

А Х Б О Р И

АКАДЕМИЯИ МИЛЛИИ ИЛМҲОИ ТОЧИКИСТОН

ШУЪБАИ ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА,

ХИМИЯ, ГЕОЛОГИЯ ВА ТЕХНИКА

с. 2024 №3 (196)

ҲАЙАТИ ТАҲРИРИЯ:

Кохирова Г.И. – сармуҳаррир, узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика;
С.А.Исҳоков – муовини сармуҳаррир, узви вобаста, доктори илмҳои физикаю математика,
профессор; **С.Х.Абдулоева** – котиби масъул; **А.Бадалов** – узви вобаста, доктори илми химия,
профессор; **И.Н.Ғаниев** – академик, доктори илми химия, профессор; **А.В.Девяткин** – доктори
илмҳои физикаю математика; **М.И.Илолов** – академик, доктори илмҳои физикаю математика,
профессор; **Ҷ.М.Мирсаидов** – академик, доктори илми химия, профессор; **С.Х.Неъматуллоев** –
академик, доктори илмҳои техника; **Д.Н.Низомов** – узви вобаста, доктори илмҳои техника,
профессор; **Ф.Раҳимӣ** – академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **З.Х.Раҳмонов** –
академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Н.Р.Рачабов** –
академик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор; **Т.Х.Салихов** – доктори илмҳои
физикаю математика, профессор; **А.Р.Файзиев** – узви вобаста, доктори илмҳои геология ва
минералогия, профессор; **Ҷ.Х.Холиқов** – академик, доктори илми химия, профессор; **Ф.Шокир**
– кандидати илмҳои физикаю математика.

Муассис: Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон
Маҷалла аз моҳи январи соли 1952 нашр мешавад.
Дар як сол 4 шумора нашр мешавад.

*Маҷалла ба Рӯйхати маҷаллаҳои азназаргузарони Комиссияи олии аттестатсионии назди
Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон дохил карда шудааст ва Рӯйхати маҷаллаҳо ва
нашрияҳои даврии илмӣ, ки дар онҳо натиҷаҳои асосии рисола барои дарёфти унвони илмии
доктор ва номзади илм, ки аз ҷониби Президиуми Комиссияи олии аттестатсионии Вазорати
маориф ва илми Россия тасдиқ карда шудааст.*

Маҷалла ба шохиси иқтибосоварии илмии Россия (ШИИР) дохил карда шудааст

Мақолаҳо ва эзоҳҳо ба онҳо дар маҷалла ба забонҳои тоҷикӣ,
русӣ ва англисӣ чоп мешаванд.

Шаҳодатнома дар бораи бақайдгирии ташкилотҳое, ки ҳуқуқи нашр, истеҳсол ва
паҳнкунии нашрияҳои ҷопӣ №338/ЖР-97 аз 03.01.2024 с.

Шартномаи литсензионӣ бо Китобхонаи электронии илмӣ (КЭИ) дар бораи дохил кардани маҷалла
ба Шохиси иқтибосоварии илмии Россия (ШИИР) № 311-10/2021 аз 28 октябри соли 2021.

МУНДАРИЧА

МАТЕМАТИКА

- М.Ш.Шабозов, А.Захурбеков.** Оид ба наздиккунии беҳтарини баъзе синфҳои функсияҳои даврии дутағйирёбанда ба воситаи суммаи “доиравии” Фурье дар $L_2(Q)$ 7
- О.А.Чурахонов.** Масъалаи экстремали наздиккунии беҳтарини “кунчи” функсияҳои дифференсиронидашуда дар фазои $L_{2,\mu}(Q)$ 25
- Ч.С.Сафаров, С.С.Қурбоназаров.** Функсияи дудаврдоштаи метааналитикии тартиби сеюм 38
- Ф.М.Шамсудинов, Р.С.Валиев.** Оид ба таҳқиқи як системаи муодилаҳои дифференсиалии барзиёдмуайяншудаи тартиби дуум бо ду хатҳои дохилии сингулярӣ 48
- Р.Н.Одинаев, С.Х.Мавлонзода.** Истифодаи усули аппроксиматсияи Фогел ҳангоми ҳалли масъалаҳои боркашонии нақлиётӣ дар мисоли интиколи борҳои НБО Роғун 60

МАТЕМАТИКА ВА МЕХАНИКА

- И.И.Қаландарбеков.** Хисоби динамикии ром бо методи мутамарказкунонии деформатсияҳо 67

ИНФОРМАТИКА

- Ф.Г.Сафаров.** Таҳлили маълумотҳои матнӣ бо истифодаи зеҳни сунъӣ 75

ФИЗИКА

- Ш.Ф.Мухамедова.** Амсиласозии математикӣ эволютсияи бризерҳои диссипативӣ дар муодилаи скалярии ғайрихаттии Шредингер бо потенциали теладиҳӣ 86

АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Қоҳирова, Е.С.Баканас, А.П.Карташова, Ф.Қ.Раҳматуллоева, В.Пирова.** Таҳлили ғаболияти пеш аз-перигелии кометай гиперболии C/2019 U5 (PANSTARRS) дар соли 2022 97

ХИМИЯИ ОРГАНИКӢ

- Б.Ф.Сафаров, Р.О.Раҳмонов, Ю.Ходжибоев.** Усули муносиб дар синтези ҳосилаҳои 2-бром-5Н-6-(пара-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол 108
- М.Ф.Холиқов, Р.О.Раҳмонов.** Синтези ва таҳқиқи 2-(1,3-диоксоизоиндолин-2-ил) атсетатҳосилаҳои 6-(пара-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол 117

ХИМИЯИ ФИЗИКАВӢ

- Т.М.Умарова, И.И.Насруллоев.** Омӯзиши таъсири ислоҳи хӯлаи саноатии АК7 маводи кремнийдор ба ҷои креминии кристалӣ 126
- В.А.Новоженев, А.Б.Рошқалаева, В.П.Смагин, М.Т.Норова, И.Н.Ганиев, О.В.Белова, И.А.Шмаков.** Синтез ва хусусиятҳои физикию химиявии галлатҳои европий бо сохторҳои перовскит ва гранат 136

- ХРОНИКА** 150

ИЗВЕСТИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ТАДЖИКИСТАНА
ОТДЕЛЕНИЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ, ХИМИЧЕСКИХ,
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

2024 г. №3 (196)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Г.И.Кохирова – главный редактор, член-корреспондент, доктор физико-математических наук; **С.А.Исхоков** – зам. главного редактора, член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **С.Х.Абдулаева** – ответственный секретарь; **А.Бадалов** – член-корреспондент, доктор химических наук, профессор; **И.Н.Ганиев** – академик, доктор химических наук, профессор; **А.В.Девяткин** – доктор физико-математических наук; **М.И.Илолов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **У.М.Мирсаидов** – академик, доктор химических наук, профессор; **С.Х.Негматуллаев** – академик, доктор технических наук; **Д.Н.Низомов** – член-корреспондент, доктор технических наук, профессор; **Н.Р.Раджабов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Ф.Рахими** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **З.Х.Рахмонов** – академик, доктор физико-математических наук, профессор; **Т.Х.Салихов** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор; **А.Р.Файзиев** – член-корреспондент, доктор геолого-минералогических наук, профессор; **Д.Х.Халиков** – академик, доктор химических наук, профессор; **Ф.Шокир** – кандидат физико-математических наук.

Учредитель: Национальная академия наук Таджикистана
Журнал основан в январе 1952 г.
Выходит 4 номера в год

Журнал включён в Список рецензируемых журналов ВАК при Президенте Республики Таджикистан и в Перечень периодических научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора и кандидата наук, утверждённый Президиумом ВАК Минобрнауки России.
Журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)

Статьи и аннотации к ним публикуются в журнале на таджикском, русском и английском языках.

Свидетельство о регистрации организаций, имеющих право на издание, изготовление и распространение печатных изданий №338/ЖР-97 от 01.03.2024 г.
Лицензионный договор с Научной электронной библиотекой (НЭБ) о включении журнала в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) №311-10/2021 от 28.10.2021 г.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- М.Ш.Шабозов, А.Захурбеков.** О наилучших приближениях некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье..... 7
- О.А.Джурахонов.** Решение экстремальных задач наилучшего приближения "углом" для дифференцируемых функций в пространстве $L_{2,\mu}(Q)$ 25
- Д.С.Сафаров, С.С.Курбоназаров.** Метааналитические дwoякопериодические функции третьего порядка 38
- Ф.М.Шамсудинов, Р.С.Валиев.** Об исследовании одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями 48
- Р.Н.Одинаев, С.Х.Мавлонзода.** Применение метода аппроксимации Фогеля при решении транспортных задач на примере грузоперевозок Рогунской ГЭС 60

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

- И.И.Каландарбеков.** Динамический расчёт рам методом сосредоточенных деформаций 67

ИНФОРМАТИКА

- Ф.Г.Сафаров.** Анализ текстовых данных с использованием искусственного интеллекта 75

ФИЗИКА

- Ш.Ф.Мухамедова.** Математическое моделирование эволюции диссипативных бризеров в нелинейном скалярном уравнении Шредингера с отталкивающим потенциалом..... 86

АСТРОНОМИЯ

- Г.И.Кохирова, Е.С.Баканас, А.П.Карташова, Ф.Д.Рахматуллаева, В.Пирова.** Анализ предперигелийной активности гиперболической кометы C/2019 U5 (PANSTARRS) в 2022 г. 97

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Б.Ф.Сафаров, Р.О.Рахмонов, Ю.Ходжибоев.** Новый подход к синтезу производных 2-бром-5Н-6-(*n*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазола 108
- М.Ф.Холиков, Р.О.Рахмонов.** Синтез и исследование 2-(1,3-диоксоизоиндолин-2-ил)-ацетатпроизводных 6-(*para*-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазола 117

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Т.М.Умарова, И.И.Насруллоев.** Исследование влияния модифицирования промышленного сплава АК7 кремнийсодержащим материалом взамен кристаллического кремния 126
- В.А.Новоженков, А.Б.Рошкалаева, В.П.Смагин, М.Т.Норова, И.Н.Ганиев, О.В.Белова, И.А.Шмаков.** Синтез и физико-химические характеристики галлатов европия со структурами перовскита и граната 136

- ХРОНИКА** 150

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF TAJIKISTAN
DEPARTMENT OF PHYSICAL, MATHEMATICAL, CHEMICAL,
GEOLOGICAL AND TECHNICAL SCIENCES

2024 №3 (196)

EDITORIAL BOARD

G.I.Kokhirova Doctor of Physical and Mathematical, Editor-in-Chief; Prof. **S.A.Iskhokov**, Doctor of Physical and Mathematical, Deputy Editor-in-Chief; **S.H.Abdulaeva**, Secretary; Prof. **A.Badalov**, Doctor of Chemistry; **A.V.Devyatkin** – Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **A.R.Faysiev**, Doctor of Geology and Mineralogy; Prof. **M.I.Ilolov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **I.N.Ganiev**, Doctor of Chemistry; Prof. **D.Kh.Khalikov**, Doctor of Chemistry; Prof. **U.M.Mirsaidov**, Doctor of Chemistry; **S.Kh.Negmatullaev**, Doctor of Technical sciences; Prof. **D.N.Nizomov**, Doctor of Technical sciences; Prof. **N.R.Rajabov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **F.Rakhimi**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **Z.Kh.Rakhmonov**, Doctor of Physical and Mathematical; Prof. **T.Kh.Salihov**, Doctor of Technical sciences; **F.Shokir** – Doctor of Physical and Mathematical.

Founder: National Academy of Sciences of Tajikistan

The journal was established in January 1952

4 issues are published per year

The journal is included in the List of peer-reviewed journals of the Higher Attestation Commission under the President of the Republic of Tajikistan and in the List of periodical scientific journals and publications in which the main results of a dissertation for the degree of Doctor of Science and Candidate of Science must be published, approved by the Presidium of the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of Russia.

The journal is included in the database of the Russian Science Citation Index (RSCI)

Articles and abstracts are published in the journal in Tajik, Russian and English languages.

Certificate of registration of organizations entitled to publish, produce and distribute printed publications
No. 338/ZhR-97 dated 01.03.2024.

License agreement with the Scientific Electronic Library (SEL) on inclusion of the journal in the Russian
Science Citation Index (RSCI) No. 311-10/2021 dated 28.10.2021.

CONTENTS

MATHEMATICS

- M.Sh.Shabozov, A.Zahurbekov.** On the best approximations of some classes of periodic functions of two variables by "circular" Fourier sums 7
- O.A.Jurakhonov.** Extreme problems of the best approximation by the "angle" for of differentiable functions in space $L_{2,\mu}(Q)$ 25
- D.S.Safarov, S.S.Kurbonazarov.** Meta-analytical two-period functions third order 38
- F.M.Shamsudinov, R.S.Valiev.** On the study of one overdetermined system of second order differential equations with two internal singular lines 48
- R.N.Odinaev, S.H.Mavlonzoda.** Application of the Vogel approximation method in solving transport problems using the example of cargo transportation at the Rogun HPP 60

MATHEMATICS AND MECHANICS

- I.I.Kalandarbekov.** Dynamic design of frames by the concentrated deformation method 67

INFORMATICS

- F.G.Safarov.** Analysis of text data using artificial intelligence 75

PHYSICS

- Sh.F.Murhamedova.** Mathematical modeling of the evolution of dissipative breathers in the nonlinear scalar Schrödinger equation with repulsive potential 86

ASTRONOMY

- G.I.Kokhirova, E.S.Bakanas, A.P.Kartashova, F.D.Rakhmatullaeva, V.Pirova.** Analysis of the preperigee activity of the hyperbolic comet C/2019 U5 (PANSTARRS) in 2022 97

ORGANIC CHEMISTRY

- B.F.Safarov, R.O.Rakhmonov, Yu.Kodjiboev.** A new approach to the synthesis of 2-bromo-5H-6-(p-tolyl) imidazo[2,1-b][1,3,4]-thiadiazole derivatives 108
- M.F.Kholiqov, R.O.Rakhmonov.** Synthesis and study of 2-(1,3-dioxoisindolin-2-yl)-acetate derivatives of 6-(para-bromophenyl)imidazo[2,1-b][1,3,4]-thiadiazole 117

PHYSICAL CHEMISTRY

- T.M.Umarova, I.I.Nasrulloev.** Study of the effect of modification of industrial alloy AK7 with silicon-containing material instead of crystalline silicon 126
- V.A.Novozhenov, A.B.Roshkolaeva, V.P.Smagin, M.T.Norova, I.N.Ganiev, O.V.Belova, I.A.Shmakov.** Synthesis and physico-chemical characteristics of europium gallates with perovskite and garnet structures 136

- CHRONICLE** 150

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

М.Ш.ШАБОЗОВ, А.ЗАХУРБЕКОВ*

**О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ “КРУГОВЫМИ”
СУММАМИ ФУРЬЕ**

*Национальная академия наук Таджикистана,
Институт математики им. А.Джусраева НАН Таджикистана,
Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана

Поступила в редакцию 09.07.2024г.

В работе найдены точные верхние грани наилучших приближений некоторых классов функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье характеризующихся обобщенным модулем непрерывности в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2(Q)$, $Q = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$. Также найдена точная константа в неравенстве типа Джексона-Стечкина между наилучшим приближением и обобщенным модулем непрерывности в L_2 .

Ключевые слова: комплексный ряд Фурье, обобщенный модуль непрерывности, оператор Лапласа, “круговые” суммы.

1. Постановка задач и предварительные результаты. При изучении прикладных задач математической физики важную роль играют вопросы нахождения точных значений верхних граней наилучших приближений некоторых классов функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье по различным ортогональным системам. Эти вопросы для функции одного переменного достаточно хорошо изучены (см., например, [1] и приведенную там литературу). Аналогичные вопросы для функции двух переменных менее изучены. По приближению функций двух переменных, близких к данной тематике, имеется ряд публикаций [2-12].

Для изложения наших последующих результатов нам понадобятся некоторые предварительные факты и определения.

Адрес для корреспонденции: Шабозов Мирганд Шабозович. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/1, Институт математики НАНТ. E-mail: shabozov@mail.ru.

Напомним, что $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ двух переменных, 2π -периодических по каждой из переменных с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

Пусть функция $f \in L_2$ имеет формальное разложение в двумерный комплексный ряд Фурье

$$f(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} c_{kl}(f) e^{i(kx+ly)}, \quad (1)$$

где коэффициенты $c_{kl}(f)$ определены равенством

$$c_{kl}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+.$$

Применением тождества Парсеваля для функций двух переменных (1), получаем

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_{k,l}(f)|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \rho_{k,l}^2(f), \quad (2)$$

где

$$\rho_{k,l}^2(f) = |c_{k,l}(f)|^2 + |c_{-k,l}(f)|^2 + |c_{k,-l}(f)|^2 + |c_{-k,-l}(f)|^2. \quad (3)$$

Для произвольной $N \in \mathbb{N}$ через

$$S_N(f; x, y) = \sum_{k^2+l^2 \leq N^2} c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)} \quad (4)$$

обозначим “круговые” частичные суммы функции $f \in L_2$. Если через $\mathcal{P}_N, N \in \mathbb{N}$ обозначить множество комплекснозначных полиномов вида

$$p_N(x, y) = \sum_{k^2+l^2 \leq N^2} a_{k,l} e^{i(kx+ly)},$$

то хорошо известно [13, 14], что наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in L_2$ элементами $p_N \in \mathcal{P}_N$ реализует “круговая” частичная сумма (4). При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(f) &:= \inf \{ \|f - p_N\| : p_N \in \mathcal{P}_N \} = \\ &= \|f - S_N(f)\| = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq N^2} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $\mathcal{D} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа второго порядка.

Определим $\mathcal{D}^r := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1})$, $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}^0 := E$. Через $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых существуют частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dots$$

и для которых $\mathcal{D}^r f \in L_2$, то есть $\|\mathcal{D}^r f\| < \infty$. Применив оператор \mathcal{D}^r , $r \in \mathbb{N}$ к ряду (1) в силу линейности оператора и легко проверяемое равенство

$$\mathcal{D}^r (e^{i(kx+ly)}) = (-1)^r (k^2 + l^2)^r e^{i(kx+ly)},$$

находим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^r f(x, y) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{kl}(f) \mathcal{D}^r (e^{i(kx+ly)}) = \\ &= (-1)^r \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (k^2 + l^2)^r c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)}, \end{aligned}$$

а отсюда в силу соотношения (2) запишем

$$\|\mathcal{D}^r f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_{kl}(f)|^2 (k^2 + l^2)^{2r} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f). \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) следует, что

$$\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^r f) = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq N^2} (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

Заметим, что при любом $s = 0, 1, \dots, r$; $r \in \mathbb{Z}_+$ из (7) следует формула

$$\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f) = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq N^2} (k^2 + l^2)^{2s} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (8)$$

В принятых обозначениях справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $N \in \mathbb{R}_+$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^r f)} = \frac{1}{N^{2(r-s)}}. \quad (9)$$

Доказательство. Пользуясь равенством (8) и учитывая формулу (7) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N^2(\mathcal{D}^s f) &= \sum_{k^2+l^2 \geq N^2} (k^2+l^2)^{2s} \rho_{k,l}^2(f) = \\ &= \sum_{k^2+l^2 \geq N^2} (k^2+l^2)^{-2(r-s)} \cdot (k^2+l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) \leq \\ &\leq N^{-4(r-s)} \sum_{k^2+l^2 \geq N^2} (k^2+l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) = N^{-4(r-s)} \mathcal{E}_N^2(\mathcal{D}^r f). \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (9):

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^r f)} \leq \frac{1}{N^{2(r-s)}}. \quad (10)$$

Для получения аналогичной оценки снизу введем в рассмотрение комплекснозначную функцию $f_0(x, y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r)}$, для которой при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $m^2 + n^2 = N^2$, и при любой $s = 0, 1, \dots, r$, $r \in \mathbb{N}$ в силу равенства (8) имеем

$$\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f_0) = (m^2 + n^2)^s = N^{2s}. \quad (11)$$

Пользуясь равенством (11), запишем оценку снизу указанной величины

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^r f)} \geq \frac{\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f_0)}{\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^r f_0)} = \frac{N^{2s}}{N^{2r}} = \frac{1}{N^{2(r-s)}}. \quad (12)$$

Из сопоставления оценки сверху (10) и оценки снизу (12) получаем требуемое равенство (9), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Теорема 2. Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любых $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ справедливо неравенство типа Колмогорова

$$\mathcal{E}_N^2(\mathcal{D}^s f) \leq (\mathcal{E}_N^2(f))^{1-s/r} \cdot (\mathcal{E}_N^2(\mathcal{D}^r f))^{s/r}. \quad (13)$$

Неравенство точно в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Доказательство. В самом деле, применяя неравенство Гельдера для рядов

$$\sum_{k^2+l^2 \geq N^2} |a_{k,l} b_{k,l}| \leq \left(\sum_{k^2+l^2 \geq N^2} |a_{k,l}|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k^2+l^2 \geq N^2} |b_{k,l}|^q \right)^{1/q},$$

полагая $p = \frac{r}{r-s}$, $q = \frac{r}{s}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_N^2(\mathcal{D}^s f) &= \sum_{k^2+l^2 \geq N^2} (k^2+l^2)^{2s} \rho_{k,l}^2(f) = \\
&= \sum_{k^2+l^2 \geq N^2} (\rho_{k,l}^2(f))^{1-s/r} \cdot \left\{ \rho_{k,l}^2(f)(k^2+l^2)^{2r} \right\}^{s/r} \leq \\
&\leq \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq N^2} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1-s/r} \cdot \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq N^2} \rho_{k,l}^2(f)(k^2+l^2)^r \right\}^{s/r} = \\
&= (\mathcal{E}_N^2(f))^{1-s/r} \cdot (\mathcal{E}_N^2(\mathcal{D}^r f))^{s/r},
\end{aligned}$$

откуда и вытекает неравенство (13).

Докажем, что неравенство (13) неулучшаемо. Для этого рассмотрим функцию $f_0(x, y) = e^{i(mx+ny)}$, введенную нами в конце теоремы 1 и для которой при всех $s = 0, 1, 2, \dots, r$ верно равенство (11). Имеем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f_0) &= N^{2s} = (1^2)^{(1-s/r)} \cdot (N^{2r})^{s/r} = \\
&= (\mathcal{E}_N(f_0))^{1-s/r} \cdot (\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^r f_0))^{s/r},
\end{aligned}$$

откуда и следует точность неравенства (13) и теорема 2 доказана.

Пусть теперь $W^{(r)}L_2$ – класс функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых $\|\mathcal{D}^r f\| \leq 1$.

Теорема 3. При всех $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in W^{(r)}L_2} \frac{\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{(\mathcal{E}_N(f))^{1-s/r}} = 1. \quad (14)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in W^{(r)}L_2$, имеем

$$\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^r f) \leq \|\mathcal{D}^r f\| \leq 1,$$

а потому

$$\mathcal{E}_N^2(\mathcal{D}^s f) \leq (\mathcal{E}_N^2(f))^{1-s/r} \cdot (\mathcal{E}_N^2(\mathcal{D}^r f))^{s/r} \leq (\mathcal{E}_N^2(f))^{1-s/r},$$

откуда получаем оценку сверху величины, расположенной в левой части (14):

$$\sup_{f \in W^{(r)}L_2} \frac{\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{(\mathcal{E}_N(f))^{1-s/r}} \leq 1. \quad (15)$$

Чтобы получить аналогичную оценку снизу, введем в рассмотрение функцию $g_0(x, y) = N^{-2r} e^{i(mx+ny)}$, для которой при всех $s = 0, 1, \dots, r$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^s g_0(x, y) &= N^{-2r} (-1)^s (m^2 + n^2)^s e^{i(mx+ny)} \\ \mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s g_0) &= N^{-2(r-s)}, \quad \mathcal{E}_N(g_0) = N^{-2r}. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя равенства (16), запишем

$$\sup_{f \in W^{(r)} L_2} \frac{\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{(\mathcal{E}_N(f))^{1-s/r}} \geq \frac{\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s g_0)}{(\mathcal{E}_N(g_0))^{1-s/r}} = \frac{N^{-2(r-s)}}{N^{-2(r-s)}} = 1. \quad (17)$$

Из неравенств (15) и (17) следует требуемое равенство (14). Теорема 3 доказана.

Имеет место также следующее утверждение

Теорема 4. Пусть $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_N^{(s)}(W^{(r)} L_2) = \sup \left\{ \mathcal{E}_N(f^{(s)}) : f \in W^{(r)} L_2 \right\} = \frac{1}{N^{2(r-s)}}. \quad (18)$$

Доказательство. Из равенства (9) для произвольной функции $f \in W^{(r)} L_2$ получаем

$$\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f) \leq N^{-2(r-s)} \mathcal{E}_N(\mathcal{D}^r f) \leq N^{-2(r-s)}. \quad (19)$$

Для функции $g_0(x, y) = N^{-2r} e^{i(mx+ny)} \in W^{(r)} L_2$, рассмотренной нами выше, для которой $\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s g_0) = N^{-2(r-s)}$, получаем оценку снизу

$$\mathcal{E}_N(W^{(r)} L_2) \geq \mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s g_0) = N^{-2(r-s)}, \quad (20)$$

сравнивая которую с оценкой сверху (19), получаем требуемое равенство (18), чем и завершаем доказательство теоремы 4.

2. Оптимизация неравенства Джексона-Стечкина в $L_2(Q)$. В этом пункте приведём некоторые результаты, связанные с оптимизацией неравенства типа Джексона-Стечкина между величиной наилучшего “кругового” приближения функций $f \in L_2$ и усредненными значениями обобщенного модуля непрерывности, порожденного конкретным оператором обобщенного сдвига. Следуя работе [14], вводим в рассмотрение функцию

$$T(x, u; y, v; h) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-u)} e^{il(y-v)} h^{k^2+l^2}, \quad (21)$$

где $h \in (0,1)$, и сходимость двойного ряда справа понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2(Q \times Q)$. Пользуясь функцией (21), определим оператор $\mathcal{F}_h: L_2 \rightarrow L_2$ по следующей формуле

$$\mathcal{F}_h(f) := \mathcal{F}_h f(x, y) = \iint_{(Q)} f(u, v) T(x, u; y, v; 1-h) du dv, \quad (22)$$

которую назовем оператором обобщенного сдвига.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что оператор (22) обладает следующими свойствами:

1. $\mathcal{F}_h(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}_h(f) + \mu \mathcal{F}_h(g)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in L_2$;
2. $\|\mathcal{F}_h(f)\| \leq \|f\|$;
3. $\|\mathcal{F}_h(f) - f\| \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0+$,
4. $\mathcal{F}_h(e^{i(mx+ny)}) = (1-h)^{n^2+m^2} \cdot e^{i(mx+ny)}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Определим теперь разности первого и высших порядков, как и в классическом случае, следующим образом:

$$\Delta_h f = \mathcal{F}_h f - f = (\mathcal{F}_h - E)f,$$

$$\Delta_h^v f := \Delta_h(\Delta_h^{v-1} f) = (\mathcal{F}_h - E)^v f = \sum_{j=0}^v (-1)^{v-j} \binom{v}{j} \mathcal{F}_h^j(f),$$

где

$$\mathcal{F}_h^0 f = Ef = f, \quad \mathcal{F}_h^j f := \mathcal{F}_h(\mathcal{F}_h^{j-1} f), \quad j = \overline{1, v}; \quad v \in \mathbb{N};$$

E – единичный оператор в пространстве L_2 . Равенством

$$\Omega_v(f, t) := \sup \left\{ \|\Delta_h^v f\| : 0 < h \leq t \right\}, \quad t \in (0,1) \quad (23)$$

определим обобщенный модуль непрерывности функции $f \in L_2$.

Очевидно, что оператор (22) в силу свойств 4 представим в виде

$$\mathcal{F}_h f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{kl}(f) (1-h)^{k^2+l^2} e^{i(kx+ly)}.$$

Пользуясь полученным представлением и равенством (1), запишем

$$\begin{aligned} \Delta_h f &= (\mathcal{F}_h - E)f(x, y) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} ((1-h)^{k^2+l^2} - 1) c_{kl}(f) e^{i(kx+ly)}. \end{aligned}$$

Применяя метод математической индукции, с учетом последнего равенства для любого $\nu \in \mathbb{N}$, получаем

$$\begin{aligned}\Delta_h^\nu f &= (\mathcal{F}_h - E)^\nu f(x, y) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} ((1-h)^{k^2+l^2} - 1)^\nu c_{kl}(f) e^{i(kx+ly)}.\end{aligned}$$

Применяя равенство Парсеваля, отсюда имеем

$$\begin{aligned}\|\Delta_h^\nu f\|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (1 - (1-h)^{k^2+l^2})^{2\nu} c_{kl}^2(f) = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} (1 - (1-h)^{k^2+l^2})^{2\nu} \rho_{kl}^2(f).\end{aligned}$$

Пользуясь этим равенством, в силу (23) найдем явный вид обобщенного модуля непрерывности в L_2 :

$$\Omega_\nu^2(f, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} (1 - (1-t)^{k^2+l^2})^\nu \rho_{kl}^2(f). \quad (24)$$

Теперь заметим, что, как следует из равенств (8) и (5), коэффициенты $\rho_{kl}(\mathcal{D}^r f)$ и $\rho_{kl}(f)$ связаны равенством

$$\rho_{kl}^2(\mathcal{D}^r f) = (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{kl}^2(f).$$

Учитывая это равенство для модуля непрерывности (24), запишем

$$\begin{aligned}\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f, t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} (1 - (1-t)^{k^2+l^2})^\nu \rho_{kl}^2(\mathcal{D}^r f) = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} (1 - (1-t)^{k^2+l^2})^\nu (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{kl}^2(f).\end{aligned} \quad (25)$$

Теорема 5. При любых $\nu, N \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0, 1)$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{N^{2r} \mathcal{E}_N(f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; h)} = \frac{1}{(1 - (1-h)^{N^2})^\nu}. \quad (26)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, для которых $m^2 + n^2 \geq N^2$, $N \in \mathbb{N}$ и $h \in (0, 1)$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
\Omega_v^2(\mathcal{D}^r f, h) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(1 - (1-t)^{k^2+l^2}\right)^{2v} (k^2+l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2 \geq \\
&\geq \sum_{k^2+l^2 \geq N^2} \left(1 - (1-h)^{k^2+l^2}\right)^{2v} (k^2+l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) \geq \\
&\geq \left(1 - (1-h)^{N^2}\right)^{2v} N^{4r} \sum_{k^2+l^2 \geq N^2} \rho_{k,l}^2(f) = \\
&= \left(1 - (1-h)^{N^2}\right)^{2v} N^{4r} \mathcal{E}_N^2(f).
\end{aligned} \tag{27}$$

Отсюда, получаем

$$\mathcal{E}_N(f) \leq N^{-2r} \left(1 - (1-h)^{N^2}\right)^{-v} \Omega_v(\mathcal{D}^r f; h). \tag{28}$$

Из (28) следует оценка сверху экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (26):

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{N^{2r} \mathcal{E}_N(f)}{\Omega_v(\mathcal{D}^r f, h)} \leq \frac{1}{\left(1 - (1-h)^{N^2}\right)^v}. \tag{29}$$

Получим аналогичную оценку снизу для функции $f_0(x) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r)}$, $m^2 + n^2 = N^2$, введенную нами в конце теоремы 1, $\mathcal{E}_N(f_0) = 1$ и в силу (25) имеем

$$\begin{aligned}
\Omega_v(\mathcal{D}^r f_0, h) &= (m^2 + n^2)^r \left(1 - (1-h)^{m^2+n^2}\right)^v = \\
&= N^{2r} \left(1 - (1-h)^{N^2}\right)^v.
\end{aligned} \tag{30}$$

Пользуясь этими равенствами запишем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{N^{2r} \mathcal{E}_N(f)}{\Omega_v(\mathcal{D}^r f, h)} \geq \frac{N^{2r} \mathcal{E}_N(f_0)}{\Omega_v(\mathcal{D}^r f_0, h)} = \frac{1}{\left(1 - (1-h)^{N^2}\right)^v}. \tag{31}$$

Сопоставляя неравенства (29) и (31), получаем (26). Теорема 5 доказана.

Следствие 1. Полагая в условиях теоремы 5, $h = 1/N^2$, $N \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{N^{2r} \mathcal{E}_N(f)}{\Omega_v(\mathcal{D}^r f, 1/N^2)} = \sup_{N \in \mathbb{N}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^{N^2}\right)^v = (1 - e^{-1})^v.$$

Далее под весовой функцией $\mu(x)$ на отрезке $[0,1]$ понимаем неотрицательную суммируемую неэквивалентную нулю на этом же отрезке функцию.

Теорема 6. Пусть $N, \nu \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q < \infty$, $h \in (0,1)$, $\mu(x)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{Q})} \frac{N^{2r} \mathcal{E}_N(f)}{\left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{N^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}. \quad (32)$$

Доказательство. Из неравенства (28), верного для любых $n, m \in \mathbb{N}$, для которых $n^2 + m^2 \geq N^2$, $N, \nu \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $t \in (0,1)$ и любой функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{Q})$, получаем

$$\left(1 - (1-t)^{N^2} \right)^\nu \cdot N^{2r} \mathcal{E}_N(f) \leq \Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; t).$$

Возведем обе части полученного неравенства в степень $q (1 \leq q < \infty)$, умножив на весовую функцию μ , интегрируя по отрезку $[0, h]$, где $h \in (0,1)$ и возведя таким образом полученное неравенство в степень $1/q (1 \leq q < \infty)$, получаем соотношение

$$\begin{aligned} N^{2r} \mathcal{E}_N(f) \cdot \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{N^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{1/q} &\leq \\ &\leq \left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (33)$$

Из неравенства (33) сразу получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (32)

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{Q})} \frac{N^{2r} \mathcal{E}_N(f)}{\left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} &\leq \\ &\leq \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{N^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}. \end{aligned} \quad (34)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу, используем ранее рассмотренную нами функцию $f_0(x) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r)}$, $m^2 + n^2 = N^2$, $m, n, N \in \mathbb{N}$, для которой $\mathcal{E}_N(f_0) = 1$ и справедливо равенство (30), пользуясь которыми запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{Q})} \frac{N^{2r} \mathcal{E}_N(f)}{\left(\int_0^h \Omega_v^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} &\geq \frac{N^{2r} \mathcal{E}_N(f_0)}{\left(\int_0^h \Omega_v^q(\mathcal{D}^r f_0; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} = \\ &= \left(\int_0^h \left[1 - (1-t)^{N^2} \right]^{vq} \mu(t) dt \right)^{-1/q}. \end{aligned} \quad (35)$$

Сравнивая оценку сверху (34) с оценкой снизу (35), получаем требуемое равенство (32) и тем самым теорема 6 доказана.

Следствие 2. В условиях теоремы 6 при $\mu(t) := N^2(1-t)^{N^2-1}$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{Q})} \frac{N^{2(r-1/q)} \mathcal{E}_N(f)}{\left(\int_0^h \Omega_v^q(\mathcal{D}^r f; t) (1-t)^{N^2-1} dt \right)^{1/q}} = \left\{ \frac{vq+1}{\left[1 - (1-h)^{N^2} \right]^{vq+1}} \right\}^{1/q}.$$

В частности, полагая здесь $h = 1/N^2$ и переходя к верхней грани по всем $N \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{Q})} \frac{N^{2(r-1/q)} \mathcal{E}_N(f)}{\left(\int_0^{1/N^2} \Omega_v^q(\mathcal{D}^r f; t) (1-t)^{N^2-1} dt \right)^{1/q}} = \frac{(vq+1)^{1/q}}{(1-e^{-1})^{v+1/q}};$$

2. Наилучшее совместное приближение функций $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{Q})$ и их частных производных “круговыми” суммами Фурье. В предыдущем пункте найдены точные верхние грани наилучших среднеквадратических приближений периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в пространстве $L_2 := L_2(\mathcal{Q})$. Здесь полученные результаты обобщаются на случай совместного приближения функций и промежуточных частных производных “круговыми” суммами Фурье и их частными производными. Справедлива следующая

Теорема 7. При любых $v, N \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и $h \in (0,1)$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{Z}_r}} \frac{N^{2(r-s)} \mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_v(\mathcal{D}^r f; h)} = \frac{1}{\left(1 - (1-h)^{N^2} \right)^v}. \quad (36)$$

Доказательство. В пункте 2 нами доказано, что при любых $v, N \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0,1)$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathfrak{A}_{2,r}}} \frac{N^{2r} \mathcal{E}_N(f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f, h)} = \frac{1}{\left(1 - (1-h)^{N^2}\right)^\nu}.$$

Отсюда для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, для которых $m^2 + n^2 \geq N^2$, $N \in \mathbb{N}$ и $h \in (0, 1)$, получаем неравенство

$$\mathcal{E}_N(f) \leq N^{-2N} \left(1 - (1-h)^{N^2}\right)^{-\nu} \Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; h).$$

Полагая сначала в полученном неравенстве $r = 0$, затем, заменяя f на $\mathcal{D}^r f$, будем иметь

$$\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^r f) \leq \left(1 - (1-h)^{N^2}\right)^{-\nu} \Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; h). \quad (37)$$

Применив к неравенству (37) доказанную в теореме 1 формулу

$$\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f) \leq \frac{1}{N^{2(r-s)}} \cdot \mathcal{E}_N(\mathcal{D}^r f), \quad (38)$$

имеем

$$\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f) \leq N^{-2(r-s)} \cdot \left(1 - (1-h)^{N^2}\right)^{-\nu} \Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; h).$$

Так как полученное неравенство верно для любой функции $f \in L_2^{(r)}$, то из него следует оценка сверху для величины, стоящей в левой части равенства (36):

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathfrak{A}_{2,r}}} \frac{N^{2(r-s)} \mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; h)} \leq \frac{1}{\left(1 - (1-h)^{N^2}\right)^\nu}. \quad (39)$$

Для получения противоположного неравенства используем ранее рассмотренную нами функцию $f_0(x, y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r)}$, для которой имеем

$$\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f_0) = (m^2 + n^2)^{2s} = N^{2s},$$

$$\mathcal{D}_\nu(\mathcal{D}^r f_0, t) = (m^2 + n^2)^{2r} \left(1 - (1-h)^{m^2+n^2}\right)^\nu = N^{2r} \left(1 - (1-h)^{N^2}\right)^\nu.$$

Пользуясь этими равенствами, запишем

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathfrak{A}_{2r}}} \frac{N^{2(r-s)} \mathfrak{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f; h)} &\geq \frac{N^{2(r-s)} \mathfrak{E}_N(\mathcal{D}^s f_0)}{\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f_0; h)} = \\
&= \frac{N^{2(r-s)} \cdot N^{2s}}{N^{2r} (1 - (1-h)^{N^2})^\nu} = \frac{1}{(1 - (1-h)^{N^2})^\nu}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Сопоставляя (39) и (40), получаем требуемое равенство (36), чем и завершаем доказательство теоремы 7.

Теорема 8. Пусть $N, \nu \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $1 \leq q < \infty$, $h \in (0, 1)$, $\mu(x)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathfrak{A}_{2r}}} \frac{N^{2(r-s)} \mathfrak{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} = \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{N^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}. \tag{41}$$

Доказательство. В теореме 6 доказано, что при любых $N, \nu \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q < \infty$, $h \in (0, 1)$, $\mu(x)$ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция, справедливо равенство

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathfrak{A}_{2r}}} \frac{N^{2r} \mathfrak{E}_N(f)}{\left(\int_0^h [1 - (1-t)^{N^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}} &= \\
&= \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{N^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Если в левой части равенства (41) полагать $\mathcal{D}^s f = g$, то в силу линейности оператора \mathcal{D} имеем $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}^{r-s} g$. Это означает, что если $f \in L_2^{(r)}$, то $g \in L_2^{(r-s)}$, а потому, учитывая (42), запишем

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathfrak{A}_{2r}}} \frac{N^{2(r-s)} \mathfrak{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} &= \sup_{g \in L_2^{(r-s)}} \frac{N^{2(r-s)} \mathfrak{E}_N(g)}{\left(\int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^{(r-s)} g; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} = \\
&= \left(\int_0^h [1 - (1-t)^{N^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}.
\end{aligned}$$

Теорема 8 доказана.

Следствие 3. В условиях теоремы 8 при $\mu(t) := N^2(1-t)^{N^2-1}$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{N^{2(r-s-1/q)} \cdot \mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int_0^h \Omega_v^q(\mathcal{D}^r f; t)(1-t)^{N^2-1} dt \right)^{1/q}} = \left\{ \frac{\nu q + 1}{[1 - (1-h)^{N^2}]^{\nu q + 1}} \right\}^{1/q}.$$

В частности, полагая здесь $h = 1/N^2$ и переходя к верхней грани по всем $N \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{N^{2(r-s-1/q)} \cdot \mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int_0^{1/N^2} \Omega_v^q(\mathcal{D}^r f; t)(1-t)^{N^2-1} dt \right)^{1/q}} = \frac{(\nu q + 1)^{1/q}}{(1 - e^{-1})^{\nu + 1/q}}$$

и если в полученном равенстве полагать $q = 1/\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, то имеем

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{N^{2(r-s-\nu)} \cdot \mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int_0^{1/N^2} \Omega_v^{1/\nu}(\mathcal{D}^r f; t)(1-t)^{N^2-1} dt \right)^\nu} = \frac{2^\nu}{(1 - e^{-1})^{2\nu}}.$$

В теореме 4 доказано, что при любых $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ справедливо неравенство (13). Отсюда вытекает, что помимо функций f и $\mathcal{D}^r f$ все остальные промежуточные производные $\mathcal{D}^s f$ ($s = \overline{1, r-1}$) также принадлежат пространству L_2 . Поэтому представляет несомненный интерес изучение поведения величин $\mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f)$ на самом классе $L_2^{(r)}$ или на некотором классе $\mathfrak{M}^r \subseteq L_2^{(r)}$. Таким образом, требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_N^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup \{ \mathcal{E}_N(\mathcal{D}^s f); f \in \mathfrak{M}^{(r)} \}. \quad (43)$$

Пусть $H \in (0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, $\nu, N \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, φ – весовая на $[0, H]$ функция. Через $HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu; \mu)$ обозначим класс, состоящий из функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\int_0^H \Omega_\nu^p(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \leq 1.$$

Теорема 9. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_N^{(s)} \left(HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu; \mu) \right) = N^{-2(r-s)} \left(\int_0^H [1 - (1-t)^{R^2}]^\nu \mu(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (44)$$

Доказательство. Из равенства (42) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ получаем неравенство

$$\mathcal{E}(\mathcal{D}^s f) \leq \frac{1}{N^{2(r-s)}} \cdot \frac{\left(\int_0^H \Omega_\nu^p(\mathcal{D}^r f, t) \mu(t) dt \right)^{1/p}}{\left(\int_0^H [1 - (1-t)^{N^2}]^{\nu p} \mu(t) dt \right)^{1/p}}.$$

Используя определение класса $HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu, \mu)$, получаем

$$\mathcal{E}_N^{(s)} \left(HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu; \mu) \right) \leq N^{-2(r-s)} \left(\int_0^H [1 - (1-t)^{N^2}]^{\nu p} \mu(t) dt \right)^{-1/q} \quad (45)$$

и оценка сверху величины, стоящей в левой части (44), установлена. Для получения оценок снизу на множестве $P_N \cup L_2^{(r)}$ рассмотрим $(N+1)$ -мерный шар

$$\mathcal{B}_{N+1} := \left\{ Q_N \in \mathcal{P}_N : \|Q_N\| \leq N^{-2N} \left(\int_0^H [1 - (1-t)^{N^2}]^{\nu p} \mu(t) dt \right)^{-1/p} \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu; \mu)$. Для произвольного полинома

$$Q_N(x, y) = \sum_{k^2+l^2 < N^2} a_{kl} e^{i(kx+ly)},$$

являющегося элементом шара \mathcal{B}_{N+1} , в силу возрастания элементов $(k^2 + l^2)$ ($k = \overline{0, N-1}, l = \overline{0, N-1}$) и формулы

$$\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(1 - (1-t)^{k^2+l^2} \right)^\nu (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \Omega_\nu(\mathcal{D}^r Q_N, t) &\leq \sum_{k^2+l^2 < N^2} \left(1 - (1-t)^{k^2+l^2} \right)^\nu (k^2 + l^2)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) \leq \\ &\leq \left(1 - (1-t)^{N^2} \right)^\nu \cdot N^{2r} \cdot \|Q_N\|. \end{aligned} \quad (46)$$

Возведя левую и правую части неравенства (46) в степень p , умножая их затем на функцию μ и интегрируя обе части полученного таким образом неравенства по переменной t в пределах от 0 до H , имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^H \Omega_v^p(\mathcal{D}^r Q_N, t) \mu(t) dt \leq \\ & \leq N^{2r} \cdot \|Q_N\| \cdot \int_0^h \left(1 - (1-t)^{N^2}\right)^v \mu(t) dt \leq 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{B}_{R+1} \subset HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_v; \mu)$. Имея ввиду этот факт, рассмотрим следующую функцию

$$f_1(x, y) = N^{-2r} \left(\int_0^h \left[1 - (1-t)^{N^2}\right]^{vp} \mu(t) dt \right)^{-1/p} \cdot e^{i(mx+ny)},$$

где $m^2 + n^2 = N^2, m, n, N \in \mathbb{N}$. Для этой функции при любых $s = 1, 2, \dots, r-1$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^s f_1(x, y) &= N^{-2(r-s)} \cdot \left(\int_0^h \left[1 - (1-t)^{N^2}\right]^{vp} \mu(t) dt \right)^{-1/p} \times \\ & \times (-1)^s (m^2 + n^2)^{2s} \cdot e^{i(mx+ny)}, \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$E_N(\mathcal{D}^s f_1) = N^{-2(r-s)} \cdot \left(\int_0^h \left[1 - (1-t)^{N^2}\right]^{vp} \mu(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (47)$$

Легко проверить, что

$$\int_0^H \Omega_v^p(\mathcal{D}^r f_1, t) \mu(t) dt = 1.$$

Пользуясь равенством (47), запишем оценку снизу указанной величины

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_N(HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_v; \mu)) \geq E_N(\mathcal{D}^s f_1) = \\ & = N^{-2(r-s)} \left(\int_0^h \left[1 - (1-t)^{N^2}\right]^{vp} \mu(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (48)$$

Требуемое равенство (44) следует из сопоставления оценок сверху (45) и снизу (48), чем и завершаем доказательство теоремы 9.

ЛИТЕРАТУРА

1. Керимов М.К., Селимханов Э.В. О точных оценках скорости сходимости рядов Фурье для функций одной переменной в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2016, т.56, №5, с.730-741.
2. Абилов М.В., Айгунов Г.А. Некоторые вопросы приближения функций многих переменных суммами Фурье в пространстве $L_2((a,b)^n; p(x))$. – Успехи матем. наук, 2004, т.59, №6, с.201-202.
3. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2((a,b); p(x))$. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, №6, с.966-980.
4. Абилов В.А., Абилова М.В., Керимов М.К. Некоторые оценки скорости сходимости “сферических” частичных сумм двойного ряда Фурье. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2013, т.53, №8, с.1233-1240.
5. Абилов В.А., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2((a,b) \times (c,d); p(x)q(y))$. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, №8, с.1364-1368.
6. Абилов В.А., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости “гиперболических” частных сумм двойного ряда Фурье по ортогональным многочленам. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2012, т.52, №11, с.1952-2012.
7. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. О точных оценках скорости сходимости двойных рядов Фурье-Бесселя. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2017, т.57, №11, с.1-6.
8. Вакарчук С.Б. О приближении функций двух переменных обобщенными полиномами. – Тр. МИАН СССР, 1987, т.180, с.77-78.
9. Вакарчук С.Б. О приближении дифференцируемых функций многих переменных. – Матем. заметки, 1990, т.48, №3, с.37-44.
10. Вакарчук С.Б., Швачко А.В. Неравенства колмогоровского типа для производных функций двух переменных и их приложение к аппроксимации “углом”. – Изв. вузов. Матем., 2015, №11, с.3-22.
11. Шабозов М.Ш. Ақобиршоев М.О. О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2 . – Чебышевский сборник, 2019, т.20, №2, с.348-365.
12. Shabozov M.Sh., Dzhurakhonov O.A. Upper bounds for approximation of some classes of bivariate functions by triangular Fourier-Hermite sums in the space. – Analysis Mathematica, 2019, v.45, №4, pp.823-840.
13. Абилов В.А., Абилов М.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, т.55, №7, с.1109-1117.
14. Абилова Ф.В., Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье двух переменных и их приложения. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2018, т. 58, №10, с. 1596-1603.

М.Ш.ШАБОЗОВ, А.ЗАХУРБЕКОВ*

**ОИД БА НАЗДИККУНИИ БЕХТАРИНИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ
ФУНКСИЯҲОИ ДАВРИИ ДУТАҒЙИРЁБАНДА БА ВОСИТАИ СУММАИ
“ДОИРАВИИ” ФУРЬЕ ДАР $L_2(Q)$**

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,
Институти математикаи ба номи А. Чураеви АМИ Тоҷикистон,
Донишгоҳи байналмилалӣ сайёҳӣ ва соҳибкорӣ Тоҷикистон

Дар мақола сарҳади саҳеҳи болоии наздиккунии беҳтарини баъзе синфи функсияҳои даврии дутағйирёбанда тавассути суммаҳои “доиравии” Фурье дар фазои гилбертии $L_2:=L_2(Q)$, $Q=\{(x,y):0 \leq x, y \leq 2\pi\}$, ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардасуда тавсиф шудаанд, ёфта шудааст. Инчунин доимии аниқ дар нобаробарии Чексон-Стечкин байни бузургии наздиккунии беҳтарин ва модули бефосилагии умумикардасуда ёфта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: қатори комплекси Фурье, модули бефосилагии умумишуда, оператори Лаплас, суммаи “доиравӣ”.

M.Sh.SHABOZOV, A.ZAHURBEKOV*

**ON THE BEST APPROXIMATIONS OF SOME CLASSES OF PERIODIC
FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY “CIRCULAR” FOURIER SUMS**

*National Academy of Sciences of Tajikistan,
A.Dzhuraev Institute of Mathematics, NAS of Tajikistan,
International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan

In the article the exact upper bounds of the best approximation some classes of two variables by “circular” Fourier sums characterized by a generalized modulus of continuity in the Hilbert space $L_2:=L_2(Q)$, $Q=\{(x,y):0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ are found. Sharp constants in the Jackson-Stechkin type inequality between the best approximations and the generalized modulus of continuity in L_2 are also found.

Key words: complex Fourier series, generalized modulus of continuity, Laplace operator, “circular” sums.

Сведения об авторах:

Шабозов Мирганд Шабозович – академик НАНТ, доктор физ.-мат. наук, Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистаа, главный сотрудник отделения теории функций и функционального анализа. E-mail: shabozov@mail.ru;

Захурбеков Алишер – Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана, ассистент кафедры “Математика в экономике”. E-mail: zahurbekov-a94@mail.ru.

УДК 517.5

Специальность: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

О.А. ДЖУРАХОНОВ

РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ
"УГЛОМ" ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ
 $L_{2,\mu}(Q)$

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 15.07.2024 г.

В работе мы решим ряд экстремальных задач теории среднеквадратического приближения "углом" для дифференцируемых функций $f \in L_{2,\mu}$, причем наилучшее приближение оценивается посредством смешанного обобщенного модуля непрерывности.

Ключевые слова: наилучшие приближения, приближения "углом", модуль непрерывности, неравенство, ортогональные многочлены.

Изложим некоторые предварительные факты. Обозначим через $\mu(t)$ весовую функцию, заданную на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$, которая обращается в нуль лишь на множество меры нуль. Если же интервал (a, b) бесконечен, то кроме этого, должны абсолютно сходиться моменты n -го порядка функции $\mu(t)$.

$$\int_a^b t^n \mu(t) dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

Будем рассматривать весовые функции, являющиеся решениями дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}(A(\mu, t)u) = B(\mu, t)u,$$

Адрес для корреспонденции: Джурахонов Олимджон Акмалович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет.
E-mail: olim1974@mail.ru.

где $A(\mu, t), B(\mu, t)$ – многочлены не выше второй и первой степени соответственно, а также удовлетворяющие на концах интервала (a, b) условиям

$$A(\mu, t)\mu(t)t^k \Big|_{t=a, b} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Классические ортогональные многочлены Лагерра, Эрмита, Якоби удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$D(\mu, t)u = \left(A(\mu, t) \frac{d^2 u}{dt^2} + B(\mu, t) \frac{du}{dt} \right) = -\lambda_n(\mu)u, \quad (1)$$

где

$$\lambda_n(\mu) = -nB'(t) - \frac{1}{2}n(n-1)A''(t).$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mu_1, x) &= A(\mu_1, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B(\mu_1, x) \frac{\partial}{\partial x}, & \mathcal{D}(\mu_2, y) &= A(\mu_2, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B(\mu_2, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ D &= \mathcal{D}(\mu_1, x) + \mathcal{D}(\mu_2, y) \end{aligned} \quad (2)$$

дифференциальные операторы второго порядка.

В силу формулы (1) числа $\lambda_n(\mu), \in \mathbb{Z}_+$ являются собственными значениями оператора $D(\mu, t)$, а соответствующие им собственные функции $u(\mu, t)$ – ортогональными многочленами, соответствующими весовыми функциями. В зависимости от вида функции получаем следующие системы ортогональных полиномов, соответственно, Лагерра, Эрмита, Якоби.

При этом:

Для полиномов Чебышева-Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(t), \quad (a, b) = (0, +\infty), \quad \mu(t) = t^\alpha e^{-t}, \quad \alpha > -1, \quad A(\mu, t) = t,$$

$$B(\mu, t) = 1 + \alpha - t, \quad \lambda_n(\mu) = n.$$

Для полиномов Чебышева-Эрмита

$$H_n(t), \quad (a, b) = (-\infty, +\infty), \quad \mu(t) = e^{-t^2}, \quad A(\mu, t) = 1,$$

$$B(\mu, t) = -2t, \quad \lambda_n(\mu) = 2n.$$

Для полиномов Чебышева-Якоби

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(t), \quad (a, b) = (-1, 1), \quad \mu(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1, \quad A(\mu, t) = 1-t^2,$$

$$B(\mu, t) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)t, \quad \lambda_n(\mu) = n(n + \alpha + \beta + 1).$$

Обозначим через $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}(Q)$, где $Q = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ с весом $\mu := \mu(x, y) = \mu_1(x)\mu_2(y)$ и конечной нормой

$$\|f\|_{2,\mu} := \|f\|_{L_{2,\mu}(Q)} = \left(\iint_Q \mu(x, y) f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

Через $L_{2,\mu}^{(r)} := L_{2,\mu}(\mathcal{D}^r)$ ($r \in \mathbb{Z}_+, L_{2,\mu}^{(0)} \equiv L_{2,\mu}$) обозначим класс функций $f \in L_{2,\mu}$, имеющих обобщенные частные производные

$$\frac{\partial^s f}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i + j = s, \quad s = 1, 2, \dots, 2r, \quad r \in \mathbb{N}$$

в смысле Леви [1] такие, что все они принадлежат пространству $L_{2,\mu}$ и для которых $\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu} < \infty$, где положено, $\mathcal{D}^0 f = f$, $\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$.

Символом $L_{2,\mu_1}[a, b]$ обозначим множество интегрируемых в квадрате с весом μ_1 функций $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Аналогичный смысл имеет пространство $L_{2,\mu_2}[c, d]$. Полагаем, что $\mathfrak{M}_{n+1} \subset L_{2,\mu_1(x)}[a, b]$ и $\mathfrak{N}_{m+1} \subset L_{2,\mu_2(y)}[c, d]$ два конечномерных подпространства с базисами $\{P_k(x)\}_{k=0}^n$ и $\{Q_l(y)\}_{l=0}^m$ соответственно. В пространстве $L_{2,\mu(x,y)}(Q)$, где $\mu(x, y) := \mu_1(x)\mu_2(y)$, рассмотрим множество функций

$$G(\mathfrak{M}_{n+1}, \mathfrak{N}_{m+1}) := L_{2,\mu_2(y)}[c, d] \otimes \mathfrak{M}_{n+1} \oplus L_{2,\mu_1(x)}[a, b] \otimes \mathfrak{N}_{m+1}, \quad (3)$$

где символами " \otimes " и " \oplus " обозначены соответственно операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Элементы множества (3) имеют вид

$$g_{n,m}(x, y) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(y) P_k(x) + \sum_{l=0}^m \psi_l(x) Q_l(y), \quad (4)$$

где $\{\varphi_k(y)\}_{k=0}^n \subset L_{2,\mu_2(y)}[c, d]$ и $\{\psi_l(x)\}_{l=0}^m \subset L_{2,\mu_1(x)}[a, b]$ – произвольные наборы функций из указанных пространств. Функции вида (4) называются квазиполиномами [3] или "углами", составленными из вещественных алгебраических полиномов $\{P_k(x)\}_{k=0}^n$ и $\{Q_l(y)\}_{l=0}^m$.

Для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$ символом $\mathcal{E}_{n,m}(f)_{2,\mu}$ обозначим её наилучшее приближение элементами множества (3) в метрике пространства $L_{2,\mu}(Q)$, то есть полагаем

$$\mathcal{E}_{n,m}(f)_{2,\mu} := \inf \left\{ \|f - g_{n,m}\|_{2,\mu} : g_{n,m} \in G(\mathfrak{M}_{n+1}, \mathfrak{N}_{m+1}) \right\}. \quad (5)$$

Рассмотрим функции

$$T(x, z, h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) P_k(z) h^k, \quad (6)$$

$$T(y, \eta, \tau) = \sum_{l=0}^{\infty} Q_l(y) Q_l(\eta) \tau^l, \quad (7)$$

где $h, \tau \in (0, 1)$, $(x, z) \in [a, b] \times [a, b]$, $(y, \eta) \in [c, d] \times [c, d]$, $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{Q_l(y)\}_{l=0}^{\infty}$ соответственно ортонормированные систем многочленов с весовой функций в пространствах L_{2,μ_1} и L_{2,μ_2} . В соотношении (6) и (7) сходимости порознь каждого из написанного ряда в правой части понимается соответственно в пространствах L_{2,μ_1} и L_{2,μ_2} .

В пространстве $L_{2,\mu}$ рассмотрим следующий оператор [2]

$$F_{h,\tau} f(x, y) = \iint_{(Q)} \mu_1(z) \mu_2(\eta) f(z, \eta) T(x, z; y, \eta; 1-h; 1-\tau) dz d\eta, \quad (8)$$

где $T(x, z; y, \eta; 1-h, 1-\tau) := T(x, z; 1-h) \cdot T(y, \eta; 1-\tau)$, который будем называть оператором обобщенного сдвига. Приведем основные свойства оператора $F_{h,\tau} f(x, y)$:

- 1) для любых $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ и $f, g \in L_{2,\mu}$,
 $F_{h,\tau}(\lambda f + \kappa g) = \lambda F_{h,\tau}(f) + \kappa F_{h,\tau}(g)$;
- 2) $\|F_{h,\tau}(f)\|_{2,\mu} \leq \|f\|_{2,\mu}$;
- 3) $F_{h,\tau} Q_k(x) Q_l(y) P_k(t) P_l(\eta) = (1-h^2)^{k+l} (1-\tau^2)^{k+l} Q_k(x) Q_l(y) P_k(t) P_l(\eta)$;
- 4) $\|F_{h,\tau}(f) - f\|_{2,\mu} \rightarrow 0, h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$.

Символом $F_h^x(f)$ (соответственно $F_\tau^y(f)$, где $|\tau| < 1$) обозначим действие оператора обобщенного сдвига (8), на функцию $f \in L_{2,\mu_1}$ и $f \in L_{2,\mu_2}$, как на функцию f от переменной x (соответственно y) при произвольном, но фиксированном значении другой переменной y (соответственно x). Полагая

$$F_h^{\nu,x}(f) := F_h^{1,x}(F_h^{\nu-1,x}(f)), \text{ где } \nu \in \mathbb{N},$$

$$F_h^{0,x}(f) := f, F_h^{1,x}(f) := F_h^x(f).$$

Аналогично для другой переменной y запишем

$$F_\tau^{s,y}(f) := F_\tau^{1,y}(F_\tau^{s-1,y}(f)), \text{ где } s \in \mathbb{N},$$

$$F_\tau^{0,y}(f) := f, F_\tau^{1,y}(f) := F_\tau^y(f).$$

Теперь определяем обобщенные конечные разности первого и высшего порядков по переменной x и y , используя оператор обобщенного сдвига.

Таким образом, если $f \in L_{2,\mu}$, то полагаем

$$\Delta_h^x(f) := \mathcal{F}_h^x(f) - f = (\mathcal{F}_h^x - \mathbb{I})f,$$

где \mathbb{I} - единичный оператор в пространстве $L_{2,\mu}$. Для $\nu = 2, 3, \dots$ под $\Delta_h^{\nu,x}(f)$ подразумеваем величину:

$$\Delta_h^{\nu,x}(f) := \Delta_h^{1,x}(\Delta_h^{\nu-1,x}(f)) = (\mathcal{F}_h^x - \mathbb{I})^\nu f = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^{\nu-i} \binom{\nu}{i} \mathcal{F}_h^{i,x}(f)$$

где $\Delta_h^{1,x}(f) := \Delta_h^x(f)$.

Аналогичным образом по переменной y получаем

$$\Delta_\tau^y(f) := \mathcal{F}_\tau^y(f) - f = (\mathcal{F}_\tau^y - \mathbb{I})f,$$

$$\Delta_\tau^{s,y}(f) := \Delta_\tau^{1,y}(\Delta_\tau^{s-1,y}(f)) = (\mathcal{F}_\tau^y - \mathbb{I})^s f = \sum_{j=0}^s (-1)^{s-j} \binom{s}{j} \mathcal{F}_\tau^{j,y}(f),$$

где $s = 2, 3, \dots$; $\Delta_\tau^{1,y}(f) := \Delta_\tau^y(f)$. Для функции $f \in L_{2,\mu}$ теперь определим обобщенную смешанную конечную разность первого порядка по переменной x и первого порядка по переменной y :

$$\Delta_h^x(\Delta_\tau^y(f)) := \mathcal{F}_h^x(\mathcal{F}_\tau^y(f)) - \mathcal{F}_h^x(f) - \mathcal{F}_\tau^y(f) + f = (\mathcal{F}_h^x - \mathbb{I})(\mathcal{F}_\tau^y - \mathbb{I})f.$$

При этом, очевидно, $\Delta_h^x(\Delta_\tau^y(f)) = \Delta_\tau^y(\Delta_h^x(f))$.

Для обобщенных смешанных конечных разностей высших порядков имеем

$$\begin{aligned} \Delta_h^{\nu,x}(\Delta_\tau^{s,y}(f)) &= \Delta_h^{1,x}(\Delta_h^{\nu-1,x}(\Delta_\tau^{s,y}(f))) = \Delta_\tau^{1,y}(\Delta_\tau^{s-1,y}(\Delta_h^{\nu,x}(f))) = \\ &= (\mathcal{F}_h^x - \mathbb{I})^\nu (\mathcal{F}_\tau^y - \mathbb{I})^s f = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{j=0}^s (-1)^{\nu+s-i-j} \binom{\nu}{i} \binom{s}{j} \mathcal{F}_h^{i,x} (\mathcal{F}_\tau^{j,y} (f)), \quad (9)$$

где $(\nu, s) \in \mathbb{N}^2 \setminus (1, 1)$, $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \otimes \mathbb{N}$; $\Delta_h^{1,x} := \Delta_h^x, \Delta_\tau^{1,y} := \Delta_\tau^y, \Delta_h^{0,x} = \Delta_\tau^{0,y} := \mathbb{I}$. Отметим, что

$$\Delta_h^{\nu,x} (\Delta_\tau^{s,y} (f)) = \Delta_\tau^{s,y} (\Delta_h^{\nu,x} (f)).$$

Величину

$$\Omega_{\nu,s}(f; t, u)_{2,\mu} := \sup_{|h| \leq t, |\tau| \leq u} \left\| \Delta_h^{\nu,x} (\Delta_\tau^{s,y} (f)) \right\|_{2,\mu}, \quad (10)$$

где $t, u \in (0, 1)$ будем называть обобщенным смешанным модулем непрерывности функции $f \in L_{2,\mu}$.

Используя свойству оператора обобщенного сдвига (8) и формулы (9) получаем

$$\begin{aligned} & \Delta_h^{\nu,x} (\Delta_\tau^{s,y} (f); x, y) = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{\nu+s} c_{kl} (f) \left((1-h)^k - 1 \right)^\nu \left((1-\tau)^l - 1 \right)^s P_k(x) Q_l(y). \end{aligned}$$

Отсюда применяя равенство Парсеваля запишем

$$\begin{aligned} & \left\| \Delta_h^{\nu,x} (\Delta_\tau^{s,y} (f); \cdot, \cdot) \right\|_{2,\mu}^2 = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl}^2 (f) \left(1 - (1-h)^k \right)^{2\nu} \left(1 - (1-\tau)^l \right)^{2s} \end{aligned}$$

и в силу (10) получаем явный вид обобщенного смешанного модуля непрерывности функции $f \in L_{2,\mu}$.

$$\Omega_{\nu,s}^2 (f; t, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl}^2 (f) \left(1 - (1-t)^k \right)^{2\nu} \left(1 - (1-u)^l \right)^{2s}. \quad (11)$$

В работе [2], для коэффициентов $c_{kl} (f)$ произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ доказана формула

$$c_{kl} (f) = \frac{(-1)^r}{(\lambda_k(\mu_1) + \lambda_l(\mu_2))^r} c_{kl} (D^r f), \quad (12)$$

где $D = \mathcal{D}(\mu_1, x) + \mathcal{D}(\mu_2, y)$ – выше определенный в (2) дифференциальный оператор второго порядка.

Из (12) следует, что

$$c_{kl}(D^r f) = (-1)^{-r} (\lambda_k(\mu_1) + \lambda_l(\mu_2))^r c_{kl}(f),$$

используя который из (11) получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{v,s}^2(D^r f; t, u) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl}^2(D^r f) (1-(1-t)^k)^{2v} (1-(1-u)^l)^{2s} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl}^2(f) (\lambda_k(\mu_1) + \lambda_l(\mu_2))^{2r} (1-(1-t)^k)^{2v} (1-(1-u)^l)^{2s}. \end{aligned} \quad (13)$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, v, s \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq v$, $n \geq s$ и $t, u \in (0, 1)$. Тогда для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1, m-1}(f)_{2,\mu} &= (\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^{-r} \times \\ &\times (1-(1-t)^n)^{-v} (1-(1-u)^m)^{-s} \Omega_{v,s}(D^r f; t, u)_{2,\mu} \end{aligned} \quad (14)$$

причем константу в правой части неравенства (14) уменьшить нельзя.

Доказательство. Учитывая, что последовательность собственных значений $\{\lambda_k(\mu_1)\}_{k=0}^{\infty}, \{\lambda_l(\mu_2)\}_{l=0}^{\infty}$ являются монотонно возрастающими и выражения $(1-(1-t)^k)^v$ и $(1-(1-u)^l)^s$ при всех $t, u \in (0, 1)$, фиксированных $v, s \in \mathbb{N}$, при любых $k \geq n$ и $l \geq m$ тоже возрастают, оценим обобщенный смешанный модуль непрерывности $\Omega_{v,s}(D^r f; t, u)$ снизу. Из (13) получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{v,s}^2(D^r f; t, u)_{2,\mu} &\geq \\ &\geq \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (\lambda_k(\mu_1) + \lambda_l(\mu_2))^{2r} c_{kl}^2(f) (1-(1-t)^k)^{2v} (1-(1-u)^l)^{2s} \geq \\ &\geq (\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^{2r} (1-(1-t)^n)^{2v} (1-(1-u)^m)^{2s} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}^2(f) = \\ &= (\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^{2r} (1-(1-t)^n)^{2v} (1-(1-u)^m)^{2s} \mathcal{E}_{n-1, m-1}^2(f)_{2,\mu}, \end{aligned} \quad (15)$$

откуда сразу следует требуемое неравенство (14). Докажем неулучшаемость неравенство (14). Для этого введем в рассмотрение функцию

$$f_0(x, y) = P_n(x) \cdot Q_m(y),$$

где $P_n(x)$ – n -й член ортонормированной системы $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, а $Q_m(y)$ – m -й член ортонормированной системы $\{Q_l(y)\}_{l=0}^{\infty}$. Для этой функции в силу равенства

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu} := \|f - \sigma_{n-1,m-1}(f)\|_{2,\mu} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} c_{kl}^2(f) \right\}^{1/2}, \quad (16)$$

где $\sigma_{n-1,m-1}(f; x, y)$ квазиполином Фурье функции $f \in L_{2,\mu}$ порядка $(n-1, m-1)$ по переменным x и y , имеем

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}^2(f)_{2,\mu} := \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} c_{kl}^2(f).$$

из (16) и (13) получаем

$$\mathcal{E}_{n-1,m-1}^2(f_0)_{2,\mu} := 1, \quad (17)$$

$$\Omega_{v,s}(D^r f_0; t, u)_{2,\mu} = (\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^r \left(1 - (1-t)^n\right)^v \left(1 - (1-u)^m\right)^s, \quad (18)$$

а потому запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu} &= 1 = (\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^{-r} \left(1 - (1-t)^n\right)^{-v} \left(1 - (1-u)^m\right)^{-s} \times \\ &\times (\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^r \left(1 - (1-t)^n\right)^v \left(1 - (1-u)^m\right)^s = \\ &= (\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^{-r} \left(1 - (1-t)^n\right)^{-v} \times \\ &\times \left(1 - (1-u)^m\right)^{-s} \Omega_{v,s}(D^r f_0; t, u)_{2,\mu}, \end{aligned} \quad (19)$$

откуда и следует неулучшаемость неравенства (14). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^r \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_{v,s}(D^r f; t, u)_{2,\mu}} &= \\ &= \frac{1}{\left(1 - (1-t)^n\right)^v \left(1 - (1-u)^m\right)^s}. \end{aligned} \quad (20)$$

В частности, полагая в (20) $t = 1/n, u = 1/m, m, n \in \mathbb{N}$, будем иметь

$$\begin{aligned}
& \sup_{m,n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^r \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_{v,s}(D^r f; 1/n, 1/m)_{2,\mu}} = \\
& = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right)^v \left(1 - \left(1 - \frac{1}{m} \right)^m \right)^s = (1 - e^{-1})^{v+s}.
\end{aligned}$$

Доказательство. В самом деле, с одной стороны из неравенства (15) следует, что

$$\begin{aligned}
& \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^r \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_{v,s}(D^r f; t, u)_{2,\mu}} \leq \\
& \leq \frac{1}{\left(1 - (1-t)^n \right)^v \left(1 - (1-u)^m \right)^s}, \tag{21}
\end{aligned}$$

а с другой стороны, пользуясь равенством (19), будем иметь

$$\begin{aligned}
& \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^r \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_{v,s}(D^r f; t, u)_{2,\mu}} \geq \\
& \geq \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^r \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f_0)_{2,\mu}}{\Omega_{v,s}(D^r f_0; t, u)_{2,\mu}} = \\
& = \frac{1}{\left(1 - (1-t)^n \right)^v \left(1 - (1-u)^m \right)^s}. \tag{22}
\end{aligned}$$

Требуемое равенство (20) следует из сопоставления неравенств (21) и (22). Следствие 1 доказано.

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq \infty$, $r, v, s \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq v$, $n \geq s$, $h \in (0, 1)$, $\tau \in (0, 1)$, $\mu_1(t), \mu_2(u)$ – весовые на отрезке $(0, 1)$ функции. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned}
& \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^r E_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ \int_0^\tau \int_0^h \Omega_{v,s}^p(D^r f, t)_{2,\mu} \mu_1(t) \mu_2(t) dt du \right\}^{\frac{1}{p}}} = \\
& = \left\{ \int_0^h \left(1 - (1-t)^n \right)^{vp} \mu_1(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\tau \left(1 - (1-u)^m \right)^{sp} \mu_2(u) du \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{23}
\end{aligned}$$

Доказательство. Из неравенства (15) для произвольной $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ ($\mu := \mu_1 \cdot \mu_2$) получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{v,s} \left(D^r f; t, u \right)_{2,\mu} &\geq \left(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2) \right)^r \left(1 - (1-t)^n \right)^v \times \\ &\times \left(1 - (1-u)^m \right)^s \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}. \end{aligned} \quad (24)$$

Обе части неравенства (24) возведем в степень p ($0 < p \leq \infty$) и умножим на $\mu_1(t) \cdot \mu_2(u)$. Полученное неравенство интегрируем по прямоугольнику $[0, \tau] \times [0, h]$ ($0 < \tau, h < 1$) и возведем в степень $1/p$ ($0 < p \leq \infty$), в итоге получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^\tau \int_0^h \Omega_{v,s}^p \left(D^r f; t, u \right)_{2,\mu} \mu_1(t) \mu_2(t) dt du \right\}^{\frac{1}{p}} &\geq \left\{ \int_0^h \left(1 - (1-t)^n \right)^{vp} \mu_1(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}} \times \\ &\times \left\{ \int_0^\tau \left(1 - (1-u)^m \right)^{sp} \mu_2(u) du \right\}^{\frac{1}{p}} E_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}. \end{aligned} \quad (25)$$

Так как неравенство (25) справедливо для любой функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, то из него вытекает оценка сверху для экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (23):

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\left(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2) \right)^r E_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ \int_0^\tau \int_0^h \Omega_{v,s}^p \left(D^r f; t, u \right)_{2,\mu} \mu_1(t) \mu_2(u) dt du \right\}^{\frac{1}{p}}} &\leq \\ &\leq \left\{ \int_0^h \left(1 - (1-t)^n \right)^{vp} \mu_1(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\tau \left(1 - (1-u)^m \right)^{sp} \mu_2(u) du \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Чтобы получить оценку снизу величины (23), рассмотрим ранее рассмотренную функцию $f_0(x, y) = P_n(x) \cdot Q_m(y)$, для которой в силу (17) и (18) получаем:

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\left(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2) \right)^r \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ \int_0^\tau \int_0^h \Omega_{v,s}^p \left(D^r f; t, u \right)_{2,\mu} \mu_1(t) \mu_2(u) dt du \right\}^{\frac{1}{p}}} \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^r \mathcal{E}_{n-1, m-1}(f_0)_{2, \mu}}{\left\{ \int_0^{\tau h} \int_0^h \Omega_{v, s}^p(D^r f_0; t, u)_{2, \mu} \mu_1(t) \mu_2(u) dt du \right\}^{\frac{1}{p}}} = \\
&= \left\{ \int_0^h (1 - (1-t)^n)^{vp} \mu_1(t) dt \right\}^{-\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{\tau} (1 - (1-u)^m)^{sp} \mu_2(u) du \right\}^{-\frac{1}{p}}. \quad (27)
\end{aligned}$$

Требуемое неравенство (23) вытекает из сопоставления оценки сверху (26) и оценки снизу (27), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Из доказанной теоремы вытекают ряд следствий

Следствие 2. В условиях теоремы 2 при $\mu_1(t) = n(1-t)^{n-1}$, $\mu_2(u) = m(1-u)^{m-1}$ имеет место равенство:

$$\begin{aligned}
&\sup_{f \in L_{2, \mu}^{(r)}} \frac{(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^r \mathcal{E}_{n-1, m-1}(f)_{2, \mu}}{\left\{ nm \int_0^{\tau h} \int_0^h \Omega_{v, s}^p(D^r f, t)_{2, \mu} (1-t)^{n-1} (1-u)^{m-1} dt du \right\}^{\frac{1}{p}}} = \\
&= \left\{ \frac{(vp+1)(sp+1)}{(1-(1-h)^n)^{vp+1} (1-(1-u)^m)^{sp+1}} \right\}^{-1/p}. \quad (28)
\end{aligned}$$

Из равенства (28), в частности, при $h=1/n$, $u=1/m$, $s=v=1/p$, $r \geq m, n$ и $r, m, n, N \in \mathbb{N}$, вытекает экстремальное равенство

$$\begin{aligned}
&\sup_{m, n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_{2, \mu}^{(r)}} \frac{(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^r \mathcal{E}_{n-1, m-1}(f)_{2, \mu}}{\left\{ nm \int_0^{\tau h} \int_0^h \Omega_{v, s}^p(D^r f, t)_{2, \mu} (1-t)^{n-1} (1-u)^{m-1} dt du \right\}^{\frac{1}{p}}} = \\
&= \sup_{m, n \in \mathbb{N}} \left\{ 4 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right)^{-2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{m} \right)^m \right)^{-2} \right\}^{-1/p} = \left\{ \frac{4}{(1-e^{-1})^4} \right\}^{-1/p}.
\end{aligned}$$

Следствие 3. В условиях теоремы 2 при $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 1$, $s=v=1/p$, имеет место равенство:

$$\sup_{f \in L_{2, \mu}^{(r)}} \frac{(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^r \mathcal{E}_{n-1, m-1}(f)_{2, \mu}}{\left\{ \int_0^{\tau h} \int_0^h \Omega_{v, s}^p(D^r f, t)_{2, \mu} dt du \right\}^{\frac{1}{p}}} =$$

$$= \left(\left(h + \frac{(1-h)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \left(\tau + \frac{(1-\tau)^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1} \right) \right)^{-1/p}. \quad (29)$$

Из равенства (29), в частности, при $h = \frac{1}{n+1}, \tau = \frac{1}{m+1}$ получаем

$$\sup_{m,n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(\lambda_n(\mu_1) + \lambda_m(\mu_2))^r \mathcal{E}_{n-1,m-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ (1+n)(1+m) \int_0^{\tau} \int_0^h \Omega_{v,s}^p(D^r f, t)_{2,\mu} dt du \right\}^{\frac{1}{p}}} = e^{2/p}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969.
2. Абилов В.А., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, т. 55, №7, с. 1109-1117.
3. Брудный Ю.А. Приближение функций n переменных квазимногочленами. – Изв. АН СССР. Серия: Математика. 1970, т. 34, №3, с. 564-583.
4. Джурахонов О.А. О точных неравенствах типа Джексона-Стечкина в гильбертовом весовом пространстве $L_{2,\mu}(\mathbb{Q}^2)$. – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2020, №1(178), с. 16-28.
5. Шабозов М.Ш., Джурахонов О.А. Точные неравенства типа Колмогорова в весовом пространстве $L_{2,p}(\mathbb{R}^2)$ и некоторые их применения. – Проблемы вычислительной и прикладной математики 2019, №2(20), с.79-87.

О.А.ЉЎРАХОНОВ

МАСЪАЛАИ ЭКСТРЕМАЛИИ НАЗДИККУНИИ БЕХТАРИНИ "КУНЧИИ" ФУНКСИЯҲОИ ДИФФЕРЕНСИРОНИДАШУДА ДАР ФАЗОИ $L_{2,\mu}(\mathbb{Q})$

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола, сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини "кунчи" барои синфҳои функсияҳои дифференсиронидашуда $L_2^{(r)}(D)$ муайян карда шудаанд ва наздиккунии беҳтарин тавассути модули бефосилагии умумикардасудаи ҳисоб карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: наздиккунии беҳтарини "кунҷӣ", полиномҳои ортогоналӣ, нобаробариҳо, модули бефосилагӣ, бисераъзоги ортогоналӣ.

O.A.JURAKHONOV

**EXTREME PROBLEMS OF THE BEST APPROXIMATION BY THE "ANGLE"
FOR OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS IN SPACE $L_{2,\mu}(Q)$**

Tajik National University

In work we will solve extreme problems theory of mean-square approximation by "angle" for differentiable classes functions $L_2^{(r)}(D)$ and the best approximation is estimated by generalized modulus continuity.

Key words: approximations by "angle", orthogonal polynomials, inequality, modulus of continuity, orthogonal polynomials.

Сведения об авторе:

Джурахонов Олимджон Акмалович – Таджикский национальный университет.
E-mail: olim1974@mail.ru.

УДК 517.946

Специальность: 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Д.С.САФАРОВ, С.С.КУРБОНАЗАРОВ

МЕТААНАЛИТИЧЕСКИЕ ДВОЙКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава

Поступила в редакцию 09.07.2024 г.

В работе для уравнения метааналитических функций третьего порядка на плоскости найдены условия существования двойкопериодических решений с заданными основными периодами h_1, h_2 , $h_2 \operatorname{Im}(h_2/h_1) \neq 0$, и получены формулы представления решения.

Ключевые слова: метааналитическая функция, двойкопериодическая функция, фундаментальная система решений.

На комплексной плоскости \mathbb{C} рассмотрим эллиптическую систему с оператором Коши-Римана [1-3]

$$Lw \equiv \partial_{\bar{z}}^3 w + a(z) \partial_{\bar{z}}^2 w + b(z) \partial_{\bar{z}} w + e(z) w = f(z), \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $\partial_{\bar{z}}^k = \partial_{\bar{z}} (\partial_{\bar{z}}^{k-1})$, $a(z), b(z), e(z), f(z)$ – заданные двойкопериодические функции с основными периодами h_1, h_2 , $\operatorname{Im}(h_1/h_2) \neq 0$
 $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – искомая функция с периодами h_1, h_2 .

Решение однородного уравнения (1) в любой области G комплексной плоскости \mathbb{C} называется метааналитической функцией [1, 2].

Уравнение вида

$$Lw = \frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} + a_1 \frac{\partial^{n-1} w}{\partial \bar{z}^{n-1}} + a_2 \frac{\partial^{n-2} w}{\partial \bar{z}^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a_n w = 0 \quad (2)$$

Адрес для корреспонденции: Сафаров Джумабой, Курбоназаров Султон Санджаршоевич. 735140, Республика Таджикистан, г. Бохтар, ул. Айни, 67. Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава. E-mail: safarov-5252@mail.ru, sulton31-1992@mail.ru.

впервые рассматривал Г.В.Колосов [1]. Для решения таких уравнений в предположении достаточной гладкости коэффициентов (a_1, a_2, \dots, a_n) , Г.В.Колосов предложил определенный алгоритм, суть которого сводится к тому, чтобы рассматривать переменное \bar{z} как независимое от z , а затем решать уравнение (2) как обыкновенное линейное дифференциальное уравнение.

В работе [3] Ю.С.Мелеин обосновал алгоритм Колосова и нашел диапазон его применимости.

Уравнение (2) изучено в работах Балка М.Б. [2, 4], Жегалева В.И. [5], Раджабова Н.Р. [16], Ошорова Б.Б. [17], Сафарова Д.С., Саидназарова Р.Б. [8, 9, 14, 15].

Следует заметить, что теория обыкновенного линейного дифференциального уравнения не может быть дословно перенесена для уравнения (2). В частности, известная теорема о том, что вронсиан решений или тождественно равен нулю или не обращается в нуль, не имеет места. В работе Жегалева В.И. приведен пример, подтверждающий это утверждение.

В случае, когда коэффициенты $a_1(\bar{z}, z), a_2(\bar{z}, z), \dots, a_n(\bar{z}, z)$ – аналитические функции переменных $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ в работе [5] доказано, что для вронсиана решений уравнения (2) имеет место формула Остроградского-Лиувилля

$$B(z) = W(\bar{z}, z) = W(\bar{z}_0, z) \exp \left[- \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} a_1(t, z) dt \right], \quad (3)$$

где W – вронсиан, составленный из n аналитических решений уравнения (2).

Также показано, что фундаментальная система аналитических решений уравнения (2) существует.

Задача существования и нахождения двоякопериодических решений для неоднородного уравнения (2), как в регулярном смысле, так и обобщенном смысле Векуа, исследована в работах Сафарова Д.С. и Саидназарова Р.С. [8, 9, 14, 15].

В случае, когда в уравнении (2) коэффициенты $a_1(\bar{z}, z), a_2(\bar{z}, z), \dots, a_n(\bar{z}, z)$ двоякопериодические с периодами $h_1, h_2, \operatorname{Im}(h_2 / h_1) > 0$ непрерывны по Гельдеру в параллелограмме периодов Ω , содержащий начало координат, определитель Вронского $B(z) = W(\bar{z}, z)$ составленный из n -решений уравнения (2) из класса C_*^n [8], удовлетворяет уравнению

$$B_{\bar{z}} + a_1(z) B(z) = 0. \quad (4)$$

Как показано в [7], всякое решение уравнения (4) из класса C_*^1 представимо в виде

$$B(z) = W(\bar{z}, z) = \begin{cases} c \exp[\Gamma_\zeta a_1(z) + bz] a_1^0 \in \Gamma, \\ 0, \text{ если } a_1^0 \notin \Gamma, \end{cases}$$

где c – постоянная. Γ – решетка периодов

$$\Gamma = \{m_1, h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}$$

$$a_1^0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a_1(t) d_t \Omega,$$

$\zeta(z)$ – дзета-функция Вейерштрасса [13] и постоянное b вместе с a_1^0 – решение уравнения $\exp[\eta_1 a_1^0 + b h_1] = \exp[\eta_2 a_1^0 + b h_2] = 1$, $\eta_j = 2\zeta(h_j/2)$, $j = 1, 2$, циклические постоянные.

В работе [11] для уравнения (1), при наличии трехфундаментальной системы решений, в классе двоякопериодических функций найдены решения неоднородного уравнения (3) в классе C_*^3 .

В данной работе мы дадим описание ядра и коядра задачи нахождения двоякопериодических решений, в случае, когда $b(z) \equiv \lambda^2$, $\lambda - \text{const}$, $d(z) = \lambda^2 a(z)$, то есть для уравнения частного вида

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + a(z) w_{\bar{z}} + \lambda^2 w_{\bar{z}} + \lambda^2 a(z) w = f(z), \quad (5)$$

где λ – некоторый параметр.

Легко заметить, что если $\varphi(z)$ решение уравнения

$$\varphi_{\bar{z}} + a(z) \varphi = f(z), \quad (6)$$

то функция $w = w(z)$ как решение уравнения

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + \lambda^2 w(z) = \varphi(z), \quad (7)$$

удовлетворяет уравнению (5).

Все решения уравнений (6), (7) найдены в работах [7-10].

В предположениях $a(z), f(z) \in H_*^\alpha, H_*^\alpha$ – класс двоякопериодических и непрерывных по Гельдеру функций с показателем $\alpha \in (0, 1)$, все решения уравнения (6) как в обобщенном так и в регулярном смысле Векуа найдены в работах [7, 10]. Регулярные решения – функции из класса C_*^1 (без полюсов).

Разрешимость уравнения (6) зависит от свойства числа a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega \in \Gamma \text{ или } a_0 \bar{\in} \Gamma,$$

где Γ – решетка периодов $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 - \text{целые}\}$.

Рассмотрим случай $a^0 \bar{\in} \Gamma$. В этом случае уравнение (6) при любой правой части $f(z) \in H_*^\alpha$ имеет, притом, единственное решение вида [7]

$$\varphi(z) = e^{-T_\sigma a(z)} T_\sigma \left(f(z) e^{T_\sigma a(z)} \right) = F(z), \quad (8)$$

где $T_\sigma \rho(z)$ – интегральный оператор вида

$$T_\sigma \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t-z-a_0)}{\sigma(-a_0)\sigma(t-z)} dt d\Omega,$$

здесь $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ соответственно дзета- и сигма-функций Вейерштрасса, построенные на периодах h_1, h_2 , причем $\sigma'(z) = -\zeta(z)\sigma(z)$. Функции $g_1(z) = T_\sigma a(z)$, $g_2(z) = T_\sigma \rho(z)$ удовлетворяют условиям [7, 10]

$$g_1(z+h_j) = g_1(z) + \eta_j a_0, \quad j=1,2 \quad (g_1)_{\bar{z}} = a(z),$$

$$g_2(z+h_j) = e^{-\eta_j a_0} g_2(z), \quad j=1,2 \quad (g_2(z))_{\bar{z}} = \rho(z),$$

η_1, η_2 – циклические постоянные $\eta_j = 2\zeta(h_j/2)$, $j=1,2$, вместе с периодами h_1, h_2 связаны соотношением Лежандра $\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i$.

Подставляя функцию $F(z)$ в правой части (7), для нахождения решения уравнения (1), получим уравнение

$$w_{\bar{z}} + \lambda^2 w(z) = F(z). \quad (9)$$

Как показано в [8, 17], разрешимость уравнения (9) зависит от свойства числа λ : $\lambda \in \Gamma_1$ или $\lambda \bar{\in} \Gamma_1$, $\Gamma_1 \subset \mathcal{C}$, Γ_1 – решетка вида

$$\Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} \{m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 - \text{целые}\},$$

$$\Omega_0 = \text{mes} \Omega = |h_1|^2 \text{Im}(h_2/h_1) > 0.$$

а) Предположим, что $\lambda \bar{\in} \Gamma_1$.

Как показано в работе [8], в этом случае уравнение (6) при любой функции $F(z) \in C_*^1$ имеет единственное решение и оно представимо в виде

$$w(z) = e^{dz} T_\sigma^1(F(t)e^{-dt}) + e^{-dz} T_\sigma^2(F(t)e^{dt}), \quad (10)$$

здесь $T_\sigma^1 \rho(z), T_\sigma^2 \rho(z)$ – соответственно интегральные операторы вида

$$T_\sigma^1 \rho(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t-z-\Delta)}{(-\Delta)\sigma(t-z)} d_i \Omega, \quad \Delta \in \Gamma,$$

$$T_\sigma^2 \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t-z+\Delta)}{\sigma(\Delta)\sigma(t-z)} d_i \Omega, \quad \Delta \in \Gamma,$$

где постоянные d и Δ – решение системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} dh_1 + \Delta \eta_1 &= \lambda \bar{h}_1 + i2\pi m, \\ dh_2 + \Delta \eta_2 &= \lambda \bar{h}_2 + i2\pi n, \end{aligned} \right\}$$

m, n – некоторые целые числа.

Эта система благодаря соотношению Лежандра $\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i$ имеет единственное решение

$$d = -\frac{\lambda}{2\pi i} (\bar{h}_1 \eta_2 - \bar{h}_2 \eta_1) - m \eta_2 - n \eta_1; \quad \Delta = \frac{\lambda \Omega_0}{\pi} + m h_2 - n h_1,$$

так как $\lambda \in \Gamma_1$, то $\Delta \in \Gamma$.

Таким образом справедлива

Теорема 1. Пусть в уравнении (1) $a(z), f(z) \in H_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ и $b(z) = \lambda^2, e(z) = \lambda^2 a(z)$ $a_0 \in \Gamma$, Γ – решетка периодов. Тогда при $\lambda \in \Gamma_1$, Γ_1 – решетка вида $\Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} \Gamma = \frac{\pi}{\Omega_0} \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}$ $\Omega_0 = \text{mes} \Omega$, однородное уравнение (1) имеет лишь нулевое решение. Неоднородное уравнение имеет, притом, одно единственное решение вида (10).

б) Рассмотрим случай, когда $\lambda \in \Gamma_1$, это означает, что $\frac{\lambda \Omega_0}{\pi} \in \Gamma$.

В этом случае, как показано в [8], однородное уравнение (9) имеет два решения

$$\mathcal{G}_1(z) = \exp(\lambda \bar{z} - \bar{\lambda} z), \quad \mathcal{G}_2(z) = \exp(-\lambda \bar{z} + \bar{\lambda} z). \quad (11)$$

Для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия

$$\iint_{\Omega} F(z) \mathcal{G}_1(z) d\Omega = 0, \quad \iint_{\Omega} F(z) \mathcal{G}_2(z) d\Omega = 0, \quad (11')$$

При этом решение уравнения (1), из класса C_*^3 , представимо в виде

$$w(z) = c_1 \mathcal{G}_1(z) + c_2 \mathcal{G}_2(z) + \frac{\mathcal{G}_1}{2a} T_{\zeta} (F(z) \mathcal{G}_2(z)) - \frac{\mathcal{G}_2}{2a} T_{\zeta} (F(z) \mathcal{G}_1(z)), \quad (12)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Таким образом справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\lambda \in \Gamma_1$. Тогда однородное уравнение (5) имеет два решения $\mathcal{G}_1(z)$ и $\mathcal{G}_2(z)$, а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (11). При этом решение уравнения (1), из класса C_*^3 , представимо в виде (12), в котором c_1, c_2 – произвольные постоянные, а $\mathcal{G}_1(z)$, $\mathcal{G}_2(z)$ и $F(z)$ соответственно имеет вид (8) и (11).

2) Теперь находим решение уравнения (1) при $a_0 \in \Gamma$.

При $a_0 \in \Gamma$ однородное уравнение (6) имеет решение вида

$$\mathcal{G}_0(z) = \exp(-T_{\zeta} a(z) + dz),$$

где постоянное d вместе с a_0 удовлетворяет системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 a_0 + dh_1 &= 2\pi im, \\ \eta_2 a_0 + dh_2 &= 2\pi in \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

m, n – некоторые целые числа.

Система уравнений (13) в силу соотношения Лежандра $\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i$ имеет единственное решение

$$a_0 = mh_2 - nh_1, \quad d = -m\eta_2 + n\eta_1.$$

Функция $\mathcal{G}_0(z) \in C_*^1$, и согласно результатам работы [7], [12] при выполнении условия

$$\iint_{\Omega} f(z) \mathcal{G}_0^{-1}(z) d\Omega = 0, \quad (14)$$

из уравнения (6) находим

$$\varphi(z) = c\mathcal{G}_0(z) + \mathcal{G}_0(z)T_\zeta(f(z)\mathcal{G}_0^{-1}(z)),$$

где c – произвольная постоянная .

Подставляя значение $\varphi(z)$ в уравнение (7) для нахождения решения уравнения (5), получим

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + \lambda^2 w(z) = c\mathcal{G}_0(z) + F_1(z), \quad (15)$$

где c – постоянная и через $F_1(z)$ обозначено

$$F_1(z) = \mathcal{G}_0(z)T_\zeta(f(z)\mathcal{G}_0^{-1}(z)), \quad (15')$$

причём $\mathcal{G}_0(z), F_1(z) \in C^1_*$.

Как выше, решение уравнения (15) находим в случае: $\lambda \in \Gamma_1$ и $\lambda \bar{\in} \Gamma_1$.

Согласно результатам теоремы 1 при $\lambda \bar{\in} \Gamma_1$ уравнение (15) при любой правой части имеет только одно единственное решение, причем решение однородного уравнения (2) получается из решения уравнения

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + \lambda^2 w(z) = c\mathcal{G}_0(z). \quad (16)$$

Поэтому справедлива следующая

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $a_0 \in \Gamma$. Тогда при $\lambda \bar{\in} \Gamma_1$ однородное уравнение (5) имеет одно решение, в классе C^3_* , вида

$$w_0(z) = c \left[e^{dz} T_\sigma^1(\mathcal{G}_0(t)e^{-dt}) + e^{-dt} T_\sigma^2(\mathcal{G}_0(t)e^{dt}) \right] \quad (17)$$

где c – произвольная постоянная.

Неоднородное уравнение разрешимо лишь при выполнении условия (14), и решение уравнения (5) представимо в виде

$$w(z) = w_0(z) + w_1(z),$$

где $w_1(z)$ частное решение неоднородного уравнения

$$w_1(z) = e^{dz} T_\sigma^1(F_1(t)e^{-dt}) + e^{-dt} T_\sigma^2(F_1(t)e^{dt}),$$

где $F_1(t)$ имеет вид (15'), а интегральные операторы как в теореме 1 и постоянные d, Δ – те же, как в формуле (10).

Пусть теперь $\lambda \in \Gamma_1$. Тогда как выше однородное уравнение имеет два решения вида (11), $\mathcal{G}_1(z)$ и $\mathcal{G}_2(z)$.

Для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\iint_{\Omega} (c\mathcal{G}_0(z) + F_1(z))\mathcal{G}_1(z)d\Omega = 0, \quad \iint_{\Omega} (c\mathcal{G}_0(z) + F_1(z))\mathcal{G}_2(z)d\Omega = 0,$$

или

$$c \iint_{\Omega} \mathcal{G}_0(z)\mathcal{G}_1(z)d\Omega + \iint_{\Omega} F_1(z)\mathcal{G}_1(z)d\Omega = 0, \quad (18)$$

$$c \iint_{\Omega} \mathcal{G}_0(z)\mathcal{G}_2(z)d\Omega + \iint_{\Omega} F(z)\mathcal{G}_2(z)d\Omega = 0. \quad (19)$$

В этих равенствах возможны случаи:

$$B = \left| \iint_{\Omega} \mathcal{G}_0(z)\mathcal{G}_1(z)d\Omega \right| + \left| \iint_{\Omega} \mathcal{G}_0(z)\mathcal{G}_2(z)d\Omega \right| = 0, \quad (20)$$

или

$$B \neq 0. \quad (21)$$

При выполнении условия (20), то есть $B = 0$, уравнение (1) разрешимо, если выполнены условия (14) и

$$\iint_{\Omega} F(z)\mathcal{G}_1(z)d\Omega = 0, \quad \iint_{\Omega} F(z)\mathcal{G}_2(z)d\Omega = 0. \quad (22)$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $a_0 \in \Gamma$ и $\lambda \in \Gamma_1$. Тогда при выполнении условия $B = 0$, то есть условия (22)

$$\iint_{\Omega} \mathcal{G}_0(z)\mathcal{G}_1(z)d\Omega = 0, \quad \iint_{\Omega} \mathcal{G}_0(z)\mathcal{G}_2(z)d\Omega = 0,$$

где $\mathcal{G}_0(z)$ – решение однородного уравнения (6), а $\mathcal{G}_1(z)$, $\mathcal{G}_2(z)$ – решения однородного уравнения (9) или (15), однородное уравнение (1) имеет три решения вида

$$w_0(z) = c_1\mathcal{G}_1(z), \quad w_1(z) = c_2\mathcal{G}_2(z),$$

$$w_2(z) = c\mathcal{G}_1 \frac{1}{2\lambda} T_{\zeta}(\mathcal{G}_0\mathcal{G}_2) - c\mathcal{G}_2 \frac{1}{2\lambda} T_{\zeta}(\mathcal{G}_0\mathcal{G}_1),$$

здесь c_1, c_2, c – произвольные постоянные.

Неоднородное уравнение (1) разрешимо лишь при выполнении условий (14) и (22).

При этом решение уравнения (1) представимо в виде

$$w(z) = w_0(z) + w_1(z) + w_2(z) + w_3(z), \quad (23)$$

здесь $w_3(z)$ – частное решение неоднородного уравнения

$$w_3(z) = \frac{\mathfrak{g}_1(z)}{2\lambda} T_\zeta(F_1(z)\mathfrak{g}_2(z)) - \frac{\mathfrak{g}_2(z)}{2\lambda} T_\zeta(F_1(z)\mathfrak{g}_1(z)).$$

В случае $B \neq 0$, то есть условия (21), постоянное c можно определить из уравнения (18), (19). Тогда однородное уравнение (1) имеет два решения, а для разрешимости неоднородного уравнения должны выполняться условие (14) и ещё одно условие, вытекающее из условия (18), (19) при $B \neq 0$.

Решение уравнения запишется в виде (23), в котором постоянное c уже найдено из равенств (18), (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Колосов Г.В. О сопряженных дифференциальных уравнениях в частных производных. Тр. электротехнического инст. – Петроград, 1914, №11, с. 179-199.
2. Балк М.Б., Зуев М.Ф. О полианалитических функциях. – Успехи математических наук. 1970, т. XXV, вып. 5 (155), с. 203-226.
3. Балк М.Б., Зуев М.Ф. О метааналитических функциях. – Учен. зап. СГПИ, 1970, вып. 25.
4. Малейн Ю.С. Строение решений некоторых уравнений с оператором Коши-Римана. – Матем. анализ и теория функций. – М., 1974, №3, с.172-178.
5. Жегалов В.И. Об одном обобщении полианалитических функций. – Тр. семинара по краевым задачам. – Казань: изд-во КГУ, 1975, вып. 12, с. 50-57.
6. Зуев М.Ф. К теоремам единственности для метааналитических функций. – Смоленский матем. сб., 1969, вып. 2, с.54-59.
7. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции. – ДАН ТаджССР. 1981, т.24, №9, с. 535-538.
8. Сафаров Д.С. Обобщенные двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка. – ДАН РТ, 2013, т. 56, №10, с. 779-788.
9. Сафаров Д.С., Саидназаров Р.С. Двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем высокого порядка. – ДАН РТ, 2014, т. 57, №5, с. 363-370.
10. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения. Издание второе. доп. – Бохтар, 2021, 235с.
11. Сафаров Д.С., Курбоназаров С.С. Двоякопериодические регулярные решения уравнения метааналитических функции третьего порядка. – Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава, 2021, №2/4(93), с.5-9.
12. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции. – Дифференц. уравнения, 1991, т.27, №4, с.656-664.
13. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970, 304 с.

14. Саидназаров Р.С. Двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка. – Вестник ТНУ, 2015, №1/1(156), с. 8-16.
15. Саидназаров Р.С. О многообразии двоякопериодических решений одной эллиптической системы второго порядка. – Вестник ТНУ, 2015, №1/1(156), с. 47-53.
16. Раджабов Н.Р., Расулов А. Интегральные представления и граничные задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений высшего порядка [Текст]. Н.Р. Раджабов. – ДАН СССР, 1985, т.282, №4, с. 795-799.
17. Ошоров Б.Б. О корректности краевых задач для эллиптических систем уравнений первого и второго порядка. – Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 245-246.

Ҷ.С.САФАРОВ, С.С.ҚУРБОНАЗАРОВ

ФУНКСИЯИ ДУДАВРДОШТАИ МЕТААНАЛИТИКИИ ТАРТИБИ СЕЮМ

Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н.Хусрав

Дар қор барои муодилаҳои функсияҳои метааналитикии тартиби сеюм дар ҳамворӣ, шартҳои мавҷудияти ҳалҳои дудаврдошта бо дода шудани даврҳои асосии h_1, h_2 , $h_2 \text{Im}(h_2/h_1) \neq 0$, ёфта шуда ва формулаҳои тасвири ҳалли он ҳосил карда шудааст.

Калимаҳои калиди: функсияи метааналитикӣ, функсияҳои дудаврдошта, ҳалли системаҳои фундаменталӣ.

D.S.SAFAROV, S.S.KURBONAZAROV

META-ANALYTICAL TWO-PERIOD FUNCTIONS THIRD ORDER

Bokhtar State University named after N.Khusrav

In this paper, for the equation of third-order meta-analytic functions on the plane, conditions found the existence of doubly periodic solutions with given main periods h_1, h_2 , $h_2 \text{Im}(h_2/h_1) \neq 0$ and formulas for represent the solution are obtained.

Key words: meta-analytic function, doubly periodic function, fundamental decision system.

Сведения об авторах:

Сафаров Джумабой – доктор физико-математических наук, Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений. E-mail: safarov-5252@mail.ru;

Қурбоназаров Султон Санджаршоевич – докторант PhD, Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава. E-mail: sulton31-1992@mail.ru.

УДК 517.955

Специальность: 01.01.02. Дифференциальные уравнения, динамические системы,
оптимальное управление

Ф.М.ШАМСУДИНОВ, Р.С.ВАЛИЕВ

**ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ СИСТЕМЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ
ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ**

Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава

Поступила в редакцию 03.07.2024 г.

В работе рассматривается система из трёх дифференциальных уравнений, которая содержит одно линейное гиперболическое уравнение второго порядка и два дифференциальных уравнения первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями. Эти уравнения связаны между собой при помощи неизвестной функции.

Для рассматриваемой переопределённой системы получены представления многообразия решений в явном виде, когда коэффициенты первого, второго и третьего уравнения системы связаны между собой определённым образом. Изучены свойства полученных решений, а также рассмотрены задачи с начальными данными.

Ключевые слова: переопределённая система, многообразия решений, прямоугольник, сингулярные линии, свойства решений, задачи с начальными данными.

Пусть $D = \{(x, y) : -a < x < a, 0 < y < a\}$,

$$\Gamma_1 = \{y = 0, -a < x < a\}, \Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < a\}.$$

Далее обозначим

$$\Gamma_1^0 = \{y = x, 0 \leq x \leq a\}, \Gamma_2^0 = \{y = -x, -a \leq x \leq 0\}.$$

В области D рассмотрим систему уравнений следующего вида

Адрес для корреспонденции: Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич, Валиев Рузибой Сангимуродович. 735140, Республика Таджикистан, г. Бохтар, ул. Айни, д. 67. Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава. E-mail: faizullo100@yahoo.com, ruziboivaliev@gmail.com.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} u = \frac{f_3(x, y)}{(x^2 - y^2)^k}, \end{cases} \quad (1)$$

где $a_i(x, y), b_i(x, y), f_j(x, y)$, $i = \overline{1, 2}, j = \overline{1, 3}$ – заданные функции в области D , $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, k \geq 2, u(x, y)$ – искомая функция.

Исследованию дифференциальных уравнений и переопределенных систем с регулярными, сингулярными и суперсингулярными коэффициентами посвящены работы [1]–[9].

Используя методику разработанного в [4] и [6] для системы уравнений (1), получено представление многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной.

Пусть первое уравнение системы (1) является исходным, тогда получено следующее утверждение

Теорема 1. Пусть в системе уравнений (1) $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, k \geq 2$ коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям

$$1) a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}),$$

$$b_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y), f_3(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) c_1(x, y) = (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + a_1(x, y) b_1(x, y);$$

$$3) a_1(x, x) < 0, b_1(y, y) < 0, a_2(0, 0) > 0;$$

$$4) a_1(x, y) - a_1(x, x) = o\left((x - y)^{\alpha_1}\right), \alpha_1 > m - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$a_1(x, y) - a_1(x, x) = o\left((x + y)^{\alpha_2}\right), \alpha_2 > m - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$b_1(x, y) - b_1(y, y) = o\left((x - y)^{\beta_1}\right), \beta_1 > n - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$b_1(x, y) - b_1(y, y) = o\left((x + y)^{\beta_2}\right), \beta_2 > n - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|a_2(x, 0) - a_2(0, 0)| \leq H_1 x^{\gamma_1}, H_1 = \text{const}, \gamma_1 > 2p - 1;$$

$$5) a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \in D,$$

$$b) (x^2 - y^2)^{m+n+p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) (x^2 - y^2)^n a_1(x, y) f_2(x, y) = \\ = (x^2 - y^2)^p f_1(x, y),$$

$$c) (x^2 - y^2)^k \exp \left[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] (\psi_1(y) + \\ + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(t, y) \right] dt) = \\ = f_3(x, y) \in D;$$

$$6) f_1(x, y) = o \left(\exp \left[b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] (x - y)^{\lambda_1} \right), \lambda_1 > m + n - 1$$

в окрестности Γ_1^0 ,

$$f_1(x, y) = o \left(\exp \left[b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] (x + y)^{\lambda_2} \right), \lambda_2 > m + n - 1$$

в окрестности Γ_2^0 ,

$$f_2(x, 0) = o(x^{\gamma_2}), \gamma_2 > 2p - 1.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ представимо в виде

$$u(x, y) = \exp \left[-W_{a_1}^m(x, y) - a_1(x, x) J_{m-1}^{(2)}(x, y) \right] \left\{ \varphi_1(x) + \int_0^y \exp \left[W_{a_1}^m(x, s) + \right. \right. \\ \left. \left. + a_1(x, x) J_{m-1}^{(2)}(x, s) - W_{b_1}^n(x, s) + b_1(s, s) J_{n-1}^{(1)}(x, s) \right] (\psi_1(s) + \right. \\ \left. + \int_0^x \frac{f_1(t, s)}{(t^2 - s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{b_1}^n(t, s) - b_1(s, s) J_{n-1}^{(1)}(t, s) \right] dt \right) ds \Bigg\} \equiv \\ \equiv \Omega_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x, y)), \quad (2) \\ \varphi_1(x) = \exp \left[-W_{a_2}^{2p}(x, 0) + a_2(0, 0) W_{2p-1}(x) \right] \times$$

$$\left(c_1 + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^{2p}} \exp[W_{a_2}^{2p}(t, 0) - a_2(0, 0)W_{2p-1}(t)] dt \right) \equiv N_1(c_1, f_2(x, 0)), \quad (3)$$

$$\psi_1(y) = \frac{f_3(0, y)}{(-y^2)^k}, \quad (4)$$

где

$$W_{a_1}^m(x, y) = \int_0^y \frac{a_1(x, s) - a_1(x, x)}{(x^2 - s^2)^m} ds, \quad W_{b_1}^n(x, y) = \int_0^x \frac{b_1(t, y) - b_1(y, y)}{(t^2 - y^2)^n} dt,$$

$$J_{m-1}^{(2)}(x, y) = \frac{y}{2(m-1)x^2(x^2 - y^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)x^2} \int_0^y \frac{ds}{(x^2 - s^2)^{m-1}},$$

$$J_{n-1}^{(1)}(x, y) = \frac{x}{2(n-1)y^2(x^2 - y^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)y^2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{n-1}},$$

$$W_{a_2}^{2p}(x, 0) = \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^{2p}} dt, \quad W_{2p-1}(x) = \frac{1}{(2p-1)x^{2p-1}},$$

c_1 – произвольная постоянная.

Полученное решение обладает свойствами

1°. Если $y \rightarrow 0$, то

$$u(x, 0) = \varphi_1(x).$$

2°. Если $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O\left(\exp[a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)]\right).$$

3°. $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_1$.

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp[a_1(x, x)J_{m-1}^{(2)}(x, y)]\right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

Пусть второе уравнение системы (1) является исходным, тогда получено следующее утверждение

Теорема 2. Пусть в системе уравнений (1) $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, k \geq 2$ коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям

$$1) a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}),$$

$$f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_3(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), b_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) c_1(x, y) = (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y);$$

$$3) a_2(y, y) > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$a_2(y, y) < 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$b_2(0, 0) > 0;$$

$$4) a_2(x, y) - a_2(y, y) = o\left((x - y)^{\mu_1}\right), \mu_1 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$a_2(x, y) - a_2(y, y) = o\left((x + y)^{\mu_2}\right), \mu_2 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|b_2(0, y) - b_2(0, 0)| \leq H_1 y^{\gamma_1}, H_1 = const, \gamma_1 > 4l - 1;$$

$$5) a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} \right) \text{ в } D,$$

$$b) (x^2 - y^2)^{m+n+p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + (x^2 - y^2)^n a_1(x, y) f_2(x, y) =$$

$$= (x^2 - y^2)^p f_1(x, y), \text{ при } a_2(x, y) = b_1(x, y) \text{ в } D,$$

$$c) (x^2 - y^2)^{p+k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} \right) + a_2(x, y) f_3(x, y) =$$

$$= (x^2 - y^2)^{p+k} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + b_2(x, y) f_2(x, y) \text{ в } D;$$

$$6) f_2(x, y) = o\left((x - y)^{\lambda_1}\right), \lambda_1 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_2(x, y) = o\left((x + y)^{\lambda_2}\right), \lambda_2 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_3(0, y) = o(y^{\lambda_3}), \quad \lambda_3 > 4l - 1.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ представимо в виде

$$u(x, y) = \exp\left[-W_{a_2}^p(x, y) + a_2(y, y)J_{p-1}^{(3)}(x, y)\right] \left[\psi_2(y) + \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{(t^2 - y^2)^p} \times \right. \\ \left. \times \exp\left[W_{a_2}^p(t, y) - a_2(y, y)J_{p-1}^{(3)}(t, y)\right] dt \right] \equiv \Omega_2(\psi_2(y), f_2(x, y)), \quad (5)$$

$$\psi_2(y) = \exp\left[-W_{b_2}^{4l}(0, y) + b_2(0, 0)W_{4l-1}(y)\right] \times \\ \times \left(c_2 + \int_0^y \frac{f_3(0, s)}{s^{4l}} \exp\left[W_{b_2}^{4l}(0, s) - b_2(0, 0)W_{4l-1}(s)\right] ds \right) \equiv N_2(c_2, f_3(0, y)), \quad (6)$$

где

$$W_{a_2}^p(x, y) = \int_0^x \frac{a_2(t, y) - a_2(y, y)}{(t^2 - y^2)^p} dt,$$

$$J_{p-1}^{(3)}(x, y) = \frac{x}{2(p-1)y^2(x^2 - y^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2(p-1)y^2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{p-1}},$$

$$W_{b_2}^{4l}(0, y) = \int_0^y \frac{b_2(0, s) - b_2(0, 0)}{s^{4l}} ds, \quad W_{4l-1}(y) = \frac{1}{(4l-1)y^{4l-1}},$$

c_2 – произвольная постоянная.

Полученное решение обладает свойствами

1°. Если $x \rightarrow 0$, то

$$u(0, y) = \psi_2(y).$$

2°. Если $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$, то

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O\left(\exp\left[b_2(0, 0)W_{4l-1}(y)\right]\right).$$

3°. $\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp\left[-b_2(0, 0)W_{4l-1}(y)\right] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_2$.

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[a_2(y, y)J_{p-1}^{(3)}(x, y)\right]\right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[a_2(y, y)J_{p-1}^{(3)}(x, y)\right]\right) \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

Пусть третье уравнение системы (1) является главным, тогда получено следующее утверждение

Теорема 3. Пусть в системе уравнений (1) $m \geq 2$, $n \geq 2$, $p \geq 2$, $k \geq 2$ коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям

$$1) a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_3(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \\ a_1(x, y), b_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) c_1(x, y) = (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y);$$

$$3) b_2(x, x) < 0, a_2(0, 0) > 0;$$

$$4) b_2(x, y) - b_2(x, x) = o\left((x - y)^{\mu_1}\right), \mu_1 > k - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$b_2(x, y) - b_2(x, x) = o\left((x + y)^{\mu_2}\right), \mu_2 > k - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|a_2(x, 0) - a_2(0, 0)| \leq H_1 x^{\gamma_1}, H_1 = \text{const}, \gamma_1 > 2p - 1;$$

$$5) a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \text{ в } D,$$

$$b) (x^2 - y^2)^k \exp\left[-W_{b_1}^n(x, s) + b_1(s, s)J_{n-1}^{(1)}(x, s)\right](\psi_1(y) +$$

$$+ \int_0^x \frac{f_1(t, s)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp\left[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y)J_{n-1}^{(1)}(t, y)\right] dt) =$$

$$= f_3(x, y) \text{ при } a_1(x, y) = b_2(x, y) \text{ в } D,$$

$$c) (x^2 - y^2)^{p+k} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + b_2(x, y)f_2(x, y) =$$

$$= (x^2 - y^2)^{p+k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} \right) + a_2(x, y) f_3(x, y) \text{ в } D;$$

$$6) f_3(x, y) = o((x-y)^{\lambda_1}), \lambda_1 > k-1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_3(x, y) = o((x+y)^{\lambda_2}), \lambda_2 > k-1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_2(x, 0) = o(x^{\theta_1}), \theta_1 > 2p-1.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \exp[-W_{b_2}^k(x, y) - b_2(x, x) J_{k-1}^{(4)}(x, y)] \times \\ &\times \left(\varphi_2(x) + \int_0^y \frac{f_3(x, \tau)}{(x^2 - \tau^2)^k} \exp[W_{b_2}^k(x, \tau) + b_2(x, x) J_{k-1}^{(4)}(x, \tau)] d\tau \right) \equiv \\ &\equiv \Omega_3(\varphi_2(x), f_3(x, y)), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \exp[-W_{a_2}^{2p}(x, 0) + a_2(0, 0) W_{2p-1}(x)] \times \\ &\times \left(c_3 + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^{2p}} \exp[W_{a_2}^{2p}(t, 0) - a_2(0, 0) W_{2p-1}(t)] dt \right) \equiv N_3(c_3, f_2(x, 0)), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} W_{b_2}^k(x, y) &= \int_0^y \frac{b_2(x, \tau) - b_2(x, x)}{(x^2 - \tau^2)^k} d\tau, \\ J_{k-1}^{(4)}(x, y) &= \frac{y}{2(k-1)x^2(x^2 - y^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)x^2} \int_0^y \frac{d\tau}{(x^2 - \tau^2)^{k-1}}, \\ W_{a_2}^{2p}(x, 0) &= \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^{2p}} dt, W_{2p-1}(x) = \frac{1}{(2p-1)x^{2p-1}}, \end{aligned}$$

c_3 – произвольная постоянная.

Полученное решение обладает свойствами

1°. Если $y \rightarrow 0$, то

$$u(x, 0) = \varphi_2(x).$$

2°. Если $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O \left(\exp \left[a_2(0, 0) W_{2p-1}(x) \right] \right).$$

$$3^\circ. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp \left[-a_2(0, 0) W_{2p-1}(x) \right] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_3.$$

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O \left(\exp \left[-b_2(x, x) J_{k-1}^{(2)}(x, y) \right] \right).$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0.$$

Доказательства теорем 1, 2 и 3 основаны на представлении левой части первого уравнения системы (1) в виде двух дифференциальных операторов первого порядка. Далее, решение первого уравнения, подставляя во второе и третье уравнение, определим соответствующие произвольные функции и получим утверждение теоремы 1.

В дальнейшем, соответственно, считая второе уравнение исходным, и его решение подставляя в первое и третье уравнение, получим утверждение теоремы 2.

Аналогичным образом доказывается утверждение теоремы 3.

Полученные интегральные представления решений и их свойства дают возможность для системы уравнений (1) ставить и решать следующие задачи с начальными данными.

Задача K_1 . Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ по начальному условию

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp \left[-a_2(0, 0) W_{2p-1}(x) \right] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = m_1,$$

где m_1 — заданная известная постоянная.

Задача K_2 . Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D \setminus (\Gamma_1^0 \cup \Gamma_2^0))$ по начальному условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp \left[-b_2(0, 0) W_{4l-1}(y) \right] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = m_2,$$

где m_2 — заданная известная постоянная.

Задача K_3 . Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D \setminus (\Gamma_1^0 \cup \Gamma_2^0))$ по начальному условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = m_3,$$

где m_3 – заданная известная постоянная.

Решение задачи K_1 . Используя интегральные представления решений системы уравнений (2), (3), (4) и условие задачи K_1 , имеем: $c_1 = m_1$.

Теорема 4. *Если в системе уравнений (1) коэффициенты и правые части удовлетворяют всем условиям теоремы 1, тогда единственное решение задачи K_1 выражается формулами (2), (3), (4), где $c_1 = m_1$.*

О разрешимости задачи K_2 и K_3 получены следующие утверждения

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия теоремы 2, тогда единственное решение задачи K_2 представимо в виде (5), (6), где $c_2 = m_2$.*

Теорема 6. *Пусть выполнены все условия теоремы 3, тогда единственное решение задачи K_3 представимо в виде (7), (8), где $c_3 = m_3$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Wilczynski E.J. Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Sur-faces. – Zeip. Zig; Leubner, 1906, 120 p.
2. Гайшун И.В. Линейные уравнения в полных производных. – Минск: Наука и техника, 1983, 273 с.
3. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. – Душанбе: Дониш, 1986, 115 с.
4. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. – Душанбе: изд. ТГУ, 1992, 236 с.
5. Исхоков С.А. “Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений в полупространстве”. – Доклады РАН, 1995, 345:2, с.164-167.
6. Раджабов Н., Махамед Эльсаед Абдель Аал. Переопределенная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями. – Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2011, 234 с.
7. Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. – Актобе: 2015, 463 с.
8. Шамсудинов Ф.М. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой. – Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. 2016, №6(37), с.99-107.
9. Шамсудинов Ф.М. Об исследовании одного класса гиперболических уравнений второго порядка и с связанных с ними переопределённых систем дифференциальных уравнений с

сингулярными и сверхсингулярными точками. – Дисс.... докт. физ.-мат. наук: 010102: защищена 25.12.19.: утв. 25.09.20. – Душанбе, 2019, 355 с.

Ф.М.ШАМСУДИНОВ, Р.С.ВАЛИЕВ

**ОИД БА ТАҲҚИҚИ ЯК СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ
ДИФФЕРЕНСИАЛИИ БАРЗИЁДМУАЙЯНШУДАИ ТАРТИБИ ДУЮМ БО
ДУ ХАТҲОИ ДОХИЛИИ СИНГУЛЯРӢ**

Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав

Дар қор системаи се муодилаҳои дифференсиалӣ баррасӣ карда мешавад, ки як муодилаи гиперболикии ҳатти тартиби дуюм ва ду муодилаи дифференсиалии тартиби якумро бо ду хатҳои дохилии сингулярӣ дар бар мегирад. Ин муодилаҳо бо функсияи номаълум бо ҳам алоқаманданд.

Барои системаи барзиёдмуайяншудаи таҳқиқшаванда ҳангоме, ки коэффитсиентҳои муодилаҳои якум, дуюм ва сеюм байни худ ба таври муайян алоқаманд мебошанд, тасвирҳои интегралӣ ҳал ба таври ошкор ҳосил карда шудаанд. Хосиятҳои ҳалҳои ҳосилкардашуда омӯхта шуданд, инчунин масъалаҳо бо шартҳои аввала дида баромада шуданд.

Калимаҳои калидӣ: системаи барзиёдмуайяншуда, бисёршаклаи ҳал, росткунча, коэффитсиенти сингулярӣ, хосиятҳои ҳал.

F.M.SHAMSUDINOV, R.S.VALIEV

**ON THE STUDY OF ONE OVERDETERMINED SYSTEM OF SECOND
ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO INTERNAL SINGULAR
LINES**

Bakhtar state university named after Nasir Khusrav

The paper considers a system of three differential equations, which contains one second-order linear hyperbolic equation and two first-order differential equations with two internal singular lines. These equations are related to each other using an unknown function.

For the overdetermined system under consideration, an explicit representation of the variety of solutions is obtained, when the coefficients of the first, second and third equations of the system are related to each other in a certain way. The properties of the obtained solutions are studied, and problems with initial data are also considered.

Key words: overdetermined system, manifolds of solutions, rectangle, singular lines, properties of solutions, problem with initial data.

Сведения об авторах:

Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич – доктор физико-математических наук, Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава, профессор кафедры “Математический анализ и дифференциальные уравнения”. E-mail: faizullo100@yahoo.com;

Валиев Рузибой Сангимуродович – Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава, докторант PhD кафедры “Математический анализ и дифференциальные уравнения”. E-mail: ruziboivaliev@gmail.com.

УДК 519.86

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Р.Н.ОДИНАЕВ, С.Х.МАВЛОНЗОДА

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АППРОКСИМАЦИИ ФОГЕЛЯ ПРИ РЕШЕНИИ
ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ НА ПРИМЕРЕ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК
РОГУНСКОЙ ГЭС**

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 04.07.2024 г.

Данная научная статья исследует применение метода аппроксимации Фогеля для решения транспортных задач. В работе представлен анализ метода аппроксимации Фогеля и его применимость к конкретным условиям грузоперевозок Рогунской ГЭС. Исследование включает в себя теоретический обзор метода, его адаптацию к реалиям транспортных потоков на энергетическом объекте, а также практическое применение для оптимизации логистических процессов.

Ключевые слова: метод аппроксимации Фогеля, транспортная задача, грузоперевозки Рогунской ГЭС, оптимизация.

В современных условиях развития экономики и инфраструктуры оптимизация транспортных процессов приобретает всё большую значимость.

Одним из ключевых аспектов успешного функционирования крупных строительных и производственных объектов является эффективное управление логистикой. Особенно это актуально для таких масштабных проектов, как строительство и эксплуатация Рогунской ГЭС, где отлаженная система грузоперевозок напрямую влияет на сроки и стоимость выполнения работ. Решение таких задач требует применения эффективных методов, способных учесть сложные условия перевозок и обеспечить оптимальное распределение ресурсов. Одним из эффективных методов решения транспортных задач является метод аппроксимации Фогеля, позволяющий минимизировать затраты на перевозку грузов за

Адрес для корреспонденции: *Одинаев Раим Назарович. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17, Таджикский национальный университет.
E-mail: raim_odinaev@mail.ru.*

счёт оптимального распределения ресурсов. В данной научной статье рассматривается применение метода аппроксимации Фогеля для решения транспортных задач на примере грузоперевозок Рогунской ГЭС.

Метод аппроксимации Фогеля был разработан Н.Рейнфельдом и В.Р.Фогелем в 1958 году и был введен для получения начального опорного плана и оптимального решения транспортной задачи [1]. Данный метод рассматривался в работах Акулича И.Л. [2] и Кузнецова А.В., Холода Н.И., Костевича Л.С. [3].

Цель данного исследования заключается в анализе применимости метода аппроксимации Фогеля к транспортным задачам, связанным с грузоперевозками на Рогунской ГЭС. В частности, рассматривается возможность использования этого метода для оптимизации маршрутов, распределения ресурсов и минимизации затрат, связанных с транспортировкой материалов и оборудования.

Данное исследование предполагает не только теоретический анализ метода аппроксимации Фогеля, но и его практическое применение на конкретном примере грузоперевозок Рогунской ГЭС. Результаты исследования могут быть полезны как для управляющих органов энергетического объекта, так и для специалистов в области логистики и транспортного менеджмента.

Метод аппроксимации Фогеля в транспортных задачах:

Метод аппроксимации Фогеля является одним из классических методов решения транспортных задач. Этот метод используется для нахождения начального базисного решения в транспортной задаче, которая заключается в оптимальном распределении ограниченного количества ресурсов из пунктов отправления в пункты назначения.

Основные шаги метода аппроксимации Фогеля:

1. Нахождение начального базисного решения: Метод Фогеля начинается с вычисления разности минимального элемента в каждой строке и каждом столбце матрицы затрат. Затем выбираются клетки с наибольшей разностью, и ресурсы распределяются в эти клетки в порядке убывания разности.

2. Выделение базисных клеток: После распределения ресурсов в клетки, некоторые строки и столбцы могут оказаться полностью заполненными. В таком случае эти строки или столбцы становятся базисными, и процесс повторяется для оставшихся незанятых клеток.

3. Нахождение оптимального решения: Метод Фогеля продолжается до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение, при котором все ресурсы будут распределены, и не будет возможности дальнейшего улучшения.

Метод Фогеля используется для получения близкого к оптимальному плану и применяется для решения задач вручную, когда количество производителей и потребителей невелико.

Различия между методом аппроксимации Фогеля и другими методами решения транспортных задач:

1. Метод северо-западного угла: В отличие от метода Фогеля, который выбирает клетки с максимальной разностью, метод северо-западного угла начинает распределение ресурсов с клетки в северо-западном углу матрицы.

2. Метод минимальной стоимости: Этот метод выбирает ячейку с минимальной стоимостью и использует принцип минимальной стоимости для распределения ресурсов. Он может быть более эффективным в некоторых случаях, особенно когда стоимости транспортировки неоднородны.

3. Метод потенциалов: Этот метод использует потенциалы для определения базиса и нахождения оптимального решения. Он может быть более эффективным в ситуациях, где требуется более быстрое нахождение оптимального решения, но требует более сложных вычислений.

Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки, и выбор конкретного метода зависит от характеристик конкретной транспортной задачи и предпочтений исследователя.

Пример решения транспортной задачи на примере перевозки однородного груза в Рогунскую ГЭС.

Рассмотрим конкретную задачу, приведенную в работе [13].

Объектом исследования выступают 6 транспортных компаний, занимающихся перевозками однородного груза на строительные объекты Рогунской ГЭС. Предметом исследования является построение оптимального плана перевозки с минимальными затратами из 3-х складов в строительные объекты Рогунской ГЭС, которая обслуживается транспортными компаниями.

Проблема заключалась в минимизации расходов на транспортировку однородного груза (металла) для транспортных компаний. Для этого были составлены оптимальные планы перевозки груза, при которых запасы всех поставщиков были вывезены, запросы всех потребителей удовлетворены и затраты были бы минимальными.

По данным, представленным управлением Рогунской ГЭС за 2021 год, на складах «Сомонтаьминот», «Сомонсохтмон» и - «г.Вахдат склад Элок» содержались запасы металла соответственно 2056, 7163 и 3881 тонн. Данный однородный продукт (металл) доставлен на строительные объекты Рогунской ГЭС транспортными компаниями ДАО «Сохтмони асосӣ», ООО «Сохтмон ва наклиёт ХФ», ООО «Фируз НР», ЗАО «Туннел Садди Ориёно», ЗАО «ЗТМ» г. Норак, ООО «Некзод», соответственно, в объёме 1296, 304, 2057, 5294, 3649 и 200 тонн.

Стоимость перевозки одной тонны однородного продукта (металла) и потребностей из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения (строительные объекты Рогунской ГЭС) приведена в табл. 1 (данные предоставлены офисом Рогунской ГЭС).

Таблица 1

Пункты Отправления	Пункты назначения						Запасы
	ДАО "Сохтмони асоси"	ООО "Сохтмон ва нақлиёт ХФ"	ООО "Фируз НР"	ЗАО "Туннел Садди Ориёно"	ЗАО "ЗТМ" г. Норақ	ООО "Некзод"	
Сомон таъминот	96	97	96	95	98	98	2056
Сомон сохтмон	83	82	90	78	81	84	7163
г.Ваҳдат склад Элок	66	65	72	67	67	64	3881
Потребности	1296	304	2357	5294	3649	200	13100

Сформулируем математическую модель задачи и составим оптимальный план грузоперевозки из трёх складов металла на строительные объекты Рогунской ГЭС через 6 транспортных компаний для того, чтобы затраты были минимальными.

Пусть x_{ij} количество груза (металл) тонна, которое перевозится от поставщиков (складов металла) в строительные объекты Рогунской ГЭС (потребитель), c_{ij} - стоимость перевозки одной тонны металла из складов на строительные объекты Рогунской ГЭС. Тогда математическая модель с минимальными затратами на грузоперевозку имеет вид [4-13]:

$$\min F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

Решение. Составим при помощи метода аппроксимации Фогеля опорный план уже рассмотренной задачи [9-13].

Таблица 2

Пункт от-правления	Пункт назначения						Запасы	Штрафы
	ДАО «Сохт-мони асоси»	ООО «Сохтмон ва накли-ёти ХФ»	ООО «Фи-руз НР»	ЗАО «Туннел Садди Ориёно»	ЗАО «ЗТМ» г.Норақ	ООО «Некзод»		
«Сомон таъминот»	96	97	95	94	98	99	2056	1,1,1,4,5
«Сомон сохтмон»	83	82	90	78	81	84	7163	3,1,6,12,3
г.Ваҳдат склад Элок	66	65	72	63	67	64	3881	1,1,5,9,3
Потреб-ность	1296	304	2357	5294	3649	200	13100	
Штрафы	17.13	17.15	18.5	15.16	14.17	20.15		

Запишем условие в табл. 3.

Таблица 3

Пункт отправления	Пункт назначения							
	ДАО «Сохтмони асоси»	ООО «Сохтмон ва наклиёти ХФ»	ООО «Фируз НР»	ЗАО «Туннел Садди Ориёно»	ЗАО «ЗТМ» г.Норак	ООО «Некзод»	Запасы	Штрафы
«Сомон таъминот»	96	97	95	94 2056	98	99	2056	1,1,1,1,2
«Сомон сохтмон»	83	82	90 76	78 3238	81 3649	84 200	7163	3,1,6,1,1
г.Вахдат склад Элок	66 1296	65 304	72 2281	63	67	64	3881	1,1,5,1,2
Потребность	1296	304	2357	5294	3649	200	13100	
Штрафы	17.13	17.15	18.5	15.16	14.17	20.15		

Составленный опорный план даёт значение:

$$\min F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = 94 * 2056 + 90 * 76 + 78 * 3238 + 81 * 3649 + 84 * 200 + 66 * 1296 + 65 * 304 + 72 * 2281 = 1034565$$

Таким образом, наименьшую стоимость для данной задачи имеет опорный план, полученный методом аппроксимации Фогеля, следовательно, он наиболее близок к оптимальному плану.

Заключение

Данная статья представляет собой важное исследование в области транспортной логистики и оптимизации. Применение метода аппроксимации Фогеля на примере Рогунской ГЭС демонстрирует его практическую значимость и потенциал для дальнейших исследований. В статье представлены не только теоретические аспекты метода, но и продемонстрированы его практическая применимость и эффективность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рейнфельд, Фогель (Reinfeld N. V., Vogel W.). Математическое программирование. Методы решения производственных и транспортных задач. – М., ИЛ., 1960, 303 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986, 319 с.
3. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию. – Минск: «Высшая школа», 1978, 256 с.
4. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Серия: Академия наук СССР. – М.: изд-во: Академии наук СССР, 1959, 344 с.
5. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. – М.: Прогресс, 1966, 602 с.

6. Васильев О.В., Леденева Т.М. Транспортная задача и оптимизация грузоперевозок. – Вестник Воронежского государственного технического университета, 2011, т. 7, № 11, с. 82-84.
7. Odinaev R.N., Mavlonzoda S.H. Mathematical model of cargo transportation of the republic of Tajikistan at the Premier Rogunskaya HPP using linear programming methods. – Вестник Таджикского национального университета, 2020, №4, pp. 5-15. - DOI 10.51884/2413-452X_2020_4_5. – EDN MIDUWP.
8. Одинаев Р.Н. Методы оптимизации. – Душанбе : Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, 2021, 246 p. – EDN KXJUUM.
9. Одинаев Р.Н., Раимзода Ф., Раимзода Ф.Р., Шерматов Н.Ш. Методы оптимизации в примерах и задачах. Донишгоҳи миллии Тоҷикистон. – Душанбе: Эр-граф, 2020, 148 с. – ISBN 9879997590886. – EDN LYAGOE.
10. Юнуси М.К., Одинаев Р.Н. Методы оптимизации. – Вестник Таджикского национального университета, 2014, 179 с. – EDN WUMYKR.
11. Одинаев Р.Н., Мавлонзода С.Х., Миралиев М.М. Математическая модель решения транспортной задачи по критерию времени на примере Рогунской ГЭС. – Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2022, №1, с. 40-49.
12. Одинаев Р.Н., Мавлонзода С.Х. Математическая модель грузоперевозок Республики Таджикистан на примере Рогунской ГЭС с использованием метода линейного программирования. – Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2020, №4, с. 5-14.
13. Одинаев Р.Н., Мавлонзода С.Х. Математическое и компьютерное моделирование транспортной задачи и её применение в решении экономических задач Рогунской ГЭС. – Известия НАНТ. Отд. физ.мат., хим., геол. и техн. н. 2023, №4(193), с. 30-43.

Р.Н.ОДИНАЕВ, С.Х.МАВЛОНЗОДА

ИСТИФОДАИ УСУЛИ АППРОКСИМАТСИЯИ ФОГЕЛ ҲАНГОМИ ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲОИ БОРКАШОНИИ НАҚЛИЕТӢ ДАР МИСОЛИ ИНТИҚОЛИ БОРҲОИ НБО РОҒУН

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Мақолаи мазкур истифодаи усули аппроксиматсияи Фогелро барои ҳалли масъалаи боркашонии нақлиёти НБО Роғун, таҳқиқ мекунад. Дар мақола таҳлили усули аппроксиматсияи Фогел ва татбиқи он бо шартҳои мушаххаси боркашонии НБО Роғун пешниҳод карда шудааст. Таҳқиқот баррасии назариявии усул, мутобикосозии он ба воқеияти ҷараёни нақлиёт дар объекти энергетикӣ ва инчунин истифодаи амалӣ барои оптимизатсияи равандҳои логистикиро дар бар мегирад.

Калимаҳои калидӣ: усули аппроксиматсияи Фогел, масъалаи нақлиёт, интиқоли борҳои НБО Роғун, оптимизатсия.

R.N.ODINAEV, S.H.MAVLONZODA

**APPLICATION OF THE VOGEL APPROXIMATION METHOD IN SOLVING
TRANSPORT PROBLEMS USING THE EXAMPLE OF CARGO
TRANSPORTATION AT THE ROGUN HPP**

Tajik National University

This scientific article explores the application of the Vogel approximation method to solve transport problems, cargo transportation of the Rogun HPP. The paper presents an analysis of Vogel approximation methods and its applicability to the specific conditions of cargo transportation at the Rogun HPP. The research includes a theoretical review of the method, its adaptation to the realities of transport flows at an energy facility, as well as practical application to optimize logistics processes.

Key words: Vogel approximation method, transport problem, cargo transportation of Rogun HPP, optimization.

Сведения об авторах:

Одинаев Раим Назарович – доктор физико-математических наук, профессор, Таджикский национальный университет, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования. E-mail: raim_odinaev@mail.ru.

Мавлонзода Сафарали Хикматулло – Таджикский национальный университет, ассистент кафедры информатики. E-mail: mavlonzoda_s96@mail.ru.

УДК 624.042

Специальность: 1.1.8. Механика деформируемого твёрдого тела

И.И.КАЛАНДАРБЕКОВ

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ РАМ МЕТОДОМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими

Поступила в редакцию 09.07.2024 г.

Разработан алгоритм и программа численного решения задач расчёта рам на действие распределенного горизонтального и вертикального мгновенного импульса. Численным моделированием получены горизонтальные и вертикальные колебания рам. Приведены численные эксперименты от действия горизонтальной гармонической нагрузки, равномерно распределённой по длине стойки. В результате получены горизонтальные и вертикальные колебания рам.

Ключевые слова: фиктивная связь, распределённая нагрузка, дискретная динамическая модель, математическая модель, матрица внешней жёсткости, диагональная матрица, матрица затухания, свободные колебания, мгновенный импульс.

При расчёте рам основными искомыми величинами, также как в балках и арках, являются перемещения и усилия. Для их определения в расчётных сечениях выбираем дискретную модель расчётной схемы рамы. Дискретная модель метода сосредоточенных деформаций будет состоять из элементов, узлов, расчётных сечений, в которых определяются внутренние усилия, а также узлов, в которых определяются перемещения.

Расчётными сечениями в рамах являются места опирания и пересечения стержней, а также те точки, где сосредотачиваются деформации. В точках приложения внешних сосредоточенных сил обычно располагаются фиктивные связи в соответствии со степенями свободы. Если стержень рамы нагружен распределённой нагрузкой, то эта нагрузка заменяется действием нескольких сосредоточенных сил. В таком случае дискретная модель рамы будет состоять из непосредственно нагруженных элементов МСД.

Адрес для корреспонденции: Каландарбеков Ифтихор Имомёрбекович. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Раджабовых, 10а, Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими. E-mail: iftikhor791@mail.ru.

Когда сечения стержней рамы меняются по их длине, то их можно заменить рядом отдельных стержней с постоянными сечениями. При этом узлы с фиктивными связями устанавливаются в местах изменения сечений. Очевидно, что при замене стержня несколькими элементами в случае действия распределённой нагрузки или его переменного сечения, расчёт будет тем точнее, чем больше выбирается число элементов МСД на стержне.

На основе алгоритма статического расчёта, строится математическая модель решения динамической задачи рамы. Дискретная динамическая модель рамы состоит из обычных конечных элементов МСД, соединённых между собой упругими связями по линиям сосредоточенных деформаций, опорных элементов, связанных с основанием, и невесомых узловых элементов. Распределённая масса стоек и ригелей рамы сосредоточивается в центрах соответствующих элементов, а их деформация в смежных сечениях между ними. При этом каждый конечный элемент имеет по три степени свободы. Предполагается, что узлы рамы являются жесткими, вследствие чего концы стержней, сходящихся в одном жестком узле, поворачиваются на один и тот же угол. Исходя из статического равновесия узлов, получаем уравнение совместности сил и перемещений, что позволяет сформировать систему уравнений равновесия с минимальным числом независимых внутренних сил.

При численном моделировании обобщенная матрица внешней жесткости динамической задачи рамы представляется в виде:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + a\mathbf{M} + b\mathbf{D}.$$

Здесь $\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^T$ – матрица внешней жёсткости рамы; \mathbf{M} – диагональная матрица масс; \mathbf{D} – матрица затухания; $a = \alpha_1 / \tau^2$, $b = \beta_1 / \tau$; τ – шаг интегрирования по времени; α_1, β_1 – безразмерные параметры аппроксимации; \mathbf{A}^T – матрица, транспонированная с матрицей коэффициентов уравнений равновесия \mathbf{A} ; \mathbf{C} – диагональная матрица внутренней жесткости рамы.

Пример 1. Исследование свободных колебаний рамы. Реализацию алгоритма МСД рассмотрим на примере порталной рамы, которая применяется в рамных фундаментах под машины и турбоагрегаты. Эта задача выбрана потому, что имеется аналитическое решение по определению основных частот вертикальных и горизонтальных колебаний рамы [1]. Рассматривается П-образная рама (рис. 1) со следующими данными: $h = 4.5$ м; $l = 3.0$ м; сечением ригеля и стоек 0.8×0.8 м; модулем упругости $E = 2.1 \cdot 10^6$ тс/м²; объёмным весом $\gamma_0 = 2.4$ т/м³; коэффициентом Пуассона $\nu = 0.25$. Для дискретного представления рамы использовалось десять конечных элементов МСД: по три элемента в каждой стойке и четыре элемента в ригеле. Горизонтальные и вертикальные свободные колебания рамы создавались в результате действия мгновенного импульса. На рис. 1 представлены графики вертикальных (кривая 1) и горизонтальных колебаний точки c (кривая 2) от действия распределённого горизонтального мгновенного импульса $s = 1$ тс·с/м. Кривая 3 соответствует

вертикальным колебаниям точки c , полученным от действия вертикального импульса $s = 1 \text{ тс}\cdot\text{с/м}$, равномерно распределённого по длине ригеля.

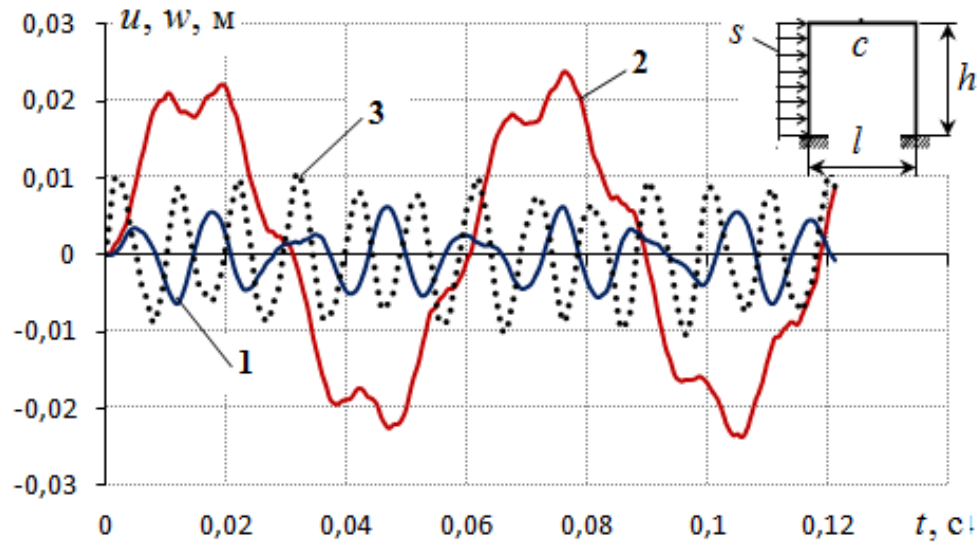


Рис. 1. Горизонтальные и вертикальные колебания рамы.

Из графиков 1 и 3 следует, что основной период вертикальных колебаний рамы находится в пределах от 0.01 до 0.015 с, что практически совпадает с решением метода Релея $T = 0.0153 \text{ с}$ [1], где для вычисления частоты колебаний взята искривленная форма рамы, соответствующая загрузке ригеля распределенной нагрузкой. Основной период горизонтальных колебаний рамы (кривая 2) $T = 0.088 \text{ с}$, что примерно в 6-8 раз больше, чем основной период вертикальных колебаний. С целью уточнения основных периодов свободных колебаний рамы, были проведены численные эксперименты от действия горизонтальной гармонической нагрузки $P(t) = 1 \times \sin(\theta t)$, равномерно распределённой по длине стойки. Результаты численных экспериментов представлены на рис. 2, где кривые 1, 2 и 3 получены при частоте вынужденных колебаний, соответственно равной $\theta = 259; 388.5; 414.4 \text{ рад/с}$. Наложение свободных и вынужденных колебаний с периодами, мало отличающимися друг от друга, вызывает биения (кривая 2). Неуклонный рост амплитуды колебаний (кривая 3) свидетельствует о совпадении периодов свободных и вынужденных колебаний. Следовательно, уточненное значение основного периода свободных колебаний составляет $T_* = 0.0149 \text{ с}$, что на 5% отличается от точного значения $T_* = 0.0157 \text{ с}$.

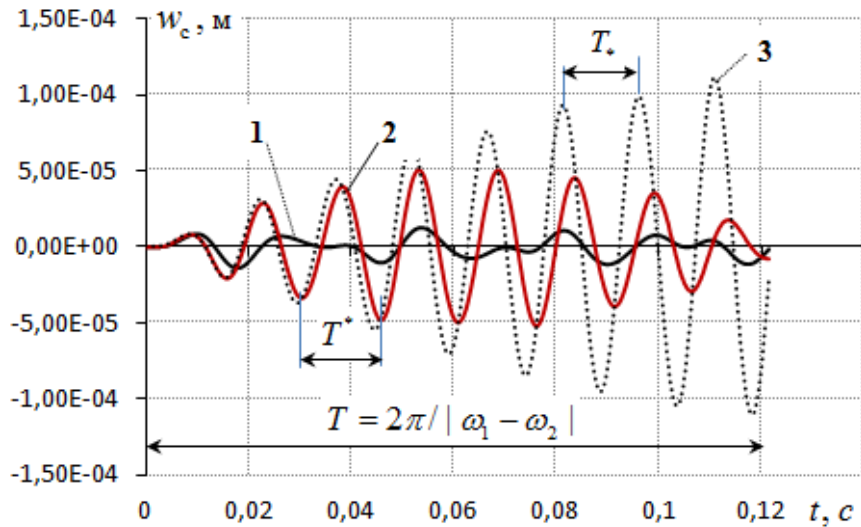


Рис. 2. Гармоническое воздействие.

Пример 2. Исследование упругих свободных и вынужденных колебаний динамической модели многоэтажного каркасного здания с учётом затухания. Пусть несущий каркас здания в продольном направлении состоит из множества m пролётных поперечных рам, установленных с шагом b и соединённых между собой плитами перекрытий. Предполагается, что плиты перекрытия бесконечно жёсткие и здание в поперечном направлении деформируется по форме сдвига так, что боковые перемещения здания определяются только изгибом колонн при нулевых поворотах узловых сопряжений. Рассмотрим 6-ти этажное каркасное здание размерами в плане 18×12 м, сеткой колонн 4×3 , шагом $b = 6$ м в обоих направлениях, высотой этажа $h = 3$ м, сечением колонн 40×40 см с симметричным армированием и моментом инерции приведённого сечения (рис. 3)

$$I^* = I_b + 2nF_a z_a^2 = 40 \cdot 40^3 / 12 + 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot (20 - 4)^2 = 2,748 \cdot 10^5 \text{ см}^4,$$

здесь $n = E_a / E_b$ – коэффициент приведения I_a к I_b , E_a, E_b – модули упругости арматуры и бетона соответственно. Модуль упругости бетона $E = 2,5 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, объёмный вес материала $\gamma_0 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3$. Массы плит перекрытия m_a , колонн m_b и ригелей m_c , соответствующие одного этажа равны:

$$m_a = 18 \cdot 12 \cdot 0,25 \cdot 2,5 / 9,81 = 13,76 \text{ тс} \cdot \text{с}^2 / \text{м} = 137,6 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 / \text{см};$$

$$m_b = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 3 \cdot 2,5 \cdot 12 / 9,81 = 1,4678 \text{ тс} \cdot \text{с}^2 / \text{м} = 14,7 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 / \text{см};$$

$$m_c = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 6 \cdot 2,5 \cdot 8 / 9,81 = 2,4465 \text{ тс} \cdot \text{с}^2 / \text{м} = 24,5 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 / \text{см},$$

$$m_1 = \dots = m_5 = m_a + m_b + m_c = 176,8; m_6 = 169,4 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 / \text{см},$$

Для рассматриваемой модели матрицу жёсткости можно сформировать, исходя из основной системы метода перемещений, согласно которой коэффициенты в главной диагонали будут равны:

$$k_{ii} = 2 \cdot 12 \cdot 12EI^* / h^3 = 0.7327 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}, \quad i = 1, 2, \dots, 5;$$

$$k_{66} = 12 \cdot 12EI^* / h^3 = 0.3664 \cdot 10^6 \text{ кгс/см};$$

а в двух других диагоналях $k_{ij} = -12 \cdot 12EI^* / h^3 = -0.3664 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}$.

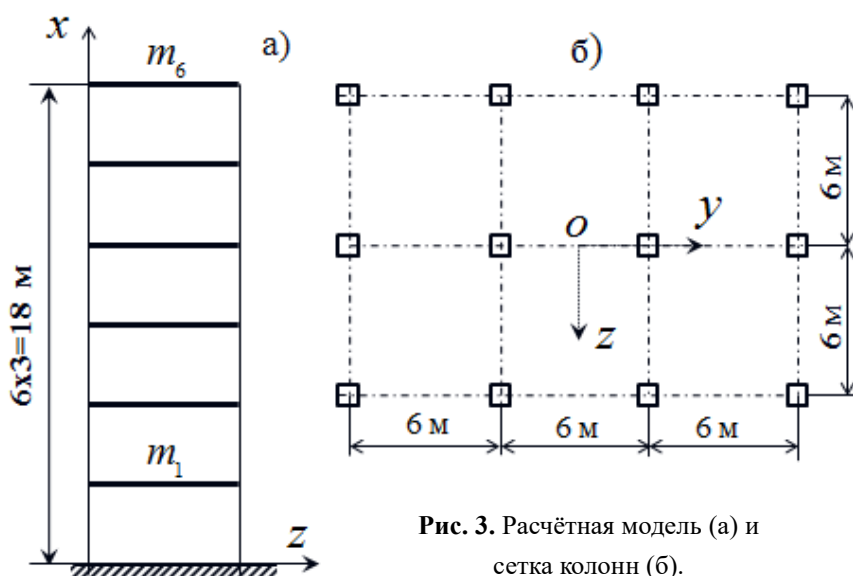


Рис. 3. Расчётная модель (а) и сетка колонн (б).

Квадратная матрица жёсткости 6-го порядка представляется в виде

$$\mathbf{K} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.7327 & -0.3664 & & & & 0 \\ -0.3664 & 0.7327 & -0.3664 & & & \\ & -0.3664 & 0.7327 & -0.3664 & & \\ & & -0.3664 & 0.7327 & -0.3664 & \\ & & & -0.3664 & 0.7327 & -0.3664 \\ 0 & & & & -0.3664 & 0.3664 \end{bmatrix}.$$

Элементы диагональной матрицы масс включают в себя массу перекрытия, колонн и ригелей:

$$\mathbf{M} = \text{diag}(176.8 \quad 176.8 \quad 176.8 \quad 176.8 \quad 176.8 \quad 169.4).$$

С целью получения матрицы затухания по формуле (4.8.1) [2], определим частоты, соответствующие двум формам собственных колебаний. Наименьшая и наибольшая частоты ω_1 , ω_6 и формы колебаний можно определить из соответствующих матричных уравнений

$$(\mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{A} \mathbf{M}) \bar{\mathbf{Y}} = 0, (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{E}) \bar{\mathbf{Y}} = 0,$$

$\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}$ – матрица податливости, \mathbf{E} – единичная матрица. Применив итерационный метод одновременного нахождения собственных значений и собственных векторов [3, 4], получаем

$$\omega_1 = 10.87 \text{ с}^{-1}; \bar{\mathbf{Y}}_1 = (0.2054, 0.3991, 0.5699, 0.6205, 0.8458, 1.000);$$

$$\omega_6 = 88.47 \text{ с}^{-1}; \bar{\mathbf{Y}}_6 = (0.4539, -0.8139, 1.00, -0.9627, 0.7009, -0.2699).$$

Откуда следует, что при $\gamma = 0.1$ коэффициенты пропорциональности будут равны:

$$a_k = \gamma / (\omega_1 + \omega_6) = 0.001007 \text{ с}, a_m = \gamma \omega_1 \omega_6 / (\omega_1 + \omega_6) = 0.9685 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, сформированы все необходимые матрицы, что позволяет реализовать алгоритм численного решения при заданных внешних воздействиях. Численные эксперименты проводились на динамической модели здания от действия мгновенного импульса. На рис. 4 сравниваются результаты свободных колебаний, полученных от действия мгновенных импульсов

$$S_i = 4420 \text{ кгс}\cdot\text{с} \ (i = 1, 2, \dots, 5), S_6 = 4235 \text{ кгс}\cdot\text{с},$$

создающих начальную скорость для всех масс, равную 25 см/с, при различных значениях коэффициентов матрицы затухания. Колебания без учёта затухания (кривая 1) происходят с максимальной амплитудой $y_{6,\max} = 3.26$ см и периодом $T_1 = 9 / 15.5 = 0.5806$ с, что практически совпадает с аналитическим решением $T_1 = 2\pi / \omega_1 = 6.28 / 10.87 = 0.5778$ с. Кривые 2 и 3 получены с учётом затухания при $\gamma = 0.1$ и $\gamma = 0.05$, соответственно. Можно заметить, что учёт затухания приводит к значительному уменьшению амплитуды уже после шести полных циклов колебаний, а при $\gamma = 0.1$ после момента времени $t = 6$ с от начала

динамического процесса, колебания практически затухают. Шаг интегрирования принимался равным $\Delta t = 0.01$ с.

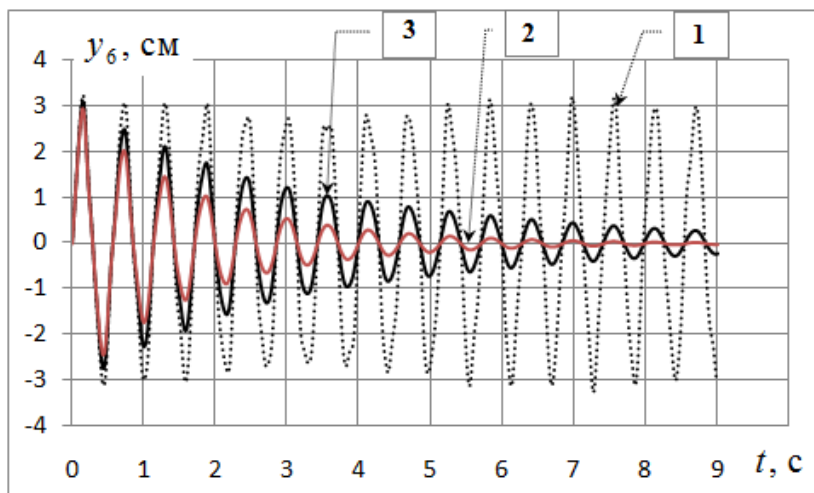


Рис. 4. Свободные колебания здания с учётом затухания.

Таким образом, на основе полученных результатов можно сделать вывод. Предлагаемый алгоритм численного решения динамической задачи многомассовой системы на основе частотно независимой модели упруго-вязкого сопротивления позволяет проводить предварительные исследования с целью выбора расчётной модели здания.

Вывод. Разработанные алгоритмы и программы расчета, реализованные на различных примерах, в том числе тестовых, показывают удобство метода сосредоточенных деформаций при моделировании динамических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.П. Методы расчета сооружений на колебания. – М.: Госстройиздат, 1941, 231 с.
2. Низомов Д.Н., Каландарбеков И. Метод сосредоточенных деформаций. – Душанбе: Дониш, 2015, 435с.
3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. –М.: 1970, 664с.
4. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках БЕЙСИК, ФОРТРАН и ПАСКАЛЬ. – Томск: МП «Раско», 1991, 271 с.

И.И.ҚАЛАНДАРБЕКОВ

ХИСОБИ ДИНАМИКИИ РОМ БО МЕТОДИ МУТАМАРКАЗКУНОНИИ ДЕФОРМАТСИЯҶО

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи акад. М.С.Осими

Алгоритм ва барномаи ҳалли адабии масъалаи ҳисоби ром аз таъсири импулси лаҳзагии яқлукти уфуқи ва амуди коркард карда шудааст. Бо роҳи моделкунонии ададӣ лаппишҳои уфуқи ва амуди ром ба даст оварда шудааст. Таҷрибаи ададӣ аз таъсири қувваҳои

уфукии гармоникӣ, яклухт аз руи дарозии ром таъсир мекунад, гузаронида шудааст. Дар натиҷа лаппишҳои уфуки ва амудии ром бо зудии ба даст оварда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: алоқаҳои фиктиви, бори тақсимшуда, модели дискретии динамикӣ, модели математикӣ, матрисаи саҳтии беруна, матрисаи диагональӣ, матрисаи хомушкунанда, лаппиши озод, импульси лаҳзагӣ.

I.I.KALANDARBEKOV

DYNAMIC DESIGN OF FRAMES BY THE CONCENTRATED DEFORMATION METHOD

Tajik Technical University named after Acad. M.S.Osimi

An algorithm and a programme for numerical solution of frame calculation problems for distributed horizontal and vertical instantaneous impulses have been developed. Horizontal and vertical vibrations of frames are obtained by numerical modelling. Numerical experiments from the action of horizontal harmonic load uniformly distributed along the length of the strut are given. As a result, horizontal and vertical vibrations of frames are obtained.

Key words: dummy connection, distributed load, discrete dynamic model, mathematical model, external stiffness matrix, diagonal matrix, damping matrix, free oscillations, instantaneous impulse.

Сведения об авторе:

Каландарбеков Ифтихор – кандидат технических наук, Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими. E-mail: iftikhor791@mail.ru.

УДК 130.9

Специальность: 05.13.19. Методы и системы защиты информации, информационная безопасность.

Ф.Г.САФАРОВ

**АНАЛИЗ ТЕКСТОВЫХ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА**

*Филиал Национального исследовательского технологического университета МИСИС
в г. Душанбе.*

Поступила в редакцию 30.07.2024 г.

Статья посвящена использованию искусственного интеллекта в анализе текста и контента. Мы рассмотрим методы и алгоритмы проведения этого исследования, а также ограничения и потенциальные проблемы для исследователей в этой области. Выявление тенденций в информации – это интеллектуальная обработка данных, которая помогает в принятии решений. Естественный язык (NLP) имеет широкие практические применения, включая машинный перевод, анализ текста, обработку речи, синтаксический и семантический анализ, а также создание моделей для обучения компьютеров понимать и генерировать текст. В зависимости от цели интеллектуальный анализ текста может использоваться как самостоятельный процесс при решении задач, так и для взаимодействия телекоммуникационных систем (машин).

Ключевые слова: искусственный интеллект, коммуникация, текст, поиск информации, интеграция данных, алгоритм, классификация текста.

Введение. Рассмотрим процесс токенизации с точки зрения алгоритмов, которые используются для обработки подслов.

Действительно, слово состоит из символов последовательности, которые могут быть буквами, цифрами или другими символами. В разных странах для образования слов использовались разные наборы символов. Например, в таджикском языке используют кириллические буквы, а в английском – латинские буквы. Слова, указывающие на единицу языка, с помощью которых представляют собой информацию и речь, (технические) корпус

Адрес для корреспонденции: Сафаров Файзуллоджон Гурезович. 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Назаршоева, 7, Душанбинский филиал Национального исследовательского технологического университета МИСИС. E-mail: safarov_f-o@mail.ru.

языка, где текстовые данные и программное обеспечение, которое занимается управлением и анализом. На основе поисковой системы www.Dodaho.tj можно это увидеть.

В качестве примера рассмотрим применение метода **ВРЕ** (Byte Pair Encoding), который применяется для кодирования байтов. Приводим пример, когда алгоритм ВРЕ в виде прикладной задачи [1]:

Первое действие – 1 шаг. Нужно большое количество информации, которая будет использоваться в процессе обучения.

Внутренняя часть корпуса:

Выполнение второго 2 шага. Подсказка: определите желаемый объём словарного запаса подсловий.

Совершение третьего 3 шага. При разделении слов, для того, чтобы получить возможность использовать суффикс «</манд>», «</чй>», в конце слова с частотой слов, необходимо использовать последовательность символов. Данный шестой символ можно использовать для обозначения конкретных требований, параметров или условий. Примером является частота ‘саодат – манд’ в 5 – шагу. После этого мы меняем его на ‘навбат </чй>’ – это вторая часть из пяти шагов. В том случае, если частота нового раздела будет высокой, то произойдёт обработка его генерации.

После этого начинается следующий шаг – определение к 5.

Следовательно, после достижения размера словарного запаса подслова, определение на шаге 2 будет осуществляться следующий шаг 4. Если это произойдёт, то следующая самая большая частота пар не будет равна 1.

Примером может служить псевдокод пар байтов:

```
import re
import time //Можно также вернуть время действия алгоритма
def process_raw_words(words, endtag='-'):
    vocabs = {}
    for word, count in words.items():
        word= re.sub(r'([a-zA-Z ])', r'/1', word)
        word += " + endtag
        vocabs[word] = count
    return vocabs
def get_symbol_pairs(vocabs):
```

<<Получить всю пару персонажей в словаре, непрерывной длине 2, а статистика

ARGS:

Vocabass: количество слов для слов, Dict, Word, Count

Слова были разделены на минимальные символы

Returns:

Пары: ((символ 1, символ 20), счётчик)

““

```

#pairs= collections.defaultdict(int)
pairs=dict()
for word,freq in vocabs.items()
#
symbols=word split()
for i in range(len(symbols) -1):
p= (sybols [i], symbols [i+1)
pairs[p] = pais.get(p, 0) + freq
return pairs
def merge_symbols(symbol_pair, vocabs):
<<Заменив строку символов <<a b>> во всех словах в словах
Args:
Symbole_pairs: (a,b) два символа
Vocabs: слова (слово, количество), представлены подсложным (символом). Где
слово используют пространство в подслове
Returns:
VJCABS_NEW: Заменить новое слово <<A b на ab>>
“vocabs_new = {}
raw = ‘ ‘. Join ( symbol_pair)
merged = “join(symbol_pair)
#bigram = re.escape(raw)
p = re=compiler(r‘(?<!\S)’+ bigram + r‘(?!\S)’
for word, count in vocabs.items():
word_new= p.sub(merged,word)
vocabs_new[word_new]= count
return vocabs_new
raw_words= {“low”:5, “lower”:2, “newest”:6, “widest”:3}
num_merges = 10
print(vocabs)
for i in range(num_merges):
pairs = get_symbole_pairs(vocabs)
#Выберите пару с самой высокой частотой
symbol_pair = max(pairs,key= pairs.get)
vocabs = merge_symbols(symbols_pair,vocabs)
print(vocabs)
Первоначально: {“низкий”:5, “ниже”:2, “новейший”: 6 “самый
широкий”:3} После ВРЕ: {‘low-’:5, “низкий e r-’: 2 “новейший-”:6 “widest – ‘: 3}

```

Данный код является пар байтов псевдокода.

Важным достижением **ВРЕ** является то, что он имеет возможность нахождения оптимального баланса между размером словарного запаса и количеством шагов (**токенов, необходимое для анализа слов и предложений**) [2]. Обратим внимание на то, что недостатки **ВРЕ** не являются существенными. В его основе лежит система, использующая детерминированные символы преобразования. Данный алгоритм достаточно сложен. К тому же, результаты оценки получения множественной фрагментации не могут быть рассчитаны заранее.

Преимуществом **ВРЕ** является то, что он научился работать с неизвестными словами, так же, как новые слова представляются в виде символов последовательности. Введение в алгоритм **ВРЕ** предоставляет возможность для улучшения обработки текстовых данных в моделях **BERT** и **GPT**. Его использовали для создания токенов, которые были созданы на основе текстовых данных. С помощью **ВРЕ** были токенизированы текстовые данные в моделях **BERT** и **GPT** [3].

При необходимости консервативная версия **ВРЕ** будет выполнять работу в 2 раза быстрее, чем другие варианты.

Два ключевых момента в алгоритме оптимизации:

- a)** в процессе работы над текстом необходимо соблюдать определенное время;
- b)** для обучения и токенизации есть возможность использовать несколько потоков.

Метод **ВРЕ** даёт возможность уменьшить количество времени, которое необходимо для реализации алгоритма в несколько раз. При рассмотрении анализа скорость выполнения текста увеличилась в **100** раз по сравнению с обычным периодом времени. Несмотря на то, что **WordPiece** и **ВРЕ** используют методы разделения слов, алгоритм сегментации слов в **ВРЕ** по-прежнему является одним из способов разделения слов.

Авторами **WordPiece** являются Шустер и Накадзима. В 2012 году он был представлен японцам и жителям Кореи. У них появилась возможность решить проблему с голосовыми связками, которая была актуально на момент их показа в свете [4]. Существует мнение, что **WordPiece** является аналогом **ВРЕ**, но различие в частичной возможности позволяет создавать новые слова и не приводит к следующему циклу. Обращаю ваше внимание на то, что в данном примере представлен алгоритм **WordPiece** в видео пошагового руководства:

- 1 – шаг:** Чтобы обучаться, нашей модели нужно иметь большое количество данных (например, корпус языка TA “taj”);
- 2 – шаг:** Материка желаемого объёма словарного запаса подслов;
- 3 – шаг:** Нужно разделить слова на последовательность символов;
- 4 – шаг:** Необходимо создать языковую модель на основе БД;
- 5 – шаг:** Для того чтобы увеличить вероятность получения обучающих данных при добавлении модели в систему, необходимо выбрать новую единицу слова из всех возможных;

6 – шаг: Словарь – подслов, который означает **2 – й шаг**, необходимо объяснить с пятого шага. В противном случае вероятности ограничения будут ниже порогового значения, которое было установлено на **5 шаге**. К тому же, как и **ВРЕ**, **WordPiece** использует не самые распространенные символы в качестве основы для символов. Оба алгоритма, **ВРЕ** и **WordPiece**, имеют свои уникальные особенности и принципы работы, которые будут рассмотрены и проанализированы в данном исследовании. Он подбирает такие пары символов, которые могут повысить эффективность использования словаря.

Увеличить эффективность обучения можно, если в каждом из символов присутствует хотя бы один символ с большей вероятностью того, что второй символ будет максимальным.

Данный текст можно понять по – разному в рамках **WordPiece**, который имеет некоторые отличия от **ВРЕ**. **WordPiece** воспринимает идею, объединения двух символов. В разработке Тадаси Кудо языковая модель **Unigram (YLM)** представляет собой алгоритм сегментации подслов, который используется для разработки языка **Unigram**. Следуя этому факту, можно сделать предположение о том, что вхождения подслов имеют место быть независимыми. В свою очередь, последовательность подслов показала, насколько велика вероятность их показа [5].

В результате анализа можно сделать предположение о том, что все вхождения подслов независимы, и последовательность подслов формируется как результат вероятности их появления.

С помощью языковых моделей **WordPiece** и **Unigram Language Model** можно создавать новые слова и использовать их в будущем для пополнения словарного запаса.

Действительно, **ULM** можно рассматривать как совокупность нескольких атомов с одним состоянием, которые можно рассматривать как производную величину. К примеру, у него есть возможность соблюдать ограничения различных терминов в течении десяти лет. При помощи этого выражения можно это показать.

$$P(t_1t_2t_3) = P(t_1)P(t_2|t_1)P(t_3|t_1)P(t_3|t_1t_2), \quad (1)$$

получим:

$$P_{ulm}(t_1t_2t_3) = P(t_1)P(t_2)P(t_3). \quad (2)$$

В данных моделях вероятность принятия слов зависит исключительно от вероятности этих слов в документах. У нас есть в наличии лишь автоматы с тем состоянием, у которого нет конца. Автомат управления, который позволяет восстановить вероятность по всему словарю модели, в результате чего получается единица “1”.

Простейший примерный образец алгоритма ULM выглядит так:

1 – шаг: Необходимо иметь большой объём данных 9 (например, корпус языка ТА “tj”);

2 – шаг: Определить желаемый размер словарного запаса подслов;

3 – шаг: Установить вероятность появления слова и определить его последовательность;

4 – шаг: Найти количество утраченных подслов;

5 – шаг: Необходимо отсортировать символы по убыванию и оставить нижние **X%** слов (например, **X** может составлять **78%**). Для того, чтобы не терять словарный запас, следует использовать уровень символа в качестве подмножества подслов;

6 – шаг: Выполняя шаги **3 – 5** до достижения размера словарного запаса подслов, который будет определён на **2** шагу или без изменений в процессе выполнения **5** шага.

По этой причине представленный список не может решить все проблемы, связанные с токенизацией. Существует множество языков, которые можно назвать синтетическими. Однако процесс словообразования здесь происходит сложнее, чем при анализе английского языка. В машинном переводе это особенно заметно. В статистических данных используется общий метод, который называется **TF – IDF**. Он позволяет получать не только краткие слова, но и ключевые слова. Извлечение ключевых слов осуществляется не из одного конкретного документа [6], а из целой базы данных.

При условии проведения предварительной кластеризации можно получить документы из кластера. Для этого необходимо использовать инструменты, которые необходимы для данного кластера (рис. 1).

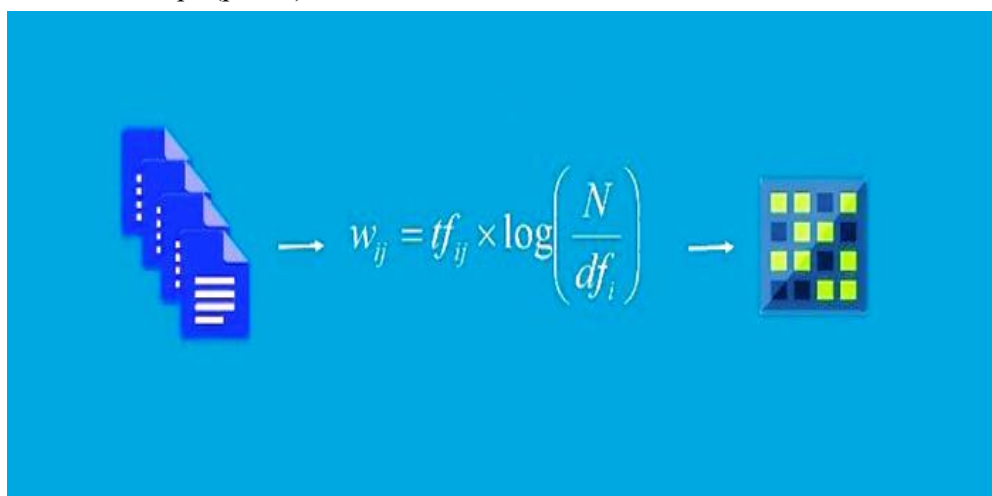


Рис. 1. При помощи **TF – IDF** можно получить ключевые кластеры слов.

TF – IDF представляет собой произведение **TF** (частота термина) и **IDF** (обратная частота документа). Частота термина «исследования» в последнее время часто встречается в документе, в то время как обратная частота документа измеряет уникальность слов во всей коллекции документов.

В результате поиска ключевых слов в документах с использованием выхода, при котором вы преобразуете **N** слов, имеющих первое значение для **TF – IDF** в документе, **TF – IDF** извлекает их из реальных документов. В общем виде формула **TF** представляет собой соотношение количества вхождений определенных слов в тексте к общему количеству

вхождения определённых слов в тексте к общему количеству слов в документах. В итоге, можно сделать вывод о важности слов в ходе уже проведённого анализа.

Документы содержат инверсию частоты, с которой какое – либо слово встречается в документе, называемом **IDF**. За счёт учёта **IDF** была создана возможность уменьшить количество широко употребляемых слов.

Каждому отдельному уникальному слову, входящему в состав определенного набора документов, присваивается только одно значение **IDF**. По итогу, можно сделать вывод о том, что те слова, которые чаще всего используются в документе и реже встречаются в других документах имеют более высокий вес по сравнению с теми, которые не используются вовсе. С помощью этого можно будет удалить стоп – слова, которые используются в алгоритме.

Алгоритмы кластеризации, используемые в процессе реализации метода **TF – IDF**, основаны на классическом **EM** – алгоритме, который используется для осуществления построения процесса [7].

Это метод включает в себя интегрированный подход к кластеризации, который называется **EM** (Expectation – maximization).

По мере того, как алгоритм **EM** последовательно выполняет эти шаги, он стремится к максимизации вероятности получения данных. Применяется в основном для осуществления неконтролируемых задач обучения, таких как кластеризации, где скрываются переменные. Также он имеет обширные приложения в различных областях: машинное обучение, компьютерное зрение, обработка естественного языка и использование в качестве основы для создания искусственного интеллекта.

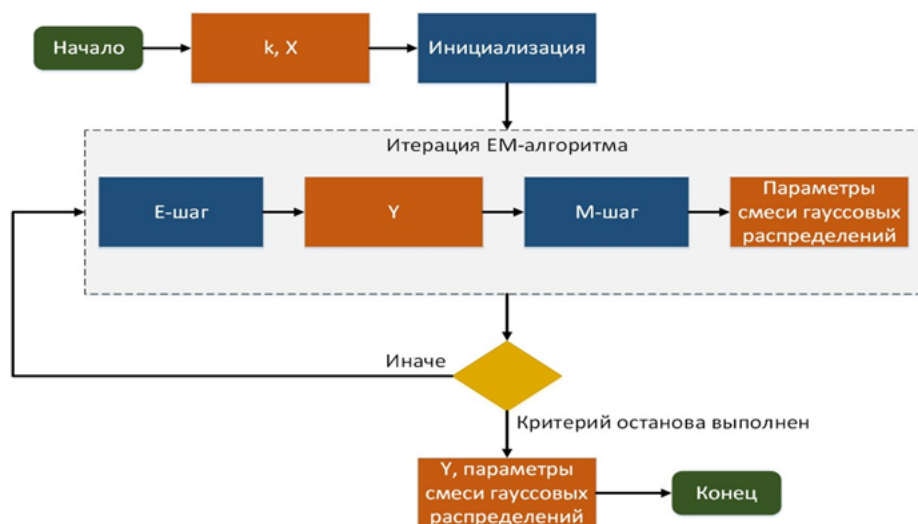


Рис. 2. EM – алгоритм представлен в виде блок – схемы.

Одной из наиболее важных задач анализа данных является кластеризация. Большинство методов и алгоритмов кластеризации имеют недостатки при использовании для обработки больших объемов данных, поэтому дальнейшее изучение данного направления

будет направлено на поиск решений возникших проблем. Этот метод, называемый кластеризацией, широко распространен в аналитической среде. Он позволяет эффективно обрабатывать большие объёмы данных и получать названия **EM** – алгоритма. Блок – схема **EM** – алгоритма представлена (рис. 2).

О сущности концепции, лежащей в основе **EM** – алгоритма, можно предположить, что наблюдения будут наблюдаться за разными кластерами с разными факторами. На выходе будут использованы два дополнительных столбца, которые обозначают расходные материалы и номер кластера.

В реальности существует препятствие того, что объект будет отнесён к этому кластеру, и прогноз наблюдения которого выше: **Critical example of this type** – алгоритм **k – means** [8].

Помимо преимуществ и недостатков, метод **TF – IDF** имеет ряд важных условий: это сравнительно с простотой и быстротой реализации, а также то, что результат соответствует более реальным условиям. Такая ситуация может возникнуть, когда главное предложение невозможно выговорить в одно и то же время. В этом методе **TF – IDF** можно эффективно использовать классические методы кластеризации (например, **k – mean**), для проведения оценок общей частотности терминов при просмотре текстовых документов, которые основаны на алгоритмах данных.

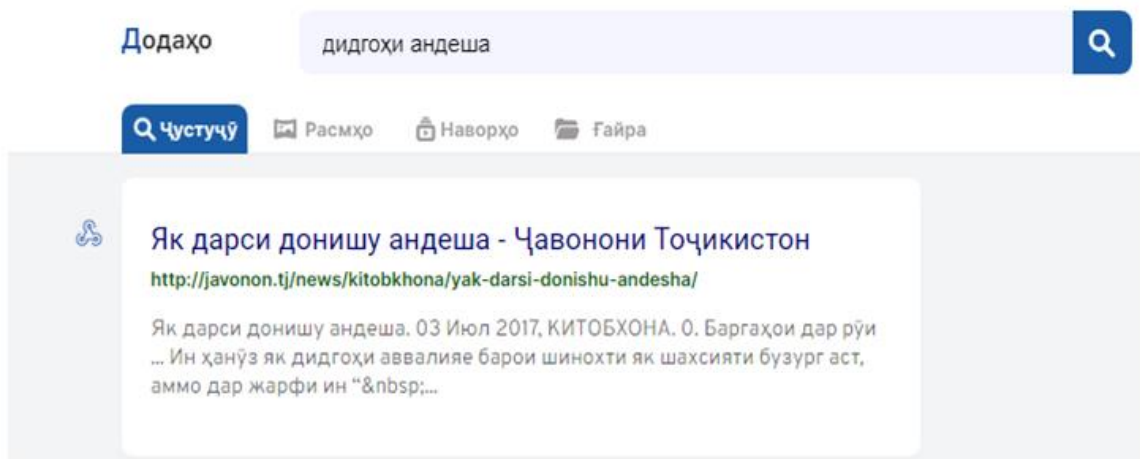


Рис. 3. Прикладной пример анализа текста в поисковом движке.

В случае необходимости объединения результатов исследования, можно воспользоваться индуктивным построением правил **CPSL** или другим языком с более выразительными средствами для представления информации. Прежде всего, необходимо обратить внимание на следующие аспекты:

- а. применение методов активного обучения;
- б. повышение уровня интерактивности;
- в. выбор гибридной методики обучения;

г. применение метода в обучении самоорганизации (bootstrapping) позволяет использовать результаты обучения на определённой стадии для подготовки исходных данных следующей ступени.

При использовании машинного обучения, в качестве начальной загрузки использования не нужно никаких дополнительных материалов, кроме вашего обучающего набора данных (которые, уже имеются) [9].

Данный блог [10] посвящён использованию начальной загрузки в различных ситуациях: её использованию, истории и способам кодирования. В исследовании также были рассмотрены некоторые преимущества перед другими известными методами проверки на совместимость.

Нашу разработанную модель можно использовать как достижение в области индуктивного логического программирования, и использовать комбинации восходящего и нисходящего подходов для того, чтобы рассматривать гипотезы с двух сторон – более общей и более специализированной, учитывая все предыдущие варианты. Так как глубокое обучение, нейронные сети, сверточные нейроны сети (CNN) и рекуррентные нейроны сети (RNN), а также их вариации, такие как LSTM и GRU, широко используемые для анализа больших текстовых данных.

В ходе исследования были изучены методы Natural Language Processing в анализе текста таджикского языка. Анализ текстовой информации стал важным аспектом в цифровой эпохе, позволяя глубже понять не только содержание, но и суть контекста. Разработка алгоритмов автоматической обработки текста, таких как токенизация, стемминг и лемматизация, обеспечивает более точное извлечение значений из больших объёмов данных. Данная модель позволит автоматизировать процессы, которые ранее требовали значительных временных, интеллектуальных и финансовых затрат.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Кодирование парами байтов (BPE) в NLP. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.geeksforgeeks.org/byte-pair-encoding-bpe-in-nlp/> (дата обращения 12.01.2024).
2. Кодирование парами байтов: алгоритм токенизации на основе подсловий. [Электронный ресурс]. URL: <https://towardsdatascience.com/byte-pair-encoding-subword-based-tokenization-algorithm-77828a70bee0> (дата обращения 07.02.2024).
3. 斯坦福 处理 语言 和 语音 - 2.4 规范化 文本. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.codetd.com/ru/article/12825782> (дата обращения 24.02.2024).
4. Введение в компьютерную лингвистику: cs.brown.edu/courses/csci2951-k/papers/cl-intro.pdf (дата обращения 19.03.2024).
5. Извлечение признаков из текстовых данных с использованием TF-IDF. [Электронный ресурс]. URL: <https://habr.com/ru/companies/otus/articles/755772/> (дата обращения 02.03.2024).
6. EM-алгоритм, его модификации и обобщения. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=EM-алгоритм>. (дата обращения 06.03.2024).
7. Кугаевских А.В., Муромцев Д.И., Кирсанова О.В. Классические методы машинного обучения. – СПб: Университет ИТМО, 2022, 53 с.

8. Руководство по анализу текста со службами ИИ Azure. [Электронный ресурс]. URL: <https://learn.microsoft.com/ru-ru/azure/synapse-analytics/machine-learning/tutorial-text-analytics-use-mmmlspark>. (дата 07.03.2024).
9. Методы выборки: начальная загрузка в машинном обучении. [Электронный ресурс]. URL: <https://enjoymachinelearning.com/blog/bootstrapping-in-machine-learning/>. (дата обращения 15.03.2024).
10. NLP: что это такое и как она работает. [Электронный ресурс]. URL: <https://skillbox.ru/media/code/nlp-что-это-такое-и-как-она-работает/>.

Ф.Г.САФАРОВ

ТАҲЛИЛИ МАЪЛУМОТҲОИ МАТНӢ БО ИСТИФОДАИ ЗЕҲНИ СУНӢӢ

Филиали Донишгоҳи миллии таҳқиқотию технологӣ МИСИС дар шаҳри Душанбе

Мақолаи мазкур ба истифодаи зеҳни сунӣ дар таҳлили матн ва мундариҷа бахшида шудааст. Мо усулҳо ва алгоритмҳои гузаронидани ин таҳқиқот, инчунин маҳдудиятҳо ва мушкилоти эҳтимолиро барои муҳаққиқони ин соҳа баррасӣ хоҳем кард. Муайян кардани тамоюлҳо дар иттилоот коркарди оқилонаи маълумотест, ки дар қабули қарорҳо кӯмак мекунад. Истихрочи додаҳо барои табдил додани маълумоти хом ба донишҳои назариявӣ кӯмак мекунад. Усулҳои коркарди забони табииро (NLP) барои истихрочи иттилоот аз ҳаҷми зиёди маълумоти матнии сохторнашуда баррасӣ мекунад. Вобаста ба мақсад, истихрочи матн метавонад ҳамчун раванди мустақил дар ҳалли мушкилот ва ҳам барои ҳамкориҳои системаҳои иттиботӣ (мошинҳо) истифода шавад.

Калимаҳои калидӣ: зеҳни сунӣ, иртибот, матн, ҷустуҷӯи иттилоот, ҳамгирии додаҳо, мантиқи тавсифӣ, алгоритм, навоарӣ, таснифоти матн.

F.G.SAFAROV

ANALYSIS OF TEXT DATA USING ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Branch of the national university of science and technology MISIS in Dushanbe.

The article is devoted to the use of artificial intelligence in text and content analysis. We will review the methods and algorithms for conducting this research, as well as the limitations and potential challenges for researchers in this field. Identifying trends in information is the intelligent processing of data that helps in decision making. Data mining helps turn raw data into theoretical knowledge. Discusses natural language processing (NLP) techniques for extracting information from large volumes of unstructured text data. Depending on the purpose, intelligent text analysis can be used as an independent process for solving problems, or for interaction between telecommunication systems (machines).

Key words: artificial intelligence, communication, technological progress, information progress, information retrieval, data integration, descriptive logic, algorithm, database, queuing theory, text classification.

Сведения об авторе:

Сафаров Файзуллоджон Гурезович – кандидат технических наук, Душанбинский филиал Национального исследовательского технологического университета МИСИС в г. Душанбе, доцент кафедры «Информационных технологий и автоматизаций». E-mail: safarov_f-o@mail.ru.

УДК 658.567

Специальность: 1.3.3 – Теоретическая физика

Ш.Ф.МУХАМЕДОВА

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ
ДИССИПАТИВНЫХ БРИЗЕРОВ В НЕЛИНЕЙНОМ СКАЛЯРНОМ
УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА С ОТТАЛКИВАЮЩЕМ ПОТЕНЦИАЛОМ**

Таджикский государственный университет права, бизнес и политики

Поступила в редакцию 28.06.2024 г.

Проведено численное моделирование эволюции многосолиitonного решения нелинейного уравнения Шрёдингера с отталкивающим потенциалом, описывающим волны разрежения плотности в конденсате Бозе-Эйнштейна, с использованием разностных схем. Выявлено, что динамика таких решений, проявляющих бризероподобное поведение, сопровождается осцилляциями, в результате которых система постепенно достигает равновесного состояния. Показано, что в условиях диссипации и подкачки неподвижные многосолиitonные решения демонстрируют устойчивую бризерную динамику, характеризующуюся локализацией и регулярными колебаниями, что инициирует процесс самоорганизации и приводит к формированию долгоживущих когерентных структур.

Ключевые слова: диссипативные солитоны, отталкивающий потенциал, скалярное нелинейное уравнение Шрёдингера, диссипация, подкачка, бризер, диссипативный бризер, когерентная структура.

В физике при исследовании нелинейных волновых процессов часто рассматриваются системы дифференциальных уравнений, описывающие взаимодействие ограниченного количества волн или волновых пакетов. Одной из наиболее популярных и применяемых моделей для таких задач является скалярное нелинейное уравнение Шрёдингера (СНУШ).

$$i \psi_t + \psi_{xx} + u(x, t)\psi = 0. \quad (1)$$

Адрес для корреспонденции: Мухамедова Шоира Файзуллоевна. 735700, г. Худжанд, Республика Таджикистан, Согдийская область, 17 мкр-н, дом 1, Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики. E-mail: shoirra74@mail.ru.

Скалярное нелинейное уравнение Шрёдингера играет важнейшую роль в описании динамики нелинейных волн в разнообразных областях физики, включая квантовую механику, нелинейную оптику и гидродинамику.

В этом уравнении роль потенциала может выполнять низкочастотная волна, описываемая одним из следующих уравнений

$$\square u(x, t) = -|\psi|_{xx}^2 \quad (2)$$

(Захаров Б.Е. [1]),

$$(\partial_x + \partial_t)u(x, t) = -|\psi|_x^2 \quad (3)$$

(Яджима-Ойкава [2]),

$$(\square + \alpha \partial_x^4)u(x, t) - \beta \partial_x^2 u(x, t) = \pm |\psi|_{xx}^2 \quad (4)$$

(Маханьков В.Г. [3-4]).

Уравнение (1) с потенциалами вида (2)–(4) в ряде случаев используется для описания смеси газов квазичастиц, таких как магнотроны и фононы, в магнитных кристаллах со слоистой структурой, где межслойные взаимодействия оказывают влияние на динамику кристалла. Кроме того, оно применяется для моделирования магнитоупругих эффектов в подобных материалах. При низких температурах скалярное уравнение Шрёдингера используется для моделирования бозе-газа, конденсата Бозе-Эйнштейна, систем с двухчастичным притяжением и трёхчастичным отталкиванием, а также для других моделей, относящихся к теории конденсированных сред [5].

В данной работе рассматривается скалярное нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) с отталкивающим потенциалом:

$$i \psi_t - \psi_{xx} + 2(|\psi|^2 - b^2)\psi = 0 \quad (5)$$

Следует отметить, что в работах [6, 7] рассматриваются аспекты устойчивости (в физическом смысле) и поведения многосолитонных решений скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с конденсатными граничными условиями. Особый акцент сделан на двухсолитонные неубывающие решения СНУШ с потенциалами (2) и (3), представленные в форме (6). Эти решения подробно проанализированы в работах [8, 9], где для численного моделирования применяется метод делинеаризации.

$$\psi = \left(1 + \frac{B_3 \cos(\beta^-(x + v^-t) - h_3) + B_4 e^{\beta^+(x + v^+t)}}{B_1 \operatorname{ch}(\beta^+(x + v^+t) - h_1) + B_2 \operatorname{ch}(\beta^-(x + v^-t) + h_2)} \right) e^{ik_1(x + k_1 t)}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
B_1 &= \left(\frac{C_{11}C_{22}|\varkappa_{12}|^2}{|\bar{\varkappa}_{12}|^2 \varkappa_{11}\varkappa_{22}} \right)^{\frac{1}{2}}, & e^{h_1} &= \left(\frac{|\varkappa_{12}|^2}{C_{11}C_{22}\varkappa_{11}\varkappa_{22}|\bar{\varkappa}_{12}|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
B_2 &= \left(\frac{C_{11}C_{22}}{\varkappa_{11}\varkappa_{22}} \right)^{\frac{1}{2}}, & e^{h_2} &= \left(\frac{C_{11}\varkappa_{11}}{C_{22}\varkappa_{22}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
B_3 &= \left(\frac{C_{11}C_{22}}{(k_1 - \varkappa_1)(k_1 - \varkappa_2)} \right)^{\frac{1}{2}}, & e^{-h_3} &= \left(\frac{C_{22}(k_1 - \varkappa_2)}{C_{11}(k_1 - \varkappa_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
B_4 &= - \left(\frac{\bar{\varkappa}_{21}}{\varkappa_{12}\varkappa_{22}(k_1 - \varkappa_1)} + \frac{\bar{\varkappa}_{12}}{\varkappa_{21}\varkappa_{11}(k_1 - \varkappa_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
v^- &= 2 \frac{\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}, & v^+ &= 2 \frac{\alpha_2\beta_2 + \alpha_1\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \\
\varkappa_{ij} &= \varkappa_i - \bar{\varkappa}_j, & \bar{\varkappa}_{ij} &= \bar{\varkappa}_i - \varkappa_j, & \beta^+ &= \beta_1 + \beta_2, & \beta^- &= \beta_2 - \beta_1, \\
v^\pm &= \frac{2(\alpha_2\beta_2 \pm \alpha_1\beta_1)}{\beta_2 \pm \beta_1}, & i, j &= 1, 2.
\end{aligned}$$

Численное моделирование задачи Коши для уравнения (5) с конденсатными граничными условиями, где в качестве начальных данных использовалось двухсолитонное решение [10], детально изучено автором в работах [11, 12]. В отличие от предыдущих исследований, в настоящей работе применяются новые параметры расчёта, что позволяет получить более глубокое представление о динамике диссипативных бризероподобных явлений в различных физических сценариях.

Целью данного исследования является разработка математической модели, описывающей поведение диссипативных солитоноподобных структур в системах, представленных СНУШ с отталкивающим потенциалом. Основное внимание уделено включению новых параметров диссипации и подкачки, их влиянию на развитие и устойчивость бризеров, а также выполнению численных экспериментов для визуализации и анализа динамических свойств многосолитонных решений в обновлённых условиях. Полученные результаты позволяют точнее моделировать реальные физические процессы и открывают возможности для разработки современных технологий управления нелинейными волновыми системами.

Важно подчеркнуть, что СНУШ с кубической нелинейностью, включая уравнение вида (5) с отталкивающим потенциалом, является полностью интегрируемым. Это подразумевает наличие бесконечного множества интегралов движения, или сохраняющихся величин. Среди них первостепенное значение имеют интеграл числа частиц N и полная

энергия системы, известная как гамильтониан H , которые активно применялись в ходе численного моделирования. Формулы для этих интегралов имеют следующий вид:

$$N = \int |\psi|^2 dx, H = \int \left(|\psi_x|^2 - (|\psi|^2 - b^2)^2 \right) dx \quad (7)$$

Для модели СНУШ с отталкивающим потенциалом (5) разработан комплекс компьютерных программ на основе теории разностных схем. В рамках подхода построена трёхслойная разностная схема с пятиточечным шаблоном и весами явного типа, обеспечивающая второй порядок точности по времени и координате. Условие устойчивости схемы задаётся соотношением $\tau \leq \frac{h^2}{4}$, где τ и h обозначают шаги по времени и координате соответственно. Моделирование проводилось на интервале $x \in [-100, 100]$ с шагом $h=0.0045$ и временном диапазоне $t \in [0, 40]$ с шагом по времени $\tau=0.00029$.

В ходе тестовых вычислений наблюдалось сохранение устойчивости интегралов числа частиц и полной энергии с относительной точностью $\Delta N / N \approx 10^{-3} - 10^{-4}$ и $\Delta H / H \approx 10^{-3} - 10^{-4}$. Для анализа результатов численного моделирования применялись инструменты визуализации, реализованные в среде Matlab. На границах области интегрирования использовались конденсатные граничные условия. Итоговые результаты численных экспериментов для параметров $k_1 = 0.06$, $b = 0.4$, $\alpha_1 = 0.02$, $\alpha_2 = 1.2$, $\beta_1 = 0.086$, $\beta_2 = 0.02$, $\lambda = 0.89$, $\gamma_1 = 1.5$, $\gamma_2 = 1.482$ представлены на рисунках 1–5.

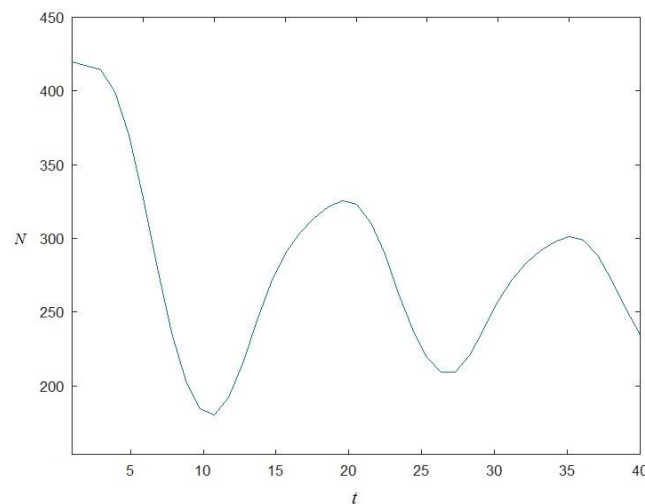


Рис. 1. График интеграла числа частиц солитона $N = \int |\psi|^2 dx$ от времени t .

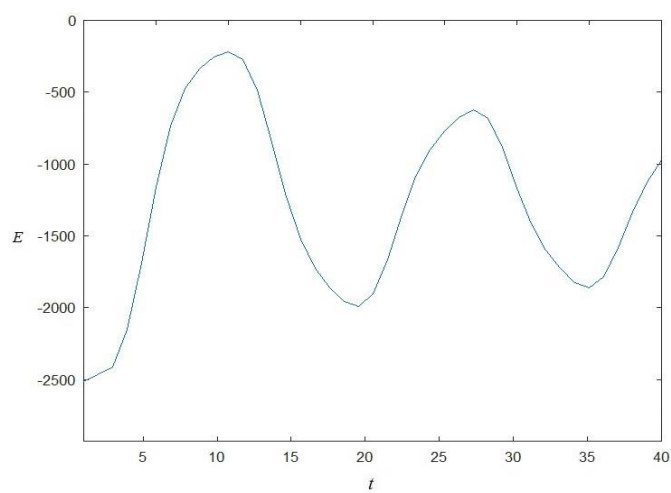


Рис. 2. График интеграла энергии солитона от времени.

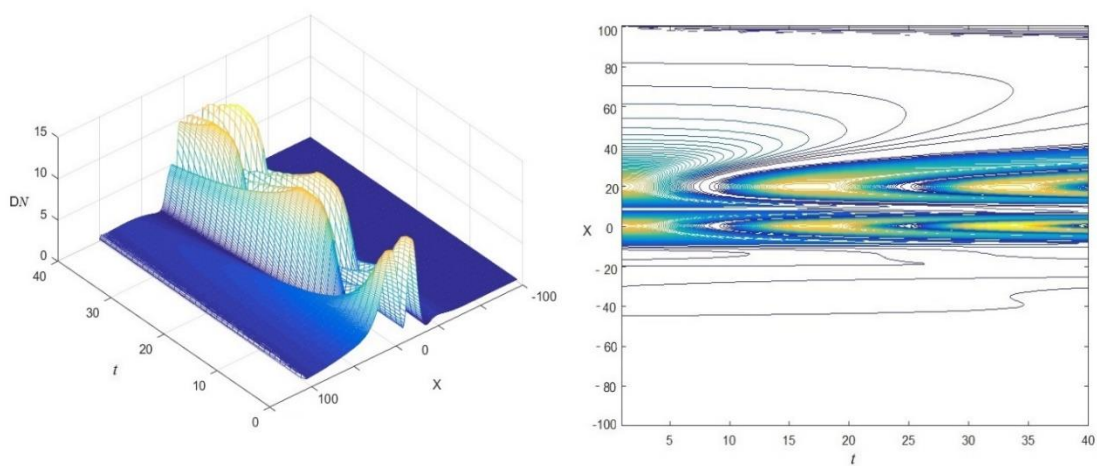


Рис. 3. Эволюция плотности числа частиц солитона.

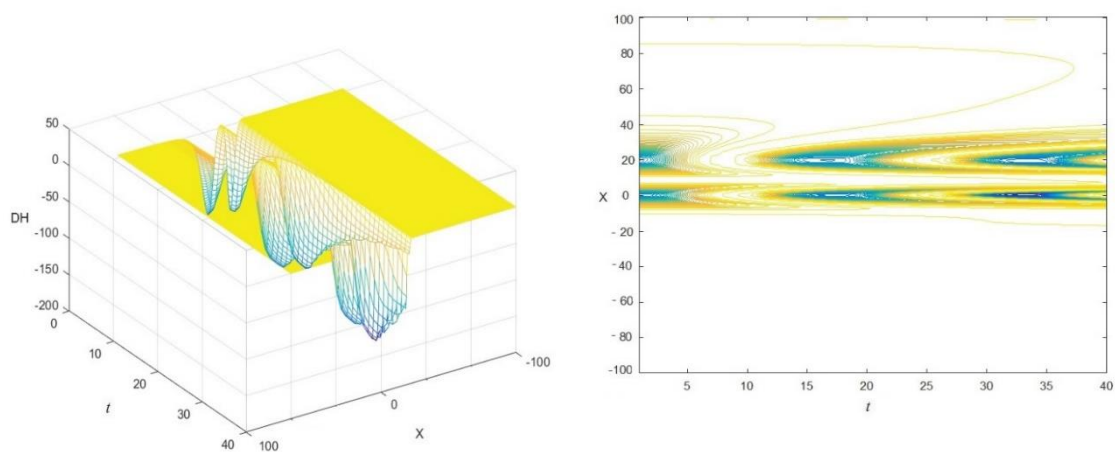


Рис. 4. Эволюция плотности энергии солитона.

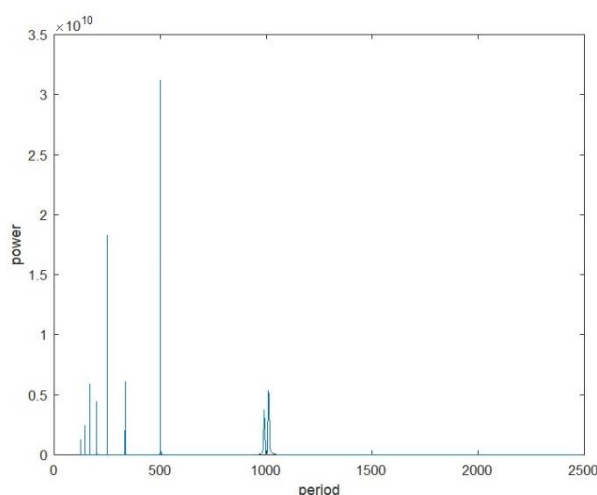


Рис. 5. Фурье-анализ пространственной модуляции плотности энергии солитона.

Результаты численных экспериментов показывают, что интеграл числа частиц N в системе испытывает осцилляции во времени t с постепенным уменьшением амплитуды (см. рис. 1), что свидетельствует о динамической релаксации системы и её стремлении к устойчивому состоянию при заданных параметрах. Зависимость интеграла энергии системы E от времени t , представленная на рис. 2, демонстрирует аналогичные осцилляции с уменьшающейся амплитудой, что указывает на перераспределение энергии в системе, однако остаточные колебания сохраняются, и система достигает устойчивого состояния. На трёхмерном графике, изображённом на рис. 3, показана эволюция плотности числа частиц DN во времени t и пространственной координате x . График демонстрирует бризероподобное поведение, характеризующуюся локализованными структурами. Эволюция плотности энергии DN , представленная на рис. 4, также демонстрирует колебательное поведение во времени t и пространственной координате x . Эти изменения отражают динамическую природу бризерного решения и перераспределение энергии в системе при отсутствии диссипации и подкачки. Результаты Фурье-анализа пространственной модуляции плотности энергии солитона, представленные на рис. 5, показывают выраженные спектральные пики, соответствующие доминирующим частотам модуляции. Основные гармоники наблюдаются на периодах около 500 и 1000, что подтверждает наличие регулярных структур в динамике солитона. Таким образом, выявлено формирование бризероподобного солитона, характеризующегося локализованными структурами.

Следует отметить, что в реальных физических процессах диссипация является важным фактором. В оптических средах, например, диссипация возникает из-за непрозрачности материала, наличия микроскопических неоднородностей и поглощения света. Эти эффекты приводят к потере энергии, что существенно влияет на динамику оптических импульсов и солитонов. Подкачка, в свою очередь, представляет собой процесс, при котором внешние силы компенсируют потери энергии. В системах, таких как оптические волокна или конденсированные среды, подкачка может осуществляться посредством внешних

переменных электромагнитных полей. Эти поля могут вносить дополнительную энергию в систему, что позволяет поддерживать устойчивость солитонов и других локализованных структур. Таким образом, взаимодействие между диссипацией и подкачкой определяет эволюцию нелинейных волновых решений, влияя на их динамические свойства и устойчивость. Важным аспектом является также то, что как диссипация, так и подкачка могут варьироваться в зависимости от внешних условий и свойств среды, что добавляет сложность в моделирование и анализ таких систем [13]. Следовательно, для точного описания динамики в таких системах необходимо учитывать эффекты подкачки и диссипации. При эффективном учете подкачки и диссипации уравнение (5) примет следующий вид

$$i\psi_t - \psi_{xx} + 2(|\psi|^2 - b^2)\psi + i\delta\psi + i|\psi|^2\psi = 0 \quad (8)$$

где δ – коэффициент диссипации, а ε – коэффициент разности нелинейных усилений и потерь.

Рассмотрим поведение многосолитонного решения (6) в среде с диссипацией и подкачкой, описываемое уравнением (8). Для этого проводится численное решение задачи Коши для уравнения (8), используя решение (6) при $t=0$ в качестве начальных условий. В качестве граничных условий применяются условия Неймана, что обеспечивает более точное моделирование воздействия среды на динамику солитонов.

В ходе серии численных экспериментов коэффициенты диссипации δ и подкачки ε варьировались в следующих интервалах $[-0.02, 0.02]$ и $[-0.02, 0.02]$ с шагом 0.001. Результаты численных экспериментов при учёте диссипации и подкачки при следующих параметрах $k_1 = 0.06$, $b = 0.45$, $\alpha_1 = 0.02$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 0.099$, $\beta_2 = 0.0095$, $\lambda = 0.89$, $\gamma_1 = 1.46$, $\gamma_2 = 1.475$, $\varepsilon = 0.002$, $\delta = 0.003$ приведены на следующих рисунках.

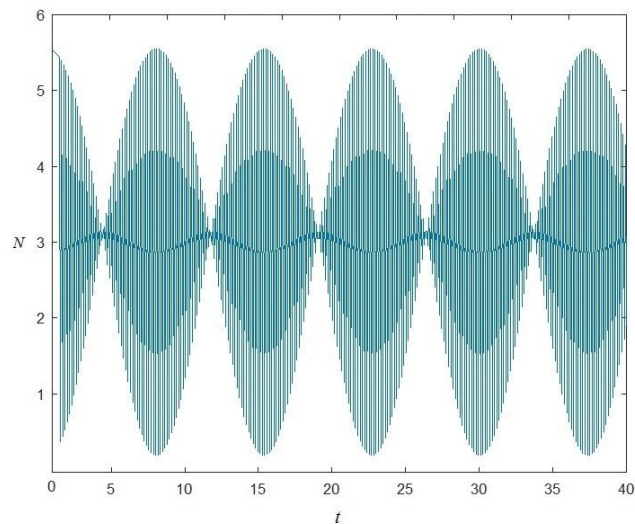


Рис. 6. Зависимость интеграла числа частиц солитона $N = \int |\psi|^2 dx$ от времени t .

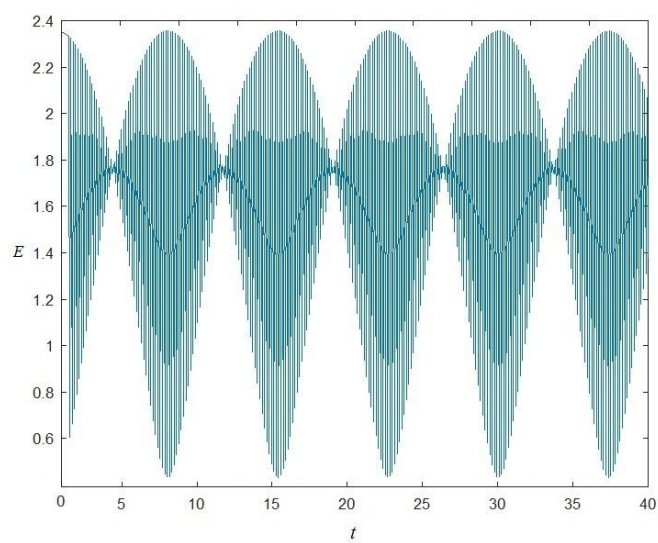


Рис. 7. График интеграл энергии солитона.

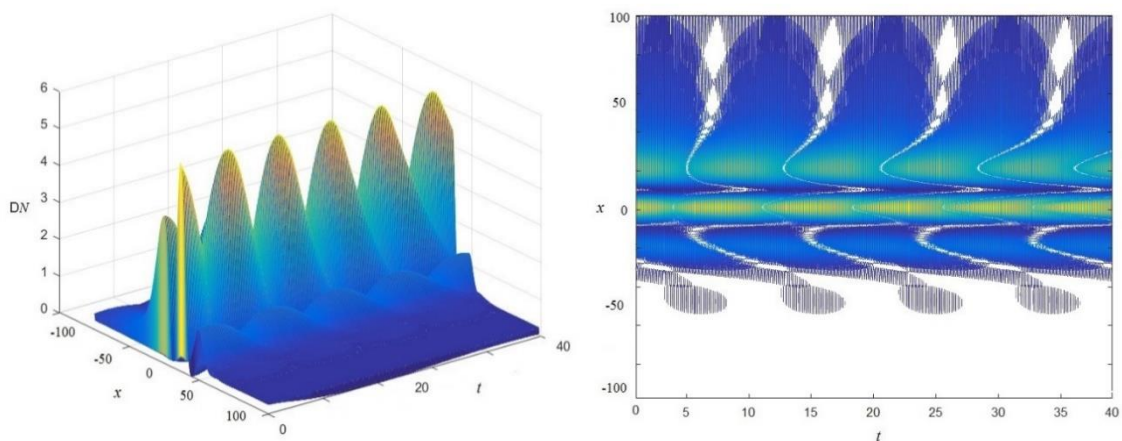


Рис. 8. Эволюция плотности числа частиц солитона.

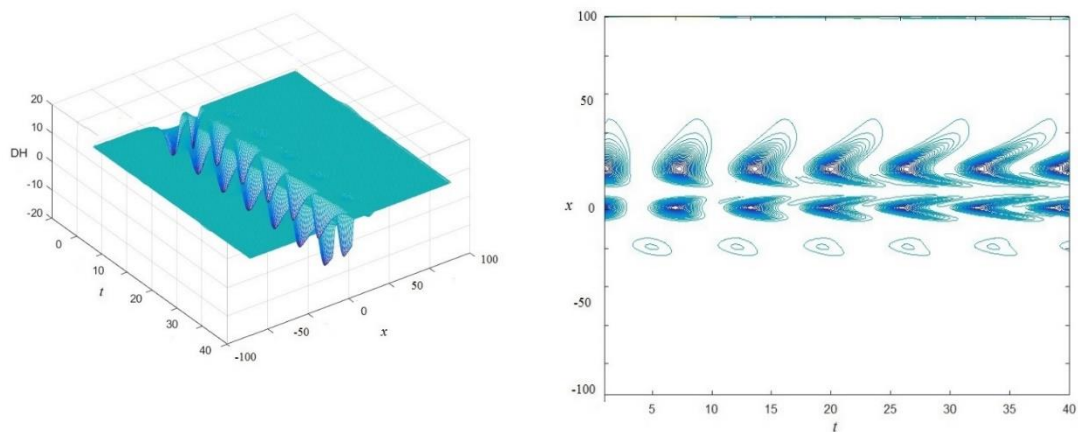


Рис. 9. Эволюция плотности энергии солитона.

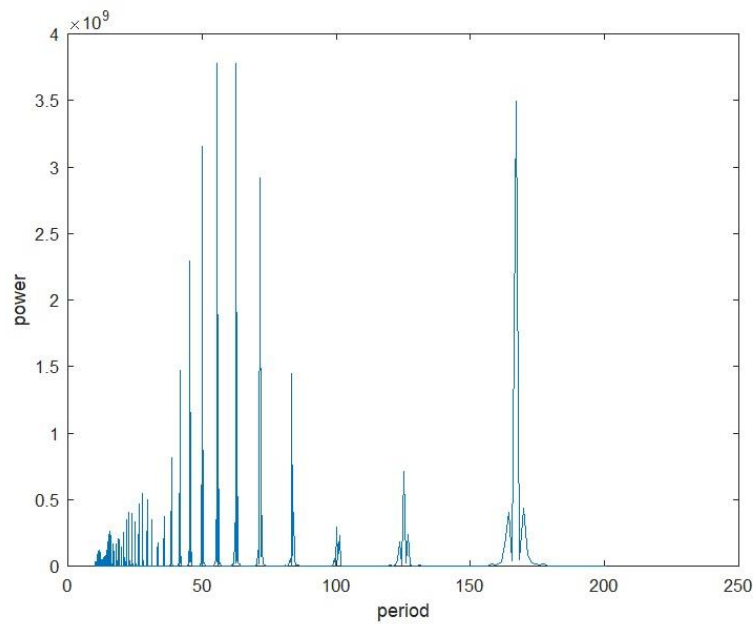


Рис. 10. Фурье-анализ пространственной модуляции плотности энергии солитона.

На рис. 6-10 представлены результаты анализа динамики системы с учётом подкачки и диссипации. На рис. 6 зависимость интеграла числа частиц N от времени t демонстрирует устойчивые осцилляции с повторяющимися амплитудой и периодом, что свидетельствует о формировании баланса между подкачкой и диссипацией, поддерживающего регулярный режим осцилляций. Аналогичное поведение наблюдается на рис. 7, где показана зависимость полной энергии E от времени t . Осцилляции энергии отражают стабилизированное взаимодействие между подкачкой и диссипацией, обеспечивающее устойчивую динамику системы. На рис. 8 представлена трёхмерная и двумерная эволюция плотности числа частиц DN во времени t и пространственной координате x . Помимо регулярного бризерного поведения с локализованными структурами и повторяющимися пульсациями плотности, на графике наблюдается появление третьего "горба", что указывает на усложнение пространственной структуры и влияние нелинейных эффектов. Эволюция плотности энергии DH , представленная на рис. 9, демонстрирует колебательное поведение с локализованными структурами под влиянием подкачки и диссипации. Результаты Фурье-анализа, выполненные с использованием пакета Fast Fourier Transform в системе Matlab на рис. 10, показывают добавление выраженных спектральных гармоник, соответствующих основным частотам модуляции плотности энергии. Основные пики дополнительных частот с высокой мощностью, наблюдаемые на периодах около 50 и 150, подтверждают регулярность пространственных структур в динамике системы и устойчивость бризерного режима. Продолжая обсуждение представленных рисунков, можно отметить, что, несмотря на воздействие диссипации и подкачки, многосолитонное решение (6) демонстрирует устойчивое бризерное поведение. Долговременная устойчивость двухсолитонного бризера

обусловлена правильной подборкой параметров затухания и внешней подкачки при нулевой скорости движения, что обеспечивает сохранение его локализованной структуры.

Таким образом, в данной диссипативной системе бризероподобный солитон сохраняет пространственную локализацию на протяжении длительного времени и демонстрирует сложную динамику, включающую пульсации и колебания, даже при воздействии внешней осцилляции, что подтверждает устойчивость системы. Взаимодействие диссипации и подкачки инициирует процесс самоорганизации, приводящий к формированию когерентной диссипативной структуры [13, 14, 15]. В результате образуется долгоживущий диссипативный бризер, характеризующийся устойчивым и согласованным поведением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е. Коллапс ленгмюровских волн. – ЖЭТФ, 1972, том 62, с. 1745-1759.
2. Yajima N., Oikawa M. Formation and interaction of Sonic-Langmuir solitons - inverse scattering method. – Progress of Theoretical Physics, 1976, vol. 56, pp. 1719-1739.
3. Makhankov V.G. On stationary solutions of Schrödinger equation with a self-consistent potential satisfying Boussinesq's equations. – Physics Letters, 1974, vol. 50, №1, pp. 42-44.
4. Маханьков В.Г. Солитоны и численный эксперимент. – ЭЧАЯ. 1983, т.14, В.1, с. 123-180.
5. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагнитченности. Динамические и топологические солитоны. – Киев: Наукова Думка, 1983, 189 с.
6. Абдуллоев Х.О., Муминов Х.Х., Максудов А.Т. Новый тип двухсолитонных решений векторного нелинейного уравнения Шрёдингера со смешанными граничными условиями. – Журнал технической физики, 1993, т.63, №3, с. 180-185.
7. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х., Рахимов Ф.К., Маханьков В.Г. Двухсолитонные решения скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с конденсатными граничными условиями. – Журнал технической физики. 1995, том 65, в. 6, с. 191-196.
8. Дубровин Б.А., Маланюк Т.М., Кричевер И.М., Маханьков В.Г. Точные решения нестационарного уравнения Шрёдингера с самосогласованными потенциалами. – ЭЧАЯ. 1988, т. 19, в. 3, 579 с.
9. Маханьков В. Г. Солитоны и численный эксперимент. – ЭЧАЯ. 1983, т.14, Вып.1, с. 123-180.
10. Муминов Х.Х., Асгари-Ларими М. Многосолитонные решения векторного двухкомпонентного нелинейного уравнения Шрёдингера со смешанными граничными условиями. – Мат-лы X Междунар. науч.-практ. интернет-конф. «Проблемы и перспективы развития науки в начале третьего тысячелетия в странах СНГ» 29-30 апреля 2013 г. – Сборник научных работ, Переяслав-Хмельницкий, с.155-157.
11. Муминов Х.Х., Мухамедова Ш.Ф. Численное моделирование эволюции многосолитонных решений скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с потенциалом отталкивания. – Учёные записки, 2018, №2, с. 6-12.
12. Муминов Х.Х., Мухамедова Ш.Ф. Диссипативные бризеры скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с отталкивающим потенциалом. – ДАН РТ, 2019, т.62, №1-2, с. 70-78.
13. Akhmediev N., Ankiewicz A. Dissipative Solitons. – Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 2005.
14. Ахмедиев Н., Анкевич А. Диссипативные солитоны. – М.: Физматлит, 2008, с. 504.
15. Земляная Е.В. Численный анализ движущихся солитонов в нелинейном уравнении Шрёдингера с параметрической накачкой и диссипацией. Земляная Е.В., Барашенков И.В. - Математическое моделирование. 2005, т. 17, № 1, с. 65-78.

Ш.Ф.МУХАМЕДОВА

**АМСИЛАСОЗИИ МАТЕМАТИКӢ ЭВОЛЮТСИЯИ БРИЗЕРӢОИ
ДИССИПАТИВӢ ДАР МУОДИЛАИ СКАЛЯРИИ ҒАЙРИХАТТИИ
ШРЕДИНГЕР БО ПОТЕНСИАЛИ ТЕЛАДИӢӢ**

Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ бизнес ва сиёсати Тоҷикистон

Моделсозии ададӣ эволютсияи ҳалли бисёрсолитонии муодилаи ғайрихаттии Шредингер бо потенциали теладихӣ, ки конденсати Бозе-Эйнштейнро муайян мекунад, дар асоси назарияи схемаи фарқӣ, дида баромада шудааст. Таҳлили динамикаи ҳалли бисёрсолитонӣ, ки рафтори монанди бризерро муайян мекунад, нишон дод, ки ҳалл таркибӣ инкишоф ёфта, система асимптотикӣ ба ҳолати мувозинатии худ ҳаракат мекунад. Нишон дода шуд, ки дар шароити диссипатсия ва дамкунӣ, ҳалҳои бисёрсолитонии динамикаи устувори бризерро бо локализатсия ва оссиляцияҳои мунтазам нишон медиҳанд, ки раванди худташқилшавиро оғоз мекунад ва ба ташаккули сохторҳои когерентии дарозумр меоварад.

Калимаҳои калидӣ: солитонҳои диссипативӣ, потенциали теладихӣ, муодилаи скалярии ғайрихаттии Шредингер, диссипатсия, дамкунӣ, бризер, сохтори когерентӣ.

Sh.F.MURHAMEDOVA

**MATHEMATICAL MODELING OF THE EVOLUTION OF DISSIPATIVE
BREATHERS IN THE NONLINEAR SCALAR SCHRÖDINGER EQUATION
WITH REPULSIVE POTENTIAL**

Tajik State University of Law, Business and Politics

Numerical modeling of the evolution of a multisoliton solution of the nonlinear Schrödinger equation with a repulsive potential, describing rarefaction density waves in a Bose–Einstein condensate, was carried out using finite difference schemes. It was revealed that the dynamics of such solutions, exhibiting breather-like behavior, are accompanied by oscillations that gradually lead the system to an equilibrium state. It was shown that under conditions of dissipation and pumping, stationary multisoliton solutions demonstrate stable breather dynamics, characterized by localization and regular oscillations, which initiate a process of self-organization and result in the formation of long-lived coherent structures.

Key words: dissipative solitons, repulsive potential, scalar nonlinear Schrödinger equation, dissipation, pumping, breather, coherent structure.

Сведения об авторе:

Мухамедова Шоира Файзуллоевна – кандидат физико-математических наук, Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, доцент, заведующая кафедрой информационно-коммуникационных технологий и программирования. E-mail: shoira74@mail.ru.

УДК 523. 532

Специальность: 1.3.1. Физика космоса, астрономия.

Г.И.КОХИРОВА, Е.С.БАКАНАС*, А.П.КАРТАШОВА*,
Ф.Д.РАХМАТУЛЛАЕВА, В.ПИРОВА

АНАЛИЗ ПРЕД-ПЕРИГЕЛИЙНОЙ АКТИВНОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ КОМЕТЫ C/2019 U5 (PANSTARRS) В 2022 Г.

*Национальная академия наук Таджикистана,
Институт астрофизики НАН Таджикистана,
Институт астрономии РАН

Поступила в редакцию 14.11.2024 г.

В работе представлены результаты определения фотометрических данных гиперболической кометы C/2019 U5 с использованием ее наблюдений в Международной астрономической обсерватории Санглок в 2022 г. Выявлены наличие комы и хвоста, а также значительный уровень пылевой активности, соответствующие нормальной кометной активности в период приближения кометы к Солнцу. Фотометрические данные кометы в основном соответствуют малым телам Солнечной системы на удаленных орбитах.

Ключевые слова: комета, орбита, фотометрия, апертура, морфология, звездная величина, показатель цвета, пылепроизводительность.

Введение

К настоящему времени (ноябрь 2024 г.) в базах данных содержатся сведения о 3974 нумерованных кометах [1]. Из них 492 кометы имеют орбитальные элементы, типичные для гиперболических орбит, а именно их эксцентриситет превышает 1, вследствие чего орбиты имеют форму гиперболы. Около половины гиперболических комет (262 кометы [1]) имеют ретроградные орбиты, то есть, наклонение их орбит к плоскости эклиптики составляет свыше 90° и их происхождение может быть связано с облаком Оорта.

Имеются различные и даже противоречивые объяснения наличия объектов с очень высоким наклонением в современной Солнечной системе и поэтому достоверно их

Адрес для корреспонденции: Кохирова Гулчехра Исроиловна. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/5, Институт астрофизики НАНТ. E-mail: kokhirova2004@mail.ru.

происхождение пока не установлено. Имеющиеся гипотезы показывают, что вопрос происхождения далеких комет с ретроградными орбитами требует дальнейших исследований. И в решении этой проблемы важная роль отводится наблюдениям таких комет, в результате которых можно определять их динамические и физические свойства, необходимые для установления их природы и отслеживания эволюции. Учитывая, что каждую гиперболическую комету можно наблюдать только в одном появлении, каждый такой наблюдательный набор приобретает уникальную ценность.

В данной работе мы представляем анализ фотометрических наблюдений кометы C/2019 U5 (PANSTARRS) (далее C/2019 U5) с гиперболической (эксцентриситет $e=1.002$) ретроградной орбитой (наклонение $i=113.5^\circ$), элементы которой приведены в табл.1 [1]. Объект был открыт 22 октября 2019 г., по первым наблюдениям вплоть до лета 2020 г. кометной активности для этого объекта не было обнаружено (в тот период он находился на гелиоцентрическом расстоянии около 8.5 а.е.), поэтому на тот период он классифицировался как гиперболический астероид [2]. Однако новый объект C/2019 U5 по мере приближения к Солнцу проявил типичные признаки кометной активности в виде комы и хвоста, подтвердив статус кометы.

Наблюдения, проведенные в момент прохождения перигелия, позволяют оценить параметры кометы, учитывая гиперболическую орбиту кометы, такие данные приобретают особую значимость для исследования проблемы происхождения высоко-наклоненных долгопериодических комет.

Таблица 1

Элементы орбиты кометы C/2019 U5 (J2000.0)

Эпоха	a^1 , а.е.	e^2	q^3 , а.е.	Q^4 , а.е.	i^5 , град.	ω^6 , град.	Ω^7 , град.	P^8 , лет
11.07.2022	-2688.2	1.001	3.62	-	113.52	181.52	2.64	-

¹большая полуось, ²эксцентриситет, ³перигелийное расстояние, ⁴афелийное расстояние, ⁵наклонение, ⁶аргумент перигелия, ⁷долгота восходящего узла, ⁸период обращения.

Наблюдения и обработка полученных изображений

Фотометрические наблюдения кометы C/2019 U5 проведены в Международной астрономической обсерватории Санглох (MAOC) Института астрофизики НАНТ на телескопе Цейсс-1000 в 2022 г. в течение пяти ночей: 2 ночи в мае, 2 ночи в июне и одна ночь в сентябре. Фокусное расстояние телескопа (фокус Кассегрена) $F=13.3$ м, при этом масштаб получаемого изображения равен 63 мкм/угл.с. Регистрация кометы выполнялась с помощью ПЗС-камеры FLI (ProLine) 16803. Размер и поле зрения матрицы камеры составляют 4096×4096 пикселей и $11' \times 11'$ соответственно, масштаб матрицы (pixel scale) равен $0.18''$ на пиксель. Многоцветные наблюдения проведены с использованием стандартных широкополосных фотометрических фильтров системы Джонсона-Козинса – *BVR*, позволяющие выделить соответствующий диапазон спектра при наблюдениях. Для уменьшения уровня шумов ПЗС камеру охлаждают до температуры -20°C . Для учета темного сигнала в

первичной обработке кадров используются кадры «Dark», для выравнивания полей изображений – кадры «Flat», для учета ошибок матрицы ПЗС-камеры снимаются кадры «Bias». Эти кадры были получены в период наблюдений. Сводка наблюдений приведена в табл. 2.

Таблица 2

Журнал наблюдений кометы C/2019 U5 в МАОС в 2022 г.

Дата	¹ UTC чч:мм:сс	² Exp, с	³ N	⁴ r, а.е.	⁵ Δ, а.е.	⁶ α °	⁷ φ °	Фильтр
2022-05-06	17:24:39	150	9	4.639	4.057	119.5	10.9	B
	17:29:23	120	9	4.639	4.057	119.5	10.9	R
	17:27:16	120	9	4.639	4.057	119.5	10.9	V
2022-05-07	15:57:53	150	10	4.630	4.052	119.3	11.0	B
	16:02:38	120	10	4.630	4.052	119.3	11.0	R
	16:00:31	120	10	4.630	4.052	119.3	11.0	V
2022-06-10	17:09:55	80	20	4.459	4.107	103.4	12.8	B
	17:14:05	40	20	4.455	4.107	103.5	12.8	R
	17:13:18	40	20	4.455	4.107	103.5	12.8	V
2022-06-11	17:41:35	80	19	4.450	4.113	102.8	12.9	B
	17:44:06	40	18	4.450	4.113	102.8	12.9	R
	17:43:09	50	19	4.450	4.113	102.8	12.9	V
2022-09-13	14:35:43	60	15	4.034	4.828	34.1	8.0	B
	15:00:40	60	15	4.032	4.830	33.7	8.0	R
	15:35:52	60	16	4.032	4.830	33.7	8.0	V

¹мировое время, ²длительность экспозиции, ³количество кадров, ⁴гелиоцентрическое расстояние, ⁵геоцентрическое расстояние, ⁶позиционный угол направления на Солнце, ⁷фазовый угол.

В моменты наблюдений кома кометы была достаточно большой (рис.1), поэтому проводилась оценка звездных величин при разных значениях апертуры. Обработка, включая калибровку изображений, сложение кадров, вычисления проводилась в специальной программе для обработки изображений астероидов и комет – Tucho Tracker [3]. Для оценки видимых звездных величин были использованы звезды – солнечные аналоги, находившиеся в одном поле зрения с кометой. Данные для звезд были взяты из фотометрического каталога ATLAS [4]. При оценке звездных величин ошибки составляли для фильтра B – порядка 0.05 зв.вел., для фильтров V и R – 0.01-0.03 зв.вел. в зависимости от погодных условий. Не все кадры с кометой, полученные 10 июня и 13 сентября, оказались пригодными для обработки, поэтому фотометрические данные для этих ночей здесь не приводятся.



Рис. 1. Кадр с кометой C/2019 U5, Санглох, 6 мая 2022 г., R фильтр, эксп. 150 с.

Морфология кометы

Наши наблюдения проведены в период, когда комета C/2019 U5 находилась в активной стадии, характеризующейся наличием комы вокруг ее ядра и протяженного хвоста. Для исследования морфологии кометы мы просуммировали все изображения в фильтре R, полученные 6 мая 2022 г., а затем использовали метод улучшения для выделения низкоконтрастных структур в кометной коме. Полученное таким методом изображение кометы приведено на рис. 2. Как видно, четко выделяемое ядро кометы окружено яркой плотной однородной комой симметричной формы, которая постепенно переходит в более разреженный относительно короткий хвост, в конце сливающийся с окружающим фоном. Направление хвоста в противоположную сторону от Солнца. Радиус комы составляет примерно $0.38'$, общая длина кометы с хвостом $1.6'$. Эти данные примерно соответствуют приведенным данным других наблюдателей, по разным оценкам размер комы с 1 по 7 мая 2022 г. соответствовал $0.25' - 1.3'$, размер хвоста $1' - 2'$ [5].

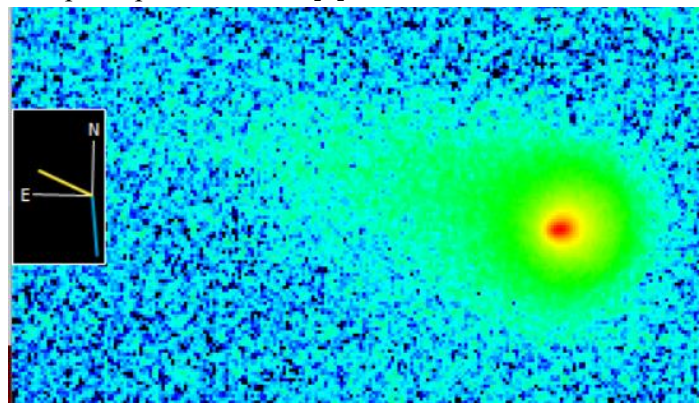


Рис. 2. Сложение изображений кометы C/2019 U5 в R фильтре, полученные 6 мая 2022 г. Суммарная экспозиция составила 18 минут, от начала первого снимка до конца последнего – около часа (57.567 мин). Обозначения на компасе: синяя линия – антисолнечное направление, желтая – отрицательный вектор гелиоцентрической скорости.

Определение фотометрических данных кометы C/2019 U5 видимый и абсолютный блеск

В период наблюдений комета находилась в активной стадии, поэтому видимые звездные величины измерены с использованием апертур разных размеров, выбор значений радиуса апертуры осуществлялся по графику зависимости отношения сигнал/шум от размера апертуры. Диапазон выбранных размеров соответствует участку кривой, где отношение сигнал/шум перестаёт сильно меняться. На рис. 3 приведены изображения кометы, измеренные с апертурами разных размеров.

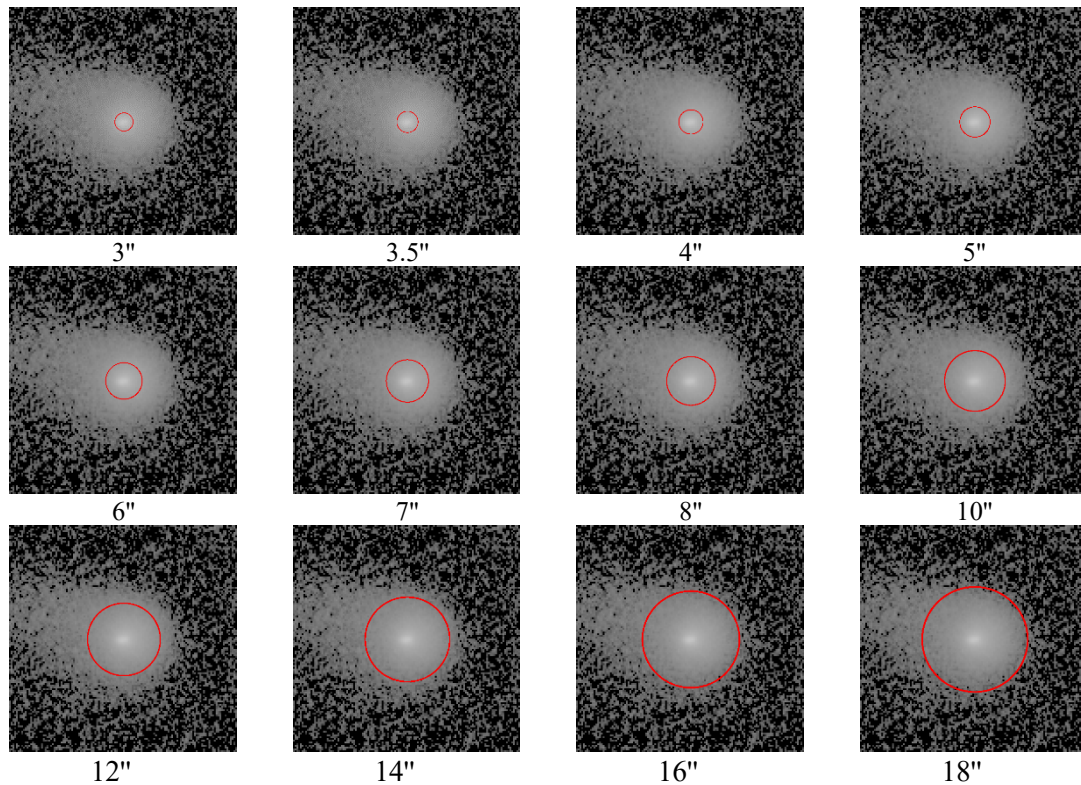


Рис. 3. Мультиапертурная фотометрия изображений кометы C/2019 U5, радиус апертуры указан в секундах дуги.

Фотометрические данные, полученные из обработки изображений кометы, приведены в табл. 3. На рис. 4 приведена зависимость видимых звездных величин кометы в фильтрах BVR от радиуса апертуры, полученная при измерении кадров за 6 мая 2022 г., из которой видно незначительное изменение видимого блеска при измерениях с апертурой 8 угл. сек. и выше.

Таблица 3

Геометрический аспект и мультиапертурные звездные величины кометы C/2019 U5 по наблюдениям в МАОС в 2022 г.

Дата, UT	r , а.е.	Δ , а.е.	φ °	$^1\rho''$	2m , зв.вел.	$^3m(1,1,0)$, зв.вел.
2022-05-06 17.30	4.639	4.057	10.9	4	B:16.94±0.04	10.19±0.04
				12	V:16.07±0.02	9.32±0.02
				30	R:15.97±0.02	9.22±0.02
					B:15.68±0.04	8.93±0.04
					V:14.84±0.02	8.09±0.02
					R:14.61±0.02	7.86±0.02
					B:14.98±0.04	8.23±0.04
					V:14.12±0.02	7.37±0.02
					R:13.90±0.02	7.15±0.02
2022-05-07 15.30	4.630	4.052	11.0	4	B:17.00±0.04	10.25±0.04
				12	V:16.13±0.02	9.38±0.02
				30	R:15.94±0.02	9.19±0.02
					B:15.62±0.04	8.87±0.04
					V:14.82±0.02	8.07±0.02
					R:14.62±0.02	7.87±0.02
					B:14.93±0.04	8.18±0.04
					V:14.08±0.02	7.33±0.02
					R:13.88±0.02	7.13±0.02
2022-06-11 17.30	4.450	4.113	12.9	4	B:16.89±0.04	10.13±0.04
				12	V:16.10±0.02	9.34±0.02
				30	R:15.89±0.02	9.13±0.02
					B:15.72±0.04	8.96±0.04
					V:14.83±0.02	8.07±0.02
					R:14.64±0.02	7.88±0.02
					B:15.05±0.04	8.29±0.04
					V:14.18±0.02	7.42±0.02
					R:13.98±0.02	7.22±0.02

1 радиус апертуры, угл.сек., 2 видимая звездная величина, 3 абсолютная звездная величина.

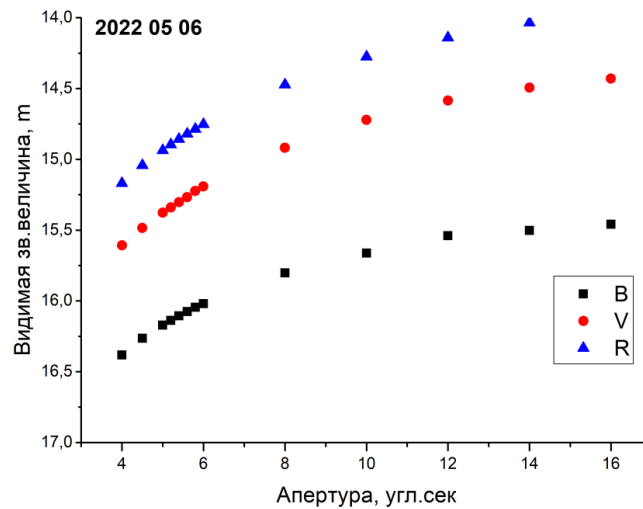


Рис. 4. Зависимость видимого блеска в фильтрах BVR от радиуса апертуры (угл.сек.) при измерениях изображений кометы C/2019 U5 за 6 мая 2022 г.

Сравнивая наши измерения видимых звездных величин кометы в 2022 г. с ее кривой блеска, построенной по различным наблюдениям в период 2021-2024 гг. (рис.5), можно констатировать хорошее соответствие данных.

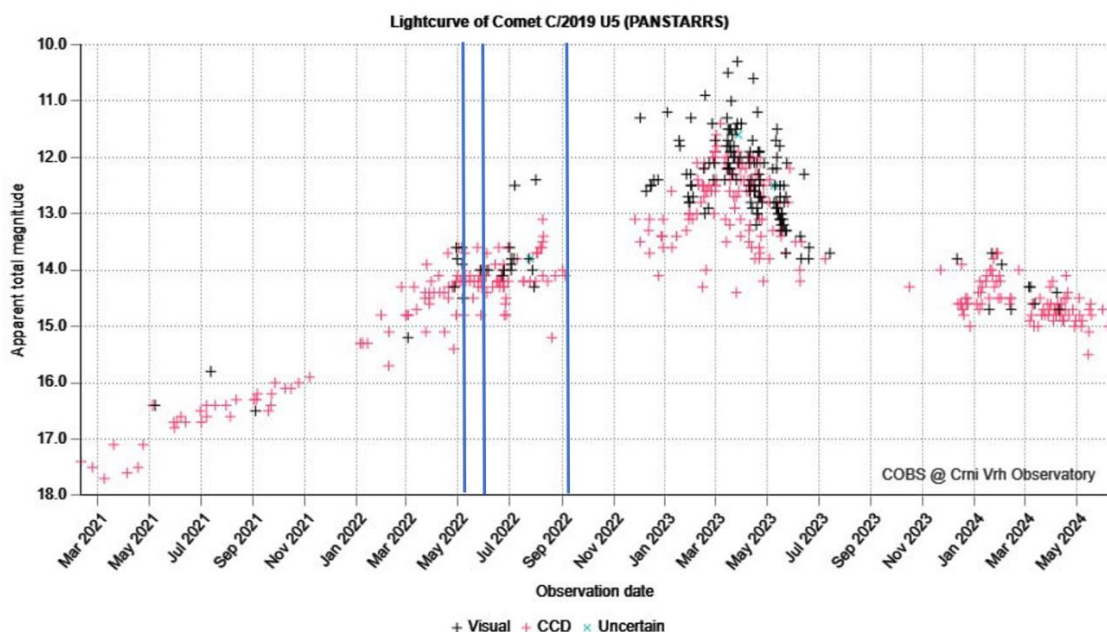


Рис. 5. Сравнение полученных значений звездных величин кометы с наблюдениями кометы, полученными другими обсерваториями мира (по данным [6]). Синие вертикальные прямые показывают даты наблюдений 5 и 6 мая, 10 и 11 июня, и 13 сентября 2022 г. на МАОС.

Учитывая активную фазу кометы, абсолютный блеск $m_a(1,1,0)$ вычислен по формуле, принятой для комет [7]

$$m_a(1,1,0) = m_a - 5 \log(r\Delta) - \beta\alpha, \quad (1)$$

здесь $m_a(1,1,0)$ – блеск гипотетической точки на единичном гелиоцентрическом и геоцентрическом расстояниях с фазовым углом $ph=0$ град., m_a – измеренный блеск, r и Δ – гелио- и геоцентрическое расстояния кометы в а.е., α – фазовый угол (ph) в градусах, β – фазовый коэффициент в звездных величинах на градус; индекс a означает какой-либо фильтр. Для фазового коэффициента использовано общепринятое значение $\beta=0.035$ зв.вел./град. [8]. Абсолютный блеск кометы в фильтрах BVR (средние значения за три ночи), найденный по формуле (1), приведен в табл. 3. Расчетная абсолютная величина составляет в среднем $H_V = 8.25^m \pm 0.021^m$, и это значение близко к эфемеридной оценке с $H_V=8.2^m \pm 0.7^m$ [1].

Показатели цвета

Показатели цвета кометы были рассчитаны с использованием различных апертур, которые соответствуют диапазону линейных размеров около 12 800-95 000 км. Полученные показатели цвета B-V и V-R приведены в табл. 4, из которой видно, что существенных изменений показателей цвета не обнаружено в диапазоне радиуса апертур, начиная после 4 угл.сек. (свыше 13 000 км). Среднее за три ночи значение $B-V=0.84 \pm 0.05$ соответствует интервалу, установленному для долгопериодических комет, транснептуновых объектов и троянцев Юпитера [9], однако усредненное за пять ночей значение $V-R=0.20 \pm 0.05$ ниже

типичного интервала 0.35-0.55, установленного для таких объектов [9], и соответствует значительному покраснению поверхности кометного ядра, связанному с нормальной кометной активностью и повышенной пылепроизводительностью.

Таблица 4.

Средние показатели цвета кометы C/2019 U5 за 3 ночи наблюдений в 2022 г.

Дата	¹ ρ''	B-V	V-R
2022-05-06	4	0.87±0.01	0.10±0.04
	12	0.84±0.01	0.24±0.04
	30	0.85±0.01	0.22±0.04
2022-05-07	4	0.87±0.02	0.19±0.01
	12	0.80±0.01	0.20±0.04
	30	0.85±0.01	0.20±0.04
2022-06-11	4	0.79±0.03	0.21±0.01
	12	0.89±0.03	0.20±0.01
	30	0.87±0.01	0.20±0.04

¹радиус апертуры, угл.сек.

Оценка пылепроизводительности

Уровень производства пыли для кометы можно количественно оценить с помощью параметра A_{fr} [10]. Значения A_{fr} приблизительно показывают степень активности кометы и скорость производительности пыли, расчет осуществляется по формуле [10]:

$$A_{fr} \rho = \frac{4r^2 \Delta^2}{\rho} \times 10^{0.4(m_{Sun} - m_{com})}, \quad (2)$$

где A – значение геометрического альbedo, ρ – радиус фотометрической апертуры в см, f – фактор полного сечения рассеяния частиц в пределах этой апертуры, r, Δ – гелио- и геоцентрическое расстояние до кометы; m_{Sun}, m_{com} – видимые звездные величины Солнца и кометы в данном фильтре, значения для m_{Sun} взяты нами из [11].

На основании полученных значений видимых звездных величин кометы в фильтре R были вычислены значения A_{fr} при различных апертурах; полученные значения, а также их \log приведены в табл. 5.

Таблица 5

Геометрический аспект и мультиапертурные величины параметра A_{fr} кометы C/2019 U5 в фильтре R по наблюдениям в МАОС в 2022 г.

Дата, UT	r , а.е.	Δ , а.е.	φ °	¹ ρ''	² A_{fr} , см	$\log(A_{fr})$
2022-05-06 17.30	4.639	4.057	10.9	4	1552±28	3.19
				12	1810±33	3.26
				30	1393±25	3.15
2022-05-07 15.30	4.630	4.052	11.0	4	1587±28	3.21
				12	1785±32	3.25
				30	1385±25	3.14
2022-06-11 17.30	4.450	4.113	12.9	4	1558±28	3.19
				12	1643±29	3.21
				30	1207±22	3.10

¹радиус апертуры, угл.сек, ²параметр пылепроизводительности.

Как видно из табл. 5, значения $A_f\rho$ находятся в диапазоне от примерно 1500 до 1800 см при апертурах от 12800 до 95000 км. Оценки параметра $A_f\rho$ указывают на значительный уровень активности кометы в период ее приближения к перигелию, когда она находилась на гелиоцентрических расстояниях 4.6-4.1 а.е. Об этом также свидетельствует морфология кометы, соответствующая этому периоду, где мы видим симметричную однородную плотную протяженную пылевую кому вокруг ядра кометы. Отметим, по наблюдениям кометы C/2019 U5 в июле и августе 2020 г., когда она находилась на гелиоцентрических расстояниях свыше 8.5 а.е., признаки ее кометной активности не были зарегистрированы [2]. Полученные нами значения для $\lg A_f\rho$ совпадают со значениями (в пределах ошибок), полученными другими наблюдателями в этот же период наблюдений (рис. 6).

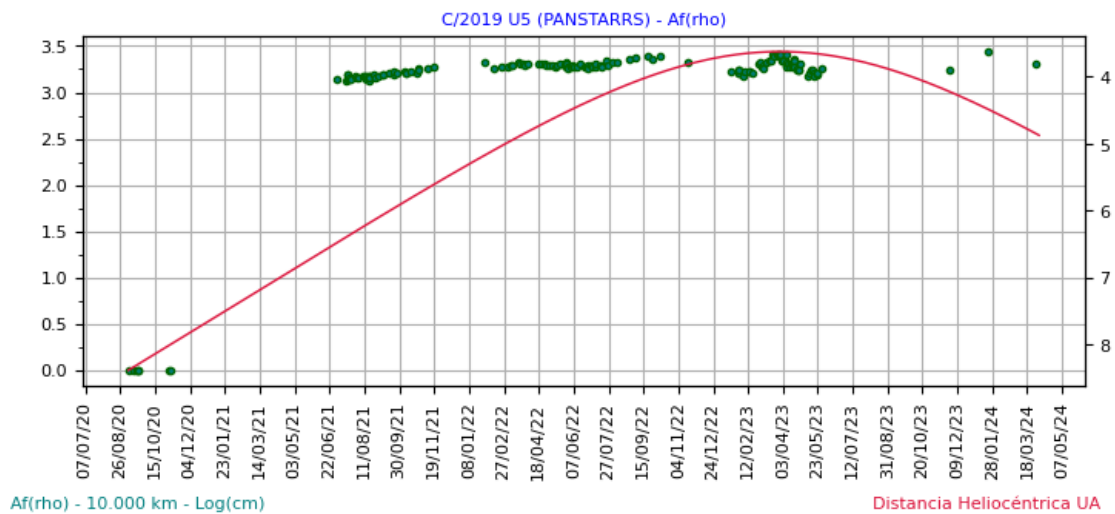


Рис. 6. Значения $\lg A_f\rho$ для кометы C/2019 U5 (PANSTARRS) по данным разных наблюдений [6].

Заключение

В результате мультиапертурного фотометрического исследования данных наблюдений гиперболической кометы C/2019 U5 (PANSTARRS) в 2022 г. в обсерватории Сангloch, были получены новые сведения о ее морфологии, блеске, колор-индексах, уровне пылепродуктивности в период сближения с Солнцем на гелиоцентрических расстояниях 4.6-4.1 а.е. Полученные фотометрические данные, в основном, соответствуют характеристикам гиперболических комет с обратным движением, накопленным к настоящему времени.

Работа была выполнена при поддержке гранта Минобрнауки РФ № 075-15-2024-626.

ЛИТЕРАТУРА

1. JPL Small-Body Database Browser. URL: <https://ssd.jpl.nasa.gov/>, Дата обращения: 2024.
2. Hromakina T., Belskaya I., Krugly Yu. et.al. Small Solar System objects on highly inclined orbits. Surface colours and lifetimes - Astronomy & Astrophysics, Volume 647, pp. A71.
3. Parrott D. Tycho Tracker: A New Tool to Facilitate the Discovery and Recovery of Asteroids Using Synthetic Tracking and Modern GPU Hardware - Journal of the American Association of Variable Star Observers (AAVSO), 2020, Vol. 48, no. 2, p. 262.

4. Tonry J.L., Denneau L., Flewelling H., Heinze A.N., Onken C.A., Smartt S.J., Stalder B., Weiland H.J., Wolf C. The ATLAS All-Sky Stellar Reference Catalog – The Astrophysical Journal, 2018, Vol. 867, A105.
5. URL: www.astrosurf.com/cometas-obs. Дата обращения: 2024.
6. URL: <https://cobs.si/> Comet Observation database (COBS). Дата обращения: 2024.
7. Snodgrass C., Lowry S.C., Fitzsimmons A. Photometry of cometary nuclei: rotation rates, colours and a comparison with Kuiper Belt Objects. - Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2006, Vol. 373, pp. 1590–1602.
8. Lamy P.L., Toth I., Fernandez Y.R., Weaver H.A. The sizes, shapes, albedos, and colors of cometary nuclei. – University of Arizona Press, Tucson: Comets II, M.C. Festou, H.U. Keller, and H.A. Weaver (eds.), 2004, pp. 223-264.
9. Solonoi M., et al. Ensemble properties of comets in the Sloan Digital Sky Survey. – Icarus, 2012, Vol.218, Issue 1, pp. 571-584.
10. A’Hearn M.F., Schleicher D.G., Millis R.L., Feldman P.D., Thompson D.T. Comet Bowell 1980b. - Astronomical Journal, 1984, Vol. 89, pp. 579-591.
11. Willmer Christopher N.A. The Absolute Magnitude of the Sun in Several Filters - The Astrophysical Journal Supplement Series, 2018, Vol. 236:47, No2, 14 p.

Г.И.ҚОҲИРОВА, Е.С.БАКАНАС*, А.П.КАРТАШОВА*,
Ф.Ҷ.РАҲМАТУЛЛОЕВА, В.ПИРОВА

ТАҲЛИЛИ ФАЪОЛИЯТИ ПЕШ АЗ-ПЕРИГЕЛИИ КОМЕТАИ ГИПЕРБОЛИИ C/2019 U5 (PANSTARRS) ДАР СОЛИ 2022

*Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,
Институти астрофизикаи АМИ Тоҷикистон,
Институти астрономияи Академияи илмҳои Россия

Дар кори мазкур натиҷаҳои муайян кардани маълумоти фотометрии кометаи гиперболикӣ C/2019 U5 бо истифода аз мушоҳидаҳои он дар расадхонаи астрономии байналмилалӣ Санглох дар соли 2022 пешниҳод шудаанд. Ҳузури кома ва дум, ҳамчунин, сатҳи назаррасии фаъолияти чангин, ки бо фаъолиятҳои одии кометавӣ дар давраи наздикшавии комета ба Офтоб мутобиқ аст, ошкор шуд. Маълумотҳои фотометрии комета асосан бо чирмҳои хурди системаи Офтобӣ дар мадорҳои дур мувофиқанд.

Калимаҳои калидӣ: комета, мадор, фотометрия, апертура, морфология, бузургии ситорагӣ, нишонҳои ранг, истеҳсоли чанг.

G.I.KOKHIROVA, E.S.BAKANAS*, A.P.KARTASHOVA*,
F.D.RAKHMATULLAEVA, V.PIROVA

**ANALYSIS OF THE PRE-PERIGELION ACTIVITY OF THE HYPERBOLIC
COMET C/2019 U5 (PANSTARRS) IN 2022**

*National Academy of Sciences of Tajikistan,
Institute of Astrophysics, NAS of Tajikistan,
Institute of Astronomy, Russian Academy of Sciences

The paper presents the results of determining the photometric data of the hyperbolic comet C/2019 U5 using its observations at the Sanglokh International Astronomical Observatory in 2022. The presence of a coma and tail was detected, as well as a significant level of dust activity was established, corresponding to normal cometary activity during the comet's approach to the Sun. The comet's photometric data are generally consistent with small Solar System bodies in distant orbits.

Key words: comet, orbit, photometry, aperture, morphology, magnitude, color index, dust production.

Сведения об авторах:

Кохирова Гулчехра Исроиловна – член-корр. НАНТ, доктор физико-математических наук, Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана (НАНТ), заведующая Отделом межпланетных тел. E-mail: kokhirova2004@mail.ru;

Баканас Елена Сергеевна – кандидат физико-математических наук, ФГБУ Институт астрономии Российской академии наук (ИНАСАН), старший научный сотрудник Отдела исследований Солнечной системы. E-mail: oterma@yandex.ru;

Карташова Анна Петровна – кандидат физико-математических наук, ФГБУ Институт астрономии Российской академии наук (ИНАСАН), старший научный сотрудник Группы программного обеспечения и вычислительной техники. E-mail: annakartashova@yandex.ru;

Рахматуллаева Фируза Джамшедовна – кандидат физико-математических наук, Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана (НАНТ), старший научный сотрудник Отдела межпланетных тел. E-mail: rahmat.firuza@gmail.com;

Пирова Вазира – Институт астрофизики Национальной академии наук Таджикистана, старший лаборант Отдела межпланетных тел. E-mail: foteh05032018@gmail.com.

УДК 574.7

Специальность: 1.4.3. Органическая химия

Б.Ф.САФАРОВ, Р.О.РАХМОНОВ, Ю.ХОДЖИБОЕВ

**НОВЫЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ ПРОИЗВОДНЫХ
2-БРОМ-5Н-6-(*n*-ТОЛИЛ)ИМИДАЗО[2,1-*b*][1,3,4]-ТИАДИАЗОЛА**

*Национальная академия наук Таджикистана,
Институт химии им.В.И. Никитина НАН Таджикистана*

Поступила в редакцию 22.06.2024 г.

*Проведён синтез производных 2-бром-6-(*n*-толил)имидазо-[2,1,*b*][1,3,4]тиадиазола путем реакции электрофильного и нуклеофильного замещения. Строение полученных соединений установлено по данным метода ИК-спектроскопии и элементного анализа. Выявлено, что под влиянием заместителей в положении 2, 5 и 6 гетероциклов изменение электронной плотности проявляется в некоторых пиках интенсивности валентных колебаний атомов в гетероцикле.*

Ключевые слова: 2-амино-5-бром-1,3,4-тиадиазол, 2-бром-5Н-6-(*n*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазол, 2,5-дибром-6-(*n*-толил)имидазо[2,1-*b*]-[1,3,4]-тиадиазол, 2-пиперидин-5-бром-6-(*n*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол, ИК-спектр.

1. Введение

Производные 2-амино-1,3,4-тиадиазолов и их конденсированные аналоги имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазолы являются важнейшими строительными блоками для создания биологически активных соединений. В связи с чем, разработка новых способов получения соединений этого ряда является важным направлением в органической химии [1-4].

Исследование в области синтеза производных имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазолов, проведенные в последние годы позволили открыть новые соединения с высокой биологической активностью [5-8]. В последнее время производные имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазолов нашли своё применение в таких разнообразных областях, как фармацевтические препараты, ингибиторы окисления, цианинкрасители и металлкомплексообразователи [9-10].

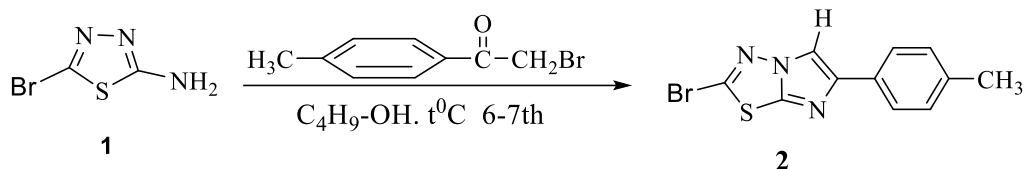
Адрес для корреспонденции: Рахмонов Рахмон Охонович, 734063, Таджикистан, Душанбе, Институт химии им. В.И.Никитина НАНТ, ул. Айни, 299/2. E-mail: r-rahmonov@mail.ru.

В настоящей работе основное внимание уделяется синтезу производных 6-(*para*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазола, которые проявляют антимикробную, противогрибковую [11-13], противораковую активность [14].

2. Результаты и обсуждение

В работе [15] представлены данные по синтезу производных имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазолов путем взаимодействия 2-амино-5-*R*-1,3,4-тиадиазола с α -галогенкетонами. Реакция протекает через промежуточно образующиеся имино-производные, которые при дальнейшем кипячении в высококипящем растворителе и последующей нейтрализации реакционной среды образуют 2-бром-6-(*n*-Aryl)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазолы. В настоящем исследовании синтез 2-бром-5Н-6-(*p*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазола (2) с *para*-метилфенил бромидом был проведен по одностадийному методу, представленному на схеме 1.

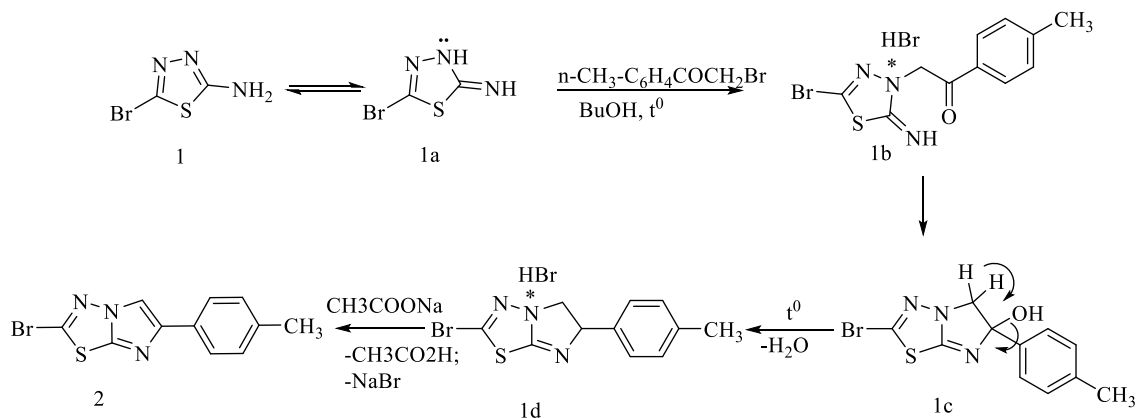
Схема 1



Как видно из представленной схемы реакции, соединение 2 образуется из посредством соединения 1 с амин-иминной таутомерии. Далее промежуточный продукт, содержащий кетонную группу, путем внутримолекулярного нуклеофильного циклоприсоединения образует соединение 2 с хорошим выходом (76%). Механизм образования соединения (2) можно представить в следующем виде:

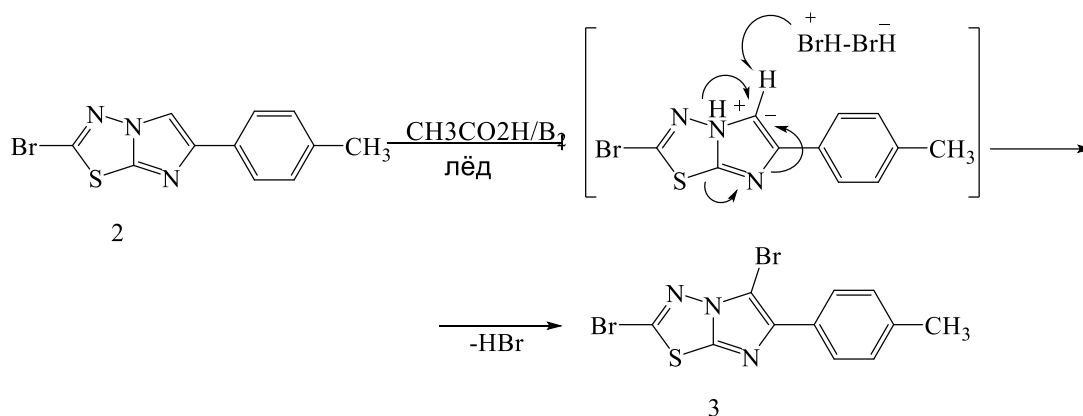
Схема 2

Механизм:



Соединение 3 синтезировано путем бромирования 2-бromo-6-(*para*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазола (2) в среде ледяной уксусной кислоты при комнатной температуре. Выявлено, что при бромировании соединения 2 бром замещает водород 5-го положения (схема 3).

Схема 3



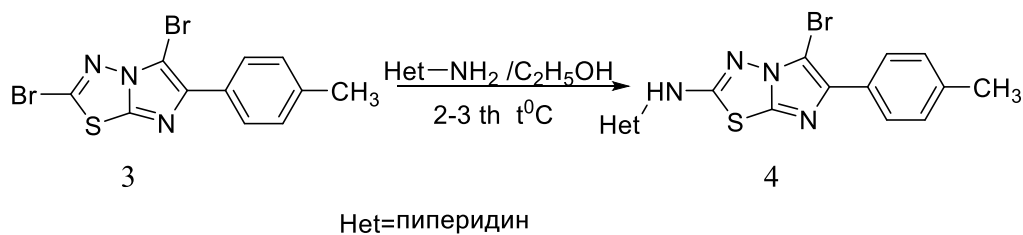
Атомы азота в 4-ом и 7-ом положениях имидазо-тиадиазольного кольца повышают электронную плотность в имидазольном фрагменте. При этом атом углерода 5-го положения приобретает частично отрицательный заряд, что позволяет возмозможность электрофильного замещения в 5-ом положении углерода имидазольного кольца.

Таким образом, в результате взаимодействия 2-бром-5H-6-(*para*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазола 2 с молекулярным бромом в ледяной уксусной кислоте при комнатной температуре бром замещает атом водорода в пятом положении кольца с образованием нового соединения 2,5-дибром-6-(*para*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазола (2). Полученное соединение 2 выделено в виде бесцветного кристаллического вещества, нерастворимого в эфире, воде и неполярных растворителях и мало растворимого в спирте. В органических растворителях изобутаноле, *n*-бутаноле, ДМФА и ДМСО соединение 2 имеет хорошую растворимость

Индивидуальность и ход реакции контролированы методом ТСХ на пластинках «Silufol 254UV», а для проявления хроматографических пятен использовали пары йода в йодной камере.

Далее проведена попытка нуклеофильного замещения соединения 3 с гетериламинами. В качестве гетероциклоаминирующих агентов был использован пиперидин. Реакцию проводили с двумя молями пиперидина с целью облегчения процесса монозамещения в среде изопропанола при нагревании в течение 2,5 ч. В зависимости от природной основы получены различные результаты, так как при использовании анилина в изо-пропаноле при температуре кипения нами не удалось получить целевые продукты.

Схема 4



Соединения **4** представляют собой белое кристаллическое вещество, нерастворимое в воде, но растворимое в органических растворителях изопропанол, бутанол, ДМФА.

Строение полученных соединений **2 - 4** установлены с помощью ИК-спектроскопии и элементного анализа.

В ИК-спектре соединения **2**, в кристаллическом состоянии имеющиеся полосы поглощения в области 1603 см^{-1} соответствуют валентным колебаниям C=N-фрагмента тиадазольного кольца, а полоса поглощения в области 1580 см^{-1} соответствует валентным колебаниям C=N-фрагмента имидазольного кольца. Для C-S-C и C(2)-Br полоса поглощения обнаружена в области $680, 676\text{ см}^{-1}$ в сильном поле. Полоса поглощения в области около 1447 см^{-1} соответствует валентным колебаниям C=C-фрагмента для имидазольного кольца.

По сравнению с **2** у 2,5-дибром-6-(*para*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазола **3** незначительно изменяется характер полос поглощения в данном гетероцикле. В ИК-спектре соединения **3** наблюдается полоса поглощения валентных линий в областях $1614, 1590, 1560$ и 636 см^{-1} для C=N, C=N, C=C, C-S-C имидазотиадазольного кольца. Также были определены валентные линии при 615 см^{-1} для C-Br второго положения и при 620 см^{-1} для C-Br пятого положения кольца (рис. 1).



Рис. 1. ИК-спектр 2,5-дибром-6-(*p*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол (**3**).

Для *para*-толилгруппы, в зависимости от числа атомов водорода в замещенных бензольного кольца [16], обнаружено несколько плоских и неплоских деформационных колебаний в областях $982, 835$ и 820 см^{-1} . Полоса поглощения валентного колебания $\delta_{\text{C-Har}}$ проявлена в области «отпечатков пальцев» при 944 и 1044 см^{-1} . Полоса поглощения в области около 2692 см^{-1} соответствует валентным колебаниям CH_3 для *para*-толилной группы.

Таким образом, замещение атома водорода C(5)-H положения соединения **2** атомом брома, приводит к изменению интенсивности соединения **3**.

По данным ИК, при интерпретации соединения **4** показано, что обнаруженные характерные полосы поглощения подтверждают структуру данного гетероцикла. В ИК-спектре соединения **4** обнаружена полоса поглощения в области 1562 см^{-1} для $\text{C}=\text{N}_{\text{тиадиазол}}$, 1539 см^{-1} $\text{C}=\text{N}_{\text{имидазол}}$, 1391 см^{-1} $\text{C}=\text{C}_{\text{имидазол}}$ и 682 см^{-1} для, $\text{C}-\text{S}-\text{C}_{\text{тиадиазол}}$ для имидазо-тиадиазольного фрагмента. Кроме этого, для *p*-толильной группы обнаружены плоские и неплоские деформационные колебания в области 1173 , 1140 и 939 , 897 см^{-1} . Также были определены валентные колебания в области 1383 см^{-1} для пиперидина во втором положении при 631 см^{-1} для $\text{C}(5)-\text{Br}$ положения кольца (рис. 2).

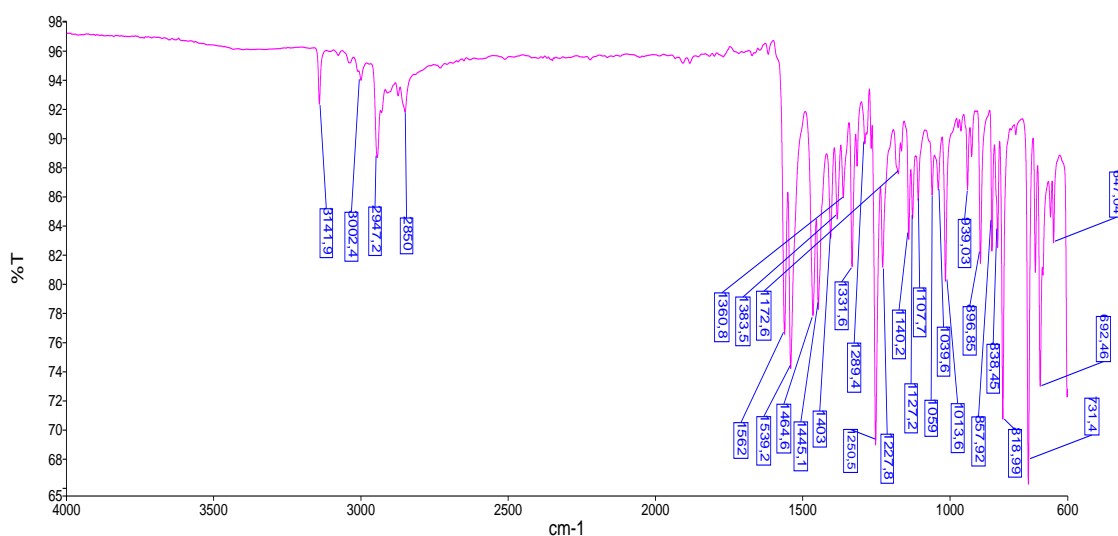


Рис. 2. ИК-спектр 2-пиперидин-5-бром-6-(*p*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол (**4**).

Исходя из этого, нами выявлено, что наличие заместителей в положениях 2 и 6 гетероциклов **2-4** влияет на распределение электронной плотности, что проявляется в изменении интенсивности некоторых пиков данных соединений. В ИК-спектре полученных соединений обнаружены характерные полосы поглощения, соответствующие имидазо-тиадиазольному циклу, экзоциклических функциональных групп в *C*-2 и *C*-6 положениях и другие полосы, относящиеся к данным гетероциклам, что соответствует литературным данным [18-21].

3. Материалы и методы.

Исходные соединения, использованные для синтеза, очищали методом перекристаллизации. Чистоту исходного сырья и конечных продуктов предварительно проверяли методом тонкослойной хроматографии (ТСХ) в йодной камере.

Строение и чистота исследуемых соединений подтверждены регистрацией и анализом ИК-спектров, элементным анализом и ТСХ в йодной камере.

Температуру плавления измеряли с помощью микронагревателя «Voetus», прибора для измерения температуры плавления, основанного на методе стеклянных капилляров.

ИК-спектры снимались на FT-IR-спектрометре Shimadzu IR Spirit (Shimadzu Corporation, Колумбия, Южная Каролина, США) с использованием QATR-S в качестве приставки для измерения НПВО с одним отражением в лаборатории центрального анализа и материалов научно-исследовательского Института при Таджикском национальном университете.

Элементный анализ полученных соединений был проведен в микроаналитической лаборатории Университета L'Aquila в Италии. Индивидуальность полученных соединений и ход реакций контролировали тонкослойной хроматографией на стандартных пластинках "Silufol UV-254" в системах дибутиловый эфир-бутанол-1 (2:1); этилацетат-диэтиловый эфир (1:1); дибутиловый эфир-этанол (3:1), пятна проявлены в йодном камере.

3.1. Синтез 2-бromo-5H-6-(*n*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазола (2). 1.8 г (0.01 моль) 2-бromo-5-амино-1,3,4-тиадиазола (1) помещают в 20 мл бутанола и добавляют эквимолярное количество *para*-метилфенацил бромиды. Смесь перемешивают при нагревании в течение 5-6 часов. Затем реакционную смесь охлаждают, нейтрализуют 0.82 г (0,01 моль) ацетатом натрия. Выпавший осадок отфильтровывают и промывают 100 мл холодной воды, сушат на воздухе 12 часов. Перекристаллизовывают из смеси бутанол-этанол (4:1). Выход составляет 2.23 г (76%). $T_{пл.} = 196-197^{\circ}C$. **Брутто-формула:** $C_{11}H_8N_3SBr$, $M_r = 294$. **Найдено, %:** C – 44.89, H – 2.72, N – 14.28. **Вычислено, %:** C – 43.87, H – 1.96, N – 13.29. **ИК-спектр, ν , cm^{-1} :** 1603 (C=N), 1580 (C=N), 1447 (C=C), 680 (C-S-C), 676 (C-Br).

3.2. Синтез 2,5-дибром-6-(*n*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазола (3). 2.94 г (0.01 моль) соединения 2 растворяют в 20 мл этанола, при перемешивании добавляют 1.66 г (0.02 моль) пиперидина в 3 мл этанола. Реакционную массу перемешивают при нагревании в течение 2-3 часов, затем охлаждают и нейтрализуют 1%-ный раствор карбоната натрия. Выпавший осадок отфильтровывают и промывают 100 мл холодной водой, сушат на воздухе 12 часов, перекристаллизовывают из *n*-бутанола. Выход составляет 3.02 г (81%). $T_{пл.} = 172-173^{\circ}C$. **Брутто-формула:** $C_{11}H_7N_3SBr_2$, $M_r = 373$. **Найдено, %:** C – 35.39, H – 1.87, N – 11.26. **Вычислено, %:** C – 34.38, H – 0.98, N – 10.47. **ИК-спектр, ν , cm^{-1} :** 1614(C=N), 1590(C=N), 1460 (C=C), 636 (C-S-C), 615 (C-Br), 620 (C(5)-Br).

3.3. Синтез 2-пиперидин-5-бром-6-(*n*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазола (4). 3.073 г (0.01 моль) соединения 3 растворяют в 20 мл концентрированной серной кислоты, при перемешивании добавляют 1.00 г (0.015 моль) концентрированной азотной кислоты ($d=1.387$ г/ cm^3) и оставляют на ночь. Затем в реакционную массу добавляют 100 мл ледяной воды. Выпавший осадок отфильтровывают и промывают 100 мл холодной водой, сушат на воздухе 12 часов, перекристаллизовывают из этанола (2:4). Выход составляет 3.11 г (69 %). $T_{пл.} = 232-233^{\circ}C$. **Брутто-формула:** $C_{16}H_{17}N_4SBr$, $M_r = 377$. **Найдено, %:** C – 49.38, H – 1.87, N – 11.26. **Вычислено, %:** C – 50.93, H – 3.63, N – 13.94. **ИК-спектр, ν , cm^{-1} :** 1562 (C=N_{тиадиазол}), 1539 (C=N_{имидазол}), 1391 (C=C_{имидазол}), 682 (C-S-C_{тиадиазол}), 1383 (пиперидин), 631 (C(5)-Br)- положения кольца.

4. Выводы.

1. Впервые синтезированы новые функционалированные производные 6-(*пара*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазола, которые ранее не описаны в литературе.

2. Функционалирование 2-бром-5Н-6-(*пара*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазола в условиях электрофильного и нуклеофильного замещения протекает гладко, с образованием 2 и 5-замещенных производных 2-бром-5Н-6-(*пара*-толил)-имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазола.

3. Определены частота колебания данных гетероциклов в области 1614-615 см⁻¹.

4. Выявлено, что под влиянием заместителей 2, 5 и 6 положений данных гетероциклов изменяется распределение электронной плотности полученных соединений, благодаря чему изменяется относительная интенсивность некоторых пиков, в частности, интенсивность валентных колебаний атомов в кольце.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ming-wu Ding, Bo-Qiao Fu. Lin Cheng. New Faciones via aza-Wittig Reaction. – Synthesis Journal of Synthetic Organic Chemistry, 2004, pp. 1069-1070.
2. Shuai Shi, Wenting Qiu, Pannan Miao, Ruining Li, Xianfeng Lin. – Zhankui Sun. Нац. Коммуна. 12.02.2021, V. 12(1). p.1006. doi:10.1038/s 41467-021-21303-3.
3. Yu-Xia Da, Ji-Hua Zhu, Zhang Zhang et al. Synthesis and X-Ray Characterization of 2,5,6-Trisubstitued imidazo[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазоле derivatives. – Journal of Heterocyclic Chemistry. 2012, V.49, pp.102-109.
4. Акбарова М.М. Синтез и превращения производных 5Н-тиазоло[4,3-*b*]-1,3,4-тиадиазолов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата химических наук. Специальность: 02.00.03-органическая химия. – Душанбе, 2007, с. 118.
5. Н. Kumar, S.A. Javed, S.A. Khan, M. Amir. – Eur. J. Med. Chem. 2008, V. 43(12). pp. 2688-2698.
6. М. Amir, Н. Kumar, S.A. Javed. – Bioorganic and Medicinal Chemistry Letter. 2007, V.15, pp. 4504-4508.
7. Ibrahim D.A. – European Journal of Medicinal Chemistry. 2009, V. 44(7), pp. 2776-2781.
8. Hu Guo-Qiang, Zhang Zhong-Quan, Xu Qi-Tai [et al.]. Phase transfer catalyzed synthesis and bioactivity of s-triazolo[3,4-*b*]тиадиазолов. – Huaxue Xuebao. 2004, V.62(2), pp. 204-207.
9. O.Ates, A.Kocabalcanlia, N.Cesura, G.Otuk. Synthesis and antimicrobial activity of some 5-aryl-2-[(N,N-disubstitutedthiocarbamoilthio)асуламино]-1,3,4-oxadiazoles. – II Farmaco. 1998, V. 53, pp. 541-546.
10. Rohit Bhatia, Amandeep Kaur. Synthesis, spectral studies and antimicrobial activity of some imidazo[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазоле derivatives. – Department of Pharmaceutical Chemistry, ASBASJSM College of Pharmacy, Bela (Ropar). 2014, V. 6(6), pp. 114-120.
11. Sahin G., Palaska E., Ekizoglu M., Ozalp M.. Sythesis and antimicrobial activity of some 1,3,4-oxadiazoles derivatives. – II Farmaco. 2002, V. 57, pp. 539-542.
12. G. Kolavi, V. Hegde, I.A. Khazi. Intramolecular amiditation: synthesis of novel imidazo[2,1-*b*][1,3]-thiazole fused diazepinones. – Tetrahedron Letters. 2006, V. 47(16), pp. 2811-2814.
13. Annamaria C., D. Leonte, L. Vlase [et al.]. Synthesis, Characterization and Biological Evalution of imidazo[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазоле Derivatives as Antiflammatory Agents. – Heterocycles. Molecules. 2018, V. 23, pp. 2310-2425.

14. Doaa E., Abdel Rahman Khaled, O. Mohamed. Synthesis of novel 1,3,4-тиадиазоле analogues with expected anticancer activity. – Der PharmaChemica. 2014, V. 6(1), pp. 323-335.
15. Ходжибаев Ю., Куканиев М.А. Синтез, превращения и свойства имидазо-[2,1-*b*]-1,3,4-тиадиазола. Монография. – Душанбе: «Ирфон». 2010, с. 30-31.
16. Васильев А.В., Гриненко Е.В., Шукин А.О., Федулina Т.Г.. Инфракрасная спектроскопия органических и природных соединений. Учебное пособие. – СПб.: СПбГЛТА, 2007, 54 с.
17. Наканиси К. Инфракрасные спектры и строение органических соединений. – М.: Изд-во «Мир», 1965, с. 32-47.
18. Kamal F.M. Atta, Omaima O.M. Farahat. et al. Synthesis and Antibacterial Activities of Novel Imidazo[2,1-*b*]-1,3,4-thiadiazoles. – J. Molekules. 2011, N.16, pp.5496-5506.
19. Рахмонов Р.О., Куканиев М.А., Ходжибаев Ю.Х., Лангариева Д.С., Саидов Д.К. Синтез 2-этилметилсульфонил-5-бром-6-фенилимидазо[2,1-*b*]-1,3,4-тиадиазола. Вестник Таджикского национального университета Серия естественных наук. – Душанбе: «Сино». 2012, с. 236-239.
20. Рахмонов Р.О., Ходжибаев Ю., Зоидова М.Т., Розиков У.А., Одилзода М.М., Бандаев С.Г., Рахматуллоев Б.Ш.. Синтез, исследование и ИК-спектральные характеристики галогеналкилпроизводных имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазолов. – Политехнический Вестник. Серия: Инженерные исследования. 2019, №1(45), с. 157-167.
21. Ходжибаев Ю., Рахмонов Р.О., Зоидова М.Т., Куканиев М.А., Атоликшоева С.Д., Абдиразоков А.А. Синтез и ИК-спектральная характеристика 2-бром- и 2,5-дибром-6-(*p*-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазола. – ДАН РТ, 2012г., т. 55, №10, с. 817-820.

Б.Ф.САФАРОВ, Р.О.РАХМОНОВ, Ю.ХОДЖИБОЕВ

УСУЛИ МУНОСИБ ДАР СИНТЕЗИ ҲОСИЛАҲОИ 2-БРОМ-5Н-6-(ПАРА-ТОЛИЛ)ИМИДАЗО[2,1-В][1,3,4]-ТИАДИАЗОЛ

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

Институту кимиёи ба номи В.И.Никитин АМИ Тоҷикистон

Синтези ҳосилаҳои 2-бромо-6-(*p*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол тавассути реаксияҳои муъовизаи электрофилии ва нуклеофилии анҷом дода шуд. Сохтори пайвастиҳои ҳосилшударо бо усули тайфнамоии ИС ва таҳлили элементӣ таъйид карда шуд. Муқаррар карда шуд, ки мавҷудияти ҷойнишинҳои мавқеҳои 2, 5 ва 6-и гетероцикли мазкур мӯҷиби тағйирёбии шиддати баъзе лаппишҳои валенти дар таҳти таъсири таксимшавии зичии электронхоро дар баъзе нукот ба вуқӯъ мепайвандад.

Калимаҳои калидӣ: 2-амино-5-бромо-1,3,4-тиадиазол, 2-бромо-5Н-6-(*p*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазол, 2,5-дибром-6-(*p*-толил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол, 2-пиперидин-5-бромо-6-(*p*-толил)имидазо[2,1-*b*]-[1,3,4]-тиадиазол, тайфи ИС.

B.F.SAFAROV, R.O.RAKHMONOV, Yu.KODJIBOEV

**A NEW APPROACH TO THE SYNTHESIS OF 2-BROMO-5H-6-(p-TOLYL)
IMIDAZO[2,1-B][1,3,4]-THIADIAZOLE DERIVATIVES**

*National Academy of Sciences of Tajikistan,
V.I.Nikitin Institute of Chemistry, NAS of Tajikistan*

The synthesis of 2-bromo-6-(para-tolyl)imidazo[2,1,b][1,3,4]-thiadiazole derivatives was carried out by electrophilic and nucleophilic substitution reactions. The structure of the obtained compounds was established by IR spectroscopy and elemental analysis. It was revealed that under the influence of the substituents of the 2, 5 and 6 positions of these heterocycles, which change the distribution of electron density in some peaks, in particular the intensity of stretching vibrations of atoms in the ring.

Key words: 2-amino-5-bromo-1,3,4-thiadiazole, 2-bromo-5H-6-(para-tolyl)imidazo[2,1-b][1,3,4]thiadiazole, 2,5-dibromo-6-(para-tolyl)imidazo[2,1-b]-[1,3,4]-thiadiazole, 2-piperidine-5-bromo-6-(para-tolyl)imidazo[2,1-b][1,3,4]-thiadiazole, IR spectrum.

Сведения об авторах:

Сафаров Бахрулло Файзуллоевич – Институт химии им. В.И.Никитина НАНТ, научный сотрудник лаборатории химии гетероциклических соединений. E-mail: bahrullosafarov1995@gmail.com;

Рахмонов Рахмон Охонович – доктор химических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАНТ, заведующий лабораторией ХГС. E-mail: r-rahmonov@mail.ru;

Юлдош Ходжибоев – доктор химических наук, профессор, Института химии им. В.И.Никитина НАНТ, главный научный сотрудник лаборатории ХГС. E-mail: hojiboev@mail.ru.

УДК 574.7

Специальность: 1.4.3. Органическая химия

М.Ф.ХОЛИКОВ, Р.О.РАХМОНОВ

**СИНТЕЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ 2-(1,3-ДИОКСОИЗОИНДОЛИН-2-ИЛ)-
АЦЕТАТПРОИЗВОДНЫХ 6-(ПАРА-БРОМФЕНИЛ)ИМИДАЗО[2,1-В][1,3,4]-
ТИАДИАЗОЛА**

*Национальная академия наук Таджикистана,
Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана*

Поступила в редакцию 22.06.2024г.

В результате проведенного исследования была изучена функционализация 2-бromo- и 2,5-дибromo-6-(пара-бромфенил)имидазо[2,1-в][1,3,4]-тиадиазолов с натриевой солью 1,3-диоксоиндоизолин-2-ил-ацетата, что привело к получению двух модификаций продуктов: 6-(пара-бромфенил)имидазо[2,1-в][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоизоиндолин-2-ил)-ацетата и 5-бromo-6-(пара-бромфенил)имидазо[2,1-в][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоизоиндолин-2-ил)-ацетата, оба имеющие во втором положении гетероциклов длинные цепи. Условия эксперимента были оптимизированы для каждого исходного соединения путем изменения используемого основания и пропорций реагентов, что привело к разработке отдельных методик синтеза, адаптированных к их конкретной реакционной способности и потребностям в очистке. Характеристика строения продуктов проводилась с использованием ИК-спектров и элементного анализа, а индивидуальность и ход реакции контролировали методом ТСХ на «Silufol 254UV» в йодной камере.

Ключевые слова: 2-бromo-6-(пара-бромфенил)имидазо[2,1-в][1,3,4]-тиадиазол, 2,5-дибromo-6-(пара-бромфенил)имидазо[2,1-в][1,3,4]-тиадиазол, 1,3-диоксоиндоизолин-2-ил-ацетата, 6-(пара-бромфенил)имидазо[2,1-в][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоизоиндолин-2-ил)-ацетат, 5-бromo-6-(пара-бром-фенил)-имидазо[2,1-в][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоизоиндолин-2-ил)-ацетат, ИК-спектр, элементный анализ.

1. Введение

Тиадиазольное кольцо с имидазольным циклом привлекает внимание исследователей благодаря его ценным биологическим свойствам, таким как иммуностимулирующие,

Адрес для корреспонденция: Рахмонов Рахмон Охоневич, 734063, Таджикистан, Душанбе, Институт химии им. В.И.Никитина НАНТ, ул. Айни, 299/2. E-mail: r-rahmonov@mail.ru.

противовоспалительные, анальгетические и противораковые свойства. Имидазо[2,1-*b*][1,3,4]тиадиазольная система является частью структуры левимазола, проявляющего иммуномодулирующее действие, то есть способность ингибировать токсические эффекты цитотоксичных агентов иммунной системы.

Множество препаратов, содержащих 1,3,4-тиадиазольный фрагмент, широко доступны на рынке и широко применяются в медицинской практике. Яркими примерами являются различные синтетические и полусинтетические цефалоспориновые антибиотики, сульфонамидные препараты с многофункциональным действием, а также другие азот- и серосодержащие гетероциклические соединения.

Разработка новых методов синтеза производных 2-бром-6-(*para*-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазола является актуальным направлением в органической химии. Производные имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазолов обладают широким спектром фармакологической активности, что делает их важными в качестве коммерчески доступных лекарственных препаратов. Кроме того, галогензамещенные имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазолы имеют практическое значение для современного органического синтеза, так как используются в качестве строительных блоков для создания более сложных гетероциклических структур, а также для конструирования соединений, обладающих биологической активностью [1-9].

В данной работе представлено исследование функционализации 2-бром-6-(*para*-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазола с использованием фталглицина, синтез которого был описан ранее в работе [10]. Это приводит к образованию двух продуктов: 6-(*para*-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоиндоизолин-2-ил)ацетата (5) и 5-бromo-6-(*para*-бромфенил)-имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоиндоизолин-2-ил)ацетата (6), оба из которых имеют длинные боковые цепи.

2. Результаты и обсуждение.

Функционализацию 2-бром-6-(*para*-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазола (5 **a**), описанную ранее в [11], с 1,3-диоксоиндоизолин-2-ил-ацетатом, проводили по многостадийному способу, представленному на схеме 1. Сначала был синтезирован 1,3-диоксоиндоизолин-2-ил-ацетат согласно методике из [10]. Для получения соединений 6 и 7 сначала 1,3-диоксоиндоизолин-2-ил-ацетат 1 обрабатывали с гидроксидом натрия в водно-спиртовом растворе, образуя 1,3-диоксоиндоизолин-2-ил-ацетат натрия (4).

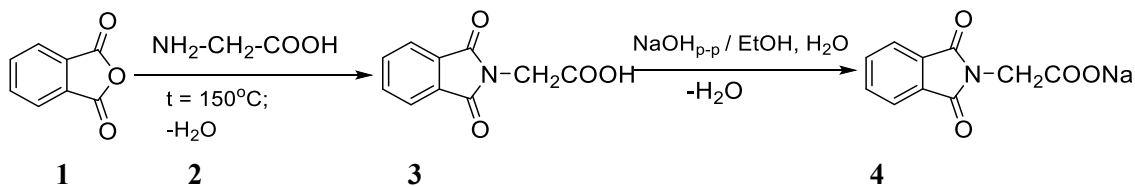


Схема 1. Синтез 1,3-диоксоиндоизолин-2-ил-ацетата 3 и 1,3-диоксоиндоизолин-2-ил-ацетата натрия 4.

При варьировании натриевой соли 1,3-диоксоиндоизолин-2-ил-ацетата (4) с 2-бром- и 2,5-дибром-6-(пара-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазолом (5а-*b*) в этиловом спирте при температуре растворителя получается единственный продукт: 6-(пара-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоиндоизолин-2-ил)ацетат (6) и 5-бromo-6-(пара-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоиндоизолин-2-ил)ацетат (7) с выходом 67-68%. Атомы брома в 5-й позиции имидазольного фрагмента соединений 5 и в 4-й позиции фенильной группы этих соединений не подвергаются реакции нуклеофильной замены.

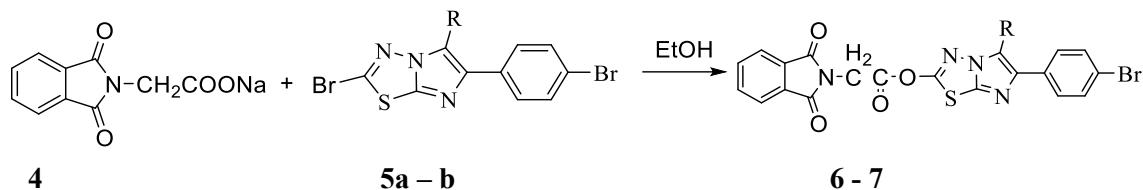


Схема 2. Синтез 6-(*para*-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоиндоизолин-2-ил)ацетата (6) и 5-бromo-6-(*para*-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоиндоизолин-2-ил)ацетата (7).

Однако при попытке использования соли глицината натрия с соединениями 5а-*b* в водно-спиртовом растворе при комнатной температуре и при нагревании получается маслянистый продукт, который трудно идентифицировать. Известно, что глицинат-ион обладает более выраженными основными свойствами по сравнению с глицином, и, вероятно, при взаимодействии соединений 5а-*b* с глицинат-ионом происходит раскрытие гетероциклического кольца. Эти результаты показывают, что эффективностью синтеза продуктов для получения соединений 6 и 7 является блокировка аминной группы глицина ангидридом фталата и получение натриевой соли 1,3-диоксоиндоизолин-2-ил-ацетата.

Строение полученных соединений 6 и 7 было установлено с помощью ИК-спектра и подтверждено элементным анализом. Ход реакции и чистота продуктов контролировались с использованием метода ТСХ на стекловато-полиэстерной пластине «Silufol 254UV» в йодной камере.

В ИК-спектре 6-(*para*-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоиндоизолин-2-ил)ацетата (6) в кристаллическом состоянии наблюдается полоса поглощения в области 1694 см⁻¹ для C=N-фрагмента тиадиазольного цикла, а полоса поглощения для C=N-фрагмента имидазольного кольца проявляется в области 1580 см⁻¹. Полоса поглощения в области 1441 см⁻¹ соответствует валентным колебаниям двойной связи C=C-фрагмента имидазольного кольца. Полоса поглощения C-S-C для тиадиазольного кольца была обнаружена в области 735 см⁻¹ (см. рис. 1).

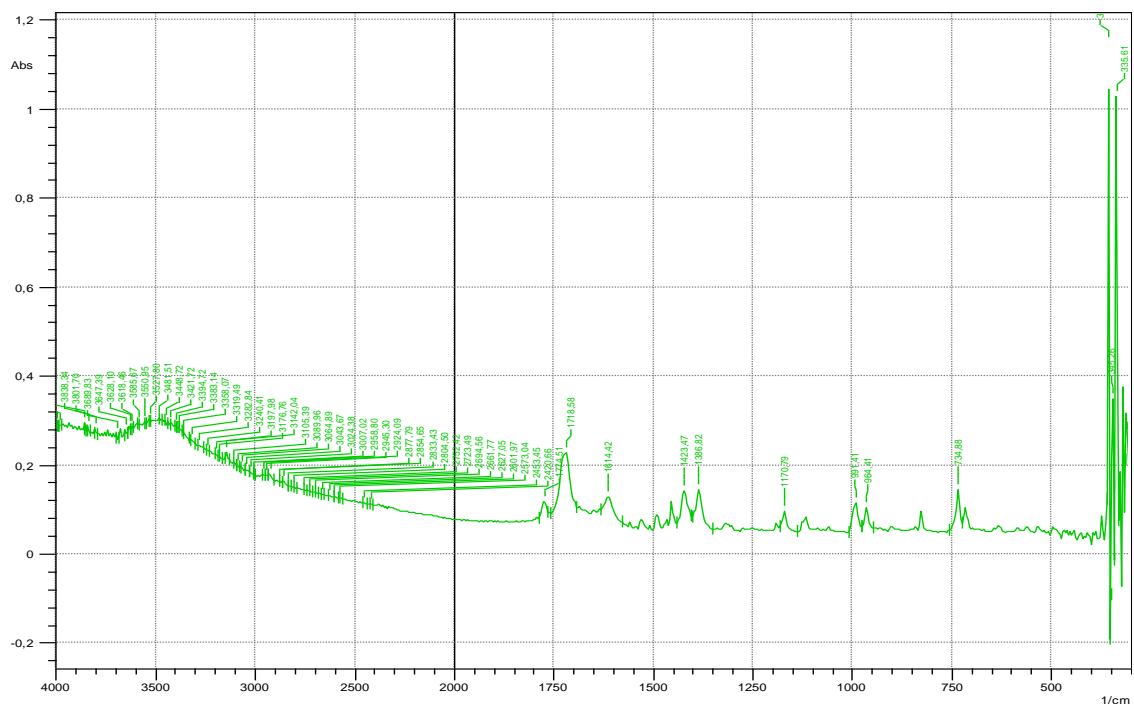


Рис. 1. ИК-спектр соединения 6-(*para*-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоиндоизолин-2-ил)ацетата (**6**).

В ИК-спектре соединения **6** наблюдаются интенсивные полосы в области 1757 см^{-1} , характерные для карбонильных групп фталимидового фрагмента, а для карбонильной группы ($\text{C}=\text{O}$)-O- сложноэфирного фрагмента 2-го положения тиadiaзольного фрагмента полоса поглощения наблюдается при 1719 см^{-1} . Полосы поглощения в области $1182\text{--}1350\text{ см}^{-1}$ относятся к сложноэфирной группе ($\text{C}=\text{O}$)-O-, что соответствует [15,16].

У соединения **6** присутствие замещенной фенильной группы наблюдается в полосе поглощения валентных колебаний CН в области 3051 см^{-1} . А также, в зависимости от количества атомов водорода, обнаружены плоские деформационные колебания в областях 1011, 1140, 991 и неплоские деформационные колебания в области 949, 964 см^{-1} , что свидетельствует о наличии заместителей в бензольном кольце [17-19].

По сравнению с соединением **6** у 5-бromo-6-(*para*-бромфенил)имидазо[2,1-*b*][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоиндоизолин-2-ил)ацетата (**7**) частота валентного колебания обнаружена в интенсивном виде.

Присутствие полосы поглощения для имидазо-тиадиазольного фрагмента наблюдается в области 1587 (C=N) , 1456 (C=C) , 1616 (C=N) , $637\text{ см}^{-1}\text{ (C-S-C)}$, а для *para*-бромфенильной группы, в зависимости от количества атомов водорода, обнаружены плоские деформационные колебания в областях 1123, 1074 и 976 см^{-1} , и неплоские деформационные колебания в области ниже 941 и 827 см^{-1} (рис. 2). Также, для $\text{C}_{\text{аром.}}=\text{C}_{\text{аром.}}$ в области полосы средней интенсивности $1631\text{--}1505\text{ см}^{-1}$ обнаружено оберточное валентное колебание *n*-бромфенила, что соответствует литературным данным [20-23].

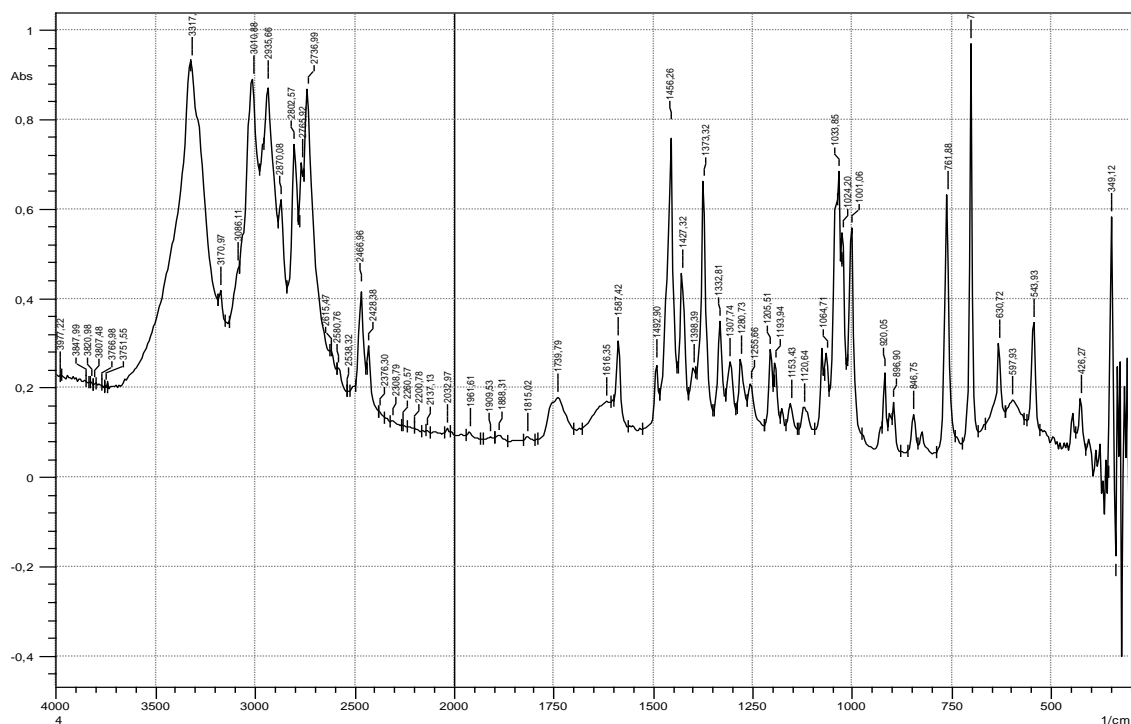


Рис. 2. ИК-спектр соединения 5-бromo-6-(*para*-бромфенил)имидазо[2,1-*b*]-[1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоиндоизолин-2-ил)ацетата (7).

Синтезированные соединения **6** и **7** представляют собой белые кристаллические вещества, растворимые в изопропанолe, N,N-диметилформамиде (ДМФА) и диметилсульфоксиде (ДМСО), малорастворимые в этаноле, хлороформе и ацетоне, нерастворимые в воде.

3. Материалы и методы.

Исходные соединения, использованные для синтеза, были очищены методом перекристаллизации. Чистоту исходного сырья и конечных продуктов предварительно проверяли методом тонкослойной хроматографии (ТСХ) в йодной камере.

Строение и чистота исследуемых соединений были подтверждены регистрациями и анализом спектров ИК, элементным анализом и ТСХ в йодной камере.

Температуру плавления измеряли с помощью микронагревателя "Voetus", прибора для измерения температуры плавления, основанного на методе стеклянных капилляров.

ИК-спектры измерялись в Научно-исследовательском институте при Таджикском национальном университете на FT-IR-спектрометре Shimadzu IR Spirit (Shimadzu Corporation, Колумбия, Южная Каролина, США) с использованием приставки QATR-S для измерения непрерывных инфракрасных спектров с одним отражением.

Элементный анализ полученных соединений был проведен в микроаналитической лаборатории Университета L'Aquila в Италии.

3.1. Синтез исходных соединений 3-4 и 5a,b.

Об исходных соединениях 3-4 и 5a,b ранее сообщалось в [10-11] и [17-18].

3.1.1. Реакция 1,3-диоксоиндоизолин-2-ил-ацетата натрия (2-(1,3-диоксоиндолин-2-ил)уксусной кислоты) с 2-бром-6-(пара-бромфенил)-имидазо[2,1-b][1,3,4]-тиадиазолом 5a (Синтез соединения 6).

К раствору 2-бром-6-(пара-бромфенил)имидазо[2,1-b][1,3,4]-тиадиазола 3 (0.01 моль) в 20 мл изо-бутанола добавляли свежеприготовленный водно-спиртовой раствор натриевой соли 2-(1,3-диоксоиндолин-2-ил)уксусной кислоты (0.01 моль), и смесь перемешивали при комнатной температуре в течение 15 минут, а затем кипятили с обратным холодильником в течение 2 часов. Твердый осадок отфильтровывали и высушивали на воздухе. Перекристаллизовывали из изо-бутанола. Выход 3.24 г (67%). Бесцветные кристаллы (из этанола). $T_{пл.} = 176-177^{\circ}\text{C}$. **Брутто-формула:** $\text{C}_{20}\text{H}_{11}\text{N}_4\text{O}_4\text{SBr}$, $M_r = 483$. **Найдено, %:** С, 49.62; Н, 2.29; Вг, 16.54; N, 11.67; S, 6.53. **Вычислено, %:** С, 49.68; Н, 2.27; Вг, 16.56; N, 11.59; S, 6.63. ИК-спектр, ν , см^{-1} : 1653 (C=N), 1508-(C=N), тиад-имид, 1489 для C=C – имид-фраг., 692 для C-S-C – тиад., 1884, 1848, 1456, 939 и 729 см^{-1} характерны для фталимидового фрагмента, 3028 для бензольного кольца, 1269-1352 (C=O)-O-.

3.1.2. Реакция 1,3-диоксоиндоизолин-2-ил-ацетата натрия с 5-бromo-6-(пара-бромфенил)имидазо[2,1-b][1,3,4]-тиадиазола 5b (Синтез соединения 7). Выход 3.82 г (68%). Бесцветные кристаллы (из этанола). $T_{пл.} = 185-187^{\circ}\text{C}$. **Брутто-формула:** $\text{C}_{20}\text{H}_{10}\text{N}_4\text{O}_4\text{SBr}_2$, $M_r = 562$. **Найдено, %:** С, 42.70; Н, 1.78; Вг, 28.47; N, 9.96; S, 5.69. **Вычислено, %:** С, 42.69; Н, 1.77; Вг, 28.44; N, 9.95; S, 5.68; ИК-спектр, ν , см^{-1} : 1597 (C=N), 1427 (C=C), 1624 (C=N), 637 см^{-1} (C-S-C), 1123, 1074 и 976 см^{-1} плоские деформационные колебания, ниже 941 и 827 неплоских деформационных колебаний, для $S_{аром.} = C_{аром.}$ 1631-1505 см^{-1} средней интенсивности для пара-бромфенильной группы, 1888, 1815, 1427, 920 и 750 см^{-1} характерны для фталимидового фрагмента, 3066 для бензольного кольца, 1261-1333 (C=O)-O-.

4. Выводы

1. Изучена реакция нуклеофильного замещения соединений 5a-b с натриевой солью 1,3-диоксоиндоизолин-2-ил-ацетата (4). Выявлено, что нуклеофильное замещение протекает региоселективно по атому C(2)-Br, а атомы брома, находящиеся в позиции C(5)-Br имидазольного фрагмента и позиции C(4)-Br фенильной группы, практически не затрагиваются.

2. Исследования ИК-спектра соединений 6 и 7 имеют характерную зависимость от их строения и могут быть использованы для идентификации данных соединений, а также для определения положения заместителей в имидазо[2,1-b][1,3,4]-тиадиазольном кольце.

3. Разработан удобный метод синтеза новых функционализированных производных имидазотиадиазолов, которые представляют собой ключевые соединения для исследования биологических свойств этих гетероциклов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andanappa K. Gadad, Malleshappa N. Noolvi and Rajshekhar V. Karpoormath. Synthesis and anti-tubercular activity of a series of 2-sulfonamido/trifluoromethyl-6-substituted imidazo[2,1-b][1,3,4]-thiadiazole derivatives. *Bioorg. Med. Chem.* 2004, V. 12, pp. 5651–5659.
2. Mohan, Jag; Kumar, Ashok. Condensed bridgehead nitrogen heterocyclic systems. Facile synthesis and antimicrobial activity of imidazo[2,1-b]-1,3,4-thiadiazoles. Department of Chemistry, M.D. University, Rohtak, India. - *Indian Journal of Heterocyclic Chemistry.* 2003, V. 13(2), pp. 101-104.
3. Gundurao K., Vinayak H., Imtiyaz Ahmed Khazi and Pramod Gadad. Synthesis and evaluation of anti-tubercular activity of imidazo[2,1-b]-[1,3,4]-thiadiazole derivatives. *Depart. of Chem. Karnatak Univers., Dharwad, India* 6. Januar 2006
4. Marin Asuncion, Valls Nativitat, Javier Berenguer Francisco, Alonson Maria Teresa, Ramon Martinez Antonio, Mercedes Martinez Maria, Elguero Jose. Aromatic systems with 10 electrons derived from 3a-azapentalene. XLIII. Synthesis and anthelmintic activity of carbamates derived from imidazo[2,1-b][1,3,4]thiadiazole and imidazo[2,1-b]thiazole. *Fac. Farm, Univ. Barcelona, Barcelona, Spain. Farmaco.* 1992, V. 47.1. pp. 63-75.
5. Ashour Fawzia A. Synthesis of some phenoxymethylbenzimidazole derivatives as potential antibacterial and antifungal agents. *Fac. Pharm., Univ. Alexandria, Alexandria, Egypt. Alexandria. - Journal of Pharmaceutical Sciences.* 1991, V. 5(1), pp. 16-20.
6. Mohan, Jag. Bridgehead nitrogen heterocyclic systems: Facile synthesis and antimicrobial activity of imidazo[2,1-b]-1,3,4- thiadiazole. Department of Chemistry, Maharshi Dayanand University, Rohtak, India. - *Indian Journal of Heterocyclic Chemistry.* 2000, V. 10(1), pp. 65-66.
7. Рахмонов Р.О., Куканиев М.А., Ходжибаев Ю.Х., Лангариева Д.С., Саидов Д.К. Синтез 2-этилметилсульфонил-5-бром-6-фенилимидазо[2,1-b]-1,3,4-тиадиазола. *Вестник Таджикского национального университета (научный журнал). Серия естественных наук. - Душанбе: «Сино».* 2012, с. 236-239.
8. Рахмонов Р.О., Куканиев М.А., Ходжибаев Ю., Саидов Д.К., Зоидова М.Т. Синтез и спектральная характеристика 2-фенилтио-5-бром-6-фенилимидазо[2,1-b]-1,3,4-тиадиазола. *ДАН РТ.* 2012, т. 55, №7, с. 573-576.
9. Худойбердизода С.У., Саидов Д.К., Рахмонов Р.О., Зоидова М.Т., Амонзода М.М.. Синтез и ИК-спектральная характеристика некоторых 5-замещенных производных новых модифицированных пара-Х-фенилимидазо-[2,1-b][1,3,4]-тиадиазола. *Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. - Душанбе «Сино».* 2016, № 1/2 (196), с. 167–173.
10. Кабирзода З.О. Синтез ва омӯзиши 1,3-дихлор-3-фталилглитсил-L-аланилдофаминпропанол-2. - *Паёми Донишгоҳи миллии Тоҷикистон. Бахши илмҳои табиӣ.* 2023, №1, с. 244-253.
11. Холиков М.Ф., Рахмонов Р.О., Шарипов Ш.С., Акбарова М.М. Синтез новых производных 6-(4-бромфенил)имидазо[2,1-b][1,3,4]-тиадиазолов на основе α-аминоацетат и фталевого ангидрида. – *Вестник Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных науки.* 2024, т.1, №1(37), с. 91-97.
12. Васильев А.В., Гриненко Е.В., Щукин А.О., Федупина Т.Г. Инфракрасная спектроскопия органических и природных соединений. Учебное пособие. – СПб.: СПбГЛТА, 2007, 54 с.
13. Наканиси К. Инфракрасные спектры и строение органических соединений. – М.: Изд-во «Мир», 1965, с. 32-47.
14. Агрономов А.Е.. Избранные главы органической химии. – М.: изд-во Московского университета, 1975.
15. Kamal F.M. Atta, Omaima O.M. Farahat. et al. Synthesis and Antibacterial Activities of Novel Imidazo[2,1-b]-1,3,4-thiadiazoles. – *J. Molekules.* 2011, N.16, pp. 5496-5506.

16. Рахмонов Р.О., Ходжибаев Ю., Зоидова М.Т., Акбарова М.М., Одилзода М.М. Синтез новых производных имидазо-[2,1-b][1,3,4]-тиадиазолов на основе 2-бром-6-п-Х-фенилимидазо-[2,1-b][1,3,4]-тиадиазолов. – Вестник Таджикского национального университета (научный журнал). Серия естественных наук. – Душанбе: «Сино». 2018, № 1, с. 169-177.
17. Рахмонов Р.О., Ходжибаев Ю., Зоидова М.Т., Розиков У.А., Одилзода М.М., Бандаев С.Г., Рахматуллоев Б.Ш. Синтез, исследование и ИК-спектральные характеристики галогеналкилпроизводных имидазо[2,1-b][1,3,4]-тиадиазолов. – Политехнический Вестник. Серия: Инженерные исследования. 2019, №1(45), с. 157-167.
18. Ходжибаев Ю., Рахмонов Р.О., Зоидова М.Т., Куканиев М.А., Атоликшоева С.Д., Абдиразоков А.А.. Синтез и ИК-спектральная характеристика 2-бром- и 2,5-дибром-6-(п-бромфенил)имидазо[2,1-b][1,3,4]тиадиазола. – ДАН РТ. 2012, т. 55, №10, с. 817-820.
19. Худойбердизода С.У., Саидов Д.К., Рахмонов Р.О., Зоидова М.Т., Амонзода М.М. Синтез и ИК-спектральная характеристика некоторых 5-замещенных производных новых модифицированных пара-Х-фенилимидазо[2,1-b][1,3,4]-тиадиазола. – Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2016, №1/2(196), с. 167-173.
20. Рахмонов Р.О., Розиков У.А., Шарипов Ш.С., Одилзода М.М., Акбарова М.М. Синтез и исследование в ряду имидазо[2,1-b][1,3,4]тиадиазола. – Colloquium-journal. 2018, № 5(16), с. 55-61.
21. Рахмонов Р.О., Ходжибоев Ю., Одилзода М.М., Розиков У.А., Шарипов Ш.С., Хабибзода С., Сафаров Б.Ф., Холиков М.Ф., Саидов С.С. Синтез и исследования в ряду имидазо[2,1-b][1,3,4]тиадиазола. – Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2019, №1, с. 193-201.
22. Наканиси К. Инфракрасные спектры и строение органических соединений. – М.: Изд-во «Мир», 1965, с. 32-47.
23. Тарасович Б.Н. ИК спектры основных классов органических соединений. Справ. материалы. – М., 2012, с. 55

М.Ф.ХОЛИКОВ, Р.О.РАХМОНОВ

**СИНТЕЗИ ВА ТАҲҚИҚИ 2-(1,3-ДИОКСОИЗОИНДОЛИН-2-ИЛ)
АТСЕТАТҲОСИЛАҲОИ 6-(ПАРА-БРОМОФЕНИЛ)ИМИДАЗО[2,1-b][1,3,4]-
ТИАДИАЗОЛ**

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,

Институти кимиёи ба номи В.И.Никитин АМИ Тоҷикистон

Тадқиқот оид ба функционализатсияи 2-бромо- ва 2,5-дибромо-6-(пара-бромофенил)имидазо[2,1-b][1,3,4]-тиадиазолҳо бо намаки натрии 1,3-диоксииндолин-2-ил-атсетат гузаронида шуд, ки дар натиҷа ду модификатсияи маҳсулот ба даст омад: 6-(пара-бромофенил)имидазо[2,1-b][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксииндолин-2-ил)-атсетат ва 5-бромо-6-(пара-бромофенил)-имидазо[2,1-b][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксииндолин-2-ил)-атсетат, ки дар мавқеи 2-юм гетеросиклҳо занҷири дароз дорад. Шароити таҷрибавӣ барои ҳар як пайвастагии аввалия тавассути тағйир додани таносуби пойгоҳи истифодашуда ва реагент роҳандозӣ карда шуд, ки дар натиҷа ҳосилаҳои алоҳидае, ки ба эҳтиёҷоти мушаххаси реактивӣ ва тозакунии онҳо мутобиқ карда шудаанд, таҳия карда шуд. Тавсифи сохтори маҳсулот бо истифода аз тайфҳои ИС дар шакли кристалл ва таҳлили

элементӣ анҷом дода шуда, холисият ва рафти реаксия тавассути ХТҚ дар «Silufol 254UV» дар камераи йоддор назорат карда шуд.

Калимаҳои калидӣ: 2-бромо-6-(пара-бромофенил)имидазо[2,1-б][1,3,4]-тиадиазол, 2,5-дибромо-6-(пара-бромофенил)имидазо[2,1-б][1,3,4]-тиадиазол, 1,3-диоксоиндо-изолин-2-ил-ацетата, 6-(пара-бромофенил)имидазо[2,1-б]-[1,3,4]тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоизоиндолин-2-ил)-ацетат, 5-бромо-6-(пара-бромофенил)имидазо[2,1-б][1,3,4]-тиадиазол-2-ил-2-(1,3-диоксоизоиндолин-2-ил)ацетат, тайфи ИС, таҳлилий элементӣ.

M.F.KHOLIQOV, R.O.RAKHMONOV

**SYNTHESIS AND STUDY OF 2-(1,3-DIOXISOINDOLIN-2-YL)-ACETATE
DERIVATIVES OF 6-(para-BROMOPHENYL)IMIDAZO[2,1-b][1,3,4]-
THIADIAZOLE**

*National Academy of Sciences of Tajikistan,
V.I.Nikitin Institute of Chemistry, NAS of Tajikistan*

A study was carried out on the functionalization of 2-bromo- and 2,5-dibromo-6-(para-bromophenyl)imidazo[2,1-b][1,3,4]-thiadiazoles with 1,3-dioxoindolin-2-yl sodium salt acetate, as a result of which two modifications of the products were obtained: 6-(para-bromophenyl)imidazo[2,1-b][1,3,4]-thiadiazol-2-yl-2-(1,3-dioxoisoindolin-2-yl)-acetate and 5-bromo-6-(para-bromophenyl)-imidazo[2,1-b][1,3,4]-thiadiazol-2-yl-2-(1,3-dioxoisoindolin-2-yl)-acetate, which has heterocycles of variable chain length in the 2nd position. Experimental conditions were optimized for each parent compound by varying the base used and reagent proportions, resulting in the development of separate protocols tailored to their specific reactivity and purification needs. Characterization of the structure of the products was carried out using IR spectra in crystal form and elemental analysis, and the identity and progress of the reaction were monitored by TLC in «Silufol 254UV» in an iodine chamber.

Key words: 2-bromo-6-(para-bromophenyl)imidazo[2,1-b][1,3,4]-thiadiazole, 2,5-dibromo-6-(para-bromophenyl)imidazo[2,1-b][1,3,4]-thiadiazole, 1,3-dioxoindolin-2-yl-acetate, 6-(p-bromophenyl)imidazo[2,1-b][1,3,4]-thiadiazole-2-yl-2-(1,3-dioxoisoindolin-2-yl)-acetate, 5-bromo-6-(p-bromophenyl)imidazo[2,1-b][1,3,4]-thiadiazole-2-yl-2-(1,3-dioxoisoindolin-2-yl)-acetate, IR-spectrum, elemental analysis.

Сведения об авторах:

Холиков Махмадулло Файзалиевич – Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистан, докторант PhD 3-го курса лаборатории химии гетероциклических соединений.

Рахмонов Рахмон Охонович – доктор химических наук, Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана, заведующий лабораторией ХГС. E-mail: r-rahmonov@mail.ru.

УДК 544

Специальность: 1.4.4 – Физическая химия

Т.М.УМАРОВА, И.И.НАСРУЛЛОЕВ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МОДИФИЦИРОВАНИЯ
ПРОМЫШЛЕННОГО СПЛАВА АК7 КРЕМНИЙСОДЕРЖАЩИМ
МАТЕРИАЛОМ ВЗАМЕН КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КРЕМНИЯ**

*Филиал Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова
в г. Душанбе*

Поступила в редакцию 25.07.2024 г.

В статье приводятся данные синтеза сплава с повышенным содержанием кремния на основе промышленного сплава АК7 с добавкой кремнийсодержащего материала взамен кристаллического кремния, что экономически выгодно. В работе дана сравнительная характеристика потенциально возможных к применению кремнийсодержащих материалов. Также представлены результаты РФА, металлографического и других методов физико-химического анализа синтезированных в лабораторных условиях сплавов.

Ключевые слова: АК7, кремнийсодержащий материал, синтез, рентгенофазовый анализ, металлографические исследования, плотность, микротвердость.

Введение

Разработка и изучение ресурсосберегающих способов синтеза сплавов остаётся актуальным вопросом, успех которых гарантирует преимущества в технологии производства конкурентоспособной продукции в металлургической и других отраслях, а значит и высокий экономический уровень. Наибольший интерес, на наш взгляд, в изучении данного вопроса представляют материалы на основе промышленных алюминиевых сплавов, из которых, согласно известной классификации, основную позицию удерживают сплавы системы Al-Si. Учитывая высокую стоимость первичных металлов, используемых в производстве алюминиевых сплавов, исследователи ищут возможность экономии металла путём получения (синтеза) силуминов на основе вторичного металло сырья, отходов производства

Адрес для корреспонденции: Умарова Татьяна Мухсиновна. 734003, Республика Таджикистан, ул. Бохтар 35/1. Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова в городе Душанбе. E-mail: umarova04@mail.ru.

с допированием модифицирующих добавок, других неклассических методов замены чистого кремния-как материала основы на более дешёвый и более доступный кремнийсодержащий материал.

Целью данной работы является синтез промышленного алюминиевого сплава марки АК7 с добавкой кремнийсодержащего материала (КСМ) взамен кристаллического кремния, что экономически оправдано.

Работа является продолжением исследований в области изучения промышленных алюминиевых сплавов [1-8].

Снижение себестоимости изготовления алюминиевых сплавов требуют от исследователя разработки новых, более эффективных методов переработки отходов на основе алюминия с использованием недорогих и доступных КСМ взамен кристаллическому кремнию. Так, авторами работы [9] показано, что согласно расчётам, показатели ресурсосбережения, значительно повышаются при получении высококремнистых силуминов.

Необходимо отметить, что теоретически в качестве КСМ возможно было применение кварцевого песка с высоким содержанием SiO_2 , который можно использовать для восстановления кремния расплавом алюминия [9]; кварцита, представляющего собой регионально метаморфизованную горную породу с зёрнами кварца от 0.1 до 1.0 мм, плотностью – 2.66 г/см³, кажущейся пористостью до 1.2%, водопоглощением 0.1÷0.5% и температурой начала расширения порядка 1150°C [10, 11]. Для кварцита характерна однородная мелкозернистая структура при его формировании в ходе преобразования древних кварцевых песчаников. По мере погружения в недра литосферы и перехода горных пород от аморфных, тонкодисперсных во всё более крупнокристаллические, химический состав меняется таким образом: увеличивается содержание SiO_2 и снижается содержание оксидов Al, Fe, Mg и Ca, в кварцит оксидов Na и K, (табл. 1) [12].

Таблица 1

Изменение химического состава горных пород, %

Части литосферы	SiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	FeO	MgO	CaO	Na_2O	K_2O
слоистая оболочка	58.11	15.40	6.70		2.44	3.10	1.30	3.24
базальт	50.00	16.48	4.22	6.80	6.30	9.72	2.78	1.24
гранит	70.00	14.30	1.54	1.58	0.74	1.82	3.62	4.02
кварцит	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Теоретически, для достижения цели данной работы возможно и использование кварцитовидных песчаников, образованных из кварцевых зёрен, но на практике, недостатком использования данных материалов является их высокая температура плавления (1700°C и выше), именно по этой причине в качестве кремнийсодержащего материала (КСМ), нами выбрана стекловолокно (СВ), по сути однотипный материал, с высоким содержанием кремния в виде оксида. Выбор кремнийсодержащего материала (КСМ) зависел

от двух факторов - от чистоты материала и максимального содержания оксида кремния. СВ, как известно, изготавливается из отходов стекольной промышленности и природного песка, в результате, материал представляет собой тончайшие волокна, связанные между собой. Как известно, данный материал может иметь структуру различной волокнистости - горизонтально-слоистую, вертикально-слоистую, гофрированную или пространственную, что позволяет расширить область её применения в различных конструкциях.

Экспериментальная часть

В качестве материала основы выбран промышленный сплав марки АК7 (чушка) ТАЛКО, соответствующая составу ГОСТ 1593-93.

Химический состав (%) сплава АК7 (ГОСТ 1593-93)

Fe	Si	Mn	Ni	Cu	Mg	Zn	Al	Примесей
до 1.3	6 - 8	0.2 - 0.6	до 0.3	до 1.5	0.2 - 0.5	до 0.5	87.6 - 93.6	3.3

Примечание: Al – основа; процентное содержание Al дано приблизительно. В чушках содержание магния 0.2-0.55%

Далее, в расплав АК7 вводили КСМ таким образом, чтобы содержание оксида кремния составляло 2% от общего веса промышленного сплава АК7.

Для синтеза и дальнейшего исследования физико-химических свойств сплава использованы следующие приборы и материалы: печь муфельная ПМ-8 013/262, расплавленный раствор заливали в стальную пресс-форму, сплавы охлаждали естественным путем на воздухе. Поверхность образцов шлифовали абразивным материалом различной дисперсности до достижения зеркальной поверхности с целью дальнейшего проведения микроструктурного анализа с использованием известных реактивов для травления алюминиевых сплавов [13]. Металлографические исследования проводились на металлографическом микроскопе Полам Р-12.

Изучение морфологии и определение состава проводилось на сканирующем электронном микроскопе JSM-35CF JEOL с Si(Li) - энергодисперсионным спектрометром и системой анализа ISIS Link Oxford при ускоряющем напряжении 20 кВ и токе зонда 1 нА; для получения дифрактограмм из нескольких образцов сплава, вид которых представлен на рис. 1, был получен порошок материал, рентгеновская порошкограмма изучалась на дифрактометре ДРОН-3 (Cu – анод, Ni – фильтр, скорость счётчика – 1 градус/мин).



Рис. 1. Сплав №2 (АК7+1 г СВ) а - вид исходного образца; б - образец сплава 2 после полировки.

Микротвёрдость образца измеряли на ПМТ-3, тарированном по NaCl, плотность образца измерена методом гидростатического взвешивания в воде. Изображения в отраженном свете получены с помощью металлографического микроскопа при объективе 40^x с окуляром 10^x.

Результаты исследования

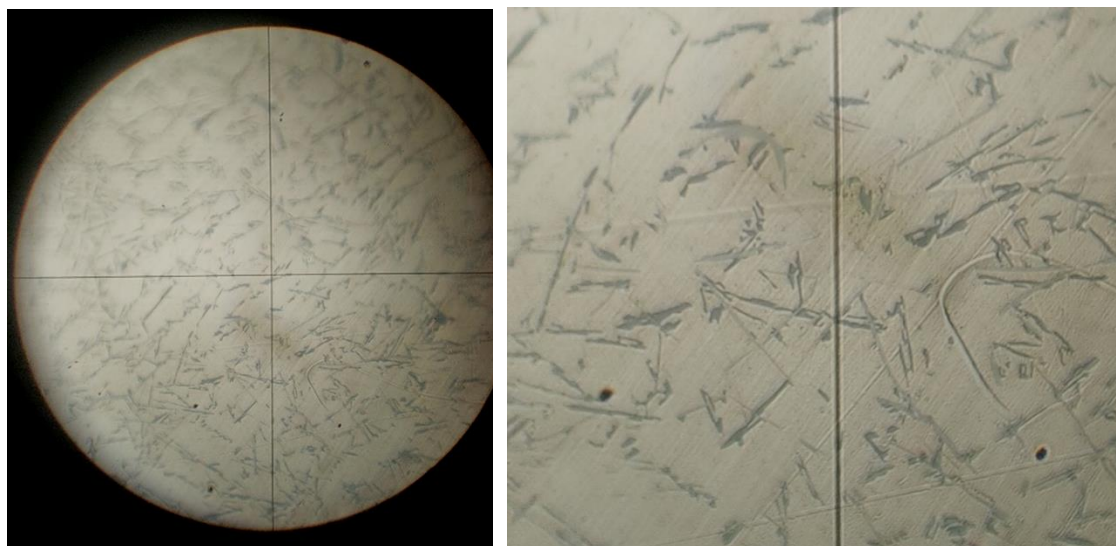
В результате исследования плотность образца №2 оказалась равной 2.63 г/см³. Микротвёрдость по 6 замерам при нагрузке 15 г равна VHN 55 (разброс 48-63) (табл. 2).

Металлографические исследования образца сплава №2 показали, что полированный образец (аншлиф) сплава в отраженном свете неоднородный и с поверхности имеет разные цвета и отражения (рис. 2а), который подтверждается также картинками в отраженных электронах BSE полученных с помощью сканирующего электронного микроскопа (рис. 3).

Таблица 2

Микротвёрдость образца сплава №2.

AK7-2%CB		
№	нагрузка (грамм)	микротвёрдость VHN
1	15	61
2	15	48
3	15	57
4	15	50
5	15	63
6	15	53



а

б

Рис. 2. Участок полированной поверхности образца: а – изображение в отраженном свете при одном никеле; б – фрагмент предыдущего снимка (увеличение 400X (объектив 40x - для отраженного света))

Соответственно, также участки полированной поверхности образца отличаются по своему химическому составу и кристалломорфологическими свойствами (рис. 4, 5, 6).

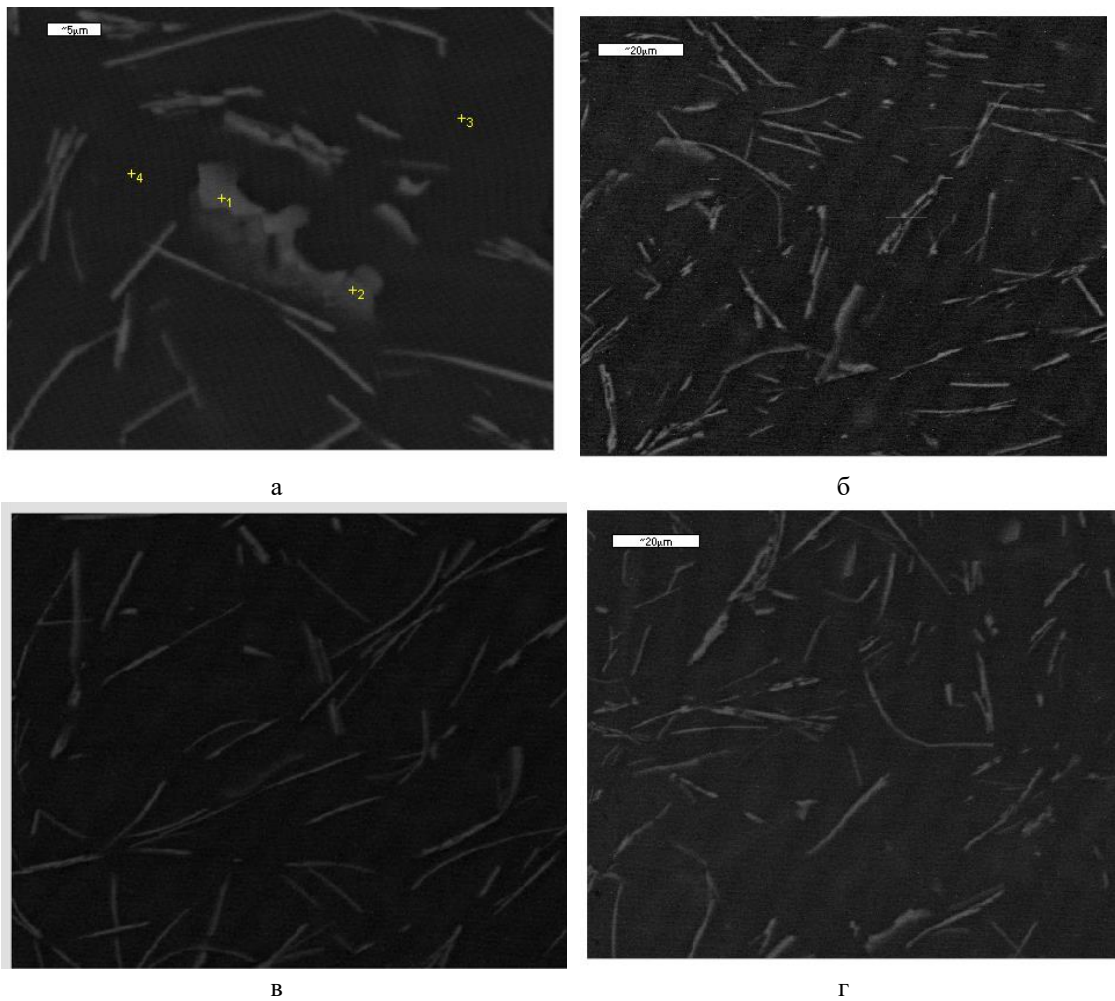


Рис. 3. Изображения участков образца сплава № 2 с полированной поверхности в отраженных электронах BSE.

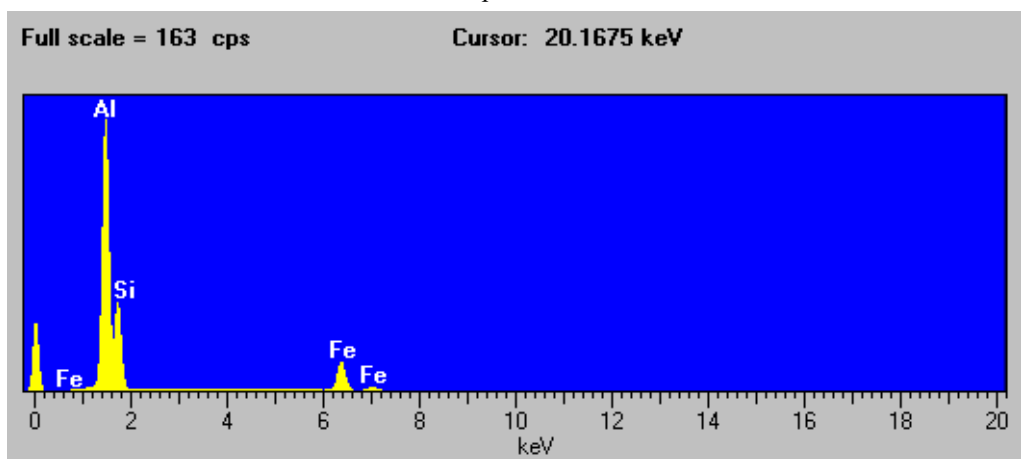


Рис. 4. Энергодисперсионный спектр образца № 2 (точки 1-2).

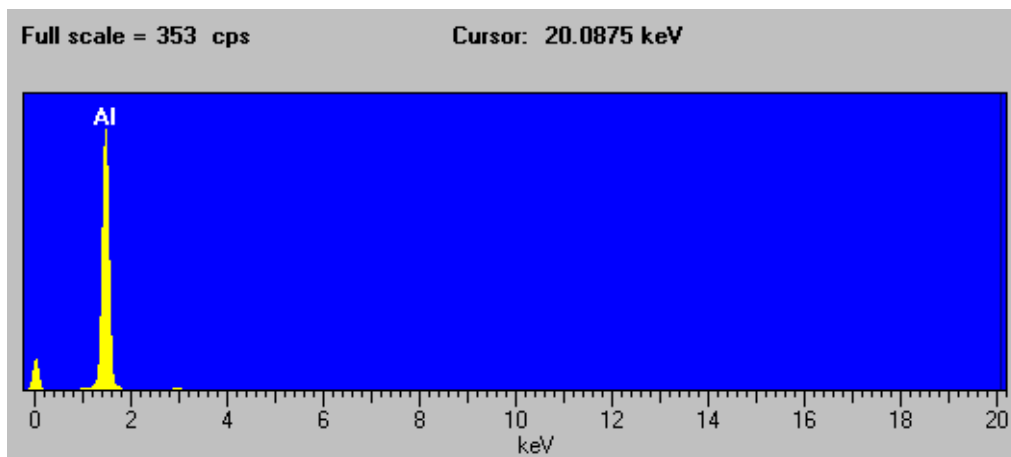


Рис. 5. Энергодисперсионный спектр сплава № 2 (точки 3-4).

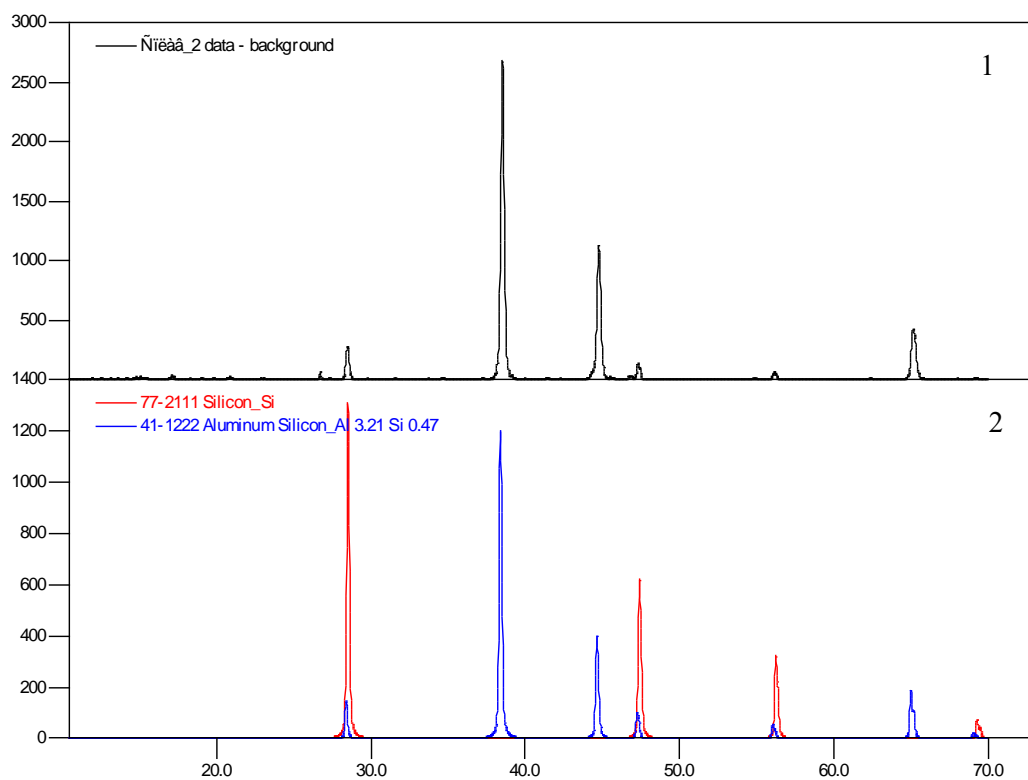


Рис. 6. Рентгеновские дифрактограммы:

- 1 – рентгенограмма исследуемого образца (черного цвета);
- 2 – рентгенограмма синтетического кремния (Si) (красного цвета) и силицида алюминия $Al_{3,21}Si_{0,47}$ (синего цвета) из рентгеновской базы в качестве сравнения.

Обсуждение результатов

По своему химическому составу исследуемый образец отличается тем, что белые участки состоят из Al, Si, и Fe (рис. 4, табл. 3), а тёмно-серые участки содержат только алюминий (табл. 4) и других элементов на чувствительности энергодисперсионного спектрометра в них не было обнаружено (рис. 5).

Методом РФА, в образце исследуемого сплава определено химическое соединение силицида алюминия (рентгенограмма соответствует соединению $Al_{3.21}Si_{0.47}$ (рис. 6, синий) и металлический кремний, рентгенограмма которого также соответствует синтетическому кремнию (Si) (рис. 6, красный).

На рентгеновской дифрактограмме образца промышленного сплава марки АК7 с 2% СВ (черного цвета) в интервале $10-25^\circ$ присутствуют ещё несколько слабых линий (малой интенсивности) других фаз, которых расшифровать не удалось.

Таблица 3

Химический состав (мас., %) образца сплава АК7+СВ

1.				2.			
Elmt	Type Spect.	Element %	Atomic %	Elmt	Type Spect.	Element %	Atomic %
Al K	ED	54.49	60.07	Al K	ED	55.49	60.55
Si K	ED	30.72	32.53	Si K	ED	30.69	32.18
Fe K	ED	13.88	7.39	Fe K	ED	13.79	7.27
Total		99.09	100.00	Total		99.97	100.00

Номера соответствуют участкам анализа (точки 1-2), показанных на рис 5а (белые участки).

Таблица 4

Химический состав (мас. %) образца сплава АК7+СВ

3.				4.			
Elmt	Spect. Type	Element%	Atomic%	Elmt	Spect. Type	Element %	Atomic %
Al K	ED	99.17	100.00	Al K	ED	98.36	99.67
Fe K	ED	0.00	0.00	Fe K	ED	0.67	0.33
Total		99.17	100.00	Total		99.03	100.00

Номера соответствуют участкам анализа (точки 3-4), показанным на рис 5а (тёмно-серые участки) (белые участки)

Выводы

В результате проведенных исследований выявлено следующее:

- введение кремнийсодержащего материала в виде СВ даже в содержании до 1% в расплав промышленного сплава марки АК7 оказалось целесообразным, что даёт возможность в перспективе изучить влияние концентрации вводимого кремния (в виде СВ взамен чистого кремния) на свойства промышленного силумина;

- рентгенофазовым анализом показано, что модифицирование промышленного сплава марки АК7 оксидом кремния в виде СВ приводит к образованию

интерметаллического соединения ИМС $Al_{3.2}Si_{0.47}$, что положительно сказывается на свойствах данного сплава согласно правилу Курнакова (при образовании химического соединения мы имеем максимум на диаграмме «свойства-состав»);

- модифицированный в лабораторных условиях силумин марки АК7 с добавкой СВ имеет пониженное значение плотности 2.63 г/см^3 , что имеет важное значение при использовании его в качестве конструкционного материала в авиационной и автомобильной промышленности (ответственные детали, работающие под нагрузкой - детали самолётов, карбюраторов и др.).

В заключении, выражаем благодарность старшему научному сотруднику Института геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии Национальной академии наук Таджикистана Миракову М.А. за помощь в проведении физико-химического анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Умарова Т.М., Трубнякова Э.Д., Ганиев И.Н. Электрохимическое исследование медистых силуминов модифицированных стронцием. – ЖПХ (г. Санкт-Петербург), 1987, №9, с. 2111-2115.
2. Умарова Т.М., Семенова О.Н., Ганиев И.Н. Физико-химические свойства модифицированных стронцием цинковистых силуминов. – Передовой опыт (ДСП), 1987, №7.
3. Умарова Т.М., Ганиев И.Н., Семенова О.Н., Махмудов М. Механические и литейные свойства модифицированных стронцием медистых и цинковых силуминов. – Литейное производство, 1988, №6, с.10-12.
4. Мирзоев Б., Мирзоев К., Умарова Т.М. Фракционирование и проведение химического анализа технологической пробы метаморфических пород. – Материалы V-ой ежегодной научно-практической конференции «Ломоносовские чтения», посвященной 260-летию МГУ имени М.В. Ломоносова. Душанбе, 22-23 апреля 2016 г., с.42-45.
5. Умарова Т.М., Пирназарова З.Н. Влияние легирования на промышленный сплав Д21. – Материалы IV Международной научно-практической конференции «Роль женщин-учёных в развитии науки, инноваций и техно-логий» (15-17 августа 2023 г.). г. Худжанд, Согд. обл., 2023, с. 117-125.
6. Умарова Т.М., Пирназарова З.Н. Синтез и РФА промышленного сплава Д21 легированного ниобием. - Материалы научно-практической конференции «XIII Ломоносовские чтения», посвященной 115-летию академика Б. Гафурова. (28-29 апреля 2023). – Душанбе: Типография ФМГУ, Ч. 3: Естественные науки. 2023, с. 207- 213.
7. Умарова Т.М. Разработка конструкционного материала на основе отходов алюминиевого производства. – Материалы Международной научно-практической конференции «Развитие энергетики и возможности», 22 декабря 2020г., Кушониёнский р-он, 2020, с. 407-413.
8. Умарова Т.М., Насруллоев И.И. Синтез сплавов алюмоматричной композиции Al-SiO₂ – Известия Национальной Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2024, №1 (194), с.73-80.
9. Арабей А.В., Рафальский И. В., Немененок Б.М. Синтез сплавов системы Al-Si из алюмоматричных композиций, полученных с использованием отходов алюминия и кварцевого песка. – Металл и литье Украины, 2013, № 4 (239), с. 3-7.
10. Upadhyay S. R., Surendra N. Tewari, Ghodes M., Grugel R.N., Poirier D.R., and Lauer M. Primary Dendrite Trunk Diameter in Al-7wt% Si Alloy Directionally Solidified Aboard the International Space

- Station. – IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 529 (2019) 012022. Doi:10.1088/1757-899X/529/1/012022.
11. Кремний: свойства, получение, применение: учеб. пособие. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2008, 271 с. Выплавка технического кремния: учеб. пособие. 2-е изд. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 1997, 243 с.
 12. Кварцит: свойства минерала, его происхождение, способы добычи. <https://artstonegroup.ru/tehnology/kvartsit-svoystva-minerala-ego-proishozhdenie-sposoby-dobychi/>
 13. Коваленко В.С. Металлографические реактивы. – М.: Metallurgia, 1981, 120 с.

Т.М.УМАРОВА, И.И.НАСРУЛЛОЕВ

ОМУЗИШИ ТАЪСИРИ ИСЛОҶИ ХҶЛАИ САНОАТИИ АК7 МАВОДИ КРЕМНИЙДОР БА ҶОИ КРЕМИНИИ КРИСТАЛӢ

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе

Дар мақола маълумот оид ба синтези хӯлаи дорои миқдори зиёди кремний дар асоси хӯлаи саноатии АК7 бо илова намудани маводи кремнийдор ба ҷои кремнийи кристаллӣ оварда шудааст, ки аз ҷиҳати иқтисодӣ фойданок аст. Дар қор тавсифи муқоисавии маводҳои эҳтимолии истифодашавандаи кремний оварда шудааст. Натиҷаҳои дифраксионии рентгенӣ, металлографӣ ва дигар усулҳои таҳлили физикию химиявии хӯлаҳои дар шароити лабораторӣ синтезшуда низ оварда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: АК7, маводи кремнийдор, синтез, таҳлили марҳилаи рентгенӣ, таҳқиқоти металлографӣ, зичӣ, микросахтӣ.

T.M.UMAROVA, I.I.NASRULLOEV

STUDY OF THE EFFECT OF MODIFICATION OF INDUSTRIAL ALLOY AK7 WITH SILICON-CONTAINING MATERIAL INSTEAD OF CRYSTALLINE SILICON

Lomonosov Moscow State University in Dushanbe

The article presents data on the synthesis of an alloy with an increased silicon content based on the industrial alloy AK7 with the addition of a silicon-containing material instead of crystalline silicon, which is economically advantageous. The work provides a comparative characteristic of potentially applicable silicon-containing materials. The results of X-ray diffraction, metallographic and other methods of physicochemical analysis of the alloys synthesized in laboratory conditions are also presented.

Key words: AK7, silicon-containing material, synthesis, X-ray phase analysis, metallographic studies, density, microhardness.

Сведения об авторах:

Умарова Татьяна Мухсиновна – доктор технических наук, Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе, главный специалист отдела науки, инноваций, международных связей и издательской деятельности. E-mail: umarova04@mail.ru

Насруллоев Исмоил Иброхимович – Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе, выпускник направления «Химия, физика и механика материалов». E-mail: ismoilnasrulloev58@gmail.com

УДК 5456.54.54-162.541-67

Специальность: 1.4.4 – Физическая химия

В.А.НОВОЖЕНОВ, А.Б.РОШКАЛАЕВА, В.П.СМАГИН, М.Т.НОРОВА*, И.Н.ГАНИЕВ**,
О.В.БЕЛОВА, И.А.ШМАКОВ

СИНТЕЗ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГАЛЛАТОВ ЕВРОПИЯ СО СТРУКТУРАМИ ПЕРОВСКИТА И ГРАНАТА

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия,

**Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана,*

***Национальная академия наук Таджикистана,*

***Институт химии им. В.И.Никитина НАН Таджикистана*

Поступила в редакцию 31.05.2024 г.

Методом совместного соосаждения из смеси растворов нитратов европия и галлия, с последующим прокаливанием полученных смесей оксидов при 800°C, получены галлаты европия с перовскитной и гранатной структурами. Методами рентгеноструктурного анализа исследованы параметры кристаллической решетки галлатов европия EuGaO_3 с ортогональной кристаллической структурой, с параметрами: $a=0.50000$ нм, $b=0.75651$ нм, $c=0.52128$ нм и $\text{Eu}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ с кубической структурой граната с параметрами кристаллической решетки: $a = b = c = 1.24027$ нм. Истинная плотность полученных галлатов составляет 6.678 г/см³ (перовскит) и 6.035 г/см³ (гранат). Измерено активное и реактивное электросопротивление поликристаллических образцов галлатов европия в интервале температур 25-175°C при изменении частоты электрического тока от 50 Гц до 200 кГц. Построены зависимости активного и реактивного сопротивления от температуры и частоты тока.

Ключевые слова: галлат, европий, перовскит, гранат, активное сопротивление, реактивное сопротивление.

Введение

Галлаты редкоземельных элементов – это тройные соединения редкоземельных элементов с галлием и кислородом с различными кристаллическими решетками.

Адрес для корреспонденции: Норова Муаттар Турдиевна. Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана, 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Борбад, 48/5. E-mail: muattar_1975@mail.ru

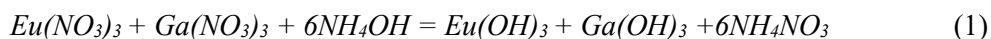
Перовскитоподобные и гранатоподобные оксиды, особенно соединения со слоистой структурой, являются объектом пристального внимания ученых, что связано с наличием у них комплекса свойств, перспективных для применения в химической промышленности, микроэлектронике и оптоэлектронике [1-4]. Редкоземельные гранаты ($RE_3M_5O_{12}$, в которых $RE = Eu, Gd, Lu \dots$ и т.д, или Y и $M = Ga, Al$ или Fe) привлекли значительное внимание благодаря их применению в области твердотельных лазеров, микроволн, ультразвуковых устройств и оптических датчиков давления [3].

Галлаты европия с перовскитной и гранатной структурой изучены недостаточно. Так, хорошо изучены структурные данные [6-8]. Сведения об электросопротивлении галлатов европия со структурами перовскита и граната в литературе не приведено, за исключением исследования перовскита европия [9].

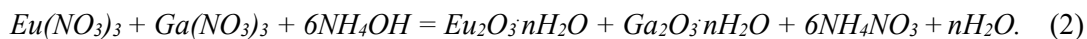
Целью нашей работы являются синтез и исследование кристаллической структуры и электросопротивления галлатов европия с мольными соотношениями $Eu_2O_3:Ga_2O_3$, равными 1:1 и 3:5, соответствующие составам $EuGaO_3$ (структура перовскита) и $Eu_3Ga_5O_{12}$ (структура граната).

Экспериментальные результаты и их обсуждение

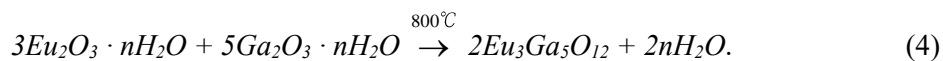
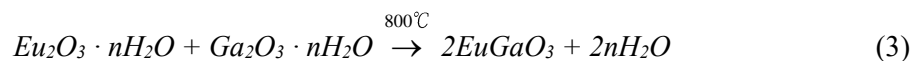
Галлаты европия со структурами перовскита и граната получены по аналогичной методике, приведенной в [10], методом химического соосаждения из нитратов европия (III) и галлия и прокаливанием в течение 24 часов при $800^\circ C$. Химические реакции синтеза имеют вид:



или



Смесь $Eu_2O_3 \cdot nH_2O$ и $Ga_2O_3 \cdot nH_2O$ подсушили на воздухе. Затем полученный порошок прокаливался в течение 24 часов при $800^\circ C$ в муфельной печи:



Фазовый состав устанавливали методом РФА, который проводили на рентгеновском дифрактометре «XRD-6000» (производитель – «Shimadzu», Япония) на CuK_α -излучении. Дифрактограммы $EuGaO_3$ (а) и $Eu_3Ga_5O_{12}$ (б) приведены на рис. 1.

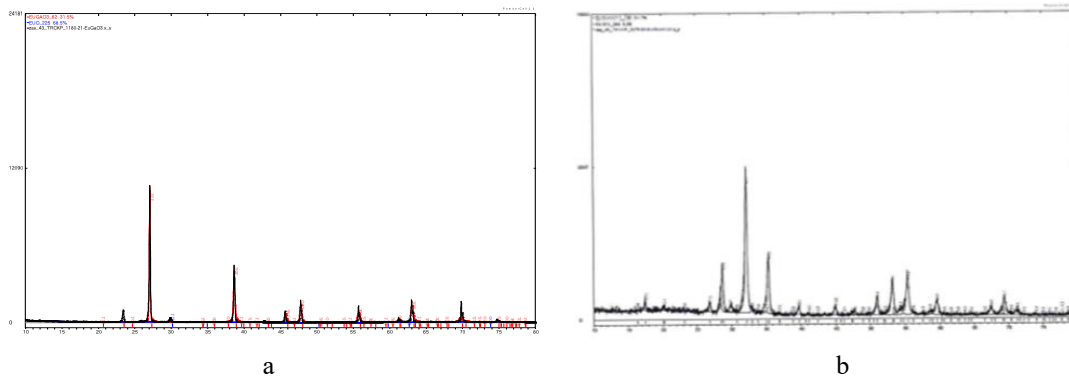


Рис. 1. Дифрактограммы галлатов EuGaO_3 (а), $\text{Eu}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ (b).

Полученные галлаты имеют структуры перовскита EuGaO_3 и граната $\text{Eu}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ соответственно.

Галлат EuGaO_3 имеет структуру перовскита орторомбической симметрии с параметрами кристаллической решетки $a=0.5000$ нм, $b=0.75651$ нм, $c=0.52128$ нм, которые удовлетворительно совпадают с данными параметрами перовскита, приведенными в литературе [11Gtiller]: $a=0.5351$ нм $b=0.7628$ нм, $c=0.5521$ нм. В качестве примеси (5%) обнаружен оксид EuO кубической структуры с параметрами $a=0.51298$ нм, что хорошо совпадает с данными, приведенными в [12, 13] $a=0.5131$ нм и [14] $a=0.5152(2)$ нм.

Галлат $\text{Eu}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ имеет кубическую структуру граната с параметрами кристаллической решетки: $a=1.24027$ нм. В результате реакции в продуктах содержалось 94% галлата и 6% оксида европия Eu_2O_3 . Параметры кристаллической решетки хорошо совпадают с параметрами кристаллической решетки граната кубической структуры, приведенной в [6-8]: $a=b=c=1.2413$ нм [6], $a=b=c=1.241$ нм [7], $a=b=c=1.24027$ нм [8].

В качестве примеси обнаружен оксид Eu_2O_3 кубической структуры с параметром $a=1.0853$ нм, что близко к величине параметра кристаллической структуры Eu_2O_3 , приведенной в [14]: $a=1.0860$ нм.

Пикнометрическая плотность полученных галлатов также близка к литературным данным: для перовскита $d_{\text{пикн.}} = 6.678$ г/см³ и $d_{\text{пикн.}} = 6.035$ г/см³ для граната. Для сравнения, литературные значения для галлата европия со структурой граната составляют от 6.92 г/см³ до 6.97 г/см³ [6, 8], а плотность перовскита $\rho = 6.61$ г/см³ [14] и 7.94 г/см³ [14,15].

Электросопротивление галлатов европия исследовано слабо, влияние на сопротивление температуры и частоты электрического тока практически не исследовано. В работе [9] проведено такое исследование для галлата европия с перовскитной структурой для образцов, полученных прессованием при 2000 кг/см².

Для определения электросопротивления (активного и реактивного) образца в зависимости от температуры и частоты тока использовали прецизионный измеритель параметров RLC-компонентов «АМ-3016» фирмы «Актаком» [16] по методике, описанной в [17].

Базовая погрешность прибора составляет $\pm 0.05\%$, а точность установки частоты варьируется в пределах $\pm 0.02\%$. Образец помещали в термостат марки «Mitaform».

Активным сопротивлением называется та часть полного сопротивления цепи, энергия которой полностью преобразуется в иные виды энергии (химическую, механическую или тепловую). Отличительным свойством данной активной составляющей является полное потребление всей электрической энергии (то есть, эта энергия обратно в сеть не возвращается). При этом реактивная составляющая электросопротивления часть энергии в электрическую сеть возвращает обратно (это свойство реактивного сопротивления называют «отрицательным») [18].

Сопротивление любой проводящей среды также может значительно изменяться в зависимости от частоты и величины тока, температуры и сечения образца. Отметим, что разные среды обладают разными носителями зарядов (такowymi считаются так называемые «дырки» в полупроводниках, ионы в электролитах или свободные электроны в металлах). Вид носителей - один из важнейших факторов сопротивления. Поэтому измерения были сделаны при следующих частотах: 50 Герц, 1, 50, 100, 150 и 200 кГц и при температурах: 25°C, 50°C, 100°C, 125°C, 150°C и 175°C.

Для измерения сопротивления были подготовлены под давлением 5000 кг/см² цилиндрические образцы. Для измерения использовали 4 зондовый метод. Полученные величины сопротивления пересчитали в значения удельного сопротивления, измеряющегося в Ом·м. Именно удельное сопротивление является характеристикой вещества. Величины удельного активного и реактивного сопротивлений галлата со структурой перовскита при различных частотах приведены в табл. 1. Для галлата со структурой величины сопротивлений граната при различных частотах электрического тока приведены в табл. 1.

Величины активного и реактивного сопротивления галлата европия со структурой перовскита при различных температурах приведены в табл. 2. Для галлата со структурой граната величины сопротивлений при различных температурах приведены в табл. 3.

Изменение удельного активного и реактивного сопротивлений перовскита EuGaO_3 и граната $\text{Eu}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ от температуры и частоте тока 50 Герц (для перовскита) и 50000 Герц (для граната) приведены на рис. 2 и 3.

Как видно из табл. 1, для галлата EuGaO_3 изменение активного удельного сопротивления при одной температуре и различных частотах не является линейным, а имеет сложный характер. При 25°C активное удельное сопротивление уменьшается с увеличением частоты электрического тока от 50 герц (1490.9 кОм·м) до частоты 100000 герц (92.27 кОм·м), затем возрастает при частоте 150000 герц до 480.4 кОм·м и снова уменьшается до 35.3 Ом·м при частоте 200000 герц.

Таблица 1

Результаты измерения активного (R) и реактивного (X) сопротивления галлата европия перовскитной структуры EuGaO_3 при постоянной температуре и различных частотах электрического тока

T, °C	Частота. Герц $\pm 0.02 \%$	R _{акт.} уд. КОМГМ $\pm 0.05 \%$	X _{реакт.} уд. КОМГМ $\pm 0.05 \%$
25	50	1490.9	11.0
	1000	1935.2	254.4
	50000	120.9	-172.8
	100000	92.27	-81.1
	150000	480.4	-350.1
	200000	0.035	4.3
50	50	780.6	57.1
	1000	944.4	85.4
	50000	227.1	-483.5
	100000	48.3	-93.2
	150000	1023.3	-516.5
	200000	0.030	4.2
75	50	40.3	62.8
	1000	832.6	88.7
	50000	217.5	-35.1
	100000	97.8	-173.1
	150000	9.74	68.0
	200000	0.037	4.1
100	50	51.83	4.5
	1000	64.66	7.4
	50000	39.32	3.0
	100000	21.44	3.24
	150000	9.09	14.8
	200000	0.176	40.0
125	50	41.06	3.2
	1000	50.80	5.6
	50000	35.67	6.3
	100000	17.08	2.0
	150000	8.75	12.1
	200000	0.230	3.9
150	50	8272.4	-5606.6
	1000	1148.3	111.4
	50000	175.7	9.3
	100000	60.3	52.3
	150000	759.7	-177.1
	200000	0.029	4.3

Таблица 2

Результаты измерения активного (R) и реактивного (X) сопротивления галлата европия перовскитной структуры EuGaO_3 при постоянной частоте и различных температурах

Частота, Герц $\pm 0.02\%$	T, °C	R _{акт. уд.} кОм·м $\pm 0.05\%$	X _{реакт. уд.} кОм·м $\pm 0.05\%$
50	25	1490.9	11.0
	50	780.7	57.1
	75	40.3	62.8
	100	51.8	4.5
	125	41.1	3.2
	150	8272.4	-560.7
1000	25	1935.2	254.4
	50	944.4	85.4
	75	832.6	88.7
	100	64.66	7.4
	125	50.80	5.6
	150	1148.3	111.4
50000	25	120.9	-172.8
	50	227.1	-483.5
	75	217.5	-350.7
	100	39.3	3.0
	120	35.7	6.3
	150	175.7	9.3
100000	25	92.3	-81.1
	50	48.3	-93.2
	75	97.8	-173.1
	100	21.4	3.2
	125	17.1	2.0
	150	60.3	52.3
150000	25	480.4	-350.1
	50	1023.3	-516.5
	75	9.74	68.0
	100	9.09	14.8
	125	8.8	12.1
	150	75.97	-177.1
200000	25	35.3 Ом	4.3
	50	30.1 Ом	4.2
	75	36.6 Ом	4.1
	100	175.9 Ом	4.0
	125	230.1 Ом	3.9
	150	28.5 Ом	4.3

Несколько другое изменение удельного сопротивления мы наблюдаем при температуре 50°C. Сопротивление увеличивается от 780.6 кОм·м при 50 герц до 944.4 кОм·м при частоте 1000 герц, уменьшается до 48.3 кОм·м при частоте 100000 герц. Затем возрастает до 1023.3 кОм·м при 150000 герц и падает до 30.05 Ом·м при 200000 герц.

Аналогичное изменение сопротивления наблюдается при температуре 75°C: увеличение сопротивления от 40.3 кОм·м при 50 герц до 832.6 кОм·м при частоте 1000 герц, уменьшение сопротивления от 832.6 кОм·м до 36.6 Ом·м при частоте 200000 герц.

При температурах 100 и 125°C сходное изменение удельного сопротивления с изменением частоты электрического тока. Как и в предыдущих случаях сначала наблюдается рост сопротивления с увеличением частоты от 50 герц до 1000 герц и затем уменьшение его величины до 175.9 Ом·м при 100°C и 230.1 Ом·м при 125°C при частоте 200000 герц.

Несколько иное изменение удельного сопротивления наблюдается при 150°C. При этой температуре сопротивление уменьшается от 8272.4 кОм·м при 50 герц до 60.3 кОм·м при 100000 герц. При 150000 герц сопротивление возрастает до 759.7 кОм·м и уменьшается до 28.5 Ом·м при 200000 герц.

Таким образом из результатов измерения видно, что в целом удельное сопротивление при одинаковых температурах уменьшается при увеличении частоты тока от 50 герц до 2000000 герц. Самые низкие величины сопротивления наблюдаются при частоте 200000 герц.

Как видно из табл. 2, для галлата EuGaO_3 изменение активного удельного сопротивления при одной частоте и различных температурах тоже не является линейной функцией.

При частоте 50 герц с увеличением температуры от 25°C до 125°C активное удельное сопротивление EuGaO_3 уменьшается от 1490.9 кОм·м при 25°C до 41.1 кОм·м при 125°C. При 150°C сопротивление резко возрастает до 8272.4 кОм·м.

Аналогичное изменение удельного сопротивления наблюдается и при частоте 1000 герц. Сопротивление уменьшается от 1935.2 кОм·м при 25°C до 50.8 кОм·м при 125°C, резко возрастает до 1148.3 кОм·м при 150°C. При частоте 50000 герц изменение сопротивления от температуры, в целом, меньше, чем при 1000 герц, но изменяется аналогично. Сопротивление растет от 120.9 кОм·м при 25°C до 227.1 кОм·м при 50°C, затем уменьшается до 35.7 кОм·м при 125°C и увеличивается до 175.7 кОм·м при 150°C.

Изменение реактивного сопротивления с изменением температуры и частоты аналогично изменению активного сопротивления.

При частоте 100000 герц наблюдается другая зависимость изменения сопротивления от температуры: уменьшение от 92.3 кОм·м при 25°C до 48.3 кОм·м при 50°C, затем идет увеличение до 97.8 кОм·м при 75°C. Далее сопротивление уменьшается до величины 17.1 кОм·м при 125°C, с последующим увеличением до 60.3 кОм·м при 150°C.

При частоте электрического тока 150000 герц изменение сопротивления от температуры по характеру такое же, как и при 100000 герц. Сопротивление увеличивается до 480.4 кОм·м при 25°C до 1023.3 кОм·м при 50°C, затем уменьшается до 8.8 кОм·м при 125°C. И растет до 75.97 кОм·м при 150°C.

При частоте 200000 герц сопротивление уменьшается от 35.3 Ом·м при 25°C до 30.1 Ом·м при 50°C, затем возрастает до 230.1 Ом·м при 125°C и падает до 28.5 Ом·м при 150°C.

Таким образом, величины удельного активного сопротивления при одинаковых частотах, в целом, уменьшаются с увеличением температуры. Самые низкие величины удельного сопротивления наблюдаются при частоте электрического тока 200000 герц от 30.1 до 230.1 Ом·м для всех температур от 25 до 150°C. Самые высокие значения величин удельного сопротивления наблюдаются при частотах 50 и 1000 герц.

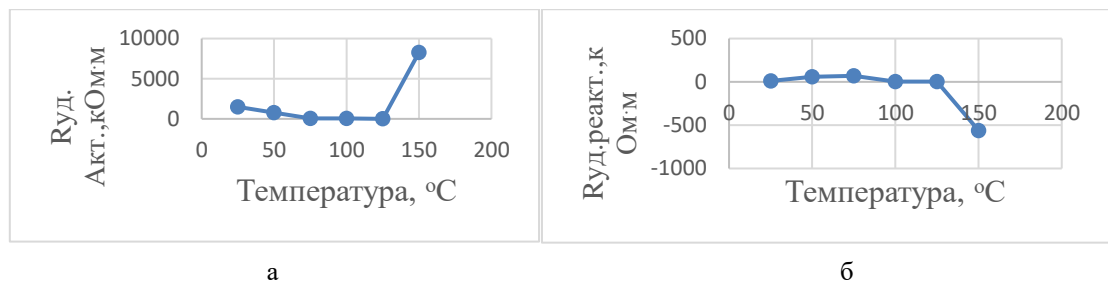


Рис. 2. Зависимость удельного активного сопротивления (а) и реактивного удельного сопротивления (б) перовскита европия EuGaO_3 от температуры при частоте тока 50 Герц.

Величины активного и реактивного удельных сопротивлений галлата европия со структурой граната при ведены в табл. 3.

Таблица 3

Величины активного R и реактивного X электросопротивления $\text{Eu}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$, измеренные при различных температурах T и частотах тока

T, °C	Частота, Гц ± 0.02 %	Удельное активное сопротивление, кОм·м ± 0.05 %	Удельное реактивное сопротивление, кОм·м ± 0.05 %
25	50000	202.3	-86.0
50		274.9	134.3
75		8.4	2.1
100		9.3	2.7
125		9.7	2.8
150		9.7	2.4
25	100000	34.2	1.4
50		42.0	6.5
75		5.7	4.5
100		6.2	5.3
125		6.4	5.4
150		6.5	5.2
25	150000	16.0	21.4
50		1.6	13.6
75		1.0	8.6
100		0.6	9.1
125		0.4	9.4
150		0.03	8.6
25	200000	0.07	2.8
50		0.08	2.7
75		0.04	2.6
100		0.02	2.6
125		0.02	2.6
150		0.5	2.5

Как видно из рисунка 3а, при 50°С происходит некий скачок активного электросопротивления. Это может объясняться происходящим фазовым переходом второго рода [18]. Причем, при 50, 100 и 200 кГц электросопротивление при данной температуре возрастает с последующим уменьшением, а при 150 кГц такой картины не наблюдается - на протяжении всей кривой значение активного сопротивления постепенно падает.

В целом, все кривые, приведенные на рисунке, указывают на уменьшение сопротивления при увеличении температуры, что доказывает полупроводниковые свойства материала образцов [19].

В отличие от металлов, активное сопротивление которых с увеличением температуры увеличивается, сопротивление полупроводников, в том числе синтезированных нами, с ростом температуры уменьшается. Дело в том, что электропроводность и, соответственно, электросопротивление любого материала зависит от заряда носителей тока, от скорости их направленного движения в электрическом поле и от числа этих носителей в единице объема вещества-полупроводника, то есть от концентрации. В полупроводниках с ростом температуры увеличивается концентрация носителей заряда (образуются дополнительные пары носителей), и это приводит к тому, что при нагреве возрастает электропроводность или, иначе говоря, снижается электросопротивление [19, 20].

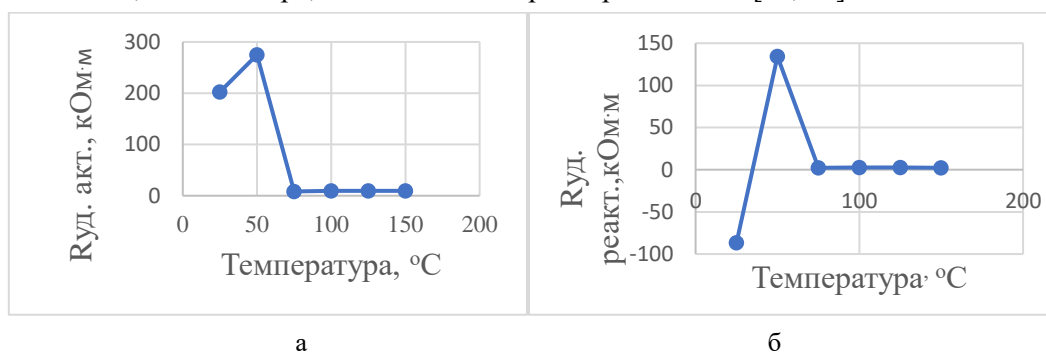


Рис. 3. Зависимость удельного активного сопротивления (а) и реактивного удельного сопротивления (б) граната европия $\text{Eu}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ от температуры при частоте тока 50000 Герц.

Таблица 4

Величины удельного активного сопротивления галлатов перовскитной и гранатной структуры при температуре 25 °С и различных частотах тока

Частота, Гц	50	1000	50000	100000	150000	200000
EuGaO_3	1490.9 кОм·м	1935.2 кОм·м	120.9 кОм·м	92.3 кОм·м	480.4 кОм·м	35.3 Ом·м
$\text{Eu}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$	111.0 кОм·м	17.6 кОм·м	202.3 кОм·м	34.2 кОм·м	16.0 кОм·м	70.0 Ом·м

При 25°С величины активного удельного сопротивления перовскита значительно выше, чем для граната, за исключением частот 50 кГц и 200 кГц (табл. 4). При этих частотах удельное сопротивление граната выше, чем для перовскита. В целом же величины

сопротивления уменьшаются с увеличением частоты электрического поля, особенно резкое уменьшения наблюдается при частоте 200 кГц. Аналогичная картина уменьшения удельного сопротивления наблюдается и при температуре 50°C (табл. 5).

Для галлатов европия уменьшение сопротивления и, соответственно, увеличение электропроводности с ростом температуры можно объяснить следующими соображениями. При образовании соединений между оксидами европия и галлия валентные электроны европия и галлия участвуют в образовании химической связи в галлатах. Электронная конфигурация атома европия имеет вид: $[Xe]4f^7 6s^2$. В такой конфигурации атом европия имеет свободный 5d-подуровень. Это устойчивая конфигурация, которой сочетаются наполовину заполненный 4f-подуровень, незаполненный 5d- подуровень и заполненный 6s-подуровень. Такие подуровни всегда отличаются повышенной устойчивостью [XX]. Устойчивость этой электронной конфигурации подтверждается и в случае галлатов европия. Электросопротивление данных соединений при нормальной температуре имеет величину для $EuGaO_3$ при частоте 50 герц более 1400 кОм·м, а у $Eu_3Ga_5O_{12}$, даже при частоте тока 50000 герц сопротивление более 200 кОм·м. Эта устойчивая электронная оболочка, видимо, сохраняется и при частоте 1000 Герц и температуре 25°C для $EuGaO_3$ (более 1900 кГц). Далее, с повышением температуры сопротивление уменьшается, что, видимо, связано с переходом электронов с 4f-подуровня на вакантный 5d-подуровень.

Сложнее объяснить увеличение сопротивления галлата европия с перовскитной структурой при частоте 150000 Герц. По-видимому, при данной частоте электронная структура европия приобретает некоторый «металлический» характер, так как увеличение сопротивления при увеличении температуры характерно для металлов [18].

Для галлата европия со структурой граната такое увеличение сопротивления наблюдается при частоте 50000 Герц.

Таблица 5

Величины удельного активного сопротивления галлатов перовскитной и гранатной структуры при температуре 50 °С и различных частотах тока

Частота, Гц	50	1000	50000	100000	150000	200000
$EuGaO_3$	780.7 кОм·м	944.4 кОм·м	227.1 кОм·м	48.3 кОм·м	1023.3 кОм·м	30.1 Ом·м
$Eu_3Ga_5O_{12}$	-	-	274.9 кОм·м	42.0 кОм·м	1.6 кОм·м	80.0 Ом·м

Величины удельного сопротивления галлатов и перовскитной структуры и гранатной структуры лежат в области полупроводниковых материалов 10^{-4} - 10^{10} Ом·м [18-21].

По результатам измерения электросопротивления по методикам, описанным в [20-22], оценена ширина запрещенной зоны полупроводника.

Ширина запрещенной зоны галлата $EuGaO_3$ имеет величины $\Delta E=0.37$ эВ при частоте тока 50 Герц при интервале температур 25-50°C, $\Delta E=0.87$ эВ и при частоте 50 герц и интервале температур 50-125°C. При частоте 1000 Герц и интервале температур 25-50 °С $\Delta E=0.41$ эВ, а в интервале температур 25-125°C $\Delta E = 0.71$ эВ. Но при частоте

электрического тока 150000 Герц $\Delta E = -0.41$ эВ в интервале температур 25-50°C, что подтверждает появление некоторой металличности в свойствах соединения и объясняет увеличение сопротивления полупроводника при частоте 150000 герц [21]. При $\Delta E < 0$ валентная зона и зона проводимости перекрываются. Пока это перекрытие не слишком велико, рассматриваемое вещество как бы оказывается полуметаллом [21].

Ширина запрещенной зоны галлата $\text{Eu}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ имеет величины $\Delta E=3.01$ эВ при частоте тока 50 кГц и температуре 25°C, $\Delta E=2.36$ эВ при частоте тока 50 кГц и температуре 50°C, $\Delta E=0.089$ эВ при частоте тока 50 кГц и температуре 75 °C. При изменении температуры полупроводника изменяется и амплитуда колебаний атомов кристаллической решетки. По этой причине с повышением температуры уменьшается ширина запрещенной зоны [18] и, соответственно, уменьшается сопротивление.

ЛИТЕРАТУРА

1. Портной К.И. Тимофеева Н.И. Кислородные соединения редкоземельных элементов. – М.: Металлургия, 1986, 480 с.
2. Middleton R.C., Muthu D.V.S., Kruger M.B. High-pressure spectroscopic studies of europium gallium and gadolinium aluminum garnets. *Solid State Communications* 148, 2008, pp. 310–313.
3. Lopez I., Lorenz K., Nogales E. Study of the relationship between crystal structure and luminescence in rare-earth-implanted Ga_2O_3 nanowires during annealing treatments. – *J. Mater. Sci.*, 2013, № 49, 2013, pp. 1279-1285.
4. Boulon G. Fifty years of advance in solidstate laser materials. – *Optical Materials*, 2012, Vol. 34, pp. 499–512.
5. Кандидатова И.Н., Башкиров Л.А., Галяс А.И., Лобановский Л.С., Труханов С.В. Кристаллическая структура и магнитные свойства твердых растворов $\text{Gd}_{1-x}\text{La}_x\text{MO}_3$ ($M = \text{Sc, In, Ga}$). – Труды БГТУ. Серия 3: Химия и технология неорганических веществ, 2013, с. 43–48.
6. Brusset H., Gillier Pandraud H., Saine M.C.: Etude de gallo-aluminates de lanthanides. – *Bulletin de la Societe Chimique de France*, 1969, pp. 2244-2249.
7. Kestigian M., Smith A.B., Bekebrede W.R.: Past, present and future small-bubble-diameter magnetic memory materials. – *Journal of Applied Physics*, 50, 1979, pp. 2161-2166.
8. Lin C.L., Li Y.C., Li X.D., Li R., Lin J.F., Liu J.: Pressure-induced structural evolution and amorphization in $\text{Eu}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$. – *Journal of Applied Physics*, 114:163521 2013, pp. 1-7.
9. Рошколаева А.Б., Новоженев В.А., Шмаков И.А. Исследование электросопротивления галлата европия со структурой перовскита. – Сборник научных статей XIV Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием «Технологии и оборудование химической, биотехнологической и пищевой промышленности» 19-21 мая 2021 года, г. Бийск, с. 79-82/ DOI: 10.25699/tohbipp.2021.11.27.006.
10. Пат. 2721700 Российская Федерация, МПК С 01 В 13/36, С 01 F 17/00, С 01 G 15/00. Способ получения галлатов неодима NdGaO_3 , $\text{Nd}_5\text{Ga}_3\text{O}_{12}$ и $\text{Nd}_4\text{Ga}_2\text{O}_9$. Новоженев В.А., Белова О.В.; патентообладатель фед. гос. бюджетное образоват. учреждение высшего проф. образования «Алтайский государственный университет» № 2019126486; заявл. 20.08.2019; опубл. 21.05.2020, Бюл. № 15. 10 с.
11. Geller S., Curlander P.J., Ruse G.F.: Perovskite-like rare earth gallium oxides prepared at atmospheric pressure. – *Materials Research Bulletin*, 9, 1974, 637-644.

12. Liu P., Tang J., Colon Santana J.A., Belashchenko K.D., Dowben P.A.: Ce-doped EuO: Magnetic properties and the indirect band gap. – Journal of Applied Physics 109:07C311 (2011) 1-3.
13. Miyazaki H., Ito T., Im H.J., Terashima K., Iizuka T., Yagi S., Kato M., Soda K., Kimura S.I.: Change of lattice constant due to hybridization effect of a ferromagnetic semiconductor EuO. – Journal of Physics Conference Series 200:012124 (2010) 1-4.
14. Taylor D.: Thermal Expansion Data: III Sesquioxides, M_2O_3 , with the corundum and the A-, B- and $C-M_2O_3$ structures. – British Ceramic Transactions and Journal 83 1984, pp. 92-98.
15. Jiang S., Bai L.G., Liu J., Xiao W.S., Li X.D., Li Y.C., Tang L.Y., Zhang Y.F., Zhang D.C., Zheng L.R.: The phase transition of Eu_2O_3 under high pressures. – Chinese Physics Letters 26:076101 2009, pp. 1-3.
16. Актаком. Прецизионный измеритель параметров RLC-компонентов АМ-3016: руководство по эксплуатации. – 2015. Доступ: https://www.aktakom.ru/kio/index.php?SECTION_ID=2116&ELEMENT_ID=11289668
17. Васильев И. Особенности измерения удельного и поверхностного сопротивления четырехзондовым методом. – Вектор высоких технологий, 2020, №2 (47), с. 7-14.
18. Гуфан Ю.М. Фазовые переходы второго рода. – Соросовский образовательный журнал, 1997, №7, с. 109-115.
19. Шалимова К.В. Физика полупроводников. – М.: Энергоатомиздат, 1985, 392 с.
20. Holland A.S., Pan Y., Alnassar N. M. S., Luong S. Circular test structure for determining the specific contact resistance of ohmic contacts. – Electronics and Energetics. 2017, №30, pp. 313–326.
21. Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г. Физика полупроводников. – М.: Наука, 1990, с.128-129.
22. Сундуков В.И. Температурная зависимость сопротивления полупроводника. – Казань, 2014, 2-е изд., перераб. и дополн, 11 с.

В.А.НОВОЖЕНОВ, А.Б.РОШКАЛАЕВА, В.П.СМАГИН, М.Т.НОРОВА*, И.Н.ГАНИЕВ**,
О.В.БЕЛОВА, И.А.ШМАКОВ

СИНТЕЗ ВА ХУСУСИЯТҲОИ ФИЗИКИЮ ХИМИЯВИИ ГАЛЛАТҲОИ ЕВРОПИЙ БО СОХТОРҲОИ ПЕРОВСКИТ ВА ГРАНАТ

Донишгоҳи давлатии Алтай, Барнаул, Россия,

**МД “Донишгоҳи байналмилалӣ сайёҳӣ ва соҳибкорӣи Тоҷикистон”,*

***Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон,*

***МДИ «Институти кимиё ба номи В.И.Никитин» АМИ Тоҷикистон*

Бо усули боҳамтаҳшинкунӣ аз омехтаи маҳлулҳои нитратҳои европий ва галлий, бо сипас ғудохта кардани омехтаҳои оксидҳо дар ҳарорати 800°C, галлатҳои европий бо сохторҳои перовскитӣ ва гранатӣ ба даст оварда шуданд. Бо усулҳои таҳлили рентгеноструктурӣ параметрҳои панҷараи кристаллии галлатҳои европий $EuGaO_3$ бо сохтори кристаллии ортогоналӣ, бо параметрҳои: $a=0.50000$ нм, $b=0.75651$ нм, $c=0.52128$ нм ва $Eu_3Ga_5O_{12}$ бо сохтори кубии гранатӣ бо параметрҳои панҷараи кристаллӣ: $a=b=c=1.24027$ нм таҳқиқ карда шуданд. Зичии ҳақиқии галлатҳои ҳосилкардашуда 6.678 г/см³ (перовскит) ва 6.035 г/см³ (гранат) - ро ташкил медиҳад. Муқовимати барқии ғабол ва реактивиҳои намунаҳои поликристаллии галлатҳои европий дар ҳудуди ҳарорати 25-175°C ҳангоми тағиребии басомади ҷараени барқ аз 50 Гц то 200 килогерс чен карда

шудааст. Вобастагии муковимати фаъол ва реактивӣ аз ҳарорат ва басомади ҷараён сохта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: галлат, европий, перовскит, гранат, муковимати фаъол, муковимати реактивӣ.

V.A.NOVOZHENOV, A.B.ROSHKOLAEVA, V.P.SMAGIN, M.T.NOROVA*, I.N.GANIEV**, O.V.BELOVA, I.A.SHMAKOV

SYNTHESIS AND PHYSICO-CHEMICAL CHARACTERISTICS OF EUROPIUM GALLATES WITH PEROVSKITE AND GARNET STRUCTURES

Altai State University, Barnaul, Russia,

**International university of tourism and entrepreneurship of Tajikistan,*

***National Academy of Sciences of Tajikistan,*

***V.I.Nikitin Institute of Chemistry, NAS of Tajikistan*

Europium gallates with perovskite and garnet structures were obtained by co-precipitation from a mixture of solutions of europium and gallium nitrates, followed by calcination of the obtained oxide mixtures at 800°C. Crystal lattice parameters of europium gallates EuGaO_3 with orthogonal crystal structure with parameters: $a=0.50000$ nm, $b=0.75651$ nm, $c=0.52128$ nm and $\text{Eu}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ with cubic garnet structure with crystal lattice parameters: $a = b = c = 1.24027$ nm were investigated by X-ray diffraction analysis. The true densities of the obtained gallates are 6.678 g/cm³ (perovskite) and 6.035 g/cm³ (garnet). The active and reactive electrical resistivity of polycrystalline samples of europium gallates in the temperature range of 25-175°C at changing the frequency of electric current from 50 Hz to 200 kilohertz has been measured. The dependences of active and reactive resistances on temperature and current frequency were plotted.

Key words: Gallate, europium, perovskite, garnet, active resistance, reactive resistance

Сведения об авторах:

Новоженов Владимир Антонович – доктор химических наук, профессор, Алтайский государственный университет, кафедра физической и неорганической химии химического факультета. E-mail: novozhenov@mail.asu.ru;

Рошколаева Анастасия Борисовна – Алтайский государственный университет, студентка кафедры физической и неорганической химии;

Смагин Владимир Петрович – доктор химических наук, Алтайский государственный университет, профессор кафедры техносферной безопасности и аналитической химии;

Норова Муаттар Турдиевна – доктор технических наук, Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана, профессор кафедры медицинского-курортного обслуживания. E-mail: muattar_1975@mail.ru;

Ганиев Изатулло Наврузович – доктор химических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, Институт химии В.И.Никитина НАНТ, зав. лабораторией. E-mail: ganievizatullo48@gmail.com;

Белова Ольга Владимировна – Алтайский государственный университет, ведущий инженер кафедры физической и неорганической химии.

Шмаков Игорь Александрович – Алтайский государственный университет, старший преподаватель кафедры вычислительной техники и электроники.

Р.М.АБДУЛВОХИДОВ, З.К.НАЗАРОВА

**НАУЧНЫЙ СЕМИНАР В ИНСТИТУТЕ АСТРОФИЗИКИ
НАН ТАДЖИКИСТАНА, ПОСВЯЩЕННЫЙ 110-ЛЕТИЮ АКАДЕМИКА
ОЛЕГА ВАСИЛЬЕВИЧА ДОБРОВОЛЬСКОГО**

*Национальная академия наук Таджикистана,
Институт астрофизики НАН Таджикистана*



Академик О.В.Добровольский

Научный семинар Института астрофизики НАНТ, посвященный 110-летию со дня рождения известного мирового астрофизика Олега Васильевича Добровольского, состоялся 21 ноября 2024 года.

В работе Научного семинара приняли участие известные учёные Института астрофизики НАНТ и гости. С вступительным словом выступила член-корреспондент НАНТ, доктор физико-математических наук Г.И.Кохирова. Она рассказала об истории астрономической науки в Таджикистане, о роли Олега Васильевича Добровольского в становлении и развитии науки астрономии, строительстве Гиссарской астрономической обсерватории и Института астрофизики НАНТ в Таджикистане, а также о становлении второй очереди Астрономической обсерватории на Санглоке.

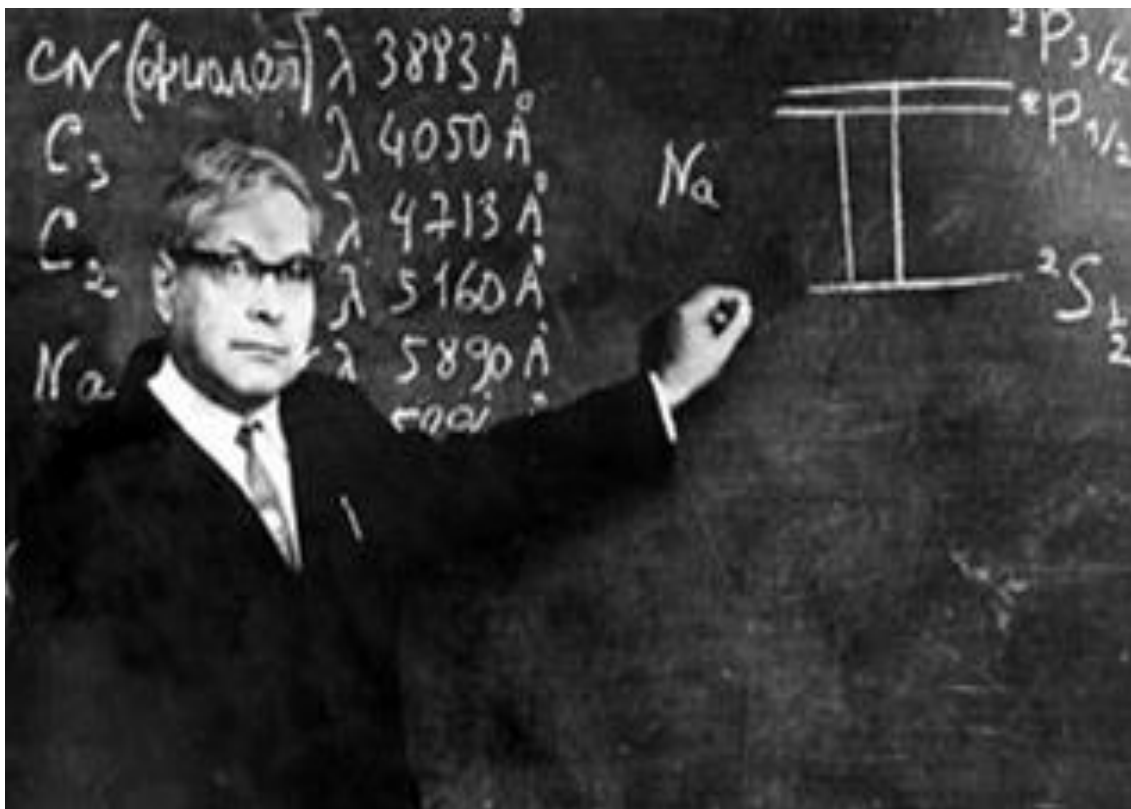
На семинаре научный сотрудник Отдела межпланетных тел Института астрофизики З.К.Назарова выступила с докладом на тему «Жизнь и деятельность академика Олега Васильевича Добровольского». В своем докладе она отметила биографию ученого О.В.Добровольского. Олег Васильевич Добровольский родился 29 ноября (12 декабря) 1914 года в Запорожье, в 1937 году завершил учебу в Киевском университете. В 1941 окончил аспирантуру при Пулковской обсерватории.

В это время, постановлением Совета Народных Комиссаров (СНК) Таджикской ССР от 13 ноября 1932 г. была образована астрономическая обсерватория как филиал базы АО Ленинградского университета.

Накануне войны (1941) был образован Таджикский филиал Академии наук СССР, что создало возможность из непосредственного подчинения СНК Таджикской ССР передать астрономическую обсерваторию в данный академический филиал, который до 1958

года назывался Душанбинская обсерватория, а затем Институт астрофизики при АН Тадж. ССР.

Как отметила З.К.Назарова, по историческим и архивным сведениям, в 1940 г. из ГАО АН СССР в ТАО был переведен один из самых перспективных учеников профессора К.Ф.Огородникова, молодой О.В.Добровольский, который с чистого листа и начал свою научную деятельность. На новой образованной Таджикской астрономической обсерватории (ТАО), наравне с О.В.Добровольским вели наблюдения такие ученые, как А.В.Соловьев, А.М.Бахарев, Чернов, К.А.Никитин и другие. Визуально наблюдались кометы Джонсона (1935 I), Пельтье (1936 II), Уиппла (1937 IV), Финслера (1937 V), Юрлова-Ахмарова-Хасселя (1939 III), Понса-Виннеке (в 1939 г.) и т.д.



С 1946 г. О.В.Добровольский возглавлял отдел кометной астрономии. Начиная с 1971-1977 гг. был назначен директором Института астрофизики АН Тадж. ССР, где начинается не только научная, но и его организаторская деятельность. В это время под его руководством начинается строительство второй очереди Гиссарской обсерватории института, а затем была заложена высокогорная обсерватория Санглок (на юге Таджикистана).

На данном семинаре с докладом на тему «Вклад Добровольского О.В. в становлении и развитии астрономической науки в Таджикистане» выступил к.и.н. Р.М.Абдулвохидов. Докладчик отразил основные этапы научной деятельности ученого в области астрономии по определению галактического поглощения, по статистике квазаров, ряда наблюдений телескопических метеоров и метеорных следов, его вклад в разработку теории диффузии метеорных следов, выполнении многочисленных фотометрических и ряда

спектральных наблюдений комет, изучения статистической связи кометных и солнечных явлений. Также докладчик отметил, что О.В.Добровольский являлся первым, кто обратил внимание на важную роль коллективных процессов в этих взаимодействиях.



О.В.Добровольский предложил теорию оптических плотных атмосфер комет как саморегулирующихся явлений, а также являлся инициатором лабораторного моделирования комет в СССР. В своей научной деятельности известный ученый моделировал сублимации гетерогенных кометных ядер под воздействием различных внешних факторов, подтвердивших предложенный им механизм разлома поверхностного слоя ядра комет под давлением скапливающегося под поверхностью газа, что в научных астрономических исследованиях комет считалось новаторством. Также, в течение всей своей деятельности О.В.Добровольский смог определить размеры и начальные скорости составляющих частиц пылевых оболочек в головах комет. Продолжая перечислять вклад О.В.Добровольского, следует отметить, что он являлся первооткрывателем многих других теорий, связанных с астрономической наукой в Таджикистане.

Докладчик Р.М.Абдулвохидов особо отметил деятельность О.В.Добровольского и всего коллектива ТАО в годы Великой отечественной войны, когда появилось множество сложностей, которые не были учтены. Это было время, когда все ресурсы были направлены на фронт для победы. Несмотря на это, многие научно-исследовательские институты на советском пространстве, в том числе и в Таджикистане, продолжали свою деятельность.



При этом они учитывали сложившуюся обстановку и приурочили к этому свои тематические исследования.

В эти тяжелые военные годы группе ученых в Таджикистане удалось сохранить техническую базу и небольшое количество ученых астрономов (10 человек), а также ударный ритм работы. Большая часть сотрудников обсерватории, в том числе астрономы К.А.Никитин, А.М.Бахарев, А.Ш.Музаффаров были призваны в армию. Другие члены Института, которые по состоянию здоровья не были призваны в армию, продолжили работу, в том числе и О.В.Добровольский. Именно в годы войны сложилась традиция упорной работы по данной науке в Таджикистане, которая как эстафета передавалась из поколения в поколение.

В послевоенные годы, в Таджикистане уже сложился сплоченный коллектив ученых астрономов высокой квалификации на основе Сталинабадской обсерватории, которая за это время выполнила свою программу минимум в становлении и развитии, выполнялась новая программа – максимум, то есть подготовка местных кадров. Благодаря упорному труду ученых, учитывая достижения в данной науке в Таджикистане, в 1958 году был образован Институт астрофизики при Таджикской Академии наук. Это было большим достижением советской науки по направлению астрономии. Были построены две астрономические обсерватории: Гиссарская астрономическая обсерватория и Высокогорная астрономическая обсерватория Санглок (2300 м над уровнем моря), оснащенная современным телескопом и другой аппаратурой.



За свою академическую деятельность в Таджикистане О.В.Добровольский был членом Международного астрономического союза (МАС) и Президиума комиссии 15 МАС, членом Международного комитета по исследованию космоса (КОСПАР), членом Астрономического совета АН СССР, председателем Рабочей группы «Кометы» Астросовета АН СССР, заместителем председателя Комиссии АН СССР по наземным наблюдениям кометы Галлея, ответственным редактором журнала «Кометы и метеоры», членом редколлегии журналов «Доклады Академии наук Таджикской ССР» и «Известия АН Таджикской ССР (Отделение физико-математических, химических и геологических наук)», членом редколлегии издания «Бюллетень Института астрофизики АН Таджикской ССР».

Правительство Таджикистана однозначно оценило труд великого ученого, астронома О.В.Добровольского. Он был награжден орденами «Дружба народов» и «Знак почета», медалями «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941-1945 гг.», «За доблестный труд» в ознаменование 100-летия со дня рождения В.И.Ленина, «30 лет победы в ВОВ», «Ветеран труда», «40 лет победы в ВОВ 1941-1945 гг.», двумя Почетными грамотами Президиума Верховного совета Республики Таджикистан, медалью «За обнаружение новых астрономических объектов» Астрономического совета АН СССР, золотой медалью Главного комитета ВДНХ СССР и другими медалями и грамотами. Международный астрономический союз высоко оценил вклад О.В.Добровольского в астрономическую науку, присвоив малой планете № 3013 имя «Доброволева» в его честь.

Таким образом, несмотря на большую дату 110-летия О.В.Добровольского, он как комета на ночном небе оставил свой след в познании и изучении астрономической науки в Таджикистане. Благодаря ему и братской помощи других ученых Ленинградского университета, таджикская астрономия получила свое развитие в довоенное, военное и послевоенное время, и успешно существует в наше время.

Редакция и корректура – Абдулаева С.Х.

Сдано в набор 28.11.2024 г. Подписано в печать 12.12.2024 г.
Печать офсетная. Формат 70×100 1/16. Гарнитура Times. Усл. печ. л.8. Заказ № ____.
Тираж 300 экз.

*Адрес редколлегии: 734025, Душанбе, пр.Рудаки, 33, каб. 35.
Тел.:2-21-37-49. E-mail: danrt@mail.ru
Издательство «Дониш»: 734029, Душанбе, ул.Айни, 121, корп.2.*
