<b>0.71</b>	<b>3</b>	<b>350</b>	<b>175</b>	<b>-1</b>	<b>23</b>	-	
<b>Дн.Окт.η-Виргиниды</b>	<b>0.48</b>	<b>0.83</b>	<b>7</b>	<b>190</b>	<b>187</b>	<b>5</b>	<b>27</b>	-	
<b>Дн.Окт.β-Виргиниды</b>	<b>0.48</b>	<b>0.83</b>	<b>5</b>	<b>191</b>	<b>184</b>	<b>-8</b>	<b>27</b>	-	[60]
1995 EK1	0.51	0.78	9	355	201	1	25	0.19	[8]
2003 FB5	0.53	0.79	5	358	184	-8	28	0.12	[8]
2007 CA19 (PHA)	0.48	0.83	10	174	189	6	26	0.10	[60]
2010 CR5	0.55	0.82	6	323	174	6	27	0.13	[64]
2010 FJ81	0.43	0.88	9	191	188	6	29	0.18	[64]
2012 BJ134	0.38	0.83	21	144	206	2	30	0.15	[64]
2014 VC10	0.41	0.82	12	358	185	2	26	0.10	[64]

Продолжение таблицы 4

Название объектов	$q$ (а.е.)	$e$	$i^\circ$	$\lambda^\circ$	$\alpha^\circ$	$\delta^\circ$	$V_g$ (км/с)	$D_{SH}$	Источник
<b>Сев.в-Виргиниды</b>	<b>0.40</b>	<b>0.82</b>	<b>6</b>	<b>335</b>	<b>168</b>	<b>11</b>	<b>27</b>	-	[71]
<b>Южн.в-Виргиниды</b>	<b>0.39</b>	<b>0.85</b>	<b>0</b>	<b>340</b>	<b>170</b>	<b>4</b>	<b>28</b>	-	
<b>Дн.Окт.η-Виргиниды</b>	<b>0.31</b>	<b>0.80</b>	<b>11</b>	<b>201</b>	<b>187</b>	<b>5</b>	<b>30</b>	-	
<b>Дн.Окт.β-Виргиниды</b>	<b>0.43</b>	<b>0.80</b>	<b>8</b>	<b>192</b>	<b>179</b>	<b>-8</b>	<b>28</b>	-	[13]
2013 TR135	0.42	0.81	2	243	164	6	26	0.11	[65]
2013 CU82	0.56	0.77	11	318	176	16	24	0.19	[65]
2002 BK25 (PHA)	0.58	0.75	12	156	163	23	23	0.05	[8]
2002 TZ59	0.41	0.84	16	187	172	-12	29	0.13	[8]
2004 CK39	0.39	0.83	12	359	163	-6	28	0.05	[13]
<b>Сев. μ-Виргиниды (00047DLI)</b>	<b>0.42</b>	<b>0.83</b>	<b>9</b>	<b>39</b>	<b>226</b>	<b>-8</b>	<b>28</b>	-	[72]
<b>Южн.μ-Виргиниды</b>	<b>0.72</b>	<b>0.70</b>	<b>2</b>	<b>43</b>	<b>210</b>	<b>-16</b>	<b>18</b>	-	[73]
2010 XD11	0.36	0.85	16	20	210	-8	29	0.16	[66]
2010 GO33	0.72	0.71	10	41	207	-28	20	0.13	[66]
2011 VG9	0.51	0.77	1	29	209	-9	23	0.15	[66]
2003 WW26	0.48	0.80	6	58	229	-25	25	0.01	[8]

Некоторые из ОЗО кометной природы являются потенциально опасными телами для Земли, и нами получены теоретические параметры, характеризующие их возможное вторжение в земную атмосферу: экваториальные координаты точки входа (радиант), геоцентрические скорости, даты.

**Заключение.** Рассмотренные в предыдущей и настоящей статьях сведения об околоземных объектах, накопленные за последние десятилетия, дают лишь самое общее представление об ОЗО. С учетом значительного числа ОЗО, открытых к настоящему времени и индивидуальных особенностей каждого из них, мы уже имеем мощные базы данных и публикаций, и можно предположить, какой объем информации нам еще предстоит выявить. С развитием наблюдательной техники и средств, теоретических методов исследования, успешных космических экспериментов наши знания об околоземных объектах быстро прогрессируют и расширяются. На смену устаревших подходов и концепций приходят более современные теории и гипотезы, черпающие свои доказательства из новых результатов научных исследований. В будущем можно ожидать новых выдающихся, порой совершенно неожиданных открытий, которые будут основываться на имеющихся современных сведениях об околоземных объектах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Opik E. The stray bodies in the Solar system/ I/ Survival time of cometary nuclei. – Adv. Astron. Astrophys., 1963, v. 2, pp. 219-262.
2. Weissman P.R., A'Hearn M.F., Rickman H., McFadden L.A. Evolution of comets into asteroids. – In: Asteroids II; Proceed. of the Conf., Tucson, AZ, Mar. 8-11, 1988 (A90-27001 10-91). – Tucson: University of Arizona Press, 1989, pp. 880-920.
3. Weissman P.R., Bottke Jr. W.F., Levison H.F. Evolution of Comets into Asteroids. – In: Asteroids III (W.F.Bottke Jr., A.Cellino, P. Paolicchi, R.P.Binzel (eds)). – Tucson: University of Arizona Press, 2002, pp. 669-686.

4. Bowell E., Buie M.W., Picken H. (4015) 1979 VA = Comet Wilson-Harrington (1949 III) (Ed. by Marsden B.G.). – IAU Circ., 1992, No. 5585, #1, 1B.
5. Fernandez Y.R., McFadden L.A., Lisse C.M. et al. Analysis of POSS Images of Comet-Asteroid Transition Object 107P/1949 W1 (Wilson-Harrington) – *Icarus*, 1997, v. 128, pp. 114-126.
6. Bottke W.F., Morbidelli A., Jedicke R. et al. Debiased orbital and absolute magnitude distribution of the near-Earth objects. – *Icarus*, 2002, v. 156, pp. 399-433.
7. Jewitt D.C. The Active Asteroids. – *Astron. J.*, 2012, v. 143, id. 66, 14 p.
8. Бабаджанов П.Б., Кохилова Г.И. Метеорные потоки астероидов, пересекающих орбиту Земли. – Душанбе: Дониш, 2009, 185 с.
9. Babadzhanov P.B., Williams I.P., Kokhirova G.I. Near-Earth objects in the Taurid complex. – *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.*, 2008a, v. 386, pp. 1436-1442.
10. Babadzhanov P.B., Williams I.P., Kokhirova G.I. The meteor showers associated with 2003EH1. – *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.*, 2008b, v. 386, pp. 2271-2277.
11. Babadzhanov P.B., Williams I.P., Kokhirova G.I. Near-Earth asteroids among the Piscids meteoroid stream. – *Astron. and Astrophys.*, 2008c, v. 479, pp. 249-255.
12. Babadzhanov P.B., Williams I.P., Kokhirova G.I. Near-Earth asteroids among the Iota Aquarids meteoroid stream. – *Astron. and Astrophys.*, 2009, v. 507, pp. 1067-1072.
13. Babadzhanov P.B., Williams I.P., Kokhirova G.I. Near-earth object 2004CK39 and its associated meteor showers. – *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.*, 2012, v. 420, pp. 2546-2550.
14. Babadzhanov P.B., Williams I.P., Kokhirova G.I. Near-earth asteroids among the Scorpiids meteoroid complex. – *Astron. and Astrophys.*, 2013, v.556, p. A25 (5 p.).
15. Kokhirova G.I., Babadzhanov P.B., Khamroev U.H. On a possible cometary origin of the object 2015TB145. – *Plan. and Space Sci.*, 2017, v. 143, pp. 164-168.
16. Kokhirova G.I., Ivanova O.V., Rakhmatullaeva F.D. Results of observations of asteroid Don Quixote at the Sanglokh observatory. – *INASAN Sci. Rep.*, 2020, v. 5(4), pp. 196-200.
17. Kokhirova G.I., Ivanova O.V., Rakhmatullaeva F. D. Evidence of the Cometary Nature of Asteroid Don Quixote Provided by Observations at the Sanglokh Observatory. – *Sol.Sys.Res.*, 2021, v. 55, pp. 61-70.
18. Добровольский О.В. Нестационарные процессы в кометах и солнечная активность. – Душанбе: Изд-во АН ТаджССР, 1961, 194 с.
19. Шульман Л.М. Динамика кометных атмосфер. Нейтральный газ. – Киев: Изд-во «Наукова думка», 1972, 242 с.
20. Ellis T.A., Neff J.S. A comparison of modeled and observed intensity profiles for C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, CN, and the continuum for P/Halley. – *Icarus*, 1992, v. 97, pp. 99-110.
21. Krankowsky D., Lammerzahn P., Herrwerth I. et al. In situ gas and ion measurements at comet Halley – *Nature*, 1986, v. 321, pp. 326.
22. Krasnopolsky V.A., Godoshev M., Moreels G. et. al. Spectroscopic study of comet Halley by the Vega 2 three-channel spectrometer. – *Nature*, 1986, v. 321, pp. 269-270.
23. Хашимов Н.М., Шоекубов Ш.Ш. Лабораторное моделирование образования ионов молекулярного углерода в кометах. – *ДАН ТаджССР*, 1989, т.32, с. 22-25.
24. Хашимов Н.М. и др. Лабораторное исследование возможности образования тугоплавких веществ в кометах. – *ДАН ТаджССР*, 1990, т. 37, с. 16-19.
25. Sagdeev R.Z., Szabo F., Avanesov G.A. et al. Television observations of comet Halley from Vega spacecraft. – *Nature*, 1986, v. 321, pp. 262-266.
26. Chan Q.H.S., Stephant A., Franchi I.A. et al. Organic matter and water from asteroid Itokawa. – *Scien. Rep.*, 2021, v. 11, pp. 5125.

27. Emellyanenko V.V., Asher D.J., Bailey M.E. A Model for the Common Origin of Jupiter Family and Halley Type Comets. – *Earth, Moon, and Planets*, 2013, v. 110, pp. 105-130.
28. McFadden L.A., Cochran A.L., Barker E.S. et al. The enigmatic object 2201 Oljato: Is it an asteroid or an evolved comet? – *J. Geophys. Res.*, 1993, v. 98, pp. 3031-3041.
29. Russell C.T., Aroian R., Arghavani M., Nock K. Interplanetary Magnetic Field Enhancements and Their Association with the Asteroid 2201 Oljato. – *Science*, 1984, v. 226, pp. 43-45.
30. Ostro S.J., Campbell D.B., Chandler J.F. et al. Asteroid radar astrometry. – *Astron. J.*, 1991, v. 102, pp. 1490-1502.
31. Green D.W.E., Rickman H., Porter A.C., Meech K.J. The strange periodic comet Machholz. – *Science*, 1990, v. 247, pp. 1063-1067.
32. Sekanina Z. Periodic comet Machholz and its idio synchrasesies. – *Astron. J.*, 1990, v. 99, pp. 1268-1278.
33. Babadzhанov P.B., Kokhirova G.I., Williams G.I., Obrubov Yu.V. Investigation into the relationship between comet 96P/Machholz 1 and asteroid 2003EH1. – *Astron. and Astrophys.*, 2017, v. 598, A94, 7 p.
34. Jenniskens P. 2003 EH<sub>1</sub> Is the Quadrantid Shower Parent Comet. – *Astron. J.*, 2004, v. 127, pp. 3018-3022.
35. Williams I.P., Ryabova G.O., Baturin A.D., Chernetsov A.M. The parent of the Quadrantid meteoroid stream and asteroid 2003 EH1. – *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.*, 2004, v. 355, pp. 1171-1181.
36. Jenniskens P., Marsden B.G. 2003EH1 and the Quadrantids. – *IAU Circ.* 2003, № 8252, #2.
37. Kanuchova Z., Neslusan L. The parent bodies of the Quadrantid meteoroid stream. – *Astron. and Astrophys.*, 2007, v. 470, pp. 1123-1136.
38. Neslusan L., Kanuchova Z., Tomko D. The meteor-showers complex of 96P/Machholz revised. – *Astron. and Astrophys.*, 2013a, v. 551, id. A87, 14 p.
39. Neslusan L., Hajdukova M., Jakubik M. Meteor-showers complex of asteroid 2003EH1 compared with that of comet 96P/Machholz. – *Astron. and Astrophys.*, 2013b, v. 560, id. A47, 10 p.
40. Wiegert P., Brown P. The Quadrantid meteoroid complex. – *Icarus*, 2005, v. 179, pp. 139-157.
41. Бабаджанов П.Б., Кохи́рова Г.И., Хамро́ев У.Х. Объект 2015TB145 – астероид или угасшая комета? – *ДАН РТ*, 2016, т. 59, № 1-2, с. 33-40.
42. Jewitt D., Hsieh H., Agarwal J. The active of asteroids. – In: *Asteroids IV* (Michel P., DeMeo F., Bottke W. (Eds.)). – Tucson: Univ. Arizona Press, 2015, pp. 221-241.
43. Veeder G.J., Hanner M.S., Matson D.L., Tedesco E.F. et al. Radiometry of Near-Earth asteroids. – *Astron. J.*, 1989, v. 97, pp. 1211-1219.
44. Lamy P.L., Toth I., Fernandez Y.R., Weaver H.A. The sizes, shapes, albedos, and colors of cometary nuclei. – In: *Comets II* (Festou M.C., Keller H.U., Weaver H.A. (Eds.)). – Tucson: Univ. Arizona Press, 2004, pp. 223-264.
45. Hsieh H.H., Jewitt D. A Population of comets in the main asteroid belt. – *Science*, 2006, v. 312, pp. 561-563.
46. Mommert M., Hora J.L., Harris A.W. et al. The discovery of cometary activity in Near-Earth Asteroid (3552) Don Quixote. – *Astrophys. J.*, 2014, v. 781, 25M, 10 p.
47. Mommert M., Trilling D., Knight M.M. et al. Systematic characterization and monitoring of potentially active asteroid: The case of Don Quixote. – *Am. Astron. Soc.*, 2018a, DPS meeting #50, id.505.05.
48. Mommert M., Polishook D., Moskovitz N. Don Quixote. – CBET 4502: 20180329, 2018b, <http://www.cbat.eps.harvard.edu/index.html>.
49. Asher D.J., Clube S.V.M., Steel D.I. Asteroids in the Taurid Complex. – *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.*, 1993a, v. 264, pp. 93-105.

50. Asher D.J., Clube S.V.M., Steel D.I. The Taurid Complex asteroids. – In: Meteoroids and their parent bodies, Proceed. of the Internat. Astronom. Symp. held at Smolenice, Slovakia, July 6-12, 1992 (edited by J.Stohl and I.P.Williams). – Bratislava: Astronomical Institute, Slovak Academy of Sciences, 1993, 1993b, pp. 93-96.
51. Babadzhанov P.B. Search for meteor showers associated with near-Earth asteroids. I. Taurid Complex. – Astron. and Astrophys., 2001, v. 373, pp. 329-335.
52. Porubcan V., Kornos L., Williams I.P. Associations Between Asteroids and Meteoroid Streams. – Earth, Moon and Planets, 2004, v. 95, pp. 697-712.
53. Porubcan V., Kornos L., Williams I.P. The Taurid complex meteor showers and asteroids. – Contrib. Astron. Obs. Skalnat Pleso, 2006, v. 36, pp.103-117.
54. Rudawska R., Vaubaillon J., Jenniskens P. Asteroid 2010TU149 in the Taurid complex. – 2012espc.conf., 2012a, 886R.
55. Rudawska R., Vaubaillon J., Jenniskens P. Asteroid 2005UW6 — A 'New' Object in the Taurid Complex? – 2012LPICo, 2012b, 1667, 6222R.
56. Madiedo J.M., Trigo-Rodriguez J.M., Williams I.P. et al. The Northern  $\chi$ -Orionid meteoroid stream and possible association with the potentially hazardous asteroid 2008XM1. – Mon. Not. of the Royal Astron. Soc., 2013, v. 431, pp. 2464-2470.
57. Кохи́рова Г.И., Бабаджанов П.Б., Латипов М.Н., Джонмухаммади А.И., Хамроев У.Х. Новые околоземные объекты в комплексе Таурид. – Известия НАНТ. Отд. физ.-мат., хим, геол. и техн. н., 2022, № 1(186), с. 40-61.
58. Babadzhанov P.B., Kokhirova G. I., Khamroev U.Kh. The Capricornids asteroid-meteoroid complex. – In: Meteoroids 2013, Proceed. of the Astron. Conf., held at A.M. University, Poznan, Poland, Aug. 26-30, 2013 (Eds. Jopek T.J., Rietmeijer F.J.M., Watanabe J., Williams I.P.) – Poznan: A.M. University Press, 2014, pp. 199-204.
59. Babadzhанov P.B., Kokhirova G. I., Khamroev U.Kh. The Sigma-Capricornids complex of near-Earth objects//Adv. in Space Res. 2015a. V. 55. P. 1784–1791.
60. Babadzhанov P.B., Kokhirova G.I., Obruchov Yu.V. The potentially hazardous asteroid 2007CA19 as the parent of the  $\eta$ -Virginid meteoroid stream. – Astron. and Astrophys., 2015b, v. 579, p. A119, 5 p.
61. Кохи́рова Г.И., Бабаджанов П.Б., Хамроев У.Х., Джонмухаммади А.И., Кулаев И.В. Астероидно-метеороидный комплекс Виргинид. I. Астероиды, связанные с метеороидным роём Альфа-Виргиниды. – ДАН РТ, 2020, т. 63, № 3-4, с. 187-198.
62. Кохи́рова Г.И., Бабаджанов П.Б., Хамроев У.Х., Джонмухаммади А.И., Кулаев И.В. Астероидно-метеороидный комплекс Бета-Либрид. – Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим, геол. и техн. н., 2020, № 3(180), с. 43-54.
63. Кохи́рова Г.И., Бабаджанов П.Б., Хамроев У.Х., Джонмухаммади А.И. Астероиды, связанные с метеороидным роём Либриды-Лупиды. – Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим, геол. и техн. н., 2020, № 4(181), с. 41-48.
64. Кохи́рова Г.И., Бабаджанов П.Б., Хамроев У.Х., Джонмухаммади А.И., Кулаев И.В. Астероидно-метеороидный комплекс Виргинид. II. Астероиды, связанные с метеороидным роём Эта-Виргиниды. – ДАН РТ, 2020, т. 63, № 9-10, с. 591-597.
65. Кохи́рова Г.И., Бабаджанов П.Б., Хамроев У.Х., Джонмухаммади А.И. Астероидно-метеороидный комплекс Виргинид. III. Астероиды, связанные с метеороидным роём Нью-Виргиниды. – ДАН РТ, 2020, т. 63, № 11-12, с. 708-714.
66. Кохи́рова Г.И., Бабаджанов П.Б., Хамроев У.Х., Джонмухаммади А.И., Кулаев И.В. Астероидно-метеороидный комплекс Виргинид. IV. Астероиды, связанные с метеороидным роём Мю-Виргиниды. – Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2021, т. 64, №1-2, с. 57-63.

67. Jenniskens P. Meteor showers and their parent comets. – New-York: Cambridge Univ. Press, 2006, 790 p.
68. <https://www.ta3.sk/IAUC22DB/MDC2007>, 2022.
69. Southworth R.B., Hawkins G.S. Statistics of meteor streams. – Smith. Contr. Astrophys., 1963, v. 7, pp. 261-285.
70. Jenniskens P., Neron Q., Albers J. et al. The established meteor showers as observed by CAMS. – Icarus, 2016, v. 266, pp. 331-354.
71. Terentjeva A.K. Fireball streams. – In: Asteroids, Comets, Meteors III (eds. C.I.Lagerkvist, H.Rickman, B.A.Lindblad, M. Lindgren). – Uppsala Universitet Repocentralen, 1989, pp. 579-584.
72. Терентьева А.К. Малые метеорные рои. Результаты исследований по межд.геофиз.проектам. Исследование метеоров. – М.: Наука, №1, 1966, с. 62-132.

Г.И.ҚОҲИРОВА, П.Б.БОБОҶОНОВ

## МАЪЛУМОТҲОИ МУОСИР ДАР БОРАИ ОБЪЕКТҲО

### БА ЗАМИН НАЗДИКШАВАНДА:

## II. КОМЕТАҲОИ ХОМУШ ВА КОМПЛЕКСҲОИ АСТЕРОИДИЮ МЕТЕОРОИДӢ

### *Институту астрофизикаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар қисми дуёми кори шарҳӣ, ки ба мулоҳизаҳои муосир оид ба объектҳо ба Замин наздикшаванда бахшида шудааст, маълумотҳои мавҷудбуда доир ба хусусиятҳои динамикию физикии ҳастаҳои кометаҳои хомушшуда оварда шудаанд. Баррасӣ гардид, ки дар байни астероидҳои наздизаминӣ маълум шумораи ками муайян ҳастаҳои кометаҳои хомуш ё пораҳои онҳоро ташкил медиҳанд. Намуди зоҳирии онҳо аз астероидҳои ҳақиқӣ фарқият намекунанд, аммо дар хусусиятҳои динамикию физикӣ фарқияти бузург доранд. Бинобар ин, барои ҷудо намудани онҳо таҳқиқи омилҳои динамикию физикии объектҳо зарур мебошад. Нишон дода шуд, ки баъзе тӯдаҳои метеороидӣ дар баробари шумораи азими метеороидҳои андозаашон хурд боз пораҳои хомуши ҳастаҳои кометаҳои андозаашон калон доранд, ки дар байни астероидҳои наздизаминӣ ошкор гардидаанд. Тӯдаи метеороидӣ ва чунин чирмҳо, ки ба тӯда таалуқ доранд, комплекси астероидию метеороидиро ташкил медиҳанд. Маълумотҳои мушоҳидавӣ ва назариявӣ оварда шудаанд, ки сатҳи муосири донишҳои мавҷудбударо оид ба объектҳои наздизаминӣ исбот менамоянд.

**Калимаҳои калидӣ:** кометаи хомуш, астероид, метеороид, тӯдаи метеороидӣ, сели метеорӣ, объекти наздизаминӣ, комплекс, мадор, таҳаввул.

**CURRENT DATA ON NEAR-EARTH OBJECTS:**

**II. EXTINCT COMETS AND ASTEROID-METEOROID COMPLEXES**

*Institute of Astrophysics, National Academy of Sciences of Tajikistan*

In the second part of the review work, devoted to modern concepts of near-Earth objects, the available information on the dynamic and physical properties of the nuclei of extinct comets is presented. It is considered that among the currently known NEAs, a small part consists of extinct cometary nuclei or their fragments. Outwardly, they do not differ from true asteroids, but they differ significantly from them in dynamic and physical properties. Therefore, to distinguish between them, it is necessary to study both the dynamic and physical parameters of objects. It is shown that some known meteoroid stream, along with countless small meteoroids, also contain large extinct fragments of cometary nuclei found among near-Earth asteroids. A meteoroid stream and such bodies belonging to it form an asteroid-meteoroid complex. Observational and theoretical data are presented, confirming the existing modern level of knowledge about near-Earth objects.

**Key words:** extinct comet, asteroid, meteoroid, meteoroid stream, meteor shower, near-Earth object, complex, orbit, evolution.

**Сведения об авторах:**

**Кохирова Гулчехра Исроиловна** – доктор физико-математических наук, Институт астрофизики НАН Таджикистана, директор, зав. Отдела межпланетных тел. E-mail: Kokhirova2004@mail.ru;

**Бабаджанов Пулат Бабаджанович** – доктор физико-математических наук, Институт астрофизики НАН Таджикистана, главный научный сотрудник Отдела межпланетных тел.

УДК 546:661.683

Специальность: 1.4.1 – Неорганическая химия

**М.М.ТАГОЕВ, К.И.НЕМАТУЛЛОЕВ, А.М.ИСОЕВ, Т.Б.ХОЛМАТОВ,  
Д.Х.МИРЗОЕВ**

**КОМПЛЕКСНАЯ ПЕРЕРАБОТКА НЕФЕЛИНОВЫХ СИЕНИТОВ  
С ПОЛУЧЕНИЕМ КОАГУЛЯНТОВ**

*Институт химии им.В.И.Никитина НАН Таджикистана*

*Поступила в редакцию 23.01.2023 г.*

*В работе приведены результаты исследования получения коагулянтов и жидкого стекла из нефелиновых сиенитов Таджикистана. Выявлены оптимальные условия солянокислотного разложения нефелиновых сиенитов в зависимости от различных технологических параметров.*

**Ключевые слова:** переработка, нефелиновые сиениты, коагулянты, жидкое стекло, соляная кислота.

Коагулянты на основе соединений железа и алюминия широко используются для очистки вод. Большой эффект при очистке воды даёт применение смешанных коагулянтов, представляющих собой смесь солей алюминия и железа. В этом случае значительно расширяется область оптимальных значений рН благодаря разнообразию продуктов гидролиза [1, 2].

Жидкое стекло успешно используется для изготовления силикатных красок, клеев, моющих и чистящих средств, в качестве защитного средства при обрезке и ранении деревьев. Жидкое стекло также применяется в мыловаренной, жировой, химической, машиностроительной, текстильной, бумажной промышленности, в том числе для производства картонной тары. В чёрной металлургии – как связующий материал для изготовления форм и стержней. В литейном производстве – в качестве флотационного реагента, при обогащении полезных ископаемых и других целей [3, 4].

При изготовлении жаростойких бетонов применяется натриевое жидкое стекло. Отношение количества молекул кремнезёма к количеству молекул оксида натрия называется модулем жидкого стекла, который для жаростойкого бетона должен находиться в пределах

---

*Адрес для корреспонденции:* Тагоев Муродбек Махмадалиевич. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: [murodbek.tagoev@mail.ru](mailto:murodbek.tagoev@mail.ru)



2.4-3.0. Чем меньше модуль, тем больше в стекле оксида натрия и, следовательно, тем ниже огнеупорные свойства бетона [5-8].

Цель настоящей работы – получение смешанных коагулянтов с предварительной активацией нефелиновых сиенитов с последующим получением жидкого стекла после кислотного разложения сырья.

В работах [9-11] изучена кислотная переработка алюмосиликатных руд Таджикистана. В настоящей работе рассматривается разложение нефелиновых сиенитов соляной кислотой с последующим получением жидкого стекла.

Нефелиновые сиениты месторождения Турпи Таджикистана предварительно измельчали на планетарной мельнице механохимическим методом в течение 30 минут по методике [12], нефелины характеризуются следующим химическим составом (в %):  $Al_2O_3$  – 22.5%;  $SiO_2$  – 53.5%;  $Fe_2O_3$  – 5.5%;  $Na_2O$  – 5.5%;  $K_2O$  – 6.65;  $CaO$  – 2.5% и прочие примеси.

Более эффективными коагулирующими свойствами обладают хлориды железа и алюминия. Поэтому для разложения нефелиновых сиенитов была выбрана соляная кислота.

Разложение предварительно активированных образцов нефелиновых сиенитов проводили по известной методике [9-11], содержание компонентов в растворе определяли также по общепринятым методикам [9, 10]. Нерастворимый осадок отделяли от маточного раствора, сушили и анализировали, затем получали жидкое стекло.

Изучено влияние температуры, продолжительности процесса, концентрации соляной кислоты на степень извлечения смешанных коагулянтов (рис.1-2).

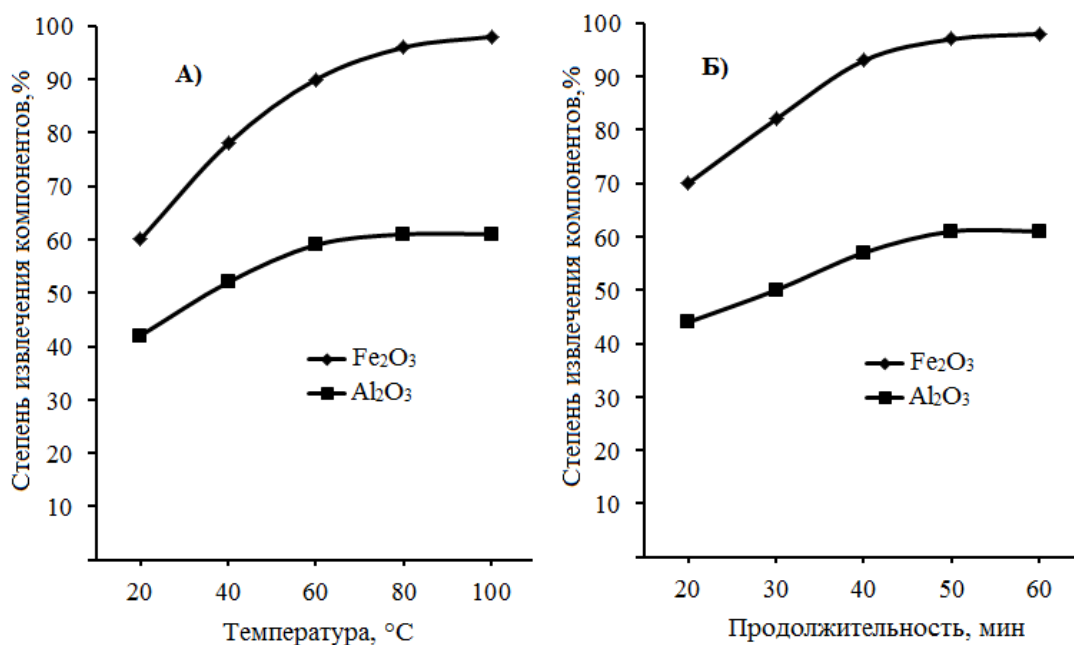
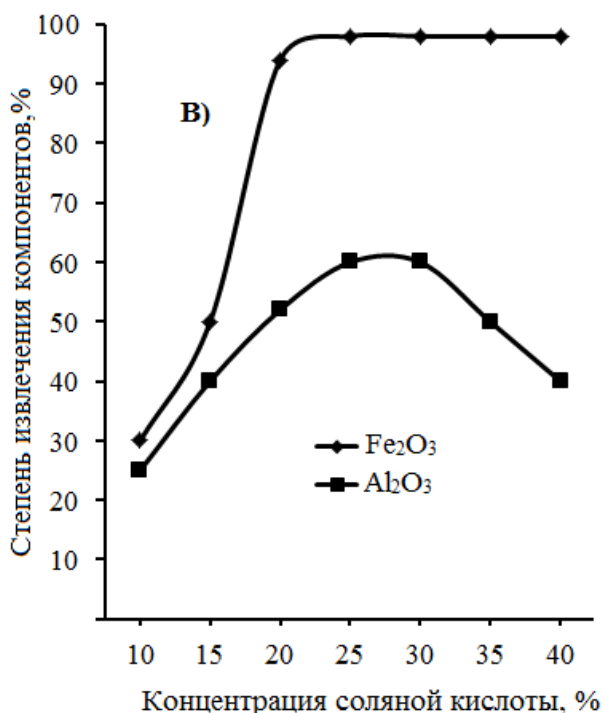


Рис. 1. Влияние температуры (а) и продолжительности процесса (б) на степень извлечения компонентов при солянокислотном разложении нефелиновых сиенитов Турпи.

Установлено, что нефелиновые сиениты начинают вскрываться уже при комнатной температуре. Руду обрабатывали в течение 1 часа. С ростом температуры степень извлечения основных компонентов:  $\text{Al}_2\text{O}_3$  и  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  возрастает и при  $95^\circ\text{C}$  составляет:  $\text{Al}_2\text{O}_3$  – 60.1%,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  – 98.7%.

Результаты исследования влияния концентрации соляной кислоты (рис.2) показывают, что увеличение концентрации от 10 до 36% существенно изменяет степень вскрытия руды. Выявлено, что оптимальной концентрацией кислоты, вводимой в реакционную массу, является 20-25%.

На рис. 2 показано, что дальнейшее увеличение концентрации соляной кислоты вызывает излом кривых вниз, кроме оксидов железа. Установлено, что наилучшей дозировкой кислоты по отношению к компонентам руды является её стехиометрическое количество. С ростом концентрации соляной кислоты до 20-25% извлечение оксидов в раствор возрастает, после чего начинает снижаться (кроме оксидов железа) вследствие уменьшения отношения Ж:Т и увеличения вязкости пульпы, вызывающей, в свою очередь, снижение скорости диффузионного переноса ионов водорода к неразложившимся частицам сиенита. Кроме того, использование концентрированных растворов затрудняет проведение последующего технологического процесса – фильтрования пульпы. Дальнейшее увеличение содержания кислоты в реакционной массе существенного влияния на процесс не оказывает, но сильно снижает качество получаемого коагулянта, то есть увеличивает его кислотность.



**Рис. 2.** Влияние концентрации  $\text{HCl}$  на степень извлечения компонентов при солянокислотном разложении нефелиновых сиенитов Турпи.

На основании выполненных опытов определены следующие условия процесса солянокислотного разложения предварительно активированных образцов нефелиновых сиенитов: температура 95°C, длительность процесса 60 минут, концентрация HCl 20%, при этих условиях извлечение Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> составило 98.7%, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> – 60.1%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ткачёв К.В., Запольский А.К., Кисиль Ю.К. Технология коагулянтов. – Л.: Химия, 1978, 184 с.
2. Запольский А.К., Баран А.А. Коагулянты и флокулянты в процессах очистки воды: свойства, получение, применение. – Л.: Химия, 1987, 208 с.
3. Григорьев П.Н., Матвеев М.А. Растворимое стекло. – М., 1956, 443 с.
4. Пат. 2335456. Российская Федерация. МПК C01B33/32. Способ получения жидкого стекла; опубл. 10.10.2008. – 3 с.
5. Пат. 2430010. Российская Федерация. МПК C01B33/32. Способ получения жидкого стекла; опубл. 27.09.2011. – 2 с.
6. Пат. 2283276. Российская Федерация. МПК C01B33/32. Способ получения жидкого стекла из силиката натрия; опубл. 10.09.2006. – 3 с.
7. Афанасьева В.А., Бондарев К.Т., Шворнева Л.И., Фролова В.П. – Стекло и керамика, 1979, №7, с.10-12.
8. Бабушкина З.М. Жидкое стекло в строительстве. – Кишинёв: Карта Молдовска, 1971, 224 с.
9. Запольский А.К., Мирзоев Б., Сафиев Х.С. Сернокислотное разложение нефелиновых сиенитов месторождения Турпи. – ДАН Тадж. ССР, 1984, т.27, №11, с. 655-658.
10. Мирзоев Б., Сафиев Х.С., Рахимов К., Мирсаидов У.М. Солянокислотное разложение нефелиновых сиенитов. – Изв. АН РТ (отд. физ.-мат., хим., геолог., и тех. наук), 1995, № 3, с. 66-68.
11. Сафиев Х.С., Мирзоев Б., Рахимов К., Мирсаидов У.М. – ДАН РТ, 1995, т.38, №5-6, с. 52-56.
12. Аввакумов Е.Г. Механохимические методы активации химических процессов. – Новосибирск: Наука, СО АН СССР, 1986, 304 с.

М.М.ТАҒОЕВ, Қ.И.НЕМАТУЛЛОЕВ, А.М.ИСОЕВ, Т.Б.ХОЛМАТОВ, Д.Х.МИРЗОЕВ  
**КОРКАРДИ КОМПЛЕКСИИ НЕФЕЛИНҲОИ СИЕНИТӢ БО МАҚСАДИ БА  
ДАСТ ОВАРДАНИ КОАГУЛЯНТҲО ВА ШИШАИ МОЕЪ**

*Институти химияи ба номи В.И.Никитини Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаи тадқиқотҳо оиди ба даст овардани коагулянтҳо ва шишаи моеъ аз нефелинҳои сиенитии Тоҷикистон оварда шудааст. Шароити оптималии таҷзияи нефелинҳои сиенитӣ бо кислотаи хлорид вобаста аз омилҳои гуногуни технологӣ муайян карда шуда, инчунин раванди ба даст овардани шишаи моеъ аз боқимондаи коркарди кислотагии маъданҳои алюмосиликатӣ омухта шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** коркард, нефелинҳои сиенитӣ, коагулянтҳо, шишаи моеъ, кислотаи хлорид.

M.M.TAGOEV, K.I.NEMATULLOEV, A.M.ISOEV, T.B.KHOLMATOV, D.Kh.MIRZOEV  
**COMPLEX PROCESSING OF NEPHELINE SYENITES WITH OBTAINING  
COAGULANTS AND LIQUID GLASS**

*V.I.Nikitin Institute of Chemistry of the National Academy of Sciences of Tajikistan*

The paper presents the result of a study of obtaining coagulants and liquid glass from nepheline syenites of Tajikistan, reveals the optimal conditions for hydrochloric acid decomposition of nepheline syenites depending on various technological parameters, and also studies the process of obtaining liquid glass from the residue of hydrochloric acid decomposition of aluminosilicate raw materials.

**Key words:** processing, nepheline syenites, coagulants, liquid glass, hydrochloric acid.

**Сведения об авторах:**

**Тагоев Муродбек Махмадалиевич** – кандидат технических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, ведущий научный сотрудник лаборатории комплексной переработки минерального сырья и промышленных отходов. E-mail: murodbek.tagoev@mail.ru;

**Нематуллоев Камарадин Изатуллоевич** – докторант PhD, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана. E-mail: 909117111@mail.ru;

**Исоев Акрам Мухибуллоевич** – докторант (PhD), Институт химии имени В.И.Никитина НАН Таджикистана. E-mail: akramisoev@gmail.ru;

**Холматов Туйчи Бурихонович** – докторант PhD, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, лаборатория комплексной переработки минерального сырья и промышленных отходов. E-mail: 988090937@mail.ru;

**Мирзоев Давлатмурод Хайруллоевич** – кандидат технических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, ведущий научный сотрудник лаборатории комплексной переработки минерального сырья и промышленных отходов. E-mail: davlotmurod.mirzoev.71@mail.ru.

УДК 622.341.11

Специальность: 1.4.1 – Неорганическая химия

К.И.НЕМАТУЛЛОЕВ, Н.А.АШУРЗОДА, А.С.КУРБОНОВ, И.М.РАХИМОВ, У.М.МИР-САИДОВ

**СЕРНОКИСЛОТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАГНЕТИТОВОЙ РУДЫ  
МЕСТОРОЖДЕНИЯ ХАРАНГОН ТАДЖИКИСТАНА**

*Институт химии им.В.И.Никитина НАН Таджикистана*

*Поступила в редакцию 04.05.2023 г.*

*Представлены результаты исследований сернокислотного разложения магнетитовой руды Харангонского месторождения Таджикистана. Определены оптимальные условия сернокислотного разложения магнетитовой руды.*

**Ключевые слова:** магнетитовая руда, разложение, серная кислота, оптимальные параметры.

Разложение железных руд и руд цветных металлов обычно проводят сплавлением с едкой щёлочью или содой с добавлением селитры или перекиси натрия в железном тигле [1].

Другой способ разложения железной руды состоит в сплавлении навески руды с пиросульфатом калия [2].

Кроме соляной кислоты для разложения часто применяют фосфорную кислоту. Разложение железных руд фосфорной кислотой происходит легко и сопровождается обильным выделением паров воды, как в случаях применения соляной кислоты. Благодаря этому при выполнении рядовых анализов отпадает необходимость в холодильнике, что несколько упрощает прибор [3].

Разложение железосодержащих руд минеральными кислотами обычно проводится с целью получения соединений железа, которые используются для очистки воды, в деревообрабатывающей промышленности, для окрашивания различных изделий, для сельского хозяйства, как катализаторы [4-6].

---

*Адрес для корреспонденции:* Курбанов Амиршо Сохибназарович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Агентство по ХБРЯ безопасности НАН Таджикистана, E-mail: amirsho\_77@mail.ru.

В работах [6, 7] изучено разложение сиаалитов (каолин с большим содержанием железа) различными минеральными кислотами и найдены оптимальные условия выделения железосодержащих реагентов.

Железо является одним из наиболее распространенных элементов земной коры; в том или ином количестве оно входит в состав громадного большинства природных образований. Широко распространены также крупные природные концентрации железа в виде его оксидов, солей кислородных кислот и сульфидов.

Наиболее ценны в промышленном отношении руды, в которых преобладающими минералами являются безводные окислы железа - магнетит и гематит.

По геологоразведочным данным, на территории Варзобского ущелья – в Харангоне расположено огромное месторождение железосодержащей руды – магнетита, который содержит более 80%  $Fe_2O_3$ .

С целью установления минералогического состава вышеуказанной железосодержащей руды, нами проведён РФА пробы данной руды, результаты которого представлены на рис.1.

Согласно РФА, основными железосодержащими минералами руды являются: магнетит ( $Fe_3O_4$ ), гематит ( $Fe_2O_3$ ), магнезиоферрит ( $MgFe_2O_4$ ), цинковый магнетит ( $ZnFe_2O_4$ ) и титаномагнетит ( $FeTiO_3$ ).

Для разложения железосодержащих руд применяются разнообразные методы - кислотная обработка, спекание или сплавление с щелочами, обработка плавиковой кислотой, комбинированное разложение. Выбор того и иного метода разложения определяется, как целью анализа, так и характером анализируемого материала [8-10].

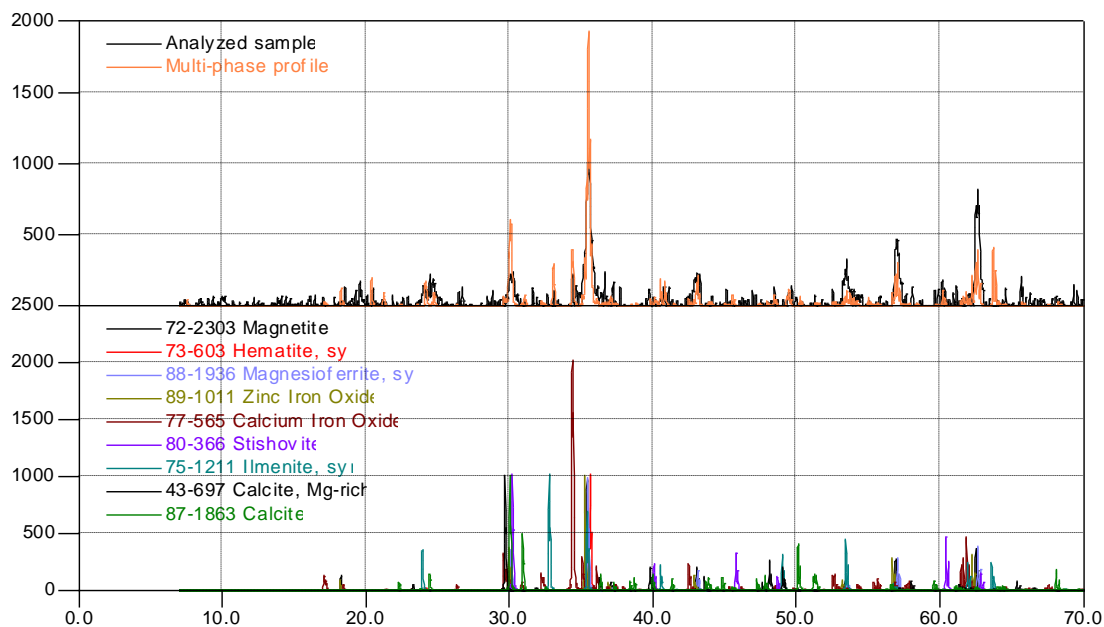
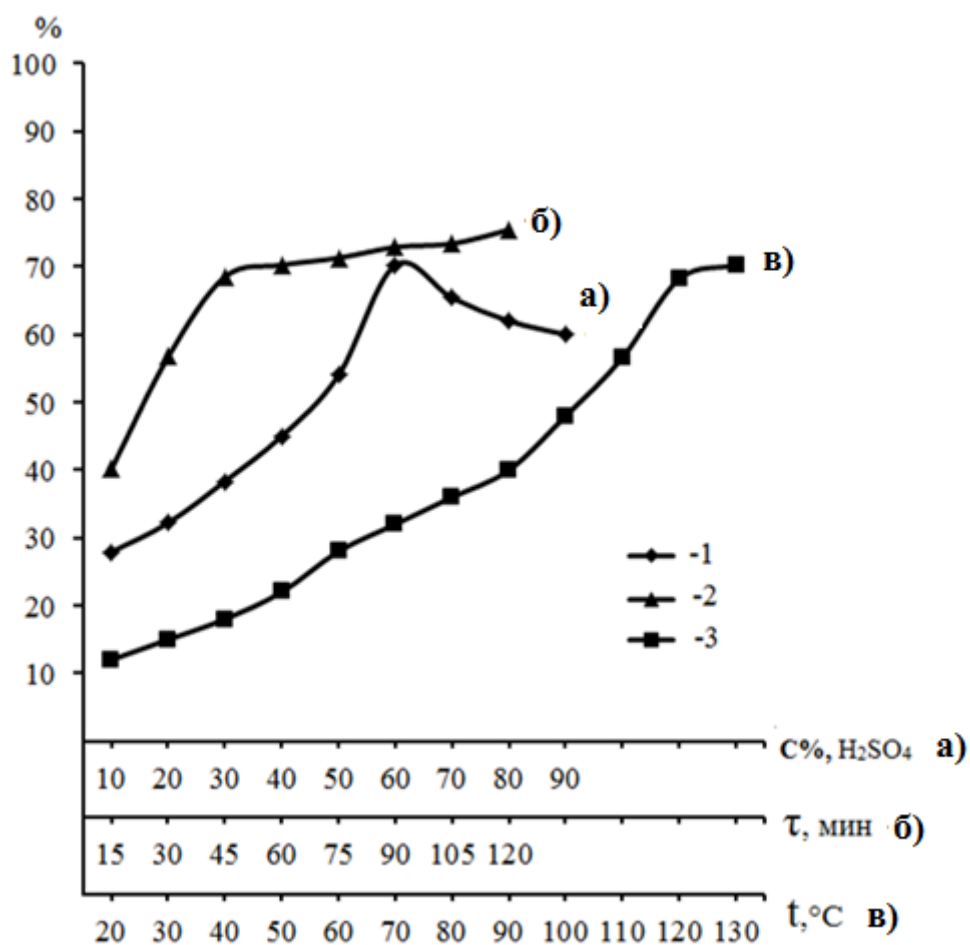


Рис. 1. Рентгенограмма магнетитовой руды месторождения Харангон.

В данной работе приведены результаты исследования сернокислотного разложения магнетитовой руды месторождения Харангон Таджикистана.

Результаты исследования сернокислотного разложения предварительно обожжённой магнетитовой руды при температуре 600-700°C представлены на рис. 2.

Из рис. 2а видно, что при изменении концентрации серной кислоты от 10 до 60% степень извлечения оксида железа существенно возрастает. Высокая степень извлечения  $Fe_2O_3$  достигается при переработке магнетитовой руды 60% серной кислотой, где степень извлечения  $Fe_2O_3$  составляет 70.25%. Дальнейшее увеличение концентрации серной кислоты приводит к уменьшению степени извлечения оксида железа вследствие уменьшения соотношения Ж:Т и увеличения вязкости пульпы, вызывающих в свою очередь снижение скорости диффузионного переноса ионов водорода к неразложившимся частицам магнетитовой руды.



**Рис. 2.** Зависимости степени извлечения  $Fe_2O_3$  из магнетитовой руды от: 1) концентрации  $H_2SO_4$ ; 2) продолжительности процесса; 3) температуры.

Зависимости степени извлечения  $Fe_2O_3$  от продолжительности процесса разложения изучены в интервале времени от 15 до 90 мин. (рис. 2б). Установлено, что при увеличении времени кислотной обработки сырья до 60 мин. степень извлечения  $Fe_2O_3$  достигает максимального значения 71.1%. Дальнейшее увеличение длительности процесса разложения до 90 минут повысило степень извлечения  $Fe_2O_3$  лишь на 5%.

Изучено влияние температуры на ход реакции от 20 до 130°C (рис.2в). Из рис. 2.в видно, что с ростом температуры степень извлечения Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> возрастает и при 130°C составляет 70.3%.

На основе результатов проведённых исследований по сернокислотному разложению можно рекомендовать следующие оптимальные условия: продолжительность процесса кислотной обработки 60 мин; концентрация серной кислоты 55-60 мас%; температура разложения 125-130°C.

На основе найденных оптимальных параметров разработана принципиальная технологическая схема переработки магнетита серной кислотой (рис. 3).

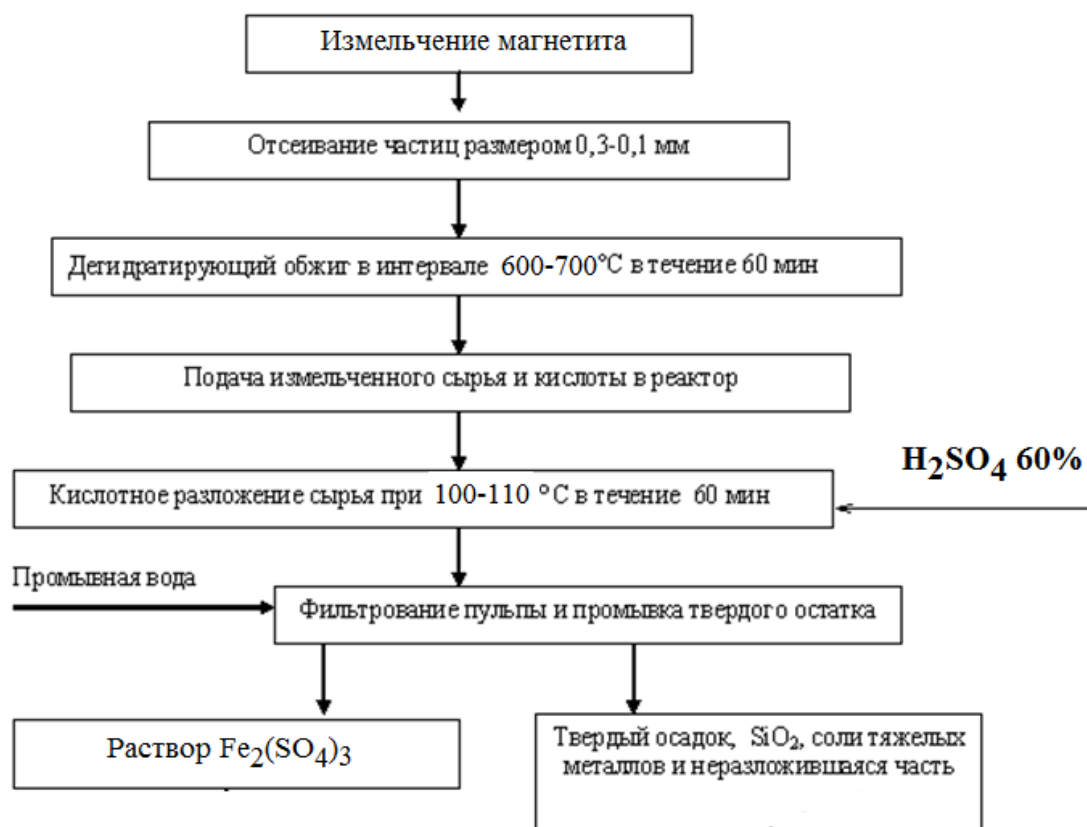


Рис. 3. Принципиальная технологическая схема разложения магнетита серной кислотой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рипан Р., Гетяну И. Неорганическая химия. – М.: Мир, 1972, 872 с.
2. Киреев В.А. Курс физической химии. – М.-Л.: Госхимиздат, 1951.
3. Фурман А.А., Рабовский Б.Г Основы химии и технологии безводных хлоридов. – М.: Химия, 1970, 256 с.
4. Мирсаидов У.М., Сафиев Х.С. Комплексная переработка низкокачественного алюминийсодержащего сырья. – Душанбе: Дониш, 1998, 238 с.



5. Мирзоев Б., Маматов Э.Д., Расулов Д.Д. Хлорные способы получения соединений алюминия и железа из руд. – ДАН РТ, 2005, т.48, №9, с.30-36.
6. Мирсаидов У.М., Мирзоев Д.Х., Бобоев Х.Э. Комплексная переработка аргиллитов и каолиновых глин Таджикистана. – Душанбе: Дониш, 2016, 92 с.
7. Бобоев Х.Э. Кислотное разложение каолиновых глин и сиаллитов: автореф. дис. ... канд. хим. наук. – Душанбе, 1996, 19 с.
8. Бакланова К.А. Методы ускоренного анализа железных, никелевых марганцевых руд. – М.: Госгеолиздат, 1951.
9. Ляльков В.А., Сакунов В.И., Ткаченко Н.С. Анализ железных и марганцевых руд. – М.: Металлургиздат, 1954.
10. Стукалова М.М. Определение закиси железа в силикатах, содержащих небольшие количество сульфидов. – Материалы ВСЕГЕИ, Геохимия, 1947, №6.

Қ.И.НЕМАТУЛЛОЕВ, Н.А.АШУРЗОДА, А.С.ҚУРБОНОВ, И.М.РАҲИМОВ, У.М.МИРСАИДОВ

## ТАҶЗИЯИ МАЪДАНИ МАГНЕТИТИИ КОНИ ХАРАНГОНИ ТОҶИКИСТОН БО КИСЛОТАИ СУЛФАТ

*Институти химияи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон*

Натиҷаҳои таҳқиқотҳои таҷзияи маъдани магнетити кони Харангони Тоҷикистон бо кислотаи сулфат оварда шудааст. Шароити оптималии таҷзияи маъдани магнетитӣ бо кислотаи сулфат муайян карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** маъдани магнитӣ, вайроншавӣ, кислотаи сулфат, параметрҳои оптималӣ.

K.I.NEMATULLOEV, N.A.ASHURZODA, A.S.KURBONOV, I.M.RAKHIMOV,  
U.M.MIRSAIDOV

## SULFURIC ACID DECOMPOSITION OF MAGNETITE ORE OF THE KHARANGON DEPOSIT OF TAJIKISTAN

*V.I.Nikitin Institute of Chemistry, National Academy of Sciences of Tajikistan*

The results of studies of sulfuric acid decomposition of magnetite ore from the Kharangon deposit in Tajikistan are presented. The optimal conditions for sulfuric acid decomposition of magnetite ore were determined.

**Key words:** magnetite ore, decomposition, sulfuric acid, optimal parameters.

**Сведения об авторах:**

**Нематуллоев Камараддин Изатуллоевич** – докторант PhD, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана. E-mail: 909117111@mail.ru ;

**Ашурзода Наимджон Амонкул** – кандидат технических наук, Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава, доцент кафедры общей и неорганической химии. E-mail: naimjon2008@mail.ru;

**Курбонов Амиршо Сохибназарович** – доктор химических наук, филиал Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана в Хатлонском области, директор. E-mail: amirsho\_77@bk.ru;

**Рахимов Илхомиддин Мирзоевич** – кандидат технических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, заведующий лабораторией «Комплексная переработка минерального сырья и промышленных отходов». E-mail: rahimzod\_74@mail.ru;

**Мирсаидов Улмас Мирсаидович** – доктор химических наук, академик НАНТ, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, главный научный сотрудник. E-mail: ulmas2005@mail.ru.

УДК 546.662·86:669.0.17.1

Специальность: 1.4.4 – Физическая химия

В.Д.АБУЛХАЕВ, М.А.БАЛАЕВ\*, И.Н.ГАНИЕВ, Х.Х.НАЗАРЗОДА\*\*, Б.Д.САЙДАЛИЕВ,  
С.О.УБАЙДОВ\*\*\*

### ДИАГРАММА СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ $Tb_4Sb_3-Nd_4Sb_3$

*Институт химии им. В.И.Никитина НАНТ,*

*\*Таджикский технический университет им.М.Осими,*

*\*\*Таджикский государственный университет коммерции,*

*\*\*\*Таджикский государственный педагогический университет им.С.Айни*

*Поступила в редакцию 24.02.2023 г.*

*В статье приведены результаты исследования диаграммы состояния системы  $Tb_4Sb_3-Nd_4Sb_3$ . Кристаллохимические исследования показали, что твёрдые растворы  $Tb_{4-x}Nd_xSb_3$  ( $x = 0.4\div 3.6$ ) как и исходные компоненты –  $Tb_4Sb_3$  и  $Nd_4Sb_3$  кристаллизуются в кубической структуре типа анти- $Th_3P_4$ . Установлено, что концентрационная зависимость удельного электросопротивления и термо-э.д.с. твёрдых растворов  $Tb_{4-x}Nd_xSb_3$  ( $x = 0.4\div 3.6$ ) коррелирует с диаграммой состояния системы  $Tb_4Sb_3-Nd_4Sb_3$ .*

**Ключевые слова:** диаграмма состояния, сплавы, твердые растворы, удельное электросопротивление, термо-э.д.с.

Диаграммы состояния систем  $Tb-Sb$  и  $Nd-Sb$  в полном диапазоне концентраций исследованы в [1, 2]. В данных системах установлено образование соединений  $Tb_5Sb_3$ ,  $Tb_4Sb_3$ ,  $TbSb$ ,  $TbSb_2$ ,  $Nd_2Sb$ ,  $Nd_5Sb_3$ ,  $Nd_4Sb_3$ ,  $NdSb$  и  $NdSb_2$ . Соединения  $Tb_5Sb_3$ ,  $Tb_4Sb_3$ ,  $TbSb_2$ ,  $Nd_2Sb$ ,  $Nd_5Sb_3$ ,  $Nd_4Sb_3$ , и  $NdSb_2$  при 1923, 2043, 1013, 1583, 1838, 1994 и 1328 К, соответственно, плавятся инконгруэнтно. При этом соединения  $NdSb$  и  $TbSb$  при 2203 и 2433 К, соответственно, плавятся конгруэнтно.

Целью данной работы явилось исследование диаграммы состояния системы  $Tb_4Sb_3-Nd_4Sb_3$  и электрофизических свойств твердых растворов  $Tb_{4-x}Nd_xSb_3$  ( $x = 0.4\div 3.6$ ), образующихся в этой системе при температуре 298 К.

---

*Адрес для корреспонденции:* Абулхаев Владимир Джалолович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/2, Институт химии НАНТ. E-mail: [abulkhaev-48@mail.ru](mailto:abulkhaev-48@mail.ru).

При синтезе антимонидов и твердых растворов в качестве исходных компонентов использовали дистилляты Nd, Tb (ТУ 48-1303-173-76) и сурьму марки Су-18-4 (Ту 48-14-18-75).

Синтез антимонидов TbSb, Tb<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub>, NdSb, Nd<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> и твердых растворов, Tb<sub>4-x</sub>Nd<sub>x</sub>Sb<sub>3</sub> (x = 0.4÷3.6) проводили в вакууме 0.0133 Па. В качестве датчика температуры использовали вольфрам-вольфрам-ренийевую термопару (W –W +20% Re). Точность измерения температуры при 1273 К составляла ±10 К. Образцы перед загрузкой в печь помещали в герметизированные молибденовые тигли. При выборе тигельного материала руководствовались данными работ [3-5], где показано, что растворимость молибдена, тантала и вольфрама в жидких РЗЭ весьма незначительна.

При синтезе твердых растворов системы Tb<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> – Nd<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> предпочтение было отдано методу синтеза с применением в качестве исходных компонентов предварительно синтезированных антимонидов Tb<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> и Nd<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub>.

Антимониды Tb<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> и Nd<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> получали с применением в качестве сурьмы и РЗЭ содержащих компонентов – моноантимонидов GdSb и NdSb.

Моноантимониды GdSb и NdSb получали прямым взаимодействием стружек РЗЭ с порошком сурьмы в герметизированных молибденовых тиглях. Нагревание тигля с веществом проводили со скоростью 20 град/мин до оптимальной температуры (1373 К), с последующей выдержкой 2±0.5 часа.

После завершения синтеза тигель с веществом охлаждали до комнатной температуры со скоростью 80 град/мин.

Твердые растворы системы Tb<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> – Nd<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> получали следующим образом. Порошки предварительно синтезированных соединений – Tb<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> и Nd<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub>, отвечающие определенному химическому составу сплава Tb<sub>4-x</sub>Nd<sub>x</sub>Sb<sub>3</sub> (x = 0.4÷3.6), смешивали, спрессовывали в штабик, помещали в герметизированный молибденовый тигель и нагревали (со скоростью 80 К/мин). Оптимальная температура синтеза составляла 1573±50 К. При этой температуре образцы выдерживали 2-3 ч. После чего тигель с веществом охлаждали до комнатной температуры со скоростью 80 К/мин. Следует отметить, что при синтезе сплавов системы Tb<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> – Nd<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> скорость нагревания и охлаждения не играет существенной роли. Существенное значение при синтезе имеют конечная температура синтеза и время выдержки реакционной смеси при этой температуре.

Твердые растворы системы Tb<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> – Nd<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> синтезировали при одном и том же температурном и временном режиме, то есть при 1573±50 К и времени выдержки 2-3 ч.

Синтезированные антимониды и твердые растворы, согласно рентгенофазовому анализу, представляли собой однофазные образцы. Моноантимониды NdSb и TbSb кристаллизуются в кубической сингонии типа NaCl, а антимониды Tb<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> и Nd<sub>4</sub>Sb<sub>3</sub> изоструктурны с твердыми растворами Tb<sub>4-x</sub>Nd<sub>x</sub>Sb<sub>3</sub> (x = 0.4÷3.6) и кристаллизуются в кубической сингонии типа анти-Th<sub>3</sub>P<sub>4</sub> (табл. 1)

Таблица 1

Кристаллохимические характеристики антимонидов и твёрдых растворов  $Tb_{4-x}Nd_xSb_3$   
( $x = 0.4 \div 3.6$ )

Антимониды и твердые растворы	Параметр элементарной ячейки, $\pm 0.0005$ нм	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	
		расчет	эксперим.
NdSb	0.6222	7344	7340
TbSb	0.6176	7965	7970
Nd <sub>4</sub> Sb <sub>3</sub>	0.9362	7669	7664
Tb <sub>4</sub> Sb <sub>3</sub>	0.9165	8685	8678
Tb <sub>3,6</sub> Nd <sub>0,4</sub> Sb <sub>3</sub>	0.9187	8572	8569
Tb <sub>3,2</sub> Nd <sub>0,8</sub> Sb <sub>3</sub>	0.9212	8452	8448
Tb <sub>2,8</sub> Nd <sub>1,2</sub> Sb <sub>3</sub>	0.9225	8366	8360
Tb <sub>2,4</sub> Nd <sub>1,6</sub> Sb <sub>3</sub>	0.9250	8252	8249
Tb <sub>2</sub> Nd <sub>2</sub> Sb <sub>3</sub>	0.9275	8134	8130
Tb <sub>1,6</sub> Nd <sub>2,4</sub> Sb <sub>3</sub>	0.9304	8009	8006
Tb <sub>1,2</sub> Nd <sub>2,8</sub> Sb <sub>3</sub>	0.9325	7898	7894
Tb <sub>0,8</sub> Nd <sub>3,2</sub> Sb <sub>3</sub>	0.9356	7779	7773
Tb <sub>0,4</sub> Nd <sub>3,6</sub> Sb <sub>3</sub>	0.9360	7723	7719
Nd <sub>4</sub> Sb <sub>3</sub>	0.9362	7669	7664

Диаграмму состояния системы  $Tb_4Sb_3 - Nd_4Sb_3$  исследовали методами дифференциального термического (ДТА) и рентгенофазового (РФА) анализов.

ДТА сплавов осуществляли на установке ВДТА-8МЗ, при скоростях нагревания и охлаждения 40-80 град./мин. Погрешность в определении температур термических эффектов не превышала  $\pm 1\%$ .

РФА сплавов проводили на дифрактометре ДРОН-2 с использованием отфильтрованного  $CuK_{\alpha}$ -излучения (Ni-фильтр). Погрешность в определении параметров элементарной ячейки сплавов составляла  $\pm 0.0005$  нм.

Исследования удельного электросопротивления и термо-э.д.с. твердых растворов проводили при 298 К четырехзондовым методом [6]. Относительная погрешность измерения удельного электросопротивления составляла  $\pm 2.5$ , а термо-э.д.с.  $\pm 2\%$ .

Плотность твердых растворов определяли по стандартной методике.

Диаграмма состояния системы  $Tb_4Sb_3 - Nd_4Sb_3$ , построенная по совокупности экспериментальных данных приведена на рис. 1.

Диаграмма состояния системы  $Tb_4Sb_3 - Nd_4Sb_3$  свидетельствует о неограниченной взаимной растворимости компонентов –  $Tb_4Sb_3$ ,  $Nd_4Sb_3$  как в жидком, так и в твердом состоянии. При этом РФА сплавов указывают на образование во всем исследованном диапазоне концентраций твёрдых растворов замещения  $Tb_{4-x}Nd_xSb_3$  ( $x = 0.4 \div 3.6$ ).

Из табл.1 следует, что концентрационная зависимость параметра элементарной ячейки твёрдых растворов во всем исследованном диапазоне концентраций изменяется аддитивно, что коррелирует с диаграммой состояния  $Tb_4Sb_3 - Nd_4Sb_3$ .

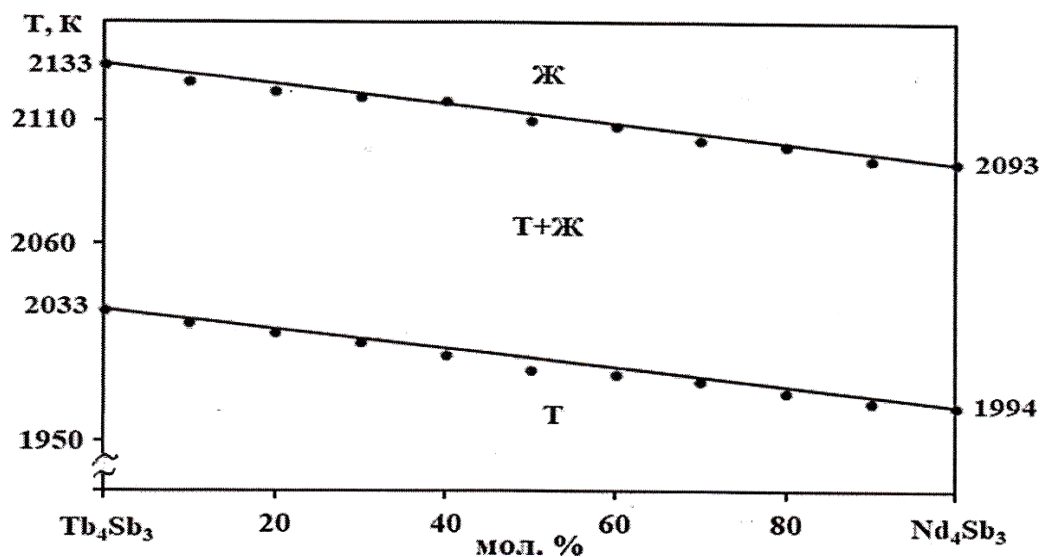


Рис. 1. Диаграмма состояния системы  $Tb_4Sb_3 - Nd_4Sb_3$ .

Таблица 2

Электрофизические свойства антимонидов  $Ln_4Sb_3$  ( $Ln = Tb, Nd$ )  
и твердых растворов системы  $Tb_4Sb_3 - Nd_4Sb_3$  при 298 К

Антимониды и твердые растворы	Удельное электросопротивление, $\rho \times 10^6, \text{ Ом}\cdot\text{м}$	Электропроводность, $\sigma \times 10^{-5}, \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$	Термо-э.д.с. $-\alpha, \text{ мкВ/К}$
$Tb_4Sb_3$	$9.54 \pm 0.23$	1.04	$7.2 \pm 0.14$
$Tb_{3.6}Nd_{0.4}Sb_3$	$9.6 \pm 0.24$	1.04	$7.7 \pm 0.15$
$Tb_{3.2}Nd_{0.8}Sb_3$	$8.5 \pm 0.21$	1.17	$7.8 \pm 0.15$
$Tb_{2.8}Nd_{1.2}Sb_3$	$7.8 \pm 0.19$	1.28	$7.9 \pm 0.15$
$Tb_{2.4}Nd_{1.6}Sb_3$	$7.2 \pm 0.18$	1.38	$8.0 \pm 0.16$
$Tb_2Nd_2Sb_3$	$6.5 \pm 0.15$	1.53	$8.2 \pm 0.16$
$Tb_{1.6}Nd_{2.4}Sb_3$	$6.0 \pm 0.15$	1.66	$8.3 \pm 0.16$
$Tb_{1.2}Nd_{2.8}Sb_3$	$5.3 \pm 0.13$	1.88	$8.5 \pm 0.17$
$Tb_{0.8}Nd_{3.2}Sb_3$	$4.6 \pm 0.11$	2.17	$8.6 \pm 0.17$
$Tb_{0.4}Nd_{3.6}Sb_3$	$4.0 \pm 0.1$	2.5	$8.7 \pm 0.16$
$Nd_4Sb_3$	$3.20 \pm 0.08$	3.12	$8.6 \pm 0.04$

Выявлено, что как исходным компонентам – антимонидам  $Ln_4Sb_3$  ( $Ln = Nd, Tb$ ), так и твердым растворам системы  $Tb_4Sb_3 - Nd_4Sb_3$  свойственна металлическая проводимость. Об этом свидетельствуют значения удельного электросопротивления антимонидов и твердых растворов при 298 К (табл. 2). Относительно низкая электропроводность, проявляемая антимонидами  $Tb_4Sb_3, Pr_4Sb_3$  и твердыми растворами  $Tb_{4-x}Nd_xSb_3$  ( $x = 0.4 \div 3.6$ ), с нашей точки зрения, объясняется вкладом магнитной составляющей удельного электросопротивления в общее удельное электросопротивление и влиянием химической связи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Abdusalyamova M.N., Burnashev O.R., Mironov K.E. The terbium antimony alloy system. – J. Less-Common Metals, 1981, v.77, №1, pp.81-88.
2. Абулхаев В.Д. Диаграмма состояния системы Nd – Sb. – Журн. Неорганич. химия, 1999, т.44, №2, с. 308-312.
3. Шанк, Ф. Структуры двойных сплавов. – М.: Металлургия, 1973, 760 с.
4. Dennison D.N., Tschetter T, Gschneidner K.A. The solubility of tantalum in eight liquid rare-earth. – Less-Common Metals, 1966, v.11, pp. 423-435.
5. Dennison, D.N. The solubility of tantalum and tungsten in liquid rare-earth metals. – Less-Common Metals, 1966, v.10, pp. 108-111.
6. Абдусалымова М.Н., Абулхаев В.Д., Гончарова Е.В. Электрические свойства антимонидов состава  $\text{Ln}_5\text{Sb}_3$  ( $\text{Ln} = \text{Nd}, \text{Sm}, \text{Gd}, \text{Tb}, \text{Dy}, \text{Ho}$ ). – Физика твердого тела, 1982, т.24, вып.3, с.752-756.

В.Д.АБУЛҲАЕВ, И.Н.ҒАНИЕВ, М.А.БАЛАЕВ\*, Х.Х.НАЗАРЗОДА\*, Б.Д.САЙДАЛИЕВ\*\*\*,  
С.О.УБАЙДОВ

### ДИАГРАММАИ ҲОЛАТИ СИСТЕМАИ $\text{Tb}_4\text{Sb}_3\text{-Nd}_4\text{Sb}_3$

*Институти химияи ба номи И.И.Никитини АМИ Тоҷикистон,  
\*Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осими,  
\*\*Донишгоҳи давлатии тибқоратии Тоҷикистон,  
\*\*\*Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С.Айни*

Дар мақола натиҷаҳои таҳқиқоти диаграммаи ҳолати системаи  $\text{Tb}_4\text{Sb}_3 - \text{Nd}_4\text{Sb}_3$  оварда шудааст. Таҳқиқотҳои кристаллохимиявӣ нишон доданд, ки маҳлулҳои сахт  $\text{Tb}_{4-x}\text{Nd}_x\text{Sb}_3$  ( $x = 0.4 \div 3.6$ ) зайли компонентҳои аввалаи  $\text{Tb}_5\text{Sb}_3$  ва  $\text{Nd}_4\text{Sb}_3$  дар структураи кубии навъи анти- $\text{Th}_3\text{P}_4$  кристаллизатсия мешаванд.

Муайян карда шудааст, ки вобастагии концентратсионии муқовимати ҳоси электрикӣ ва қувваи гармо электроҳаракатдиҳандаи маҳлулҳои сахти  $\text{Tb}_{4-x}\text{Nd}_x\text{Sb}_3$  ( $x = 0.4 \div 3.6$ ) ба сохти диаграммаи ҳолати системаи  $\text{Tb}_4\text{Sb}_3 - \text{Nd}_4\text{Sb}_3$  мувофиқат мекунад.

**Калимаҳои калидӣ:** диаграммаи ҳолат, ҳулаҳо-маҳлулҳои сахт, муқовимати ҳоси электрикӣ, қувваи гармо электроҳаракатдиҳанда.

V.D.ABULKHAEV, M.A.BALAEV, I.N.GANIEV, Kh.Kh.NAZARZODA, B.D.SAYDALIEV,  
S.O.UBAYDOV

### STATE DIAGRAM OF THE $\text{Tb}_4\text{Sb}_3\text{-Nd}_4\text{Sb}_3$ SYSTEM

*V.I.Nikitin Institute of Chemistry, National Academy of Sciences of Tajikistan,  
\*M.S.Osimi Tajik Technical University,*

**\*\*Tajik State University of Commerce,  
\*\*\*S.Aini Tajik State Pedagogical University**

The article presents the results of a study of the state diagram the system  $Tb_4Sb_4 - Nd_4Sb_3$ . Crystal chemical studies have shown that solid solutions  $Tb_{4-x}Nd_xSb_3$  ( $x=0.4\div/3.6$ ), as well as the initial components  $Tb_4Sb_4$  and  $Nd_4Sb_3$ , crystallize in a cubic structure of the anti- $Th_3P_4$  type. It has been shown that the concentration dependence of electrical resistivity and thermal electromotive force of solid solutions  $Tb_{4-x}Nd_xSb_3$  ( $x=0.4\div/3.6$ ) correlates with the state diagram of the  $Tb_4Bi_3 - Nd_5Bi_3$  system.

**Key words:** state diagram, alloys, solid solutions, electrical resistivity, thermal electromotive force.

**Сведения об авторах:**

**Абулхаев Владимир Джалолович** – доктор химических наук, профессор, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, главный научный сотрудник. E-mail: abulkhaev\_48@mail.ru;

**Балаев Мухамадшо Ахтамович** – кандидат технических наук, Таджикский технический университета им. акад. М.Осими, доцент кафедры «Электроснабжения». E-mail: muhamad65balaev@mail.ru;

**Ганиев Изатулло Наврузович** – доктор химических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, зав. лабораторией «Коррозионностойкие материалы». E-mail: ganiev48@mail.ru;

**Назарода Хайрулло Холназар** – доктор технических наук, доцент, Таджикский государственный университет коммерции, ректор. E-mail: nazarov-h2013@mail.ru;

**Сайдалиев Бахром Джураевич** – соискатель Института химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, Бохтарский государственный университет им. Н.Хусрава, преподаватель кафедры «Органическая химия и биология». E-mail: saidaliev\_bahrom@mail.ru;

**Убайдов Солмоншо Одинаевич** – кандидат технических наук, докторант Института химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни, доцент кафедры «Технология черчения и дизайна». E-mail: salmonubaidov@mail.ru.



УДК 62-977

Специальность: 1.4.4. Физическая химия

З.Х.ГАЙБУЛЛАЕВА, Т.Х.ГАДОЕВ\*, Ф.М.РАХИМОВ\*, Б.И.АСРОРОВ, А.ШАРИФОВ\*\*

### КИНЕТИКА ГАЗИФИКАЦИИ УГЛЕРОДА КИСЛОРОДОМ

*Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими,*

*\*Открытое акционерное общество «Азот»,*

*\*\*Институт химии им. В.И. Никитина НАНТ*

*Поступила в редакцию 1.05.2023 г.*

*В статье приведены результаты исследования кинетики процесса газификации углерода кислородом. Определено уравнение кинетики газификации углерода кислородом на основе механизма абсорбции кислорода на поверхность частиц углерода с образованием промежуточного соединения  $C_3O_4$ , которое в дальнейшем вступает в реакцию с углеродом и кислородом или разлагается с образованием моно- и диоксида углерода.*

**Ключевые слова:** уголь, углерод, кислород, газификация, кинетика, температура, концентрация кислорода.

#### Введение

Правительство Республики Таджикистан приняло «Стратегию развития промышленности в Республике Таджикистан на период до 2030 года». Согласно данной стратегии необходимо формировать тенденцию рационального использования минеральных и топливно-энергетических ресурсов и тем самым способствовать развитию промышленности страны [1].

Согласно сообщению Министерства промышленности и новых технологий Республики Таджикистан, в 2022 году в стране было добыто более 2.5 млн. т угля [2]. Повышение эффективности использования твёрдого топлива - угля в промышленности и в быту является одной из актуальных задач развития экономики страны. Это достигается прежде всего использованием эффективных технологий использования угля, которые удовлетворяли бы современным требованиям по охране природе.

---

*Адрес для корреспонденции:* Гайбуллаева Зумрат Хабибовна. 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. акад. Ражабовых, 10, Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими.  
E-mail: zumratihabib@rmbler.ru

В настоящее время в Таджикистане уголь является единственным альтернативным ископаемым топливом, использование которого в промышленности может обеспечить поставленные задачи по индустриализации экономики страны. В связи с чем, разработка технологических основ его эффективного использования является актуальной задачей научных исследований. Основой технологии переработки химических веществ является кинетика их превращения, поэтому в данной статье изложены результаты кинетических исследований по выяснению механизмов окисления углерода при его газификации с определением уравнения кинетики. В исследованиях использована проба угля из месторождения Фон-Ягноб. Состав исследуемой пробы угля характеризуется содержанием компонентов, мас. %: С – 81.0; Н – 5.2; N – 1.0; О – 2.0; S – 1.4; зола – 5.3; влажность – 4%.

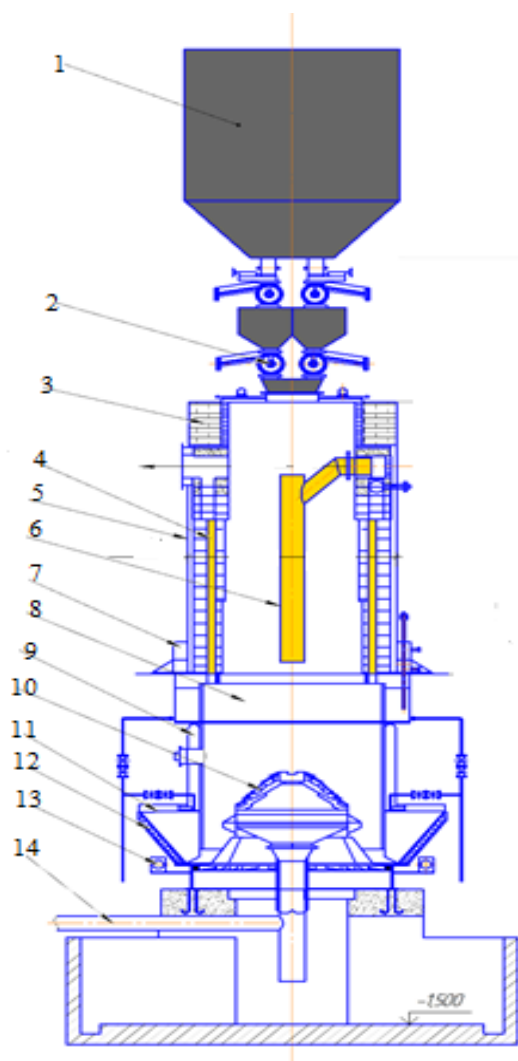
### **Результаты исследований**

Ранее [3] нами была разработана технология газификации угля, суть которой выражается в том, что до газификации углерода нагреванием угля до температур 650-700°C из его состава выделяют все летучие и смолистые компоненты, сопутствующие углероду в составе угля, затем углерод подвергается газификации. Данный подход позволяет подвергать газификации только углерод, а это, в свою очередь, позволяет с использованием одностороннего окислителя (водяного пара или кислорода) получить генераторный газ, состоящий из  $\text{CO}_2$  в случае полного окисления С кислородом или смеси  $\text{CO}+\text{H}_2$  в случае использования водяного пара в эквимолярном отношении к количеству С. При газификации чистого углерода окислителем или смесью окислителей можно наиболее точно определить механизм и кинетику процесса его окисления, поскольку в данном случае процесс газификации углерода не будет осложняться многими реакциями с участием сопутствующих углероду компонентов состава угля.

### **Экспериментальная часть исследования**

На лабораторном газогенераторе (рис. 1) проводили процесс газификации углерода при разных температурах. В качестве окислителя использовали чистый кислород. Температура процесса взаимодействия угля с окислителем варьировалась в пределах 400–700°C.

При изучении кинетики процесса окисления углерода кислородом варьировали температуру и количество кислорода по отношению к количеству углерода. Скорость процесса окисления углерода рассчитали по израсходованному количеству кислорода по времени газификации углерода. Экспериментальные данные приведены в табл. 1.



**Рис. 1.** Лабораторный газогенератор угля: 1 – бункер для загрузки угля; 2 – дозатор угля; 3 – футеровка из огнеупорного кирпича; 4 – труба для окисленного газа; 5 – корпус генератора; 6 – труба для газа горения; 7 – верхняя труба охлаждения; 8 – нижняя труба охлаждения; 9 – люк генератора; 10 – колосниковая решетка; 11 – зольная чаша; 12 – шлакоотделитель; 13 – толкатель; 14 – узел подачи окислителя.

Таблица 1

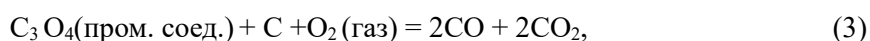
Значения скорости газификации углерода в зависимости от концентрации  $O_2$  и температуры

Содержание $O_2$ , % Температура, °C	Удельная скорость газификации углерода, моль/с, при содержаниях кислорода в смеси ( $C+O_2$ ), % от C				
	10	20	30	50	100
450	18	19	20	21	21
460	20	29	31	36	38
470	30	40	43	48	58
480	45	54	60	63	72
490	62	72	80	90	100
500	75	100	121	130	145

Данные табл. 1 показывают, что с увеличением концентрации кислорода в смеси ( $C+O_2$ ) и возрастанием температуры скорость окисления углерода возрастает, однако при этом повышение температуры более интенсивно влияет на процесс газификации углерода, чем увеличение концентрации кислорода.

Предполагаемый механизм взаимодействия угля с кислородом и его кинетические характеристики

Процесс газификации углерода кислородом можно рассматривать в рамках классической теории гетерогенного взаимодействия газов с твердыми веществами, включающего адсорбции газа на поверхность твердого реагента с образованием промежуточных соединений, участвующих в химическом взаимодействии реагентов реакций [4]. Тогда, согласно такому механизму процесс газификации углерода кислородом можно характеризовать следующими реакциями



где  $O_2$  (адс.) – адсорбированный кислород на поверхности угля;  $C_3O_4$  – промежуточное поверхностное соединение кислорода с углеродом.

Реакции (1) и (2) являются промежуточными с абсорбцией кислорода на поверхность угля и образованием поверхностного оксида углерода  $C_3O_4$ . Можно считать, что эти две реакции характеризуют первую стадию газификации углерода. Далее промежуточное соединение  $C_3O_4$  вступает в реакцию с углеродом и кислородом с образованием моно – и двуокиси углерода. Конечные продукты газификации углерода могут образоваться и при разложении  $C_3O_4$ . Таким образом, реакции 3 и 4 на второй стадии процесса завершают процесс газификации углерода.

При оптимальном процессе окисления углерода скорость реакции (2) должна быть настолько быстрой, чтобы не лимитировать процесс газификации углерода. Скорость реакции (2) можно выразить как

$$(-dC/dt) = K_2 (S_o - S), \quad (5)$$

где  $(-dC/dt)$  – скорость расходования кислорода на поверхности угля по реакции (2);  $K_2$  – константа скорости реакции (2);  $S_o$  – реакционная поверхность углерода;  $S$  – поверхность углерода, занятая промежуточным соединением  $C_3O_4$ .

Реакция (3) является определяющей в протекании процесса газификации углерода, её скорость можно описать уравнением

$$(-dx/dt) = K_3 S C, \quad (6)$$

где:  $(-dx/dt)$  – скорость разложения промежуточного соединения  $C_3O_4$  по реакции (3);  $K_3$  – константа скорости реакции (3);  $C$  – концентрация кислорода у реакционной поверхности углерода.

При установившемся режиме скорость образования поверхностного окисла и скорость его разложения равны. Тогда, можно показать, что суммарная реакция окисления углерода, определяемая по расходу количества кислорода, определяется уравнением

$$-dC/dt = K_3 S C / (1 + K_3 \cdot C / K_2), \quad (7)$$

где  $C$  – концентрация кислорода у реакционной поверхности углерода.

Значения констант скоростей реакции (2) и (3) рассчитываются по уравнению Аррениуса как

$$K_2 = K_{02} (\exp -E_2 / RT), \quad (8)$$

$$K_3 = K_{03} (\exp -E_3 / RT), \quad (9)$$

где:  $K_{02}$  и  $K_{03}$  – удельные константы скоростей реакции (2) и (3);  $E_2$  и  $E_3$  – соответственно энергии активации образования и разложения промежуточного соединения  $C_3O_4$ ,  $T$  – температура реакционной поверхности.

Поскольку уравнение (7) выведено из условия равенства скоростей образования и разложения промежуточного соединения  $C_3O_4$ , тогда можно считать, что значение  $C$  как на поверхности углерода, так и в газовом потоке, подающего в газогенератор для окисления углерода, одно и тоже, и выражает концентрацию кислорода в смеси ( $C+O_2$ ). Адекватность уравнения (7) проверена вычислением скорости расходования кислорода при его концентрациях в смеси  $C+O_2$ , приведённых в табл. 1. Оно вполне удовлетворяет экспериментальным значениям скорости окисления углерода. Рассчитанное значение усреднённой энергии активации реакции по уравнениям (8) и (9) варьируется в пределах 6.5–10.2 кДж/моль.

### Выводы

Исследована кинетика газификации углерода, полученного предварительным выделением всех сопутствующих компонентов углероду в составе угля Фон Ягнобского месторождения при варьировании температуры в пределах 450–500°C и концентрации кислорода в смеси ( $C+O_2$ ) в пределах от 10 до 100%. Уравнение кинетики газификации углерода кислородом определено на основе механизма абсорбции кислорода на поверхность частиц углерода с образованием промежуточного соединения  $C_3O_4$ , которое в дальнейшем вступает в реакцию с углеродом и кислородом или разлагается с образованием моно- и диоксида углерода.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Постановление Правительства Республики Таджикистан №159 от 28 марта 2018 г.
2. Состояние угольного сектора Республики Таджикистан. – Д.: Маленькая земля, 2019, с.23.
3. Гайбуллаева З.Х., Шарифов А., Хамроев Ф.Х., Шодиев Г.Г. – Патент Евразии № 037398. Способ газификации угля для производства тепла и химических веществ.
4. Иоффе И.И., Письмен Л.М. Инженерная химия гетерогенного катализа. – Л.: Химия, 1972, 464 с.

З.Х.ҒАЙБУЛЛОЕВА, Т.Х.ҒАДОЕВ\*, Ғ.М.РАХИМОВ\*, Б.И.АСРОРОВ, А.ШАРИФОВ\*\*

## КИНЕТИКАИ БО ОКСИГЕН ҒАЗКУНИИ КАРБОН

*Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ,*

*\*Ташиқоти кушодаи аксионерии «Азот»,*

*\*\*Институту химияи ба номи В.И.Никитини АМИ Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаҳои таҳқиқоти кинетикаи раванди бо оксиген ғазкунии карбон оварда шудаанд. Муодилаи кинетика тавассути оксиген ғазкунии карбон бо назардошти механизми адсорбсияшавии оксиген ба сатҳи карбон бо ҳосилшавии пайвастагии сатҳии  $C_3O_4$ , ки пас бо карбон ва оксиген ба реаксия рафта ё вайрон шуда, моно ва диоксидаи карбон ҳосил мекунад, муайян карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** ангишт, карбон, оксиген, ғазнокунӣ, кинетика, ҳарорат, концентратсияи оксиген.

Z.H.GAIBULLAEVA, T.H.GADDOEV\*, F.V.RAHIMOV\*, B.I.ASROROV, A.SHARIFOV\*\*

## KINETICS OF GASIFICATION OF CARBON WITH OXYGEN

*M.S.Osimy Tajik Technical University,*

*\*Ltd «Azot»,*

*\*\*V.I.Nikitin Institute of chemistry, National Academy of Science of Tajikistan*

The article presents the results of a study of the kinetics of the process of carbon gasification by oxygen. The equation for the kinetics of carbon gasification with oxygen is determined based on the mechanism of oxygen absorption on the surface of carbon particles with the formation of an intermediate compound  $C_3O_4$ , which subsequently reacts with carbon and oxygen or decomposes to form mono- and carbon dioxide.

**Key words:** coal, carbon, oxygen, gasification, kinetics, temperature, oxygen concentration.

### **Сведения об авторах:**

**Ғайбуллаева Зумрат Ҳабибовна** – доктор технических наук, Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими, и.о. профессора;

**Ғадов Тоджиддин Ҳуснидинович** – ООО «Азот», г. Сарбанд, Таджикистан, технический директор;

**Рахимов Фаррух** – ООО «Азот», г. Сарбанд, Таджикистан, аппаратчик цеха карбамида;

**Асроров Баходур Илхомович** – Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими, соискатель кафедры «Технология химического производства»;

**Шарифов Абдумунин** – доктор технических наук, профессор, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, зав. лабораторией «Гидридные соединения».

УДК 669

Специальность: 1.4.4. Физическая химия

Т.М.УМАРОВА, К.Н.ПИРНАЗАРОВА, Х.О.ОДИНАЗОДА\*

**СИНТЕЗ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА  
ИНТЕРМЕТАЛЛИДА  $AlSm$**

*Филиал МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе,  
Таджикский технический университет имени акад. М.С. Осими\**

*Поступила в редакцию 25.08.2021 г.*

*В работе приводится сравнительный анализ имеющихся в литературных источниках данных относительно интерметаллических соединений системы  $Al-Sm$ , а также приводятся результаты синтеза, физико-химических методов анализа и исследования плотности и микротвёрдости алюминида самария  $AlSm$ .*

**Ключевые слова:** алюминий, диаграмма состояния, самарий, интерметаллиды, сканирующий электронный микроскоп.

Решение важных задач современной науки, техники и технологии базируется, в первую очередь, на достижениях фундаментальных исследований в области современного материаловедения, физико-химических, механических и технологических свойств сплавов как бинарных систем (материал-основа), так и многокомпонентных металлических систем. Данная работа является продолжением исследований в области разработки новых конструкционных сплавов на основе алюминия, а также роли интерметаллических соединений (алюминидов) в изучаемых системах [1-6].

Известно применение алюминидов в качестве защитных покрытий при горячем деформировании и термической обработке химически активных металлов. Жаропрочные алюминиды и сплавы на их основе представляют значительный интерес для авиационной и аэрокосмической техники вследствие высокой стабильности, жаропрочности и жаростойкости. В целом, применение ИМС открывает новую эру в создании двигателей для аэрокосмической техники и развития других отраслей промышленности.

---

*Адрес для корреспонденции:* Умарова Татьяна Мухсиновна. 734003, Республика Таджикистан, ул. Бохтар 35/1. Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. E-mail: nauka@msu.tj

На первый взгляд может показаться, что система Al-Sm достаточно изучена, но анализ работ авторов [7-11] указывает на то, что вряд ли можно с этим согласиться. Так, например, в своих работах Гшнайнднер К.А. и Колдервуд Ф.В. подчеркивают, что несмотря на то, что система Al-Sm была тщательно изучена, полная фазовая диаграмма, включая ликвидус в области, богатой самарием, недоступна. Отсутствие данных о кривых ликвидуса в данной системе при высоких температурах авторы объясняют низким значением температуры кипения и высоким давлением паров самария, что затрудняет контроль состава сплавов системы.

На рис. 1 представлены диаграммы состояния авторов [9, 10] в хронологической последовательности: а и б, соответственно 1996 и 2012 годы.

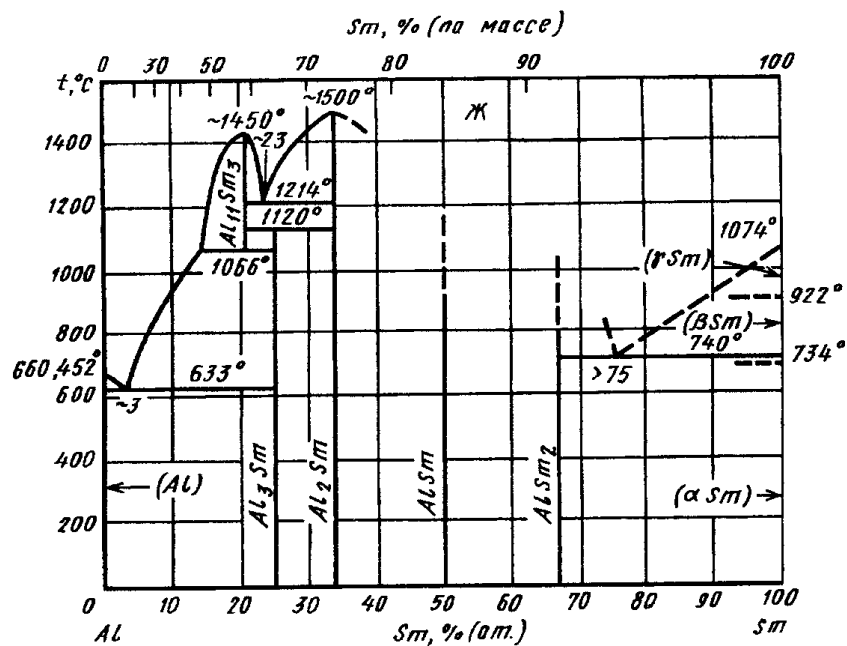
Диаграмма состояния, представленная по Лякишеву Н.П. (рис.1а), (аналогично работе Гшнейндера) полностью не построена, в ней указано о существовании пяти ИМС ( $Al_{11}Sm_3$ ,  $Al_3Sm$ ,  $Al_2Sm$ ,  $AlSm$  и  $AlSm_2$ ), четыре из которых стабильны и одна  $Al_{11}Sm_3$  – метастабильная фаза. В области богатой алюминием ИМС  $Al_4Sm$  и  $Al_2Sm$  плавятся конгруэнтно при температурах 1450 и 1500<sup>o</sup>C. Для двух последних ИМС -  $AlSm$  и  $AlSm_2$ , температура и характер образования не были установлены. У второго автора – Окамото Х. (рис.1б), построена полная фазовая диаграмма системы Al-Sm с помощью термического, микрографического, микрозондового и рентгеноструктурного анализов, но остался вопрос о температуре  $\alpha$ -Sm.

Интересной представляется работа Zhou S.H. и др. [11], в которой сообщается о существовании целого ряда метастабильных соединений в системе Al-Sm, тогда как у Лякишева Н.П. [9] об этом не говорится, это фазы, включающие:  $Al_{41}Sm_5$ - $\eta$ ,  $Al_{60}Sm_{11}$ - $\epsilon$ ,  $Al_5Sm$ - $\theta$ ,  $Al_5Sm$ - $\pi$  и  $Al_4Sm$ - $\gamma$  в области богатой алюминием (до 80 ат.%). Показано, что среди исследованных метастабильных фаз, фазы  $Al_{41}Sm_5$ - $\eta$  и  $Al_{60}Sm_{11}$ - $\epsilon$  содержат выпуклую оболочку с минимальными энергиями образования при абсолютном нуле.

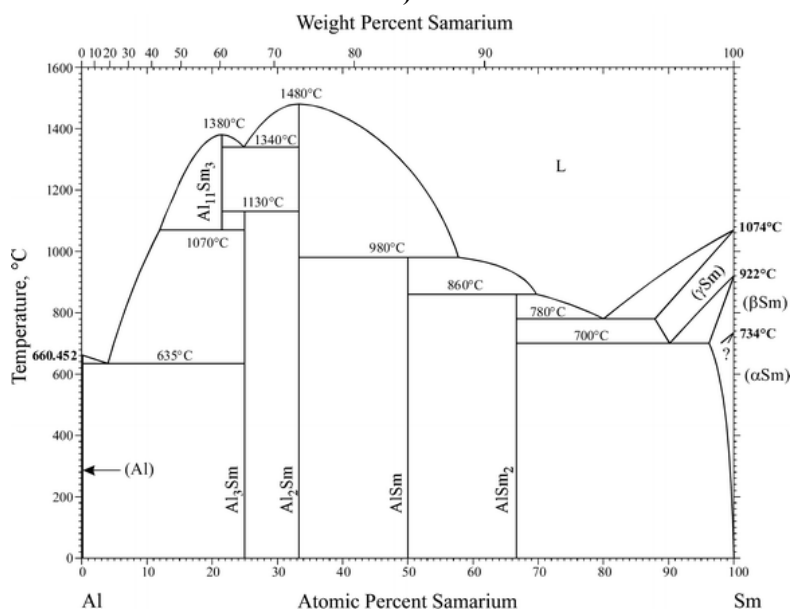
Отсутствие единого толкования существующих химических соединений в системе Al-Sm вызывает большой интерес материаловедов. В связи с этим, целью данной работы является синтез ИМС на основе системы Al-Sm, изучение физико-химических свойств, сравнительный анализ имеющихся в литературе данных относительно ИМС данной системы.

В данной работе ИМС получали на основе алюминия марки А995 (ГОСТ 11069-74) с целью минимизировать влияние примесей (Fe, Si и др.) и самария чистотой 99.9% в условиях вакуума при температуре 1000<sup>o</sup>C. Навеску запаивали в кварцевую ампулу. Для синтеза и изучения свойств алюминида самария использованы: Камерная печь KS 400/10 (Germany); вакуумметр ионизационно-термопарный ВИТ-2П, сканирующий электронный микроскоп JSM-35CF JEOL с Si(Li), дифрактометр ДРОН-3, прибор ПМТ-3 для измерения микротвёрдости, аналитические весы OHAUS AR-2140. При определении кристаллических фаз использовалась программа Search-Match-DEMO.





a)

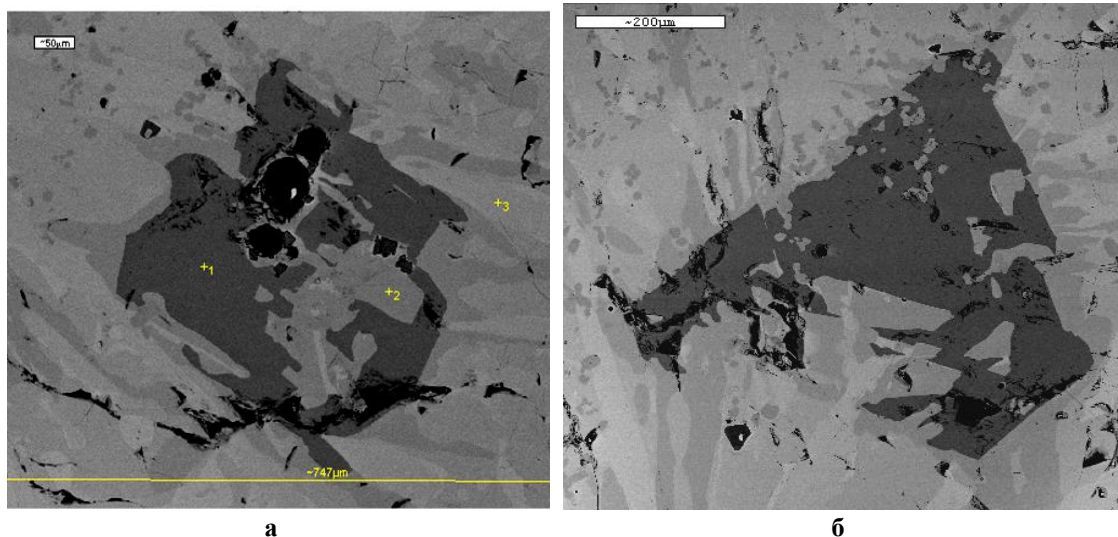


b)

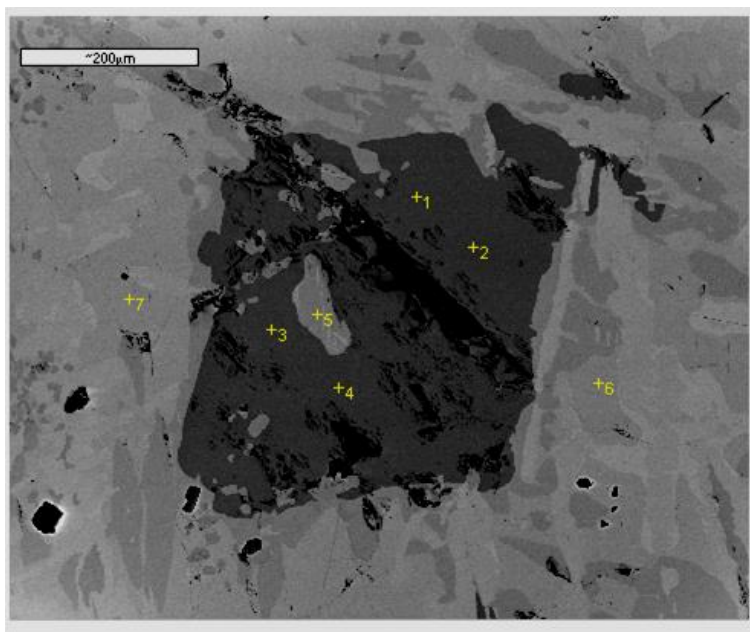
Рис. 1. Диаграмма состояния системы Al-Sm авторов: а - [9], б-[10].

Для определения химического состава из образца, полученного в условиях вакуума ИМС, был изготовлен полированный препарат в виде аншлифа. Рентгеновская порошковая диаграмма получена на дифрактометре ДРОН-3, Cu – анод, Ni – фильтр, скорость счетчика – 1 градус/мин. Изучение морфологии и определение состава проводили на сканирующем электронном микроскопе JSM-35CF JEOL с Si(Li) - энергодисперсионным спектрометром и системой анализа ISIS Link Oxford при ускоряющем напряжении 20 кВ и токе зонда 1 нА.

Картинки в отраженных электронах BSE, полученные сканирующим электронным микроскопом, показали, что образец ИМС состоит из соединений с разными соотношениями алюминия и самария (рис. 2 и 3, соответственно табл. 1, 2), что также было заметно в результате просмотра аншлифа в отраженном свете под микроскопом, где участки образца имеют разные цвета и отражения, а в скрещенных николях одни участки аншлифа изотропны, другие сильно анизотропны.



**Рис. 2.** Полированный образец ИМС AlSm в отраженных электронах BSE.



**Рис. 3.** Участок образца, состоящий из нескольких соединений системы Al-Sm (изображение в отраженных электронах BSE).

Так, можно видеть, что тёмные участки (рис. 2) соответствуют составу, расположенному в области диаграммы состояния Al-Sm слева от ИМС AlSm и светлые участки

(рис. 3), порядка 61 ат.% Sm – справа от AlSm, что объясняет присутствие близлежащих к нему химических соединений, а именно – Al<sub>2</sub>Sm и AlSm<sub>2</sub>.

Таблица 1

Химический состав образца синтезированного ИМС

1.				3.			
Elmt	Spect. Type	Element %	Atomic %	Elmt	Spect. Type	Element %	Atomic %
Al K	ED	19.85	57.74	Al K	ED	18.12	55.24
Sm L	ED	80.98	42.26	Sm L	ED	81.79	44.76
Total		100.83	100.00	Total		99.91	100.00
2.				4.			
Elmt	Spect. Type	Element %	Atomic %	Elmt	Spect. Type	Element %	Atomic %
Al K	ED	19.65	57.58	Al K	ED	21.69	60.75
Sm L	ED	80.65	42.42	Sm L	ED	78.08	39.25
Total		100.30	100.00	Total		99.77	100.00

Примечание: Номера соответствуют участкам анализа, показанным на рис. 2 (темно-серый участок снимка, точки 1-4).

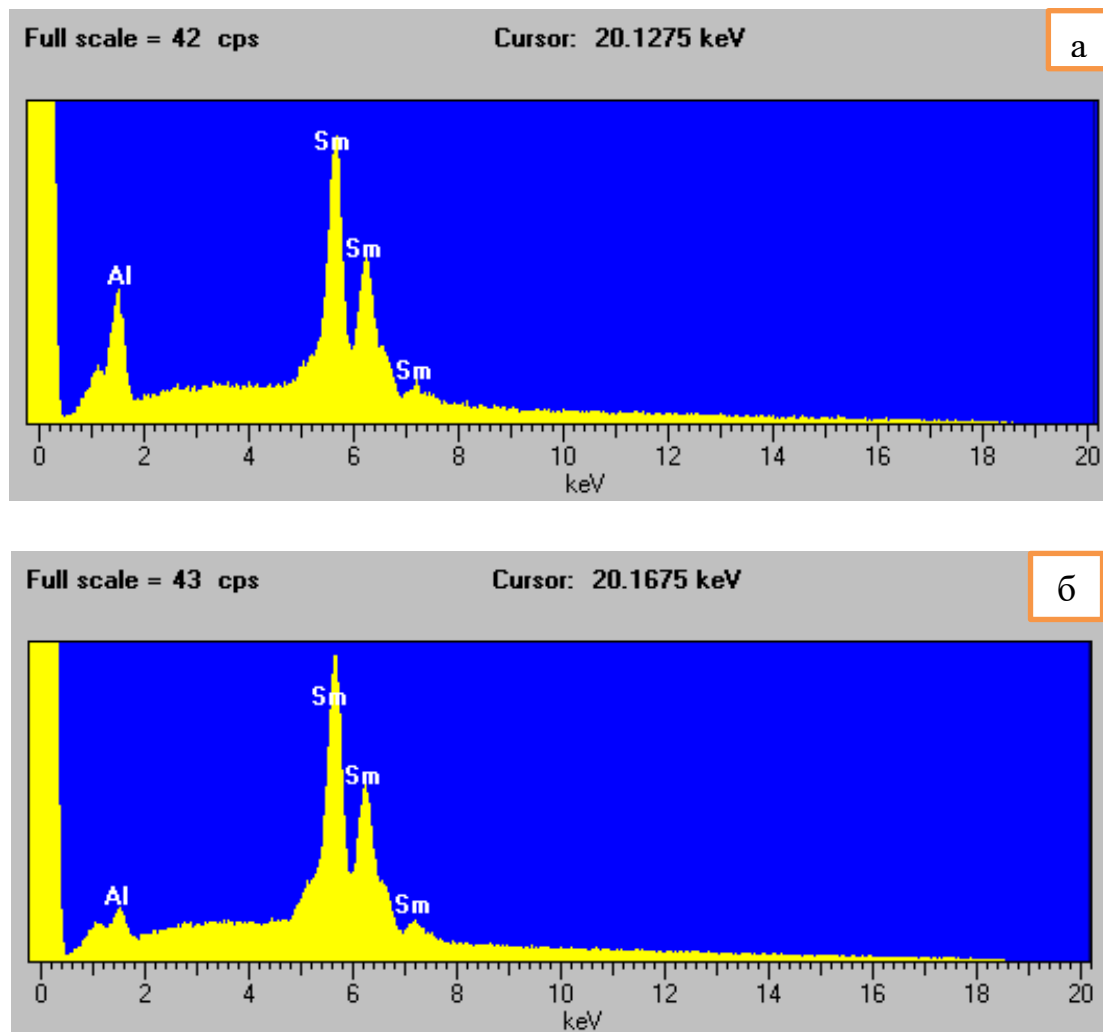
Таблица 2

Химический состав образца синтезированного ИМС

5.				6.			
Elmt	Spect. Type	Element %	Atomic %	Elmt	Spect. Type	Element %	Atomic %
Al K	ED	9.92	37.81	Al K	ED	10.19	38.91
Sm L	ED	90.91	62.19	Sm L	ED	89.14	61.09
Total		100.83	100.00	Total		99.33	100.00
7.							
Elmt	Spect. Type	Element %	Atomic %				
Al K	ED	10.97	40.65				
Sm L	ED	89.25	59.35				
Total		100.22	100.00				

Примечание: Номера соответствуют участкам анализа, показанным на рис. 3 (светло-серый участок снимка, точки 5-7).

На рис. 4 показан энергодисперсионный спектр образца синтезированного алюминид самария AlSm по точкам 1-4 и 5-7 (а, б - соответственно).



**Рис. 4.** Энергодисперсионный спектр образца ИМС AlSm  
(а – точки 1-4, б – точки 5-7 рис. 2, 3).

На рис. 5 показано изображение в режимах SEI, BSE с полированной поверхности испытуемого образца AlSm.

Результатами рентгенофазового анализа определены два фазовых соединения системы Al-Sm с более сильными отражениями, которые соответствуют базовым рентгенограммам, на дифрактограмме также присутствовали линии других соединений, которые не удалось определить в связи с отсутствием рентгенограмм данных соединений в базе.

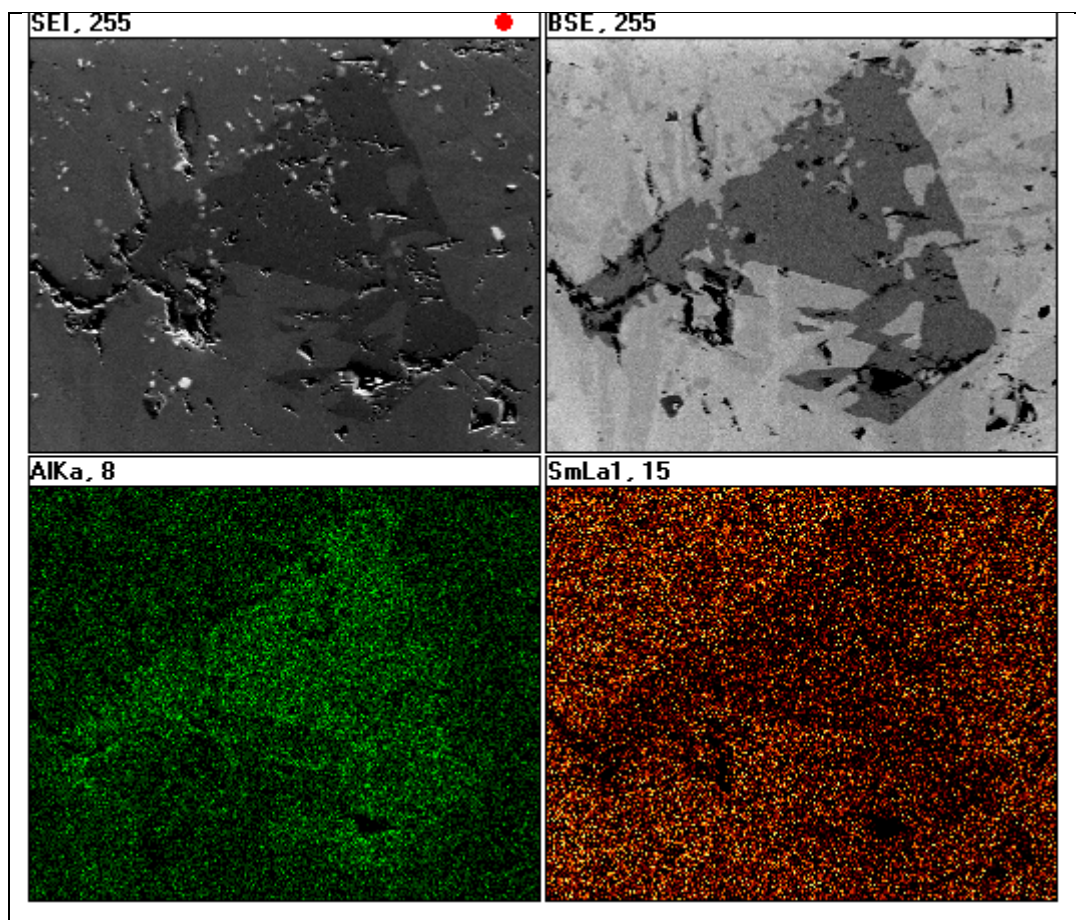


Рис. 5. Изображение в режимах SEI, BSE с полированной поверхности образца AlSm.

Плотность исследуемого образца определяли методом гидростатического взвешивания в воде, а микротвёрдость определяли на приборе ПМТ-3 при нагрузке 20 г, тарированном по NaCl. Результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3

Значения плотности и твёрдости ИМС AlSm

Образец ИМС	Плотность, г/см <sup>3</sup>	Микротвёрдость, НВ
AlSm	5.44	194-196
Al* (для сравнения)	2.7	135-153

В результате исследования свойств синтезированного химического соединения AlSm можно сделать вывод, что плотность ИМС в два раза превышает значение плотности чистого алюминия, но это значение ниже, чем у известных материалов, имеющих широкое назначение – конструкционная сталь (7.85), серебро (10.5), медь (8.93), латунь (8.53), хром (7.14), бронза (8.2-9.1 г/см<sup>3</sup>) и другие. Микротвёрдость ИМС AlSm превосходит значение чистого алюминия, что находится в согласии с правилом Курнакова.

В заключении, выражаем благодарность сотрудникам Института геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ, а именно – Миракову М.А., Шодибекову М.А. и Сайидмудасири М. за помощь в проведении физико-химического анализа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Umarova T.M., Ganiev I.N. Electrochemical properties of aluminids manganese. – IX Intern. Conf. “Crystal. Chemistry of intermetallic compounds” – Lviv, 20-24 sept., 2005, p.78.
2. Умарова Т.М., Ганиев И.Н. Влияние самария на коррозионно-электрохимические свойства алюминия в нейтральной среде. – ЖПХ, СПб., 2008, т.81, № 2, с.340-342.
3. Умарова Т.М. Разработка и исследование материалов на основе алюминидов для машиностроения. «Современные проблемы машиноведения». (Под общ. ред. А.А.Бойко). – Сборник научных трудов в двух частях. Ч.1, г. Гомель, ГГТУ им. П.О.Сухого, 2023, с. 94-97.
4. Умарова Т.М., Ганиев И.Н. Анодные сплавы алюминия с марганцем, железом и редкоземельными металлами. Монография. – Душанбе: Дониш, 2008, 273 с.
5. Умарова Т.М., Нормамедов О. Влияние самария и европия на фазовый состав и микроструктуру сплава Al+1.9%Mn. – Труды XXI Международной научно-практической конференции «Металлургия: технологии, инновации, качество». «Металлургия-2019». – Новокузнецк, СибГИУ (23-24 октября 2019 г.), 2019, т. 2, с. 313-317.
6. Умарова Т.М., Джалолов Ф. Синтез и исследование микроструктуры и теплофизических свойств интерметаллического соединения Al<sub>3</sub>Fe. – Вестник Филиала Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в г.Душанбе. Серия: Естественные науки, 2017, №1, с. 128-133.
7. Okamoto H. Al-Sm (Aluminum-Samarium). – J. Phase Equilib. Diffus., 2012, vol. 33, №3, p. 243.
8. Massalski B. – Binary alloy phase diagrams, 1990, 3589 p.
9. Лякишев Н.П. – Диаграммы состояния двойных металлических сплавов, 1996, 498 с.
10. Gschneidner K.A., Calderwood F.W. The Al-Sm (Aluminum-Samarium) System. – Bulletin of Alloy Phase Diagrams, 1989, vol. 10, № 1, pp. 37-39.
11. Zhou S.H., Meng F.Q., Kramer M.J., Ott R.T., Zhang F., Ye Z., Jain S., Napolitano R.E. Metastable intermetallic phases in the Al-Sm system. – Materials Today Communications, December 2019, vol. 21, pp. 1-11.

Т.М.УМАРОВА, К.Н.ПИРНАЗАРОВА, Х.О.ОДИНАЗОДА\*

## СИНТЕЗ ВА ХУСУСИЯТҶОИ ФИЗИКИЮ ХИМИЯВИИ AlSm ИНТЕРМЕТАЛЛИД

*Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе,  
Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С.Осимӣ*

Дар кори мазкур таҳлили муқоисавии маълумотҳои дар адабиёт мавҷудбуда оид ба пайвастагиҳои интерметаллии системаи AlSm, инчунин натиҷаҳои синтез, усулҳои физикию химиявии таҳлил ва омӯзиши зич ва микросохтии алюминиди самарии AlSm оварда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** алюминий, диаграммаи фазавӣ, самарий, пайвастагиҳои байниметаллӣ, микроскопи электронии сканерӣ.

T.M.UMAROVA, K.N.PIRNAZAROVA, Kh.O.ODINAZODA  
**SYNTHESIS AND PHYSICAL-CHEMICAL PROPERTIES**  
**AlSm INTERMETALLIDE**

*Lomonosov Moscow State University in Dushanbe,  
Tajik Technical University named after academician M.S.Osimi\**

A comparative analysis of the data available in the literature regarding intermetallic compounds of the Al-Sm system, as well as the results of synthesis, physicochemical methods of analysis and study of the density and microhardness of samarium aluminide AlSm are presented.

**Key words:** aluminum, phase diagram, samarium, intermetallic compounds, scanning electron microscope.

**Сведения об авторах:**

**Умарова Татьяна Мухсиновна** – доктор технических наук, Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова в г. Душанбе, главный специалист Отдела науки, инноваций, международных связей и издательской деятельности. E-mail: umarova04@mail.ru;

**Одиназода Хайдар Одина** – доктор технических наук, Таджикский технический университет им. акад. М.Осими, профессор кафедры «Металловедение, металлургические машины и оборудование». E-mail: odhaidar@mail.ru;

**Пирназарова Камила Назаралиевна** – Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова в г. Душанбе, студентка по направлению «Химия, физика и механика материалов». E-mail: komila.pirnazarova.04@mail.ru.

УДК 553.232 (575.3)

Специальность: 1.6.4 – Минералогия, кристаллография. Геохимия, геохимические методы поисков полезных ископаемых.

Ф.Г.ГАФУРОВ

## О КАРБОНАТИТОВЫХ ПРОЯВЛЕНИЯХ ТАДЖИКИСТАНА

*Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии  
Национальной академии наук Таджикистана*

*Поступила в редакцию 30.03.2023 г.*

*В статье приводятся некоторые краткие сведения о геологическом размещении карбонатитовых проявлений Таджикистана. Особое внимание уделяется на карбонатитам Сабахского, Даратпезского и Дункельдыкского массивов щелочных пород.*

**Ключевые слова:** карбонатиты, Сабах, Дарай Пиез, Дункельдык, история изучения, сланцы, щелочные породы, геологическое положение.

К настоящему времени в мире обнаружено более 500 проявлений карбонатитов. Они известны в Африке, Азии, Северной Америке, России, Индии, Бразилии, Гренландии и в ряде других регионах мира.

На территории Таджикистана карбонатиты впервые были описаны И.П.Майоровым и Р.Д.Гаврилиным в 1971 г. в водораздельной части Алайского хребта, в области его виргации на Туркестанский и Зеравшанский хребты [1]. Они представлены здесь серией даек вокруг сложных сиенит-гранитных массивов Матча, Тутек и Дарай Пиез.

На Памире карбонатиты были найдены в конце семидесятых годов М.М. Безуглым в Музкол-Рангульской подзоне тектонической зоны Центрального Памира [2]. В междуречье Кукурт-Зорбурулок вблизи массивов сильно метаморфизованных ультраосновных-щелочных пород среди кристаллических сланцев находятся прожилки, линзы и жилы мощностью до 10-20 см и протяженностью до нескольких десятков м.

Карбонатитоподобные образования в пределах западной части Рушанско-Пшартской зоны (Хуфско-Баджуйский рудный район с месторождением Икар) были описаны Б.А.Алидодовым, А.Р.Файзиевым и автором. Карбонатитоподобные проявления Икар с

---

*Адрес для корреспонденции:* Гафуров Фарход Гиясович, 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 267. Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана, E-mail: farkhod\_gafurov70@mail.ru



золото-шеелитовым оруденением слагают линейно-вытянутые субпараллельные жильные тела в калиевых субщелочных породах типа толеитов, образующих в целом штокверковую зону. Последняя сложена существенно карбонатными (кальцитовыми) жилами с незначительным содержанием кварца и рудной минерализации, представленной шеелитом, золотом и сульфидами. Последние представлены, главным образом, пирротинном, халькопиритом и пиритом [3].

В начале восьмидесятых годов на Восточном Памире А.Р.Файзиевым и Ф.Ш.Искандаровым [4] описаны три карбонатитовых проявления: Дункельдык, Танымас и Кызыл-Джиик. Все эти проявления приурочены к линейным протяженным структурам. Дункельдыкское рудопроявление находится в зоне Рушано-Пшартского глубинного разлома, а два последних приурочены к Центрально-Памирскому региональному разлому.

Карбонатиты Дункельдыка встречаются в виде даек и дайкообразных тел мощностью от 10-15 см до 3-4 м протяженностью до нескольких сотен метров. Локализуются они обычно в периферических частях субвулканического массива неогеновых щелочных пород и песчано-сланцевых отложений пермо-триаса. В геологическом строении щелочного массива принимают участие отложения пермского, триасового и четвертичного возрастов. Породы пермского периода образуют две толщи: нижнюю и верхнюю. Нижняя часть нижней толщи представлена эффузивно-терригенными отложениями, а верхняя часть: известково-кремнистыми породами. Мощность отложений нижней толщи колеблется от 1200 до 1500 м. Верхняя толща сложена в основном известняками с прослоями кремнистых и глинистых сланцев, туфов и туфопесчаников мощностью от 30-50 до 250-300 м. Триасовая система состоит из тонкоплитчатых известковистых песчаников, песчаных мергелей с мощностью до 8-10 м, а также из грубослоистых известняков и мраморов.

Рудопроявление Танымас приурочены к зоне Центрально-Памирского глубинного разлома, активизированного в позднеальпийскую (неоген) эпоху тектогенеза. В плане оно представляет собой линейно вытянутую минерализованную зону, локализованную в плоскости надвига, проходящего на контакте мел-палеогеновых гранитоидов и метаморфических образований среднего палеозоя. Зона прослеживается более, чем на 4 км, а ее мощность несколько сотен метров.

Рудопроявление Кызыл-Джиик также локализовано в зоне Центрально-Памирского глубинного разлома, обрамленного с севера герцинидами Северного Памира, а с юга-альпидами Южного Памира. Минерализация тяготеет к зонам брекчирования в раннеордовикских и позднемерловых отложениях и представлена кварцем, калиевым полевым шпатом, сидеритом, гематитом, плагиоклазом, флюоритом, баритом, кальцитом, апатитом и вторичным гипсом. В пределах рудоносной зоны выделяются два участка: Гематитовый и Гипсовый, отличающиеся друг от друга специфическим геологическим строением и характером минерализации. Карбонатиты Танымаса и Кызыл-Джиика представлены линейно-вытянутыми интенсивно дроблеными зонами протяженностью от сотен метров до 4 км и

мощностью от первых до сотен метров. По минеральному составу карбонатиты Восточного Памира близки между собой.

В статье Одинаева Ш.А. и др. [5] на Черногорском месторождении скаполитов (Центральный Памир) были описаны метасоматические карбонатиты, распространенные по всей территории и далеко за пределами месторождения. Здесь карбонатиты приурочены к массивам габброидов, которые образуют вокруг скаполитового месторождения полудугу. Эти образования также развиты и в амфиболитах, образуя линзовидную форму, мощностью 0.2-1 до 5 м и протяженностью 0.5-15, редко до 250 м.

При проведении полевых экспедиционных работ (2002-2007 гг.) в верховьях р. Дараи Пиез на юго-западном контакте одноименного массива нами выявлено несколько карбонатитовых тел. В северо-восточной части массива отмечены крутопадающие жилы преимущественно кальцит-флюоритового состава с туркестанитом и пектолитом мощностью от 0.3-0.5 см и протяженностью 40-60 м. Среди этих образований особое место занимают концентрические карбонатитовые дайки. Установленные на юго-западе в приконтактной части массива, на правом борту бассейна р. Дараи Пиез, прорывающие эгириновые и нефелиновые сиениты.

Описываемые карбонатитовые жилы крутопадающие (угол падения 65-70°) в силикатных породах практически не содержат обломков окружающих пород. Редко встречающиеся ксенолиты сильно изменены и окружены. Ранние карбонатиты, локализованные среди осадочно-метаморфических пород образуют не только вытянутые линейные тела в системах трещин разрыва, но и образуют округлые в плане трубообразные штоки. Здесь в отличие от карбонатитов в силикатных породах, жилы более мощные и протяженные.

На правом борту р. Дараи Пиез, в средней ее части, откуда начинаются нагромождения глыб моренных отложений, в верхнепалеозойских сланцах находятся карбонатитовые тела удлиненной формы. Длина их около 80 м, а видимая ширина колеблется от 20 до 45 м. Кроме западной части, другие контакты с вмещающими породами задернованы. Контакт описываемого тела со сланцами четкий. Вмещающие породы в приконтактной своей части обычно пронизаны волосовидными просечками карбонатного состава и слюдяно-пироксеновым агрегатом толщиной 0.5-1.5 см [6].

Карбонатитовое проявление Сабах в плане имеет форму вытянутую в северо-восточном направлении, мощностью до сотни метров. Карбонатитовое тело контактирует с силурийскими сланцами с юго-востока, а с щелочными сиенитами и нефелиновыми сиенитами с северо-запада. По составу карбонатиты Сабаха главным образом кальцитовые, то есть они относятся к сёвитам. А.Р.Файзиевым [7] здесь выделяются два типа карбонатитов. Более ранняя разновидность серовато-белого цвета с зернистым агрегатом. Нередко они полосчатые, где более светлые полосы чередуются менее светлыми. На контакте с вмещающими породами в карбонатитах особых изменений не наблюдается, за исключением того, что на границе со сланцами они становятся плитчатыми.

Вблизи контактов со сланцами в карбонатитах наблюдаются ксенолиты вмещающих пород, размер которых достигает 0.7- 0.9 м в поперечнике. В ксенолитах повсеместно заметен процесс резорбции, выраженный в виде серии тонких карбонатных прожилков.

Образование щелочно-ультраосновных и связанных с ними карбонатитовых пород Таджикистана происходило в мезо-кайнозойское время (в Центральном Таджикистане – в триасе, а на Памире – в неогене), которое является одним из основных этапов образования карбонатитов земного шара. По типу структуры рудных полей и месторождений, карбонатитовые проявления Центрального Таджикистана следует отнести к тектоно- плутоногенным, а карбонатиты Памира к тектоно-вулканогенным, развитым в зонах разрывных нарушений. Карбонатиты Центрального Таджикистана и проявления Памира относятся к кальцитовому (сёвитому) типу. Они считаются ранними образованиями. Более поздние магнезиальные (доломитовые) и железо-магнезиальные (сидеритовые, анкеритовые) карбонатиты в этих регионах имеют ограниченное распространение и встречаются в виде небольших жил (мощность 5-15 см, протяженность от 5 до 60-80 м) и линзовидных тел.

### **Заключение**

В связи с щелочными комплексами Таджикистана выявлены проявления карбонатитов, ассоциирующие с ультракалиевыми щелочными породами (Дункельдык) и щелочными и нефелиновыми сиенитами и гранитами (Дараи Пиёз). В Дарапиёзском массиве щелочных пород установлены две генерации карбонатитов и породы промежуточного состава между собственно карбонатитами, с одной стороны, и щелочными сиенитами, с другой, названные сиенито-карбонатитами.

В карбонатитах Дараи Пиёза в пониженных количествах присутствуют Zr, Nb, Ta, U, Th, Pb, Zn, Cu, Co и Cr, в повышенных – Rb и Cs, а содержания Sc, Hf, Ni и Y сопоставимы с их концентрацией в типичных карбонатитах. В сиенито-карбонатитах присутствуют в повышенных количествах не только Rb и Cs, но и РЗЭ, Y и Hf.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Майоров И.П., Гаврилин Р.Д. Карбонатиты из верхнепалеозойской геосинклинали Туркестано-Алая. – Советская геология, 1971, №10, с.111-116.
2. Безуглый М.М. О находке карбонатитов в Центральной Таджикистане. – Доклады Академии наук Тадж. ССР, 1987, № 12, с. 37-39.
3. Файзиев А.Р., Искандаров Ф.Ш. О новом типе флюоритового оруденения на Памире. – Доклады Академии наук Тадж. ССР, 1987, №6, с.375-376.
4. Файзиев А.Р., Искандаров Ф.Ш., Гафуров Ф.Г. Минералогия, термобарогеохимические условия становления и генезис редкоземельно-флюоритового месторождения Дункельдык (Восточный Памир). – Душанбе: Хумо, 2000, 134 с.
5. Одинаев Ш.А., Литвиненко А.К., Фёдоров А.В. и др. Метасоматические карбонатиты на месторождении ювелирного скаполита Черногорское (Центральный Памир). – Разведка и охрана недр, 2020, № 4, с. 37-42.

6. Файзиев А.Р., Гафуров Ф.Г., Шарипов Б.Н. Карбонатиты Дарапиезского массива щелочных пород (Центральный Таджикистан) и особенности их состава. – Геохимия, 2010, № 11, с.1154-1168.
7. Файзиев А.Р. Новая находка карбонатитов в Таджикистане. – Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2012, № 3, т. 55, с. 249-251.

Ф.Г.ГАФУРОВ

## ОИД БА ЗУҲУРОТИ КАРБОНАТИТИИ ТОҶИКИСТОН

*Институти геология, сохтмони ба заминҷунбӣ тобовар ва сейсмологияи  
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола маълумоти мухтасар оид ба ҷойгиршавии геологии зухуроти карбонатитии Тоҷикистон гирд оварда шудааст. Хусусан, зухуроти карбонатитии мавзёҳои Дункелдик (Помири шарқӣ), Дарай Пиёз ва Сабақ (Тоҷикистони марказӣ) мадди назари мо қарор дода шуданд, ки ба анбӯҳҳои ҷинсҳои ишқорӣ марбутанд.

**Калимаҳои калидӣ:** карбонатитҳо, Сабақ, Дарай Пиёз, Дункелдик, таърихи омӯзиш, слансҳо, ҷинсҳои ишқорӣ, ҳолати геологӣ

F.G.GAFUROV

## ABOUT CARBONATITE APPEARANCES OF TAJIKISTAN

*Institute of Geology, Seismic Engineering and Seismology NAST*

The article provides some brief information about the geological distribution of carbonatite occurrences in Tajikistan. Particular attention is paid to the carbonatites of the Sabakh, Darai Piez and Dunkeldyk alkaline rock massifs

**Key words:** carbonatites, Sabah, Darai Piez, Dunkeldyk, history of study, shales, alkaline rocks, geological position.

### **Сведения об авторах:**

**Гафуров Фарход Гиясович** – кандидат геолого-минералогических наук, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана.  
E-mail: farkhod\_gafurov70@mail.ru.

УДК 55.504 (575.3)

Специальность: 1.6.10 – Геология, поиски, разведка твёрдых полезных ископаемых, минерагения

Ш.Ф.ВАЛИЕВ, С.НУСРАТУЛЛО

**ВОЗДЕЙСТВИЯ ЗАХОРОНЕННЫХ ТОКСИЧНЫХ ОТХОДОВ РУДНОГО  
ПОЛЯ ЧОРЕ НА ГЕОЭКОЛОГИЧЕСКУЮ СРЕДУ**

*Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии  
Национальной академии наук Таджикистана*

*Поступила в редакцию 23.06.2023 г.*

*В работе рассматривается процесс преобразования почвы на горнопромышленных территориях района рудного поля Чоре; выявлены факторы воздействия горнопромышленных предприятий на почвенный слой.*

**Ключевые слова:** горнопромышленная деятельность, токсичные отходы, захоронение отходов, полигон Чоре, почвенный слой, компоненты природной среды, твердые выбросы, высокотоксичные отходы, хвостохранилища.

Отходы горнопромышленного производства и потребления являются источником антропогенного загрязнения природной среды в глобальном масштабе. Проблема отходов возникла как неизбежный результат потребительского отношения к природным ресурсам и неоправданно низкого коэффициента использования минерального сырья.

Образовавшиеся горнопромышленные отходы складываются на поверхности земли, в ее приповерхностной части или в глубоких горизонтах, вызывая необратимые изменения всех компонентов природной среды: воздуха, почв, поверхностных и подземных вод, горных пород, биоты. Характер такого воздействия определяется, с одной стороны, технологией складирования, с другой – особенностями климатических, геологических, инженерно-геологических, гидрогеологических и геоэкологических условий районов размещения отходов [1].

---

*Адрес для корреспонденции:* Сафари Нусратулло, 734029, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана. E-mail: safari\_nusratullo@mail.ru

В настоящее время единственной специализированной территорией конечного размещения промышленных токсичных отходов для исследованной территории является государственное природоохранное предприятие полигон Чоре. Это экспериментальное предприятие имеет весьма значительные недостатки, такие как устаревшая технология переработки и захоронения отходов, а также технология рекультивации закрытых карт.

В существующем состоянии полигон Чоре является опасным источником загрязнения поверхностных и грунтовых вод водосбора реки Зеравшан и ее притоков. Огромное количество воды стекает с территории полигона, при этом воды атмосферного генезиса смешиваются в сети придорожных кювет с фильтратом из карт с жидкими отходами и сильно загрязненными поступают в кольцевой канал, а затем в естественную гидрографическую сеть [1, 2].

В этой связи возникает необходимость проведения комплексной, количественной оценки негативного воздействия полигона Чоре на компоненты природной среды и разработки мероприятий по предотвращению дальнейшего загрязнения и оздоровлению неблагоприятной экологической обстановки [9].

Горнопромышленная деятельность как негативный техногенный процесс может распространяться на большие территории и глубины, вызывая нарушение физико-химических, биологических и других свойств почв [6].

Почвы республики обладают характерными физико-механическими и химическими свойствами. Гранулометрический состав почв неоднороден. Темные сероземы состоят обычно из частиц среднего размера (0.05-0.01 мм). Крупнообломочная доля в них угнетена. Горные коричневые почвы также богаты средней фракцией, однако, в них тонкообломочная составляющая (< 0.001 мм) сравнительно мала по сравнению с темными сероземами.

Типы почв заметно отличаются по физико-механическим свойствам, особенно отчетливо по объемной массе (табл. 1), что связано, в основном, с различием их вещественного состава [3].

В минеральном составе почв в основном преобладают кварц, полевой шпат, биотит, роговая обманка, а также карбонаты, рудные минералы и др. Присутствуют в них в заметных количествах и мелкие обломки пород [6].

Таблица 1

Некоторые физические свойства исследованных типов почв, слой 0-30 см (n=24)

Свойства почв	Сероземы темные	Горные коричневые
Удельная масса, г/см <sup>3</sup>	2.69	2.68
Объемная масса, г/см <sup>3</sup>	1.19	1.56
Скважность, %	55.8	47.8

Легкая фракция почв как темных сероземов, так и горных коричневых, представлена окислами (кварц – более чем 60%) и силикатами. Среди силикатов преобладают полевые шпаты и слюды. В тяжелой фракции наблюдаются слюды, силикаты, рудные минералы

и обломки различных пород. В почвах сильно преобладают, как правило, минералы легкой фракции [7]. Они превышают объем тяжелой фракции в 6-18 раз. Преобладание кварца, шпата, обломков пород, рудных, силикатов и других. (свыше 70%) говорит, видимо, о неглубоком разложении почв, что еще раз подтверждает молодой их возраст [4].

Темные сероземы и горные коричневые почвы составляют главный земельный ресурс земледелия исследуемой территории.

На этих почвах развиты основные объекты горнопромышленной деятельности. Следовательно, горнопромышленное нарушение этих почв непосредственно приводит к снижению их хозяйственной ценности [4,8].

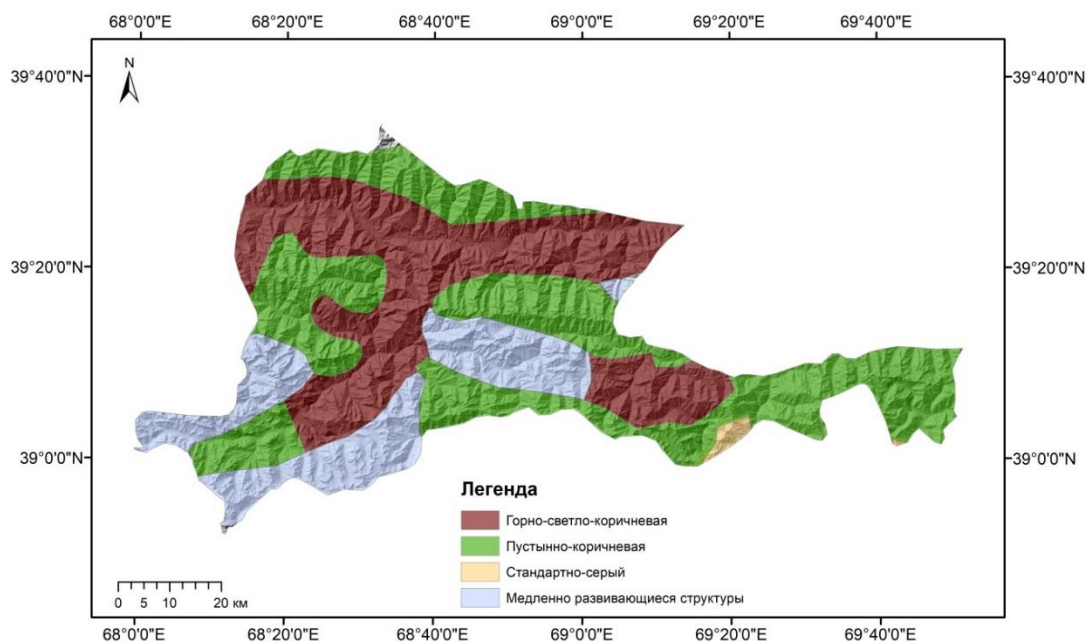


Рис. 1. Схематическая почвенная карта рудного поля Чоре.

Таблица 2

Валовый химический состав основных типов почв, слой 0-30 см

Почвы	SiO <sub>2</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	CaO	MgO	K <sub>2</sub> O	Na <sub>2</sub> O	MnO
Сероземы темные (n=8)	68.77	6.94	15.95	0.36	1.52	2.43	2.49	1.39	0.15
Коричневые (n=6)	71.09	5.21	16.51	0.2	0.79	1.86	2.57	1.69	0.08

Развитие горнопромышленного комплекса в регионе привело к резкому росту добычи полезных ископаемых (особенно открытым способом), созданию искусственных горных отвалов и хвостохранилищ. В итоге значительно сокращается площадь почвенного слоя, особенно в густонаселенных, долинных районах региона. В районах активной антропогенной деятельности возникли техногенные ландшафты, оккупирующие большие площади и являющиеся, по сути, источником вторичного загрязнения среды [9]. Достигнутый в регионе уровень промышленно-технического развития и, что главное, нерациональное и часто

пренебрежительное отношение к природе привели к многочисленным случаям нарушения почвенного слоя.

Последствие горнопромышленной деятельности выражается, прежде всего, в отчуждении и механическом нарушении почв. При горнопромышленной деятельности производится выемка огромных масс горных пород и руд, их переработка. Из всего объема вынутой из недр горной массы перерабатывается лишь около 3%, остальное уходит в отвалы и отходы [7].

Образующиеся отвалы, рассеиваясь благодаря природным миграционным процессам, составляют источники загрязнения среды (табл. 3) и, в первую очередь, нарушают почвенный слой [9].

Таблица 3

Источники и влияние пылегазовых выбросов на почву

Пылегазовые выбросы	Источник	Характер влияния на верхний слой почвы
CO <sub>2</sub> , CH <sub>4</sub> , H <sub>2</sub> , SO <sub>2</sub> ,	Отвалы пустых пород	Длительный и средний
NO <sub>2</sub> , NO, CO <sub>2</sub>	Взрывчатые вещества	Кратковременный и пагубный
Пыль (поверхностная и рудничная)	Бурение шпуров, взрыв	Длительный и пагубный

С увеличением масштабов добычи естественно возрастает общая площадь нарушенных земель.

Нами выделяются три основных вида горнопромышленного нарушения почв: 1. Нарушение путем отчуждения и захвата земель. 2. Химико-биологическое нарушение. 3. Физико-механическое нарушение [6, 7].

Ощутимые размеры нарушения земель вызывают значительное изменение, преобразование природных ландшафтов, резкое ухудшение гидрологического режима, снижение продуктивности земель и т.п.

Подземная разработка рудного сырья также вызывает появление нарушенных земель над горными выработками: на поверхности появляются обрушения, просадки, провалы и т.п.

Устанавливая основные источники горнопромышленно-нарушенных почв, надо особо подчеркнуть, что его последствия естественным путем устраняются очень медленно или практически вовсе не устраняются [7]. Для устранения горно-промышленно нарушенных почв нами ранее на территории Такобского ГОКа было произведено исследование – определение влияние глинования и внесения органики на основные параметры горных коричневых почв Такобского рудного поля (табл. 4). Этот способ рекультивации нарушенных земель в полной мере можно использовать на площади рудного поля Чоре.



Таблица 4

Влияние глинования и внесения органики на основные параметры горных коричневых почв рудного поля Такоб

Показатели	Нарушенная почва	Внесено 50 т/га глины	Внесено 50 т/га глины и 50 т/га навоза
Гумус, %	0.7	0.9	1.2
Физическая глина, %	22.5	37.2	43.5
Объемный вес	1.5	1.4	1.3
Содержание элементов, г/т	As	9.4	8
	Cu	183	107
	Cd	4.3	3.2
	Pb	212	167
	Zn	600	440

При составлении проектов разработки месторождений полезных ископаемых следует особое внимание уделять правильной планировке земель, выбору оптимальной схемы экспликации земель.

Отходы и вскрышные породы карьеров можно использовать как местное сырьё для производства силикатного кирпича, автоклавных бетонов, аглопоритов.

Для успешной рекультивации в условиях проведения горнотехнических работ следует предварительно исследовать состав и свойства почвенного слоя, провести его агрономическую оценку [3,4]. При вскрытии или подземной добыче месторождений следует строго соблюдать меры по захоронению бесплодных и высокотоксичных отвалов [1]. Глубина захоронения при этом зависит от степени вредности отходов и рекомендуется от нескольких см до 5 м. Например, хвосты и отходы ТЗРК, Анзобского ГОКа, содержащие более 1.5% пирита и арсенопирита, рекомендуются возврату на глубину ниже 2.5м с последующим интенсивным известкованием [7]. Существенно улучшают свойства почв также глинование и внесение естественных органических удобрений (табл. 4).

На горнопромышленных территориях для уменьшения степени нарушения почв предлагается ряд конкретных мероприятий:

- использование (внедрение) современной малоотходной и безотходной технологий;

- целенаправленная и планомерная экспликация земель, разумное и целесообразное их использование;

- утилизация отходов, захоронение бесплодных и фитотоксичных (с высоким содержанием тяжелых металлов) пород вскрыши [7]. Проведенные исследования позволили сделать следующие выводы:

- преобразование почвы на горнопромышленных территориях выражается в изменении ее физических (объемная масса, удельная масса, пористость), химических (увеличение содержания солей, тяжелых, щелочных и редких элементов) и биологических (уменьшение содержания гумуса) свойств;

- главными факторами воздействия горнопромышленной деятельности на почвенный слой являются газово-пылевые, водно-эмульсионные и твердые выбросы;

- глинование нарушенных почв горнопромышленной деятельностью способствует улучшению механических и биологических свойств горных коричневых почв и рекомендуется как один из способов восстановления свойств нарушенных почв;

- нетоксичные отходы и вскрышные породы карьеров рекомендуется использовать для нужд местного производства, создавая относительно замкнутые циклы переработки сырья.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Акмуллина Н.В. Радиофобия и проблемы утилизации радиоактивных отходов. – Научно-методический и информационный журнал "Научный центр безопасности жизнедеятельности детей", 2012, 136 с.
2. Беляев А.М. Радиоэкология: Учебное пособие. – М.: Просвещение, 2007, 215 с.
3. ГОСТ 17.4.3.01-83 «Охрана природы. Почвы».
4. ГОСТ 28168 «Почвы. Отбор проб».
5. Валиев Ш.Ф. Изменение вещественного состава почв Таджикистана в связи с горнопромышленной деятельностью и его возможные экологические последствия. Вопросы строения вещества. – Душанбе, 1998, с. 111-116.
6. Валиев Ш.Ф. Распространение почвенного слоя на территории Таджикистана и его изменение при горнопромышленной деятельности. – Деп. в НИИЦентре, № 20 (1406) от 28.06.2001, 12 с.
7. Валиев Ш.Ф., Ниёзов А.С. Развитие горнопромышленно-нарушенных почв в Таджикистане и некоторые пути их восстановления. – Душанбе: Дониш, 2003, 104с.
8. Кутеменский В.Я., Леонтева Р.С. Почвы Таджикистана. Условия образования и география почв. Вып.1. – Душанбе: Ирфон, 1966, 188с.
9. Невской Г.В. Защита окружающей среды от техногенных воздействий. – М.: МГОУ, 1993, 113 с.

Ш.Ф.ВАЛИЕВ, С.НУСРАТУЛЛО

## ТАЪСИРИ ПАРТОВҲОИ ЗАҲРОЛУДИ ДАФНШУДАИ МАЙДОНИ МАЪДАНИИ ЧОРЕ БА МУҲИТИ ГЕОЭКОЛОГИ

*Институти геология, сохтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмологияи*

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақолаи мазкур тағйирёбии қабати гумусноки хок дар минтақаҳои саноати кӯҳии ноҳияи майдони маъдании Чоре мавриди омӯзиш ва баррасӣ қарор гирифтааст; оилҳои таъсири корхонаҳои саноати кӯҳӣ ба қабати гумуснокии хок ошкор карда шудаанд.

**Калимаҳои калидӣ:** фаъолияти саноати кӯҳӣ, партовҳои заҳролуд, дафни партовҳо, майдони Чоре, қабати хок, компоненти муҳити табиӣ, партовҳои саҳт, партовҳои заҳролуди баланд, партовгоҳ.

Sh.F.VALIEV, S.NUSRATULLO

**IMPACT OF BURIED TOXIC WASTE OF THE CHORE ORE FIELD  
ON THE GEOECOLOGICAL ENVIRONMENT**

*Institute of Geology, Earthquake and Seismology National Academy of Sciences of Tajikistan*

The paper examines the transformation of soil in the mining areas of the Chore ore field; the factors affecting the impact of mining enterprises on the soil layer have been identified.

**Key words:** Mining, toxic waste, waste disposal, Chore landfill, soil layer, environmental components, solid emissions, highly toxic waste, tailings.

**Сведения об авторах:**

**Валиев Шариф Файзуллоевич** – доктор геолого-минералогических наук, главный научный сотрудник. E-mail: valiev\_sh@mail.ru;

**Сафари Нусратулло** – Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАН Таджикистана, соискатель. E-mail: safari\_nusratullo@mail.ru.

УДК 620.92

Специальность: 2.4.3 – Электроэнергетика

М.ИЛОЛОВ, Ш.О.КАБИРОВ\*, С.РАСУЛОВ, ДЖ.Ш.РАХМАТОВ, Н.Ш.ЮСУФБЕКОВ

**О ВЫБОРЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРОИЗВОДСТВА ЗЕЛЕННОГО ВОДОРОДА  
В ТАДЖИКИСТАНЕ**

*Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана,  
\*Министерство промышленности и новых технологий Республики Таджикистан*

*Поступила в редакцию 28.06.2023 г.*

*В настоящей работе предлагается концепция промышленного производства зеленого водорода на берегах озера Каракуль (Восточный Памир). Необходимо отметить, что большие объемы и дешевизна должны быть неотъемлемой частью всей концепции.*

**Ключевые слова:** озеро Каракуль, солнечная радиация, электролизёр, водород.

**Введение.** По мнению многих специалистов одним из наиболее перспективных видов синтетического топлива XXI века является молекулярный водород [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Среди его достоинств можно выделить следующие:

1. Высокую энергоёмкость, в расчете на единицу массы энергоёмкость водорода превосходит все виды природного топлива, в том числе природный газ в 2.6 раза, нефть в 3.3 раза, целлюлозу в 8.3 раза;
2. Химико-экологическую чистоту;
3. Единственным продуктом его окисления в любых режимах (при горении или электрохимическом окислении) является вода (окись азота, являющаяся побочным продуктом сгорания водорода в воздухе, образуется в ничтожных количествах);
4. Практически неисчерпаемые запасы дешевого сырья воды, содержащей более 10% (по массе) водорода;
5. Возможность использования топливных элементов.

Реакции окисления водорода и восстановления кислорода воздуха с образованием воды, которые протекают на электродах и приводят к генерации электрического тока, позволяют эффективно доставлять и преобразовывать энергию в удобный для потребления

---

*Адрес для корреспонденции:* Илолов Мамадшо, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана. E-mail: ilolov.mamadsho@gmail.com

электрический вид. Важно, что КПД современных топливных элементов существенно больше КПД любых энергетических систем, основанных на сжигании топлива, и достигает в настоящее время 80%, тогда как КПД дизельных двигателей <30%. Кроме того, водород не только высокоэффективное топливо, но и ценное сырье для всей промышленности.

Водород практически не встречается в природе в чистой форме и должен извлекаться из других соединений с помощью различных химических методов. К ним относятся – паровая конверсия метана и природного газа, газификация угля, электролиз воды, пиролиз, частичное окисление, биотехнологии.

Выбор технологии производства зеленого водорода. Среди способов получения водорода из воды наибольший интерес в контексте водородной энергетики представляет электролиз, термохимические и термо-электрохимические циклы. Метод электролиза является наиболее перспективной технологией получения водорода в будущем, хотя в настоящее время из-за высокой стоимости электроэнергии его доля в мировом производстве водорода не превышает 5% [7]. Наиболее привлекательными особенностями электролизной технологии являются экологическая чистота (разумеется, при условии использования ВИЭ), высокая производительность, простота в эксплуатации и удобство в работе, кроме этого высокая чистота производимого водорода и наличие ценного побочного продукта газообразного кислорода. Метод уже нашел широкое применение в ряде стран, обладающих значительными ресурсами дешевой гидроэнергетики и ресурсами нетрадиционных возобновляемых источников энергии (солнечной, ветровой, геотермальной).

В настоящее время существует три способа электролитического производства водорода, отличающиеся типом электролита и условиями проведения электролиза [2]:

1. Водно-щелочной;
2. Твердый полимерный электролит (ТПЭ);
3. Твердый оксидный электролит.

Все три способа электролитического производства водорода достаточно подробно описаны в многочисленных работах [1,2,8,9], поэтому в данном исследовании мы останавливаемся на публикациях ведущих специалистов, работающих в этом направлении. Согласно [1,2,6,8,9,10] наиболее простым и широко используемым в промышленности известным способом получения водорода является электролиз воды в щелочной среде (25-30% KOH). Этот процесс относительно энергоемок – для получения 1 м<sup>3</sup> водорода и 0.5 м<sup>3</sup> кислорода требуется затратить около 6.2 кВт.ч. электроэнергии [10]. Поэтому для снижения стоимости производимого водорода необходимо использовать дешевую электроэнергию. Такой уникальной возможностью является создание промышленного кластера на базе солнечной электростанции на Восточном Памире у берегов озера Каракуль.

Технико-экономические показатели производства водорода на базе возобновляемых источников энергии (ВИЭ). Предлагаемый энергетическо-промышленный комплекс по производству технологического водорода на берегу озера Каракуль состоит из нижеследующих блоков:

1. СЭС;
2. Завод по производству водорода и подготовке продукции для хранения;

3. Водородные и кислородные хранилища с инфраструктурой для отпуска продукции на рынок.

Необходимо отметить, что каждый блок в отдельности состоит из производственной зоны и системы жизнеобеспечения (водоочистки и водоснабжения, мониторинга, компрессорного хозяйства, освещения, автохозяйства, снабжения и др.).

Вторым по технической значимости для промышленного комплекса является завод по непосредственному производству водорода с помощью электролизеров. Синхронно с ними работают технологические линии по подготовке продукции для хранения. Производство современных электролизеров налажено в США, Японии, Китае, Германии, Италии, Франции, России и Канаде. В некоторых столицах этих государств уже ходят автобусы на водороде, а Исландия практически полностью переходит на водородную энергетику. Водородные двигатели устанавливаются на катера, автомобили, источниками тепла на водороде отапливаются дома. Важно отметить, что годовое потребление ближайшего нашего соседа Китая в настоящее время составляет 40 млн. тонн, а к 2030 году планируют довести потребление водорода до 50 млн. тонн.

Промышленное производство водорода осуществляется как с помощью маломощных электролизёров (10-20 кВт), так и на крупных объектах, обладающих производительностью по водороду 30 тыс. м<sup>3</sup>-ч при мощности электролизных установок мощностью 130 мВт и более.

Индивидуальная мощность каждого электролизера, а также их рабочее количество определяется энергетической возможностью работы солнечной электростанции. Техно-экономические показатели СЭС приведены в табл. 1.

Напомним, что для получения 1 м<sup>3</sup> водорода и 0.5 м<sup>3</sup> кислорода требуется затратить около 6.2 кВт.ч. электроэнергии. При среднегодовом производстве электроэнергии на СЭС в объеме 13 756 270 000 кВт.ч., размер выхода водорода должен составить 2 218 753 225 м<sup>3</sup>, а кислород 1 109 376 612 м<sup>3</sup>.

Таблица 1

Технико-экономические показатели солнечной электрической станции  
на берегу озера Каракуль

№	Показатели	Единицы измерения	Сумма
1.	Установленная мощность	мВт	4 345
2.	Количество солнечных часов в году	час	3 166
3.	Годовое производство электроэнергии	тыс. кВт.ч.	13 756 270
4.	Удельная стоимость инвестиции	\$US./кВт	400
5.	Капиталовложения	тыс. \$US	1 738 000
6.	Эксплуатационные расходы	тыс. \$US	69 520
7.	Себестоимость электроэнергии	цент US	0.50

В данном исследовании для предварительных оценочных расчетов, максимальную мощность электролизёра принимаем 130 мВт, с производительностью 30 тыс. м<sup>3</sup>/ч. Тогда один электролизер за 3 166 солнечных часов в году может производить 94 980 000 м<sup>3</sup> водорода (8 548 тонн). В этом случае количество работающих электролизёров можно определить делением потенциального размера выхода водорода на произведенную продукцию одного агрегата за указанное время работы:

$$N = \frac{W}{E}, \quad (1)$$

где  $N$  – количество электролизёров;  $W$  – объем выхода водорода;  $E$  – норма выхода водорода одного агрегата. Результаты расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2

Технические показатели производства водорода и кислорода

№	Показатели	Единицы измерения	Сумма
1.	Мощность электролизёров	мВт	2 990
2.	Количество солнечных часов в году	Час	3 166
3.	Потенциал годового производства водорода	м <sup>3</sup>	2 218 753 225
4.	Потенциал годового производства кислорода	м <sup>3</sup>	1 109 376 612
5.	Мощность электролизера	мВт	130
6.	Производительность электролизёра	м <sup>3</sup> /час	30 000
7.	Количество электролизеров	шт.	23

Для создания крупномасштабного водородного кластера, нужно иметь технологию электролиза не только инновационную, но и экономически конкурентоспособную. В связи с этим необходимо достоверное понимание затрат на приобретение электролизеров вместе с системами жизнедеятельности последних, что в свою очередь обеспечивает объективность предварительной экономической оценки производства водорода. По прогнозу немецкого Института солнечных энергетических систем, входящего в Общество Фраунгофера, (Fraunhofer ISE), стоимость щелочного электролизера мощностью 100 МВт снизится с 663 (716 долл.) евро/кВт в 2020 году до 444 (479 долл.) евро в 2030 году. В целом ожидается, что к 2030 году общие системные затраты составят 400-500 (432-540 долл.) евро за киловатт у европейских производителей. Обзор цен на китайском рынке показывает стоимость киловатта электролизеров на 20-30% ниже европейских. При предварительной экономической оценке организации кластера по водороду на берегу Каракуль ориентируемся на китайских производителей щелочных электролизеров, куда в основном и планируется экспорт водорода. Хотя рынок зеленого водорода в настоящее время имеет тенденцию к расширению на всех континентах. Например, крупнейшая экономика Европы заключает соглашение о партнерстве с африканской страной. В данном исследовании при оценочных расчетах рассматривается умеренный сценарий. Цена на водородное топливо планируем в 4 доллара США за кг. Хотя в Европе на всех общественных заправочных станциях водорода в Германии цена за 1 кг водорода составляет 9,50 €, а за океаном, в США, обойдётся примерно в 28\$. В табл. 3 приведены результаты прогноза цен на водород, выполненные «Assessment of Hydrogen Production Cost from Electrolysis United States and Europe, ICCT Consultant Report» в 2020 году.

Таблица 3

Прогноз цен на зеленый водород (\$US)

		Год	США	ЕС
Сценарий 1	Медиана	2020	8.81	13.11
		2050	5.77	7.69

	Минимум	2020	6.06	4.83
		2050	4.15	3.21
Сценарий 2	Медиана	2020	10.61	19.23
		2050	5.97	10.02
	Минимум	2020	4.56	4.06
		2050	2.44	2.23
Сценарий 3	Медиана	2020	11.02	10.85
		2050	5.92	6.08
	Минимум	2020	6.1	5.96
		2050	4.75	4.67
Источник: Assessment of Hydrogen Production Cost from Electrolysis United States and Europe, ICCT Consultant Report, 2020				
Информационно-Аналитический центр «Новая Энергетика» <a href="https://reven.ru">https://reven.ru</a>				

Результаты собранной информации по состоянию мировых цен на водород дают основание полагать, что в данном исследовании при экономической оценке допустимо использовать среднее значение 5.0 доллара США за килограмм водорода.

Основные показатели при экономической оценке производства водорода показаны в табл. 4.

Таблица 4

Экономические показатели оценки производства зеленого водорода  
на кластере Каракуль на Восточном Памире

№	Показатели	Единицы измерения	Сумма
1.	Удельная стоимость киловатт мощности электролизёров	\$US	200
2.	Стоимость электролизёров	тыс.\$US	388 700 000
3.	Цена водорода	\$US/кг	5
4.	Произведенная продукция	кг	199 687 790
5.	Предварительный доход	\$US	998 438 951
6.	Эксплуатационные расходы (1.5%)	тыс. \$US	5 830 500
7.	Затраты на использование электроэнергии	\$US	137 562 700
8.	Себестоимость производства водорода	\$US/кг	0.72

Хранение водорода. После передачи водорода из промышленного производства в потребление необходимо запастись им в больших объемах, чтобы цены на водородном рынке не скакали. Между прочим, водородный газ будет храниться долго, поэтому не столько важна скорость закачки/откачки, сколько объём хранилищ.

В настоящее время предлагаются следующие способы хранения водорода, позволяющие обратимо накапливать водород:

1. В сжатом виде под давлением до 700 бар в стальных или композитных баллонах и емкостях;
2. В сжиженном виде в криогенных емкостях при температуре  $-253^{\circ}\text{C}$ ;
3. В химически связанном виде в жидких органических гидридах (LOHC);
4. В обратимо сорбирующих или содержащих в своем составе водород гидридах металлов и сложных сплавах;
5. В химически связанном виде в форме аммиака ( $\text{NH}_3$ ).



Кроме того, сейчас водород закачивают в основном в соляные пещеры, в них он почти не загрязняется примесями. Вторым естественным резервуаром для водорода являются истощённые пласты залежей природного газа или нефти и водоносные горизонты. Они больше соляных пещер, но водород в них сильнее загрязняется, вступая в реакцию с горной породой, микробами, жидкостями [1,2,3,4,5,6,11].

В данном исследовании не рассматриваются подробные технические решения для выбора способа хранения водорода. Такие задачи находят свое решение в разработках ТЭО проектов. В предварительных расчетах для экономической оценки используют нормированную стоимость хранения, она принимается обычно до \$0.6 за кг. Следовательно, окончательное значение эксплуатационных расходов на производство водорода с учетом его хранения составляет следующие затраты:

$$Z_0 = Z_v + Z_3 + Z_x, \quad (2)$$

где  $Z_v$  – затраты на производство водорода;  $Z_3$  – затраты на использование электроэнергии;  $Z_x$  – затраты на хранение.

Таким образом, общие затраты составляют:

$$Z_0 = 5\,830\,500 + 137\,562\,700 + 2\,396\,253 = 145\,789\,453 \text{ долларов США.}$$

С учетом всего себестоимость кластера по производству водорода на берегу озера Каракуль составляет

$$\alpha = \frac{Z_0}{\Pi}, \text{ \$US/кг} \quad (3)$$

где  $\alpha$  – себестоимость продукции,  $\Pi$  – объём годовой продукции,  $Z_0$  – общие эксплуатационные затраты. Отсюда себестоимость продукции равняется

$$\alpha = 0.73, \text{ \$US/кг.}$$

Для сравнения, самую низкую стоимость имеет производство водорода из природного газа 0.9-3.2 долл. США/кг, улавливание  $\text{CO}_2$  удорожает его на 0.6 долл. США/кг и составляет 1.5-3.9 долл. США за кг, дороже всего обходится производство водорода методом электролиза 3-7.5 долл. США/кг.

Отметим, что близкие вопросы рассматривались также в работах [12,13].

**Заключение.** Результаты исследования по созданию кластера для производства технологического (зеленого) водорода на базе использования солнечной энергии на берегу озера Каракуль показали положительный результат. Следовательно, данный проект имеет все основания для реализации. Достаточно отметить, что срок окупаемости проекта составляет 2.4 года. Предварительные результаты показывают на экономическую целесообразность кластера. Он может стать центром производства водорода в Таджикистане и одновременно нуждается в поддержке инвесторов, в первую очередь для разработки предварительного ТЭО.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмедов Х.М., Каримов Х.С. Энергетика, основанная на использовании водорода и топливных элементов. – Душанбе: Дониш, 2018, 160 с.
2. Тарасов Б. П., Лотоцкий М. В. Водородная энергетика: прошлое, настоящее, виды на будущее. – Российский химический журнал (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И.Менделеева), 2006, т. 1, №6, с. 5-18.
3. Да Роза А. Хранение водорода. Возобновляемые источники энергии. Физико-технические основы. /Перевод с англ. Под. ред. С.П.Малышенко и О.С.Попеля/. – М.: Издательский дом МЭИ, 2010, с. 426-436.
4. Радченко Р.В., Мокрушин А.С., Тюль В.В. Водород в энергетике. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2014, 229 с.
5. Полякова Т. В. Состояние и перспективы водородной энергетики в России и в мире. – Аналитическая записка. Центр глобальных проблем ИМИ. – Москва, 2012, 37 с.
6. Да Роза А. Получение водорода. Возобновляемые источники энергии. Физико-технические основы. /Перевод с англ. под. ред. С.П.Малышенко и О.С.Попеля/. – М.: Издательский дом МЭИ, 2010, с. 374-415.
7. Ахмедов Х.М., Каримов Х.С. Энергетика, основанная на использовании водорода и топливных элементов. – Душанбе: Дониш, 2018, 160 с.
8. Камерсоки Д., Корженков Ю. Н. Перспективы электролизного способа получения водорода. – Труды II Международного симпозиума по водородной энергетике. – Москва, 1-2 ноября 2007, с. 162-163.
9. Щелочной электролиз в противовес электролизу с использованием ионно-обменных мембран [Электронный ресурс]. Режим доступа: [www.tech-e.ru](http://www.tech-e.ru).
10. Нормы технологического проектирования производства водорода методом электролиза воды. Комитет Российской Федерации по пищевой и перерабатывающей промышленности. – Москва, 1994.
11. Тарасов Б.П., Володин А.А., Фурсиков П.В., Сивак А.В., Кошин А.М. Водородное резервирование и аккумуляция энергии. – Международный форум «Возобновляемая энергетика». – Москва, 2004, с. 422-429.
12. Ilolov M., Kabirov Sh., Ilolov A.M. On the electrolytic method of producing solar-grade silicon: Innovations and new technologies. – AIP Conference Proceedings. 2018, v.1999, doi: 10. 1063/1. 5049327, p.130008.
13. Ilolov M., Ilolov A., Inagaki F. and Rahmatov J. Stochastic Fractality of the Gilondi Geothermal Reservoir, Proceedings of 48th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering Stanford University, Stanford, California, February 6-8, 2023 SGP-TR-224

М.ИЛОЛОВ, Ш.О.КАБИРОВ\*, С.РАСУЛОВ, Ч.Ш.РАҲМАТОВ, Н.Ш.ЮСУФБЕКОВ  
**ДАР БОРАИ ИНТИХОБИ ТЕХНОЛОГИЯИ ИСТЕҲСОЛИ ҲИДРОГЕНИ  
САБЗ ДАР ТОҶИКИСТОН**

*Маркази рушди инноватсионии илм ва технологияҳои нави  
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,  
\*Вазорати саноат ва технологияҳои нави Ҷумҳурии Тоҷикистон*

Дар мақола концепсияи истеҳсоли саноатии ҳидрогени сабзро дар соҳили кули Қарокул (Помири Шарқӣ) пешниҳод мешавад. Бояд гуфт, ки ҳаҷми калон ва арзиши кам бояд қисми таркибии тамоми концепсия бошад.

**Калимаҳои калидӣ:** кӯлҳои Қарокул, радиатсияи офтоб, электролизер, гидроген.

M.ILOLOV, Sh.O.KABIROV\*, S.RASULOV, J.Sh.RAHMATOV, N.Sh.YUSUFBEKOV  
**ON THE CHOICE OF GREEN HYDROGEN PRODUCTION TECHNOLOGY  
IN TAJIKISTAN**

*Center of Innovative Development of Science and New Technologies,  
National Academy of Sciences of Tajikistan,  
\*Ministry of Industry and New Technologies of the Republic of Tajikistan*

In this paper, we propose a concept for the industrial production of green hydrogen on the shores of Lake Karakul (Eastern Pamir). It should be noted that large volumes and low cost should be an integral part of the whole concept.

**Key words:** Karakul lakes, solar radiation, electrolyzer, hydrogen.

**Сведения об авторах:**

**Мамадшо Илолов** – доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана, заведующий отделом математического моделирования динамических процессов. E-mail: ilolov.mamadsho@gmail.com;

**Шерали Олимович Кабиров** – доктор экономических наук, Министерство промышленности и новых технологий Республики Таджикистан, министр;

**Сабур Расулов** – кандидат экономических наук, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана, ведущий научный сотрудник отдела математического моделирования динамических процессов. E-mail: sabur.rasulov@mail.ru;

**Джамшед Шавкатович Рахматов** – Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана, заместитель директора. E-mail: jamesdoo7@rambler.ru;

**Наримон Шодихонович Юсуфбеков** – Центр инновационного развития науки и новых технологий НАН Таджикистана, научный сотрудник отдела математического моделирования динамических процессов. E-mail: nyusufbekov@mail.ru.

УДК 623.454.862

Специальность: 2.4.9 – Ядерные энергетические установки, топливный цикл,  
радиационная безопасность

М.З.АХМЕДОВ, Х.М.НАЗАРОВ, Б.Д.БОБОЕВ, Ш.А.РАХИМБЕРДИЕВ, Ф.З.ШАФИЕВ,  
И.МИРСАИДЗОДА

**РАДИАЦИОННЫЙ ФОН ИСФАРИНСКОГО РАЙОНА  
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН**

*Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности  
Национальной академии наук Таджикистана*

*Поступила в редакцию 16.05.2023 г.*

*В статье приведены результаты измерения мощности эквивалентной дозы радиационного фона Исфаринского района. Среднее значение мощности эквивалентной дозы радиационного фона составляет 0.21 мкЗв/час. На основании результатов радиационного мониторинга составлена радиационная карта Исфаринского района.*

**Ключевые слова:** мониторинг, мощность эквивалентной дозы, радиационный фон, карта.

Радиационный фон определяется как радиоактивное излучение, присутствующее на Земле от естественных и техногенных источников, в условиях которого постоянно находится человек.

Источниками ионизирующего излучения являются лучи, идущие из космоса, радиоактивность почвы земли, строительные материалы, радионуклиды в воде, в пищевых продуктах и в человеческом организме. Люди и окружающая среда всегда подвержены воздействию ионизирующего излучения из природных источников. Это излучение называется природным (естественным) радиационным фоном.

Излучение радиационного фона постоянно присутствует в естественной среде Земли, которая излучается естественными и иногда искусственными источниками. Естественные природные (естественные) источники излучения - источник ионизирующего излучения природного происхождения, на который распространяется действие норм радиационной безопасности [1].

---

*Адрес для корреспонденции:* Ахмедов Матин Зафарджонович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 33, Агентство по ХБРЯ безопасности НАНТ. E-mail: m.akhmedov@cbrn.tj

Атмосфера Земли составляет в целом тонкий газообразный конверт, который окружает твердые и жидкие поверхности земли. Атмосфера Земли состоит в основном из молекулярного азота и кислорода. Чистый сухой воздух содержит около 78% азота, 21% кислорода, 1% аргона и 0.33% углекислого газа. Кроме того, земная атмосфера содержит водяной пар и твердые частицы (аэрозоли), такие как пыль, капли воды, копоть и лёд, которые сильно различаются [2]. Фактический состав атмосферы изменяется в зависимости от географического положения, высоты и времени года.

Целью данного исследования является изучение радиационной ситуации Исфаринского района и составление радиационной карты.

**Методы исследования.** Для измерения МЭД были использованы дозиметры марки ДКС-96 и ДКС 1126 производства АТОМТЕХ. Исследование проведено в декабре месяца 2020 года. После измерений МЭД усредненные из пяти измеренных значений внесены в таблицу.

Объектом исследования является Исфаринский район. Данный район расположен в предгорьях Туркестанского хребта в Ферганской долине. На севере граничит с Ферганской областью Узбекистана, на юге и востоке – с Баткенской областью Киргизии, на западе – с Канибадамским районом Согдийской области Таджикистана. Население по оценке на 1 января 2019 года составляет 269 500 человек, в том числе городское – в посёлках Нефтебад (4.1 тыс.), Шураб (3.0 тыс.) и Нурафшон (1.6 тыс.) – 4.3% или 8700 человек. [3, 4]. Климат континентальный, жаркое лето и умеренно холодная зима. Температура воздуха в среднем 27°C в июле и 3°C в январе. Среднегодовое количество осадков составляет 200-500 мм. Январские температуры в долинах колеблются около 0°, в высокогорьях опускаются до -27°C, июльские температуры варьируют от 23 до 30°C. Осадков на равнинах выпадает 150-300 мм в год, а выше 1000 м над ур. м. – 700 мм и более (до 3000 мм в высокогорьях) [2-5].

Результаты измерения МЭД исследованных территорий приведены в таблице.

Таблица

Значения МЭД на исследуемых территориях

№	Место измерения	МЭД, мкЗв/час
1.	Город Исфара (центр)	0.21
2.	Рынок города Исфары	0.19
3.	Лицей №1 города Исфара	0.21
4.	Центральная больница	0.20
5.	Сельсовет Шахрак	0.21
6.	Село Чоркишлок	0.22
7.	Школа №16	0.23
8.	Детский сад	0.18
9.	Вокруг села Чоркишлок	0.20

Продолжение таблицы

10.	Село Зумрад	0.21
11.	Село Матбари	0.21
12.	У водоёма села Матбари	0.21
13.	Сельсовет «Навгилем»	0.23

14.	Село Маҳал и вокруг Навгилем	0.22
15.	Село Шўртанг и вокруг него	0.19
16.	Село Кушдевор	0.20
17.	Школа №14	0.20
18.	Медицинский пункт села Кушдевор	0.20
19.	Село Офтобру	0.20
20.	Место землетрясения села Офтобру	0.22
21.	Школа №13	0.22
22.	Сельсовет Кулканд	0.21
23.	У водоёма села Кулканд	0.21
24.	Школа №33	0.22
25.	Сельсовет Чилгази	0.20
26.	Школа №36	0.22
27.	Школа №37	0.22
28.	Село Богистон	0.19
29.	Южная часть Чилгази 6 км от центра	0.28
30.	У водоёма села Сельсовета Чилгази	0.20
31.	Сельсовет Лаккон	0.26
32.	Школа №49	0.20
33.	Село Даҳана и вокруг него	0.30
34.	Сельсовет Шуроб	0.19
35.	Центр Сельсовета Шуроб	0.17
36.	Школа №8	0.20
37.	Школа №3	0.21
38.	Сельсовет Сурх	0.20
39.	Село Нейман	0.20
40.	По улицам села Нейман	0.20
41.	Школа №26	0.20
42.	Школа №28	0.21
43.	Сельсовет Чоркух	0.21
44.	Сельсовет Чоркух и вокруг	0.20
45.	Районная больница №12	0.22
55.	Село Кизилпиллол	0.26
56.	Село Арабкишлоқ	0.24
57.	Село Баланд	0.21
58.	Село Янгиобод	0.24
59.	Село Зархок	0.25
60.	Школа №48	0.24
61.	Школа Нефтобод	0.22
62.	Районная больница №4	0.25
63.	Лицей №41	0.22

В результате проведенного радиационного мониторинга составлена радиационная карта Исфаринского района (рис. 1).

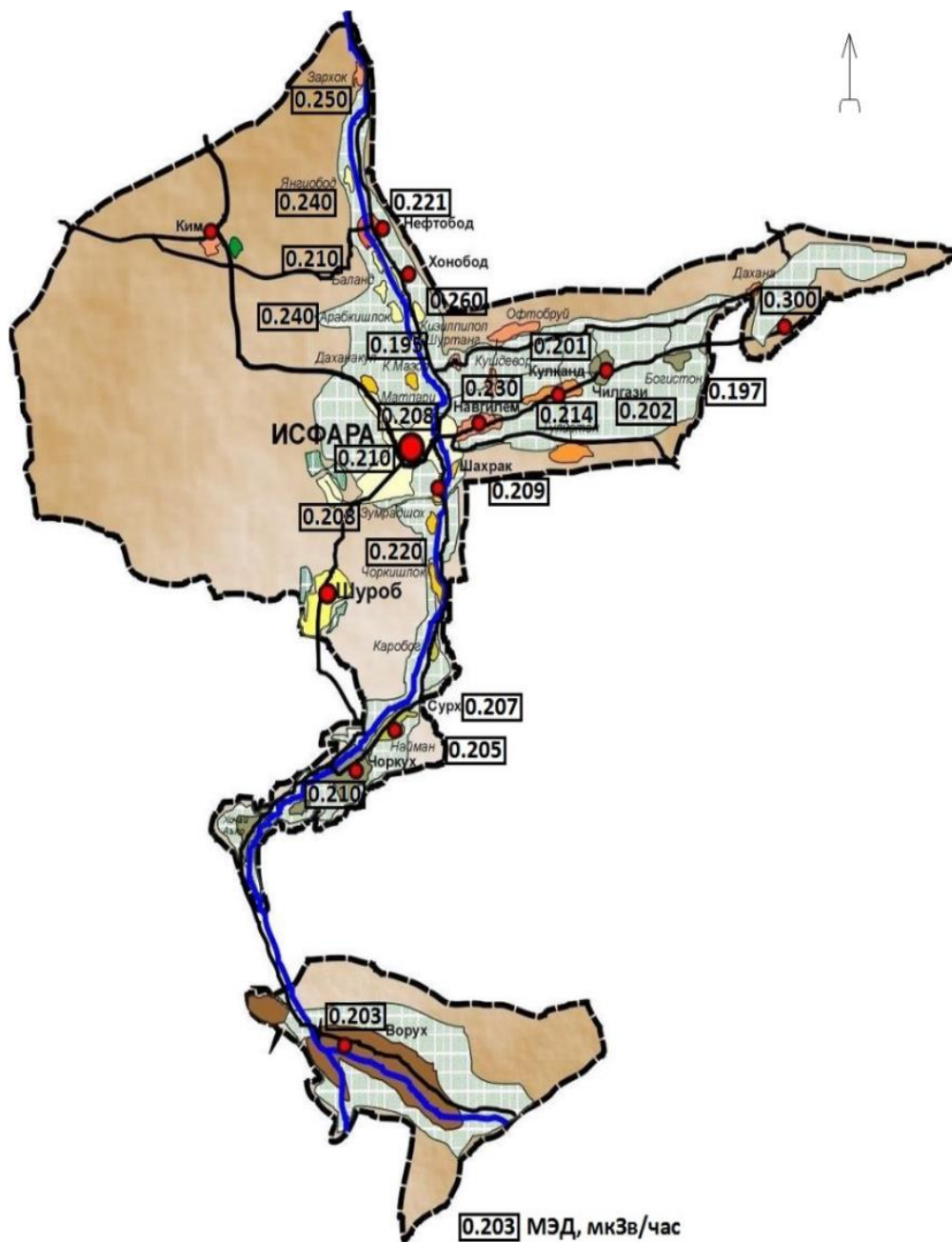


Рис. 1. Радиационная карта Исфаринского района

### Заключение

Среднее значение МЭД радиационного фона для Исфаринского района составляет 0.21 мкЗв/час, что является выше по сравнению с другими районами Согдийской области.

Это связано с горной местностью данного района, что делает вызов дальнейшему изучению существования естественных радионуклидов в составе почвы и их миграцию территории Исфаринского района.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Нормы радиационной безопасности Республика Таджикистан (НРБ-06) СП 2.6.1.001-06. 2006.
2. Aiyeola Oluwafemi Victor. Investigation of impacts of meteorological weather conditions on concentration of particulate matters in an iron smelting plant, in Ile-Ife, South Western Nigeria. – Obafemi Awolowo University, Ile-Ife, Osun-State, Nigeria, 2013.
3. Численность населения Республики Таджикистан на 1 января 2015 года. Сообщение Агентства по статистике при Президенте Республики Таджикистан. – Архивная копия от 2 июля 2015 на Wayback Machine
4. Численность населения Республики Таджикистан на 1 января 2019 года. – Агентство по статистике при Президенте Республики Таджикистан (2019), р. 17.
5. Муртазаев Х., Бобоев Б. Мощность экспозиционной дозы территории Северного Таджикистана. Ученые записки Худжандского Государственного Университета. – Худжанд, 2009, №15, с.18-21.

М.З.АХМЕДОВ, М.НАЗАРОВ, Б.Д.БОБОЕВ, Ш.А.РАХИМБЕРДИЕВ, Ф.З.ШАФИЕВ,  
И.МИРСАИДЗОДА

### ФОНИ РАДИАЦИОНЌ ДАР НОҲИЯИ ИСФАРАИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН

*Агентии амнияти химиявӣ, биологӣ, радиатсионӣ ва ядроии  
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон*

Дар мақола натиҷаҳои ченкунии тавоноии дозаи эквивалентии фони радиатсионӣ дар ноҳияи Исфара оварда шудааст. Қимати миёнаи тавоноии дозаи эквивалентии фони радиатсионӣ 0,21 мкЗв/соат-ро ташкил медиҳад. Аз рӯи натиҷаҳои мониторинги радиатсионӣ харитаи радиатсионии ноҳияи Исфара таҳия карда шудааст.

**Калимаҳои калидӣ:** мониторинг, тавоноии дозаи эквивалентӣ, фони радиатсионӣ, харита.

M.Z.AKHMEDOV, Kh.M.NAZAROV, B.D.BOBOEV, Sh.A.RAKHIMBERDIEV,  
F.Z.SHAFIEV, I.MIRSAIDZODA

### RADIATION BACKGROUND IN THE ISFARA DISTRICT OF THE REPUBLIC OF TAJIKISTAN

*Chemical, Biological, Radiological and Nuclear Safety and Security Agency,  
National Academy of Sciences of Tajikistan*

The article presents the results of measuring the equivalent dose rate of the radiation background of the Isfara region. The average value of the equivalent dose rate of background radiation is 0.21  $\mu\text{Sv/h}$ . Based on the results of radiation monitoring, a radiation map of the Isfara region was compiled.

**Key words:** monitoring, equivalent dose rate, background radiation, map.



**Сведения об авторах:**

**Ахмедов Матин Зафарджонович** – кандидат химических наук, Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана, заместитель директора. E-mail: m.akhmedov@cbrn.tj;

**Назаров Холмурод Марипович** – доктор технических наук, профессор, Филиал Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана в Согдийской области, директор. E-mail: holmurod18@mail.ru;

**Бобоев Бегмурот Дустович** – кандидат химических наук, Филиал Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана, зам. директора. E-mail: begmurot.boboev@mail.ru;

**Рахимбердиев Шукуржон Ахматкулович** – Филиал Агентства по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана в Согдийской области, научный сотрудник. E-mail: alpinist.tj@mail.ru;

**Шафиев Фируз Закирович** – Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана, научный сотрудник. E-mail: f.shafiev@cbrn.tj;

**Мирсаидзода Илхом** – доктор технических наук, Агентство по химической, биологической, радиационной и ядерной безопасности НАН Таджикистана, директор. E-mail: i.mirsaidzoda@cbrn.tj.